كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⴳⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵓⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Centre d'Etude Doctorales : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

N° d'ordre : 71 /2019

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr. Ouadie Koubaiti

Discipline : Mathématiques appliquées

Spécialité : Equations aux dérivées partielles \ Méthodes numériques

Sujet de thèse :

Contribution au traitement des contraintes dues aux conditions aux limites standards dans le cadre de la méthode des éléments finis : Mini-élément et Web-spline

Thèse présentée et soutenue le 07 Décembre 2019 devant un jury composé de :

Nom Prénom	Titre	Etablissement	
Abdelatif EL MARJANI	PES	Ecole Mohammedia des Ingénieurs de Rabat	Président
Abdellatif EL AFIA	PES	Ecole Nationale Supérieure d'informatique et d'Analyse des Systèmes Rabat	Rapporteur
Jalil ABOUCHITA	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Rapporteur
Abdeslam EL AKKAD	PH	CRMEF Séfrou	Rapporteur
Hassan MOUSTABCHIR	PH	Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès	Examinateur
Ahmed ELKALFI J. EMEKKAOUI	PES PH	Faculté des Sciences et Techniques de Fès Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Directeur de thèse Co-Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : Génie Mécanique

Etablissement : Faculté des sciences et techniques de Fès

كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⴳⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵓⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Résumé de la thèse

Ce mémoire de thèse est organisé en trois chapitres. Il présente le problème des contraintes dues aux conditions aux limites standards. Il propose deux solutions pour éliminer ces contraintes.

La première solution est la proposition d'une nouvelle condition mathématique $C_{A,B}$ définie sur le bord du domaine Ω. Cette condition est un mixage de la condition aux limites de Dirichlet et la condition aux limites de Neumann. Ce mixage est fait à l'aide de deux matrices carrées et inversibles A et B. Elles sont appelées respectivement la matrice de Dirichlet et la matrice de Neumann.

La deuxième solution concerne la proposition d'une base d'approximation qui se compose de fonctions B-Spline pondérées et étendues (Web-Spline). Ces fonctions sont des B-Spline prolongées sur Ω et prennent des valeurs nulles ou non-nulles sur tout le bord du domaine étudié. Cependant, nous nous affranchissons les contraintes résultantes des conditions aux limites de Dirichlet homogène et non-homogène.

Dans le premier chapitre, nous exposons toutes les étapes pour la résolution de l'équation de Navier-Lamé avec des conditions aux limites standards en utilisant la méthode des éléments finis mixtes. Ces conditions aux limites produisent des difficultés lors de la résolution du problème de Navier-Lamé. Nous passons en revue les obstacles auxquels nous sommes confrontés à chaque étape de l'application de la méthode numérique proposée.

Le deuxième chapitre présente la nouvelle condition mathématique généralisée $C_{A,B}$. Elle est développée pour la résolution de l'équation de Navier-Lamé. Nous implémentons la méthode des éléments finis mixtes (P 1 + bubble, P1) pour résoudre le problème de Navier-Lamé en utilisant la nouvelle condition mathématique $C_{A,B}$. A chaque étape de la méthode numérique, nous démontrons les avantages de la condition mathématique $C_{A,B}$.

Les résultats numériques sont comparés avec ceux de la méthode du logiciel d'Abaqus et de la méthode des éléments finis ordinaires.

Dans le troisième chapitre, nous résolvons l'équation de Navier-Lamé en utilisant la méthode des éléments finis mixtes. Cette dernière se base sur un espace d'approximation engendré par des fonctions B-Splines étendues (Web-Spline). Avec cette méthode nous libérons les contraintes imposées sur le bord du domaine étudie. Des résultats numériques montrent que l'approche Web-Spline fournit une bonne solution approchée.

Mots-clés : Elasticité, La méthode des éléments finis, Mini élément, Web-spline ; Contraintes, Conditions aux limites standards, Condition aux limites généralisée $C_{A,B}$.

Dédicaces

Je dédie cette thèse à :

A mon père Abdellah

A ma mère Rahma

A mon épouse Merieme

A mes frères : Youness, Ali, Redouane et Abdessamad

A mes soeurs : Hanane et Houda

A la mémoire de ma grande mère Radia

A mes enfants : Sami, Oualid et Khadija

A tous ceux qui m'aiment

Remerciement

Je tiens à remercier le professeur Abdelatif EL MARJANI pour l'honneur qu'il me fait pour présider le jury. Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse le professeur Ahmed ELKHALFI et le professeur Jaouad El-MEKKAOUI le co-directeur qui m'ont apporté une aide très efficace grâce à ces nombreuses remarques pertinentes et ses précieux conseils qui m'étaient utiles tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie également les Professeurs : Abdellatif EL AFIA,Jalil ABOUCHITA, Abdeslam EL AKKAD pour avoir accepté de rapporter sur mon travail.

Je tiens à remercier également le professeurs : Hassan MOUSTABCHIR pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à ceux qui m'ont donné le sens de la vie : mes parents, à ceux qui m'ont encouragé tout au long de mes études : mes frères, mes soeurs et ma femme.

Je n'oublie pas le personnel du département de Génie Mécanique pour leur encouragement sympathique qui a contribué à ma motivation pour ce travail. Je les remercie pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils m'ont témoigné pour mes recherches.

Mes vifs remerciements vont également à tous les collègues doctorants et à tous mes collègues au Lycée oum banin de Fés pour leur soutien, leur encouragement et leur bonne humeur, ce qui m'a parfois permis de surmonter les moments difficiles.

Table des matières

1 Résolution de l'équation de Navier -Lamé avec des conditions aux limites ordinaires : les difficultés **17**

1.1 Introduction 17

1.2 Equation Modèle 23

1.2.1 Définition de l'équation de Navier Lamé et ses applications . . 23

1.2.2 Justification de l'équation de Navier Lamé 25

1.2.3 Conditions aux limites liées au système de Navier-Lamé 28

1.3 Difficulté de contraintes due aux conditions aux limites ordinaires . . 30

1.3.1 Difficulté du choix de l'espace fonctionel adéquat au problème faible 30

1.3.2 Difficulté du choix de l'espace approché 31

1.3.3 Difficultés de l'insertion des contraintes dans le systéme matriciel 38

1.4 Résultats numériques 44

1.5 conclusion 46

2 Résolution de l'équations de Navier-Lamé avec la nouvelle C.L. généralisée $C_{A,B}$ **48**

2.1 Introduction 48

2.1.1 Nouvelle condition généralisée $C_{A,B}$ 49

2.2 Avantage de la condition généralisée au niveau du problème faible . . 52

2.2.1 Possibilité du choix d'un espace fonctionel moins contraignant 52

2.2.2 Existence et unicité de la solution faible 54

2.3 Approximation par éléments finis mixtes 64

2.3.1 Choix d'un espace approché moins contraignant 64

2.3.2 Exclusion des degrés de liberté associés aux bulles 73

2.3.3 Problème algébrique 75

2.4 Résultats numériques 87
2.5 Conclusion 91

3 Résolution du problème de Navier-Lamé par éléments finis mixtes Web-spline en utlisant la C.L généralisée $C_{A,B}$ 93

3.1 Introduction 93
3.2 Solubilité pour le système de point selle généralisé 97
3.3 Procédé WEB-Spline 103
3.4 La condition aux limites adaptée $C_{A,B}$ 108
3.5 Discrétisation du problème Navier Lamé en utilisant la base WEB-Spline 110
3.5.1 Elément constant - linéaire 111
3.5.2 Élément quadratique-linéaire 111
3.6 La forme matricielle du problème de Navier Lamé 117
3.7 Résultats numériques 120
3.8 Conclusion 124

Résumé

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Il présente le problème des contraintes dûes aux conditions aux limites standards. Il propose deux types de solution pour éliminer ces contraintes.

La première solution est la proposition d'une nouvelle condition mathématique $C_{A,B}$ définie sur le bord du domaine Ω. Cette condition est un mixage de la condition aux limites de Dirichlet et la condition aux limites de Neumann. Ce mixage est fait à l'aide de deux matrices carrées et inversibles A et B. Elles sont appellées respectivement la matrice de Dirichlet et la matrcie de Neumann.

La deuxième solution concerne la proposition d'une base d'approximation qui se compose de fonctions B-spline pondérées et étendues (Web-spline). Ces fonctions sont des B-spline prolongées sur $\overline{\Omega}$ et prennent des valeurs nulles ou non-nulles sur tout le bord du domaine étudié. Cepandant, nous nous affranchissons les contraintes résultantes des conditions aux limites de Dirichlet homogène et non-homogène.
En effet, dans le premier chapitre, nous exposons toutes les étapes pour la résolution de l'equation de Navier-Lamé avec des conditions aux limites standards en utilisant la méthode des éléménts finis mixtes. Ces conditions aux limites produisent des difficultés lors de la résolution du problème de Navier-Lamé. Nous passons en revue les obstacles auxquels nous sommes confronté à chaque étape de l'application de la méthode numérique proposée.
Le deuxième chapitre presente la nouvelle condition mathématique généralisée $C_{A,B}$. Elle est développée pour la résolution de l'équation de Navier-Lamé. Nous implémentons la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$ pour résoudre le problème de Navier-Lamé en utilisant la nouvelle condition mathématique $C_{A,B}$. À chaque étape de la méthode numérique, nous démontrons les avantages de la condition mathématique $C_{A,B}$.
Les résultats numériques sont comparés avec ceux de la méthode du logiciel d'Abaqus et de la méthode des éléménts finis ordinaires.
Dans le troisième chapitre, nous résolvons l'equation de Navier-Lamé en utilisant la méthode des éléménts finis mixtes. Cette dernière se base sur un espace d'approximation engendré par des fonctions B-splines étendues (Web-spline). Avec cette méthode nous libérons les contraintes imposées sur le bord du domaine étudié.
Des résultats numériques montrent que l'approche Web-spline fournit une bonne solution approchée.

Abstract

This thesis is organized in three chapters. It presents the problem of constraints due to standard boundary conditions. It also presents two types of remedies for these constraints.

The first remedy is the proposition of a new mathematical condition $C_{A,B}$ defined on the edge of the Ω domain. This condition is a mix of the Dirichlet boundary conditions and the Neumann boundary conditions. This mix is done using two invertible square matrices A and B. They are respectively called the Dirichlet matrix and the Neumann matrices.

The second remedy is the proposition of an approximation base which consists of extended weighted B-spline functions (Web-spline). These functions are B-spline extended on $\overline{\Omega}$ and take null or non-null values over the entire edge of the domain, which makes us get rid of constraints resulting from Dirichlet boundary conditions (homogeneous, non-homogeneous).

Indeed, in the first chapter, we expose all the steps for solving the Navier-Lamé equation with a standard boundary condition using the mixed finite element method. We review the obstacles we face at each stage of the application of the proposed numerical method.

To remedy these problems, we propose in the second chapter the new generalized mathematical condition $C_{A,B}$. It is then developed for the Navier-Lamé equation. We implement the mixed finite element method $(P1 + bubble, P1)$ to solve the Navier-Lamé problem by using the new mathematical condition $C_{A,B}$. At each step of the numerical method, we demonstrate the advantages of the mathematical condition $C_{A,B}$.

The numerical results are compared with those of the Abaqus system method and the ordinary finite element method.

In the third chapter, we propose the resolution of the Navier-Lamé problem by using the mixed finite element method. This method is based on the approximation space formed by extended B-Spline functions (Web-spline). Because of the benefits of getting rid of constraint problems imposed on the edge of the domain.

Numerical results show that Web-splines provide a good approximate solution.

Notation

Δ	Opérateur Laplacien
$\nabla.$	Opérateur divergence
∇	Opérateur gradient
FEM	Méthode des éléments finis
MFEM	Méthode des éléments finis mixtes
Web-spline	Les B-spline étendues pondérées
CAM	Fabrication assistée par ordinateur
CAD	Conception assistée par ordinateur (CAO)
EDP	Équation aux dérivées partielles
Mini-élément	$(P1 + bubble, P1)$ élément fini mixte
2D	Deux dimensions
NURBS	Les B-splines rationnelles non uniformes,
B-splines	Les spline de Bézier
spline	une fonction définie par morceaux par des polynômes
Ω	Le domaine étudié
Abaqus	Progiciel de calcul d'éléments finis
$\Gamma = \partial\Omega$	Le bord du domaine Ω
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω
$\mid \Omega \mid$	Air de domaine Ω
f	Représente une densité de forces extérieures
B^t	Transposé de la matrice B
$H^1(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\ \}$
$H^1_0(\Omega)$	$\{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u d\Omega = 0\}$
$H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$	Le dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	espace de Sobolev fractionnaire
$L^2(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus \int_\Omega u^2 d\Omega < \infty\}$
$L^2_0(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus \int_\Omega u d\Omega = 0\}$
$<,>_\Gamma$	le produit scalaire sur $L^2(\Gamma)$
$(,)_\Omega$	le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$
∂K	Le bord de l'élément K
$\| \, . \, \|_{1,\Omega}$	$(\int_\Omega \nabla u : \nabla u d\Omega + \int_\Omega u.u d\Omega)^{\frac{1}{2}}$
$\| \, . \, \|_{0,\Omega}$	$(\int_\Omega u.u d\Omega)^{\frac{1}{2}}$
$\mid . \mid_{1,\Omega}$	$(\int_\Omega \nabla u : \nabla u d\Omega)^{\frac{1}{2}}$

Notation

C.L.	Condition aux limites
C.L.standards	Conditions aux limites standards
$\mathbb{C}$	tenseur de matériau isotrope d'ordre 4
ε	tenseur des déformations
σ	tenseur des contraintes
$tr\varepsilon$	La trace du tenseur des déformations
I	La matrice identité d'ordre 2
Γ_N	La partie du bord où il y a la condition de Neumann
Γ_D	La partie du bord où il y a la condition de Dirichlet
Mu	Le produit matriciel de la matrice M et le vecteur u
$u.v$	Le produit scalaire des veceurs u et v
$\overline{A}^{\|.\|_{1,\Omega}}$	L'adhérence de l'espace A pour la topologie de la norme $\| \, . \, \|_{1,\Omega}$
La norme matrcielle $\|\|\| A \|\|\|$	$\max A_{i,j}$
$\oplus$	La somme directe
$D^{\perp}$	L'espace orthogonal de D
Imf	$\{f(x) \setminus f : E \to F, x \in E\}$
$\delta_{,j}$	La fonction de Kronecker
A^{-1}	L'inverse de la matrice A
V'	L'espace dual de V
$h\mathbf{Z}^2$	$\{(nh, mh) \setminus n, m \in \mathbf{Z}\}$
$supp(f)$	le support de la fonction f
$A = \{a_k\}_{k \in K}$, $\| A \|$	$(\sum_{k \in K} \|a_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$
$span\{b_k\}$	L'espace engendré par les fonctions b_k
$a \sim b$	$a = cb$ avec $c > 0$
$cardA$	Le nombre d'élément de l'ensemble A
$\mathbf{1}_{\Gamma}$	Fonction indicatrice de Γ

Introduction Générale

En général pour analyser un phénomène naturel ou un problème d'ingénierie en particulier, nous sommes souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. C'est le cas du phénomène d'élasticité linéaire qui est essentiellement abordé dans le présent document.

L'élasticité linéaire (Gurtin M.E et al., R.D.Mindlin et al. 1973, [92, 93, 94]) est l'étude mathématique de la façon dont les objets solides se déforment et se soumettent à des contraintes internes dûes aux conditions de chargement prescrites. C'est une simplification de la théorie non-linéaire de l'élasticité. Les hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire sont les déformations infinitésimales (D.C.Spencer et al., J.Gasqui et al. 1983, [96, 97, 98]) ou "petites" déformations et la relations linéaires entre les composantes de la contrainte et de la déformation. Elles sont données par la loi de Hooke (Y.Brechet et al. 2013, [95]). Grâce à cette dernière et dans des conditions physiques bien définies, l'équation de Navier-Lamé (Michael.J.Cloud et al. 2009, [99, 100]) est extraite, en modélisant l'élasticité linéaire. L'équation de Navier-Lamé est largement utilisée dans l'analyse structurelle et dans la conception technique, souvent à l'aide d'une analyse par éléments finis qui feront l'objet de cette thèse.

La résolution du problème de l'elasticité est un défi industriel et technologique majeur. Jusqu'à présent, il retient toujours l'attention des spécialistes du domaine, comme en témoigne le nombre de travaux qui lui sont assignés (J. Alberty et al. 2002, Klaus Höllig et al. 2003, F. Auricchio et al. 2007, Andrzej Karafiat 2017...).

La méthode des éléments finis est le fruit de deux champs de recherche :
les mathématiques et les sciences de l'ingénieur.

- Mathématiques : outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909).
- Sciences de l'ingénieur : la contribution de ces sciences a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue, d'où l'idée de base des éléments finis.

En 1969, la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP. Elle est utilisée pour résoudre des problèmes non-linéaires et non-stationnaires dans plu-

sieurs domaines. En mécanique des fluides, la résolution des équations de Navier Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse-pression a commencé dans les années 1970.

Parmi les défis rencontrés lors de l'implémentation de la méthode des éléments finis pour resoudre le système de Navier-Lamé, il y a le problème des contraintes dûes aux conditions aux limites standards (Dirichlet homogène,non homogène) et la plupart des travaux les considèrent jusqu'à aujourd'hui. Ceci nécessite des techniques compliquées de résolution pour les problèmes associés à chacune des conditions standards. Ce qui se contredit avec la réutilisation et avec l'adaptation des programmes selon les besoins de chaque problème.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse relèvent du domaine des solutions numériques pour l'équation différentielle aux dérivées partielles de Navier-Lamé avec deux types de conditions aux limites. La première est dite standard de type mélée [D.J.Silvester et al.(2001)] et la seconde est nouvelle et nommée $C_{A,B}$. La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis mixtes avec des espaces d'approximation de Lagrange $(P1 + bubble, P1)$ et Web-spline (B-spline pondérée et étendue).

Pour résoudre le problème des contraintes, nous proposons une condition généralisée $C_{A,B}$ définie sur le bord de Ω. Elle est caractérisée par deux matrices carrées nonnulles et inversibles A et B. Ces dernières sont appelées respectivement la matrice de Dirichlet et la matrice de Neumann. La condition $C_{A,B}$ généralise toutes les catégories de conditions aux limites prévalentes (Dirichlet, Neumann, Robin). Elle est valable pour toutes les dimensions possibles. En effet, l'ordre des matrices carrées qui constituent la formule de cette condition aux limites reflètent la dimension du domaine. Ajoutons à ceci, le fait qu'elle exempte une insertion totale la condition aux limites. Ainsi elle rend le modèle étudié de plus en plus flexible lors de la résolution numérique.

Nous parvenons à démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème associé à la nouvelle condition aux limites. Ceci permet de concevoir une solution abordable de s'adapter à chacun des problèmes associés avec les différentes conditions aux limites standards.

Pour valider les résultats théoriques établis, nous exposons des simulations numériques qui sont intégrées au sein de ce travail. Les algorithmes envisagés sont codés sur Matlab et sont comparés avec les résultats produits par le logiciel Abaqus. Dans ce contexte, les résultats numériques sont en parfaite harmonie avec les résultats théoriques.

La thèse se présente en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, il est question de la résolution de l'équation de Navier -Lamé avec une condition aux limites standards, ainsi que la formulation variationnelle sous-jacente. Ces conditions aboutissent généralement à un problème avec des contraintes. Dans cas il y a une difficulté thechnique de l'insertion de ces contraintes dans le problème variationel (La méthode de pénalité, multiplicateur de Lagrange...). Dans chaque étape de la résolution, nous citons les difficultés produites par ces contraintes, au niveau du problème faible et au niveau du problème approché. Nous montrons la condition $\inf - \sup$ pour le problème approché obtenu après la discrétisation du domaine en utilisant un couple d'éléments $(P1 + bublle, P1)$. Pour valider les résulats théoriques, nous fournissons un test numérique sur une plaque carrée et trouée au centre, exposée à une charge des forces volumiques et surfaciques.
- Pour remédier à ces problèmes, une nouvelle condition généralisée est presentée dans le second chapitre. Elle est ensuite développée pour l'équation de Navier-Lamé. Nous établissons la méthode des éléments finis mixtes $P1 - bubble\ P1$ pour résoudre le problème de Navier-Lamé en utilisant la nouvelle condition mathématique $C_{A,B}$. En effet, la condition $C_{A,B}$ est une généralisation de la condition $C_{\alpha,\beta}$. La condition $C_{\alpha,\beta}$ a été proposée par Jaouad El-mekkaoui et al. en 2013. Ainsi, la condition mathématique $C_{A,B}$ est une combinaison de la condition aux limites de Dirichlet et la condition aux limites de Neumann par l'intermédiaire de deux matrices A et B, nommées respectivement la matrice de Dirichlet et la matrice de Neumman. La condition $C_{A,B}$ est bien adaptée au problème de l'élasticité linéaire. C'est à dire, elle généralise toutes les conditions aux limites standards (Dirichlet, Neumman, Robin..). Elle remédie aux difficultés rencontrées lors de la résolution du problème de Navier Lamé par la méthode des éléménts finis mixtes.

  Nous passons par les étapes fondamentales suivantes : formulation faible, choix de maillage du domaine, discrétisation des équations étudiées. Nous montrons que le problème est bien posé. Nous retirons les matrices du système linéaire résultant du problème approché. Ainsi, pour alléger ce système linéaire, nous retranchons les degrés de liberté associés au bubble. Les résultats numériques sont analysés, discutés et comparés avec ceux de la méthode du logiciel Abaqus.

– Dans le troisième chapitre, nous considèrons l'équation 2D de l'élasticité linéaire de Navier-Lamé avec la condition aux limites $C_{A;B}$ et nous construisons une méthode d'éléments finis mixtes à l'aide d'un espace formé de B-splines pondérées et étendues (Web-spline).
Bien sûr, nous proposons un espace d'approximation engendré par une famille des fonctions web-spline libre et génératrice. Ces dernières fournissent une implémentaion exacte de la condition aux limites de Dirichlet ; ce qui enlève les contraintes causées par les conditions standards.
L'existence et l'unicité de la solution faible, ainsi que la convergence de la solution numérique pour le cas quadratique-linéaire sont prouvées.
Plusieurs simulations numériques sont données. Grâce aux nouvelles routines d'intégration et grâce à l'utilisation de la condition généralisée $C_{A,B}$, les solveurs B-splines pondérées et étendues sont plus efficaces que les autres méthodes classiques.
En effet, les B-splines sont fondamentales dans presque toutes les applications de modélisation géométrique. En particulier, les représentations B-splines rationnelles non uniformes NURBS (Y.Bazilevs et al. 2008, [83]) sont devenues une norme dans la CAD et la CAM (J.J. Shah et al. 1995, [86]). A partir de cette méthode, les B-splines fournissent des approximations par éléments finis très efficaces. Certaines B-splines ne peuvent avoir que très peu de supports pertinents. Ils provoquent des instabilités dans la solution numérique, mais ne peut être omis sans affecter l'ordre d'approximation.
Par conséquent, les B-splines externes sont jointes aux B-splines internes en formant des combinaisons linéaires appropriées. Pour la qualité de l'approximation par éléments finis, le choix correct des coefficients de couplage est essentiel. Le support local et l'ordre d'approximation complet doivent être conservés. Les Web-splines résultantes forment une base stable avec toutes les propriétés familières des éléments finis standards.
La stabilisation n'est nécessaire que localement, près de la frontière. Les B-splines, bien à l'intérieur du domaine, ne sont pas modifiées. En particulier, pour les petites largeurs de grille, la majorité des B-splines internes restent inchangées.
La construction de la base Web-spline est simple. Les B-splines pertinentes sont classées en B-splines internes et externes, en fonction de la taille de leur support dans la région de simulation. Pour stabiliser la base, les B-splines

externes sont jointes aux B-splines internes en formant des combinaisons linéaires adéquates. C'est une étape cruciale. Les coefficients de couplage sont choisis de manière à conserver le support local et la puissance d'approximation des B-splines. Une pondération optionnelle des fonctions de base permet la réalisation exacte des conditions aux limites essentielles.

Et pour clore ce travail, nous ouvrons des fenêtres sur nos futurs travaux de recherche dans le domaine de la résolution numérique des équations différentielles .

General Introduction

To analyze a natural phenomenon in general or an engineering problem in particular, we often have to develop a mathematical model that can describe as reliably as possible the problem in question. This is the case of the linear elasticity phenomenon which is mainly discussed in this document.

The linear elasticity (Gurtin M.E et al., R.D.Mindlin et al. 1973, [92, 93, 94]) is the mathematical study of how solid objects deform and submit to internal stresses due to the prescribed loading conditions. This is a simplification of the more general nonlinear theory of elasticity. The fundamental assumptions of "linearization" of the linear elasticity are as follows :

infinitesimal deformations (DC Spencer et al., J.Gasqui et al. 1983 ,[96, 97, 98]) or "small" deformations and linear relations between the components of the constraint and deformation which are given by the law of Hooke (Y. Brechet et al. 2013,[95]), with which and with physical conditions well defined, the Navier- Lamé equation (Michael .J .Cloud et al. 2009, [99, 100]) is extracted by modeling the linear elasticity. The latter is widely used in structural analysis and in technical design, often using a finite element analysis that will be the subject of this thesis.

The resolution of this problem is a major industrial and technological challenge. Until now, it has always attracted the attention of specialists in the field, as evidenced by the number of tasks assigned to it (J. Alberty et al 2002, Klaus Höllig et al 2003, F. Auricchio et al 2007, Andrzej Karafiat 2017 ...).

The finite element method is the result of two fields of research : Mathematics and engineering sciences.

- Mathematics : Tools that go back to the weighted residuals of Gauss (1775), Galerkin (1915) and Biezenokoch (1923), as well as the variational methods of Rayleigh (1870) and Ritz (1909).

- Engineering Sciences : The contribution of these sciences began in the 1940s with Hrenikoff (1941), Henry (1943) and Newmark (1949), who for the first time touched continuous structures, approximating portions of small dimensions in a continuous problem of a long bar, hence the basic idea of finite elements.

In 1969 the FEM is recognized as a general resolution tool for EDP. It is used to solve non-linear and non-stationary problems in several domains. In fluid mechanics, finite element incompressible Navier Stokes equations solving using velocity -

pressure formulation began in the 1970s.

Among the challenges encountered in the implementation of the finite element method to solve the Navier -Lamé system, there is the problem of constraints due to the standard boundary conditions (Dirichlet : homogeneous, non-linear). homogeneous), and most of the work considers them until today. This requires complicated resolution techniques for the problems associated with each of the standard conditions. This is contradicted by the reuse and adaptation of programs according to the needs of each problem.

The research presented in this thesis falls within the domain of numerical solutions for the partial differential differential equation of Navier-Lamé with two types of boundary conditions. The first is called standard melee type [D.J. Silvester (2001)], and the second is new named $C_{A,B}$.

The implementation of the mixed finite element method with Lagrange approximation spaces $(P1 + bubble, P1)$, and WEB-spline (extended weighted B-spline). To solve the constraint problem, we propose a generalized condition $C_{A,B}$ defined on the edge of Ω. It is characterized by two non-zero and invertible square matrices A and B. These are called the Dirichlet matrix and the Neumann matrix, respectively. The said condition generalizes all categories of conditions to the prevailing limits (Dirichlet, Neumann, Robin). It is valid for all possible dimensions. Indeed, the order of the square matrices that constitute the formula of our boundary condition reflect the dimension of the domain. Add to this, the fact that it exempts a full insertion the boundary condition. Thus, it makes the model studied more and more flexible during digital resolution.

We manage to demonstrate that the existence and the uniqueness of the solution of the problem associated with the new boundary condition are well posed. This makes it possible to design an affordable solution to adapt to each of the problems associated with the different standard boundary conditions.

To validate the established theoretical results, we will expose numerical tests that are integrated within this work. The algorithms envisaged are coded on MATLAB and are compared with the results produced by the software Abaqus system. In this context, the numerical results are in perfect harmony with the theoretical results.

The thesis is presented in three main chapters :

– In the first chapter, we discuss the resolution of the Navier-Lamé equation with a standard boundary condition, as well as the underlying variational formulation. These conditions usually lead to a problem with constraints that create

difficulties in the insertion of these constraints into the variational problem (the penalty method, Lagrange multiplier ...).In each step of the resolution, we mention the difficulties produced by these constraints, at the level of the weak problem, and at the level of the approximate problem.

We show the condition $\inf - \sup$ for the approximate problem obtained after dicretization of the domain using a base couple $(P1 + bblue, P1)$.

To validate the theoretical results, we provide a numerical test on a square hole in the center exposed to a charge of surface external forces.

– To remedy these problems, a new generalized condition is presented in the second chapter. It is then developed for the Navier-Lamé equation. We establish the mixed finite element method $(P1 + bubble, P1)$ to solve the Navier-Lamé problem using the new mathematical condition $C_{A,B}$. Indeed the condition $C_{A,B}$ is a new reformulation of the condition $C_{\alpha,\beta}$ was proposed by Jaouad El-mekkaoui et al. in 2013. Thus, the mathematical condition $C_{A,B}$ is a combination of the Dirichlet boundary condition and the Neumann boundary condition through two matrices A and B, respectively called the matrix of Dirichlet and the Neumman matrix. The condition $C_{A,B}$ is well suited to the problem of linear elasticity. That is, it generalizes all standard boundary conditions (Dirichlet, Neumman, Robin ..). It remedies the difficulties encountered in solving the problem of Navier Lamé by the method of mixed finite elements. We go through the following fundamental steps : weak formulation, choice of mesh of the domain, discretization of the studied equations. We show that the problem is well posed. We remove the matrices from the linear system resulting from the weak problem. Thus to lighten this linear system, we subtract the degrees of freedom associated with the bubble. The numerical results are analyzed, discussed and compared with those of the Abaqus system method.

– In the third chapter, we consider the 2D equation of linear elasticity of Navier-Lamé with the condition $_{CA;B}$ and we construct a mixed finite element method using the extended Web-spline B-splines space.

Property, we propose an approximation of the space of the resolution by a space generated by a base formed of web-spline functions. These provide an exact implementation of the Dirichlet boundary conditions, which removes the constraints caused by standard conditions. The existence and uniqueness of the weak solution, as well as the convergence of the numerical solution for the quadratic case are proved.

Some numerical tests are given which confirm that, thanks to the new integration routines, the weighted and extended B-spline solvers are effective. Indeed, B-splines are fundamental in almost all geometric modeling applications. In particular, non-uniform rational B-spline representations (Nurbs) (Y.Bazilevs et al. 2008,[83]) have become a standard in the CAD and CAM (JJ. Shah et al. 1995,[86]). Through the WEB method, B-splines also provide highly efficient finite element approximations. Some B-splines can have very little relevant support. They cause instabilities in the numerical solution but, can not be omitted without affecting the order of approximation. Therefore, the external B-splines are joined to the internal B-splines by forming appropriate linear combinations. For the quality of the finite element approximation, the correct choice of coupling coefficients is essential. Local support and the full approximation order must be retained. The resulting extended B-splines form a stable base with all the familiar properties of the standard finite elements. Stabilization is only necessary locally, near the edge. B-splines, well inside the domain, are not modified. In particular, for small gate widths, the majority of internal B-splines remain unchanged. Building the web base is simple. The relevant B-splines are classified into internal and external B-splines, depending on the size of their support in the simulation region. To stabilize the base, the external B-splines are joined to the internal B-splines by forming appropriate linear combinations. This is a crucial step. The coupling coefficients are chosen so as to maintain the local support and the approximation power of the B-splines. An optional weighting of the basic functions allows the exact fulfillment of the essential boundary conditions.

And to close this work, we open windows on our future research work in the field of the numerical resolution of differential equations.

Chapitre 1

Résolution de l'équation de Navier -Lamé avec des conditions aux limites ordinaires : les difficultés

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons l'intention de résoudre le problème de Navier-Lamé en 2D avec la condition aux limites type mélée (Dirichlet et Neumann). Pour y arriver nous allons utiliser la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$.
Ladite condition aboutit à un problème avec des contraintes générant des difficultés au niveau du choix de l'espace fonctionel de Hilbert (N.Young et al.1988,[76]), l'espace d'approximation, les éléments de la base, le sytème linéaire obtenu, ainsi que les codes de calculs. Dans un espace avec contrainte, on résoud le problème variationel, qui pose lui aussi des difficultés dans l'application du théorème d'existence et d'unicité. Pour y remédier, nous développons une nouvelle condition généralisée $C_{A,B}$ et reliée au problème d'elasticité linéaire.
Nous allons introduire une nouvelle formulation faible de ce problème en créant une nouvelle inconnue qui est égale à la divergence du déplacement. La nouvelle condition $C_{A,B}$, ainsi proposée, assure l'existence et l'unicité de la solution dans des espaces moins contraignants.
La résolution du problème par la méthode des éléments finis mixtes est une demarche à suivre. En commençant par la formulation variationnelle, nous faisons les calculs nécessaires de ce problème afin de concevoir un programme Matlab qui visualise la solution numérique. Ainsi, une fois les résultats obtenus, nous montrons que notre

méthode est plus efficace que celle avec des éléments finis ordinaires.
Au début, nous rappelons brièvement les approches les plus répandues dans ce cadre. Celle-ci ont remédié au problème des contraintes imposées sur l'espace fonctionel de la résolution pour l'insertion des conditions aux limites ordinaires de type Dirichlet non-homogène, dans le cadre de la méthode des éléments finis.
Nous nous servons d'un problème modèle très simple (problème de Poisson).
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ (d = 2, 3), que nous supposons pour simplifier être un polygone (d = 2) ou un polyèdre (d = 3), et notons Γ son bord.
Soit le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ dans \ \Omega & , \\ \quad u = h \ sur \ \Gamma_D & . \end{cases} \tag{1.1}$$

Le terme source de la force extérieure $f \in L^2(\Omega)$, ainsi que le terme du bord présente la force de traction $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
La notation Δ désigne le Laplacien. Sous forme faible, ce problème s'écrit :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie la contrainte $u = h$ sur Γ et $a(u, v) = (f, v)_\Omega$, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$.
Le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ (ou éventuellement sur $(L^2(\Omega))^d$) est définie par :

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u.v d\Omega, \tag{1.2}$$

et avec la notation $a(u, v) =: (\nabla u, \nabla v)_\Omega$, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$.
Ce problème admet une solution dans $H^1(\Omega)$ unique grâce au théorème de Lax Milgram (A.Ern et al. 2004, [21], voir théorème 3.8). La méthode standard pour résoudre l'equation (1.1) à l'aide de la MEF consiste à introduire un opérateur discrèt de réduction ("lifting") du bord Γ vers le domaine Ω. On se ramène ainsi au cas Dirichlet homogène. Si cet opérateur est construit judicieusement, ce procédé revient à éliminer les degrés de liberté associés aux nœuds sur le bord Γ dans le système linéaire obtenu après discrétisation, (A.Ern et al. 2004, [21], voir Remarque 8.17), mais l'inconvénient de cette méthode ne résout pas le problème de contrainte au niveau de choix de l'espace fonctionnel dans le problème variationel.
Pour répondre à des motivations diverses, d'autres méthodes ont été proposées pour traiter la condition $u = h \ sur \ \Gamma_D$. Nous listons ci-après les familles de méthodes principales. Cette liste n'est certainement pas exhaustive, mais elle regroupe celles qui semblent être les plus répandues :

La méthode de pénalité (I. Babuska et al.1973, [5], [7]) où la condition $u = h \; sur \; \Gamma_D$ de l'équation (1.1) est approchée par :

$$\partial_n u_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - h). \tag{1.3}$$

Cette méthode consiste à transformer la contrainte $u = g$ en une contrainte de la dérivée normale qui s'insére complètement dans le problème variationnel.
u_ε désigne la solution du problème pénalisé et la notation $\partial_n v$ est utilisée pour la dérivée normale sur Γ d'une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (n désigne la normale sortante au domaine Ω). Le paramètre de pénalité est noté $\varepsilon > 0$. La formulation faible pénalisée (continue) s'écrit alors : Trouver $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ qui vérifie :

$$a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} < u_\varepsilon, v >_\Gamma = (f, v)_\Omega + \frac{1}{\varepsilon} < g, v >_\Gamma . \tag{1.4}$$

Avec $<,>_\Gamma$ le produit scalaire sur $L^2(\Gamma)$.
Les conditions (1.3) et $u = h \; sur \; \Gamma_D$ ne sont pas équivalentes ($u_\varepsilon \neq u$). La méthode de pénalité discrète est non-consistante.
Les méthodes mixtes où la condition $u = h \; sur \; \Gamma_D$ est traitée de manière faible, en introduisant un multiplicateur de Lagrange λ qui se substitue à la dérivée normale $\partial_n u$ (Pitkärante et al. 1972,[4, 10, 17, 19]).
Le problème faible que l'on cherche à approcher est alors le suivant :
Trouver $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$

$$\begin{cases} a(u, v) + < \lambda, v >_\Gamma + < \mu, u >_\Gamma = (f, v)_\Omega + < \mu, g >_\Gamma, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad pour (v, \mu) \in H^1(\Omega) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma). \end{cases} \tag{1.5}$$

Cette fois-ci, $<,>_\Gamma$ désigne le produit de dualité sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$
Diffirents choix d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange correspondent à différentes méthodes, mais une condition $\inf - \sup$ discrète doit être vérifiée pour le couple d'espace d'éléments finis correspondant aux variables (μ, λ). Cette condition garantit le caractère bien posé du problème discrêt et la convergence optimale de la méthode. Par contre, elle resteint fortement les choix possibles pour les espaces d'éléments finis, qui doivent être construits de façon soignée (R. Stenberg. 1994, [19]).
Les méthodes stabilisées s'appuient sur la formulation mixte (1.5). On y introduit des termes additionnels au niveau discret. Ceux-ci permettent de conserver le ca-

ractère bien posé du problème, ainsi que la convergence optimale, pour des couples d'espaces d'éléments finis, ne vérifiant pas nécessairement la condition inf − sup discrète (pour l'idée originale, appliquée à Stokes, voir l'article de Hughes et Franca. 1987, [20]).

En 2002, les auteurs de l'article intitulé Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity, en l'occurence J. Alberty, Kiel, C.Carstensen, Vienne, SA Funken, Kiel et R.Klose [1], ont fait une contribution en calculant la solution approchée de l'équation de Navier-Lamé avec des conditions aux limites mélées (Dirchlet non- homogène et Neumann), en utilisant la méthode ordinaire d'élément fini programmée par Matlab.

Parmi plusieurs travaux, nous considérons cet article (J. Alberty et al. 2002. [1]) comme un exemple pour illuster les obstacles rencontrés par les auteurs au cours de la résolution de l'équation de Navier-Lamé avec des conditions aux limites ordinaires.

Ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla.u) = -f \ in\ \Omega, \\ Mu = w \ on\ \Gamma_D, \\ 2(\mu\varepsilon(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))I)n \ = g \ on\ \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.6}$$

Soit l'espace de Hilbert suivant :

$$H^1_D(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : Mu = 0\}, \tag{1.7}$$

Soit le problème faible associé au problème (1.6). Trouver $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant $Mu = w$, tel que :

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : \mathbb{C}\varepsilon(u)dx = \int_\Omega f.vdx + \int_{\Gamma_N} g.vds. \tag{1.8}$$

$\mathbb{C}$ le tenseur du matériau isotrope du quatrième ordre correspondant à l'équation de problème (1.6).

La condition aux limites de Dirichlet non homogène dans le problème (1.6) a posé un obstacle pour les auteurs au niveau du choix de l'espace fonctionnel dans lequel ils doivent résoudre le problème variationnel (1.8). Ils ont choisi l'espace (1.7) qui est valable seulement pour un problème avec une condition aux limites de Dirichlet homogène et leurs éléments ne vérifient pas la contrainte $Mu = w$.

Le même problème se pose lors de la discrétisation par éléments finis. En effet, pour l'implémentation, le problème (1.8) est discrétisé à l'aide de la méthode de Galerkin standard. L'espace $H^1(\Omega)$ est remplacé par le sous-espace de dimension finie $\mathfrak{C}$ défini par :

$$\mathfrak{C} = \{v_h \in H^1(\Omega_h) : Mv_h = 0\}, \tag{1.9}$$

Si w_h est la projection de w sur $\mathfrak{C}$, le problème discrétisé (PS) est comme suit : trouver $u_h \in \mathfrak{C}$ tel que $Mu_h = w_h$ sur Γ_D, pour tous les $v_h \in \mathfrak{C}$

$$\int_\Omega \varepsilon(u_h) : \mathbb{C}\varepsilon(u_h)dx = \int_\Omega f.v_h dx + \int_{\Gamma_N} g.v_h ds. \tag{1.10}$$

Le même problème se pose ici. L'espace $\mathfrak{C}$ ne répond pas au contrainte $Mu_h = w_h$.
Soit $\mathfrak{T}$ une triangulation de Ω et $\mathfrak{N}$ est l'ensemble de tous les noeuds de $\mathfrak{T}$.
Soit la base nodale de l'espace d'approximation $\mathfrak{C}$:

$$(\eta_1, \eta_2....\eta_{Nd}) = (\varphi_1 e_1, \varphi_1 e_2..\varphi_1 e_d, ..\varphi_N e_1, ...\varphi_N e_d), \tag{1.11}$$

N : le nombre de nœuds du maillage
d : la dimension du vecteur de déplacement
φ_z : la fonction chapeau scalaire du noeud z dans la triangulation $\mathfrak{T}$ telle que :

$$\varphi_z(z) = 1, \tag{1.12}$$

$$\varphi_z(y) = 0. \tag{1.13}$$

pour tout $y \in \mathfrak{N}$ avec $y \neq z$.
(1.10) devient :

$$\int_\Omega \varepsilon(\eta_k) : \mathbb{C}\varepsilon(u_h)dx = \int_\Omega f.\eta_k dx + \int_{\Gamma_N} g.\eta_k ds, \quad k = 1, ...Nd. \tag{1.14}$$

Pour le vecteur de déplacement discret, nous avons $u_h = \sum_{l=1}^{Nd} U_l \eta_l$, et ainsi (1.14) donne le système linéaire d'équations :

$$\sum_{l=1}^{Nd} (\int_\Omega \varepsilon(\eta_k) : \mathbb{C}\varepsilon(u_h)dx)U_l = \int_\Omega f.\eta_k dx + \int_{\Gamma_N} g.\eta_k ds, \quad k = 1, ...Nd. \tag{1.15}$$

Les coefficients de la matrice (matrice de rigidité globale) $A = (A_{kl}) \in \mathbb{R}^{Nd \times Nd}$, et le côté droit $b = (b_k) \in \mathbb{R}^{dN}$ sont définis comme :

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \int_\Omega \varepsilon(\eta_k) : \mathbb{C}\varepsilon(u_h) dx, \\ b_k &= \int_\Omega f.\eta_k dx + \int_{\Gamma_N} g.\eta_k ds. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pour introduire les conditions aux limites sur Γ_D, les auteurs ont utilisé la méthode du multiplicateur de Lagrange qui rend les calculs plus délicats.
En effet, on cite le type de difficultés dans les calalculs numériques, au moments où les chercheurs ont considéré une approche générale pour implémenter les conditions aux limites de Dirichlet $Mu_h = w_h$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ m_d \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_d \end{pmatrix} \quad sur \quad \Gamma. \tag{1.17}$$

tels que :

- $m_j : \Gamma \to \mathbb{R}^d$
- $w_j : \Gamma \to \mathbb{R}$.
- on aboutit à un système linéaire $BU = w$
- chaque rangée de $B \in \mathbb{R}^{n \times dN}$ contient la valeur de certains $m_j \in \mathbb{R}^{dN}$ à un nœud sur la frontière Γ_D
- $w \in \mathbb{R}^n$ contenant les valeurs correspondantes w_j sur ce noeud
- N est le nombre de nœuds
- on suppose que le Rang$(B) = n$
- les $m_j = 0$ sont non-inclus dans B

On combinant l'ensemble des conditions (1.17), les paramètres de Lagrange et les equations (1.16). Ainsi on aboutit à un système étendu.

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ w \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Le système étendu obtenu pose une certaine difficulté lors de la résolution au niveau de l'inverssement de la matrice globale. Nous allons clarifier ce type de difficulté en

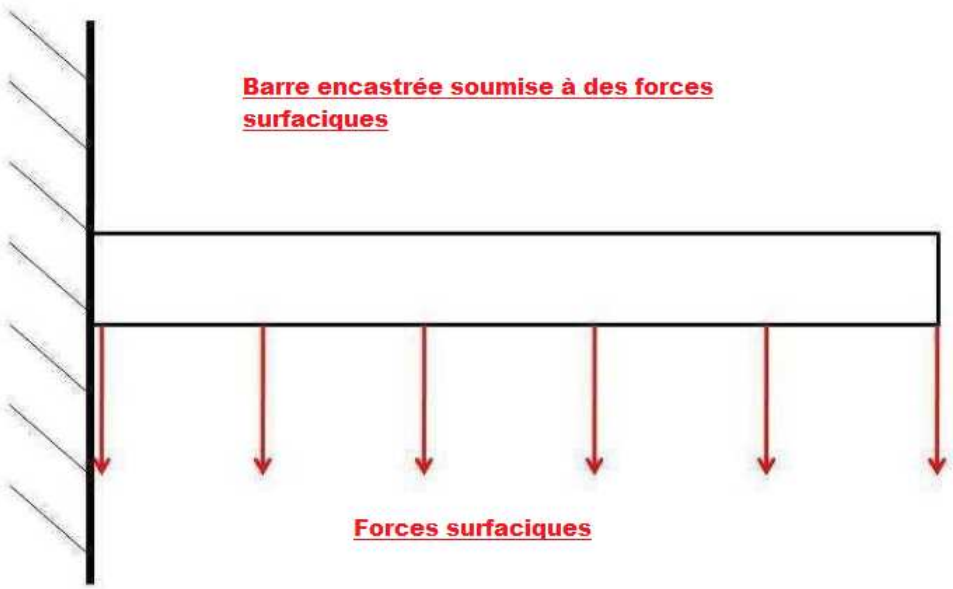
détail dans la suite de ce chapitre.
Finalement, on constate que les conditions aux limites non-homogénes de Dirichlet posent plusieurs difficultés dans toutes les étapes de la résolution du système de Navier-Lamé. De même, on résout ce système avec les conditions aux limites ordinaires en utilisant la méthode des éléments finis mixtes afin de révéler les mêmes difficultés que les auteurs ont objectés lors de leur solution à l'équation du Navier-Lamé dans l'article (J. Alberty et al. 2002, [1]).

1.2 Equation Modèle

1.2.1 Définition de l'équation de Navier Lamé et ses applications

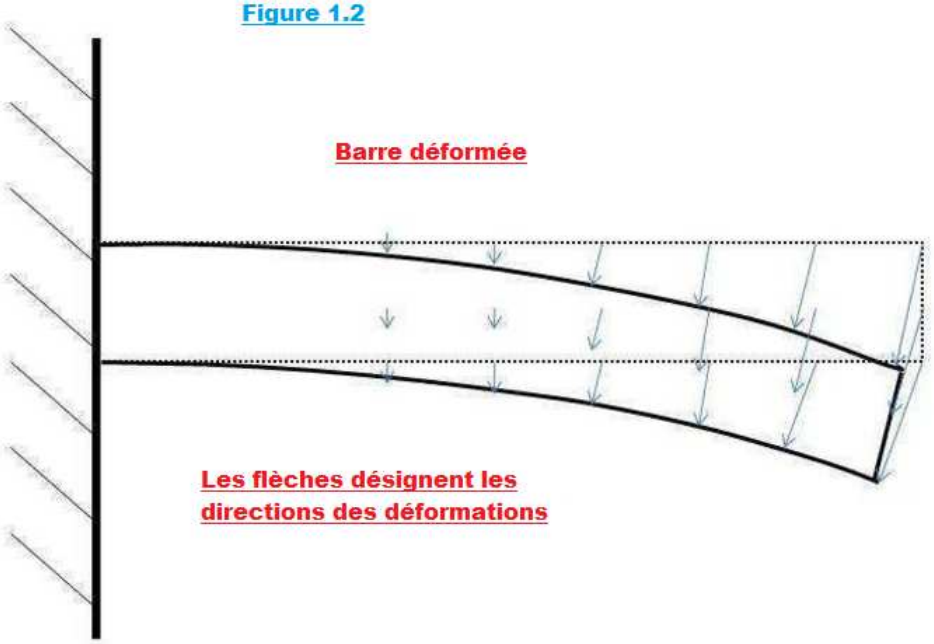
Tout d'abord on définit l'équation de Navier-Lamé sur laquelle nous allons appliquer la méthode des éléménts finis mixtes pour objectif d'exposer les difficultés auxquelles nous sommes confrontés lors de l'application de cette méthode.
L'équation de Navier-Lamé est une équation différentielle aux dérivées partielles elliptique avec plusieurs domaines d'application. L'une des applications les plus importantes concerne la théorie de l'élasticité. Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution analytique. On comprend alors que pour résoudre l'équation de Navier-Lamé, les méthodes numériques doivent être considérées comme un outil efficace pour savoir le comportement de cette équation. L'une des applications de l'équation de Navier-Lamé est l'élasticité linéaire. Le but est de calculer la déformation et la contrainte correspondante d'un corps qui est exposé à des forces externes, lequelles peuvent être distinguées par des forces surfaciques (par exemple un véhicule sur un pont) et des forces volumiques (par exemple une force de gravité).
Dans ce qui suit, nous montrons que le déplacement du corps satisfait l'équation de Navier Lamé en se référant à un exemple. du fait que calculer un problème tridimensionnel est très compliqué. Aussi est-il raisonnable de cartographier le problème tridimensionnel en utilisant un modèle à deux dimensions. Selon les conditions aux limites, il existe deux cas pour réduire la dimension du problème, en l'occurrence l'état de contrainte simple et l'état de déformation simple (D. Baraess et al. 2001, [12]).

Figure 1.1



Aprés quelque temps la barre subit des déformations : voir la figure au dessou.

Figure 1.2



En supposant que l'épaisseur du corps est constante et nettement inférieure aux autres mesures et que les forces de surface dans la troisième dimension sont négligeables, nous obtenons l'état de contrainte simple. En outre, si on suppose que les forces de volume telle que la gravité sont ignorées, ainsi on obtient l'état de déformation simple.

On propose un exemple de la gouvernance de l'équation de Navier-Lamé dans le domaine de la mécanique des solides élastiques : On fixe le profil d'une barre (encastrement) du côté gauche. Elle est soumise à des forces surfaciques connues sur une partie du bord de la barre.

Les figures 1.1 et 1.2 au dessus présentent la barre en deux états, avant et aprés la déformation. Cette dernière peut être calculée en résolvant l'équation du Navier-Lamé.

En général, un domaine occupé par un matériau solide dont le comportement élastique linéaire. Le domaine est soumis :

- à une densité de forces volumiques connue f sur l'ensemble du domaine Ω.
- à une densité surfacique de forces connue sur une partie.

La résolution du problème d'élasticité consiste à chercher, en tout point du domaine Ω :

- Le champ de déplacement u, sachant que ces déplacements sont imposés à une valeur connue sur une partie du bord.
- Le champ de contraintes σ généré par ce chargement.

1.2.2 Justification de l'équation de Navier Lamé

Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine Lipschitzien borné avec une frontière polygonale $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$.

Γ_D est un sous-ensemble fermé, de longueur positive, sur laquelle il y a la condition aux limite de Dirichlet.

Cependant, la condition de Neumann est imposée sur Γ_N .

Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, $M \in L^\infty(\Gamma_D)^{2\times 2}$, $h \in H^1(\Gamma_D)$ et $g \in L^2(\Gamma_N)$ ainsi que les paramètres positifs λ et μ.

L'équation de Navier Lamé est régie comme suit :

L'objet solide est déformé sous l'action des forces appliquées. Un point dans le solide à l'origine dans (x, y), après quelque temps, il entrera dans (X, Y), le vecteur $u = (u_1, u_2) = (X - x, Y - y)$ est appelé déplacement. Pour les petits déplacements, le solide étudié constitue un milieu élastique. La loi de Hooke donne une relation

entre le tenseur de contrainte et le tenseur de déformation.
En général le tenseur de déformation.

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u(\nabla u)^T). \tag{1.19}$$

Mais pour de petites déformations, nous pouvons supposer :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T). \tag{1.20}$$

En outre, nous pouvons également supposer que la loi de Hooke est valable, c'est-à-dire le tenseur de contrainte s'exprime comme suit (voir A.Bantle et al. [6]) :

$$\sigma = \lambda tr(\varepsilon) I_2 + 2\mu\varepsilon \tag{1.21}$$

I_2 est la matrice d'identité
μ est le module de cisaillement (ou rigidité)
ν est le coefficient de Poisson
E est le module d'élasticité
λ est le paramètre de Lamé.
Le coefficient λ et μ dépendent du matériau utilisé.
Quelques exemples pour la valeur de E sont :

- $E = 210$ GPa pour l'acier ferritique
- $E = 193$ GPa aciers austénitiques
- $E = 42$ GPa pour le ciment .

Un tableau contenant les valeurs de E pour plusieurs autres matériaux peut être trouvé dans (K. Stierstadt et al. 1998, [15]).
Le coefficient de Poisson est défini comme le quotient du changement relatif à l'épaisseur $\frac{\Delta d}{d}$ et le changement relatif à la longueur $\frac{\Delta l}{l}$ du corps :

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \tag{1.22}$$

L'intervalle de valeurs de ν pour les matériaux isotropes est comprise entre 0 et 0,5.
Dans l'état de déformation simple, la relation entre les coefficients de Lamé et les

paramètres de chaque matériau est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}. \end{cases} \tag{1.23}$$

On parle généralement :
Déformation simple = déformation plane
Contrainte simple = contrainte plane.
Dans l'état de contrainte plane, la relation est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu^2)}, \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}. \end{cases} \tag{1.24}$$

D'une part, d'aprés la relation fondamentale de la dynamique vérifiée en tout point du solide.
l'équation de Navier Lamé est donnée par l'équation d'équilibre suivante :

$$\rho a = \nabla.\sigma + f, \tag{1.25}$$

Sachant que a est l'accélération et ρ est la densité du matériau.
D'autre part, si l'équation suivante est verifiée :

$$\nabla.\sigma = \lambda\nabla.(tr(\varepsilon)I_2) + 2\mu\nabla.\varepsilon, \tag{1.26}$$

alors on a :

$$\nabla.\sigma = \lambda\nabla.(tr(\varepsilon)I_2) + \mu\nabla.(\nabla u) + \mu\nabla.(\nabla u)^T, \tag{1.27}$$

avec des calculs simples on obtient :

$$\nabla.(tr(\varepsilon)I_2) = \nabla.(\nabla u)^T = \nabla(\nabla.u), \tag{1.28}$$

On conclut par la suite :

$$\nabla.\sigma = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla.u), \tag{1.29}$$

si le solide est en équilibre statique (l'accélération $a = 0$), on obtient :

$$\nabla.\sigma + f = 0, \tag{1.30}$$

f une densité de forces volumiques connue sur l'ensemble du domaine Ω.
Enfin, on trouve l'équation suivante :

$$f = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla.u). \tag{1.31}$$

Remarque. L'équation de Navier- Lamé décrit la propagation des déformations dans le matériau.
La structure de cette équation est similaire de celle d'une équation d'onde.
Dans le cas statique ($a = 0$, où la dérivée temporelle s'annule), elle donne la structure que doivent prendre les déplacements au sein du matériau pour maintenir l'équilibre.

1.2.3 Conditions aux limites liées au système de Navier-Lamé

L'analyse du problème (1.31) avec une condition aux limites de Dirichlet sur tout le bord est assez trompeuse par sa simplicité. En effet, dès que l'on introduit une autre condition aux limites (par exemple, de Neumann) sur une partie du bord, la démonstration de la coercivité de la formulation variationnelle devient beaucoup plus difficile.
En général, on ne peut pas se contenter d'une condition aux limites de Dirichlet sur l'intégralité du bord. Car elle s'interprète comme le fait que le solide est fixé et immobile sur son bord.
En pratique, tout le bord n'est pas bloqué et souvent une partie du bord est libre de bouger ou bien des forces surfaciques sont appliquées sur une autre partie.
Les deux figures 1.1 et 1.2 sont modélisés par des conditions aux limites de Neumann qui s'écrivent ici sous la forme suivante :

$$\sigma(u)n = g, \tag{1.32}$$

g est une fonction aux valeurs vectorielles. La condition de Neumann (1.32) s'interprète en disant que g est une force appliquée sur le bord (plus précisément g est une densité de forces surfacique homogène à une pression, tandis que f est une densité de forces volumiques).
Si $g = 0$, aucune force ne s'applique et le bord. Alors il peut bouger sans restriction :

on dit que le bord est libre .

Lemme 1. Soit $n = (n_1, n_2)$ le vecteur normal sur le bord de Ω dirigé vers l'extérieur. On suppose que les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{1.33}$$

$$n_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}. \tag{1.34}$$

Alors la condition de Neumann s'exprime sous la forme :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda \nabla . u n \ = g. \tag{1.35}$$

Démonstration. D'après la loi de Hooke, le tenseur de contrainte s'exprime de la manière suivante : $\sigma = \lambda tr(\varepsilon) I_2 + 2\mu\varepsilon$, ainsi on a :

$$\sigma n = \lambda tr(\varepsilon(u)) n + 2\mu\varepsilon(u) n \tag{1.36}$$

On vérifie facilement que :

$$\lambda tr(\varepsilon(u)) n = \lambda (\nabla . u) n, \tag{1.37}$$

D'autre part on a :

$$2\varepsilon(u)n = \begin{pmatrix} 2n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ 2n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

or, d'après les relations (1.33) et (1.34) on a :

$$\begin{pmatrix} n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

de plus avec des calculs simples on conclut que :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u . n = \begin{pmatrix} n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

On combine (1.37), (1.39), (1.40), on obtient (1.35).

Dans toute la suite on va utiliser l'expression (1.37) pour exprimer la condition de Neumann, cela nous permet de simplifier les calculs. □

1.3 Difficulté de contraintes due aux conditions aux limites ordinaires

1.3.1 Difficulté du choix de l'espace fonctionel adéquat au problème faible

Nous proposons la méthode des élément fini mixte ($P1-bubble, P1$) pour calculer la solution numérique du déplacement et sa divergence au problème de Navier -Lamé en 2D.
Soit une nouvelle inconnue $\psi = \nabla.u$ qui est égal à la divergence du déplacement. L'équation de Navier-Lamé devient :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\psi = f \ in\ \Omega, \\ \psi = \nabla.u \ in\ \Omega, \\ M.u = h \ on\ \Gamma_D, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un \ = g \ on\ \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.41}$$

On a besoin de ces espaces fonctionnels ci-dessous :

$$h^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}, \tag{1.42}$$

$$V_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) = [h^1(\Omega)]^2 \setminus M.u = 0 \ on\ \Gamma_D\}, \tag{1.43}$$

$$V(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) = [h^1(\Omega)]^2 \setminus M.u = h \ on\ \Gamma_D\}, \tag{1.44}$$

$$M(\Omega) = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \setminus \int_\Omega q = 0\}. \tag{1.45}$$

La formulation variationnelle du problème (1.41) est comme suit :
Trouver $(u, \psi) \in V(\Omega) \times M(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a(u,v) + b_N(v,\psi) = L(v) \ \ \forall v \in V_0(\Omega), \\ b(u,q) - d(\psi,q) = 0 \ \ \forall q \in M(\Omega). \end{cases} \tag{1.46}$$

En mathématiques, une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées partielles sur une frontière.
Une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.
La condition aux limites de Dirichlet non-homogène pose une difficulté au niveau du choix de l'espace fonctionel convenable dans lequel nous cherchons la solution faible du problème. Ce qui n'est pas le cas pour l'espace $V(\Omega)$. On ne peut pas y résoudre le problème (1.46), car on a besoin d'appliquer le théorème de Lax Milgram avancé qui exige que l'espace fonctionel doit être de Hilbert, alors que $V(\Omega)$ ne l'est pas à cause de contrainte de Dirichlet non-homogène. D'ailleurs, $V(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel dans le cas où $h \neq 0$). Il ne contient pas le vecteur nul.
Les formes bilinèaires associées sont :

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla u : \nabla\, v\, d\Omega, \\ b(v,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu)\, q\, \nabla.v\, d\Omega, \\ b_N(v,q) = b(v,q) - \displaystyle\int_{\Gamma_N} \mu\, q\, n.v\, d\Gamma_N, \\ d(\psi,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu)\, \psi\, q\, d\Omega, \\ L(v) = \displaystyle\int_\Omega f.v\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g.v\, d\Gamma_N. \end{cases} \tag{1.47}$$

D'aprés le théorème 3.1 de l'article (P. Ciarlet et al. 2003, [39]), l'existence et l'unicité de la solution faible (u, ψ) du système (1.46) sont bien établies. Celles-là sont faites par la vérification de la continuité, la coercivité pour les formes bilinéaires et la continuité de la forme linéaire L définie ci-dessus dans (1.47).

1.3.2 Difficulté du choix de l'espace approché

Nous résolvons le problème variationnel (1.46) par la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$ (Mekki Ayadi. et al. 2010, [74], [75]). Nous appliquons l'approximation de la méthode standard de Galerkin. Pour plus d'explications (voir V. Giraut et al. 1981 ,[25, 26, 13, 41, 32]).
Nous considérons une triangulation uniforme T_h du domaine rectangulaire Ω, où $h > 0$ est le diamètre maximum de tous les éléments $K \in T_h$. T_h se compose de

triangles de deux dimensions.
Soient λ_1^K, λ_2^K, λ_2^K les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle K et μ^K est la fonction bubble associée au triangle K défini par : $\mu^K = \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$ dans K et égal à 0 ailleurs .
Nous définissons le domaine discret et les deux espaces approchés comme suit :

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n} T_k, \tag{1.48}$$

Ω_h est fermé et si Ω est un polygone alors : $\Omega_h = \overline{\Omega}$ et $\Gamma_h = \partial\Omega_h = \partial\Omega = \Gamma$

$$V_{0h} = \{\varphi_h \ \in \ H^1(\Omega_h) \setminus \varphi_h|_K = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^K \lambda_i^K + \beta^K \mu^K(x), M.\varphi_h|_{\Gamma_D \bigcap K} = 0\} \tag{1.49}$$

pour tout élément $K \ \in \mathtt{T}_h$, $\alpha_i^K, \beta^K \in \mathbb{R}^2$.
Dans l'espace approché V_{0h} on ne peut pas construire une base qui se conforme à la contrainte $Mu_h = h$. Si on impose cette contrainte dans l'espace V_{0h}, ainsi il ne sera plus un espace vectoriel ni approprié pour appliquer le théorème de l'existence et l'unicité de la solution approchée u_h. Par la suite ces difficultés affectent le problème algébrique.

$$M_h = \{\psi_h \ \in \ L_0^1(\Omega_h) \setminus \psi_h|_K = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^K \lambda_i^K \ , \theta_i^K \in \mathbb{R} \ , \ \forall \ K \ \in \mathtt{T}_h\} \subset \mathbb{P}_1(K). \tag{1.50}$$

$\mathbb{P}_1(K)$ est un espace polynomial défini sur le triangle K du degré inférieur ou égal à 1.
Les fonctions de $V_h \times M_h$ ne sont pas globalement affines dans Ω, mais seulement affines par morceau. En revanche, elles sont généralement continues.
Les fonctions de base sont complètement déterminées par leurs valeurs dans chacun des sommets du maillage (Bathe KJ. 1996, [8]).
Soit V_h l'espace d'interpolation de déplacement par éléments finis et M_h l'espace d'interpolation div-déplacement par éléments finis (correspondant aux espaces $V(\Omega)$ et $M = L_0^2(\Omega)$ du problème continu .
De plus la dimension de l'espace V_h est $N - n_s$, avec N est le nombre total de sommets et n_s nombre de sommets sur les bords. Le problème des éléments finis est le suivant :

Cherchons $u_h \in V_{0h}$ en considérant $M.u_h = h$ sur Γ_D et $\psi_h \in M_h$ et

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) + b_{Nh}(v_h, \chi_h) = L_h(v_h)\ \forall v_h \in V_h, \\ b_h(u_h, q_h) - d_h(\psi_h, q_h) = 0 \forall q_h \in M_h. \end{cases} \tag{1.51}$$

dont :

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = \displaystyle\int_K \mu \nabla u_h : \nabla\, v_h dK, \\ b_h(v_h, q_h) = \displaystyle\int_K (\lambda + \mu)\, q_h\, \nabla . v_h dK, \\ b_{Nh}(v_h, q_h) = b_h(v_h, q_h) - \displaystyle\int_{\Gamma_{N,h}} \mu\, q_h\, n_K . v_h\, d\Gamma_h, \\ d_h(\psi_h, q_h) = \displaystyle\int_K (\lambda + \mu)\, \psi_h\, q_h dK, \\ L_h(v_h) = \displaystyle\int_K f.v_h dK + \int_{\Gamma_{N,h}} g.v_h d\Gamma_{N,h}. \end{cases} \tag{1.52}$$

$\Gamma_{N,h} = \Gamma_N \bigcap \partial K$ et n_K la normale sur K.

L'existence et l'unicité de la solution de la formulation mixte illustrée (1.51) s'obtiennent par la continuité des bilinéaires forme a sur $V_h \times V_h$, b_N sur $V_h \times M_h$, b sur $V_h \times M_h$ et d sur $M_h \times M_h$. Il est souhaité d' utiliser l'inégalité de korn.

Par contre, la coercitivité de la forme bilinéaire a sur V_h et d sur M_h est maintenue en utilisant leur coercivité sur $V(\Omega)$ et $M(\Omega)$ respectivement.

Puisque $V_h \subset V(\Omega)$, nous pouvons voir la démonstration de la condition inf sup pour la forme bilinéaire b dans l'article [31] réalisé par D.N. Arnold et al. 1984.

Nous allons prouver que la condition uniforme inf sup pour la forme bilinéaire b_{Nh} sur $V_{0h} \times M_{0h}$, est satisfait. Cela signifie que nous devons prouver l'existence d'une constante $\vartheta^{'} > 0$ indépendamment de la taille du maillage comme le théorème suivant le clarifie.

Théorème 2. Il existe une constante $\vartheta > 0$ telle que :

$$\forall q_h \in M_h\ ,\ \exists u_h \in V_h\ , u_h \neq 0\ \ b_\Gamma(u_h, q_h) \geq \vartheta \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{1.53}$$

Ce théorème garantit la vérification de la condition $\inf - \sup$ de la forme bilinéaire b_Γ.

Il convient de noter que :

$$b_\Gamma(u_h, q_h) = b(u_h, q_h) - \int_{\Gamma_{N,h}} \mu\, q_h\, n_K . v_h\, d\Gamma_h\ ,\ \forall u_h \in V_h. \tag{1.54}$$

Démonstration. Nous montrons d'abord que la forme bilinéaire b vérifie (1.53) du théorème (2) .
On suppose que la triangulation $\mathtt{T}_h$ est uniformément régulière.
Soit $q_h \in M_h$ fixé, on sait que :

- L'espace approché M_h est inclus dans l'espace continu M
- La forme bilinéaire b vérifie la condition $\inf - \sup$ dans $V \times M$

alors il existe $u \in V$ telle que :

$$b(u, q_h) \geq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} . \tag{1.55}$$

avec $\beta > 0$ indépendant de q_h, mais u dépend de q_h.
Pour l'inconnue u cité dans (1.55), nous venons montrer qu'il existe $u_h \in V_h$ telles que :

$$\begin{aligned} b(u_h, q_h) &= b(u, q_h), \\ \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} &\leq c \parallel u \parallel_{1,\Omega} . \end{aligned} \tag{1.56}$$

Les deux relations (1.56) seront l'objectif du lemme (3), où $c > 0$ est indépendant de q_h and h .
En effet, si (1.56) est verifié :

$$b(u_h, q_h) = b(u, q_h) \geq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{1.57}$$

$$\geq \frac{\beta}{c} \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{1.58}$$

ll suffit de prendre $\beta' = \frac{\beta}{c}$.
Donc on a :

$$\int_\Gamma \mu \, q \, n.v \, d\Gamma \leq c' \mid \mu \mid \parallel v \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega} \tag{1.59}$$

or, $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$, nous avons :

$$\int_\Gamma \mu \, q_h \, n.v_h \, d\Gamma \leq c' \mid \mu \mid \parallel v_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{1.60}$$

on obtient :

$$b_N(v_h, q_h) \geq (\beta' - c')\mu \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \parallel v_h \parallel_{1,\Omega} . \tag{1.61}$$

Aussi on a $\vartheta = \beta' - c'\mu$, tant que : $\mu < \frac{\beta'}{c'}$. □

Lemme 3. Il existe $u_h \in V_h$ et $c > 0$ tel que u est fixé, et $\forall q_h \in M_h$:

$$\begin{aligned} b(u_h, q_h) &= b(u, q_h), \\ \| u_h \|_{1,\Omega} &\leq c \| u \|_{1,\Omega} . \end{aligned} \tag{1.62}$$

Démonstration. Nous définissons d'abord l'opérateur linéaire $R_h \in \mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{V_h})$, qui verifie :

$$\forall v_h \in V_h \ , \ \exists ! \, v \in V, R_h v = v_h. \tag{1.63}$$

Cet opérateur est un projecteur de V sur V_h. Il est bien défini .
En effet, Lax Milgram assure l'existence et l'unicité du problème variationnel suivant :
Trouvez v dans V :

$$\int_\Omega \nabla(R_h v - v).\nabla v_h dx = 0 \ , \ \forall v_h \in V_h, \tag{1.64}$$

Si on prend $v_h = R_h v$ dans (1.64) on obtient :

$$\| \nabla R_h v \|^2_{0,\Omega} = \int_\Omega \nabla v.\nabla v_h dx, \tag{1.65}$$

Alors :

$$\| \nabla R_h v \|^2_{0,\Omega} \leq \| \nabla R_h v \|_{0,\Omega} \| \nabla v \|_{0,\Omega}, \tag{1.66}$$

On conclut que :

$$\| \nabla R_h v \|_{0,\Omega} \leq \| \nabla v \|_{0,\Omega}, \tag{1.67}$$

On trouve que R_h est continu dans le sens de $H^1_0(\Omega) \cap V$.
Par la densité de $H^1_0(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, cela signifie que :

$$\overline{H^1_0(\Omega) \cap V}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}} \subset \ H^1(\Omega), \tag{1.68}$$

On a donc la continuité dans l'espace V, on suppose que l'opérateur R_h vérifie les propriétés d'estimation suivantes, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ indépendant de h et v .

$$\| (R_h v - v) \|_{0,\Omega} \leq \ c \, h \, \| \nabla v \|_{0,\Omega}, \tag{1.69}$$

Les résultats ci-dessus sont utilisables pour tous les $v \in V$. Maintenant, nous pouvons

prouver que la première relation de (1.62) dans le lemme (3) :

$$\int_{\Omega_h} \nabla.u_h q_h dx = \int_{\Omega_h} \nabla.u q_h dx, \tag{1.70}$$

En appliquant la formule de Green, on alors :

$$\int_{\Omega_h} \nabla q_h.u_h dx = \int_{\Omega_h} \nabla q_h.u dx, \tag{1.71}$$

Mais ∇q_h est constante, car $q_h \in \mathbb{P}_1(K)$. Alors on a :

$$\int_K u_h dx = \int_K u dx \ \forall K, \tag{1.72}$$

La définition de l'espace V_h, alors pour toute fonction u_h de V_h est déterminée par la relation :

$$u_h = \sum_{i=1}^{3} u_h(a_i^K)\lambda_i(x) + \beta^K \mu^K(x) \ \forall x \in K, \tag{1.73}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \int_K u_h dx &= \sum_{i=1}^{3} u_h(a_i^K) \int_K \lambda_i(x)dx + \beta^K \int_K \mu^K(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{3} R_h u(a_i^K) \int_K \lambda_i(x)dx + \beta^K \int_K \mu^K(x)dx \\ &= \int_K R_h u dx \end{aligned}$$

Finalement, il suffit de prendre $u_h = R_h u$ de façon on a :

$$b(u_h, q_h) = b(u, q_h), \tag{1.74}$$

Maintenant, on prouve la seconde relation du lemme (3), on a :

$$u_{h|_K} = \sum_{i=1}^{3} R_h u(a_i^K)\lambda_i + \beta^K \mu^K \tag{1.75}$$

Pour simplifier l'écriture on pose que $u_{h|_K} = R_h u + \beta^K \mu^K$ et :

$$\| u_h \|^2_{1,\Omega} = \sum_{K \in \mathbf{T_h}} \| u_h \|^2_{1,K} \tag{1.76}$$

Puis on a :

$$\begin{aligned} \| u_h \|_{1,\Omega}^2 &\leq \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (\| R_h u \|_{1,K} + \mid \beta^K \mid\mid \mu^K \|_{1,K})^2 \\ &\leq 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (\| R_h u \|_{1,K}^2 + \mid \beta^K \mid^2 \| \mu^K \|_{1,K}^2) \\ &\leq 2 \| R_h u \|_{1,\Omega}^2 + 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} \mid \beta^K \mid^2 \| \mu^K \|_{1,K}^2 \end{aligned}$$

La continuité de l'opérateur R_h entraine que :

$$\| u_h \|_{1,\Omega}^2 \leq c \| u \|_{1,\Omega}^2 + 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} \mid \beta^K \mid^2 \| \mu^K \|_{1,K}^2 \tag{1.77}$$

En utilisant la relation :

$$\begin{aligned} \int_K u dx &= \int_K u_h dx, \\ &= \int_K R_h u dx + \beta^K \int_K \mu^K dx. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Nous trouvons que :

$$\beta^K = \frac{\int_K (u - R_h u) dx}{\int_K \mu^K dx}, \int_k \mu^K dx = \frac{\mid K \mid}{60}. \tag{1.79}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc il existe une constante $c > 0$ indépendamment de h et K ainsi que :

$$\mid \beta^K \mid^2 \leq \ c \frac{\| u - R_h u \|_{0,K}^2}{h^2} \tag{1.80}$$

La fonction μ^K est bornée au sens de la norme : $\|, \|_{1,K}$ Par la relation (1.69), on obtient :

$$\| u_h \|_{1,\Omega} \leq c \| u \|_{1,\Omega} \tag{1.81}$$

Enfin, on a montré que l'élément : $(P1 + bubble, P1)$ satisfait la condition $\inf - \sup$ discrète . □

1.3.3 Difficultés de l'insertion des contraintes dans le systéme matriciel

Normalement, pour insérer les conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes, on doit appliquer la méthode de multiplicateur de Lagrange qui rajoute des difficultés de calcul et de programmation. Avec cette méthode, la taille de la matrice de régidité s'étend. A mesure que la matrice du sytème linéaire est grande, nous devons appliquer l'une des méthodes itératives pour l'inverser. Il en resulte une erreur qui dépend au nombre des itérations. Ainsi, le programme demande plus de temps pour converger .

On introduit les matrices suivantes A, B_N, B, D, L liées respectivement aux formes bilinéaires a_h, b_{Nh},b_h, d_h, L_h.
Nous pouvons exprimer les formes bilinéaires selon les opérateurs ainsi définis ci-dessous :

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = (Au_h, v_h)\ \forall (u_h, v_h) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega) \\ b_{Nh}(v_h, q_h) = (B_N v_h, q_h)\ \forall (q_h, v_h) \in M_h(\Omega) \in \times V_h(\Omega) \\ b_h(u_h, q_h) = (Bv_h, q_h)\ \forall q_h \in M_h(\Omega) \in \times V_h(\Omega) \\ d_h(\psi_h, q_h) = (D\psi_h, q_h)\ \forall (\psi_h, q_h) \in M_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \\ L_h(v_h) = Lv_h\ \forall v_h \in V_h(\Omega) \end{cases} \tag{1.82}$$

Avec (1.82), nous trouvons que la formulation discrète (1.51) peut être exprimée comme un système d'équations d'opérateurs :

$$\begin{cases} A\ u_h + B_N^t\ \psi_h = L \\ B\ u_h - D\ \psi_h = 0 \end{cases} \tag{1.83}$$

Nous trouvons que la formulation discrète peut également être exprimée comme un système d'équations linéaires. Pour plus d'explication sur ce type de problème matriciel voir l'article (Benzi et al. 2004,[9]).

$$\begin{pmatrix} A & B_N^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \psi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

Avec $u_h = (u_x, u_y)^t$, on peut exprimer le système algébrique (1.84) comme suit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B_{N,x}^t \\ 0 & A & B_{N,y}^t \\ B_x & B_y & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

Soit $\{\varphi_1; \varphi_2....; \varphi_n\}$ la base d'éléments finis formée de fonctions scalaires φ_i ,$i = 1...n$. En pratique les deux composantes de (u_h^x, u_h^y) de u_h sont toujours appréciés par un seul élément fini.

Soit N le nombre de nœuds dans le maillage et on pose $n = N - n_s$ avec n_s le nombre de sommets sur le bord.

La base de l'espace V_h :

$$B_{V_h} = \{\phi_1 = (\varphi_1, 0)...\phi_n = (\varphi_n, 0), \phi_{n+1} = (0, \varphi_1)...\phi_{2n} = (0, \varphi_n)\}, \tag{1.86}$$

ainsi $u_h = (u_h^x, u_h^y) \in V_h$, est donné par :

$$u_h = u_1^x \phi_1 + ... + u_n^x \phi_n + u_1^y \phi_{n+1} + ... + u_n^y \phi_{2n} \tag{1.87}$$

Pour un triangle donné K, le champ de déplacement u_h et la divergence ψ_h sont approchés par des combinaisons linéaires des fonctions de base dans la forme :

$$\begin{aligned} u_h^x &= \sum_{i=1}^{3} u_i^x \varphi_i + u_b \varphi_b, \\ u_h^y &= \sum_{i=1}^{3} u_i^y \varphi_i + u_b \varphi_b, \\ \psi_h &= \sum_{i=1}^{3} \psi_i \varphi_i. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Le système linéaire (1.85), attaché au système discret (1.84), est évalué sur chaque triangle K pour obtenir l'élément des matrices locales.

Les matrices globales sont designées par des lettres majuscules et sont données par sommation directe.

On suppose la force extérieure notée par : $f = (f_1, f_2)$, la force de traction appliquée sur le bord Γ_N est notée par : $g = (g_1, g_2)$ et le vecteur normal designé par : $n_{ij} = 0, 1$ ou -1.

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_K \mu \nabla \varphi_i . \nabla \varphi_j dK \ \ , \ \ A = \sum_{K \in T_h} a_{ij} \\
b^x_{ij} &= \int_K (\lambda + \mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_j dK \ \ , \ \ B^x = \sum_{K \in T_h} b^x_{ij} \\
b^y_{ij} &= \int_K (\lambda + \mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_j dK \ \ , \ \ B^y = \sum_{K \in T_h} b^y_{ij} \\
b^x_{N_{ij}} &= b^x_{ij} - \int_{E \cap K \subset \Gamma_{N,h}} \mu \, \varphi_i n_{ij} \varphi_j \, dE \ \ , \ \ B^x_N = \sum_{K \in T_h} b^x_{N_{ij}} \\
b^y_{N_{ij}} &= b^y_{ij} - \int_{E \cap K \subset \Gamma_{N,h}} \mu \, \varphi_i n_{ij} \varphi_j \, dE \ \ , \ \ B^y_N = \sum_{K \in T_h} b^y_{N_{ij}} \\
d_{ij} &= \int_K (\lambda + \mu) \, \varphi_i \, \varphi_j dK \ \ , \ \ D = \sum_{K \in T_h} d_{ij} \\
l^x_i &= \int_K f_1 \varphi_i dK + \int_{E \cap K \subset \Gamma_{N,h}} g_1 \varphi_i dE \ \ , \ \ L^x = \sum_{K \in T_h} l^x_i \\
l^y_i &= \int_K f_2 \varphi_i dK + \int_{E \cap K \subset \Gamma_{N,h}} g_2 \varphi_i \ \ , \ \ L^y = \sum_{K \in T_h} l^y_i dE
\end{aligned}
\tag{1.89}
$$

Dans cette section, nous calculons les matrices élémentaires dans (1.89). Pour exécuter ces calculs nous allons nous baser sur l'article de Jonas Koko Limos. 2012. [16]. Pour un triangle K, le couple $(x_i; y_i)_{i=1,2,3}$ désigne les coordonnée de chaque sommet
.

Les fonctions de base sont définies par :

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= 1 - x - y, \\
\varphi_2(x, y) = x \ , \ \varphi_3(x, y) &= y, \\
\varphi_b &= 27 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3.
\end{aligned}
\tag{1.90}
$$

On a besoin de cette notation :

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= x_i - x_j, \\
y_{ij} = y_i - y_j \quad i, j &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
\tag{1.91}
$$

et :

$$
x^{(K)} = \begin{pmatrix} x_{32} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(K)} \\ x_2^{(K)} \\ x_3^{(K)} \end{pmatrix} \ , \ y^{(K)} = \begin{pmatrix} y_{32} \\ y_{13} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(K)} \\ y_2^{(K)} \\ y_3^{(K)} \end{pmatrix} \tag{1.92}
$$

La partie non-bubble de la matrice A s'écrit comme suit :

$$A^K = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} = \frac{\mu}{4 \mid K \mid}(y^{(K)}y^{(K)_t} + x^{(K)}x^{(K)_t}), \tag{1.93}$$

L'aire de l'élément K est donné par :

$$\mid K \mid = \frac{x_3^{(K)}y_1^{(K)} - x_2^{(K)}y_3^{(K)}}{2}. \tag{1.94}$$

La partie bubble de A est un vecteur nul ; on le note par :

$$A_{b.} = (a_{bj})_{j=1,2,3} = \mathbf{0}_{31}, \tag{1.95}$$

avec $\mathbf{0}_{31}$ est un vecteur colonne nul à 3 éléments .
Pour le diagonal :

$$\begin{aligned} a_{bb} &= \frac{81\mu}{10} \mid K \mid (\mid \nabla\varphi_1 \mid^2 + \mid \nabla\varphi_2 \mid^2 + \nabla\varphi_1.\nabla\varphi_2) \\ &= \frac{81\mu}{40}\frac{1}{\mid K \mid}((x_1^{(K)})^2 + (x_2^{(K)})^2 + (y_1^{(K)})^2 + (y_2^{(K)})^2 + x_1^{(K)}x_2^{(K)} + y_1^{(K)}y_2^{(K)}) \end{aligned}$$

Puisque la matrice de rigidité A est symétrique, alors nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} A^K & A_{b.} \\ A_{b.}^t & a_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^K & 0 \\ 0 & a_{bb} \end{pmatrix} \tag{1.96}$$

La matrice de masse D est donnée par pour $i, j = 1, 2, 3$:

$$D = \begin{cases} \dfrac{\mu + \lambda}{6} \mid K \mid , \ i = j \\ \dfrac{\mu + \lambda}{12} \mid K \mid \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.97}$$

Maintenant, nous allons implémenter les matrices de divergence. Les éléments de la partie non-bubble des matrices B_x et B_x sont donnés par :

$$B_x^K = \frac{1}{6}(\mu + \lambda)\begin{pmatrix} y^{(K)_t} \\ y^{(K)_t} \\ y^{(K)_t} \end{pmatrix} \quad , \quad B_y^K = \frac{1}{6}(\mu + \lambda)\begin{pmatrix} x^{(K)_t} \\ x^{(K)_t} \\ x^{(K)_t} \end{pmatrix} \tag{1.98}$$

La partie bubble est donnée par :

$$\begin{aligned} B_{xb} &= (\mu+\lambda)\frac{9}{40}y^{(K)_t}, \\ B_{yb} &= (\mu+\lambda)\frac{9}{40}x^{(K)_t}. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Finalement :

$$B_x = \begin{pmatrix} B_x^K \\ B_{xb} \end{pmatrix} \quad , \quad B_y = \begin{pmatrix} B_y^K \\ B_{yb} \end{pmatrix} \tag{1.100}$$

Element right-hand side

La partie non-bubble des forces extérieures sont données par :

$$l_x^K = \frac{\mid K \mid}{3} f_{1K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad l_y^K = \frac{\mid K \mid}{3} f_{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

Où

$$f_{iK} = \frac{(f_i(x_1) + f_i(x_2) + f_i(x_3))}{3} \quad , \quad i = 1, 2 \tag{1.102}$$

La partie bulle de la partie droite est :

$$\begin{aligned} l_{xb} &= \frac{9}{20} \mid K \mid f_{1K}, \\ l_{yb} &= \frac{9}{20} \mid K \mid f_{2K}. \end{aligned} \tag{1.103}$$

Finalement on a :

$$l_x = \begin{pmatrix} l_x^K \\ l_{xb} \end{pmatrix} \quad , \quad l_y = \begin{pmatrix} l_y^K \\ l_{yb} \end{pmatrix} \tag{1.104}$$

Maintenant, nous allons construire la matrice de 11×11 correspondant au système (1.85) :

$$\begin{pmatrix} A^k & 0 & 0 & 0 & B_{N,x}^t \\ 0 & a_{bb} & 0 & 0 & B_{bN,x}^t \\ 0 & 0 & A^k & 0 & B_{N,y}^t \\ 0 & 0 & 0 & a_{bb} & B_{bN,y}^t \\ B_x^K & B_{bx} & B_y^K & B_{by} & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_{bx} \\ u_y \\ u_{by} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x^K \\ l_{bx} \\ l_y^K \\ l_{by} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.105}$$

Nous allons classer le système (1.105) de telle sorte que nous puissions décrire la partie bubble de l'inconnue u en fonction de la partie nonbubble de u et ψ, afin de

pouvoir l'éliminer par la suite :

$$\begin{pmatrix} A^k & 0 & 0 & 0 & B^t_{N,x} \\ 0 & A^k & 0 & 0 & B^t_{N,y} \\ 0 & 0 & a_{bb} & 0 & B^t_{bN,x} \\ 0 & 0 & 0 & a_{bb} & B^t_{bN,y} \\ B^K_x & B^K_y & B_{bx} & B_{by} & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^K_x \\ l^K_y \\ l_{bx} \\ l_{by} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

A partir des lignes 3 et 4 du système (1.106), nous déduisons :

$$\begin{aligned} u_{bx} &= a^{-1}_{bb}(l_{bx} - B^t_{bN,x}\psi) \\ u_{by} &= a^{-1}_{bb}(l_{by} - B^t_{bN,y}\psi) \end{aligned} \tag{1.107}$$

avec l'élimination de u_{bx} et u_{by}, nous trouvons le nouveau système linéaire : $\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{F}$, telles que : $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \psi \end{pmatrix}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A^k & 0 & B^t_{N,x} \\ 0 & A^k & B^t_{N,y} \\ B^K_x & B^K_y & -B_{bx}B^t_{bN,x}a^{-1}_{bb} - B_{by}B^t_{bN,y}a^{-1}_{bb} - D \end{pmatrix} \tag{1.108}$$

Le coté droite du système :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} l^K_x \\ l^K_y \\ -B_{bx}l_{bx}a^{-1}_{bb} - B_{by}l_{by}a^{-1}_{bb} \end{pmatrix} \tag{1.109}$$

En se basant sur l'article (Jonas Koko. 2012), nous presentons l'assemblage de la matrice $\mathbb{A}$ et du vecteur second membre $\mathbb{F}$ en utilisant le code de programmation Matlab.

$$\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{F} \tag{1.110}$$

Le code Matlab prévoit deux routines principales : l'une assemble la matrice $\mathbb{A}$ et l'autre assemble le membre droit $\mathbb{F}$ du système linéaire (1.110).

La principale difficulté pour résoudre le système linéaire, c'est les contraintes dues aux conditions de Dirichlet non-homgènes. Ces contraintes créent des difficultés de programmation, il en résulte la nécessité d'application la méthode de multiplicateur

de Lagrange. Elle génère des difficultés de calculs et agrandir la taille de la matrice $\mathbb{A}$. Cela alourdit l'algorithme et nous exige d'appliquer les méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, GMRES...). Par exemple la méthode de GMRES (Generalized minimal residual) dévellopée par Yousef Saad et Martin H. Schultz en 1986. Cette méthode donne une solution approximative avec un résidu minimal à une solution approchée. Il en resulte une augmentation de l'écart entre la solution numérique et la solution exacte.
Nous trouvons dans l'Annexe deux sous-programmes de remplissage de la matrice $\mathbb{A}$ et du vecteur $\mathbb{F}$:

$$FunctionA = elastic2dp1bmat2(p, t, lambda, mu, nn), \tag{1.111}$$

$$Functionb = elastic2dp1brhs2(p, t, lambda, mu, f1, f2). \tag{1.112}$$

sachant que p et t sont deux tableaux qui stockent les coordonnées des nœuds et les sommets des triangles respectivement. nn, nt et np sont les nombres de nœuds Neumann, de sommets triangulaires et de nœuds coordonnés respectivement.

1.4 Résultats numériques

Cette section est le fruit de l'étude réalisée dans les sections précédentes, avec ses deux aspects : mathématiques et programmation. Il y a donc des résultats numériques de calcul de la solution avec la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bublle, P1)$.

- $D = \{x^2 + y^2 \leq 1 \; tel \; que \; : 0 \leq x \leq 1 \; et \; 0 \leq y \leq 1\}$
- Le domaine $\Omega = [0, 2] \times [0, 2] \setminus D$
- $(E = 2.90GPa \; , \; \nu = 0.4)$

On impose les conditions aux limites suivantes :

- Le domaine Ω est tendu vers le haut $(y = 2)$ avec une charge de surface $g = (0, 1)$
- Les conditions de Dirichlet sont : $h = 0$ sur : $[1, 2] \times \{0\}$, $\{0\} \times [1, 2]$

- Les charges des forces prennent la valeur $f = (0, 0)^t$ pour tous les nœuds
- Le reste du bord est libre (A. Geilenkothen et al. 2003, [29]).

Les figures 1.2, 1.3, 1.4 présentent les valeurs des déplacements $u_h(x_i, y_i)$ suivant l'axe X et l'axe Y sur chaque nœud (x_i, y_i) et pour chaque h le pas du maillage .
On constate que les déplacements au voisinage du bord $y = 2$ sont maximales.

On éprouve que le sens d'application de la charge surfacique a un effet sur les déplacements équivalentes.

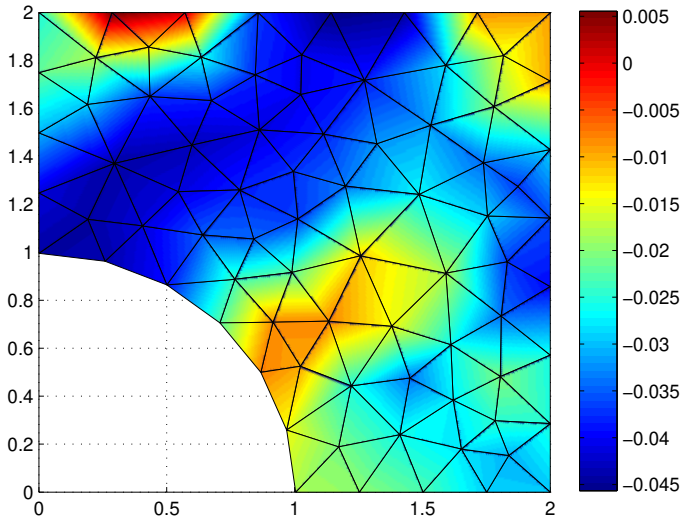


FIGURE 1.2 – Déplacement par Matlab pour h = 0.3

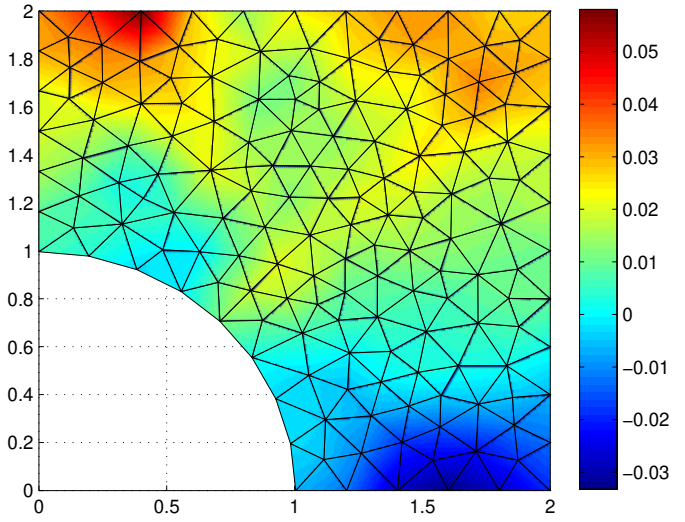


FIGURE 1.3 – Déplacement par Matlab pour h = 0.2

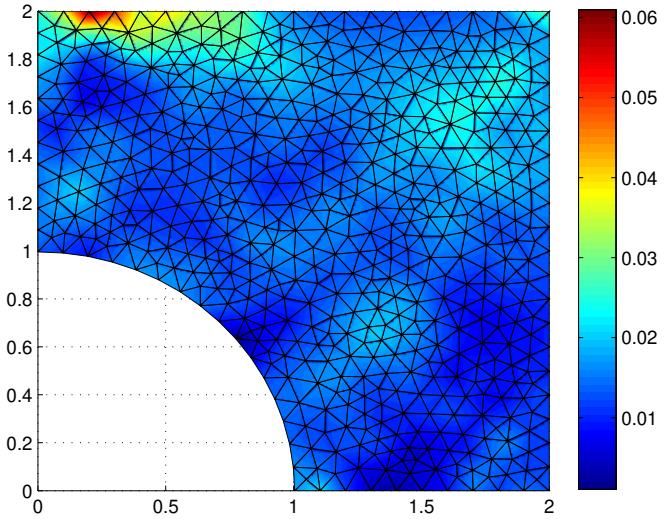


FIGURE 1.4 – Déplacement par Matlab pour h = 0.1

TABLE 1.1 – Tableau d'erreurs

Nombre de noueds np	80	164	589
Nombre d'éléments nt	130	287	1099
Pas h	0.3	0.2	0.1
$\| u - u_h \|_{1,\Omega}$ MFEM avec C.L. standards	0.1360	0.1193	0.1074
$\| \psi - \psi_h \|_{0,\Omega}$ MFEM avec C.L. standards	0.2032	0.1094	0.0894
$\| u - u_h \|_{1,\Omega}$ avec FEM C.L. standards	0.4924	0.2075	0.1448

1.5 conclusion

Le tableau 1.1 présente les erreurs calculés pour la méthode des éléments finis mixtes et la méthode des éléménts finis ordinaires.
La méthode FEM n'utilise que l'approximation linéaire par morceaux alors que la méthode MFEM $P1 + bulle, P1$ fonctionne avec plus de degrés de liberté. Par conséquent, il n'est pas surprenant que les erreurs de la méthode MFEM sont plus petits que ceux de la méthode FEM .
On constate que la méthode MFEM donne des valeurs fiables pour le calcul des déplacements. Elle nous permet d'étudier des problèmes en 2D et 3D dans le domaine de la mécanique d'élasticité linéaire et dans l'étude de la répture des structures mécanique. Notamment pour analyser les contraintes et les déformations en estimant les zones les plus sollicitées.
Malgrés la fiabilité de la méthode des éléments finis mixtes $P1bubble - P1$ appliquée

à l'équation de Navier- Lamé sous des conditions aux limites standars, elle subit des difficultés à cause de ces conditions. Ces difficultés, nous les avons citées en détail pour chaque étape de la méthode.
Dans le chapitre 2, nous allons proposer une condition généralisée $C_{A,B}$ diminuant les difficultés qu'on a rencontrés.

Chapitre 2

Résolution de l'équations de Navier-Lamé avec la nouvelle C.L. généralisée $C_{A,B}$

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la solution de toutes les difficultés citées dans le premier chapitre. Cela est possible par la résolution de l'équation de Navier-Lamé avec la condition aux limites généralisée $C_{A,B}$ en utilisant la méthode des éléments finis mixtes $(P1+bubble, P1)$. En même temps, nous montrons tous les avantages offerts par cette qualité de conditions aux limites. Dans ce sens, nous calculons le déplacement et sa divergence simultanément par l'intermédiaire d'une autre inconnue auxiliaire appelé la divergence de déplacement. Puis nous montrons l'existence et l'unicité de la solution faible et discrète en prouvant la condition $\inf - \sup$ discrète.

Nous présentons deux types de comparaison : En premier lieu, nous comparons les résultats élaborés par $(P1 + bubble, P1)$ et ceux fournis par le système Abaqus. En second lieu, nous calculons la vitesse de convergence α obtenue par chacune des deux méthodes numériques $(P1+bubble, P1)$ et la méthtode des éléments finis implémentée dans l'article (J. Alberty et al. 2002, [1]), en utilisant la régression linéaire. Un exemple analytique est utilisé pour valider l'exactitude, la convergence et la robustesse de la présente méthode d'éléments finis mixte pour l'élasticité afin d'évaluer l'efficacité de cette méthode, ainsi que son utilité.

En effet, nous allons calculer le déplacement approché u_{app} pour chacune des deux

méthodes. Elles sont programmées par Matlab, dont le code contient une routine qui calcule les erreurs entre la solution calculée et la solution analytique presentée dans la référence (J. Alberty et al. 2002, [1]).
Lorsque on calcule la solution du système $-\mu\Delta u-(\lambda+\mu)\nabla\nabla.u = f$ pour une maille donnée, nous obtenons une valeur approximative de la solution u_{APP}.
Par conséquent, à mesure que le maillage est plus fin alors la solution est plus améliorée.
Nous considérons la relation théorique suivante :

$$\| u - u_{app} \|_{1,\Omega} = \beta h^{\alpha}, \tag{2.1}$$

β est une constante positive, h est le pas du maillage et α la vitesse de convergence. Pour le calcul de $\| u - u_{app} \|_{1,\Omega}$, nous employons la norme $\| \ . \ \|_{1,\Omega}$ définie par la suite. Sachant que $\| u - u_{app} \|_{1,\Omega}$ et h le pas de maillage, nous voulons calculer α la vitesse de convergence de la solution. Pour ceci, la manière la plus simple de procéder est de composer le logarithme dans l'équation (2.1).
Nous obtenons :

$$\log(\| u - u_{app} \|_{1,\Omega}) = \log(\beta) + \alpha.\log(h), \tag{2.2}$$

Nous notons que $\log(\| u - u_{app} \|_{1,\Omega})$ est une fonction affine pour la variable $\log(h)$ et α présente la pente.
Pour trouver la valeur de α, nous calculons $(\| u - u_{app} \|_{1,\Omega})$ dans différentes mailles, puis nous traçons le graphe à l'échelle logarithmique de $(\| u - u_{app} \|_{1,\Omega})$ selon le log du pas h. Nous obtenons la pente de la ligne droite. En pratique, les points ne sont pas exactement alignés pour obtenir la valeur de α. En effet, nous effectuons une régression linéaire dans le sens des moindres carrés, c'est-à-dire nous prenons pour α la pente de la droite qui se rapproche de tous les points.

2.1.1 Nouvelle condition généralisée $C_{A,B}$

Nous proposons la condition aux limites suivantes :

$$C_{A,B} : Au + B(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(\nabla.u)n) = g \ , \ sur \ \partial\Omega = \Gamma, \tag{2.3}$$

A et B sont deux fonctions matricielles inversibles et bornées appartenant à $L^{\infty}(\Gamma)$, avec $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Ces deux matrices sont d'ordre 2 pour le cas 2D et d'ordre 3 pour le cas de 3D.

Nous construisons ces nouvelles conditions aux limites dans le but pour généraliser tout type de conditions aux limites standards (Dirichlet, Neumann, Robin,...).
En effet, on obtient la condition de Dirichlet lorsque $|||\ B\ |||$ est négligeable devant $|||\ A\ |||$, et par contre la condition de Neumann ne peut pas être pratiquement la seule condition aux limites, alors on parle de la condition de Robin ou mêlée qui sont bien presentées par la nouvelle conditon aux limites $C_{A,B}$.
Pour illustrer le fonctionnement de cette condition aux limites, on considére l'exemple suivant, dans lequel un domaine rectangulaire et $\Gamma = \cup_{i=1}^{4}\Gamma_i$ son bord :

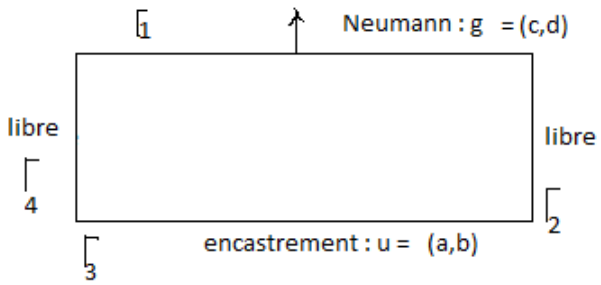


FIGURE 2.1 – Domaine rectangulaire

On pose $\Gamma_D = \Gamma_3$ et $\Gamma_N = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, on considère les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u = (a(x,y), b(x,y)), & sur\ \ \Gamma_3 \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un\ = (c(x,y), d(x,y)), & sur\ \ \Gamma_1, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un\ = 0 & sur\ \ \Gamma_2, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un\ = 0 & sur\ \ \Gamma_4. \end{cases} \tag{2.4}$$

En supposant que les fonctions a, b, c, d sont non nulles et bornées sur Γ, le système

(2.4) Peut être exprimé sous la forme de la condition aux limites :

$$C_{A,B} : Au + B(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(\nabla.u)n) = g \ , \ sur \ \partial\Omega = \Gamma. \tag{2.5}$$

Si on définit le déplacement u sur $\overline{\Omega}$, alors l'écriture matricielle de la condition aux limites $C_{A,B}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a(x,y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b(x,y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \mid_{\Gamma_D} \\ u_2 \mid_{\Gamma_D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{c(x,y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d(x,y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu\frac{\partial u_1}{\partial n} \mid_{\Gamma_N} + \lambda(\nabla.u_{\mid\Gamma_N})n_1) \\ \mu\frac{\partial u_2}{\partial n} \mid_{\Gamma_N} + \lambda(\nabla.u_{\mid\Gamma_N})n_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(x,y) + \xi_3(x,y) \\ \xi_1(x,y) + \xi_3(x,y) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Pour $i = 1$ ou 3, on définit les fonctions suivantes :

$$\xi_i(x,y) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ (x,y) \in \Gamma_i, \\ 0 \ \ sinon. \end{cases} \tag{2.7}$$

D'aprés le système (2.6), il suffit de prendre :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(x,y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b(x,y)} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c(x,y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d(x,y)} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Remarque. Nous posons la condition $C_{A,B}$ de la façon suivante :

$$C_{A,B} : Au + B(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(\nabla.u)n) = g\mathbf{1}_{\Gamma_N} + h\mathbf{1}_{\Gamma_D} \tag{2.9}$$

avec g est une fonction de force surfacique et h est une fonction du déplacement.

- Pour modéliser la condition aux limites de Dirichlet $u = h$ en utilisant la condition généralisée $C_{A,B}$, il suffit de prendre sur Γ_D :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

- Pour modéliser la condition aux limites de Neumann $(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(\nabla.u)n) = g$ en utilisant la condition généralisée $C_{A,B}$, il suffit de prendre sur Γ_N :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 Avantage de la condition généralisée au niveau du problème faible

2.2.1 Possibilité du choix d'un espace fonctionel moins contraignant

Dans cette section nous proposons le problème de Navier Lamé avec la condition au bord $C_{A,B}$ et nous établissons l'existence et l'unicité de la formulation faible obtenue.

Nous décrivons une nouvelle inconnue auxiliaire ψ pour pouvoir appliquer la méthodes des éléments finis mixtes.

$$\psi = \nabla.u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}. \tag{2.12}$$

L'équation de Navier-lamé devient :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla\psi = f \ in \ \Omega, \\ \psi - \nabla.u = 0 \ in \ \Omega, \\ Au + B(\mu \ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un) = g \ on \ \Gamma. \end{cases} \tag{2.13}$$

Pour plus d'informations, le lecteur est prié de consulter l'article (MH. Sadd et al. 2005, [51, 55]).

Le modèle mathématique du système Navier-lamé avec la condition aux limites généralisée notée $C_{A,B}$ telle que A est appelée la matrice de Dirichlet, tandis que B est la matrice de Neumann. α et β sont deux constantes strictement positives tel que :

$$\alpha u.u \leq u^t B^{-1} A u \leq \beta u.u \ , \ \forall u \in \mathbb{R}^2. \tag{2.14}$$

$|||\ .\ |||$ définit une norme matricielle. On suppose :

- Si $|||\ A\ ||| \ll |||\ B\ |||$, puis $C_{A,B}$ est la condition aux limites de Neumann.
- Si $|||\ B\ ||| \ll |||\ A\ |||$ puis $C_{A,B}$ est la condition aux limites de Dirichlet.

Nous avons besoin des espaces fonctionnels suivants :

$$h^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}, \tag{2.15}$$

$$V(\Omega) = H^1(\Omega) = [h^1(\Omega)]^2, \tag{2.16}$$

$$M(\Omega) = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \setminus \int_\Omega q = 0\}. \tag{2.17}$$

Ces espaces sont moins contraignants grâce à la condition aux limites généralisée $C_{A,B}$.

On multiplie les membres de l'équation (2.13) par la fonction test $v \in V(\Omega)$ pour le déplacement et $q \in M(\Omega)$ pour la divergence de déplacement, puis on intègre et on applique le théorème de Green et la condition aux limites généralisée $C_{A,B}$ on obtient la formulation variationnelle suivante décrite comme suit :

Trouver $(u, \psi) \in V(\Omega) \times M(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} A u.v d\Gamma, \\ -\int_\Gamma \mu\psi\, n.v d\Gamma + \int_\Omega (\lambda+\mu)\psi \nabla.v d\Omega, \\ = \int_\Omega f.v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} g.v\, d\Gamma, \\ \int_\Omega (\lambda+\mu) q \nabla.u d\Omega - \int_\Omega (\lambda+\mu)\psi q d\Omega = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

La formulation faible (2.18) est réécrite comme suit :

Trouver $(u, \psi) \in V(\Omega) \times M(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a(u,v) + b_\Gamma(v,\psi) = L(v)\ \forall v \in V_0(\Omega), \\ b(u,q) - d(\psi,q) = 0\ \forall q \in M(\Omega). \end{cases} \tag{2.19}$$

Avec les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} A u.v d\Gamma, \\ b(v,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu) q \nabla .v d\Omega, \\ b_\Gamma(v,q) = b(v,q) - \displaystyle\int_\Gamma \mu q n.v d\Gamma, \\ d(\psi,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu)\psi q d\Omega, \\ L(v) = \displaystyle\int_\Omega f.v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} g.v d\Gamma. \end{cases} \tag{2.20}$$

D'après (2.20), on remarque qu'on a abouti à une insertion totale de la conditions aux limites dans la formulation faible du problème, cela nous permet de faire aplanir les calculs numériques qu'on va faire par la suite dans le cadre de la résolution numérique du problème.

2.2.2 Existence et unicité de la solution faible

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible du problème de Navier-Lamé avec les conditions aux limites généralisée $C_{A,B}$, Celle-ci permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution faible et la solution approchée par la méthode des éléments finis mixtes dans des espaces moins contraignants, et de faciliter les calculs numériques.
De ce fait, Nous avons besoin des normes suivantes :
a est une forme bilinéaire, qui fonctionne sur $E \times F$. La norme de a est présentée sous la forme suivante :

$$\| a \| = \sup_{\|u\|_E \leq 1 \ , \ \|v\|_F \leq 1} a(u,v), \tag{2.21}$$

L est la forme linéaire de la norme suivante :

$$\| L \| = \sup_{\|u\|_E \leq 1} L(u), \tag{2.22}$$

La norme produite par le produit scalaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$\| v \|_{1,\Omega} = (v.v)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

La norme d'espace de $L_0^2(\Omega)$ est $\| v \|_{0,\Omega}^2$ telle que :

$$\| v \|_{0,\Omega}^2 = \{ \int_\Omega v.v \, d\Omega \}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.24}$$

La norme d'espace de $H^1(\Omega)$ est $\| v \|_{1,\Omega}$ telle que :

$$\| v \|_{1,\Omega} = \{ \int_\Omega \nabla v : \nabla v d\Omega + \int_\Omega v.v \, d\Omega \}^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

$$= | v |_{1,\Omega}^2 + \| v \|_{0,\Omega}^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.26}$$

$| v |_{1,\Omega}^2$ est une demi norme pour $H^1(\Omega)$. Elle est une norme pour l'espace $H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$| v |_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \nabla v : \nabla v d\Omega = \| \nabla v \|_{0,\Omega}^2, \tag{2.27}$$

La norme pour l'espace de $L^\infty(\Gamma)^{2\times 2}$ est :

$$||| A ||| = \max | a_{i,j} | \quad i = 1.2, j = 1.2. \tag{2.28}$$

$(V(\Omega), \| v \|_{1,\Omega})$ est un espace de Hilbert (V. Girault et P.A. Raviart. 1986).
Nous considérons les hypothèses satisfaisantes par les formes bilinéaires et linéaires suivantes : $a,\ b_\Gamma,\ b,\ d,\ L,\ G$.
Les constantes : $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \theta,\ \xi,\ \rho,$ sont strictement positives telles que :

$$\begin{cases} | a(u,v) | \leq \alpha \| u \|_{1,\Omega} \| v \|_{1,\Omega}, \\ | b(u,q) | \leq \beta \| u \|_{1,\Omega} \| q \|_{0,\Omega}, \\ | b_\Gamma(u,q) | \leq \gamma \| u \|_{1,\Omega} \| q \|_{0,\Omega}, \\ | d(q,\chi) | \leq \theta \| q \|_{0,\Omega} \| \chi \|_{0,\Omega}, \\ | L(v) | \leq \zeta \| v \|_{1,\Omega}, \\ | G(q) | \leq \rho \| q \|_{0,\Omega} . \end{cases} \tag{2.29}$$

$\forall (u,v) \in V(\Omega) \times V(\Omega)$, $\forall (\chi, q) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$.
Supposons que la forme bilinéaire a satisfait la condition de coercitivité.
δ est une constante positive telle que :

$$a(v,v) \geq \delta \| v \|_{1,\Omega}^2 \quad for\ all\ v \in V(\Omega), \tag{2.30}$$

b satisfait la condition $\inf - \sup$ avec $\varrho > 0$ est une constante tel que :

$$\sup_{v \in V(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq \varrho \| q \|_{0,\Omega}^2 \ \forall q \in L_0^2(\Omega), \tag{2.31}$$

b_Γ satisfait la condition $\inf - \sup$ avec $\vartheta > 0$ une constante.

$$\sup_{v \in V(\Omega)} \frac{b_\Gamma(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq \vartheta \| q \|_{0,\Omega}^2 \ \forall \in L_0^2(\Omega), \tag{2.32}$$

La forme bilinéaire d satisfait la coercitivité faible.
Il existe une constante $\varepsilon > 0$ tel que :

$$d(\chi,\chi) \geq \varepsilon \| \chi \|_{0,\Omega}^2 \ \forall \chi \in L_0^2(\Omega). \tag{2.33}$$

Nous considérons le problème variationnel généralisé suivant : $\forall (v,q) \in V(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, $\forall (L,G) \in (V(\Omega))' \times (L_0^2(\Omega))'$

$$\begin{cases} a(u,v) + b_\Gamma(v,\chi) = L(v), \\ b(u,q) - d(q,\chi) = G(q). \end{cases} \tag{2.34}$$

Considérons deux cas particuliers de problème (2.34).

- Cas 1 : $b_\Gamma = b$, $d \neq 0$,

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,\chi) = L(v), \\ b(u,q) - d(q,\chi) = G(q). \end{cases} \tag{2.35}$$

- Cas 2 : $d = 0$, $b_\Gamma \neq b$,

$$\begin{cases} a(u,v) + b_\Gamma(v,\chi) = L(v), \\ b(u,q) = G(q) \ \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.36}$$

Quand, $b_\Gamma = b$ et $d \neq 0$ le problème (2.34) se reduit au système (2.35). Ce dernier a été étudié dans (P. Ciarler et al. 2003, [39, 32, 41, 13]).
L'existence et l'unicité de la solution du système (2.35) sont présentées sous certaines conditions standards : (2.29) - (2.33). Le théorème 2.2 et sa démonstration est expliquée par P.Ciarlet et al. 2003 dans [39].
Tandis que le "well-possedness" pour le cas $d = 0$ et $b_\Gamma \neq b$ qui présente le problème

(2.36). Le théorème 2.1 de P. Ciarler et al. 2003 dans [39] montre que ce problème possède une unique solution. Il a été établi aussi par C. Bernardi et al. 1988. dans [11],[42].

Théorème 4. Avec les hypothèses (2.29) ... (2.33) le problème variationnel généralisé (2.34) possède une solution unique $(u, \chi) \in V(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, pour tout $L \in (V(\Omega))'$ et $G \in (L_0^2(\Omega))'$ tels que :

$$\xi = \frac{\delta^2 \parallel b_\Gamma \parallel \parallel b_\Gamma - b \parallel}{\delta \parallel a \parallel^{-2} \vartheta^2 - \varepsilon} < 1, \tag{2.37}$$

$\delta \parallel a \parallel^{-2} \vartheta^2 > \varepsilon$.
En outre, la solution possède les estimations de stabilité suivantes :

$$\parallel u \parallel_{1,\Omega} \leq \frac{1}{1-\xi} \parallel u_0 \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.38}$$

$$\parallel \chi \parallel_{0,\Omega} \leq \parallel \chi_0 \parallel_{0,\Omega} + \frac{\xi\delta}{\parallel b_\Gamma \parallel (1-\xi)} \parallel u_0 \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.39}$$

Sachant que, (u_0, χ_0) est la solution bornée de (2.35) telle que :

$$\parallel \chi_0 \parallel_{0,\Omega} \leq \frac{\delta^{-1} \parallel b_\Gamma \parallel \parallel L \parallel + \parallel G \parallel}{\delta \parallel a \parallel^{-2} \vartheta^2 - \varepsilon}, \tag{2.40}$$

$$\parallel u_0 \parallel_{0,\Omega} \leq \delta^{-1} (\parallel L \parallel + \parallel b_\Gamma \parallel \parallel \chi_0 \parallel_{0,\Omega}). \tag{2.41}$$

Démonstration. La démonstration du théorème 4 est similaire à celle du théorème 3.1 de P. Ciarlet et al. 1988 dans [39]. □

Remarque. Le problème (2.19) est un cas particulier du cas $(G = 0)$ du problème (2.34) (voir la référence [39]).
La remarque 3.2 dans [39] montre que sauf $b_\Gamma(v, q)$ est demandé pour satisfaire la condition $\inf - \sup$ et non pas $b(v, q)$.
Même résultats sont montrés avec seulement que $b(v, q)$ peut satisfaire la condition $\inf - \sup$ et non pas $b_\Gamma(v, q)$.

Proposition 5. α, β, γ, δ, θ, ζ, ρ sont des constantes strictement positives avec : pour toutes variables $(u, v) \in V(\Omega) \times V(\Omega)$, $(p, q) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$:

$$\mid a(u, v) \mid \leq \alpha \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.42}$$

$$\mid b(u, q) \mid \leq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega}, \tag{2.43}$$

$$| b_\Gamma(u,q) | \leq \gamma \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega}, \tag{2.44}$$

$$| d(q,p) | \leq \theta \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel p \parallel_{0,\Omega}, \tag{2.45}$$

$$| L(v) | \leq \zeta \parallel v \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.46}$$

$$| G(q) | \leq \rho \parallel q \parallel_{0,\Omega} . \tag{2.47}$$

Démonstration. Pour aborder la démonstration de la proposition 5, nous avons besoin du lemme suivant : □

Lemme 6. Nous définissons l'extension de u et v dans $\mathbb{R}^2$ comme suit. Il est supposé que Ω est de classe C^1 avec Γ est le bord de Ω, qui est borné.
Avec ces conditions, il existe un opérateur de prolongement P qui est linéaire et continu.

$$P : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \, , u \longmapsto P\, u \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.48}$$

tel que :

$$Pu = \begin{cases} u & if \quad in\ \Omega \\ 0 & if \quad in\ \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.49}$$

$$Pu \mid_\Omega = u \tag{2.50}$$

$$\parallel Pu \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq c \parallel u \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.51}$$

$$\parallel Pu \parallel_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c \parallel u \parallel_{0,\Omega} . \tag{2.52}$$

Démonstration. voir la démonstration du théorème IX.7 de Haïm Brezis et al. 1999 dans [14]. □

Lemme 7. $v \in V(\Omega)$ $\chi \in L^2_0(\Omega)$ respectivement. c est une constante positive différente de zéro telle que : pour tout $(v,\chi) \in V(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ *on a :*

$$\int_\Gamma | \mu\chi\, n.v | \, d\Gamma \leq c \parallel \chi \parallel_{0,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.53}$$

Pour tout $(u,v) \in V(\Omega)^2$ *:*

$$\int_\Gamma B^{-1} Au.v d\Gamma \leq c_0 \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega} . \tag{2.54}$$

Démonstration. Ω est un domaine borné c-à-d. $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.
$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ implique :

$$\int_\Gamma | \mu\chi\, n.v | \, d\Gamma \leq \int_{\mathbb{R}^2} | \mu(P\chi)\,(Pv.n) | \tag{2.55}$$

En appliquant Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mid \mu(P\chi)(Pv.n) \mid \leq (\int_{\mathbb{R}^2} \mid \mu P\chi \mid^2)^{\frac{1}{2}} \times (\int_{\mathbb{R}^2} \mid Pv.n \mid^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.56}$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}^2} \mid \lambda \mid (P\chi)^2)^{\frac{1}{2}} \times (\int_{\mathbb{R}^2} 2\max(n_1^2, n_2^2)(Pv)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.57}$$

$$\leq c_0 \parallel P\chi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^2)} \parallel Pv \parallel_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{2.58}$$

$$\leq c_1 \parallel P\chi \parallel_{0,\Omega} \parallel Pv \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \tag{2.59}$$

$$\leq c_2 \parallel \chi \parallel_{0,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega} \tag{2.60}$$

c_0, c_1, c_2 sont des constantes positives et selon le lemme 6 la preuve du lemme 7 est achevée.

Nous avons :

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} Au.v d\Gamma \tag{2.61}$$

Nous tenons à démontrer que la forme bilinéaire a est continue, en utilisant Hölder nous trouvons :

$$\mid a(u,v) \mid \leq \int_\Omega \mid \mu \nabla u : \nabla v \mid d\Omega \tag{2.62}$$

$$\leq \mu \mid u \mid_{1,\Omega} \mid v \mid_{1,\Omega} \tag{2.63}$$

$$\leq \mu \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega} \tag{2.64}$$

En utilisant la relation (2.54) du lemme 7, en tenant $\alpha = \mu + c_0$, on obtient :

$$\mid a(u,v) \mid \leq \alpha \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel v \parallel_{1,\Omega} . \tag{2.65}$$

Dans un deuxième temps nous allons prouver :

$$\mid b(u,q) \mid \leq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega} \ \forall u \in V(\Omega) \ \forall q \in L_0^2(\Omega), \tag{2.66}$$

Nous avons :

$$\mid b(u,q) \mid \leq \int_\Omega \mid \lambda + \mu \mid \mid q \mid \mid \nabla.u \mid \ d\Omega \tag{2.67}$$

Hölder donne :

$$| b(u,q) | \leq | \lambda + \mu | \parallel q \parallel_{0,\Omega} [\int_{\Omega} 2(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y})]^{\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

$$\leq | \lambda + \mu | \parallel q \parallel_{0,\Omega} [\int_{\Omega} 2 \mid \nabla u \mid^2 d\Omega] \frac{1}{2} \quad (2.69)$$

$$\leq \sqrt{2} \mid \lambda + \mu \mid \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel \nabla u \parallel_{0,\Omega} \quad (2.70)$$

$$\leq \sqrt{2} \mid \lambda + \mu \mid \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel u \parallel_{1,\Omega} \quad (2.71)$$

$$\leq c \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel u \parallel_{1,\Omega} \quad (2.72)$$

Nous pouvons trouver mieux si nous tenons $c = \sqrt{2} \mid \lambda + \mu \mid$.
Maintenant, nous allons démontrer que la fome bilinéaire b_Γ est continue :

$$| b_\Gamma(v,q) | = | b(v,q) + \int_{\Omega} \mu\, q\, n.v \, d\Gamma \mid \quad (2.73)$$

$$\leq | b(v,q) | + \int_{\Gamma} \mid \mu\, q\, n.v \mid d\Gamma \quad (2.74)$$

$$\leq c \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel u \parallel_{1,\Omega} + \int_{\Gamma} \mid \mu\, q\, n.v \mid d\Gamma \quad (2.75)$$

d'autre part, nous utilisons la relation (2.53) du lemme 7 tel que :

$$\int_{\Gamma} \mid \mu\, q\, n.v \mid d\Gamma \leq c_1 \parallel q \parallel_{0,\Omega} \parallel u \parallel_{1,\Omega}, \quad (2.76)$$

c_1 est une constante positive, alors on déduit :

$$| b_\Gamma(v,q) | \leq c_2 \parallel v \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega} . \quad (2.77)$$

telle que $c_2 = c + c_1$
Si Hölder est utilisé, il devient facile de montrer que la forme bilinéaire $d(,)$ est continue comme suit :

$$| d(p,q) | \leq c \parallel p \parallel_{0,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega} . \quad (2.78)$$

On peut prendre $c = \mid \lambda + \mu \mid$
nous devons montrer que L est continu avec $\zeta > 0$

$$| L(v) | \leq \zeta \parallel v \parallel_{1,\Omega} \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (2.79)$$

La forme L bilinéaire est définie par :

$$L(v) = \int_\Gamma g.v\, d\Gamma + \int_\Omega f.v d\Omega, \tag{2.80}$$

L'inégalité triangulaire entraîne :

$$L(v) \leq \mid \int_\Gamma g.v\, d\Gamma \mid + \mid \int_\Omega f.v\, d\Omega \mid, \tag{2.81}$$

$$L(v) \leq \int_\Gamma \mid g.v \mid \, d\Gamma + \int_\Omega \mid f.v \mid \, d\Omega, \tag{2.82}$$

$$L(v) \leq \sup_\Omega g \parallel v \parallel_{0,\Gamma} + \sup_\Omega f \parallel v \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.83}$$

D'aprés le lemme 7, on obtient :

$$\mid L(v) \mid \leq \sup_\Omega gc \parallel v \parallel_{1,\Omega} + \sup_\Omega f \parallel v \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.84}$$

$$\leq (c \sup_\Omega g + \sup_\Omega f) \parallel v \parallel_{1,\Omega} . \tag{2.85}$$

Il suffit de prendre $\zeta = c \sup_\Omega g + \sup_\Omega f$. □

Lemme 8. Il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\parallel v \parallel^2_{0,\Omega} \leq \rho(\mid \nabla v \mid^2_{1,\Omega} + \parallel v \parallel^2_{0,\Gamma}) \tag{2.86}$$

Démonstration. La démonstration du lemme 8 est exposée par Alexander Ern. 2005 dans [26]. □

La forme bilinéaire a satisfait la condition de coercitivité. Alors il existe δ une constante positive strictement.

Proposition 9. On pose :

$$a_0(u,u) = \int_\Omega \mu \nabla u : \nabla u\, d\Omega, \tag{2.87}$$

Donc on obtient :

$$a(u,u) = a_0(u,u) + \int_\Gamma B^{-1} Au.u d\Gamma. \tag{2.88}$$

Alors nous avons :

$$a_0(u,u) \geq \delta \parallel u \parallel^2_{1,\Omega} \ \ \forall u \in V(\Omega) \tag{2.89}$$

Démonstration. Selon le lemme 8, Il existe $\rho > 0$

$$\| u \|^2_{0,\Omega} \leq \rho\{\| \nabla u \|^2_{0,\Omega} + \| u \|^2_{0,\Gamma}\} \; \forall u \in V(\Omega) \tag{2.90}$$

Et d'après le théorème 1.2 dans le chapitre 1 [V.Girault ,P.A Raviard 1986], il existe une constante c positive.

$$\| u \|_{0,\Gamma} \leq c \| u \|_{1,\Omega}, \tag{2.91}$$

donc nous trouverons :

$$\| u \|^2_{0,\Omega} \leq \rho\{\| \nabla u \|^2_{0,\Omega} + c^2 \| u \|^2_{1,\Omega}\}, \tag{2.92}$$

et :

$$\| \nabla u \|^2_{0,\Omega} + \| u \|^2_{0,\Omega} \leq \rho\{\frac{1}{\mu} a(u,u) + c^2 \| u \|^2_{1,\Omega}\} + \frac{1}{\mu} a(u,u), \tag{2.93}$$

Ceci est vrai $\forall u \in V(\Omega)$, ce qui implique :

$$(1 - \rho c^2) \| u \|^2_{1,\Omega} \leq (\frac{\rho}{\mu} + \frac{1}{\mu}) a(u,u) \tag{2.94}$$

Finalement :

$$a_0(u,u) \geq \frac{1 - \rho c^2}{\frac{\rho}{\mu} + \frac{1}{\mu}} \| u \|^2_{1,\Omega} \tag{2.95}$$

Aussitôt que $1 - \rho c^2 > 0$, nous tenons $\delta = \frac{1-\rho c^2}{\frac{\rho}{\mu} + \frac{1}{\mu}}$ telle que :

$$a_0(u,u) \geq \delta \| u \|^2_{1,\Omega} \;\; \forall u \in V(\Omega). \tag{2.96}$$

Selon le lemme (7) et la relation (2.54) nous obtenons :

$$a(u,u) \geq (\delta - c_0) \| u \|^2_{1,\Omega} \;\; \forall u \in V(\Omega) \tag{2.97}$$

Tant que $\delta - c_0 > 0$.
Le résultat (2.97) sera expliqué dans la démonstration du théorème 15 dans la suite du travail. □

Proposition 10. b satisfait la condition $\inf - \sup$. il existe une constante ϱ positive tel que :

$$\sup_{v \in V(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq \varrho \| q \|^2_{0,\Omega} \; \forall q \in L^2_0(\Omega) \tag{2.98}$$

b_Γ satisfait la condition inf $-$ sup. il existe une constante ϑ positive tel que :

$$\sup_{v\in V(\Omega)} \frac{b_\Gamma(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq \vartheta \| q \|^2_{0,\Omega} \ \forall \in L^2_0(\Omega) \tag{2.99}$$

Démonstration. D'après V.Girault et al. 1981 dans l'article [25], $q \in L^2_0(\Omega)$. il existe une constante k_0 positive : telle que :

$$\sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \frac{b(v,q)}{| v |_{1,\Omega}} \geq k_0 \| q \|_{0,\Omega} . \tag{2.100}$$

On sait que :

$$H^1_0(\Omega) \subset V(\Omega) \tag{2.101}$$

Et la semi-norme devient une norme sur $H^1_0(\Omega)$ c'est à dire :

$$| v |_{1,\Omega} = \| v \|_{1,\Omega} \, \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{2.102}$$

$$\sup_{v\in V(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq \sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\| v \|_{1,\Omega}} \geq k_0 \| q \|_{0,\Omega} \tag{2.103}$$

Pour justifier la relation (2.99), il suffit d'appliquer la relation (2.53) du lemme 7 et la relation (2.98). □

La forme bilinéaire d satisfait la coercitivité faible. Alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que :

Proposition 11.

$$d(\chi,\chi) \geq \varepsilon \| \chi \|^2_{0,\Omega} \ \forall \chi \in L^2_0(\Omega) \tag{2.104}$$

Démonstration. La coercitivité faible de la forme bilinéaire d est toujous satisfaite quelque soit $0 < \varepsilon < (\mu + \lambda)$. □

Théorème 12. Le problème variationnel généralisé (2.19) possède une solution unique $(u, \psi) \in V(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ pour toute $L \in (V(\Omega))'$

$$\xi = \frac{\delta^2 \ \| \ b_\Gamma \| \| \ b_\Gamma \ - \ b \|}{\delta \ \| \ a \|^{-2} \ \vartheta^2 - \varepsilon} < 1 \tag{2.105}$$

avec $\delta \| a \|^{-2} \vartheta^2 > \varepsilon$.
En outre, la solution a des estimations de stabilité :

$$\| u \|_{1,\Omega} \leq \ \frac{1}{1-\xi} \ \| u_0 \|_{1,\Omega} \tag{2.106}$$

$$\| \chi \|_{0,\Omega} \leq \| \chi_0 \|_{0,\Omega} + \frac{\xi \, \delta}{\| b_\Gamma \| \, (1 - \xi)} \| u_0 \|_{1,\Omega} \tag{2.107}$$

Où (u_0, χ_0) la solution liée à (2.36) avec $G = 0$ tel que :

$$\| \chi_0 \|_{0,\Omega} \leq \frac{\delta^{-1} \| b_\Gamma \| \| L \|}{\delta \| a \|^{-2} \vartheta^2 - \varepsilon} \tag{2.108}$$

$$\| u_0 \|_{0,\Omega} \leq \delta^{-1} (\| L \| + \| B_\Gamma \| \| \chi_0 \|_{0,\Omega}) \tag{2.109}$$

Démonstration. Nous appliquons les propositions 5, 10, 9, 11 précédentes et le théorème 4 en mettant $G = 0$.
D'après, $0 < \varepsilon < (\mu + \lambda)$ la condition (2.105) est établie si :

$$\| b_\Gamma \| \| b - b_\Gamma \| < \frac{\delta \| a \|^{-2} \vartheta^2 + \mu + \lambda}{\delta^2} \tag{2.110}$$

□

2.3 Approximation par éléments finis mixtes

2.3.1 Choix d'un espace approché moins contraignant

Dans cette section nous allons implémenter la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$ pour résoudre l'équation de Navier-Lamé avec la condition aux limites généralisée $C_{A,B}$.
Dans ce but, nous indiquons les privilèges qui nous sont accordés par ce type de condition dans le choix de l'espace d'interpolation approprié qui est moins contraignant. Ceci nous facilite la tâche du choix des fonctions de bases adéquates à notre problème approché.
La méthode des éléments finis mixtes a été utilisée pour la première fois dans les années 1960, afin de décrire les méthodes par éléments finis dans lesquelles les champs de contrainte et de déplacement sont rapprochés en tant que variables primaires.
Dans l'analyse numérique, la méthode des éléments finis mixtes nommée aussi méthode d'élément fini hybride est une méthode d'éléments finis dans laquelle des variables indépendantes supplémentaires sont présentées en tant que variables nodales pendant la discrétisation d'un problème d'équation différentielle partielle. Les variables indépendantes supplémentaires sont limitées par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.
Pour distinguer la méthode d'éléments finis mixtes par rapport à la méthode d'élé-

ment fini classique est que la dernière ne présentent pas de telles variables indépendantes supplémentaires. Elles s'appellent également les méthodes d'éléments finis irréductibles. La méthode des éléments finis mixtes est efficace pour certains problèmes mal formulés numériquement par discrétisation en utilisant la méthode des éléments finis irréductibles, à titre d'exemple le calcule des champs de contrainte et de déformation dans un corps élastique incompressible qui a été traité par C.Olek et al.2013 [37].
Pour appliquer la méthode des éléments finis mixte ($P1 + bubble/P1$), nous approchons le problème par la méthode standard de Galerkin.
Pour plus d'explications voir les références (V. Girault et al. 1981. [25, 26, 13, 41, 32, 34, 33, 38].
Considérons une triangulation uniforme T_h d'un domaine rectangulaire Ω dont $h > 0$ est le diamètre maximal de tous les éléments $K \in T_h$, et T_h se compose de triangles en deux dimensions (voir figures 2.4, 2.5).
Nous définissons le domaine discret :

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n} T_k, \tag{2.111}$$

Ω_h est fermé si Ω est un polygone, puis $\Omega_h = \overline{\Omega}$ et on a :

$$\Gamma_h = \partial\Omega_h = \partial\Omega = \Gamma. \tag{2.112}$$

Nous supposons que nous avons une séquence de triangulations $(T_h)_h$, telle que si $h \to 0$, alors on aura $\Omega_h \to \Omega$.
Soient φ_1^K, φ_2^K, φ_2^K (voir graphes 2.3, 2.2) les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle K, vérifiant $\varphi_i^K(a_j) = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} est le symbole de kroniker.
μ^K est la fonction bulle associée au triangle K défini par :

$$\mu^K = \varphi_1^K \varphi_2^K \varphi_3^K \; dans \; K \tag{2.113}$$

$$\mu^K = 0 \; hors \; K; \tag{2.114}$$

De plus la fonction μ^K prend la valeur 1 dans le barycentre de l'élément K, et la valeur 0 sur les bords de K.

$\mathbb{P}_1(K)$ est l'espace des polynômes définis sur le triangle K du degré inférieur ou égal à 1. Les fonctions de $V_h \times M_h$ ne sont pas globalement affines dans tout le Ω, mais seulement affines par morceau. En revanche, elles sont généralement

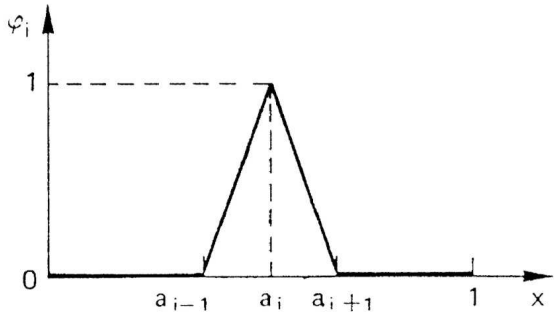


FIGURE 2.2 – une fonction de base P1 en 1D.

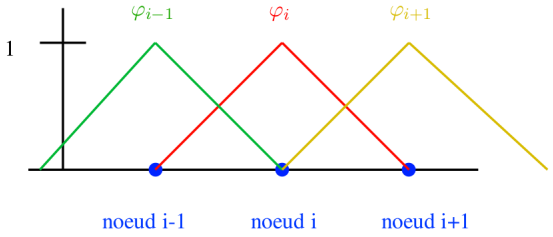


FIGURE 2.3 – les fonctions de base qui se chevauchent en 1D.

continues. Les fonctions de l'espace sont complètement déterminées par leurs valeurs dans chacun des sommets de maille. Pour la solution d'un problème d'élasticité, la discrétisation par éléments finis du déplacement /div-déplacement (u/ψ) est effective (voir KJ.Bathe 1996 .[8]).

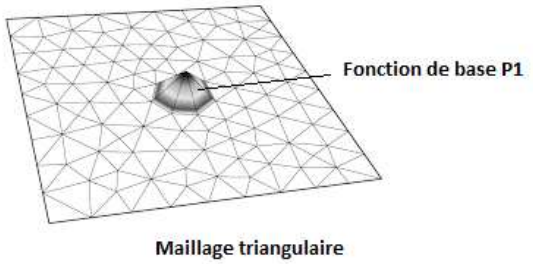


FIGURE 2.4 – Maillage triangulaire pour un domaine polygonal en 2D.

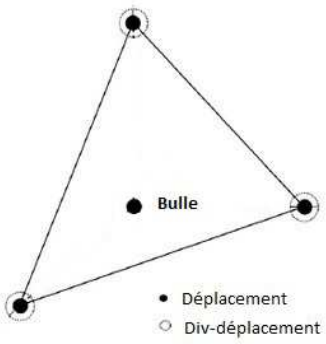


FIGURE 2.5 – P1 + bulle en déplacement u et P1 en div-déplacement ψ.

Soit V_h l'espace d'interpolation par déplacement d'élément fini et M_h est l'espace d'interpolation par div-déplacement d'élément fini (correspondant aux espaces du problème continu respectivement $V(\Omega)$ et $M = L_0^2(\Omega)$).
Les fonctions de l'espace V_h sont déterminées par leurs valeurs dans chacun des sommets du maillage. D'ailleurs la dimension de l'espace V_h est $N - n_s$, avec N est le nombre global de sommets et de n_s le nombre de sommets aux limites. Le problème d'éléments finis mixte est défini comme suit :

Nous définissons les espaces approchés de la forme suivante : (pour faciliter la formulation, nous notons la restriction de u_h et ψ_h sur K par u_h et ψ_h respectivement)
Pour tout, $(u_h, \psi_h) \in V_h \times M_h \subset V \times M$,

$$u_h = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^K \varphi_i^K + \beta^K \mu^K(x) \ , \ \alpha_i^K, \beta^K \in \mathbb{R}^2 \tag{2.115}$$

$$\psi_h = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^K \varphi_i^K \ , \ \theta_i^K \in \mathbb{R} \ , \ \forall K \in \mathtt{T}_h. \tag{2.116}$$

Alors que les espaces approchés moins contraingnants V_h et M_h s'écrivent sous la forme :

$$V_h = \{u_h \in V / u_h|_K = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^K \varphi_i^K + \beta^K \mu^K(x) \ , \ \forall K \in T_h\}, \tag{2.117}$$

$$M_h = \{\psi_h \in M / \psi_h|_K = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^K \varphi_i^K \ , \ \forall K \in T_h\}. \tag{2.118}$$

Les espace V_h et M_h sont moins contraignants grâce aux conditions aux limites $C_{A,B}$, ce qui nous exempte de la création de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange causé par la condition aux limites de Dirichlet non homogène. Le problème approché est formulé sous la forme :
Trouver $(u_h, \psi_h) \in V_h \times M_h$

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b_\Gamma(v_h, \psi_h) = L_h(v_h), \\ \qquad b(u_h, q_h) - d_h(\psi_h, q_h) = 0. \end{cases} \tag{2.119}$$

$\forall v_h \in V_h$, $\forall q_h \in M_h$, dont :

$$a(u_h, v_h) = \int_K \mu \nabla u_h : \nabla v_h dK \tag{2.120}$$

$$+ \int_{\Gamma_h} B^{-1} A u_h . v_h d\Gamma_h, \tag{2.121}$$

$$b(v_h, q_h) = \int_K (\lambda + \mu) q_h \nabla . v_h dK, \tag{2.122}$$

$$b_\Gamma(v_h, q_h) = b(v_h, q_h) - \int_{\Gamma_h} \mu q_h n_K . v_h d\Gamma_h, \tag{2.123}$$

$$d(\psi_h, q_h) = \int_K (\lambda + \mu)\psi_h q_h dK, \tag{2.124}$$

$$L(v_h) = \int_K f.v_h dK + \int_{\Gamma_h} B^{-1} g_h . v_h d\Gamma_h. \tag{2.125}$$

$\Gamma_h = \Gamma \bigcap \partial K$ et n_K la normale sur K . L'existence d'une solution unique de la formulation mixte (2.119) est prouvée par l'utilisation de la continuité des formes bilinéaires a sur $V_h \times V_h$, b_Γ sur $V_h \times M_h$, b sur $V_h \times M_h$ et d sur $M_h \times M_h$ chose qui est claire en utilisant l'inégalité de Korn. D'autre part, la coercivité de la forme bilinéaire a sur V_h et d sur M_h se tient à l'aide de leur coercivité sur $V(\Omega)$ et $M(\Omega)$ respectivement depuis $V_h \subset V(\Omega)$. La condition uniforme de $\inf - \sup$ de la forme bilinéaire b par rapport à la taille du maillage est traitée par D.N Arnold et al. 1984 dans [31]. Nous allons démontrer que la condition uniforme de $\inf - \sup$ pour la forme bilinéaire b_Γ sur $V_h \times M_h$ implique que nous devons monter l'existence d'une constante $\vartheta > 0$ indépendante de la taille du maillage comme le théorème suivant le prouve :

Théorème 13. Il existe une constante $\vartheta > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall q_h \in M_h \; \exists u_h \in V_h, u_h \neq 0, \\ b_\Gamma(u_h, q_h) \geq \vartheta \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} . \end{aligned} \tag{2.126}$$

Ce théorème garantit la vérification de la condition $\inf - \sup$ de la forme bilinéaire b_Γ. Nous notons que pour toute $u_h \in V_h$ nous avons :

$$b_\Gamma(u_h, q_h) = b(u_h, q_h) - \int_{\Gamma_h} \mu \, q_h \, n_K . v_h \, d\Gamma_h \tag{2.127}$$

Démonstration. Dans un premier temps nous démontrons que la forme bilinéaire b vérifie (2.126) du théorème (13). On suppose que la triangulation $\mathtt{T}_h$ est uniformément régulière.
Soit q_h est fixé dans M_h. Le fait que $M_h \subset M$, alors la forme bilinéaire b vérifie la

condition $\inf - \sup$ dans $V \times M$. Alors il existe $u \in V$ tel que :

$$b(u, q_h) \geq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} . \tag{2.128}$$

Avec $\beta > 0$ indépendamment de q_h et u dépend de q_h. Pour l'inconnue u dans l'équation (2.128), nous voulons montrer qu'il existe $u_h \in V_h$ vérifiant l'équation suivante :

$$b(u_h, q_h) = b(u, q_h), \tag{2.129}$$

$$\parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \leq c \parallel u \parallel_{1,\Omega}, \tag{2.130}$$

Les relations (2.129) et (2.130) font l'objet du lemme (14) ci-dessous, où $c > 0$ est indépendant de q_h et h, en effet si (2.129) est vérifié.

$$b(u_h, q_h) = b(u, q_h) \geq \beta \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{2.131}$$

$$\geq \frac{\beta}{c} \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega}, \tag{2.132}$$

en mettant $\beta^{'} = \frac{\beta}{c}$. nous pouvons facilement vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \mid \mu q n.u \mid d\Gamma \leq c^{'} \mid \mu \mid \parallel u \parallel_{1,\Omega} \parallel q \parallel_{0,\Omega}, \tag{2.133}$$

Puis, $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$ on obtient :

$$\int_{\Gamma} \mid \mu q_h n.u_h \mid d\Gamma \leq c^{'} \mid \mu \mid \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{2.134}$$

En combinant (2.134) et (2.131) et nous supposons que $\mu q_h n.u_h$ adopte un signe négatif, alors nous obtenons :

$$b_{\Gamma}(u_h, q_h) \geq (\beta^{'} - c^{'})\mu \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \tag{2.135}$$

Si nous supposons $\mu < \frac{\beta^{'}}{c^{'}}$, nous avons $\vartheta_0 = (\beta^{'} - c^{'})\mu$ alors quelque soit le signe de $\mu q_h n.u_h$ nous déduisons que :

$$b_{\Gamma}(u_h, q_h) \geq \min(\vartheta_0, \beta^{'}) \parallel u_h \parallel_{1,\Omega} \parallel q_h \parallel_{0,\Omega} \tag{2.136}$$

On pose $\vartheta = \min(\vartheta_0, \beta^{'})$, cela signifie que nous répondons au théorème (13) . $\square$

Lemme 14. Nous avons $u_h \in V_h$, $c > 0$, et nous supposons u soit fixe, tel que :

$$b(u_h, q_h) = b(u, q_h) \; \forall q_h \in M_h, \tag{2.137}$$

$$\| \, u_h \, \|_{1,\Omega} \leq c \, \| \, u \, \|_{1,\Omega} \, . \tag{2.138}$$

Démonstration. Dans un premier temps nous définissons l'opérateur linéaire $R_h \in \mathrm{L(V, V_h)}$, qui vérifient : $\forall v_h \in V_h, \; \exists! \; v \in V$, alors $R_h v = v_h$. Cet opérateur est un projecteur de V on V_h comme définit . En effet, Lax Milgram assure l'existence du problème variationnel unique (2.139) .
Trouvez v dans V pour :

$$\int_\Omega \nabla(R_h v - v).\nabla v_h dx = 0 \; , \; \forall v_h \in V_h \tag{2.139}$$

si on met $v_h = R_h v$ (2.139), nous obtenons :

$$\| \, \nabla R_h v \, \|^2_{0,\Omega} = \int_\Omega \nabla v.\nabla v_h dx \tag{2.140}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, alors on trouve :

$$\| \, \nabla R_h v \, \|^2_{0,\Omega} \leq \| \, \nabla R_h v \, \|_{0,\Omega} \, \| \, \nabla v \, \|_{0,\Omega} \tag{2.141}$$

et on déduit :

$$\| \, \nabla R_h v \, \|_{0,\Omega} \leq \| \, \nabla v \, \|_{0,\Omega} \tag{2.142}$$

nous trouvons que R_h est continu au sens de $H^1_0(\Omega) \cap V$, et par la densité de $H^1_0(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, cela signifie que :

$$\overline{H^1_0(\Omega) \cap V}^{\|.\|_{1,\Omega}} \subset \; H^1(\Omega), \tag{2.143}$$

on a donc sa continuité dans l'espace V alors, on suppose que l'opérateur R_h vérifie les propriétés suivantes de l'estimation, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ indépendant de h et v .

$$\| \, (R_h v - v) \, \|_{0,\Omega} \leq \; c \, h \, \| \, \nabla v \, \|_{0,\Omega} \tag{2.144}$$

Les résultats ci-dessus sont valables pour tous les $v \in V$.

Maintenant, nous prouvons que la relation (2.137) dans le lemme (14) :

$$\int_{\Omega_h} \nabla.u_h q_h dx = \int_{\Omega_h} \nabla.u q_h dx \ \forall K \in \mathtt{T}_h \tag{2.145}$$

En appliquant la formule verte, nous trouvons que (2.145) est équivalent à :

$$\int_{\Omega_h} \nabla q_h.u_h dx = \int_{\Omega_h} \nabla q_h.u dx. \tag{2.146}$$

Mais ∇q_h est constant lorsque $q_h \in \mathbb{P}_1(K)$. Alors, il suffit de montrer qu'il existe $u_h \in V_h$, tel que :

$$\int_K u_h dx = \int_K u dx \ \forall K \in \mathtt{T}_h. \tag{2.147}$$

En effet, la définition de l'espace V_h, pour chaque fonction u_h de V_h est déterminé par la relation suivante :

$$u_h = \sum_{i=1}^{3} u_h(a_i^K)\lambda_i(x) + \beta^K \mu^K(x) \ \forall x \in K \tag{2.148}$$

soit l'intégrale sur K, nous avons :

$$\int_K u_h dx = \sum_{i=1}^{3} u_h(a_i^K) \int_K \lambda_i(x)dx + \beta^K \int_K \mu^K(x)dx \tag{2.149}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} R_h u(a_i^K) \int_K \lambda_i(x)dx + \beta^K \int_K \mu^K(x)dx \tag{2.150}$$

$$= \int_K R_h u dx = \int_K u dx. \tag{2.151}$$

Nous avons choisi $u_h \in V_h$ tel que, $u_h(a_i^K) = R_h u(a_i^K)$, pour tout a_i^K top de K, qui vérifie (2.137) du lemme (14).
On montre la relation (2.138) du lemme (14), nous avons les relations suivantes :

$$u_{h|_K} = \sum_{i=1}^{3} R_h u(a_i^K)\lambda_i + \beta^K \mu^K, \tag{2.152}$$

$$u_{h|_K} = R_h u + \beta^K \mu^K, \tag{2.153}$$

Nous avons aussi :

$$\| u_h \|^2_{1,\Omega} = \sum_{K \in \mathbf{T_h}} \| u_h \|^2_{1,K} . \tag{2.154}$$

Alors nous obtenons :

$$\| u_h \|^2_{1,\Omega} \leq \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (\| R_h u \|_{1,K} + \| \beta^K \| \| \mu^K \|_{1,K})^2 \tag{2.155}$$

$$\leq 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} (\| R_h u \|^2_{1,K} + \| \beta^K \|^2 \| \mu^K \|^2_{1,K}) \tag{2.156}$$

$$\leq 2 \| R_h u \|^2_{1,\Omega} + 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} \| \beta^K \|^2 \| \mu^K \|^2_{1,K} \tag{2.157}$$

Par la continuité de l'opérateur R_h, nous obtenons :

$$\| u_h \|^2_{1,\Omega} \leq c \| u \|^2_{1,\Omega} + 2 \sum_{K\in\mathbf{T_h}} \| \beta^K \|^2 \| \mu^K \|^2_{1,K}, \tag{2.158}$$

En utilisant la relation (2.137) du lemme (14), et la relation suivante :

$$\int_K u_h dx = \int_K R_h u dx + \beta^K \int_K \mu^K dx, \tag{2.159}$$

on trouve :

$$\beta^K = \frac{\int_K (u - R_h u) dx}{\int_K \mu^K dx} \tag{2.160}$$

En utilisant Cauchy-Schwarz. Cela signifie l'existence de $c_0 > 0$ indépendant de h et de K, ainsi que :

$$\| \beta^K \|^2 \leq c_0 \frac{\| u - R_h u \|^2_{0,K}}{h^2} \tag{2.161}$$

La fonction μ^K est bornée au sens de la norme $\|, \|_{1,K}$, et par la relation (2.144) on obtient la relation (2.138) de lemme (14).
Enfin, nous avons montré aussi que l'élément $(P1 + bubble, P1)$ satisfait la condition discrète $\inf - \sup$. □

Théorème 15. Il existe une constante strictement positive ξ, pour tout $u_h \in V_h$ nous avons :

$$a(u_h, u_h) \geq \xi \| u_h \|^2_{1,\Omega} \tag{2.162}$$

La formule (2.162) indique que la forme bilinéaire a est coércive dans l'espace V_h .

Démonstration. Nous définissons la forme bilinéaire a_0 sur V_h :

$$a_0(u_h, v_h) = \int_\Omega \mu \nabla u_h : \nabla v_h d\Omega \tag{2.163}$$

Avec (2.163), la forme bilinéaire peut être écrite sous la forme :

$$a(u_h, v_h) = a_0(u_h, v_h) + \int_\Gamma B^{-1} A u_h . v_h d\Gamma \tag{2.164}$$

Pour montrer que a_0 vérifie cette propriété, il suffit de montrer qu'il est définitivement positif, puisque l'espace V_h est de dimension finie.
Si $a(u_h, v_h)$ est nul, alors u_h est constant sur chaque triangle. Il y a continuité au milieu de chaque arête, alors u_h est constant. Il disparaît au milieu du bord contenant aux limites de Ω. Donc, u_h est nul. Alors on peut écrire :

$$a_0(u_h, u_h) \geq \xi_0 \parallel u_h \parallel^2_{1,\Omega}, \tag{2.165}$$

En utilisant (2.14), il est facile de montrer qu'il existe une constante strictement positive ν, et pour tout $u_h \in V_h$

$$\int_\Gamma \mid B^{-1} A u_h . u_h \mid d\Gamma \leq \nu \parallel u_h \parallel^2_{1,\Omega} \tag{2.166}$$

si $B^{-1} A u_h . u_h < 0$, avec (2.165) et (2.166), nous obtenons :

$$a(u_h, u_h) \geq (\xi_0 - \nu) \parallel u_h \parallel^2_{1,\Omega}, \tag{2.167}$$

tant que $\xi_0 - \nu > 0$.
Sinon $B^{-1} A u_h . u_h > 0$, nous avons :

$$a(u_h, u_h) \geq a_0(u_h, u_h) \tag{2.168}$$

alors, on obtient :

$$a(u_h, u_h) \geq \xi_0 \parallel u_h \parallel^2_{1,\Omega} . \tag{2.169}$$

Enfin, nous combinons (2.169) et (2.167), il en résulte que :
$a(u_h, u_h) \geq (\xi_0 - \nu) \parallel u_h \parallel^2_{1,\Omega}$ pour tout $u_h \in V_h$, tant que $\xi_0 - \nu > 0$. □

2.3.2 Exclusion des degrés de liberté associés aux bulles

Pour éliminer les degrés de liberté associés aux bulles, il suffit d'exprimer β^K dans la relation (2.115) en fonction de f, de l'inconnu ψ et de la fonction bulle μ^K . En effet, soient $(i_j)_{j=1,2,3}$ les numéros (globaux) des 3 sommets du triangle K. On a

$\forall v_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = \int_K \mu \nabla u_h : \nabla v_h dK + \int_{\Gamma_h} B^{-1} A u_h . v_h d\Gamma_h, \tag{2.170}$$

En particulier, si on prend pour $l = 1, 2$, $v_h^l = \mu^K$, puisque les bulles sont nulles sur le bord de K alors l'équation (2.170) devient :

$$a(u_h^l, \mu^K) = \int_K \mu \nabla u_h^l : \nabla \mu^K dK, \tag{2.171}$$

D'après (2.115) on a $u_h^l|_K = (\sum_{j=1}^3 \alpha_{i_j}^l \varphi_{i_j}^K) + \beta_l^K \mu^K(x)$

$$a(u_h^l, \mu^K) = \int_K \mu \nabla [(\sum_{j=1}^3 \alpha_{i_j}^l \varphi_{i_j}^K) + \beta_l^K \mu^K(x)] . \nabla \mu^K dK, \tag{2.172}$$

$$= \int_K \mu \sum_{j=1}^3 \alpha_{i_j}^l \nabla \varphi_{i_j}^K . \nabla \mu^K dK + \int_K \mu \beta_l^K \nabla \mu^K(x) . \nabla \mu^K dK. \tag{2.173}$$

En appliquant la formule de Green on a :

$$\int_K \nabla \varphi_{i_j}^K . \nabla \mu^K dK = - \int_K \triangle \varphi_{i_j}^K \mu^K dK + \int_{\partial K} \nabla \varphi_{i_j}^K . n \mu^K d\partial K \tag{2.174}$$

Puisque les φ_{i_j} sont affine, alors $\triangle \varphi_{i_j} = 0$ et $\mu^K = 0$ sur ∂K alors :

$$a(u_h^l, \mu^K) = \int_K \mu \beta_l^K \nabla \mu^K(x) . \nabla \mu^K dK. \tag{2.175}$$

Or d'après le système (2.119) on a :

$$a(u_h, \mu^K) = L(\mu^K) - b_\Gamma(\mu^K, \psi_h) \tag{2.176}$$

Ce qui implique que pour tout $l = 1, 2$:

$$\int_K \mu \beta_l^K \nabla \mu^K . \nabla \mu^K dK = \int_K f^l \mu^K dK - \int_K (\lambda + \mu) \psi_h \frac{\partial \mu^K}{\partial x_l} dK \tag{2.177}$$

Puisque $\psi_h|_K = \sum_{j=1}^3 \theta_{i_j} \varphi_{i_j}^K$, alors

$$\beta_l^K \mu \|\nabla \mu^K\|_{0,K}^2 = \int_K f^l \mu^K dK - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \theta_{i_j} \int_K \varphi_{i_j}^K \frac{\partial \mu^K}{\partial x_l} dK \tag{2.178}$$

Finalement, on obtient pour tout $l = 1, 2$:

$$\beta_l^K = \frac{1}{\mu \|\nabla \mu^K\|_{0,K}^2} \left(\int_K f^l \mu^K dK - (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{3} \theta_{i_j} \int_K \varphi_{i_j}^K \frac{\partial \mu^K}{\partial x_l} dK \right) \tag{2.179}$$

2.3.3 Problème algébrique

Dans cette section, nous présentons les matrices A, B_γ, B, D, L liées aux formes bilinéaires discrètes a_h, $b_{\Gamma h}$, b_h,d_h, L_h respectivement et nous exprimons les formes bilinéaires selon les opérateurs aussi bien définis ici :

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = (Au_h, v_h), \\ b_{\Gamma h}(v_h, q_h) = (B_\Gamma v_h, q_h), \\ b_h(u_h, q_h) = (Bv_h, q_h), \\ d_h(\psi_h, q_h) = (D\psi_h, q_h), \\ L_h(v_h) = Lv_h, \end{cases} \tag{2.180}$$

$\forall (u_h, v_h) \in V_h(\Omega) \times V_h(\Omega)$,
$\forall (\psi_h, q_h) \in M_h(\Omega) \times M_h(\Omega)$
Avec (2.180), nous trouvons que la formulation discrète (2.119) peut être exprimée comme un système d'équations selon la forme suivante :

$$\begin{cases} A\ u_h + B_\Gamma^t\ \psi_h = L, \\ B\ u_h - D\ \psi_h = 0, \end{cases} \tag{2.181}$$

Alors la formulation discrète peut également être exprimée par un système d'équations linéaires comme suit :

$$\begin{pmatrix} A & B_\Gamma^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \psi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.182}$$

avec $u_h = (u_x, u_y)^t$, nous pouvons exprimer le système algébrique (2.181) comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_x & 0 & B_{\Gamma,x}^t \\ 0 & A_y & B_{\Gamma,y}^t \\ B_x & B_y & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.183}$$

Soit $\{\varphi_1; \varphi_2....; \varphi_n\}$ la base d'éléments finis formée des fonctions scalaires φ_i, $i = 1...n$. Dans la pratique, les deux composants $(u^x h, u^y h)$ de u_h sont toujours appréciés par un élément fini de l'espace. Soit N le nombre des nœuds dans le maillage des éléments finis, et $n = N - n_s$ avec ns le nombre de sommets sur les bords. La base de l'espace V_h est :

$$B_{V_h} = \{\phi_1 = (\varphi_1, 0)...\phi_n \tag{2.184}$$

$$= (\varphi_n, 0), \phi_{n+1} = (0, \varphi_1)...\phi_{2n} = (0, \varphi_n)\}, \tag{2.185}$$

Alors, $u_h = (u_h^x, u_h^y) \in V_h$ peut être donnée par la relation :

$$u_h = u_1^x \phi_1 + ... + u_n^x \phi_n + u_1^y \phi_{n+1} + ... + u_n^y \phi_{2n}, \tag{2.186}$$

Pour un triangle donné K_k, le champ de déplacement u_h et la divergence ψ_h sont approximés par des combinaisons linéaires des fonctions de base de la forme suivante :

$$u_h^x = \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \varphi_{k_i} + u_{xb} \varphi_b, \tag{2.187}$$

$$u_h^y = \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \varphi_{k_i} + u_{yb} \varphi_b, \tag{2.188}$$

$$\psi_h = \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i} \tag{2.189}$$

On réécrit le système (2.119) sur un élément K_k de triangulation. Pour tout $k = 1, ...n_t$, et en particulier on prend $v_h^x = v_h^y = \varphi_{k_j} + \varphi_b$ et $q_h = \varphi_{k_j}$, pour tout $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} a_x(u_h^x, \varphi_{k_j} + \varphi_b) + b_\Gamma^x(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \psi_h) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ a_y(u_h^y, \varphi_{k_j} + \varphi_b) + b_\Gamma^y(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \psi_h) = L_y(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ b^x(u_h^y, \varphi_{k_j}) + b^y(u_h^y, \varphi_{k_j}) - d(\psi_h, \varphi_{k_j}) = 0. \end{cases} \tag{2.190}$$

Or on a $u_h^x = \sum_{i=1}^3 u_{k_i}^x \varphi_{k_i} + u_b^x \varphi_b$, $u_h^y = \sum_{i=1}^3 u_{k_i}^y \varphi_{k_i} + u_b^y \varphi_b$ et $\psi_h = \sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}$, le sytème (2.190) devient :

$$\begin{cases} a_x(\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^x \varphi_{k_i} + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j} + \varphi_b) + b_\Gamma^x(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ a_y(\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^y \varphi_{k_i} + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j} + \varphi_b) + b_\Gamma^y(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_y(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ b^x(\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^x \varphi_{k_i} + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) + b^y(\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^y \varphi_{k_i} + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) - d(\sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) = 0. \end{cases} \tag{2.191}$$

Puisque la fonction bubble φ_b est nulle sur le bord de chaque élément K_K le système (2.191) devient :

$$\begin{cases} \int_{K_k} ((\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^x \mu \nabla \varphi_{k_i}) + u_b^x \nabla \varphi_b).(\nabla \varphi_{k_j} + \nabla \varphi_b) dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (B^{-1}A)_{11} \sum_{i=1}^3 u_{k_i} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \\ \qquad + b_\Gamma(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ \int_{K_k} ((\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^y \mu \nabla \varphi_{k_i}) + u_b^y \nabla \varphi_b).(\nabla \varphi_{k_j} + \nabla \varphi_b) dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (B^{-1}A)_{22} \sum_{i=1}^3 u_{k_i} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \\ \qquad + b_\Gamma(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ b^x((\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^x \varphi_{k_i}) + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) + b^y((\sum_{i=1}^3 u_{k_i}^y \varphi_{k_i}) + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) - d(\sum_{i=1}^3 \psi_{k_i} \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) = 0. \end{cases} \tag{2.192}$$

D'aprés la relation (2.174) on a pour tout $i = 1, 2, 3$:

$$\int_{K_k} \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_b = 0 \tag{2.193}$$

Donc le système (2.192) devient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \Big(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (B^{-1}A)_{11} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \Big) + u_b^x \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\ \qquad + b_\Gamma(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \Big(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (B^{-1}A)_{22} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \Big) + u_b^y \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\ \qquad + b_\Gamma(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_y(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ b^x((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \varphi_{k_i}) + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) + b^x((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \varphi_{k_i}) + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) - d(\sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) = 0. \end{cases} \tag{2.194}$$

On va exprimer le système (2.194) selon les deux composantes de $u_{k_i} = (u_{k_i}^x, u_{k_i}^y)$, en supposant que $(B^{-1}A)_{ij} = \alpha_{ij}$ et que $(B^{-1})_{ij} = \beta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2$.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \Big(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} \alpha_{11} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h + u_b^x \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\ \qquad + b_\Gamma^x(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_x(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \Big(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} \alpha_{22} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h + u_b^y \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\ \qquad + b_\Gamma^y(\varphi_{k_j} + \varphi_b, \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}) = L_y(\varphi_{k_j} + \varphi_b), \\ b^x((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \varphi_{k_i}) + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) + b^y((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \varphi_{k_i}) + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) - d(\sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) = 0. \end{cases} \tag{2.195}$$

La formes bilinéaires b_Γ^x et b_Γ^y apparaissent dans le système (2.195) et s'expriment de la façon suivante :

$$b_\Gamma^x(\varphi_{k_j}+\varphi_b,\sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}\varphi_{k_i}) = b_\Gamma^x(\varphi_{k_j},\sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}\varphi_{k_i}) + b_\Gamma^x(\varphi_b,\sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}\varphi_{k_i}) \tag{2.196}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i} b_\Gamma^x(\varphi_{k_j},\varphi_{k_i}) + \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i} b_\Gamma^x(\varphi_b,\varphi_{k_i}) \tag{2.197}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}[\int_{K_k}(\mu+\lambda)\frac{\partial\varphi_{k_j}}{\partial x}\varphi_{k_i} - \int_{K_k\cap\Gamma_h}\mu\varphi_{k_j}n_x\varphi_{k_i}] \tag{2.198}$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}[\int_{K_k}(\mu+\lambda)\frac{\partial\varphi_b}{\partial x}\varphi_{k_i} - \int_{K_k\cap\Gamma_h}\mu\varphi_b n_x\varphi_{k_i}] \tag{2.199}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}[\int_{K_k}(\mu+\lambda)\frac{\partial(\varphi_{k_j}+\varphi_b)}{\partial x}\varphi_{k_i} - \int_{K_k\cap\Gamma_h}\mu\varphi_{k_j}n_x\varphi_{k_i}] \tag{2.200}$$

De la même manière on aura :

$$b_\Gamma^y(\varphi_{k_j}+\varphi_b,\sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}\varphi_{k_i}) = \sum_{i=1}^{3}\psi_{k_i}[\int_{K_k}(\mu+\lambda)\frac{\partial(\varphi_{k_j}+\varphi_b)}{\partial y}\varphi_{k_i} - \int_{K_k\cap\Gamma_h}\mu\varphi_{k_j}n_y\varphi_{k_i}] \tag{2.201}$$

La formes linéaires L_x et L_x apparaissent dans le système (2.195) et s'expriment de la façon suivante :

$$L_x(\varphi_{k_j}+\varphi_b) = \int_{K_k}(\varphi_{k_j}+\varphi_b)f_x dK_k + \int_{K_k\cap\Gamma_h}(\beta_{11}+\beta_{21})g_x\varphi_{k_j}d\Gamma_h \tag{2.202}$$

$$L_y(\varphi_{k_j}+\varphi_b) = \int_{K_k}(\varphi_{k_j}+\varphi_b)f_y dK_k + \int_{K_k\cap\Gamma_h}(\beta_{22}+\beta_{12})g_y\varphi_{k_j}d\Gamma_h \tag{2.203}$$

Conçernant les formes bilinéaires b^x et b^y apparaissent dans le système (2.195) s'expriment de cette manière :

$$b^x((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \varphi_{k_i}) + u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) = b(\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) + b^x(u_b^x \varphi_b, \varphi_{k_j}) \tag{2.204}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial x} \varphi_{k_j} + u_b^x \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} \varphi_{k_j} \tag{2.205}$$

$$b^y((\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \varphi_{k_i}) + u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) = b(\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) + b^y(u_b^y \varphi_b, \varphi_{k_j}) \tag{2.206}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial y} \varphi_{k_j} + u_b^y \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y} \varphi_{k_j} \tag{2.207}$$

La forme bilinéaire d apparaît dans le système (2.195) et s'exprime de la façon ci-dessou :

$$d(\sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) = \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} d(\varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}) \tag{2.208}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \int_{K_k} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j}. \tag{2.209}$$

On injecte les relations (2.209), (2.204), (2.202), (2.201), (2.196) dans le système (2.195), on obtient un nouveau stytème qui nous aidera à extraire tous les éléments des matrices locales associées à chaque élément K_k : pour tout $k = 1, 2...n_t$, alors

pour tout $j = 1, 2, 3$

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \left(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} \alpha_{11} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \right) + u_b^x \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\
\qquad + \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \left[\int_{K_k} (\mu + \lambda) \frac{\partial (\varphi_{k_j} + \varphi_b)}{\partial x} \varphi_{k_i} - \int_{K_k \cap \Gamma_h} \mu \varphi_{k_j} n_x \varphi_{k_i} \right] \\
\qquad = \int_{K_k} (\varphi_{k_j} + \varphi_b) f_x dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (\beta_{11} + \beta_{21}) g_x \varphi_{k_j} d\Gamma_h \\
\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \left(\int_{K_k} \mu \nabla \varphi_{k_i} . \nabla \varphi_{k_j} dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} \alpha_{22} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} d\Gamma_h \right) + u_b^y \int_{K_k} \nabla \varphi_b . \nabla \varphi_b dK_k \\
\qquad + \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \left[\int_{K_k} (\mu + \lambda) \frac{\partial (\varphi_{k_j} + \varphi_b)}{\partial y} \varphi_{k_i} \right. \\
\qquad \left. - \int_{K_k \cap \Gamma_h} \mu \varphi_{k_j} n_y \varphi_{k_i} \right] \\
\qquad = \int_{K_k} (\varphi_{k_j} + \varphi_b) f_y dK_k + \int_{K_k \cap \Gamma_h} (\beta_{22} + \beta_{12}) g_y \varphi_{k_j} d\Gamma_h \\
\sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^x \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial x} \varphi_{k_j} + u_b^x \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} \varphi_{k_j} + \sum_{i=1}^{3} u_{k_i}^y \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial y} \varphi_{k_j} \\
\qquad + u_b^y \int_{K_k} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y} \varphi_{k_j} - \sum_{i=1}^{3} \psi_{k_i} \int_{K_k} \varphi_{k_i} \varphi_{k_j} = 0.
\end{cases}
\tag{2.210}
$$

Le système linéaire (2.183), attaché au système discret (2.181) est évalué sur chaque triangle K_k pour tout $k = 1, ..n_t$, avec n_t est le nombre des éléments(triangles). Les éléments des matrices locales en miniscule et les matrices globales sont désignées par des lettres majuscules, et elles sont données par la sommation directe suivante : Les éléments des matrices locales sur élément K_k pour tout $k = 1, ...n_t$ ont été conçus à partir du système (2.210), ils sont donnés comme :

$$
a_{ji}^0 = \int_{K_k} \mu \nabla (\varphi_{k_i} + \varphi_b) \nabla (\varphi_{k_j} + \varphi_b) dK \tag{2.211}
$$

$$
A_0 = \sum_{K \in T_h} a_{ji}^0, \tag{2.212}
$$

$$a_{ji}^{x} = a_{ij}^{0} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_h} \alpha_{11}\varphi_i\varphi_j d\Gamma_h, \tag{2.213}$$

$$A_x = \sum_{K\in T_h} a_{ji}^{x}, \tag{2.214}$$

$$a_{ji}^{y} = a_{ij}^{0} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_h} \alpha_{22}\varphi_i\varphi_j d\Gamma_h, \tag{2.215}$$

$$A_y = \sum_{K\in T_h} a_{ji}^{y}, \tag{2.216}$$

$$b_{ji}^{x} = \int_K (\lambda+\mu)\frac{\partial(\varphi_{k_i}+\varphi_b)}{\partial x}\varphi_{k_j} dK \tag{2.217}$$

$$B^x = \sum_{K\in T_h} b_{ji}^{x}, \tag{2.218}$$

$$b_{ji}^{y} = \int_K (\lambda+\mu)\frac{\partial(\varphi_{k_i}+\varphi_b)}{\partial y}\varphi_{k_j} dK \tag{2.219}$$

$$B^y = \sum_{K\in T_h} b_{ji}^{y}, \tag{2.220}$$

$$b_{\Gamma_{ji}}^{x} = b_{ji}^{x} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_h} \mu\,\varphi_{k_i} n_{ij}\varphi_j\, dE \tag{2.221}$$

$$B_\Gamma^x = \sum_{K\in T_h} b_{\Gamma_{ji}}^{x}, \tag{2.222}$$

$$b_{\Gamma_{ji}}^{y} = b_{ij}^{y} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_h} \mu\,\varphi_{k_i} n_{ij}\varphi_j\, dE \tag{2.223}$$

$$B_\Gamma^y = \sum_{K\in T_h} b_{\Gamma_{ji}}^{y}, \tag{2.224}$$

$$d_{ji} = \int_K (\lambda+\mu)\,\varphi_{k_i}\,\varphi_j dK \tag{2.225}$$

$$D = \sum_{K\in T_h} d_{ji}, \tag{2.226}$$

$$l_i^{0x} = \int_K f_1(\varphi_{k_i} + \varphi_b)dK \tag{2.227}$$

$$l_i^x = l_i^{0x} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_{\Gamma h}} (\beta_{11} + \beta_{21})g_1\varphi_i dE \tag{2.228}$$

$$L^x = \sum_{K\in T_h} l_i^x, \tag{2.229}$$

$$l_i^{0y} = \int_K f_2(\varphi_{k_i} + \varphi_b)dK \tag{2.230}$$

$$l_i^y = l_i^{0y} + \int_{E\cap K\subset\Gamma_{\Gamma h}} (\beta_{12} + \beta_{22})g_2\varphi_i \tag{2.231}$$

$$L^y = \sum_{K\in T_h} l_i^y, \tag{2.232}$$

sachant que $f = (f_1, f_2)^t, g = (g_1, g_2)^t$, $n_{ij} = 0, 1$ ou -1 .

Matrices élémentaires :

Dans ce paragraphe, nous calculons les éléments des matrices élémentaires (2.211)...(2.231) afin de les assembler dans une seule matrice. Nous utilisons des calculs qui ont été fait par Jonas Koko Limos dans l'article [16], et nous les adaptons selon la particularité de notre problème .

Pour un triangle K. Les fonctions de base définies par :

$$\varphi_1(x, y) = 1 - x - y \ , \ \varphi_2(x, y) = x, \tag{2.233}$$

$$\varphi_3(x, y) = y \ , \ \varphi_b = 27\varphi_1\varphi_2\varphi_3. \tag{2.234}$$

Soient $(x_i; y_i)_{i=1,2,3}$ les sommets d'un triangle donné dans le maillage.

Nous avons besoins des notations suivantes :

$$x_{ij} = x_i - x_j \ , \ y_{ij} = y_i - y_j \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.235}$$

et :

$$x^{(K)} = \begin{pmatrix} x_{32} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(K)} \\ x_2^{(K)} \\ x_3^{(K)} \end{pmatrix} \tag{2.236}$$

$$y^{(K)} = \begin{pmatrix} y_{32} \\ y_{13} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(K)} \\ y_2^{(K)} \\ y_3^{(K)} \end{pmatrix} \tag{2.237}$$

La partie nonbubble de la matrice A est écrite comme suit :

$$A_0^K = (a_{ij}^0)_{i,j=1,2,3} = \frac{\mu}{4 \mid K \mid}(y^{(K)}y^{(K)t} + x^{(K)}x^{(K)t}), \tag{2.238}$$

avec $\mid K \mid = \frac{x_3^{(K)}y_1^{(K)} - x_2^{(K)}y_3^{(K)}}{2}$. La partie bubble de A_0 est $A_{b.} = (a_{bj})_{j=1,2,3} = \mathbf{0}_{31}$, avec $\mathbf{0}_{31}$ est un vecteur colonne zéro à 3 éléments .
Pour la diagonale nous avons :

$$a_{bb} = \frac{81\mu}{10} \mid K \mid (\mid \nabla\varphi_1 \mid^2 \tag{2.239}$$

$$+ \mid \nabla\varphi_2 \mid^2 + \nabla\varphi_1.\nabla\varphi_2) \tag{2.240}$$

$$= \frac{81\mu}{40}\frac{1}{\mid K \mid}((x_1^{(K)})^2 + (x_2^{(K)})^2 \tag{2.241}$$

$$+ (y_1^{(K)})^2 + (y_2^{(K)})^2 + x_1^{(K)}x_2^{(K)} + y_1^{(K)}y_2^{(K)}) \tag{2.242}$$

Soit la matrice de rigidité symétrique A_0, alors nous avons :

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^K & A_{b.} \\ A_{b.}^t & a_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^K & 0 \\ 0 & a_{bb} \end{pmatrix} \tag{2.243}$$

la matrice de masse D est donnée pour $i, j = 1, 2, 3$:

$$D_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\mu + \lambda}{6} \mid K \mid , \ i = j \\ \dfrac{\mu + \lambda}{12} \mid K \mid \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.244}$$

Maintenant, nous allons implémenter les matrices de divergence, les matrices élémentaires de la partie nonbubble B_x^K et B_y^K sont données par :

$$B_x^K = \frac{1}{6}(\mu + \lambda) \begin{pmatrix} y^{(K)t} \\ y^{(K)t} \\ y^{(K)t} \end{pmatrix} \quad , \quad B_y^K = \frac{1}{6}(\mu + \lambda) \begin{pmatrix} x^{(K)t} \\ x^{(K)t} \\ x^{(K)t} \end{pmatrix} \tag{2.245}$$

la partie bubble est donnée par :

$$B_{xb} = (\mu + \lambda)\frac{9}{40} y^{(K)_t} \ , \ B_{yb} = (\mu + \lambda)\frac{9}{40} x^{(K)_t} \tag{2.246}$$

Finalement, nous obtenons :

$$B_x = \begin{pmatrix} B_x^K \\ B_{xb} \end{pmatrix} \quad , \quad B_y = \begin{pmatrix} B_y^K \\ B_{yb} \end{pmatrix} \tag{2.247}$$

La partie nonbubble des forces volumiques qui représente la partie droite du système, est donnée par :

$$l_K^{0x} = \frac{\mid K \mid}{3} f_{1K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad l_K^{0y} = \frac{\mid K \mid}{3} f_{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.248}$$

dont :

$$f_{iK} = \frac{(f_i(x_1) + f_i(x_2) + f_i(x_3))}{3} \quad , \quad i = 1, 2 \tag{2.249}$$

la partie bubble élémentaire se présente par l'équation suivante :

$$l_{xb} = \frac{9}{20} \mid K \mid f_{1K} \ , \ l_{yb} = \frac{9}{20} \mid K \mid f_{2K} \tag{2.250}$$

finalement, nous obtenons :

$$l_{0x} = \begin{pmatrix} l_K^{0x} \\ l_{xb} \end{pmatrix} \quad , \quad l_y = \begin{pmatrix} l_K^{0y} \\ l_{yb} \end{pmatrix} \tag{2.251}$$

Maintenant, nous allons construire la matrice de 11×11 correspondante au système (2.183) :

$$\begin{pmatrix} A_x^k & 0 & 0 & 0 & B_{\Gamma,x}^t \\ 0 & a_{bb} & 0 & 0 & B_{b\Gamma,x}^t \\ 0 & 0 & A_y^k & 0 & B_{\Gamma,y}^t \\ 0 & 0 & 0 & a_{bb} & B_{b\Gamma,y}^t \\ B_x^K & B_{bx} & B_y^K & B_{by} & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_{bx} \\ u_y \\ u_{by} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_K^x \\ l_{bx} \\ l_K^x \\ l_{by} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.252}$$

Nous allons classer le système (2.252) pour décrire la partie bubble de l'inconnu u en fonction de la partie nonbubble de u et ψ, afin de pouvoir l'éliminer par la suite :

$$\begin{pmatrix} A_x^k & 0 & 0 & 0 & B_{\Gamma,x}^t \\ 0 & A_y^k & 0 & 0 & B_{\Gamma,y}^t \\ 0 & 0 & a_{bb} & 0 & B_{b\Gamma,x}^t \\ 0 & 0 & 0 & a_{bb} & B_{b\Gamma,y}^t \\ B_x^K & B_y^K & B_{bx} & B_{by} & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_{bx} \\ u_{by} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x^K \\ l_y^K \\ l_{bx} \\ l_{by} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.253}$$

à partir de la ligne 3 et 4 du système (2.253), nous déduisons :

$$\begin{aligned} u_{bx} &= a_{bb}^{-1}(l_{bx} - B_{b\Gamma,x}^t \psi) \\ u_{by} &= a_{bb}^{-1}(l_{by} - B_{b\Gamma,y}^t \psi) \end{aligned} \tag{2.254}$$

avec l'élimination de u_{bx} et u_{by}, nous trouvons le nouveau système linéaire sous la forme suivante : $\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{F}$ tels que : $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \psi \end{pmatrix}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_x^k & 0 & B_{\Gamma,x}^t \\ 0 & A_y^k & B_{\Gamma,y}^t \\ B_x^K & B_y^K & -B_{bx}B_{b\Gamma,x}^t a_{bb}^{-1} - B_{by}B_{b\Gamma,y}^t a_{bb}^{-1} - D \end{pmatrix} \tag{2.255}$$

Le second membre est :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} l_x^K \\ l_y^K \\ -B_{bx}l_{bx}a_{bb}^{-1} - B_{by}l_{by}a_{bb}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.256}$$

2.4 Résultats numériques

La présente section expose les résultats numériques obtenus lors de la résolution du problème de Navier-Lamé en 2D.
Nous présentons plusieurs résultats numériques obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis mixte $(P1 + bublle, P1)$. Nous comparons ces résultats avec ceux du logiciel d'Abaqus et de la méthode des éléments finis ordinaires.

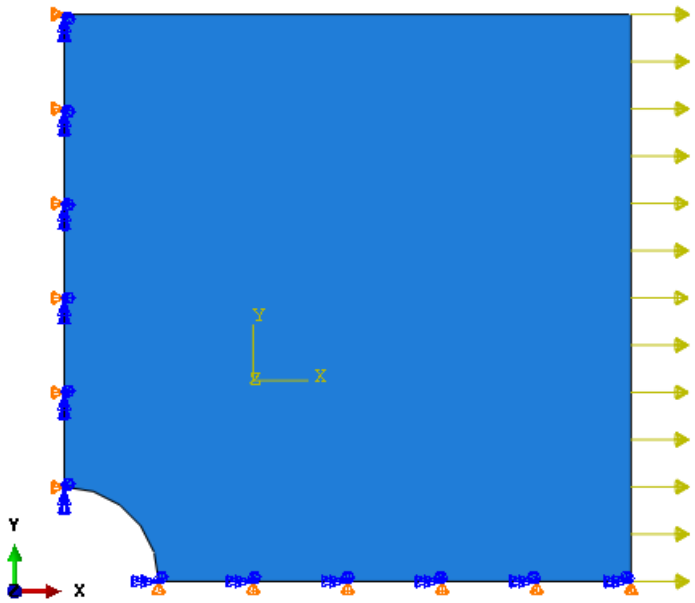


FIGURE 2.6 – Le quart de la plaque trouée au centre

On considére un problème bidimensionnel dont le domaine d'étude Ω est une plaque carrée du matériel plexiglas, trouée au centre.(voir figure 2.6).
Le domaine est homogène. Par raison de symétrie, nous discrétisons que le quart du domaine . On suppose :

- $D = \{x^2 + y^2 \leq 1 \; tel \; que \; : 0 \leq x \leq 1 \; et \; 0 \leq y \leq 1\}$
- Le domaine $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5] \setminus D$
- $(E = 2.90GPa \; , \; \nu = 0.4)$

On impose les conditions aux limites suivantes :
Sur Γ_D, nous prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{2.257}$$

Sur Γ_N :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{2.258}$$

- Le domaine Ω est tendu vers le haut ($x = 5$) avec une charge de surface $g = n = (1, 0)$.
- Les conditions de Dirichlet sont :
  $U_y = 0$ sur : $[1, 5] \times \{0\}$, $U_x = 0$ sur $\{0\} \times [1, 5]$.
- Les charges des forces prennent la valeur $f = (0, -(\mu + \lambda))^t$ pour tous les nœuds.
- Le reste du bord est libre [29].

n dénote la normale extérieure sur le bord $\partial\Omega$.

Nous proposons une solution exacte : $u(x, y) = (xy, xy + x)$.

Cette solution verifie l'équation de Navier-Lamé dans le cas où f prend la valeur $f = (0, -(\mu + \lambda))^t$ sur chaque noeud du maillage.

Les figures 2.7,2.8,2.9,2.10représentent les déplacements sur le domaine Ω défini

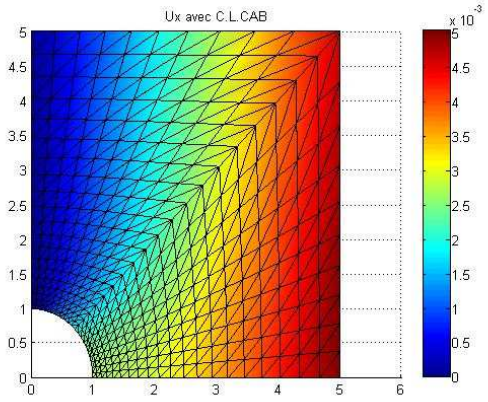


FIGURE 2.7 – Déplacement u_x, $h = 0.25$, MFEM avec $C_{A,B}$

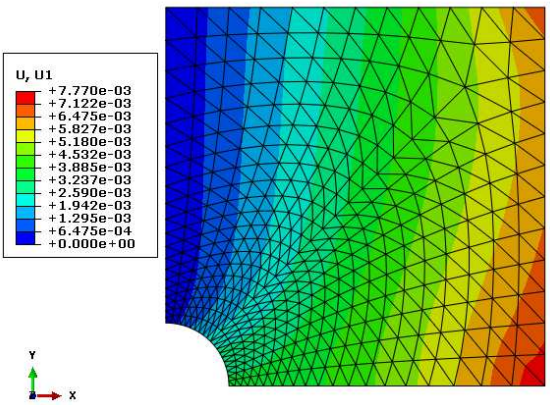


FIGURE 2.8 – Déplacement u_x, $h = 0.25$, Abaqus

ci-dessus pour le pas $h = 0.25$ pour les deux méthodes MFEM avec $C_{A,B}$ et celle du logiciel d'Abaqus.

Des valeurs presque nulles des déplacements qui apparaîssent aux arêtes $[1, 5] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [1, 5]$. Elles reflètent ainsi les conditions aux limites de Dirichlet $u_x = 0$ et $u_y = 0$.

On observe alors que les déplacements prennent des valeurs maximales au voisinage des bords de la condition de Neumann.

Nous remarquons qu'il y a une similitude de résultats entre notre méthode MFEM

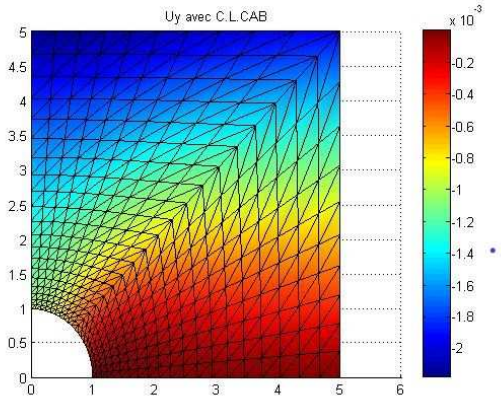


FIGURE 2.9 – Déplacement u_y, $h = 0.25$, MFEM avec $C_{A,B}$

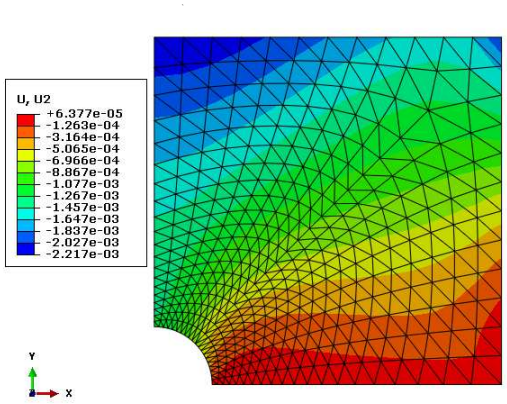


FIGURE 2.10 – Déplacement u_y, $h = 0.25$, Abaqus

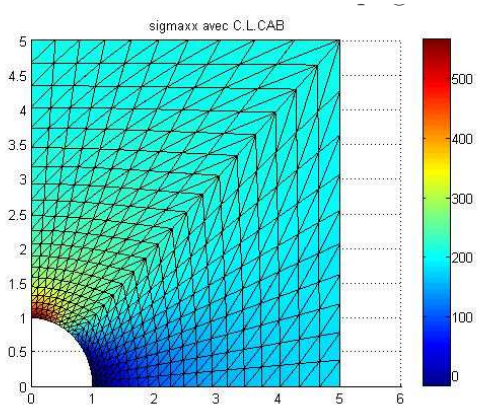


FIGURE 2.11 – Contrainte σ_{xx}, $h = 0.25$, MFEM avec $C_{A,B}$

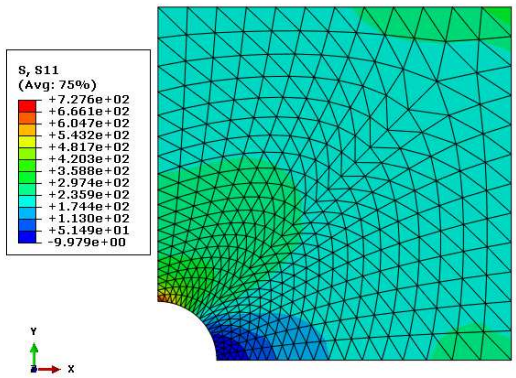


FIGURE 2.12 – Contrainte σ_{xx}, $h = 0.25$, Abaqus

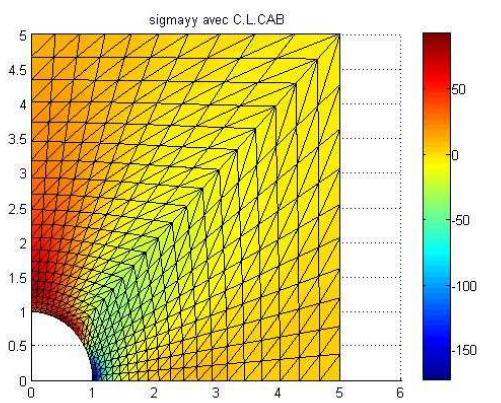


FIGURE 2.13 – Contrainte σ_{yy}, $h = 0.25$, MFEM avec $C_{A,B}$

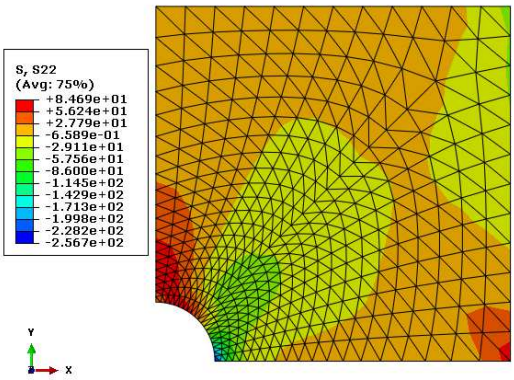


FIGURE 2.14 – Contrainte σ_{xx}, $h = 0.25$, Abaqus

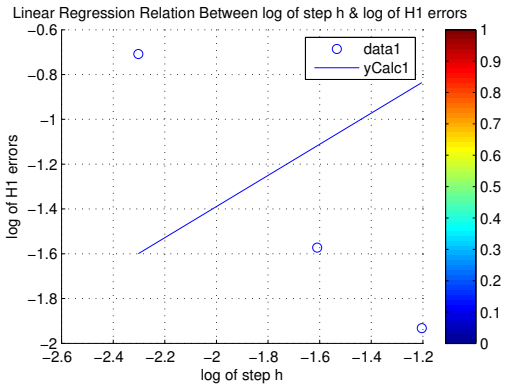


FIGURE 2.15 – La pente $\alpha = 0.694$ avec MFEM avec C.L.S

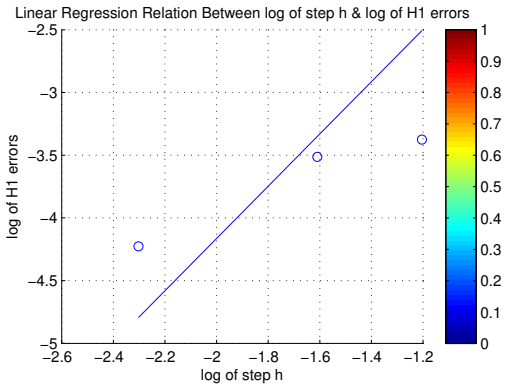


FIGURE 2.16 – La pente $\alpha = 2.082$ avec MFEM avec $C_{A,B}$

avec $C_{A,B}$ et ceux du logiciel Abaqus. On note que les resultats d'Abaqus se base sur la méthode FEM validée dans la littérature. Cette similitude de resultats signifie que la méthode MFEM est fiable et elle fournit une bonne solution. Nous calculons $\| u-u_h \|_{1,\Omega}$ pour chacune des deux méthodes, puis nous obtenons les deux pentes en utilisant la régression linéaire. Cette dernière est presentée par les figures 2.15 et 2.16 pour chaque méthode. Ils représentent la corrélation linéaire entre $log(\| u-u_h \|_{1,\Omega})$ et $log(h)$.

Les erreurs $\| u-u_h \|_{1,\Omega}$ et $\| \psi-\psi_h \|_{0,\Omega}$ de la méthode MFEM avec $C_{A,B}$ tend vers 0 plus vite que celles de la méthode MFEM avec CL. standards. Cela est raisonable. En effet, avec la condition généralisée $C_{A,B}$ on inverse la matrice du système linéaire directement sans passer par l'algorithme de la méthode itérative qui rajoute plus d'erreur et plus du temps d'exécution.

Les figures 2.11,2.12,2.13,2.14 représentent les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sur le domaine Ω défini ci-dessus pour le pas $h = 0.25$ pour les deux méthodes MFEM avec $C_{A,B}$ et celle du logiciel d'Abaqus.

On remarque que les plus grandes contraintes (sur-contraintes) sont concentrées autour du trou. Les sur-contraintes sont loin du champ de traction. Alors, La présence d'un trou conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur-contrainte autour du trou.

Le tableau 2.1 récapitule toutes les erreurs calculées. L'erreur e_∞ approche de zéro lorsque h est assez petit. Alors la solution approchée ψ_h obtenue converge vers la divergence discréte (la valeur de la divergence du déplacement u sur chaque noeud). Un autre objectif de cette partie numérique est de tester la stabilité de la divergence du champ de déplacement de la solution numérique u_h. De ce fait, nous allons calculer l'erreur $e_\infty = \max_{i,j}(\mid divu(x_i, y_j) - \psi_{i,j} \mid)$ pour trois mailles, et nous observons la

TABLE 2.1 – Tableau d'erreurs

Nombre de noeuds np	80	164	589
Nombre d'éléments nt	130	287	1099
Pas h	0.3	0.2	0.1
e_∞ MFEM avec $C_{A,B}$	0.2252	0.2004	0.1699
$\| u - u_h \|_{1,\Omega}$ MFEM avec $C_{A,B}$	0.0342	0.0298	0.0146
$\| \psi - \psi_h \|_{0,\Omega}$ MFEM avec $C_{A,B}$	0.0567	0.0346	0.0264
$\| u - u_h \|_{1,\Omega}$ MFEM avec C.L. standards	0.1360	0.1193	0.1074
$\| \psi - \psi_h \|_{0,\Omega}$ MFEM avec C.L. standards	0.2032	0.1094	0.0894
$\| u - u_h \|_{1,\Omega}$avec FEM	0.4924	0.2075	0.1448

variation de cette erreur en fonction de la taille du maillage pour $h \to 0$. Cet exemple montre que la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$ est plus efficace que la méthode ordinaire. Cette méthode permet de calculer les déplacements et leurs divergences simultanément. Elle garantit la stabilité de ces divergences sur chaque nœud.

2.5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé la méthode des éléments finis mixte $(P1 + bubble, P1)$ pour la résolution du système de Navier-Lamé. Ce problème est résolu par le choix des conditions aux limites généralisées $C_{A,B}$ qui rend les espaces d'approximations moins contraignants. Comme expliqué auparavant, pour le problème de l'élasticité, dans lequel la forme a est coércive, la stabilité peut être toujours obtenue par un enrichissement adéquat de l'espace de déplacement. Il existe plusieurs façons d'enrichir l'espace. Prenons notre cas comme exemple, l'élément couple est instable (déplacement linéaire, divergence linéaire), et il peut être stabilisé par l'ajout d'un seul degré de liberté de déplacement interne à partir d'une fonction une bubble (voir D. N. Arnold et al. 1984 [31]).

A partir des résultats numériques, nous notons qu'avec le calcul des slopes pour chaque méthode, la pente obtenue par la méthode $(P1 + bubble, P1)$ est plus supérieure à la pente obtenue par la méthode classique. Ce résultat signifie que la solution numérique u_{app} obtenue par la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$ converge très rapidement vers la solution exacte par rapport à la solution obtenue par la méthode classique .

L'avantage de ce problème avec la condition aux limites $C_{A,B}$ est au niveau de programmation par Matlab. Il suffit de créer un seul code puis l'appliquer à des

problèmes ordinaires comme Dirichlet et Neumann.
Aussi, on évite le problème de contraintes dans les espaces fonctionels, ce fait facilite les calculs numériques.
Enfin, nous avons démontré que la résolution du problème d'élasticité avec des conditons aux limites $C_{A,B}$, en utlisant l'élément $(P1 + bubble, P1)$ est beaucoup plus efficace qu'une implémentation standard avec des éléments finis ordinaires.

Chapitre 3

Résolution du problème de Navier-Lamé par éléments finis mixtes Web-spline en utlisant la C.L généralisée $C_{A,B}$

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les avantages de la condition aux limites $C_{A,B}$ et avons démontré à quel point elle est réactive et harmonieuse au cours du processus d'utilisation de la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de Navier Lamé.

L'objectif de ce chapitre est de discuter l'existence et l'unicité d'une solution discrète basée sur B-spline pondérée étendue (Web-spline) pour l'équation 2D Navier-Lamé de l'élasticité linéaire avec la condition aux limites $C_{A,B}$. Le prblème a une mixte formulation faible qui est due à la création d'une nouvelle inconnue. Ensuite, nous illustrons les performances des schémas de Ritz Galerkin (voir T. Geveci et al. 1989 ,[89, 90, 91]) avec une base de Web-spline en des applications d'élasticité linéaire.

Enfin, nous discutons de plusieurs aspects de la mise en œuvre de cette méthode numérique.

Les tests numériques confirment que, grâce aux nouvelles routines d'intégration, les solveurs B-spline pondérés étendus (WEB-spline) sont devenus beaucoup plus efficaces.

La méthode des éléments finis est devenue la méthode de choix pour résoudre

de nombreux types d'équations aux dérivées partielles en ingénierie et en sciences physiques. Les applications importantes comprennent la mécanique des structures, l'écoulement des fluides, la thermodynamique et les champs électromagnétiques (voir O.C.Zienkiewicz et al. 2000, [46]), en utilisant l'approximation de Lagrange. Ce type d'approximation a connu une grande restriction au niveau de la modélisation des domaines, en particulier dans le cas des frontières compliquées telles que celles sous la forme de graphes curvilignes. Une nouvelle méthode d'approximation apparue il y a quelques années, appelée B-spline qui résoudra ce problème avec excellence.
Les B-splines sont devenues des outils standards en approximation, en infographie, en conception et en fabrication. Récemment, elles sont également utilisées pour construire des fonctions de base pour les méthodes d'éléments finis. Les techniques résultantes combinent l'efficacité de calcul des grilles régulières avec la flexibilité géométrique des éléments finis classiques. Certains avantages clés sont le choix libre de l'ordre et de la fluidité, une structure de données simples avec un paramètre par point de grille et la représentation exacte des conditions aux limites. Un type de B-spline est appelé (B-splines étendues pondérées) WEB-spline (voir Höllig et al. 2002, [59]).
Comme nous le verrons dans la section suivante, une fonction de pondération, w, est multipliée par les fonctions B-spline pour garantir que toutes les Web-splines satisfont exactement aux conditions limites. J.A.Cottrell et al. 2009 [48, 61] fournit un traitement complet de la théorie pertinente. C'est une technique qui est la mieux adaptée à un problème particulier étendu sur la forme topologique du domaine de simulation et sa représentation. Les méthodes pondérées sont un bon choix pour les problèmes avec les conditions aux limites naturelles (Neumann) ou si la partie du bord, où des conditions aux limites essentielles (Dirichlet) sont prescrites, ont une description implicite appropriée.
Les méthodes isogéométriques (voir F. Auricchio et al. 2010, [80, 81, 82]) peuvent traiter des domaines bien paramétrés sur des rectangles,des cuboïdes ou qui peuvent être exprimés sous la forme d'union de ces paramétrages, par exemple des représentations Nurbs (voir Y. Bazilevs et al. 2008, [83, 84, 85])pour des applications CAD/CAM (voir JJ Shah et al. 1995 [86, 87, 88]), il y a aussi des problèmes où une combinaison des deux techniques pourrait être utile (voir K. Höllig et al. 2012, [50]).
Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode des éléments finis étendus pondérés pour résoudre le système Navier-Lamé avec une nouvelle condition mathématique généralisée $C_{A,B}$ (voir O.Koubaiti et al. [69]), qui généralise les conditions de base bien

connues, en particulier les conditions de Dirichlet, Neumann, mélée, Robin. Cette nouvelle condition nous permet d'implémenter un code Matlab plus général et seul qui résume toutes types de conditions aux limites que nous pouvons rencontrer, ce qui nous permet de gagner en temps de programmation. Les grandes lignes de ce chapitre sont les suivantes : dans la section suivante, nous introduisons la modélisation de l'équation de Navier-Lamé et donnons le problème variationnel correspondant à cette équation.

Nous passons en revue les aspects préliminaires des méthodes basées sur Web-spline pour l'équation de Navier-Lamé. Dans la section 3, nous prouvons les conditions de $\inf - \sup$ pour le problème variationnel dans un cas à deux dimensions en utilisant la méthode des éléments finis sans maillage basée sur Web-spline, nous renvoyons le lecteur à MH. Sadd et al. 2005, [51, 55] pour plus d'informations aux problèmes d'élasticité.

Nous créons un nouvel inconnu $\psi = \nabla.u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$ qui est égal à la divergence du déplacement. L'équation de Navier-Lamé devient :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\psi = f \ in \ \Omega, \\ \psi - \nabla.u = 0 \ in \ \Omega, \\ Au + B(\mu \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda\nabla.un) = g \ on \ \Gamma, \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans cette étude, nous considérons le système Navier-Lamé avec une nouvelle condition aux limites notée $C_{A,B}$ telle que A est appelé matrice de Dirichlet et B est la matrice de Neumann :

Il existe deux constantes strictement positives α et β, telles que :

$$\alpha u.u \leq B^{-1}Au.u \leq \beta u.u \ \forall u \in \mathbb{R}^2 \tag{3.2}$$

Avec $|||\ .\ |||$ est une norme de matrice qui sera définie ci-dessous.

Si :

$$|||\ A\ |||\ll|||\ B\ |||, \tag{3.3}$$

Alors, $C_{A,B}$ est la condition aux limites de Neumann

Si :

$$|||\ B\ |||\ll|||\ A\ |||\ . \tag{3.4}$$

Alors, $C_{A,B}$ est la condition aux limites de Dirichlet .
Nous avons besoin d'espaces fonctionnels et de normes :

$$h^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \setminus u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}, \tag{3.5}$$

$$V(\Omega) = H^1(\Omega) = [h^1(\Omega)]^2, \tag{3.6}$$

$$M(\Omega) = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \setminus \int_\Omega q = 0\}, \tag{3.7}$$

$$\| v \|_{1,\Omega} = \{\int_\Omega \nabla v : \nabla v d\Omega + \int_\Omega v.v\, d\Omega\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

$$\| v \|_{0,\Omega} = \{\int_\Omega v.v\, d\Omega\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

$$||| A ||| = \max \mid a_{i,j} \mid \quad i = 1.2, j = 1.2 \tag{3.10}$$

La formulation variationnelle du problème Navier-Lamé (3.1) est la suivante :
Trouvez $(u, \psi) \in V(\Omega) \times M(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} A u.v d\Gamma \\ - \int_\Gamma \mu \psi\, n.v d\Gamma + \int_\Omega (\lambda + \mu) \psi \nabla.v d\Omega \\ = \int_\Omega f.v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} g.v\, d\Gamma \\ \int_\Omega (\lambda + \mu) q \nabla.u d\Omega - \int_\Omega (\lambda + \mu) \psi q d\Omega = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

La formulation faible (3.11) peut être reformulée comme suit :
Trouver $(u, \psi) \in V(\Omega) \times M(\Omega)$

$$\begin{cases} a(u, v) + b_\Gamma(v, \psi) = L(v)\ \forall v \in V(\Omega), \\ b(u, q) - d(\psi, q) = 0\ \forall q \in M(\Omega), \end{cases} \tag{3.12}$$

Avec les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \mu \nabla u : \nabla v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} A u.v d\Gamma, \\ b(v,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu) q \nabla .v d\Omega, \\ b_\Gamma(v,q) = b(v,q) - \displaystyle\int_\Gamma \mu q n.v d\Gamma, \\ d(\psi,q) = \displaystyle\int_\Omega (\lambda+\mu)\psi q d\Omega, \\ L(v) = \displaystyle\int_\Omega f.v d\Omega + \int_\Gamma B^{-1} g.v d\Gamma, \end{cases} \tag{3.13}$$

3.2 Solubilité pour le système de point selle généralisé

Dans cette section, nous présentons une théorie du point selle. Soient $V_0(\Omega)$ et $M_0(\Omega)$ deux espaces de Hilbert de dimension finie ou infinie équipés des produits internes $(.,.)_{V_0(\Omega)}$ et $(.,.)_{M_0(\Omega)}$ et les normes induites $\| \ . \ \|_{1,\Omega}$ et $\| \ . \ \|_{0,\Omega}$ respectivement.

Soit $a(u,v)$, $b_1(v,q)$ et $b_2(v,q)$, $d(p,q)$ les formes bilinéaires sur $V_0(\Omega) \times V_0(\Omega)$, $V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$ et $V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$, $M_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$, respectivement, qui sont bornés ; c'est-à-dire qu'il existe des constantes positives $\| \ a \ \|$, $\| \ b_1 \ \|$, $\| \ b_2 \ \|$ et $\| \ d \ \|$ telles que :

$$\begin{cases} \mid a(u,v) \mid \leq \| \ a \ \| \| \ u \ \|_{1,\Omega} \| \ v \ \|_{1,\Omega} \ \ \forall (u,v) \in V_0(\Omega) \times V_0(\Omega) \\ \mid b_1(u,q) \mid \leq \| \ b_1 \ \| \| \ u \ \|_{1,\Omega} \| \ q \ \|_{0,\Omega} \ \ \forall (u,q) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega) \\ \mid b_2(u,q) \mid \leq \| \ b_2 \ \| \| \ u \ \|_{1,\Omega} \| \ q \ \|_{0,\Omega} \ \ \forall (u,q) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega) \\ \mid d(q,p) \mid \leq \| \ d \ \| \| \ q \ \|_{0,\Omega} \| \ p \ \|_{0,\Omega} \ \ \forall (p,q) \in M_0(\Omega) \times M_0(\Omega) \\ \mid L(v) \mid \leq \| \ L \ \| \| \ v \ \|_{1,\Omega} \ \ \forall v \in V_0(\Omega) \\ \mid G(q) \mid \leq \| \ G \ \| \| \ q \ \|_{0,\Omega} \ \ \forall q \in M_0(\Omega) \end{cases} \tag{3.14}$$

De plus, nous définissons les espaces de Hilbert suivants :

$$B_i = \{u \in V_0(\Omega) \backslash b_i(u,q) = 0 \forall q \in M_0(\Omega)\}, \ for \ i = 1,2, \tag{3.15}$$

$$D = \{p \in M_0(\Omega) \backslash d(p,q) = 0 \forall q \in M_0(\Omega)\}. \tag{3.16}$$

En plus des hypothèses (3.14), nous supposons :

$$a(v,v) \geq \delta \parallel v \parallel^2_{1,\Omega} \quad for\ all\ v \in V_0(\Omega) \tag{3.17}$$

b_i, pour $i = 1, 2$ satisfaisant la condition $\inf - \sup$, alors il existe une constante $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{\|q\|=1} b_i(v,q) &\geq \varrho_i \parallel v \parallel_{1,\Omega} \ \ \forall v \in B_i^{\perp} \\ \sup_{v \in B_i^{\perp}} b_i(v,q) &> 0 \ \ \forall q \in M_0(\Omega) \end{aligned} \tag{3.18}$$

La forme bilinéaire d satisfait la coércivité faible telle qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que :

$$\sup_{q \in M_0(\Omega)} d(p,q) \geq \varepsilon \parallel p \parallel^2_{0,\Omega} \quad \forall p \in M_0(\Omega) \tag{3.19}$$

Trouver $(u, \psi) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$:

$$\begin{cases} a(u,v) + b_1(v,\psi) = L(v) \ \ \forall v \in V_0(\Omega), \\ b_2(u,q) - d(\psi,q) = G(q) \ \ \forall q \in M_0(\Omega), \end{cases} \tag{3.20}$$

Où a, b_i pour $i = 1, 2$ et d sont des formes bilinéaires délimitées et où L et G sont des fonctionnelles linéaires bornées respectivement sur : $V_0(\Omega)$ et, $M_0(\Omega)$.
La référence [45] contient l'existence et l'unicité, pour le problème de point selle :
Trouver $(u, \psi) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a(u,v) + b_1(v,\psi) = L(v) \ \ \forall v \in V_0(\Omega) \\ b_2(u,q) = G(q) \ \ \forall q \in M_0(\Omega) \end{cases} \tag{3.21}$$

Lemme 16. Soit **D** un opérateur linéaire, défini par :

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{D} & : & M_0(\Omega) & \rightarrow & D^{\perp} \\ & & \psi & \mapsto & d_{\psi} \end{array}$$

Telle que pour tout $q \in D^{\perp}$:

$$d(\psi, q) = (d_{\psi}, q), \tag{3.22}$$

Dont **D** est continue, de plus :

$$Im\boldsymbol{D} = D^{\perp}. \tag{3.23}$$

Démonstration. $Im\mathbf{D}$ est fermé dans $D^{\perp}$, en fait soit $(\psi_j)_j$ une suite de l'espace $M_0(\Omega)$ telle que :

$$d_{\psi_j} \to w \ \ sur \ \ D^{\perp}, \tag{3.24}$$

puis $(d_{\psi_j})_j$ est une suite de cauchy sur $D^{\perp}$.
Par définition de la coercivité de la forme bilinéaire d, on a :

$$\begin{aligned} \| \psi_j - \psi_k \|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{q \in M_0(\Omega)} \frac{d(\psi_j - \psi_k, q)}{\| q \|_{0,\Omega}} &= \frac{1}{\varepsilon} \sup_{q \in D^{\perp}} \frac{d(\psi_j - \psi_k, q)}{\| q \|_{0,\Omega}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \| d_{\psi_j - \psi_k} \|_{0,\Omega} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \| d_{\psi_j} - d_{\psi_k} \|_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{3.25}$$

On déduit que ψ_j est une suite de cauchy sur $M_0(\Omega)$, alors il existe $\psi \in M_0(\Omega)$ telle que

$$\psi_j \to \psi \ sur \ M_0(\Omega), \tag{3.26}$$

Par la continuité de l'opérateur $\mathbf{D}$, on a :

$$d_{\psi_j} \to d_{\psi}, \tag{3.27}$$

L'unicité de la limite donne $w = d_{\psi} \in D^{\perp}$, donc on obtient que $Im\mathbf{D}$ est un fermé de $D^{\perp}$, cela donne que :

$$D^{\perp} = Im\mathbf{D} \oplus (Im\mathbf{D})^{\perp}, \tag{3.28}$$

$$Im\mathbf{D} \cap (Im\mathbf{D})^{\perp} = 0. \tag{3.29}$$

Supposons que $(Im\mathbf{D})^{\perp} \neq \{0\}$, cela implique que $p \in (Im\mathbf{D})^{\perp}$ non-nul.
D'autre part nous avons pour tout $q \in M_0(\Omega)$

$$d(q, p) = (d_q, p) = 0, \tag{3.30}$$

(car $d_q \in Im\mathbf{D}$), alors que : $p \in D$, mais $p \in (Im\mathbf{D})^{\perp} \subset D^{\perp}$, cela contredit le fait que p est non nul. Finalement $Im\mathbf{D} = D^{\perp}$. □

Théorème 17. Avec les hypothèses (3.14), ... ,(3.19) le problème variationnel généralisé (3.20) admet une solution unique $(u, \psi) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$ pour tout $L \in (V_0(\Omega))'$ et $G \in (M_0(\Omega))'$, tant que :

$$\delta_1 := (\delta\varepsilon)^{-1} \| b_1 \| \| b_2 \| < 1. \tag{3.31}$$

En outre, les estimations de stabilité suivantes sont valables :

$$\| u \|_{1,\Omega} \leq \frac{\delta_1 + 1}{1 - \delta_1} \| u^0 \|_{1,\Omega} + \frac{\delta^{-1} \| b_1 \|}{1 - \delta_1} \| \psi^0 \|_{0,\Omega}, \tag{3.32}$$

$$\| \psi \|_{0,\Omega} \leq \frac{\varepsilon^{-1} \| b_2 \|}{1 - \delta_1} (2 \| u^0 \|_{1,\Omega} + \delta^{-1} \| b_1 \| \| \psi^0 \|_{0,\Omega}). \tag{3.33}$$

Où (u^0, ψ^0) est la solution pour (3.21) et a donc les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \| u^0 \|_{1,\Omega} &\leq c_{11} \| L \| + c_{12} \| G \|, \\ \| \psi^0 \|_{1,\Omega} &\leq c_{21} \| L \| + c_{22} \| G \|, \\ c_{11} = \delta^{-1} \ , \ c_{12} &= \varrho_2^{-1} (\delta^{-1} \| a \| + 1), \\ c_{21} = \varrho_2^{-1} (c_{11} \| a \| + 1) \ , \ c_{22} &= \varrho_2^{-1} \| a \| c_{12}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Démonstration. D est un ensemble fermé inclus dans $M_0(\Omega)$, so D est un espace de Hilbert.
Le problème (3.20) devient :

$$\begin{cases} a(u, v) + b_1(v, \psi) = L(v) \ \ \forall v \in V_0(\Omega), \\ b_2(u, q) = G(q) \ \ \forall q \in D. \end{cases} \tag{3.35}$$

a, b_1, b_2 satisfont les conditions du théorème 3.1 de l'article [45], donc le problème (3.35) admet une solution unique $(u, \psi_0) \in V(\Omega) \times D$ (si D est réduit à $\{0\}$, il faut juste prendre $\psi_0 = 0$). Nous recherchons maintenant $\psi \in M_0(\Omega)$ telle que :

$$d(\psi, q) = -G(q) + b_2(u, q) \ \ \forall q \in M_0(\Omega), \tag{3.36}$$

Pour ce u la solution de (3.35) est fixée, nous considérons la forme linéaire suivante définie par :

$$F : q \mapsto -G(q) + b_2(u, q), \tag{3.37}$$

Cette forme hérite sa continuité celle de b_2 and G. Nous définissons l'espace :

$$D^{\perp} = \{p \in M_0(\Omega) \backslash (p, q) = 0 \ \forall q \in D\}, \tag{3.38}$$

$D^{\perp}$ est un espace de Hilbert avec la norme et le produit interne hérités de $M_0(\Omega)$.

Le problème (3.36) est equivalent au problème :

$$d(\psi, q) = F(q) \ \ \forall q \in D^{\perp}, \tag{3.39}$$

Selon le théorème de Lax Milgram, le problème (3.39) admet une solution unique $\psi \in D^{\perp}$. Supposons que (3.39) est vérifié, montrons que (3.36) est vérifié. Aussi D est fermé dans $M_0(\Omega)$, donc :

$$M_0(\Omega) = D \oplus D^{\perp}. \tag{3.40}$$

Alors on obtient pour tout $q \in M_0(\Omega)$ on a $q = q_1 + q_2$, tels que $q_1 \in D$ et $q_2 \in D^{\perp}$, cela implique que :

$$d(\psi, q) = d(\psi, q_1) + d(\psi, q_2) = 0 + F(q_2) = F(q_1 + F(q_2), \tag{3.41}$$

Inversement, soit $\psi \in M_0(\Omega)$ une solution de (3.36).
La forme linéaire $q \mapsto d(\psi, q)$ est continue sur $D^{\perp}$ qui est un espace de Hilbert muni de produit scalaire sur $M_0(\Omega)$.
A partir du théorème de Riez, il existe un unique $d_\psi \in D^{\perp}$ tel que :

$$d(\psi, q) = (d_\psi, q) \ \ \forall q \in D^{\perp}, \tag{3.42}$$

$$\| \ d_\psi \ \|_{0,\Omega} = \| \ d(\psi, .) \ \|_{(D^{\perp})'} = \sup_{q \in D^{\perp}} \frac{d(\psi, q)}{\| \ q \ \|_{0,\Omega}} \tag{3.43}$$

Ceci définit un opérateur :

$$\mathbf{D} : \psi \mapsto d_\psi, \tag{3.44}$$

qui est linéaire et continue sur $M_0(\Omega)$ tel que :

$$Im\mathbf{D} = \{d_\psi \backslash \psi \in M_0(\Omega)\}. \tag{3.45}$$

Le lemme (16) donne : $Im\mathbf{D} = D^{\perp}$.
$F \in (D^{\perp})'$, Riesy implique qu'il existe $w \in D^{\perp}$ such as

$$F(q) = (w, q)_{M_0(\Omega)} \ \forall q \in D^{\perp}, \tag{3.46}$$

Puisque $Im\mathbf{D} = D^{\perp}$, pour ce $w \in D^{\perp}$, il existe $\psi \in M_0(\Omega)$ tel que :

$$w = d_{\psi}, \tag{3.47}$$

$$d(\psi, q) = d(d_{\psi}, q) = (w, q) = F(q)\ \forall q \in D^{\perp}. \tag{3.48}$$

Enfin, nous concluons que les deux problèmes (3.36) et (3.39) sont équivalents
Lax Milgram garantissant que le problème (3.39) admet une solution unique $\psi_1 \in D^{\perp}$.
Il suffit de prendre :

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \in M_0(\Omega) = D \oplus D^{\perp}. \tag{3.49}$$

□

Théorème 18. Avec les hypothéses (3.14) ... (3.19) le problème varitionel (3.12) admet une unique solution $(u, \psi) \in V_0(\Omega) \times M_0(\Omega)$ pour tout $L \in (V_0(\Omega))'$, tant que :

$$\delta_1 := (\delta\varepsilon)^{-1} \parallel b_{\Gamma} \parallel\parallel b \parallel < 1 \tag{3.50}$$

En outre, les estimations de stabilité suivantes sont valables :

$$\parallel u \parallel_{1,\Omega} \leq \frac{\delta_1 + 1}{1 - \delta_1} \parallel u^0 \parallel_{1,\Omega} + \frac{\delta^{-1} \parallel b_{\Gamma} \parallel}{1 - \delta_1} \parallel \psi^0 \parallel_{0,\Omega} \tag{3.51}$$

$$\parallel \psi \parallel_{0,\Omega} \leq \frac{\varepsilon^{-1} \parallel b \parallel}{1 - \delta_1} (2 \parallel u^0 \parallel_{1,\Omega} + \delta^{-1} \parallel b_{\Gamma} \parallel\parallel \psi^0 \parallel_{0,\Omega}) \tag{3.52}$$

Dont (u^0, ψ^0) est une solution de (3.21) telle que :

$$\parallel u^0 \parallel_{1,\Omega} \leq c_{11} \parallel L \parallel \tag{3.53}$$

$$\parallel \psi^0 \parallel_{1,\Omega} \leq c_{21} \parallel L \parallel \tag{3.54}$$

$$c_{11} = \delta^{-1}\ ,\ c_{21} = \varrho_2^{-1}(c_{11} \parallel a \parallel + 1) \tag{3.55}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que les formes bilinéaires a, b, b_{Γ}, d ont vérifié les conditions (3.14) ... (3.19), en appliquant le théorème 17 dans le cas $G = 0$. □

Remarque. Pour écrire (3.12) sous forme d'un système d'opérateurs, alors on pose :

$$A : V \longrightarrow V', \tag{3.56}$$

$$B : V \longrightarrow M'. \tag{3.57}$$

$$B_\Gamma : V \longrightarrow M^{'}, \tag{3.58}$$

$$D : M \longrightarrow M^{'}. \tag{3.59}$$

tels que :

$$\langle Au, v\rangle := a(u, v), v \in V(\Omega), \tag{3.60}$$

$$\langle Bu, \psi\rangle := b(u, \psi), \psi \in M(\Omega). \tag{3.61}$$

$$\langle B_\Gamma u, \psi\rangle := b_\Gamma(u, \psi), \psi \in M(\Omega), \tag{3.62}$$

$$\langle D\psi, q\rangle := d(\psi, q), q \in M(\Omega). \tag{3.63}$$

Donc (3.12) devient :

$$U := \begin{pmatrix} A & B_\Gamma \\ B^T & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} =: F. \tag{3.64}$$

Le problème (3.12) est bien posé, il a été démontré par Panayot.S.Vassilevski et al.1996 [57, 2, 56]. Il suffit de prendre $: V \times M \longrightarrow X^{'} \times M^{'}$ qui définit un isomorphisme, telles que a, b, b_Γ, et d satisfaisant les hypothèses (3.14) ... (3.19).

3.3 Procédé WEB-Spline

Plusieurs types d'approximations meshless ont été proposés pour diverses applications. Le problème principal de la méthode de Galerkin meshless est d'incorporer des conditions aux limites de type Dirichlet (homogène et non-homogène). L'approximation B-spline étendue pondérée prend en compte non seulement les contraintes aux bords, mais également la question du bon conditionnement des systèmes de Galerkin (voir K. Höllig et al. 2001,[58, 59]).
La construction de la base Web spline se base sur : Les B-splines pertinentes sont classées en B-splines internes et externes, en fonction de la taille de leur support dans la région de simulation. Pour stabiliser la base, les B-splines externes sont jointes aux B-splines internes en formant des combinaisons linéaires appropriées. C'est une étape cruciale. Les coefficients de couplage sont choisis de manière à conserver le support local et la puissance d'approximation des B-splines. Une pondération optionnelle des fonctions de base permet la réalisation exacte des conditions aux limites

essentielles.

Cette nouvelle caractéristique essentielle de la construction d'une base bien conditionnée a une importance capitale dans ce travail. Nous sommes intéressés par l'application des propriétés d'approximation des espaces WEB spline pour discrétiser les équations de Navier-Lamé comme c'est déja fait pour les problèmes de Stokes et Navier-Stokes par V. V. K. Srinivas Kumar et al . en 2008, [60].

La b-spline uniforme de degré n est définie par la récursivité (voir K. Höllig et al.2003, [61]) :

$$b^n(x) = \frac{x}{n} b^{n-1}(x) + \frac{n+1-x}{n} b^{n-1}(x-1), \tag{3.65}$$

telle que : b^0 est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$. Les figures ci-dessou 3.1, 3.2,3.3 montrent les b-splines uniformes de degré un, deux et trois. On les appelle aussi b-splines linéaires, quadratiques et cubiques, respectivement.

Dans ce chapitre, nous utilisons les conventions de notation suivantes (voir K. Höllig et al.2003, [61]). Pour les fonctions f et g, nous écrivons $f \preceq g$ si $f \leq cg$ avec une constante c qui ne dépend ni de la largeur de la grille h, ni des index ou des arguments de fonctions. Le symboles $\succeq$ est défini de manière analogue.

Nous décrivons la procédure de construction des fonctions Web -splines et nous discutons des propriétés approximatives de l'espace Web-spline en tant qu'espace d'éléments finis.

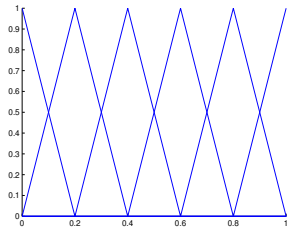


FIGURE 3.1 – Linear bspline

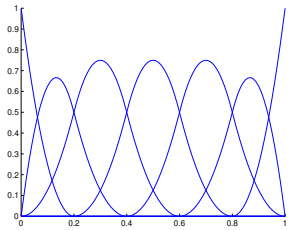


FIGURE 3.2 – Quadratic bspline

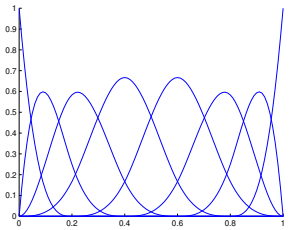


FIGURE 3.3 – Cubic bspline

Pour $k = (k_0, k_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $h > 0$, on définit la B-spline en dim 2 :

$$b_k(x, y) := \frac{1}{h} b(\frac{x}{h} - k_0) b(\frac{y}{h} - k_1), \tag{3.66}$$

Où b est l'univarié B-spline de degré n de support $[0, n+1)$. Les B-splines b_k sont des polynômes par morceaux sur le h-grille avec des sommets $h\mathbb{Z}^2$ et mis à l'échelle pour que la L^2 - norme, $\| b_k \| = \| b_0 \|_{0,\Omega}$ est indépendant de h.

Le produit tenseur B-spline est l'extension du B-spline à des dimensions supérieures. En général, il peut être défini de la manière suivante :

$$b^n_{k,h} = \Pi^m_{\nu=1} b^{n_\nu}_{k_\nu,h}, \tag{3.67}$$

tels que :
B-spline $b^n_{k,h}$ est une m -variante de degré n_ν dans la ν-ème variable, index $k = k_1, .., k_m$ et la largeur de la grille h.
Avec la convention que $n_1 = ... = n_m$ sauf indication contraire. Pour le besoins du problème, l'élément n peut être pris comme un entier, plutôt qu'un vecteur entier. Pour $I \in \{0, ..., n\}^m$, nous répartissons les cellules de la grille :

$$Q_I = Ih + [0, 1]^m h, \tag{3.68}$$

$m = 2$ dans le cas de dim 2. Il y a trois types de cellule Q :

- cellules intérieures : $Q \subset \overline{\Omega}$,
- cellules au bord : l'intérieur de Q coupe $\partial\Omega$,
- cellules extérieures : $Q \cap \Omega = \emptyset$.

Le support de la B-spline b_k d'ordre n en dim 2 :

$$supp\ b_k = hk + [0, nh]^2\ ,\ k \in \mathbb{Z}^2. \tag{3.69}$$

Pour $k \in K := \{I \in \mathbb{Z}^2 : supp(b_I) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ (l'index pertinent défini pour Ω), si $supp(b_k)$ a au moins une cellule de grille complètement à l'intérieur Ω alors b_k est nommé B-spline interne, sinon il est externe. Les sous-ensembles correspondants de K sont I et J tel que : $K = I \cup J$ (c.f Figure 3.4).

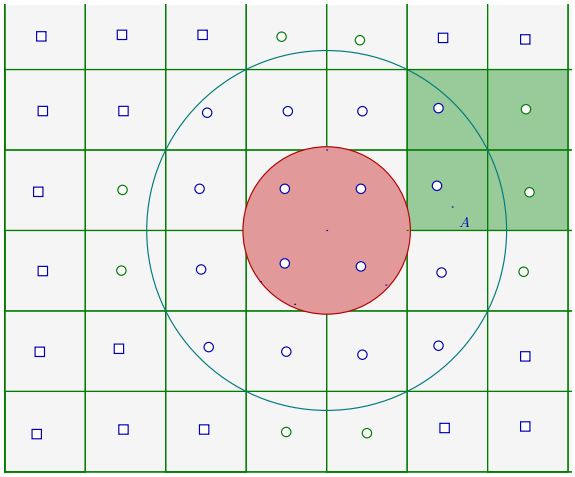


FIGURE 3.4 – B-splines quadratiques pertinentes pour le domaine A, marquées au centre de leurs supports B-splines internes avec des cercles et les externes avec des carrés.

Pour plus de détails sur la construction de la base Web-Spline, est donnée par K. Höllig et al.2003, [61, 62].
Maintenant, il est tentant d'utiliser $B_h := span\{b_k : k \in K\}$ comme espace d'approximation d'éléments finis. A première vue, cela ne semble pas réalisable car les doublures de b ne sont pas conformes aux conditions aux limites, mais cette difficulté peut être résolue facilement en multipliant b_k par une fonction de distance lissée :

$$w(x) \sim dist(x, \partial\Omega), \tag{3.70}$$

Ensuite, l'espace pondéré b-spline (WB-space) :

$$B_\omega^h := span\{wb_k : k \in K\}, \tag{3.71}$$

il est engendré par des splines pondérées b, est un possible sous-espace d'éléments finis pour les problèmes de Dirichlet donnant des approximations d'ordre optimales. Cependant, le numéro de condition de la matrice de Galerkin G_h peut devenir extrêmement volumineux. Cela est dû aux splines b externes qui ont une petite partie de leur support à l'intérieur de Ω. On pourrait penser que ces fonctions de base ne contribuent pas beaucoup au pouvoir d'approximation et peuvent tout simplement être omises. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Une solution appropriée au problème du contrôle des splines b externes instables est fournie en les joignant correctement aux splines b intérieures. Ceci est fait de manière à conserver le pouvoir d'approximation du sous-espace d'éléments finis.

Définition 19. (voir K. Höllig et al. 2001, [59, 62]). Pour $i \in I$, la base Web-spline B_i est définie par :

$$B_i = \frac{\omega}{\omega(x_i)}[b_i + \sum_{j \in J} e_{i,j} b_j], \tag{3.72}$$

où x_i indique le centre d'une cellule de la grille, entièrement située dans le domaine Ω.

Les coefficients $e_{i,j}$, satisfont $\mid e_{i,j} \mid \preceq 1$, $e_{i,j} = 0$ pour $\parallel i - j \parallel \succeq 1$ et sont choisis de manière à ce que tous les polynômes pondérés (ωp) d'ordre n soient contenus dans l'espace Web spline :

$$B_h := span\{B_i : i \in I\}. \tag{3.73}$$

Remarque. On garde les B-Splines externes pour des raisons purement de programmation qui n'ont rien à voir avec les éléments finis. En effet :

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_{j,k} b_{j,k}, \tag{3.74}$$

avec quelques $c_{j,k}$ est égal à 0, est plus facile que :

$$\sum_{i=1}^{M} c_{j(i),k(i)} b_{j(i),k(i)}. \tag{3.75}$$

D'ailleurs, on obtient une structure simple de données, un tableau d'index rectangulaire sans avoir besoin de listes de connectivité (voir K. Höllig et al.2015, [71, 72, 73]). La théorie des $e_{i,j}$ est compliquée. Heureusement, pour un ordre de convergence optimal, on n'en a pas besoin. Ils sont simplement nécessaires pour prouver la stabilité de la base B-Spline. Ainsi, nous pouvons travailler avec toutes les B-Splines qui chevauchent le domaine sans modifications.

Le carré 3.4 n'est que l'ensemble pour définir la base B-Spline, le domaine de la simulation FEM est l'ensemble incurvé à l'intérieur du carré. Les B-Splines sont limitées à cet ensemble (seule la partie qui chevauche l'ensemble incurvé est utilisée).

Théorème 20. (voir K. Höllig et al.2001, [59, 62]). Pour un index externe $j \in J$, soit $I(j) = l + \{0, ..., n\}^m \subset I$ soit un tableau dimensionnel m d'indices internes les plus proches de j, en supposant que h est suffisamment petit pour qu'un tel tableau existe. Ensuite, les coefficients :

$$e_{i,j} = \prod_{\nu=1}^{m} \prod_{\mu=0, l_\nu + \mu \neq i_\nu}^{n} \frac{j_\nu - l_\nu - \mu}{i_\nu - l_\nu - \mu}. \tag{3.76}$$

sont admissibles pour la construction de WEB-Splines conformément à la définition 19.

3.4 La condition aux limites adaptée $C_{A,B}$

L'imposition de condition aux limites de Dirichlet inhomogènes est essentielle dans l'analyse numérique d'une structure. Il est particulièrement difficile et il n'est plus simple chaque fois qu'un maillage non conforme est utilisé pour discrétiser une structure. L'une des contributions de cette section est de développer une base spline étendue pondérée avec une précision de calcul élevée et appropriée avec notre nouvelle formulation mixte de conditions aux limites $C_{A,B}$ généralisant tous les cas qui peuvent être rencontré sur le bord de Ω.

$$Au + B(\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda \nabla .un) = g \; on \; \Gamma, \tag{3.77}$$

Avec A et B sont deux matrices carrées inversibles (dans le cas 2D), $A, B \in L^{\infty}(\Gamma)^{2\times 2}$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ où la fonction g est une fonction connue a priori des coordonnées spatiales. La condition de Dirichlet inhomogène est exprimée dans le cas dont la matrice de Neumann B est négligeable par rapport à la norme matrcielle $|||\ .\ |||$, alors on obtient :

$$u = A^{-1}g \ , \ on \ \Gamma. \tag{3.78}$$

En général, une fonction de condition aux limites g peut ne pas être connue explicitement ou n'est pas prescrite globalement. Plus généralement, les conditions aux limites sont prescrites de manière fragmentée, c'est-à-dire que les conditions aux limites sont spécifiées par des fonctions individuelles g_i sur chaque portion de frontière :

$$u = A^{-1}g_i \ , \ sur \ \Gamma_i, i = 1, ...N, \tag{3.79}$$

Telle que :

$$\Gamma = \cup_{i=1}^{N} \Gamma_i \ , \ \cap_i \Gamma_i = \emptyset. \tag{3.80}$$

Si chaque frontière de Dirichlet Γ_i est représentée géométriquement par la fonction implicite ω_i de sorte que $\omega_i = 0$ sur Γ_i, (voir Weihong Zhang et al.2016, [67]).

$$u = A^{-1}g_i \ , \ \forall \omega_i = 0. \tag{3.81}$$

En fait, comme la fonction de pondération et la fonction valeur aux limites sont exprimées sous la forme de fonctions implicites, il n'existe pas d'expressions uniques, mais des formes types sont données ci-dessous.

La fonction de pondération $\omega(x)$ est un multiplicateur pour modifier les fonctions d'interpolation d'origine et doit disparaître sur le bord de Dirichlet ($\omega_i(x) = 0$). Comme la fonction implicite n'est pas unique pour la définition, une fonction de pondération de différentes formes peut être utilisée. Cela a été détaillé par W.H. Zhang et al.2015, [66].

Ici, deux techniques de construction sont présentées. Premièrement, une méthode simple consiste à construire la fonction de pondération à l'aide du produit $\omega(x) = \prod_{i=1}^{m} \omega_i(x)$. Clairement, $\omega(x) = 0$ si tout $\omega_i(x) = 0$ sur Γ_i. Néanmoins, un produit de toutes les fonctions implicites peut entraîner une augmentation des valeurs de fonction, ce qui provoquera un dépassement de capacité numérique, puis une médiocre précision et robustesse de la solution recherchée. Par conséquent, il est préférable que chaque fonction implicite ω_i soit normalisée à l'avance en fonction de la taille du domaine physique. Par exemple, la fonction implicite d'un cercle peut être normalisée en termes de rayon.

$$\omega(x) = 1 - (\frac{x - x_0}{R})^2 - (\frac{y - y_0}{R})^2. \tag{3.82}$$

Maintenant, nous allons choisir une fonction de base web-spline qui sera appelée la fonction de base web-spline adaptée. Cette base répondra à la condition aux limites de Dirichlet non-homogène.

Soit u la solution de déplacement du problème (3.12), afin que nous puissions écrire $u = u_0 + u_\Gamma$ avec u_0 est la solution de (3.12) en cas de la condition aux limites de Dirichlet homogène et $u_\Gamma = A^{-1}g$ est la valeur de u aux limites de Dirichlet non homogène.

u est écrit comme une combinaison linéaire de la famille B_i web-spline citée dans la définition (19).

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i B_i + A^{-1}g, \tag{3.83}$$

Il peut être réécrit à nouveau sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i B_i + \sum_{i=1}^{N} b_i A^{-1} g_i, \tag{3.84}$$

où $b_i(x)$ désigne le i- ème coefficient de pondération associé à $A^{-1}g_i$, les propriétés de base de $b_i(x)$ sont données par W.H. Zhang et al. en 2015 [67].
$b_i(x) = \delta_{ij}$, pour $x \in \omega_j$ et $i, j = 1, 2...N$, avec δ_{ij} dénotant la fonction Kronecker. Avec cette condition, différents formulaires sont proposés ci-dessous pour la définition de b_i.
Les coefficients de pondération peuvent être définis en étendant l'interpolation transfinie étudiée par Rvachev et al. en 2001, [68] dans la communauté de la CAD (computer-aided design).

$$b_i = \frac{\Pi_{j=1, i\neq j}^{N} \omega_j^{\theta}}{\sum_{k=1}^{N} \Pi_{j=1, i\neq j}^{N} \omega_j^{\theta}}, \tag{3.85}$$

L'équation ci-dessus offre une propriété de symétrie et de similarité.
$\omega_j(x)$ est généralement censé être positif dans le domaine physique pour assurer la valeur non nulle du dénominateur. Evidemment, $b_i = 1$ seulement si $\omega_i = 0$ et que la partition d'unité est vérifiée avec $\sum_{i=1}^{N} b_i = 1$. La valeur de θ est utilisée pour interpoler les dérivés normaux prescrits sur Γ, elle doit être supérieure de 1 à l'ordre des dérivés prescrits.
Enfin, la base que nous pouvons proposer pour la condition aux limites non-homogène est la suivante :

$$\{\phi_i\}_{i=1,..N} = \{B_i + b_i\}_{i=1,..N}. \tag{3.86}$$

3.5 Discrétisation du problème Navier Lamé en utilisant la base WEB-Spline

Dans l'équation de Navier Lamé, Δu et $\nabla\psi$ sont les termes avec les dérivées d'ordre le plus élevé pour le déplacement et div-déplacement (ψ), respectivement. Ainsi, les ordres des opérateurs différentiels diffèrent de 1. Ceci suggère la règle empirique : le degré des fonctions de base utilisées pour approcher le déplacement devrait être supérieur à celui utilisé pour l'approximation du déplacement div. De plus, pour satisfaire les conditions aux limites de Dirichlet, les fonctions de base de déplacement sont multipliées par une fonction de pondération appropriée ω. Par conséquent, dans cet section, nous choisissons la B-spline étendue pondérée ϕ_j - linéaire pour l'approximation du déplacement avec la fonction de base ondelette φ_i -Haar pour notre approximation du déplacement-div en tant que notre élément (quadratique-linéaire), nous désignons ϕ_j par WEB-spline et φ_i la fonction linéaire moyenne zéro (voir Figures 3.1, 3.2) comme défini au dessus .

3.5.1 Elément constant - linéaire

Plus précisément, nous donnons V_h and M_h, les espaces d'éléments finis du déplacement et de div-déplacement respectivement comme suit :

$$V_h = \{(u_1, u_2)/u_k = \Sigma_{j\in I^u}\alpha_j^k\phi_j, \alpha_j^k \in \mathbb{R}, k = 1, 2\}, \tag{3.87}$$

$$M_h = \{\psi/\psi = \Sigma_{i\in I^\psi}\beta_i^k\varphi_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}. \tag{3.88}$$

Une condition suffisante pour (V_h, M_h) pour satisfaire la condition $\inf - \sup$ est donné par V. V. K. Srinivas Kumar et al. en 2008 dans l'article [60]. Un résultat similaire a été prouvé par H. J. Choe et al. en 2001, [65] pour le couple (V_h, M_h). Dans ce qui suit, la condition $\inf - \sup$ et par conséquent, la bonne positivité du problème discret de Navier Lamé sont résolues par la suite pour l'élément quadratique-linéaire.

3.5.2 Élément quadratique-linéaire

On définit les espaces suivants :

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{h}\varphi(\frac{x}{h} - j_0)\varphi(\frac{y}{h} - j_1)\ ,\ Pour\ j \in I^\psi, \tag{3.89}$$

$$M_h = \{\psi/\psi = \Sigma_{i\in I^\psi}\beta_i^k\varphi_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}. \tag{3.90}$$

Dont φ est défini ci-dessous :

$$\varphi(x) := \begin{cases} x\ on\ [0, 1), \\ 2 - x\ on\ [1, 2), \\ 2 - x\ on\ [2, 3), \\ x - 4\ on\ [3, 4). \end{cases} \tag{3.91}$$

Pour construire l'espace d'approximation des déplacements :

$$V_h = \{(u_1, u_2)/u_k = \Sigma_{j\in I^u}\alpha_j^k\phi_j, \alpha_j^k \in \mathbb{R}, k = 1, 2\}, \tag{3.92}$$

Nous procédons comme suit : Pour $i \in I^u$, prenons ϕ_i la spline WEB de l'ordre 3, donnée par (3.72) et (3.86) où ϕ_i est défini comme dans (3.89), le produit tensor de

la traduction mise à l'échelle de la fonction ϕ.

$$\phi(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} \; on \; [0,1), \\ \dfrac{1}{2} + (x-1) - (x-1)^2 \; on \; [1,2), \\ \dfrac{(3-x)^2}{2} \; on \; [2,3). \end{cases} \tag{3.93}$$

Avec les notations de la définition 19 :

$$\phi_i = \frac{\omega}{\omega(x_i)}[\overline{\phi}_i + \sum_{j \in J} e_{i,j}\overline{\phi}_j], \tag{3.94}$$

et :

$$\overline{\phi}_j(x,y) = \frac{1}{h}\phi(\frac{x}{h} - j_0)\phi(\frac{y}{h} - j_1) \; , \; Pour \; j \in I^u, \tag{3.95}$$

$$V_b := \oplus_{K \in T_h} V_K, \tag{3.96}$$

Où la quadrangulation T_h est la collection de toutes les cellules $K \subset \Omega$ telles que : $K \cap \partial\Omega = \emptyset$ (ceux qui sont entièrement situés dans le domaine Ω) et $K_{\partial\Omega} := K \cap \Omega \neq \emptyset$ tels que $K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ (les parties qui coupent la frontière $\partial\Omega$) et V_K est le sous-espace à une dimension recouvert par la fonction b^K donnée par :

$$b^K := \omega(x,y)b(\frac{x}{h} - k_0)b(\frac{y}{h} - k_1), \tag{3.97}$$

La fonction $b(x) := x(x-1)$ est choisie pour que la fonction bulle b^K disparaisse sur les bords de la cellule K. (k_0, k_1) est le noeud correspondant à la cellule K. La fonction de pondération w est multipliée pour s'assurer que la fonction de bulle disparaît également sur le bord $\partial\Omega$. La fonction distance est utilisée près de bord, où elle n'a pas de singularités et se fond parfaitement avec un plateau à l'intérieur du domaine. Plus précisément, ω est défini comme suit :

$$\omega = 1 - (\frac{\max(\delta - d(x), 0)}{\delta})^l, \tag{3.98}$$

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega). \tag{3.99}$$

où δ contrôle la hauteur du plateau et l la finesse de la fonction de poids. Le plateau facilite l'utilisation de valeurs précalculées lors de l'assemblage de la matrice de Galerkin et évite également l'utilisation de quadratures d'ordre élevé pour l'intégration des fonctions de bulles prises en charge sur les cellules qui se trouvent entièrement

à l'intérieur du domaine.
L'espace d'approximation de déplacement est considéré comme étant :

$$V_h^2 := V_h \oplus V_b. \tag{3.100}$$

La paire (V_h^2, M_h) des espaces de discrétisation satisfait la condition $\inf - \sup$ discrête.

Lemme 21. (K. Höllig et al. 2001, [58]). La base web-spline $\{B_i\}_{i\in I}$ est stable pour la norme L^2 :

$$C_1 \parallel \{a_i\}_{i\in I} \parallel \leq \parallel \sum_{i\in I} B_i \parallel_0 \leq C_2 \parallel \{a_i\}_{i\in I} \parallel, \tag{3.101}$$

Lemme 22. (K. Höllig et al. 2001, [58]). Une base web spline $\{B_i\}_{i\in I}$ satisfait :

$$\parallel \sum_{i\in I} a_i B_i \parallel_1 \leq C_3 h^{-1} \parallel \{a_i\}_{i\in I} \parallel, \tag{3.102}$$

dont C_1, C_2, $C_3 > 0$ sont constantes.
Le lemme (22) nous permettre également de relier les normes Sobolev d'ordre supérieur en termes de la norme des coefficients.

Lemme 23. (Inverse estimate)
Soit V_h l'espace des élémenst finis considéré dans (3.87). Alors il existe C telle que :

$$\parallel \sum_{i\in I} a_i B_i \parallel_1 \leq C_6 h^{-1} \parallel \sum_{i\in I} a_i B_i \parallel_0, \tag{3.103}$$

La preuve découle du Lemme 21 et 22.

Lemme 24. (V. V. K. Srinivas Kumar et al.2008, [60]). Suppose T_h est une famille de mailles quadrilatérales uniformes sur le domaine Ω et $\prod_h$ est la projection $L2$ sur $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Puis :

$$\parallel \prod_h v \parallel_1 \leq C \parallel v \parallel_1, \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.104}$$

Dont C est une constante independente de h.

Lemme 25. Il existe un opérateur :

$$P_h : H^1(\Omega) \to V_h^2, \tag{3.105}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

$$b(P_h v, q_h) = b(v, q_h),\ \forall q_h \in M_h, \tag{3.106}$$

$$b_\Gamma(P_h v, q_h) = b_\Gamma(v, q_h),\ \forall q_h \in M_h, \tag{3.107}$$

$$\| P_h v \|_1 \leq C \| v \|_1 \tag{3.108}$$

$C > 0$ *est une constante indépendante de* h.

Démonstration. Soit $P_h^0 : H^1(\Omega) \longrightarrow V_h$ l'opérateur de projection L^2- habituel avec :

$$\| P_h^0 v \|_1 \leq c_1 \| v \|_1 \tag{3.109}$$

$$\| v - P_h^0 v \|_0 \leq c_2 h \| v \|_1 \tag{3.110}$$

La première inégalité (3.109) découle du lemme (24) et de la densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ alors :

$$(\overline{H_0^1(\Omega) \cap V}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}} \subset\ H^1(\Omega)), \tag{3.111}$$

et le deuxième (3.114) est une estimation d'erreur par la norme de L^2- . Soit l'application linéaire suivante :

$$P_h^1 : L^2(\Omega) \longrightarrow V_b, \tag{3.112}$$

telle que :

$$\int_k P_h^1 v = \int_k v\ ,\ for\ each\ K \in \mathtt{T}_h. \tag{3.113}$$

Nous pouvons interpréter l'application P_h^1 comme un processus en deux étapes. Nous appliquons d'abord la projection L^2- sur l'espace de fonctions constantes par morceaux. Ensuite, dans chaque cellule K, la constante est remplacée par une fonction bulle avec le même intégral.
De cette façon nous obtenons :

$$\| P_h^1 v \|_0 \leq c_3 \| v \|_0 \tag{3.114}$$

Plus précisément, nous définissons P_h^1 comme suit :

$$P_h^1 v_{|K}(x, y) = \beta(K) b^K(x, y)\ ,\ for\ each\ K \in \mathtt{T}_h \tag{3.115}$$

Vu la condition (3.113), la constante $\beta(K)$ est $\frac{\int_k v}{\int_k b^K}$.
Observons que :

$$\int_k b^K = c_4 h^2, \tag{3.116}$$

$$\int_k (b^K)^2 = c_5 h^2 \tag{3.117}$$

telles $c_4, c_5 > 0$ sont constantes :

$$\begin{aligned} \| P_h^1 v \|_0^2 = & \sum_{K\in \mathtt{T}_h} \int_k | P_h^1 v |^2 = \sum_{K\in \mathtt{T}_h} \int_k \beta(K)^2 (b^K)^2 \\ = & \sum_{K\in \mathtt{T}_h} \frac{\int_k v}{\int_k b^K} \int_k (b^K)^2 \\ \leq & \frac{1}{(c_4)^2 h^4} \sum_{K\in \mathtt{T}_h} (\int_k v^2) \mid K \mid c_5 h^2 \\ = & (\frac{c_5}{(c_4)^2}) \| v \|_0^2 \end{aligned} \tag{3.118}$$

L'inégalité ci-dessus est dûe à Cauchy-schwartz et à $\mid K \mid = h^2$ la surface de la cellule K. on va définir l'opérateur :

$$P_h v = P_h^0 v + P_h^1 (v - P_h^0 v), \tag{3.119}$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes . En vertu de la construction de P_h et nous avons :

$$v - P_h^0 v = 0 \ , \ on \ \partial\Omega, \tag{3.120}$$

$$\int_K (v - P_h v) = \int_K (I - P_h^1)(v - P_h^0 v) = 0 \forall K \in \mathtt{T}_h, \tag{3.121}$$

Comme q_h est linéaire par morceaux, nous appliquons le théorème de Green :

$$\begin{aligned} b(v - P_h v, q_h) = & \int_\Omega div(v - P_h v) q_h \\ = & \int_{\partial\Omega} (v - P_h v).n q_h - \int_\Omega (v - P_h v) \nabla q_h \\ = & - \sum_{K\in \mathtt{T}_h} C_K \int_\Omega (v - P_h v) = 0 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Il est facile de prouver (3.107) en appliquant le théorème de Green et (3.106).

$$\begin{aligned} \| P_h v \|_1 \leq & \quad \| P_h^0 v \|_1 + \| P_h^1 (v - P_h^0 v) \|_1 \\ \leq & \quad c_1 \| v \|_1 + c_6 h^{-1} \| P_h^1 (v - P_h^0 v) \|_0 \\ \leq & \quad c_1 \| v \|_1 + c_6 h^{-1} c_3 \| (v - P_h^0 v) \|_0 \\ \leq & \quad c_1 \| v \|_1 + c_6 h^{-1} c_3 c_2 h \| v \|_1 \\ \leq & \quad c \| v \|_1 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Cela prouve l'assertion (3.108) avec $c = c_1 + c_6 c_3 c_2$ telle que c_6 du lemme (23). □

Théorème 26. Soit l'espace :

$$B_h = \{ u \in V_h^2 \backslash b(P_h u, q_h) = 0 \ , \ \forall q_h \in M_h(\Omega) \}, \tag{3.124}$$

telle que $V_h^2 = B_h \oplus B_h^\perp$. La paire (V_h^2, M_h) satisfait la condition discrète $\inf - \sup$:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_0 > 0, \ \sup_{\| q_h \|_0 = 1} \frac{b(v_h, q_h)}{\| v_h \|_{V_h^2}} \geq \lambda_0 \ , \ \forall v_h \in B_h^\perp \\ \sup_{v_h \in B_h^\perp} b(v_h, q_h) > 0 \ , \ \forall q_h \in M_h(\Omega). \end{aligned} \tag{3.125}$$

Démonstration. Soit l'opérateur $P_h v \in B_h^\perp$. Par la forme continue de la condition $\inf - \sup$ (3.18) et (3.106), (3.107) du lemme 25, il existe $c > 0$ et $\varrho > 0$ telle que :

$$\frac{1}{c} \| P_h v \|_{V_h^2} \leq \| v \|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varrho} \sup_{\| q_h \| = 1} b(v, q_h) \tag{3.126}$$

$$= \frac{1}{\varrho} \sup_{\| q_h \| = 1} b(P_h v, q_h), \tag{3.127}$$

donc on trouve :

$$\sup_{\| q_h \| = 1} b(P_h v, q_h) > \frac{c}{\varrho} \| P_h v \|_{V_h^2} \ , \ \forall P_h v \in B_h^\perp, \tag{3.128}$$

Selon (3.106) et la seconde condition de (3.18), on a :

$$\sup_{v_h \in B_h^\perp} b(v_h, q_h) = \sup_{v \in B^\perp} b(v, q_h) > 0, \forall q_h \in M_h(\Omega). \tag{3.129}$$

□

Remarque. Avec une démonstration similaire à celle ci-dessus La forme bilinéaire b_Γ

(3.13) sur $V_h^2 \times M_h$ vérifie la condition inf $-$ sup citée dans le théorème 26.
Finalement, en appliquant les deux théorèmes 26 et 18, le problème approché du problème faible (3.12) admet une solution unique (u_h, ψ_h) dans $V_h^2 \times M_h$.

3.6 La forme matricielle du problème de Navier Lamé

Après avoir établi la condition discrète inf $-$ sup, nous sommes prêts à prouver l'existence et le caractère unique de la solution discrète.
Cette partie de la section est commune aux éléments linéaires-constants et quadratiques-linéaires. Nous appelons donc les espaces d'éléments finis sous la forme V_h et M_h en général. Pour trouver la paire de solutions discrète $(u_h, \psi_h) \in V_h \times M_h$, il suffit de trouver respectivement les vecteurs de coefficients de déplacement et le div-displacement : $\overline{u} := (\overline{u^1}, \overline{u^2})^T$, $\overline{\psi}$, tels que :

$$\overline{u^\alpha} = (\overline{u_i^\alpha})_{i \in I^u})^T, \alpha = 1, 2. \ \overline{\psi} := (\overline{\psi_j})_{j \in I^\psi})^T. \tag{3.130}$$

D'ailleurs, nous utilisons les notations suivantes pour les matrices de Dirichlet et de Neumann :

$$(B^{-1}A)_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta}, (B^{-1})_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, 2. \tag{3.131}$$

Définissons les éléments des matrices suivantes :

$$A_{i,k}^\alpha = \int_\Omega \mu \nabla \phi_i . \nabla \phi_k d\Omega + \int_\Gamma \xi_{\alpha\alpha} \phi_i \phi_k d\Gamma, \tag{3.132}$$

$$B_{i,j}^\alpha = \int_\Omega (\lambda + \mu) \varphi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha} d\Omega, \tag{3.133}$$

$$B_{\Gamma,i,j}^\alpha = \int_\Omega (\lambda + \mu) \varphi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha} d\Omega + \int_\Gamma \mu \varphi_j n \phi_i d\Gamma, \tag{3.134}$$

$$D_{m,n} = \int_\Omega (\lambda + \mu) \varphi_m \varphi_n d\Omega, \tag{3.135}$$

$$L_s^1 = \int_\Omega f_1 \phi_s d\Omega + \int_\Gamma (\zeta_{11} + \zeta_{21}) g_1 \phi_s d\Gamma \tag{3.136}$$

$$L_s^2 = \int_\Omega f_2 \phi_s d\Omega + \int_\Gamma (\zeta_{22} + \zeta_{12}) g_2 \phi_s d\Gamma. \tag{3.137}$$

La forme matricielle des équations discrètes de Navier-Lamé s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 & B_\Gamma^1 \\ 0 & A^2 & B_\Gamma^2 \\ B^{1,T} & B^{2,T} & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u^1} \\ \overline{u^2} \\ \overline{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.138}$$

En définissant les matrices assemblées $\mathtt{A} = Diag(A^1, A^2)$, $\mathtt{B}_\Gamma = (B_\Gamma^1, B_\Gamma^2)^T$
$\mathtt{B} = (B^1, B^2)$, $\mathtt{F} = (L^1, L^2)^T$, nous réécrivons le système (3.138) ci-dessus comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathtt{A} & \mathtt{B}_\Gamma \\ \mathtt{B}^T & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{F} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.139}$$

Découplage du déplacement-div et du déplacement :
A partir de la matrice ci-dessus, nous écrivons :

$$\begin{cases} \mathtt{A}\overline{u} + \mathtt{B}_\Gamma\overline{\psi} = F, \\ \mathtt{B}^T\overline{u} - D\overline{\psi} = 0. \end{cases} \tag{3.140}$$

En multipliant la première équation ci-dessus par $\mathtt{A}^{-1}$, suivi de $\mathtt{B}^T$ et en utilisant la deuxième équation, on obtient :

$$(D + \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}_\Gamma)\overline{\psi} = \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{F} \tag{3.141}$$

Dans ce qui suit, nous montrons que : $D + \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}_\Gamma$ est inversible, et l'équation ci-dessus (3.141) peut donc être résolue pour $\overline{\psi}$.
En effet, nous posons :

$$\mathtt{B}_\Gamma = \mathtt{B} + \mathtt{b}_\Gamma, \tag{3.142}$$

avec :

$$(\mathtt{b}_\Gamma)_{i,j} = \int_\Gamma \mu\varphi_j n\phi_i d\Gamma, \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned} \langle (D + \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}_\Gamma)\psi, \psi\rangle_{\mathbb{R}^M} &= \langle D\psi, \psi\rangle_{\mathbb{R}^M} + \langle \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}_\Gamma\psi, \psi\rangle_{\mathbb{R}^M} \\ &= \langle D\psi, \psi\rangle_{\mathbb{R}^M} + \langle \mathtt{A}^{-1}(\mathtt{B} + \mathtt{b}_\Gamma)\psi, \mathtt{B}\psi\rangle_{\mathbb{R}^M} \\ &= \langle D\psi, \psi\rangle_{\mathbb{R}^M} + \langle \mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}\psi, \mathtt{B}\psi\rangle_{\mathbb{R}^M} + \langle \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi, \mathtt{B}\psi\rangle_{\mathbb{R}^M}. \end{aligned} \tag{3.144}$$

Dont $M =$ est le cardinal de l'ensemble I^ψ. La positivitée de :

$$\mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B} \tag{3.145}$$

vient de celle de la matrice A, (grâce à la condition inf $-$ sup) et l'inégalité suivante est une condition équivalente à la condition inf $-$ sup (3.18).

$$\| \mathtt{B}\psi \| \geq \varrho \| \psi \| \tag{3.146}$$

En effet, on a :

$$\langle \mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}\psi, \mathtt{B}\psi \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq \beta \| \mathtt{B}\psi \|^2 \geq \beta\varrho^2 \| \psi \|^2 \tag{3.147}$$

La condition (3.19) donne :

$$\langle D\psi, \psi \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq \varepsilon \| \psi \|^2 \tag{3.148}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\langle \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi, \mathtt{B}\psi \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq - \| \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi \| \| \mathtt{B}\psi \| \tag{3.149}$$

D'autre part :

$$\| \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi \| = (\sum_{i\in I^u} (| \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi |^2)_i^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i\in I^u} (\sum_{m\in I^\psi} \sum_{k\in I^u} A_{ik}^{-1} b_{km}\psi_{m1})^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.150}$$

$$\leq (\sum_{i\in I^u} (card I^u card I^\psi \max_{k\in I^u} \max_{m\in I^\psi} | A_{ik}^{-1} b_{km} | \sum_{m\in I^\psi} \psi_{m1})^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.151}$$

$$\leq ((card(I^u))^2 card(I^\psi) \max_{k,i\in I^u} \max_{m\in I^\psi} | A_{ik}^{-1} b_{km}) |)^{\frac{1}{2}} \| \psi \| \tag{3.152}$$

En prenant :

$$card(I^\psi) = M \ , \ card(I^u) = N, \tag{3.153}$$

$$\max_{k,i\in I^u} \max_{m\in I^\psi} | A_{ik}^{-1} b_{km}) | = \alpha. \tag{3.154}$$

Puis on trouve que :

$$\langle \mathtt{A}^{-1}\mathtt{b}_\Gamma\psi, \mathtt{B}\psi \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq -N(M\alpha)^{\frac{1}{2}}\varrho \| \psi \|^2 \tag{3.155}$$

En combinant, (3.147),(3.148),(3.155) on obtient :

$$\langle (D + \mathtt{B}^T\mathtt{A}^{-1}\mathtt{B}_\Gamma)\psi, \psi \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq (\beta\varrho^2 + \varepsilon - N\varrho(M\alpha)^{\frac{1}{2}}) \| \psi \|^2 \tag{3.156}$$

tant que : $\beta\varrho^2 + \varepsilon - N\varrho(M\alpha)^{\frac{1}{2}} > 0$.
Cela prouve l'existence de la solution discrète (u_h, ψ_h).

3.7 Résultats numériques

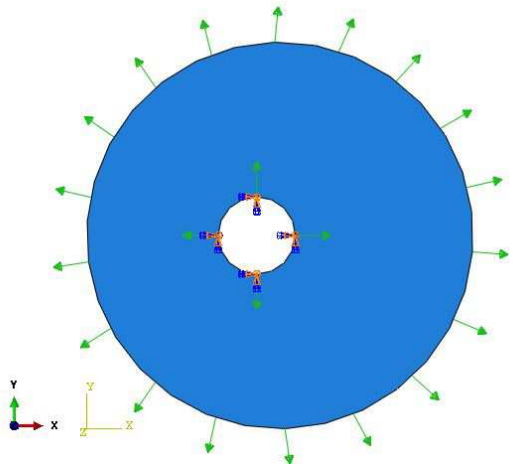


FIGURE 3.5 – Disque tournant

Dans cette section nous testons les performances de la méthode Web-Spline pour le problème de Navier Lamé (3.1). Nous suivons les procédures suivantes :

- Nous comparons les resultats obtenus avec ceux du logiciel Abaqus.
- Nous calculons le résidu appelé r de l'approximation de Ritz-Galerkin u_h.
- Nous calculons l'erreur relatif e_h .
- Nous calculons Le taux α

On considére le domaine Ω est un disque en acier en rotation (voir fig. 3.5) défini par :

$$\Omega = \{(x,y)/(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2\}\backslash\{(x,y)/(x-\frac{1}{2}+d)^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq r^2\}, \quad (3.157)$$

Avec $r = 0.1$, $d = 0.06$ et le bord de Ω se compose de deux parties disjointes sous la forme de deux cercles :

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad (3.158)$$

telles que :

$$\Gamma_D = \{(x,y)/(x-\frac{1}{2}+d)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - r^2 = 0\}, \quad (3.159)$$

$$\Gamma_N = \{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = 0\}. \quad (3.160)$$

Nous prenons la force centrifuge $\| f \| = r$.

On affecte dans (3.77) :

Sur Γ_D : $g = (0, 0)$. Il suffit de prendre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{3.161}$$

Sur Γ_N : la force de traction $g = (0, 0)$. Il suffit de prendre :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \tag{3.162}$$

Les figures 3.6... 3.9 illustrent la solution numérique du déplacement pour un disque tournant en acier avec $(E = 210GPa, \nu = 0.28)$ qui est fixé sur un axe légèrement excentré avec un rayon r. Nous montrons sur chaque noeud du domaine la direction et la taille (en couleur) du déplacement pour chaque $H = (8, 16, 32, 64)$ nombre de cellules par direction.
Nous remarquons qu'il y a une similarité de résultats avec ceux du logiciel Abaqus. Cela montre que l'approche web-spline est trés efficace pour la résolution du problème de l'élastcité linéaire.

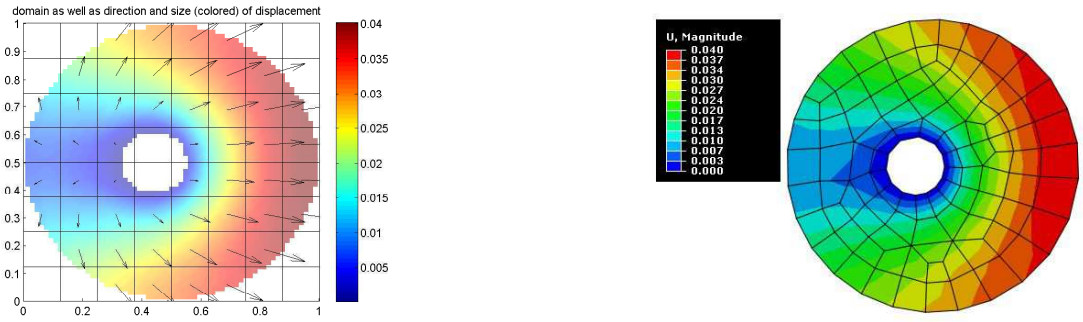


FIGURE 3.6 – Déplacement par Matlab (gauche), Abaqus (droite) pour H = 8

Nous pouvons calculer les résidus point par point pour le problème de Navier Lamé (3.1) et on a :

$$\| \ r_h(x, y) \ \|_0 = \| \ L(u_h, \psi_h)(x, y) - f(x, y) \ \|_0, \tag{3.163}$$

avec L est l'opérateur différentiel du problème de Navier Lamé :

$$L(u_h, \psi_h)(x, y) = -\mu \Delta u_h(x, y) - (\lambda + \mu) \nabla \psi_h(x, y), \tag{3.164}$$

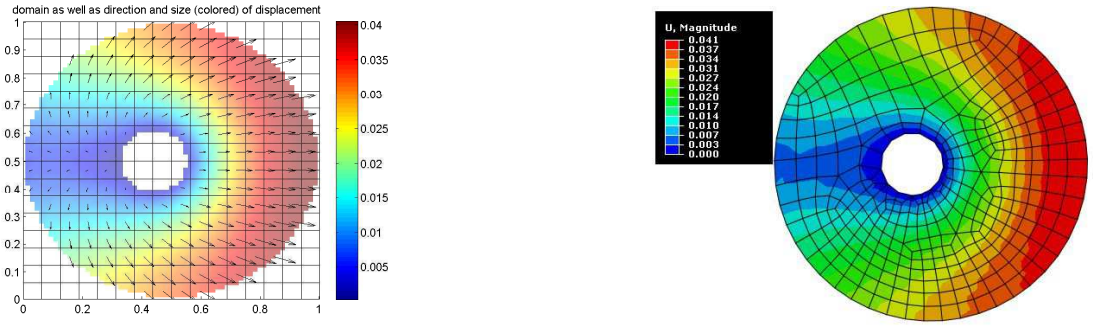


FIGURE 3.7 – Déplacement par Matlab (gauche), Abaqus (droite) pour H = 16

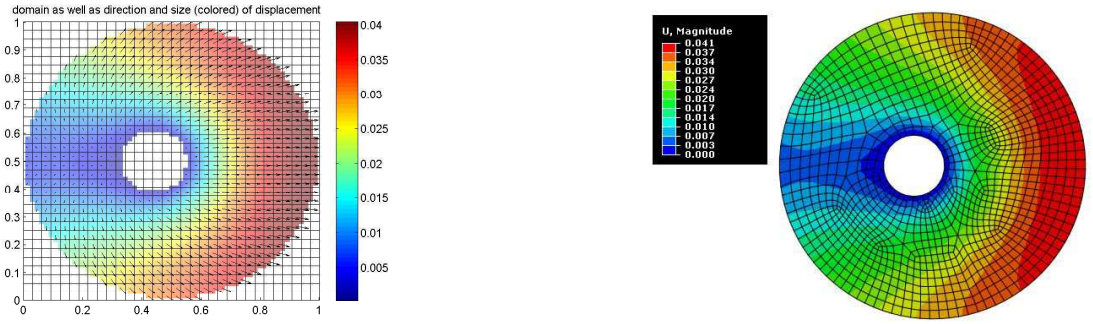


FIGURE 3.8 – Déplacement par Matlab (gauche), Abaqus (droite) pour H = 32

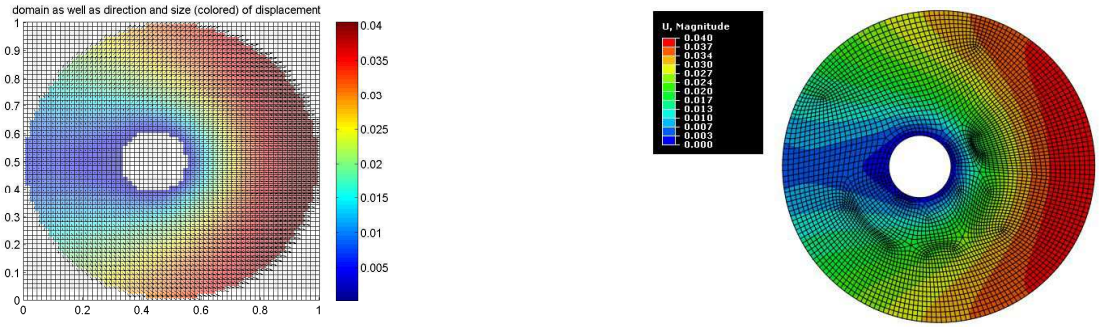


FIGURE 3.9 – Déplacement par Matlab (gauche), Abaqus (droite) pour H = 64

On considére l'erreur relative au pas $h = \frac{1}{H}$ (Hollig et al.2003 [101]) :

$$e_h = \frac{\| r_h \|_0}{\| f \|_0}. \tag{3.165}$$

On considére le taux α définit par :

$$\alpha = \frac{\log e_h - \log e_{\frac{h}{2}}}{\log 2} \tag{3.166}$$

La relation (3.166) est équivalente à : $e_h = ch^\alpha$ pour tout h le pas de cellule.

Nous souhaitons que α augmente lorsque h diminue.

H	e_h	α	$L^2(\Omega)$-error
8	1.118E+000	NaN	3.81647E-002
16	3.644E-001	1.618E+000	1.09184E-003
32	1.831E-002	4.314E+000	1.13274E-005
64	7.003E-003	1.387E+000	
128	1.775E-003	1.980E+000	
256	4.462E-004	1.992E+000	

TABLE 3.1 – Tableau d'erreurs

Comme mentionné dans le tableau 3.1, nous vérifions pour cet exemple la précision des approximations numériques.
En effet, étant donné que les fonctions de base B-spline pondérées étendues. Elles sont continuellement différenciables pour $n \geq 2$ et lisses.
Le domaine 3.5 possède un bord lisse circulaire. Nous remarquons que d'aprés un raffinement à partir de $H \geq 16$ l'erreur relative e_h (3.163) converge trop vite vers 0. Sinon pour les domaines avec des coins, il y a des singularités résultantes. En effet, pour l'intégration numérique (utilisée pour calculer l'intégrale d'erreur), on ne prend pas en considération que les fonctions impliquées ne sont pas intégrables.
Nous pouvons substituer l'approximation par éléments finis Web-spline à l'équation aux dérivées partielles de Navier Lamé où $g = 0$ pour un disque en rotation. Cela ne serait pas possible pour l'approximation par éléments finis standard qui appartiennent généralement à $H^1(\Omega)$.
Les estimations des taux affichent un comportement qui augmente régulièrement lorsque H passe de 64 à 256 (par exemple, l'erreur relative e_h est passée de $1.118E+000$ à $4.462E-004$ lorsque H passe de 8 à 256), alors que nous nous attribuons aux stabilités numériques.
L'approximation sur la grille la plus fine remplace la solution exacte. Alors pour calculer $L^2(\Omega)$- error numériquement, il suffit prendre la différence de 2 solutions pour H et $2H$.

3.8 Conclusion

Ce chapitre considère le problème de l'élasticité linéaire à partir de l'équation de Navier-Lamé avec la condition aux limites $C_{A,B}$. Nous avons construit une méthode mixte d'éléments finis à l'aide d'un espace approché formé de fonctions B-splines étendues pondéré (Web-spline).
Nous avons montré que le couple des éléments finis (quadratiques, linéaires) basés sur WEB-spline satisfont à la condition inf − sup. L'existence et l'unicité de la solution faible, ainsi que la convergence de la solution numérique pour le cas quadratique sont prouvées. Nous avons proposé des tests numériques pour confirmer que, grâce aux nouvelles routines d'intégration, les solveurs Web-splines sont efficaces. Nous citons les avantages de Web-spline dans la méthode des éléménts finis :

- Modélisation des géometries plus complexes.
- Accomplissement exact des conditions aux limites.
- Pas de génération de maillage.
- Intégration naturelle dans les systèmes de CAO à base de B-splines de produit tenseur.
- Mise en œuvre simple et temps de calcul court.
- Approximations par un choix approprié du degré des fonctions de base.
- Espaces d'approximation de faible dimension.
- Bien adapté aux méthodes 3D et au raffinement hiérarchique.

Les B-splines étendues pondérées (Web-splines) fournissent une nouvelle classe d'éléments finis pour la résolution de problèmes avec conditions aux limites bidimensionnelles et tridimensionnelles.

La méthode Web-spline résultante ne nécessite aucune génération de maillage et peut donc être mise en œuvre de manière très efficace. Une grande précision peut être obtenue avec des espaces d'approximation dimensionnels relativement faibles.
Ces resultats donnent une confiance pour intégrer les fonctions Web-spline dans l'études mécaniques des structures, notamment dans l'élasticité linéaire.

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans ce memoire de thèse sont consacrés à la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles de Navier-Lamé.

Les objectifs de cette étude est d'exposer les difficultés de la résolution causées par des conditions aux limites standards. Nous avons proposé deux moyens d'atténuer ces difficultés.

Le premier moyen, nous avons proposé une nouvelle condition aux limites généralisée appelée $C_{A,B}$. Le deuxieme moyen, nous avons adapté une méthode des éléments finis basée sur les fonctions Web-splines.

Pour réaliser ces objectifs, nous avons implémenté des formulations basées sur la méthode des éléments finis mixtes en utilisant deux espaces d'approximation $(P1+bubble, P1)$ et Web-spline pour la discrétisation des équations de Navier-Lamé avec la nouvelle condition aux limites généralisée $C_{A,B}$ et la condition aux limites standard dans un domaine bidimensionnel.

Nous avons testé la performance de la nouvelle condition aux limites généralisée $C_{A,B}$ par rapport à celle des autres conditions aux limites standards.

D'aprés une étude bibliograhique sur l'article de J. Alberty et al. [1], nous avons constaté que les C.L. standards ne permettent pas de résoudre l'équation de Navier-Lamé de manière fluide. Ainsi, on n'atteint pas la qualité souhaitée dans la résolution. En revanche la condition généralisée $C_{A,B}$ aide à appliquer la méthode des éléments finis dans toutes ses étapes pratiques.

En comparant ces deux types des conditions, nous avons extrait plusieurs résultats comparatifs résumés dans le tableau suivant :

Etape de résolution	C.L. standards	C.L. $C_{A,B}$
Espace fonctionnel	contraignant	moins contraignant
Problème variationnel	pas d'insertion totale de C.L	insertion totale de C.L
Problème faible	bien posé	bien posé
Espace d'approximation	non adéquat	adéquat
Problème approché	bien posé	bien posé
La matrice de regidité A	étendue	non étendue
Problème matriciel $Ax = b$	méthode itérative	méthode directe de Gauss
Solution approchée	convergence lente	convergence vite

TABLE 3.2 – Tableau comparatif entre C.L. standards et C.L. $C_{A,B}$

Les données du tableau 3.2 implique que la condition généralisée $C_{A,B}$ surpasse les conditions aux limites ordinaires à tous les niveaux.

Pour faire les simulations numériques, nous avons utilisé deux modèles géométriques. Le premier modèle est une plaque carrée trouée au centre plane du matériel plexiglas. Par raison de symétrie, nous avons discrétisé que le quart de la plaque. Le deuxieme modéle est un disque tournant en acier 2D.
La programmation de la méthode $(P1 + bubble, P1)$ et la méthode Web-spline sont implémentées par le langage du calcul Matlab. Rappelons que les résultats obtenus par le code Matlab, sont comparés avec ceux du logiciel Abaqus.

Dans le premier chapitre, Nous avons passé en revue tous les problèmes rencontrés lors de la résolution de l'équation de Navier-Lamé avec des conditions aux limites standards.
La condition $\inf - \sup$ correspondante au problème approché (1.51) est verifié dans le theorème (2). Nous avons construit le problème matriciel, en caculant les éléments de chaque matrice du poblème (1.85). Nous nous sommes ramenés au système linéaire :

$$\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{F} \tag{3.167}$$

La matrice globale $\mathbb{A}$ et le vecteur $\mathbb{F}$ sont donnés par (1.108) et (1.109).
Nous avons résolu le sytème linéaire (3.167) en utlisant un code Matlab.
Deux routines principales de ce code existent dans la partie Annexe de la thèse.
Dans la partie simulation numérique, nous avons considéré un domaine Ω sous forme d'une plaque carrée trouée au centre du materiel Plexiglas.
Nous avons visualisé les déplacements obtenus par la méthode $(P1 + bubble, P1)$, en comparant les résultats de cette méthode par ceux de la méthode des éléments finis ordinaires développée dans l'article [1].
A partir du tableau d'erreurs 1.1, nous avons constaté que la méthode $(P1 + bubble, P1)$ est plus efficace que les autres méthodes ordinaires.

Dans le second chapitre, nous avons développé la méthode des éléments finis mixtes $(P1 + bubble, P1)$, appliquée à l'équation de Navier-Lamé avec la condition généralisée $C_{A,B}$. La condition généralisée $C_{A,B}$ offre la bien posée du problème faible (2.18) et approché (2.119).
En effet, dans le théorème (12), nous avons montré que le problème variationnel généralisé (2.19) possède une solution unique. Ainsi, pour garantir la bien posé du problème approché (2.119) nous avons montré la condition $\inf - \sup$.
Pour diminuer le nombre des inconnues dans le problème matriciel, nous avons exclu

les degrés de liberté associés à la fonction bubble. Nous avons obtenu un sytème linéaire. Par un code Matlab nous avons inversé directement la matrice globale (2.255) de ce système sans utiliser l'une des méthodes itératives. Cela a été possible grâce la condition $C_{A,B}$.
Les résultats numériques obtenus sont comparés avec ceux du système d'Abaqus et de la méthode des éléments finis ordinaires avec la C.L. standards.
Nous avons fait une comparaisons entre la méthode $(P1 + bubble, P1)$ avec la C.L. $C_{A,B}$ et $(P1 + bubble, P1)$ avec la C.L.standards. Nous avons conclut qu' à l'aide de la nouvelle condition $C_{A,B}$ la solution approchée converge trés vite vers la solution exacte.

Dans le troisième chapitre, nous avons presenté une méthode des éléments finis mixtes Web-spline appliquée à l'équation de Navier Lamé avec la condition généralisée $C_{A,B}$. Nous avons montré l'existence de la solution approché pour le couple d'espace d'approximation (élément quadratique, élément linéaire) : $V_h^2 \times M_h$.
La base web-spline modélise exactement la condition aux de Dirichlet homogène. Nous avons adapté la base web-spline à la condition aux limites généralisée $C_{A,B}$. Par conséquent, nous avons construit une nouvelle base (3.86) qui modélise exactement la C.L. de Dirichlet non-homogène.
Nous avons réalisé des tests numériques à l'aide de notre code de calcul programmé par Matlab en comparant ces résultats avec ceux du logiciel Abaqus. Dans ce contexte, les résultats calculés par la méthode des éléments finis mixtes Web-spline sont performantes grâce aux fonctions B-splines pondérées et étendues (web-splines).

Finalement, la généralité de ces méthodes ouvre de multiples perspectives, parmi nos travaux de future :
Nous proposons une nouvelle méthode d'éléments finis dont les éléments sont des disques ou des sphères selon le dimension du domaine.
En effet, étant donné que de nombreux problèmes pratiques impliquent des domaines convexes irréguliers, tels que des domaines avec des bords curvilignes et circulaires. Ainsi que les maillages triangulaires uniformes structurés et non structurés, ou des maillages quadrilatéraux uniformes ne sont pas efficaces conduisant à une bonne réponse. En effet la nouvelle façon de maillage présente un nouveau schéma de solution par éléments finis. La propriété est que les éléments finis ne peuvent pas se chevaucher, ce qui supprime un bon nombre des difficultés de maillage, conduit à

un maillage habituel et facile à utiliser pour un ingénieur ou un concepteur. Cette méthode s'ouvre sur plusieurs domaines d'application telle que les cables éléctriques.

Conclusion and perspectives

The work presented in this thesis is dedicated to the numerical resolution of the Navier-Lamé partial differential equation.

The objectives of this study are to expose the difficulties of resolution caused by standard boundary conditions. We have proposed two ways of mitigating these difficulties.

The first way, we proposed a new generalized boundary condition called $C_{A,B}$. The second way, we adapted a finite element method, based on the Web-spline functions. To achieve these goals, we implemented formulations based on the mixed finite element method using two approximation spaces $(P1 + bubble, P1)$ and Web-spline for the discretization of the Navier-Lamé equations with the new generalized boundary condition $C_{A,B}$ and the standard boundary condition in a two-dimensional domain. We tested the performance of the new generalized $C_{A,B}$ boundary condition against that of other standard boundary conditions.

According to a bibliographical study on the article by J. Alberty et al. [1], we found that the standard C.L. does not solve the Navier-Lamé equation in a fluid way. Thus, we do not achieve the desired quality in the resolution. On the other hand, the generalized condition $C_{A,B}$ helps to apply the finite element method in all its practical steps. Comparing these two types of conditions, we extracted several comparative results summarized in the following table :

Step of resolution	C.L. standards	C.L. $C_{A,B}$
Functional space	restrictive	less restrictive
Variational problem	no total insertion of C.L	total insertion of C.L
Weak problem	well posed	well posed
Approximate space	not adequate	adequate
Approximate problem	well posed	well posed
The stiffness matrix A	extended	not extended
Linear system $Ax = b$	Iterative method	Direct method of Gauss
Approximate solution	slow convergence	convergence quickly

TABLE 3.3 – Comparative table between C.L. standards and C.L. $C_{A,B}$

The data in the table 3.3 implies that the generalized condition $C_{A,B}$ exceeds ordinary boundary conditions at all levels.

To do numerical simulations, we used two geometric models. The first model is a square plate with holes in the flat center of the plexiglass material. By reason of symmetry, we have discretized only one quarter of the plate. The second model is

a 2D steel rotating disk. The programming of the $(P1 + bubble, P1)$ method and the Web-spline method are implemented by the Matlab calculation language. Recall that the results obtained by the Matlab code are compared with those of the Abaqus software.

In the first chapter, we reviewed all the problems encountered in solving the Navier-Lamé equation with standard boundary conditions.
The condition $\inf - \sup$ corresponding to the approximate problem (1.51) is verified in the theorem (2). We constructed the matrix problem, by hiding the elements of each matrix of the (1.85) problem. We went back to the linear system :

$$\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{F} \tag{3.168}$$

The global matrix $\mathbb{A}$ and the vector $\mathbb{F}$ are given by (1.108) and (1.109).
We solved the linear system (3.168) using a Matlab code.
Two main routines of this code exist in the Annex part of the thesis.
In the numerical simulation part, we considered a Ω domain in the form of a square plate with holes in the center of the Plexiglas material.
We have visualized the displacements obtained by the method $(P1 + bubble, P1)$, by comparing the results of this method with those of the ordinary finite element method developed in the article [1].
From the error table 1.1, we found that the method $(P1+bubble, P1)$ is more efficient than the other ordinary methods.

In the second chapter, we developed the mixed finite element method $(P1 + bubble, P1)$, applied to the Navier-Lamé equation with the generalized condition $C_{A,B}$. The generalized condition $C_{A,B}$ offers the well-posed of the weak problem (2.18) and approximated (2.119).
Indeed, in the theorem (12), we have shown that the generalized variational problem (2.19) has a unique solution. Thus, to guarantee the well-posed of the problem approached (2.119) we have shown the condition $\inf - \sup$.
To reduce the number of unknowns in the matrix problem, we have excluded the degrees of freedom associated with the bubble function. We obtained a linear system. By a Matlab code we directly inverted the global matrix (2.255) of this system without using one of the iterative methods. This was possible thanks to the condition $C_{A,B}$.
The numerical results obtained are compared with those of the Abaqus system and the ordinary finite element method with the standard C.L. We compared the $(P1 +$

bubble, $P1$) method with the C.L. $C_{A,B}$ and ($P1$+*bubble*, $P1$) with the C.L.standards. We concluded that using the new condition $C_{A,B}$ the approximate solution converges very quickly to the exact solution.

In the third chapter, we presented a Web-spline mixed finite element method applied to the Navier Lamé equation with the generalized condition $C_{A,B}$. We have shown the existence of the approximate solution for the approximation space pair (quadratic element, linear element) : $V_h^2 \times M_h$.
The web-spline database models exactly the homogeneous Dirichlet condition. We adapted the web-spline database to the generalized $C_{A,B}$ boundary condition. As a result, we have built a new (3.86) database that models exactly the non-homogeneous Dirichlet C.L. We performed numerical tests using our computer code programmed by Matlab by comparing these results with those of the Abaqus software. In this context, the calculated results Web-spline mixed finite element methods perform well thanks to the weighted and extended B-splines functions (web-splines).

Finally, the generality of these methods opens multiple perspectives, among our future works :
We propose a new finite element method whose elements are disks or spheres according to the dimension of the domain. Indeed, since many practical problems involve irregular convex domains, such as domains with curvilinear and circular edges. As well as uniform structured and unstructured triangular meshes, or uniform quadrilateral meshes are not effective leading to a good answer. Indeed the new way of mesh presents a new diagram of solution by finite elements. The property is that finite elements can not overlap, which removes many of the mesh difficulties, leads to a usual and easy-to-use mesh for an engineer or designer. This method opens on several application areas such as electric cables.

Bibliographie

[1] J. Alberty, Kiel, C. Carstensen, Vienna, S. A. Funken, Kiel and R. Klose, Kiel. Matlab Implementation of the Finite Element Method in Elasticity. Computing. Springer-Verlag .Volume 69, Issue 3, pp 239-263. 2002.

[2] K. Atkinson and W. Han . Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework. TAM 39, Springer, Berlin. 2000.

[3] D.N. Arnold, F.Brezzi, M.Fortin. A stable finite element for the stokes equations. Estratto da Calcolo. vol : 21. 337 - 344. 1984.

[4] I. Babuska .The finite element method with Lagrangian multipliers. Numerische Matheatik. vol : 20. pp.179-192. 1972.

[5] I. Babuska. The finite element method with penalty, Mathematics of computation.vol : 27. pp.221 - 228. 1973.

[6] A. Bantle. Efficient Implementation of the Collocation Method for the Navier-Lamé Equation. 2010.

[7] J.W Barrett and C.M Elliot, Finite element approximation of the Dirichlet problem using the boundary penalty method, Numerische Matheatik. vol : 49 pp. 343 - 366. 1986.

[8] Bathe KJ. Finite element procedures. 1996.

[9] BENZI, Michele et GOLUB, Gene H. A preconditioner for generalized saddle point problems, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 26, no 1, p. 20 - 41. 2004.

[10] C. Bernardi. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. in Nonlinear partial differential equations ans their applications. 1989.

[11] C. Bernardi, C. Canuto, and Y. Maday, Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral. approximation of the Stokes problem, SIAM J. Numer. Anal. vol : 25. pp. 1237- 1271. 1988.

[12] D. Braess. Finite elemente. Cambridge University Press. 2001.

[13] F.Brezzi and M.Fortin, Mixed and Hybrid Element Methods. Springer-Verlag. New York. 1991.

[14] Brezis Haim, Philippe G. Ciarlet, and Jacques Louis Lions. Analyse fonctionnelle : thorie et applications. Vol. 91. Paris : Dunod. 1999.

[15] K. Stierstadt T. Dorfmüller, W.T. Hering. Bergmann Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1. Walter de Gruyter, 1998.

[16] Jonas Koko Limos. Vectorized Matlab Codes for the Stokes Problem with ($P1+Bubble, P1$) Finite Element. Universite Blaise Pascal -CNRS UMR 6158 ISIMA, Campus des Cezeaux - BP 10125, 63173 Aubire cedex, France. 2012.

[17] J. Pitkärante, Boundary subspaces for the finite element method with Lagrange multipliers, Numerische Matheatik. vol : 33. pp. 273- 289. 1979.

[18] J. Pitkäranta. Local stability conditions for the Babuska method of Lagrange multipliers. Mathematics of Computaion. vol : 35. pp. 1113- 1129. 1989.

[19] R.Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method. Journal of Computational and Applied Mathematics. vol : 63. pp. 139 - 148. 1995.

[20] T.J.R. Hughes and L.P.Franca, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VII. The Stokes problem with various well- posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity pressure spaces. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol : 65. Issue : 1. pp. 85 - 96. November 1987.

[21] A. Ern and J.L. Guermond. Theory and practice of finite elements. of Applied Mathematical Series. Springer-Verlag. New York.. vol : 159. 2004.

[22] A. Ern, J.L. Guermond. Theory and practice of finite elements. 2013.

[23] J. Camaño, R. Oyarzúa, G Tierra . Analysis of an augmented mixed - FEM for the Navier-Stokes problem. Mathematics of Computation. 2017.

[24] M. Kojic, KJ Bathe. Studies of finite element procedures - Stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation. Computers and Structures. 1987.

[25] V.Girault and P. A. Raviart. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag. Berlin Heiderlberg New York. 1981.

[26] Alexandre Ern. Aide-memoire Elements Finis, Dunod. Paris. 2005.

[27] R.B.Kellogg and B. Liu. A. finite element method for compressible Stokes equations. SIAM J.Numer.Anal. vol : 33 pp. 780 - 788. 1996.

[28] D.Yang. Iterative schemes for mixed finite element methods with applications to elasticity and compressible flow problems. Numer. Math. vol : 93. pp.177-200. 2002.

[29] A. Geilenkothen. Constraint preconditioning for linear systems in elasticity. Proceedings in Applied Mathematics. pp : 481 - 482. 2003.

[30] Klaus-Jürgen Bathe, Edward L Wilson. Numerical methods in finite element analysis. 1976.

[31] D.N. Arnold , F.Brezzi, M.Fortin. A stable finite element for the stokes equations, Calcolo. vol : 21. 337-344. 1984.

[32] D.Yang, Iterative schemes for mixed finite element methods with applications to elasticity and compressible flow problems. Numer. Math., 93, pp.177-200. 2002.

[33] Daniele Boffi, Franco Brezzi, Michel Fortin. Mixed Finite Element Methods and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg. 2013.

[34] Gabriel N. Gatica. A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Springer. Theory and Applications. 2014.

[35] Gabriel N. Gatica. Mixed Finite Element Methods. A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method . pp 93 - 126. 2013.

[36] Jaouad El-Mekkaoui, Ahmed Elkhalfi, Abdeslam Elakkad, Resolution of Stokes Equations with the Ca ;b Boundary Condition Using Mixed Finite Element Method, WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS. 2013.

[37] Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor and J.Z. Zhu. The Finite Element Method : Its basis and Fundamentals, Elsevier, Page Count : 756. 2013.

[38] Junichi Mtsumoto. A relationship between stabilized FEM and Bubble fonction element stabilization method with orthogonal basis for incompressible flows. Journal of applied mechanics. Vol 8. August . 2005.

[39] P.Ciarlet, JR., Jianguo Huang, and Jun Zou.some observation ongeneralized saddle-point problem. SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. c Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol : 25. No. 1. pp. 224 - 236. 2003.

[40] P.G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson,Paris, 1982.

[41] R.B.Kellogg and B. Liu, A finite element method for compressible Stokes equations, SIAM. J.Numer.Anal.,33 , pp. 780-788. 1996.

[42] R. A. Nicolaides. Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems, SIAM J. Numer. Anal., 19 , pp. 349 - 357. 1982.

[43] MH. Sadd. Elasticity : Theory, Application and Numerics. Amsterdam : Elsevier Butterworth Heinemann. 2005.

[44] SP. Timoshenko , Goodier JN. Theory of Elasticity. McGraw-Hill ; New York : 1985.

[45] P.Ciarlet,JR.,Jianguo Huang, and Jun zou.some observation ongeneralized saddle-point problem . Society for Industrial and Applied Mathematics Vol.25, No. 1, pp. 224-236. 2003.

[46] O.C. Zienkiewicz and R.I. Taylor, Finite Element Method, Vols. IIII Butterworth and Heinemann, 2000.

[47] K. Höllig, U. Reif, J. Wipper, Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems, SIAM J. Numer. Anal. 39 442 - 462. 2001.

[48] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs, Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.

[49] K. Höllig, Finite Element Methods with B-Splines, SIAM, 2003.

[50] K. Höllig, J. Hörner, A. Hoffacker, Finite element analysis with B-splines : weighted and isogeometric methods, in : J.D. Boissonnat, et al. (Eds.), Curves and Surfaces 2011, in : LNCS, vol. 6920, Springer , pp. 330 - 350. 2012.

[51] Sadd MH. Elasticity : Theory, Application and Numerics. Amsterdam : Elsevier Butterworth Heinemann ; 2005.

[52] Y. Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2nd ed. 2003.

[53] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7(3) : 856-869, July 1986.

[54] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7(3) : 856-869, July 1986.

[55] Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York : 1985.

[56] S. Kesavan . Topics in Functional Analysis and Applications. Wiley Eastern Limited. India. 1989.

[57] Panayot S. Vassilevski, Raytcho D. Lazarov. Preconditioning Mixed Finite Element Saddle-point Elliptic Problems. Numerical Lin. Alg. with Applic. 1996.

[58] K. Höllig, U. Reif, and J. Wipper. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. SIAM J. Numer. Anal. 39 : 442 - 462. 2001.

[59] K. Höllig, U. Reif, and J. Wipper. Multigrid methods with WEB-splines. Nu-Mat. 912 :237 - 256. 2002.

[60] V. V. K. Srinivas Kumar, B. V. Rathish Kumar, and P. C. Das . WEB-spline based mesh-free finite element analysis for the approximation of the stationary Navier-stokes problem. Nonlinear Anal. 68 :3266 - 3282. 2008.

[61] K. Höllig, Finite Element with b-Splines, SIAM, Philadelphia, 2003.

[62] K. Höllig, U. Reif, and J. Wipper, Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems, SIAM J. Numer. Anal. 39 , pp. 442 - 462. 2001.

[63] P. Lascaux and R. Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Méthodes itératives. Tome 2, 2nde ed. Masson, Paris Milan Barcelone, 1994.

[64] V. V. K. Srinivas Kumar, B. V. Rathish Kumar, and P. C. Das . A new class of stabilized mesh-free finite elements for the approximation of the Stokes problem. Numer. Meth. Part. D.E. 20 :703 - 722. 2004.

[65] H. J. Choe, D. Kim, H. H. Kim, and Y. Kim. Mesh-less method for the stationary incompressible Navier-Stokes equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B 1 : 495 - 526. 2001.

[66] W.H. Zhang, L.Y. Zhao, S.Y. Cai, Shape optimization of Dirichlet boundaries based on weighted B-spline finite cell method and level-set function, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 294 359 - 383. 2015.

[67] Weihong Zhang., Linying Zhao, Exact imposition of inhomogeneous Dirichlet boundary conditions based on weighted finite cell method and level-set function Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 307 316-338. 2016.

[68] V.L. Rvachev, T.I. Sheiko, V. Shapiro, I. Tsukanov, Transfinite interpolation over implicitly defined sets, Comput. Aided Geom. Design 18 195-220 .2001.

[69] Ouadie Koubaiti, Jaouad El-mekkaoui, and Ahmed Elkhalfi. Complete study for solving Navier-Lamé equation with new boundary condition using mini element

method. INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICS, Vol : 12, Pages : 46-58. 2018.

[70] Ouadie Koubaiti, Jaouad El-mekkaoui, and Ahmed Elkhalfi. ELASTICITY WITH MIXED FINITE ELEMENT. Communications in Applied Analysis. vol : 22. No : 4. 2018.

[71] K. Höllig and J. Hörner, Programming finite element methods with weighted B-splines, Computers and Mathematics with Applications 70(7), 1441-1456 (2015).

[72] C. Apprich, K. Höllig, J. Hörner, A. Keller and E. Nava Yazdani, Finite Element Approximation with Hierarchical B-Splines, in Curves and Surfaces 2014, LNCS 9213, 1-15, Springer. 2015.

[73] C. Apprich, K. Höllig, J. Hörner, U. Reif : Collocation with WEB-Splines. Advances in Computational Mathematics (42-4), Springer, 823-842. 2016.

[74] Mekki Ayadi, Mohamed Khaled Gdoura, Taoufik Sassi. Mixed formulation for Stokes problem with Tresca friction Formulation mixte pour le problème de Stokes avec frottement de Tresca. Partial Differential Equations/Numerical Analysis. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 1069 - 1072. 2010.

[75] Thomas Apel, Serge Nkaise, Joachim schöberl. A non - conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. IMA Journal of Numerical Analysis. 21, 843–856. 2001.

[76] N Young. An introduction to Hilbert space. 1988.

[77] MH Stone. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. 1932.

[78] MS Birman, MZ Solomjak. Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. 2012.

[79] A.M Gleason. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. Journal of mathematics and mechanics. vol 6.No 6. 1957.

[80] F Auricchio, LB Da Veiga, TJR Hughes. ISOGEOMETRIC COLLOCATION METHODS. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 20, No. 11. 2075- 2107. 2010.

[81] A Buffa, G Sangalli, R Vazquez. Isogeometric methods for computational electromagnetics : B-spline and T-spline discretizations. Journal of Computational Physics. 2014.

[82] Peake, M.J. and Trevelyan, J. and Coates, G. Extended isogeometric boundary element method (XIBEM) for two-dimensional Helmholtz problems. Computer methods in applied mechanics and engineering. 259 . pp. 93-102. 2013.

[83] Y. Bazilevs, T. J. R. Hughes. NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components. Computational Mechanics. Volume 43, Issue 1, pp 143 - 150. December 2008.

[84] TJR Hughes, A Reali, G Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199 . 301-313. 2010.

[85] R Sevilla, S Fernandez-Méndez, A Huerta. Numerical integration over 2D NURBS-shaped domains with applications to NURBS - enhanced FEM. Finite Elements in Analysis and Design. 2011.

[86] J.J. Shah, M Mäntylä. Parametric and feature-based CAD/CAM : concepts, techniques, and applications. 1995.

[87] J.W. Eischen, Shigan Deng, T.G. Clapp. Finite-element modeling and control of flexible fabric parts. Finite-element modeling and control of flexible fabric parts. Volume 16. Issue 5. Page(s) 71 - 80. Sep 1996.

[88] D.Y.Yang, D.G Ahn, CH Lee, CH Park, TJ Kim. Integration of CAD CAM CAE RP for the development of metal forming process. Journal of Materials Processing Technology. Volumes 125 6 126. Pages 26 - 34. 9 September 2002.

[89] T. Geveci, I Christie. The convergence of a Galerkin approximation scheme for an extensible beam. Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, no 4. , p. 597-613. 1989.

[90] Joachim A. Nitsche and Alfred H. Schatz. Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. MATHEMATICS OF COMPUTATION, VOLUME 28, NUMBER 128. PAGES 937-958. OCTOBER 1974.

[91] R.G. Harrison ; X. Le Polozec. Nonsquarelaw behavior of diode detectors analyzed by the Ritz-Galerkin method. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques . Volume 42 . Issue 5. Page(s) : 840 - 846. May 1994.

[92] Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity. In : Truesdell C. (eds) Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. Springer, Berlin, Heidelberg. 1973.

[93] R.D.Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. International Journal of Solids and Structures. Volume 1, Issue 4. .Pages 417-438. November 1965.

[94] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten. Effects of couple- stresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis . Volume 11. Issue 1. pp 415 - 448. January 1962.

[95] M.F. Ashby, D.R.H. Jones, Y. Brechet, J. Courbon. Matériaux Propriétés, applications et conception ISBN 978-2-10-058767-4. Dunod. Paris. 2013.

[96] D.C. Spencer. Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups Part I : Infinitesimal deformations of structure. Second Series. Volume. 76. No. 2. pp. 306 - 398. 1962.

[97] J. Gasqui, H. Goldschmidt. Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques. I. ADVANCES IN MATHEMATICS 48. 205-285. 1983.

[98] K. Yokogawa. Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves. International Journal of Mathematics. 1995.

[99] Michael. J. Cloud , Leonid. P. Lebedev. Introduction to Mathematical Elasticity. 2009.

[100] Robert William, Soutas-Little. Elasticity. 2010.

[101] Höllig, Klaus, and Ulrich Reif. "Nonuniform web-splines." Computer Aided Geometric Design. volume 20, Issue 5 : 277- 294. 2003.

Annexe

Assembly of the matrix $\mathbb{A}$: loop over triangles

function A = elastic2dp1bmat2(p , t , lambda , mu , nn)

np = size(p , 1) ; nt = size(t , 1) ; Z = zeros(3 , 3) ;

Mel = (1/12)*[2 1 1 ; 1 2 1 ; 1 1 2] ;

loop over all triangles

if (nargin == 5) , A = sparse(3*np , 3*np , nn) ;

else , A = sparse(3*np , 3*np) ; end

for ih = 1 : nt

it = [t(ih , 1 : 3) , np + t(ih , 1 : 3) , 2*np + t(ih , 1 : 3)] ;

triangles area

$x21 = p(t(ih,2),1) - p(t(ih,1),1)$; $y12 = p(t(ih,1),2) - p(t(ih,2),2)$;

$x32 = p(t(ih,3),1) - p(t(ih,2),1)$; $y23 = p(t(ih,2),2) - p(t(ih,3),2)$;

$x13 = p(t(ih,1),1) - p(t(ih,3),1)$; $y31 = p(t(ih,3),2) - p(t(ih,1),2)$;

tarea = (x21*y31 - x13*y12)/2 ;

$x^(T), y^(T)$, and abb

xt = [x32 ; x13 ; x21] ; yt = [y23 ; y31 ; y12] ;

$abb = (81/40) * mu * ((y23)^2 + (x32)^2 + (y31)^2 + (x13)^2 + y23 * y31 + x32 * x13)/tarea$;

element stiffness matrices : A

$Ah = mu * (0.25/tarea) * (xt * xt' + yt * yt')$;

element divergence/stabilization matrices

$BNx = (lambda + mu) * (1/6) * [yt'; yt'; yt']$;

$BNy = (lambda + mu) * (1/6) * [xt'; xt'; xt']$;

$Bx = (lambda + mu) * (1/6) * [yt'; yt'; yt']$;

$By = (lambda + mu) * (1/6) * [xt'; xt'; xt']$;

$E = -(lambda+mu)^2 * 81/(1600 * abb) * (yt * yt' + xt * xt') - (lambda+mu) * tarea * Mel$;

element P1-bubble/P1 matrix and assembly

Ael = [Ah Z BNx';Z Ah BNy' ; Bx By E] ; A(it,it) = A(it , it) + Ael ; end

Assembly of the right-hand side : loop over triangles

function b = elastic2dp1brhs2(p , t , lambda , mu , f1 , f2)

np = size(p , 1) ; nt=size(t,1) ;

loop over all triangles

b = zeros(3*np , 1) ;

for ih = 1 : nt
it = [t(ih , 1 :3) , np + t(ih , 1 :3) , 2*np + t(ih , 1 : 3)] ;
triangles area
$x21 = p(t(ih, 2), 1) - p(t(ih, 1), 1)$; $y12 = p(t(ih, 1), 2) - p(t(ih, 2), 2)$;
$x32 = p(t(ih, 3), 1) - p(t(ih, 2), 1)$; $y23 = p(t(ih, 2), 2) - p(t(ih, 3), 2)$;
$x13 = p(t(ih, 1), 1) - p(t(ih, 3), 1)$; $y31 = p(t(ih, 3), 2) - p(t(ih, 1), 2)$;
tarea = (x21*y31 - x13*y12)/2 ;
(f1 , f2) at the center of triangles
f1t = (f1(t(ih , 1)) + f1(t(ih , 2)) + f1(t(ih , 3)))/3 ;
f2t = (f2(t(ih , 1)) + f2(t(ih , 2)) + f2(t(ih , 3)))/3 ;
$x^(T), y^(T)$, abb
xt = [x32 ; x13 ; x21] ; yt = [y23 ; y31 ; y12] ;
$abb = (81/40) * mu * ((y23)^2 + (x32)^2 + (y31)^2 + (x13)^2 + y23 * y31 + x32 * x13)/tarea$;
element right-hand side
lxb = (9/20)*tarea*f1t/abb ; lyb=(9/20)*tarea*f2t/abb ;
lx = (1/3) * f1t * tarea * ones(3 , 1) ;

ly = (1/3) * f2t * tarea * ones(3 , 1) ;
lb = - (lambda + mu)/abb * ((9/40) * lxb * yt + (9/40) * lyb * xt) ;
Assembly
b(it) = b(it) + [lx ; ly ; lb] ; end

Inserting the boundary conditions of Dirichlet

DirichletNodes = unique (dirichlet) ;
$[W, M] = u_d(coordinates(DirichletNodes, :))$;
R = sparse(size (W,1),3*size(coordinates ,1)) ;
for k = 0 : 1
for l = 0 : 1
R (1 + l : 2 :size (M , 1) , 3*DirichletNodes-1 + k) = diag (M (1 + l : 2 : size (M , 1) , 1 + k)) ;
end
end

Inserting the boundary conditions of Neumann

if isempty(neumann)

```
    n =(coordinates(neumann( :,2), :)-coordinates(neumann( :,1) , : ) ) *[0,-1 ;1,0] ;
for j = 1 : size(neumann ,1 ) ;
I = 3*neumann(j , [1 , 1 , 2 , 2]) - [1 , 0 , 1 , 0] ;
gm = g(sum(coordinates(neumann(j , :) , :))/2 , n(j , :)/norm(n(j , :)))' ;
b(I) = b(I) + norm(n(j, :))*[gm ; gm]/2 ;
end
end
```