

UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
FES

THESE

Pour l'obtention du
Doctorat en Mathématiques
Option : Analyse Numérique

Présentée par
AMRANI SOUHLY HICHAM

UFR : ANALYSE APPLIQUEE

Intitulée

**MÉTHODES NODALES INTÉGRALES ET
POLYNOMIALES D'ORDRE ÉLEVÉ POUR LA
RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION ET DES
ÉQUATIONS D'ÉCOULEMENT DE FLUIDES
INCOMPRESSIBLES**

Soutenue le 05/12/2008

Devant le jury :

Mr M. AKHMOUCH	Fac. des Sciences et Techniques, Fès	Rapporteur
Mr M. EL ALAMI FERRICHA	ENS, Fès	Membre
Mr J. BENNOUNA	Fac. des sciences, Fès	Rapporteur
Mr A. CHATWITI	Fac. des sciences, Fès	Membre
Mr N. GUESSOUS	ENS, Fès	Directeur de thèse
Mr A. TOUZANI	Fac. des sciences, Fès	Président

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département des mathématiques et informatique à la faculté des sciences Dhar El Mehraz, de l'université sidi Mohammad Ben Abdellah de Fès.

Je tiens à remercier le professeur A. Touzani pour m'avoir accueilli au sein de l'U.F.R Analyse appliquée et pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance. Je le remercie aussi pour son soutien et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens à remercier sincèrement mon Professeur N. Guessous, qui m'a proposé ce sujet de thèse, et qui par sa maîtrise et connaissance des méthodes nodales m'a apporté un grand appui dans l'avancement de mes travaux. Je lui exprime aussi ma gratitude pour sa patience, sa sagesse et le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie pour m'avoir constamment guidé, encouragé et conseillé, tout en me laissant une grande liberté et me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère être à la hauteur.

Je remercie également les Professeurs M. Akhmouch, J. Bennouna pour avoir acceptés de rapporter sur mon travail.

Je remercie très vivement les professeurs M. El Alami Ferricha et A. Chatwiti qui m'ont honorés par leurs présence parmi les membres du jury. Je les prie d'accepter mes vifs remerciements.

J'adresse ma sincère reconnaissance au professeur A. Benkirane pour son aide, ses encouragements et son soutien.

Je n'oublie pas le personnel du département de mathématiques et informatique pour leurs encouragements sympathiques qui ont contribué à ma motivation pour ce travail. Je les remercie pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils m'ont témoigné pour mes recherches.

Enfin, merci à tous les collègues doctorants et mes amis qui m'ont soutenu, en particulier Hassania Hamzaoui, Aziza Belmaati, Lahcen Aharouch, et Anass Benbaraka.

Table des matières

Remerciements	2
0 Introduction et préliminaires	5
0.1 Introduction	5
0.2 Notations et définitions	6
1 Méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé appliquée à une équation de diffusion	15
1.1 Introduction	15
1.2 Méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé	17
1.2.1 Interpolation des valeurs moyennes transverses	21
1.2.2 Condition de continuité sur le flux et le courant à travers les interfaces	22
1.2.3 Les équations du bilan pondérées	24
1.2.4 Interpolation du flux	25
1.3 Méthodes nodales polynomiales mathématiques et physiques	27
1.3.1 Méthode nodale polynomiale mathématique	27
1.3.2 Méthode nodale polynomiale physique	29
1.4 Procédure de résolution	33
1.5 Résultats numériques	35
2 Méthode nodale intégrale d'ordre élevé appliquée à un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible	53
2.1 Introduction	53
2.2 Formulation de la méthode nodale intégrale	54
2.3 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées	61
2.3.1 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées des composantes de la vitesse	61
2.3.2 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées de la pression	62
2.4 Equations du bilan pondérées	63
2.5 Approximation des équations nodales	63
2.6 Résultats numériques	64
3 Méthode nodale intégrale appliquée à l'équation de la chaleur unidimensionnelle avec condition non-locale.	73
3.1 Introduction	73
3.2 Discrétisation	73

3.3	L'unicité des valeurs moyennes nodales.	76
3.4	Equation du bilan	77
3.5	Formulations du système discret	77
3.5.1	Première formulation	78
3.5.2	Deuxième formulation :	79
3.6	Discretisation de la condition non-locale	80
3.7	Résultats numériques	82
	Conclusion	86
A	Les équations du bilan pondérées pour la méthode nodale HONEM-	
	m, $m = 0, 1$.	89
A.1	L'équation du bilan pour la méthode HONEM-0	89
A.2	Les équations du bilan pondérées pour la méthode HONEM-1	89
B	Solutions du problème d'écoulement entre deux plaques parallèles	91
	Bibliographie	93

Chapitre 0

Introduction et préliminaires

0.1 Introduction

Les méthodes nodales se classent parmi les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (multidimensionnelles), introduites dans les années 70 en neutronique, principalement par Dorning et Lawrence et leurs collaborateurs aux Etats Unis [20, 35, 68, 69] ainsi que par Wagner et Finnemann et leurs collaborateurs en Allemagne. [42, 43].

Notons qu’au début des années 70, les méthodes nodales ont été présentées par les neutroniciens en bloc comme des méthodes de discrétisation-résolution des équations de diffusion multigroupe. Cependant plusieurs auteurs ont séparé ces aspects dans leurs travaux en présentant les méthodes nodales essentiellement comme des méthodes de discrétisation. Citons à titre d’exemples les travaux de Azmy et Dorning [12, 13], précisément dans l’étude des écoulements stationnaires de fluides incompressibles et les travaux de Hennart [55, 56] qui a présenté les méthodes nodales mathématiques analytiques et polynomiales d’ordre élevé comme étant des méthodes d’éléments finis non-conformes.

Des méthodes nodales d’ordre élevé pour la discrétisation des équations de diffusion neutronique multigroupe ont été aussi proposées par Guessous [49].

Les méthodes nodales sont développées essentiellement sur des maillages grossiers réguliers (rectangles en deux dimensions et parallélépipèdes en 3 dimensions), utilisant comme inconnues principales, les valeurs moyennes, dites transverses, des variables dépendantes.

Comme pour les méthodes des éléments finis (FEM), l’approximation de la solution est exprimée par des fonctions polynomiales [42, 55, 57, 59, 60, 96] ou quasi polynomiales [3, 49, 50, 56]. Avec les méthodes des différences finies (FDM), elles partagent le fait que le système algébrique final possède une matrice creuse et bien structurée sur des

mailles régulières de type réunions de rectangles.

Les variantes les plus connues des méthodes nodales, et auxquelles nous nous intéresserons de près dans ce travail sont :

1. Méthodes nodales avec développement polynomial " Nodal expansion method 'NEM' "[42].
2. Méthodes nodales Integrales (ou analytiques 'NIM')[1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 49, 50].
3. Méthodes nodales polynomiales mathématiques et physiques [55].

Avant de donner un aperçu sur ces différents types de méthodes nodales, nous allons tout d'abord introduire quelques notations et définitions spécifiques qui nous serviront tout au long de cette étude.

0.2 Notations et définitions

Soit P_n le polynôme de Legendre de degré n ($n \geq 0$) défini sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1)$$

Nous rappelons les propriétés suivantes qui serviront par la suite à élaborer nos calculs :

$$\left| \begin{array}{ll} P_n(1) & = 1, \\ P_n(-x) & = (-1)^n P_n(x), \\ \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(x) & = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{2}{2i+1} & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Les polynômes de degré ≤ 3 , sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \end{array} \right. \quad (3)$$

Nous noterons pour plus de lisibilité $P_{i,j}(x, y) := P_i(x).P_j(y)$

Considérons un rectangle K de $\mathbb{R}^2$ de la forme $] -a, +a[\times] -b, +b[$.

Pour toute fonction $\phi \in L^2(K)$, on notera :

La moyenne (ou le moment) transverse d'ordre j de ϕ suivant x (ou par-rapport à y) :

$$\bar{\phi}_y^j(x) = \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^b p_j(y) \phi(x, y) dy \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

La moyenne (ou le moment) transverse d'ordre i de ϕ suivant y (ou par-rapport à x) :

$$\bar{\phi}_x^i(y) = \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^a p_i(x) \phi(x, y) dx \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

La valeur moyenne de $\bar{\phi}_y^j(x)$ d'ordre i par rapport à x sera notée $\bar{\phi}_{y,x}^{j,i}$:

$$\bar{\phi}_{y,x}^{j,i} := \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} p_i(x) \bar{\phi}_y^j(x) dx \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

La valeur moyenne de $\bar{\phi}_x^i(y)$ d'ordre j par rapport à y sera notée $\bar{\phi}_{x,y}^{i,j}$:

$$\bar{\phi}_{x,y}^{i,j} := \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} p_j(y) \bar{\phi}_x^i(y) dy \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Avec $N_i^r = \frac{2r}{2i+1}$, $r = a, b$, et $p_i(x)$ et $p_j(y)$ sont respectivement les polynômes de Legendre définis par $p_i(x) = P_i(\frac{x}{a})$ et $p_j(y) = P_j(\frac{y}{b})$.

Nous allons par la suite définir quelques formes linéaires associées au rectangle K ainsi qu'à ses facettes, notées L, R, B, T pour left, right, bottom and top. Pour toute fonction ϕ de $L^2(K)$, on fait associer ses valeurs moyennes transverses aux faces de K :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_L^j = \bar{\phi}_y^j(-a), \\ \phi_R^j = \bar{\phi}_y^j(+a), \\ \phi_B^j = \bar{\phi}_x^j(-b), \\ \phi_T^j = \bar{\phi}_x^j(+b) \end{array} \right. \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Les valeurs moyennes nodales d'ordres (i, j) de ϕ sur K (appelées aussi moments volumiques ou centrés) seront données par :

$$\bar{\phi}_C^{i,j} := \frac{1}{N_i^a N_j^b} \int_K p_{i,j}(x, y) \phi(x, y) dx dy \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Nous remarquons les relations de consistance suivantes :

$$\bar{\phi}_C^{i,j} = \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} = \bar{\phi}_{x,y}^{i,j}. \quad (10)$$

Ces relations assurant l'unicité des valeurs moyennes nodales, nous seront très utiles par la suite pour le développement des équations discrètes.

On définit aussi les espaces polynomiaux suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{k,l} < x, y > &= \{x^i y^j, 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l\} \quad \text{on pose } \mathcal{Q}_{k,k} = \mathcal{Q}_k, \\ \mathcal{P}_k < x, y > &= \{x^i y^j, 0 \leq i + j \leq k\}, \\ \mathcal{P}_k < x > &= \{x^i, 0 \leq i \leq k\}. \end{cases} \quad (11)$$

Nous essayerons par la suite de définir aussi large que possible ce que nous entendons par la méthode nodale intégrale (ou analytique) d'ordre m "HONIM- m " ($m \in \mathbb{N}$) et méthode nodale polynomiale du même ordre "HONEM- m ", indépendamment du système auquel nous les appliquons. Ainsi, nous viserons une généralisation aussi grande que possible quant au domaine d'application.

Notre définition des méthodes "HONIM- m " et "HONEM- m " souligne que ce type d'approximation suppose, par principe, que le système à résoudre est multidimensionnel. On se restreint dans notre travail au cas bidimensionnel, le cas multidimensionnel se fait de façon analogue.

Définition 0.1 Méthode nodale intégrale d'ordre élevé "HONIM- m "

Soit un système de N équations aux dérivées partielles régissant le comportement de N fonctions (variables dépendantes) à deux dimensions (x et y variables indépendantes).

Soit un domaine de résolution Ω subdivisé en N_e zones Ω_k ($k = 0, 1, \dots, N_e$) appelées aussi noeuds, de formes rectangulaires, tel que :

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} \bar{\Omega}_k$
- $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset$ si $k \neq l$

Le noeud est la cellule de base sur laquelle seront effectuées tous les développements. Dans la suite considérons un noeud $K =]-a, +a[\times]-b, +b[$. Nous appelons méthode nodale intégrale d'ordre m , $m \in \mathbb{N}$ "HONIM- m " une technique de discrétisation qui procède comme suite :

- 1) *Chacune des N équations est successivement intégrée avec les poids $p_j(y)$, $j = 0, \dots, m$ suivant la direction y entre $-b$ et $+b$ puis avec les poids $p_i(x)$, $i = 0, \dots, m$ entre $-a$ et a suivant la direction x dans le noeud K , ce qui conduit à un système de $2N(m+1)$ équations unidimensionnelles, (des équations différentielles ordinaires).*

Ce processus d'intégration sur une variable dite transversale, introduit naturellement les grandeurs que nous avons déjà définies dans (4-5), $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$, où ϕ est une variable dépendante.

2) Chaque équation à une dimension est traitée de la manière suivante :

- a) Nous plaçons dans le premier membre certains ou tous les termes linéaires, c'est-à-dire, des termes du type $\frac{d^k}{dt^k} \bar{\phi}_z^j(t)$ ($k = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, m$), et $t, z = x, y$.
- b) Le reste (termes tous intégrés . . .) est placé dans le seconde membre, soit $(g(t), t = x, y)$.
- c) L'idée de base de la méthode nodale intégrale est de résoudre exactement et pour les deux directions simultanément, les équations à une dimension, en supposant que les seconds membres sont connus; ces seconds membres que nous allons développer par la suite en série de polynômes de Legendre. Nous procéderons analytiquement autant que possible, et numériquement si les équations sont trop complexes. Cette stratégie va nous conduire à une écriture des moyennes transverses $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$ de $\phi(x, y)$ en fonction des valeurs moyennes transverses faciales : $\phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^i$ et ϕ_T^i et des valeurs moyennes nodales $\bar{\phi}_C^{i,j}$. Avec les interpolations de $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$, ainsi obtenues, nous serons en mesure de formuler le système discret, et cela en imposant deux conditions :

Equations de bilan pondérées

Les équations du bilan s'obtiennent en appliquant des intégrations avec un poids $p_{i,j}$ pour chacune des N équations, et cela sur chaque noeud du maillage.

Par conséquent nous obtenons un système d'équations qui relie les valeurs moyennes nodales aux valeurs moyennes transverses faciales, et aux termes sources par des combinaisons linéaires ou non linéaires (par exemple dans le cas des équations de Navier-Stokes).

Cette condition assure la conservation du schéma sur chaque noeud.

Continuité des valeurs moyennes transverses à travers les interfaces

Cette condition exprime la continuité des valeurs moyennes transverses de toutes les variables qui entrent dans les N équations ainsi que certaines de leurs dérivées (à un facteur multiplicatif près).

Par exemple dans le cas d'une équation de diffusion (chapitre 1), si ϕ désigne le flux des neutrons et $J = -D\nabla\phi$ le courant dérivé à partir du flux, nous imposerons la conti-

nuité à la fois des moments du flux et du courant à travers les interfaces du maillage, et pour le cas de l'écoulement des fluides incompressibles (chapitre 2) on imposera la continuité des valeurs moyennes transverses de la pression et de la vitesse, ainsi que celles des dérivées de la vitesse.

Définition 0.2 Méthode nodale avec développement polynomial (HONEM-m)

La description de cette méthode est la même que celle de la méthode nodale intégrale, sauf que dans l'étape c) au lieu de procéder à la résolution analytique de chacune des équations à une dimension, tout en supposant que le second membre est approximé par un développement en série de polynômes de Legendre, on se contentera d'approximer les moyennes transverses $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$ de chaque équation par un développement en série de polynômes de Legendre.

Remarque 0.1 La méthode "HONIM-m" dans la définition 0.1 a été étudiée par Guessous [49, 50] pour les équations de diffusion multigroupes en neutronique et testée pour $m=0,1,2$. Tandis que la plus part des études faites pour la méthode "HONEM-m" sont restreintes à son ordre le plus bas ($m = 0$)[42, 67, 77, 78].

Notons bien que jusqu'à ce stade toutes les approximations faites pour les deux méthodes nodales, intégrale "HONIM-m" et avec développement polynomial "HONEM-m", se rapportent sur les moyennes transverses $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$ et non sur les fonctions variables ϕ . L'interpolation de ϕ , par des fonctions particulières permettra de calculer la valeur approchée de la solution en tout point du maillage et sera utile pour l'étude le l'ordre de convergence en norme L^2 .

Plaçons nous maintenant dans le cas d'une équation de diffusion de la forme :

$$-\nabla.D\nabla\phi + \Sigma\phi = Q \text{ dans } \Omega \in \mathbb{R}^2 \quad (12)$$

Où Ω est un domaine régulier (réunion de rectangles). ϕ désigne le flux et les coefficients D et Σ sont constants par morceaux.

Le courant J associé au flux ϕ est défini par : $J := -D\nabla\phi = -D(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})$.

Dans certains travaux sur les méthodes nodales [64, 65], les auteurs ont établie l'équivalence entre les méthodes nodales physiques, dont le système discret est construit à partir de l'équation du bilan et de la continuité du courant aux interfaces du maillage et une classe de méthodes d'éléments finis non-conformes dont l'espace d'interpolation

et l'ensemble des degrés de liberté sur chaque noeud K sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_K &= \mathcal{Q}_{m,0} \cup \mathcal{Q}_{m,0} & \dim P_K &= 2m + 1 \\ \Sigma_K &= \left\{ \phi_L^0, \phi_R^0, \phi_B^0, \phi_T^0, \bar{\phi}_C^{i,j}, \quad i = 0, \dots, m-2 \text{ pour } j = 0; \right. \\ & \quad \left. \text{et } i = 0 \text{ pour } j = 0, \dots, m-2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Vue qu'on a un seul degré de liberté par face, cette méthode des éléments finis ne vérifie pas le "patch test [90]" de la non-conformité et par conséquent elle engendre un ordre de convergence de $O(h^2)$ en norme L^2 . Dans le même esprit et pour accroître l'ordre de convergence J.P. Hennart [55] a proposé une méthode des éléments finis non-conformes du type nodal, dont l'ordre de convergence croît correctement avec l'ordre d'approximation appelée, méthode nodale polynomiale mathématique d'ordre m "PMNM- m ". Il a aussi défini la méthode nodale polynomiale physique d'ordres m "PPNM- m " [55], et établit l'équivalence entre ces deux méthodes nodales mathématiques et physiques, en utilisant des quadratures numériques appropriées.

Ces deux méthodes nodales "PMNM- m " et "PPNM- m " seront reprises avec plus de détails dans les chapitre 1.

Dans le tableau (TAB (1)) nous résumons les différentes étapes des méthodes proposées jusqu'à présent pour la discrétisation de l'équation 12.

Remarques 0.1 – *Dans plusieurs domaines d'ingénierie certains paramètres physiques tels que les coefficients de diffusion, d'absorption, la perméabilité, etc... ne sont connus que par leurs valeurs moyennes sur des éléments rectangulaires. En conséquence, les quantités les plus significatives à calculer sont les valeurs moyennes des inconnues par maille.*

- *les méthodes nodales physiques "PPNM- m " et les méthodes nodales avec intégration transverses (HONEM- m et HONIM- m) utilisent les mêmes conditions physiques (Equations du bilan pondérées et continuité du flux aux interfaces du maillage) pour la construction du système linéaire.*
- *L'intégration transverse pour les méthodes HONIM- m et HONEM- m permet de mieux approcher les valeurs moyennes $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^j(y)$.*
- *L'interpolation des valeurs moyennes $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^j(y)$ est suffisante pour pouvoir appliquer les équations du bilan pondérées et la continuité du flux aux interfaces du maillage.*

Méthodes Nodales polynomiales Mathématiques "PMNM-m"	Méthodes Nodales polynomiales physiques "PPNM-m"	Méthodes Nodales avec intégration transverse, intégrales "HONIM-m" et polynomiales "HONEM-m"
1. Définir l'espace d'interpolation de ϕ. 2. Formulation variationnelle discrète. 3. Résolution du système linéaire.	1. Définir l'espace d'interpolation de ϕ. 2. Application des équations du bilan pondérées et de la continuité des valeurs moyennes transverses du flux et du courant aux interfaces du maillage pour la formulation du système discret. 3. résolution du système linéaire	1. Intégration transverse locale sur chaque noeud. 2. Interpolation locale de $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$. 3. Application des équations du bilan pondérées et de la continuité des valeurs moyennes transverses du flux et du courant aux interfaces du maillage pour la formulation du système discret. 4. résolution du système linéaire

TAB. 1 – Comparaison entre les méthodes des définitions 0.1-0.2 et ceux données dans [55]

Objet de la thèse

Comme l'indique le titre de la thèse, notre objectif est de contribuer à l'étude des méthodes nodales d'ordre élevé pour différents types d'équations aux dérivées partielles, tout en préservant les caractéristiques générales des méthodes nodales du premier ordre définies dans la littérature.

Notre point de départ est la méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé "HONEM-m" : Higher order nodal expansion method) appliquée à un problème elliptique qui peut provenir de la modélisation de plusieurs phénomènes physiques tels que la diffusion des neutrons dans un réacteur nucléaire, l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux, et autres.

Au premier chapitre nous donnerons une définition assez générale de la méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé, appliquée à un problème elliptique en deux dimensions. Cette définition est bâtie sur un processus d'intégration transverse, ce qui est cohérent pour l'ordre 0 avec la méthode nodale "NEM" donnée par Finnemann et Wagner [42]. Toute en sachant qu'une étude d'une telle méthode pour l'ordre élevé fait défaut en littérature, un opérateur d'interpolation à multi-variables

introduit et utilisé par Gordan [46, 47, 48] dans la théorie d'interpolation à multi-variables sera utilisé pour construire la solution approchée du problème en tout point du domaine d'étude. Ceci permettra aussi de faire le lien avec la méthode des éléments finis non-conformes nodale "PMNM-m" [55] et d'en déduire l'équivalence théorique, et par conséquent d'exhiber un ordre de convergence de $O(h^{m+2})$ pour une méthode nodale avec développement polynomial d'ordre m "HONEM-m". Les tests numériques relatifs à ce chapitre seront variés, à commencer par des tests dont on connaît la solution exacte et finir par un benchmark qui décrit un écoulement dans un milieu poreux.

Après avoir traité des problèmes elliptiques linéaires, nous nous intéresserons par la suite à des problèmes non linéaires en mécanique des fluides incompressibles.

Dans Le deuxième chapitre nous proposons une formulation de la méthode nodale intégrale d'ordre élevé appliquée à la résolution des équations qui régissent la dynamique des fluides incompressibles (i.e. à masse volumique constante), en état stationnaire, les équations de Navier-Stokes. Notre méthode est une généralisation de la méthode nodale intégrale de Azmy [12, 13] pour le calcul des moments d'ordre élevé de la vitesse et de la pression. Tous les aspects de la méthode nodale intégrale seront préservés, à savoir : l'intégration transverse, l'unicité des valeurs moyennes nodales et les équations du bilan. Des tests numériques seront exposés pour la validation numérique du schéma pour l'ordre 0. Les ordres de convergence seront calculés numériquement.

Nous nous intéressons spécialement dans le 3^{ième} chapitre à un problème de diffusion (moléculaire, de la chaleur, etc.), et qui a pour modèle de description mathématique l'équation de la chaleur. Ce type de problème en une dimension avec des conditions au bord de type Neumann ou Dirichlet a été traité avec la méthode nodale intégrale par plusieurs auteurs à citer, [4, 100]. De ce fait nous nous proposons d'explorer d'autres types de conditions au bord, appelées non locales, ou aussi de conservation de masse. Nous adapterons plusieurs schémas numériques pour la discrétisation de l'équation de chaleur et nous proposerons d'autres pour la condition non-locale au bord.

A la fin nous donnerons des tests numériques divers et des comparaisons avec d'autres méthodes standards et actuelles, pour la validation des schémas proposés.

Chapitre 1

Méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé appliquée à une équation de diffusion

1.1 Introduction

Au début des années 70, des méthodes nodales consistantes basées sur des approximations polynomiales ont été développées. La plus connue de ces méthodes (NEM : Nodal expansion method) a été introduite par Finnemann [42], puis quelques variantes ont été ajoutées et approuvées [67]. Dans son ordre le plus bas, une approximation quadratique des valeurs moyennes transverses de $\phi(x, y)$ est considérée :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_y^0(x) = \sum_{l=0}^2 a_l \psi_{l,a}(x), \\ \bar{\phi}_x^0(y) = \sum_{l=0}^2 b_l \psi_{l,b}(y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $\psi_{l,a}(x)$ et $\psi_{l,b}(y)$ sont des polynômes de degrés l ; $l = 0, 1, 2$ tel que :

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \psi_{l,a}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

A partir de la condition (1.2), on trouve [49, 77] :

$$\begin{cases} \psi_{0,a}(x) = 1, \\ \psi_{1,a}(x) = \xi, \\ \psi_{l,a}(x) = 3\xi^2 - \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Où $\xi = \frac{x}{2a}$.

En tenant compte des relations (1.2) et en faisant tendre x vers $\mp a$, les coefficients du

développement (1.1) s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 &= \bar{\phi}_C^{0,0}, \\ a_1 &= \phi_R^0 - \phi_L^0, \\ a_2 &= \phi_R^0 + \phi_L^0 - 2\bar{\phi}_C^{0,0}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Des relations analogues à (1.4) sont obtenu pour b_l , $l = 0, 1, 2$.

Le système discret final est obtenu à partir de l'équation du bilan et la condition de continuité des moments transverses du courant et du flux aux interfaces du maillage.

Notons que le développement de $\bar{\phi}_y^0(x)$ et $\bar{\phi}_x^0(y)$ en polynômes de degré supérieurs ou égale à 2 n'améliore pas l'ordre de convergence de la méthode "NEM" [42], vue que le nombre des inconnues principales par maille reste le même, à savoir $\phi_R^0, \phi_L^0, \phi_B^0, \phi_T^0$ et $\bar{\phi}_C^{0,0}$. D'où l'idée d'ajouter comme inconnues principales les moments d'ordre élevé de la fonction ϕ . Cette idée a été développée par Hennart [55]. Il introduit la notion de méthode nodale polynomiale mathématique d'ordre m "PMNM- m ", comme étant une méthode des éléments finis non-conforme, sur un maillage rectangulaire. Donc une interpolation locale sur la fonction inconnu ϕ (et non seulement sur ses moyennes transverses). Puis le système discret s'obtient à partir d'une formulation faible sur un espace de dimension fini. Ce qui permet de faire l'étude de convergence.

Il introduit aussi la méthode nodale polynomiale physique en gardant le même espace d'interpolation pour ϕ , mais cette fois le système discret final sera obtenu à partir des équation du bilan et de la condition de continuité des moments transverses du flux et du courant aux interfaces du maillage.

Dans notre travail, le point de départ est l'interpolation locale en une dimension des moyennes transverses $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$, ($i, j = 0, 1, \dots, m$) dans $\mathcal{P}_{m+2}$ par un développement en série de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre $m+2$ (m est l'ordre de la méthode). Ce qui est suffisant pour obtenir le système discret final à partir de l'équation du bilan et de la condition de continuité des moments transverses du flux et du courant à travers les interfaces du maillage.

Ensuite nous utiliserons un opérateur d'interpolation dit de Gordan [46, 47, 48], pour construire la solution approchée de $\phi(x, y)$ à partir des solutions approchées de $\bar{\phi}_y^j(x)$, $\bar{\phi}_x^i(y)$ et $\bar{\phi}_C^{i,j}$ $i, j = 0, 1, \dots, m$.

Nous montrerons que la méthode nodale "HONEM- m " munie de cet opérateur est équivalente à la méthode nodale physique "PPNM- m " [55]. En conséquence et en utilisant l'équivalence entre les méthode "PMNM- m " et "PPNM- m " établie dans [55], par le moyen des quadratures numériques de type Gauss-Radau, nous exhibons un ordre de convergence de $O(h^{m+2})$. A la fin de ce chapitre nous proposons deux tests numériques, dont le premier on connaît la solution exacte, tandis que le second est un Benchmark

proposé par Mosé [79] et étudié dans [61, 77, 78].

1.2 Méthode nodale avec développement polynomial d'ordre élevé

Considérons l'équation de diffusion à deux dimensions suivante :

$$\mathcal{L}\phi = -\nabla \cdot (D\nabla\phi) + \Sigma\phi = Q \text{ dans } \Omega. \quad (1.5)$$

Où $\nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{pmatrix}$ et $\nabla \cdot g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}$, $\forall g \in (H^1(\Omega))^2$ où $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev standard.

En neutronique $J := -D\nabla\phi$ est le courant des neutrons et ϕ représente le flux.

Le domaine Ω est subdivisé en N_e éléments, Ω_k ($k = 0, 1, \dots, N_e$) appelés aussi noeuds (ou cellules), de formes rectangulaires tel que :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} \overline{\Omega_k}$,
- $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset$ si $k \neq l$.

Cette subdivision sera notée $\mathcal{T}_h = (\Omega_k)_{k=1 \dots N_e}$, où h désigne de diamètre maximal des Ω_k .

Q représente le terme source et D et Σ sont constants et positifs sur chaque noeud Ω_k tel qu'il existe $\alpha : D(x, y) \geq \alpha > 0$.

Le long de ce chapitre on se convient d'appeler la variable ϕ flux.

Les conditions aux limites associées à l'équation (1.5) peuvent être de type Dirichlet, Newmann ou Robin.

Considérons un noeud quelconque Ω_k du maillage (FIG. 1.1).

L'équation (1.5) sur le noeud Ω_k prend la forme suivante :

$$-D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) + \Sigma \phi(x, y) = Q(x, y). \quad (1.6)$$

Nous avons omis d'écrire dans cette dernière équation l'indice k relatif au noeud Ω_k .

En multipliant l'équation (1.6) par $\frac{p_j(y)}{N_j^b}$, $j = 0, 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ puis en intégrant entre

$-b$ et $+b$ suivant la direction y , et aussi par $\frac{p_i(x)}{N_i^a}$ $i = 0, 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ et intégrant entre $-a$ et $+a$ suivant la direction x , on obtient le système d'équations différentielles

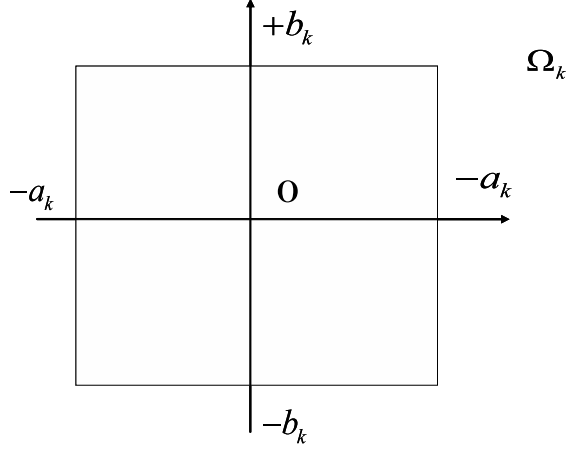


FIG. 1.1 – Un noeud Ω_k de $\mathcal{T}_h$.

en une dimension suivant :

$$-D \frac{d^2 \bar{\phi}_y^j(x)}{dx^2} + \Sigma \bar{\phi}_y^j(x) = \bar{Q}_y^j(x) - l_y^j(x) \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (1.7)$$

$$-D \frac{d^2 \bar{\phi}_x^i(y)}{dy^2} + \Sigma \bar{\phi}_x^i(y) = \bar{Q}_x^i(y) - l_x^i(y) \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (1.8)$$

Les fonctions inconnues principales dans (1.7) - (1.8) sont les moyennes transverses de $\phi(x, y)$: $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$.

Ce processus d'intégration transverse engendre des inconnues auxiliaires $l_y^j(x)$ et $l_x^i(y)$, appelées fuites transverses, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} l_y^j(x) = -\frac{D}{N_j^b} \int_{-b}^b p_j(y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) dy & j = 0, 1, \dots, m, \\ l_x^i(y) = -\frac{D}{N_i^a} \int_{-a}^a p_i(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) dx & i = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.9)$$

La formulation de la méthode nodale avec développement polynomial d'ordre m "HONEM- m ", se fait en deux étapes. La première consiste à développer les valeurs moyennes transverses $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$ par une série de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre $m + 2$.

La deuxième, en appliquant l'équation du bilan sur chaque noeud du maillage, et en imposant la continuité des moments transverses du flux et du courant à travers les interfaces du maillage.

Définition 1.1 Une méthode nodale avec développement polynomial d'ordre m "HONEM- m " appliquée au problème (1.5) est une méthode de discrétisation caractérisée par :

1. Les degrés de liberté (les inconnues principales) sont $\phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^j, \phi_T^j$ $j = 0, 1, \dots, m$ sur les interfaces du maillage et $\bar{\phi}_C^{i,j}$, $i, j = 0, 1, \dots, m$ au centre de chaque noeud. (FIG. 1.2). Donc au total $(m+1)(m+5)$ inconnues (degrés de liberté).

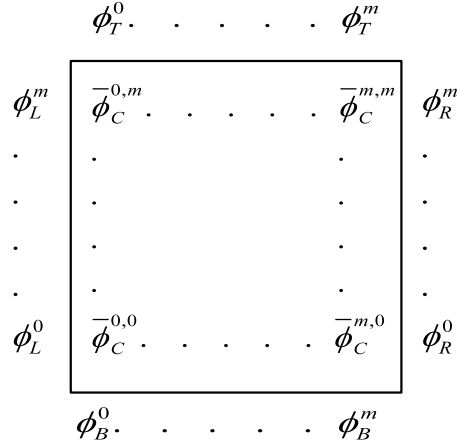


FIG. 1.2 – Degrés de liberté sur un noeud Ω_k de $\mathcal{T}_h$.

2. $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$ sont développées en série de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre $m+2$ dans $\mathcal{P}_{m+2} < x >$ et $\mathcal{P}_{m+2} < y >$ respectivement.
3. Le système discret final est formulé à partir des deux conditions suivantes :

- Les équations du Bilan pondérées :

$$\frac{1}{N_j^b N_i^a} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} p_i(x) \cdot p_j(y) (\mathcal{L}(\phi) - Q)(x, y) dy dx, \quad i, j = 0, \dots, m. \quad (1.10)$$

- La continuité des moyennes transverses du flux et du courant à travers les interfaces du maillage. Cette condition, pour deux noeuds voisins Ω_d et Ω_e suivant une bande horizontale, s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{N_j^b} \left(\int_{-b}^{+b} p_j(y) (D \cdot \nabla \phi(a_e, y) - D \cdot \nabla \phi(-a_d, y)) \cdot n_e dy \right) = 0 & j = 0, 1, \dots, m, \\ \phi_{R|e}^j = \phi_{L|d}^j & j = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.11)$$

Où n_e est le vecteur normal vers l'extérieur du noeud Ω_e (FIG. 1.3).

Avant de procéder au développement de ces caractéristiques, nous allons rappeler quelques définitions qui nous seront utiles par la suite.

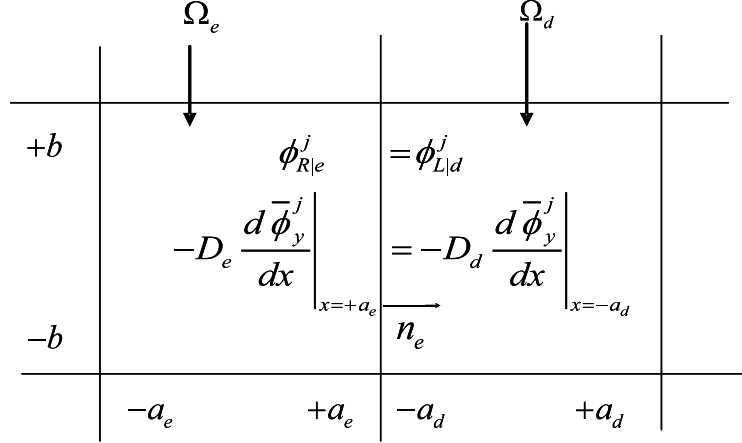


FIG. 1.3 – Deux noeuds adjacents suivant une bande horizontale.

Définitions 1.1

– Un triplet (R, P, Σ) est dit *élément fini* si :

1. $R \subset \mathbb{R}^n$ est non vide et ∂R régulier (de classe C^m pour un certain $m > 0$).
2. P est un espace de dimension finie des fonctions définies sur R à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $N = \dim P$.
3. Σ est un ensemble de N formes linéaires l_i définies sur l'espace P , appelées *degrés de liberté* et tel que Σ est P -unisolvant, c'est à dire :

Pour tout N -uplet α_i , $1 \leq i \leq N$ de nombres réels, il existe un élément unique $p \in P$, satisfaisant :

$$l_i(p) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.12)$$

En particulier, il existe N fonctions $q_i \in P$, qu'on appelle *fonctions de base* de l'élément (R, P, Σ) , telles que :

$$l_i(q_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.13)$$

– Soit (R, P, Σ) un élément fini et soit $v : R \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction assez régulière tel que le degré de liberté $l_i(v)$, $1 \leq i \leq N$ soit bien défini. On pose

$$\Pi(v) = \sum_{i=1}^N l_i(v) q_i, \quad (1.14)$$

qu'on appelle le P -intéropolant de v , et qu'on note $\Pi_R(v)$.

On dit aussi que $\Pi(v)$ intérope v dans P en Σ .

1.2.1 Interpolation des valeurs moyennes transverses

Plaçons nous dans un noeud $K = [-a, +a] \times [-b, +b]$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, considérons un développement en série de polynômes de Legendre, de $\bar{\phi}_y^j(x)$ dans $\mathcal{P}_{m+2} < x >$ et de $\bar{\phi}_x^i(y)$ dans $\mathcal{P}_{m+2} < y >$.

Ce développement s'écrit :

$$\bar{\phi}_y^j(x) \simeq \hat{\phi}_y^j(x) = \sum_{i=0}^{m+2} \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} p_i(x) \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.15)$$

$$\bar{\phi}_x^i(y) \simeq \hat{\phi}_x^i(y) = \sum_{j=0}^{m+2} \bar{\phi}_{x,y}^{i,j} p_j(y) \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (1.16)$$

En faisant tendre x vers $\mp a$, on obtient :

$$\phi_R^j \simeq \sum_{i=0}^{m+2} \bar{\phi}_{y,x}^{j,i}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.17)$$

$$\phi_L^j \simeq \sum_{i=0}^{m+2} (-1)^i \bar{\phi}_{y,x}^{j,i}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.18)$$

Par conséquent, on peut éliminer les deux inconnues $\bar{\phi}_{y,x}^{j,m+1}$ et $\bar{\phi}_{y,x}^{j,m+2}$ en faveur de ϕ_R^j et ϕ_L^j , ce qui donne :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_{y,x}^{j,m+1} \simeq \frac{\phi_R^j + (-1)^{m+1} \phi_L^j}{2} - \sum_{i=0}^m \left[\frac{1 + (-1)^{i+m+1}}{2} \right] \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} & j = 0, 1, \dots, m \\ \bar{\phi}_{y,x}^{j,m+2} \simeq \frac{\phi_R^j - (-1)^{m+1} \phi_L^j}{2} - \sum_{i=0}^m \left[\frac{1 + (-1)^{i+m+2}}{2} \right] \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} & j = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.19)$$

En substituant (1.19) dans (1.15), on obtient :

$$\bar{\phi}_y^j(x) \simeq \sum_{i=0}^m \psi_{Cx}^i(x) \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} + \psi_L(x) \phi_L^j + \psi_R(x) \phi_R^j \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (1.20)$$

Par une rotation de $\frac{\pi}{2}$, on obtient une relation analogue à (1.20) pour $\bar{\phi}_x^i(y)$:

$$\bar{\phi}_x^i(y) \simeq \sum_{j=0}^m \psi_{Cy}^j(y) \bar{\phi}_{x,y}^{i,j} + \psi_B(y) \phi_B^i + \psi_T(y) \phi_T^i \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (1.21)$$

Où :

$$\begin{cases} \psi_L(x) &= \frac{(-1)^{m+1}}{2} \{p_{m+1}(x) - p_{m+2}(x)\}, \\ \psi_R(x) &= \frac{1}{2} \{p_{m+1}(x) + p_{m+2}(x)\}, \\ \psi_B(y) &= \frac{(-1)^{m+1}}{2} \{p_{m+1}(y) - p_{m+2}(y)\}, \\ \psi_T(y) &= \frac{1}{2} \{p_{m+1}(y) + p_{m+2}(y)\}, \\ \psi_{Cx}^i(x) &= \{p_i(x) - p_{m+k(i)}(x)\}, \\ \psi_{Cy}^j(y) &= \{p_j(y) - p_{m+k(j)}(y)\}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Où $p_i(x)$ (resp $p_i(y)$) désigne le polynôme de Legendre d'ordre i sur $[-a, +a]$ (resp sur $[-b, +b]$) et $k(i) = 0, 1$ de telle sorte que i et $k(i) + m$ ont la même parité.

Remarque 1.1

1. Soit $u(t)$ un polynôme de $\mathcal{P}_{m+2} < t >$, $x \in [-c, +c]$. En appliquant le même développement (1.15) à u , on obtient :

$$u(t) = \sum_{i=0}^m \psi_{Ct}^i(t) \bar{u}_t^i + \psi_L(t)u(-c) + \psi_R(t)u(+c), \quad (1.23)$$

où $\bar{u}_t^i$ est le moment d'ordre i de u : $\bar{u}_t^i := \frac{1}{N_i^c} \int_{-c}^c p_i(t)u(t) dt$.

Considérons l'ensemble des degrés de liberté :

$$\mathbf{D}_c^m = \{u(-c), u(+c), \bar{u}_t^i, i = 0, \dots, m\} \quad (1.24)$$

Il est facile de vérifier que le triplet $([-c, +c], \mathcal{P}_{m+2} < t >, \mathbf{D}_c^m)$ est un élément fini, dont les fonctions de bases sont $\psi_L(t), \psi_R(t)$ et $\psi_{Ct}^i(t)$, $i = 0, \dots, m$.

2. La formule (1.20) est une interpolation de $\bar{\phi}_y^j(x)$ dans $\mathcal{P}_{m+2} < x >$, en ϕ_L^j, ϕ_R^j et $\bar{\phi}_{y,x}^{j,i}$, $i = 0, 1, \dots, m$, et de même la formule (1.21) est une interpolation de $\bar{\phi}_x^i(y)$ dans $\mathcal{P}_{m+2} < y >$ en ϕ_T^i, ϕ_B^i et $\bar{\phi}_{x,y}^{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Dans toute la suite de ce chapitre on imposera à la solution approchée de vérifier la condition de consistance suivante :

$$\bar{\phi}_{x,y}^{i,j} = \bar{\phi}_{y,x}^{j,i} = \bar{\phi}_C^{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, m. \quad (1.25)$$

1.2.2 Condition de continuité sur le flux et le courant à travers les interfaces

Considérons deux noeuds adjacents Ω_e et Ω_d (FIG. 1.3). La condition de continuité des moments transverses du flux et du courant à travers l'interface commune $\Gamma_{e,d}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{N_j^b} \left(\int_{-b}^{+b} p_j(y) (D \cdot \nabla \phi(a_e, y) - D \cdot \nabla \phi(-a_d, y)) \cdot n_e dy \right) = 0 & j = 0, 1, \dots, m, \\ \phi_{R|e}^j = \phi_{L|d}^j & j = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.26)$$

La condition de continuité sur le courant prend la forme suivante :

$$-D_e \cdot \frac{d\bar{\phi}_y^j}{dx} \Big|_{x=+a_e} = -D_d \cdot \frac{d\bar{\phi}_y^j}{dx} \Big|_{x=-a_d}, \quad j = 0, \dots, m. \quad (1.27)$$

Les indices e et d indiquent qu'on se place dans les noeuds Ω_e respectivement Ω_d .

En remplaçant $\bar{\phi}_y^j$ par son approximation dans $\mathcal{P}_{m+2}$ donnée par la formule (1.20), cette condition s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} +D_e(\psi_{L|e})'(+a_e)\phi_{L|e}^j + \left[D_e(\psi_{R|e})'(a_e) - D_d(\psi_{L|d})'(-a_d) \right] \phi_{R|e}^j - D_d(\psi_{R|d})'(-a_d)\phi_{R|d}^j \\ +D_e \sum_{i=0}^m (\psi_{Cx}^i)'(a_e)\bar{\phi}_{C|e}^{i,j} - D_d \sum_{i=0}^m (\psi_{Cx}^i)'(-a_d)\bar{\phi}_{C|d}^{i,j} = 0, \quad j = 0, \dots, m. \end{array} \right. \quad (1.28)$$

De la même façon, on considère deux noeuds adjacents Ω_e et Ω_d suivant une bande verticale (FIG. 1.4), la condition de continuité des moments transverses du courant à travers l'interface commune $\Gamma_{e,d}$ s'écrit :

$$-D_e \cdot \frac{d\bar{\phi}_x^i}{dx} \Big|_{x=+b_e} = -D_d \cdot \frac{d\bar{\phi}_x^i}{dx} \Big|_{x=-b_d}, \quad i = 0, \dots, m \quad (1.29)$$

En remplaçant $\bar{\phi}_x^i$ par son approximation dans $\mathcal{P}_{m+2}$ donnée par la formule (1.21) et en utilisant la continuité du flux à l'interface commune de Ω_e et Ω_d , cette condition devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} +D_e(\psi_{B|e})'(+b_e)\phi_{B|e}^i + \left[D_e(\psi_{T|e})'(b_e) - D_d(\psi_{B|d})'(-b_d) \right] \phi_{T|e}^i - D_d(\psi_{T|d})'(-b_d)\phi_{T|d}^i \\ +D_e \sum_{j=0}^m (\psi_{Cy}^j)'(b_e)\bar{\phi}_{C|e}^{i,j} - D_d \sum_{j=0}^m (\psi_{Cy}^j)'(-b_d)\bar{\phi}_{C|d}^{i,j} = 0, \quad i = 0, \dots, m \end{array} \right. \quad (1.30)$$

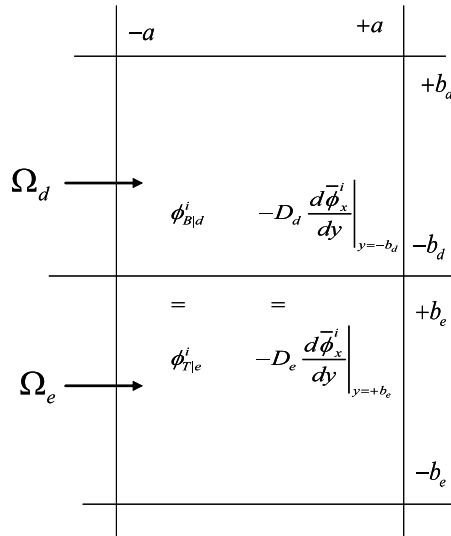


FIG. 1.4 – Deux noeuds adjacents suivant une bande verticale.

Remarque 1.2

En utilisant la relation suivante [36] :

$$p'_{n+1}(x) = \frac{1}{a} \sum_{i=0}^n k(i, n)(2i+1)p_i(x) \quad (1.31)$$

où $k(i, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } n \text{ ont la même parité} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

on arrive à montrer que :

$$\begin{aligned} \psi'_L(a) &= \frac{(-1)^m(m+2)}{2a} \\ \psi'_L(-a) &= \frac{-(m+2)^2}{2a} \\ \psi'_R(a) &= \frac{(m+2)^2}{2a} \\ \psi'_R(-a) &= \frac{(-1)^{m+1}(m+2)}{2a} \\ (\psi^i_{Cx})'(a) &= \frac{i(i+1) - (m+k(i))(m+k(i)+1)}{2a} \\ (\psi^i_{Cx})'(-a) &= (-1)^{i+1}(\psi^i_{Cx})'(a). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Des relations analogues à (1.32) sont obtenues pour $\psi'_B(\mp b)$, $\psi'_R(\mp b)$ et $(\psi^i_{Cy})'(\mp b)$.

1.2.3 Les équations du bilan pondérées

Les équations du bilan s'obtiennent en intégrant l'équation (1.5) avec un poids $p_{i,j}(x, y)$, $i, j = 0, 1, \dots, m$ sur chaque noeud $] -a, a[\times] -b, b[$. Elles s'écrivent sous la forme :

$$-\frac{D}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} p_i(x) \frac{d^2 \bar{\phi}_y^j(x)}{dx^2} dx - \frac{D}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} p_j(y) \frac{d^2 \bar{\phi}_x^i(y)}{dy^2} dy + \Sigma \bar{\phi}_C^{i,j} = \bar{Q}_C^{i,j} \quad (1.33)$$

$i, j = 0, \dots, m.$

Cette equation peut être écrite aussi en terme des fuites transverses sous la forme :

$$l_{y,x}^{j,i} + l_{x,y}^{i,j} + \Sigma \bar{\phi}_C^{i,j} = \bar{Q}_c^{i,j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m, \quad (1.34)$$

où $l_{y,x}^{j,i}$ et $l_{x,y}^{i,j}$ sont les moments d'ordres i et j respectivement de $l_y^j(x)$ et $l_x^i(y)$, donnés par :

$$\begin{cases} l_{x,y}^{i,j} = \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^b p_j(y) l_x^i(y) dy, \\ l_{y,x}^{j,i} = \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^a p_i(x) l_y^j(x) dx \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, m. \quad (1.35)$$

En remplaçant $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$ par leurs approximations dans $\mathcal{P}_{m+2}$ données par les formules (1.20) et (1.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
& -\frac{D}{N_i^a} \int_{-a}^a p''_i(x) \bar{\phi}_y^j(x) dx - \frac{D}{N_j^b} \int_{-b}^b p''_j(y) \bar{\phi}_x^i(y) dy \\
& -\frac{D}{N_i^a} \left[\psi'_L(a) + (-1)^i \psi'_R(a) + (-1)^{i+1} p'_i(a) \right] \phi_L^j - \frac{D}{N_i^a} \left[\psi'_R(a) + (-1)^i \psi'_L(a) - p'_i(a) \right] \phi_R^j \\
& -\frac{D}{N_j^b} \left[\psi'_B(b) + (-1)^j \psi'_T(b) + (-1)^{j+1} p'_j(b) \right] \phi_B^i - \frac{D}{N_j^b} \left[\psi'_T(b) + (-1)^j \psi'_B(b) - p'_j(b) \right] \phi_T^i \quad (1.36) \\
& -\frac{D}{N_i^a} \sum_{k=0}^m (1 + (-1)^{k+i}) (\psi_{Cx}^k)'(a) \bar{\phi}_C^{k,j} - \frac{D}{N_j^b} \sum_{l=0}^m (1 + (-1)^{l+j}) (\psi_{Cy}^l)'(b) \bar{\phi}_C^{i,l} \\
& + \Sigma \bar{\phi}_C^{i,j} = \bar{Q}_C^{i,j}
\end{aligned}$$

Remarque 1.3

- On constate que pour l'équation du bilan d'ordre (i, j) , le moment centré $\bar{\phi}_C^{i,j}$ se couple seulement avec les moments aux interfaces $\phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^i, \phi_T^i$ et les moments centrés $\bar{\phi}_C^{k,j}, \bar{\phi}_C^{i,l}$ ($l, k = 0, \dots, m$), tels que k et i ont la même parité et l et j ont la même parité.
- Le système discret final est formé des équations (1.28)-(1.30) et (1.36), dont la formulation ne nécessite que l'interpolation de $\bar{\phi}_y^j(x)$ et $\bar{\phi}_x^i(y)$ et non de la fonction ϕ elle même.
- Pour la construction de la solution approchée en tout point, il est nécessaire de choisir un opérateur d'interpolation qui prend en compte toutes les informations fournies par la méthode "HONEM- m ", à savoir les valeurs moyennes transverses et nodales : $\phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^i, \phi_T^i$ et $\bar{\phi}_C^{i,j}$ ($i, j = 0, \dots, m$), sur chaque maille. Ceci sera le but de la section suivante.

1.2.4 Interpolation du flux

Soit ϕ une application définie sur le domaine Ω et $R =]-a, +a[\times]-b, +b[$, un noeud du maillage $\mathcal{T}_h$. Considérons les trois interpolations suivantes pour la fonction ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Pi_y^m(\phi)(x, y) & = & \sum_{j=0}^m \bar{\phi}_y^j(x) p_j(y), \\ \Pi_x^m(\phi)(x, y) & = & \sum_{i=0}^m \bar{\phi}_x^i(y) p_i(x), \\ \Pi_C^m(\phi)(x, y) & = & \sum_{i,j=0}^m \bar{\phi}_C^{i,j} p_i(x) \cdot p_j(y). \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Il est facile de montrer que :

$$\begin{cases} \overline{\Pi_y^m(\phi)}_y^j(x) = \overline{\phi}_y^j(x) & j = 0, 1, \dots, m \\ \overline{\Pi_x^m(\phi)}_x^i(y) = \overline{\phi}_x^i(y) & i = 0, 1, \dots, m \\ \overline{\Pi_C^m(\phi)}_C^{i,j} = \overline{\phi}_C^{i,j} & i, j = 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.38)$$

Remarquant que chacun des trois opérateurs définis plus haut ne reproduit pas toutes les valeurs moyennes transverses et nodales de ϕ ($\overline{\phi}_y^j(x)$, $\overline{\phi}_x^i(y)$ et $\overline{\phi}_C^{i,j}$, $i, j = 0, 1, \dots, m$). Pour cela nous allons utiliser un opérateur d'interpolation multi-variables (Gordon [46, 47]) définit par :

$$\Pi_R^m(\phi) := \Pi_y^m(\phi) + \Pi_x^m(u) - \Pi_C^m(\phi) \quad (1.39)$$

$\Pi_R^m(\phi)$ est appelé la somme bollenne de $\Pi_y^m(\phi)$ et $\Pi_x^m(\phi)$.

Il est facile de montrer que Π_R^m vérifie (1.38) et par conséquent $\Pi_R^m(\phi)$ et u ont les mêmes moyennes transverses $\overline{\phi}_y^j(x)$ et $\overline{\phi}_x^i(y)$, $i, j = 0, \dots, m$ et aussi les mêmes valeurs moyennes nodales $\overline{\phi}_C^{i,j}$, $i, j = 0, \dots, m$.

Sur chaque noeud R du maillage. Considérons l'espace d'interpolation S_m et l'ensemble des degrés de libertés D_m :

$$\begin{cases} D_m = \{ \phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^i, \phi_T^i, \overline{\phi}_C^{i,j} \} & i, j = 0, 1, \dots, m \\ S_m = \mathcal{Q}_{m,m+2} \cup \mathcal{Q}_{m+2,m}. \end{cases} \quad (1.40)$$

Lemme 1.1 .

Si on remplace $\overline{\phi}_y^j(x)$ et $\overline{\phi}_x^i(y)$ par leurs approximations $\widehat{\phi}_y^j(x)$ et $\widehat{\phi}_x^i(y)$ données par les formules (1.20) (1.21) , alors $\Pi_R^m(\phi) \in S_m$ et il s'écrit sous la forme :

$$\Pi_R^m(\phi) = \sum_{j=0}^m (\psi_L^j(x, y) \phi_L^j + \psi_R^j(x, y) \phi_R^j) + \sum_{i=0}^m (\psi_B^i(x, y) \phi_B^i + \psi_T^i(x, y) \phi_T^i) + \sum_{i,j=0}^m \psi_C^{i,j}(x, y) \overline{\phi}_C^{i,j} \quad (1.41)$$

et sera noté $\widehat{\Pi}_R^m(\phi)$.

Les fonctions de base $\psi_L^j, \psi_R^j, \psi_B^i, \psi_T^i$ et $\overline{\psi}_C^{i,j}$ sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \psi_L^j(x, y) = \frac{(-1)^{m+1}}{2} [p_{m+1}(x) - p_{m+2}(x)] \cdot p_j(y), \\ \psi_R^j(x, y) = \frac{1}{2} [p_{m+1}(x) + p_{m+2}(x)] \cdot p_j(y), \\ \psi_B^i(x, y) = \frac{(-1)^{m+1}}{2} p_i(x) \cdot [p_{m+1}(y) - p_{m+2}(y)], \\ \psi_T^i(x, y) = \frac{1}{2} p_i(x) \cdot [p_{m+1}(y) + p_{m+2}(y)], \\ \psi_C^{i,j}(x, y) = p_i(x) \cdot p_j(y) - p_{m+k(i)}(x) \cdot p_j(y) - p_i(x) \cdot p_{m+k(j)}(y), \end{cases} \quad (1.42)$$

où $k(i) = 1, 2$, de telle façon que i et $m + k(i)$ ont la même parité.

Par conséquent D_m est S_m -unisolvant.

Preuve.

En substituant (1.20) et (1.21) dans (1.39) on obtient la formule (1.42). L'unisolvence vient du fait que l'opérateur Π_R^m reproduit toutes les valeurs moyennes transverses et nodales de u . ■

Remarque 1.4

L'opérateur d'interpolation $\hat{\Pi}_R^m$ permet de construire de façon naturelle un élément fini bidimensionnel (R, S_m, D_m) , à partir des éléments finis unidimensionnels $([-a, +a], \mathcal{P}_{m+2}, \mathbf{D}_a^m)$ et $([-b, +b], \mathcal{P}_{m+2}, \mathbf{D}_b^m)$ (1.24).

Pour étudier l'ordre de convergence de la méthode "HONEM-m" nous allons par la suite examiner une autre approche des méthodes nodales appliquée au problème (1.5). Une approche donnée par Hennart [54] en deux variantes appelées, méthode nodale polynomiale mathématique d'ordre m "PMNM-m" et méthode nodale polynomiale physique du même ordre "PPNM-m". Nous montrerons que la méthode "HONEM-m" munie de l'opérateur $\hat{\Pi}_R^m$ est équivalente à la méthode "PPNM-m".

1.3 Méthodes nodales polynomiales mathématiques et physiques

1.3.1 Méthode nodale polynomiale mathématique

Considérons le problème (1.5) avec des conditions limites de type Dirichlet homogènes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi &= -\nabla \cdot (D\nabla\phi) + \Sigma\phi = Q & \text{dans } \Omega. \\ \phi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Avec $0 < \alpha \leq D$ et $0 \leq \Sigma$.

La formulation variationnelle de (1.43) consiste à chercher ϕ vérifiant :

$$\begin{cases} \phi & \in H_0^1(\Omega) \\ a(\phi, v) & = Q(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.44)$$

Avec

$$a(\phi, v) : = \int_{\Omega} (D\nabla\phi\nabla v + \Sigma\phi v) dx, \quad (1.45)$$

$$\text{et } Q(v) = \int_{\Omega} Qv dx. \quad (1.46)$$

Où $H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev standard.

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (1.44) admet une solution unique dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Considérons la formulation faible discrete associée à (1.43) [55] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_h \in V_h^m \text{ tel que :} \\ a_h(\phi_h, v_h) = Q(v_h), \forall v_h \in V_h^m, \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} a_h(\phi_h, v_h) := \sum_{R \in \mathcal{T}_h} \int_R (D\nabla\phi_h\nabla v_h + \Sigma\phi_h v_h) dx, \\ Q(v_h) = \int_{\Omega} Q \cdot v_h dx. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Où

$$\begin{aligned} V_h^m &= \left\{ v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_R \in S_m(R), \forall R \in \mathcal{T}_h \text{ tel que } (v_h)_E^i (E \in \{L, R, T, B\}) \right. \\ &\quad \text{est continue à travers les interfaces } \partial R \text{ du maillage, pour, } i = 0, \dots, m \\ &\quad \left. \text{et } (v_h)_E^i = 0 \text{ si } E \in \partial\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

L'espace d'interpolation local $S_m(R)$ et l'ensemble des degrés de liberté $D_m(R)$ définis dans [55] sont ceux fournis par la formule (1.40).

L'espace d'interpolation V_h^m se constitue donc des fonctions qui appartiennent localement à l'espace S_m et qui vérifient seulement la continuité des moments de ϕ_h aux interfaces du maillage, ce qui génère un élément fini qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^0$. Ainsi cette méthode qu'on appelle méthode nodale polynomiale mathématique d'ordre m noté "PMNM-m" n'est autre qu'une méthode des éléments finis non-conformes.

Remarque 1.5 Dans [55] on trouve une autre demonstration de l'unisolvence de D_m dans S_m , et ceci en calculant explicitement les fonctions de base de l'élément fini (R, S_m, D_m) . Ces fonctions qui coincident avec ceux qu'on a trouvé dans (1.42). Par conséquent si $\phi_h \in V_h^m$, alors sa restriction à un noeud R du maillage s'écrit :

$$\phi_h = \sum_{j=0}^m (\psi_L^j(x, y)\phi_L^j + \psi_R^j(x, y)\phi_R^j) + \sum_{i=0}^m (\psi_B^i(x, y)\phi_B^i + \psi_T^i(x, y)\phi_T^i) + \sum_{i,j=0}^m \psi_C^{i,j}(x, y)\bar{\phi}_C^{i,j} \quad (1.49)$$

D'après Hennart [57] on a le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Si la solution ϕ du problème (1.44) est assez régulière (dans $H^{m+2}(\Omega)$) et ϕ_h son approximation par la méthode "PMNM- m " (1.47), alors il existe une constante C indépendante de h tel que :*

$$\| \phi - \phi_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+2} \quad (1.50)$$

1.3.2 Méthode nodale polynomiale physique

Par une méthode nodale polynomiale physique d'ordre m : "PPNM- m ", on désigne une méthode nodale d'ordre m utilisant les mêmes degrés de liberté et les mêmes fonctions de base que la méthode "PMNM- m " (1.42), mais dont les équations discrètes proviennent des deux caractéristiques physiques suivantes :

1. les équations du Bilan pondérées.

Le moment d'ordre (i, j) ($i, j = 0, \dots, m$) de l'équation (1.43) sur chaque noeud Ω_e du maillage $\mathcal{T}_h$ est égale à zero :

$$\int_{\Omega_e} p_i(x)p_j(y) [-\nabla D \cdot \nabla \phi_h + \Sigma \phi_h - Q] dr = 0, \quad i, j = 0, \dots, m$$

2. La continuité des moments transverses du flux et du courant à travers les interfaces. Cette dernière condition traduit simplement la continuité des moments de $D \nabla \phi$ le long des interfaces du maillage.

$$\int_{\Gamma_{ed}=\Omega_e \cap R_d} p_i(s) [D \cdot \nabla \phi_h|_{\Omega_e} - D \cdot \nabla \phi_h|_{\Omega_d}] \cdot n_e ds = 0, \quad i = 0, \dots, m$$

Où n_e est le vecteur normal extérieure à l'interface commune $\Gamma_{ed} = \Omega_e \cap \Omega_d$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2 [55]

On suppose qu'on est dans les conditions du problème (1.43), alors la "PPNM- m " est équivalente à la "PMNM- m " en utilisant des quadratures numériques de type Gauss-Radau.

Preuve : La "PMNM- m " consiste à trouver l'élément $\phi_h \in V_h^m$, tel que le système (1.47) est vérifié :

a) Considérons la fonction $\psi_C^{i,j}$, $i, j = 0, \dots, m$ relative à un noeud R comme fonction test dans (1.47). On a :

$$\int_R (D \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_C^{i,j} + \Sigma \phi_h - Q \psi_C^{i,j}) dx dy = 0; \quad i, j = 0, \dots, m \quad (1.51)$$

qui est équivalente, par application de la formule de *Green* à

$$\int_{\partial R} \psi_C^{i,j} (D \cdot \nabla \phi_h \cdot \vec{n}) ds + \int_R \psi_C^{i,j} (-\nabla \cdot D \nabla \phi_h + \Sigma \phi_h - Q) dx dy = 0 \quad (1.52)$$

Montrons que :

$$\int_{\partial R} \psi_C^{i,j} (D \cdot \nabla \phi_h \cdot \vec{n}) ds = 0$$

Il est facile de voir que :

$$p_{i,j}(x, y) = (-1)^i \psi_L^j(x, y) + \psi_R^i(x, y) + (-1)^j \psi_B^i(x, y) + \psi_T^i(x, y) + \psi_C^{i,j}$$

Ainsi d'après (1.41) on a :

$$\phi_h = \sum_{i,j=0}^m (\overline{\phi_h})_C^{i,j} p_{i,j} + \psi_L^{j*}(\phi_h)_L^j + \psi_R^{j*}(\phi_h)_R^j + \psi_B^{i*}(\phi_h)_B^i + \psi_T^{i*}(\phi_h)_T^i$$

La contribution des termes $p_{i,j}$ aux composantes du $\nabla \phi_h$ est proportionnelle à $p_i(x)$ et $p_j(y)$. Ainsi d'après (1.42) il est facile de remarquer que :

$$\begin{cases} \psi_C^{i,j}(x, \mp b) &= c p_{m+k(i)}(x) \\ \psi_C^{i,j}(\mp a, y) &= c p_{m+k(j)}(y) \end{cases} \quad (1.53)$$

Ainsi, avec D constante sur chaque noeud, $\psi_C^{i,j}$ est orthogonale à $p_k(x)$ et $p_l(y)$, ($k, l = 0, \dots, m$).

Les contributions des fonctions de base ψ_E^i au $\nabla \phi_h$ sont proportionnelles à $p_i(x)$ ou y) $i = 0, \dots, m$ ou à $p_{m+1} \mp p_{m+2}(x, y)$. Dans le premier cas (1.53) donne le résultat et dans le deuxième cas, grace à une intégration réduite de type Radau, le premier terme de (1.52) disparaît et par la suite on obtient :

$$\int_R p_{i,j}(x, y) [-\nabla \cdot D \nabla u_h + \Sigma u_h - Q] dx dy = 0$$

b) Considérons maintenant dans (1.47) la fonction test ψ_E^j , $E \in L, R, B, T$, $j = 0, \dots, m$. Pour simplifier, on prend ψ_E^j égale à ψ_R^j sur K_1 et à ψ_L^j sur K_2 (FIG. (1.5)), on obtient :

$$\int_{K_1} (D\nabla\phi_h \cdot \nabla\psi_R^j + \Sigma\phi_h - Q\psi_R^j)dx + \int_{K_2} (D\nabla\phi_h \cdot \nabla\psi_L^j + \Sigma\phi_h - Q\psi_L^j)dx = 0 \quad (1.54)$$

$i, j = 0, 1, \dots, m$

Puisque $\psi_{L|2}$ est nul sur R_2 et $\psi_{R|1}$ est nul sur L_1 . Par intégration réduite de Radau sur $B1, T1, B2, T2$, l'équation (1.54) devient :

$$\int_{\Gamma_{1,2}} p_i(y) [D \cdot \nabla\phi_h|_{K_1} - D \cdot \nabla\phi_h|_{K_2}] \cdot n \, ds = 0, \quad i = 0, \dots, m$$

Ceci exprime la continuité du courant sur $\Gamma_{1,2} = K_1 \cap K_2$.

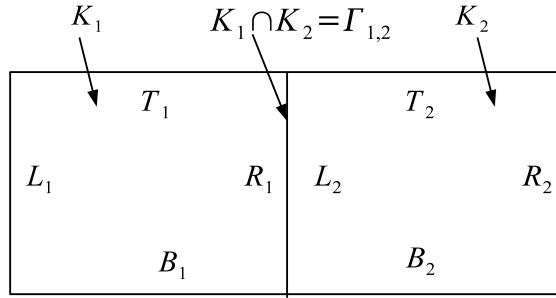


FIG. 1.5 –

Remarque 1.6 – La quadrature numérique de Gauss-Radau utilisée au théorème précédent est de l'ordre de $2m + 2$ (exacte pour Q_{2m+2}).

– Généralement, l'utilisation d'une quadrature numérique d'ordre $2m + 1$ avec une méthode des éléments finis appliqué au problème (1.43) est compatible avec un ordre de convergence de $O(h^{m+2})$ ([28], p :207).

Ayant établi l'équivalence entre les méthodes "PPNM-m" et "PMNM-m", en utilisant une quadrature numérique de Gauss-Radau, et en tenant compte que l'ordre de quadrature est compatible avec l'ordre de la méthode établi au théorème précédent, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3

Si la solution ϕ du problème (1.44) est assez régulière (dans $H^{m+2}(\Omega)$) et ϕ_h son approximation par la méthode "PPNM-m", alors il existe une constante C indépendante de h tel que :

$$\| \phi - \phi_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+2} \quad (1.55)$$

Pour illustrer la différence entre la méthode "PPNM-m" et la méthode "HONEM-m", nous résumons dans le tableau suivant l'algorithme de chaque approche.

"PPNM-m"	"HONEM-m"
1. Interpolation locale de ϕ dans S_m .	1. Intégration transverse locale sur chaque noeud.
2. Application des équations du bilan pondérées et de la condition de continuité des valeurs moyennes transverses du flux et du courant à travers les interfaces du maillage pour la formulation du système discret.	2. Interpolation locale de $\bar{\phi}_y^j(x)$ (1.20) et $\bar{\phi}_x^i(y)$ (1.21).
3. Résolution du système linéaire.	3. Application des équations du bilan pondérées de la condition de continuité des valeurs moyennes transverses du flux et du courant à travers les interfaces du maillage pour la formulation du système discret.
	4. Résolution du système linéaire.

Rappelons que les fonctions de base construites pour la méthode "HONEM-m" à partir de l'opérateur $\hat{\Pi}_R^m$ (lemme (1.1)) sont celles utilisées pour la méthode "PMNM-m". Donc en ajoutant l'étape suivante à l'algorithme de la méthode "HONEM-m" :
5. Construction du Flux en tout point par l'opérateur $\hat{\Pi}_R^m$ pour toute maille R de $\mathcal{T}_h$, on obtient le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.4

La méthode "HONEM-m" munie de l'opérateur d'interpolation $\hat{\Pi}_R^m$ est équivalente à la méthode "PPNM-m" et par conséquent, si la solution ϕ du problème (1.44) est assez régulière (dans $H^{m+2}(\Omega)$) et ϕ_h son approximation par la méthode "HONEM-m", alors il existe une constante C indépendante de h tel que :

$$\| \phi - \phi_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^{m+2} \quad (1.56)$$

Remarque 1.7

1. Le choix de l'espace d'interpolation V_h^m est une étape intégrée de la méthode "PPNM- m ", tandis que pour la méthode "HONEM- m ", on peut explorer plusieurs constructions de la solution approchée en tout point du domaine d'étude Ω à partir des solutions approchées de $\bar{\phi}_y^j$ et $\bar{\phi}_x^i$.
2. L'ordre de convergence $O(h^{m+2})$ de la méthode nodale "PMNM- m ", énoncé dans le théorème 1.1, est démontré dans [57] sans l'utilisation de quadrature numérique.
La quadrature numérique de Gauss-Radau utilisée dans le théorème 1.2 est de l'ordre de $2m+2$, tandis que, une quadrature de l'ordre de $2m+1$ est suffisante pour conserver l'ordre de convergence $O(h^{m+2})$.

Par la suite, on propose une procédure de résolution du système linéaire issu par application de la méthode "HONEM- m " ($m = 0, 1$) au problème (1.43).

1.4 Procédure de résolution

Supposons que le domaine Ω est subdivisé en n_x noeuds suivant x et n_y noeuds suivant y . On ordonne les équations en considérant tout d'abord les bandes horizontales les une après les autres de bas en haut, puis on considère toutes les bandes verticales les une après les autres de gauche à droite, en numérotant pour chaque bande les interfaces suivant y de bas en haut. De plus, on utilise l'ordre lexicographique pour numéroter les noeuds $\Omega_{k,l}$, $k = 0, \dots, m$, $l = 0, \dots, m$ du maillage du domaine Ω .

Pour simplifier considérons les notations suivantes :

- $\underline{\phi}_u \equiv \text{col}(\underline{\phi}_u^0, \underline{\phi}_u^1, \dots, \underline{\phi}_u^m)$ ($u = x$ ou y), où $\underline{\phi}_u^s$ ($s = 0, \dots, m$) est le vecteur colonne dont les composantes représentent les moments du flux transverse d'ordre s aux interfaces des moments suivant la direction u .
- $\underline{\phi}_c \equiv \text{col}(\underline{\phi}_{c(i,j)}, j = 1, \dots, n_y; i = 1, \dots, n_x)$ où $\underline{\phi}_{c(i,j)}$ est le vecteur colonne dont les composantes représentent les moments du flux centrés pour la cellule $\Omega_{i,j}$.
 $\underline{\phi}_{c(i,j)} \equiv \text{col}(\bar{\phi}_{c(i,j)}^{kl}, k = 0, \dots, m; l = 0, \dots, m)$.

En assemblant les équations (1.28) pour les moments du flux transverse suivant x , les équations analogues (1.30) pour les moments du flux transverse suivant y et les équations du bilan (1.36) pour les moments du flux centrés sur chacun des noeuds, on

obtient le système linéaire suivant :

$$A\underline{\Psi} = \underline{S}. \quad (1.57)$$

et

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_x \\ \underline{\phi}_y \\ \underline{\phi}_c \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{q}_c \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

$\underline{q}_c$ est défini de la même façon que $\underline{\phi}_c$ et ne dépend que de la source Q .

La matrice A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} M_{xx} & 0 & M_{xc} \\ 0 & M_{yy} & M_{yc} \\ M_{cx} & M_{cy} & M_{cc} \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

où M_{cc} est une matrice bloc diagonale d'ordre $(m+1)^2 * nx * ny$ dont les blocs diagonaux sont des matrices d'ordre $(m+1)^2$. $M_{uu}(u = x, y)$ est une matrice bloc diagonale d'ordre $(m+1) * (nx-1) * ny$ pour M_{xx} et $(m+1) * nx * (ny-1)$ pour M_{yy} . Les $(m+1)$ blocs diagonaux de M_{xx} sont identiques de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_{n_y} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

où T_j ($j = 1, \dots, n_y$) est une matrice tridiagonale d'ordre $nx-1$ qui est associée à la j^{eme} bande horizontale et dont les coefficients sont donnés par le premier membre des équations (1.28). La matrice M_{yy} admet la même structure que la matrice M_{xx} .

Théorème 1.5

Les matrices M_{xx} et M_{yy} sont tridiagonales, symétriques et à diagonales strictement dominantes.

Preuve

Le fait que M_{xx} soit tridiagonale découle immédiatement de la forme des équations (1.28). De plus tenant compte de la remarque (1.2) il est facile de voir que la matrice M_{xx} est bien à dominance diagonale stricte. De la même manière on montre que la matrice M_{yy} est symétrique et à diagonale strictement dominante.

Remarque 1.8

- Du théorème précédent, on déduit immédiatement que les matrices M_{xx} et M_{yy} sont symétriques définies positives.
- on peut facilement aussi vérifier que la matrice M_{cc} est à diagonale dominante stricte. Il suffit d'écrire explicitement les équations du bilan pondérées (1.36) (voir Annexe (A) pour les équations du bilan).

D'après la remarque précédente M_{cc} est inversible ce qui permet d'exprimer les valeurs moyennes nodales $\bar{\phi}_C^{i,j}$ sur chaque noeud en fonction des valeurs moyennes faciales $\phi_L^j, \phi_R^j, \phi_B^i, \phi_T^i$, $i, j = 0, \dots, m$. Par conséquent on obtient le système réduit suivant :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\phi}_x \\ \underline{\phi}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_x \\ \underline{Q}_y \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

où

$$\begin{aligned} A_{xx} &= M_{xx} - M_{xc} M_{cc}^{-1} M_{cx}, \\ A_{xy} &= -M_{xc} M_{cc}^{-1} M_{cy}, \\ A_{yx} &= -M_{yc} M_{cc}^{-1} M_{cx}, \\ A_{yy} &= M_{yy} - M_{yc} M_{cc}^{-1} M_{cy}, \\ \underline{Q}_x &= -M_{xc} M_{cc}^{-1} \underline{q}_c, \\ \underline{Q}_y &= -M_{yc} M_{cc}^{-1} \underline{q}_c. \end{aligned} \quad (1.62)$$

La substitution des valeurs moyennes nodales par des combinaisons linéaires en fonction des valeurs moyennes faciales donne naissance à des couplages entre les valeurs moyennes faciales suivant x et ceux suivant y .

Pour finaliser ce travail on propose d'explorer une comparaison numérique entre différents solveurs avec et sans préconditionnement pour la résolution du système 1.61.

deux préconditionneurs seront implémentés :

1. Préconditionneur de la factorisation incomplète ILU [86].
2. Préconditionneur par blocks [78].

1.5 Résultats numériques

Pour la validation du schéma "HONEM-m, $m = 0, 1$ ", on propose deux exemples tests " $Pi, i = 0, 1$ ", dont le premier possède une solution exacte, tandis que le deuxième est un benchmark modélisant un écoulement dans un milieu poreux, proposé par Mosé [79] et étudié dans [61, 77, 78].

Problème test P0

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\phi(x, y) + \phi(x, y) &= Q(x, y) & \forall x, y \in \Omega, \\ \phi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.63)$$

où $\Omega =]-1, +1[$. Les résultats numériques seront comparés avec les deux solutions analytiques suivantes :

$$\text{P00} \begin{cases} \phi(x, y) &= (1 - x^4)(1 - y^4), \\ Q(x, t) &= 12x^2(1 - y^4) + 12(1 - x^4)y^2 + (1 - x^4)(1 - y^4), \end{cases} \quad (1.64)$$

et

$$\text{P01} \begin{cases} \phi(x, y) &= \left(1 - \frac{\cosh(x)}{\cosh(1)}\right) \left(1 - \frac{\cosh(y)}{\cosh(1)}\right), \\ Q(x, t) &= \frac{\cosh(x) \left(1 - \frac{\cosh(y)}{\cosh(1)}\right)}{\cosh(1)} + \frac{\cosh(y) \left(1 - \frac{\cosh(x)}{\cosh(1)}\right)}{\cosh(1)} \\ &+ \left(1 - \frac{\cosh(y)}{\cosh(1)}\right) \left(1 - \frac{\cosh(x)}{\cosh(1)}\right). \end{cases} \quad (1.65)$$

Soit $\varepsilon = \phi_{\text{exa}} - \phi_h$ la fonction qui représente l'erreur numérique, où ϕ_{exa} et ϕ_h sont respectivement la solution exacte et approchée.

Considérons $N_x \times N_y$ points équidistants et fixes dans Ω . les erreurs en normes discrètes L^∞ et L^2 relatives à ces points sont définies par :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_\infty^u &= \max_{ij} |\varepsilon(x_i, y_j)| \quad 1 \leq i \leq N_x \quad 1 \leq j \leq N_y. \\ \|\varepsilon\|_{L^2}^u &= \left[\frac{1}{N_x N_y} \sum_{ij} \varepsilon^2(x_i, y_j) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Ces deux erreurs peuvent aussi être calculées pour une distribution de points relatifs aux mailles. Considérons donc que le domaine Ω est subdivisé en nx mailles suivant x et ny mailles suivant y . Les erreurs en normes L^∞ et L^2 relatives aux centres des mailles sont données par :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_\infty^{nu} &= \max_{ij} |\varepsilon(x_i, y_j)| \quad 1 \leq i \leq nx \quad 1 \leq j \leq ny. \\ \|\varepsilon\|_{L^2}^{nu} &= \left[\frac{1}{nx ny} \sum_{ij} \varepsilon^2(x_i, y_j) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Les erreurs en normes L^∞ et L^2 relatives aux moments centrés $\bar{\phi}_C^{k,l}$ sont données par :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\|_{\infty}^{(k,l)} &= \max_{ij} |(\overline{(\varepsilon_{ij}(x,y))}_C)^{kl}| \quad 1 \leq i \leq nx \quad 1 \leq j \leq ny. \\ \|\varepsilon\|_{L^2}^{(k,l)} &= \left[\frac{1}{nxy} \sum_{ij} (\overline{(\varepsilon_{ij}(x,y))}_C)^{kl} \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{1.68}$$

L'erreur d'interpolation en normes L^2 et L^∞ sera notée : $\|\varepsilon\mathcal{I}\|_{L^2}^u$ et $\|\varepsilon\mathcal{I}\|_{\infty}^u$, pour une répartition uniforme de points.

1. Résultats relatifs à la solution analytique P00 (1.64)

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty}^u$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^u$	α	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{nu}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{nu}$	α
HONEM-0	2×2	9.69E-01		5.44E-01		4.62E-01		9.24E-01	
	4×4	2.36E-01	2.03	1.35E-01	2.00	2.18E-01	1.08	2.65E-01	1.79
	8×8	5.64E-02	2.06	3.36E-02	2.00	6.02E-02	1.85	6.94E-02	1.93
	16×16	1.47E-02	1.93	8.58E-03	1.96	1.54E-02	1.96	1.75E-02	1.98
	32×32	3.39E-03	2.11	1.99E-03	2.10	3.87E-03	1.99	4.39E-03	1.99
HONEM-1	2×2	1.36E-01		3.99E-02		5.23E-02		1.04E-01	
	4×4	1.67E-02	3.02	2.98E-03	3.74	5.03E-03	3.37	7.74E-03	3.75
	8×8	1.78E-03	3.23	2.17E-04	3.78	4.16E-04	3.59	5.24E-04	3.88
	16×16	7.15E-05	4.64	1.30E-05	4.06	4.12E-05	3.33	3.35E-05	3.99
	32×32	3.62E-06	4.30	7.54E-07	4.10	3.15E-06	3.70	2.10E-06	3.99

TAB. 1.1 – Erreurs et ordres de convergence en normes L^2 et L^∞ pour les méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" appliquées au problème P00

A partir du tableau 1.1, les ordres de convergence numériques en norme L^2 de "HONEM-0" et "HONEM-1" sont respectivement 2 et 4. Ainsi on retrouve exactement l'ordre de convergence théorique de "HONEM-0" fournit par le théorème (1.4) et on observe un ordre de convergence plus grand que celui prédit par le même théorème pour "HONEM-1".

Les erreurs en normes infinies listées au même tableau (1.1) maintiennent des ordres de convergence semblables à ceux calculés en normes L^2 , à savoir 2 pour la méthode "HONEM-0" et environ 4 pour la méthode "HONEM-1".

Le tableau (1.2) nous montre tout d'abord que les ordres de convergence relatifs à l'erreur d'interpolation en norme L^2 pour les méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" sont conformes aux ordres théoriques (voir Ciarlet [28], p : 132). Ainsi on retrouve un ordre 2 pour la méthode nodale "HONEM-0" et un ordre légèrement plus grand que 4 pour la méthode "HONEM-1".

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\mathcal{I}\ _{\infty}^u$	α	$\ \varepsilon\mathcal{I}\ _{L^2}^u$	α
HONEM-0	2×2	4.07E-01		8.15E-01		5.71E-01		1.05E-01	
	4×4	2.04E-01	0.99	2.47E-01	1.71	3.08E-01	0.89	3.68E-02	1.52
	8×8	5.74E-02	1.83	6.55E-02	1.91	1.07E-01	1.52	1.17E-02	1.64
	16×16	1.47E-02	1.96	1.66E-02	1.97	2.71E-02	1.98	2.97E-03	1.98
	32×32	3.70E-03	1.99	4.16E-03	1.99	4.24E-03	2.67	2.99E-04	2.09
HONEM-1	2×2	2.56E-02		5.12E-02		1.24E-01		2.00E-02	
	4×4	1.76E-03	3.86	3.27E-03	3.96	1.65E-02	2.91	2.01E-03	3.31
	8×8	1.19E-04	3.88	2.05E-04	3.99	1.71E-03	3.27	1.65E-04	3.60
	16×16	7.77E-06	3.93	1.28E-05	3.99	6.83E-05	4.64	9.60E-06	4.10
	32×32	4.96E-07	3.96	8.44E-07	3.99	3.29E-06	4.37	5.10E-07	4.23

TAB. 1.2 – Erreurs et ordres de convergence en normes L^2 et L^∞ pour les moments centrés $(0,0)$ et les erreurs d'interpolations relatives aux méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" appliquées au problème $P00$

On constate aussi que les ordres de convergence en norme L^∞ des erreurs d'interpolation sont semblables à ceux en norme L^2 .

La comparaison faite entre les erreurs des moments $(0,0)$ en normes L^2 et L^∞ au même tableau, donnent un ordre 2 pour la méthode nodale "HONEM-0" et un ordre 4 pour la méthode "HONEM-1".

	mesh	$\ \varepsilon\ _\infty^u$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^u$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,1)\&(1,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(1,1)}$	α
HOMEM-1	2×2	1.36E-01		3.99E-02		1.30E-03		1.86E-02	
	4×4	1.67E-02	3.02	2.98E-03	3.74	3.38E-04	1.95	5.56E-04	5.06
	8×8	1.78E-03	3.23	2.17E-04	3.78	1.42E-05	4.57	1.13E-05	5.60
	16×16	7.15E-05	4.64	1.30E-05	4.06	4.83E-07	4.87	1.96E-07	5.85
RT1-a <i>Hennart</i> [61]	2×2	2.27E-01		5.93E-02		1.30E-02		3.11E-02	
	4×4	3.98E-02	2.51	8.66E-03	2.78	1.59E-03	3.04	2.40E-03	3.69
	8×8	5.00E-03	2.99	9.85E-04	3.14	1.29E-04	3.61	2.39E-04	3.04
	16×16	5.64E-04	3.15	1.16E-04	3.08	9.98E-06	3.70	2.83E-05	3.37
BDFM1-a <i>Hennart</i> [61]	2×2	2.57E-01	1.66	6.38E-02	2.83	1.81E-02			
	4×4	4.74E-02	2.44	1.02E-02	2.64	1.60E-03	3.50		
	8×8	5.85E-03	3.02	1.13E-03	3.17	1.29E-04	3.63		
	16×16	6.34E-04	3.21	1.26E-04	3.17	9.98E-06	3.70		
RT1-b <i>Hennart</i> [61]	2×2	1.74E-01		5.38E-02		6.53E-04		9.33E-03	
	4×4	2.68E-02	2.70	6.10E-03	3.14	1.69E-04	1.95	2.78E-04	5.07
	8×8	2.58E-03	3.37	5.09E-04	3.58	7.10E-06	4.57	5.69E-06	5.61
	16×16	1.99E-04	3.70	4.04E-05	3.65	2.42E-07	4.88	9.83E-08	5.86
BDFM1-b <i>Hennart</i> [61]	2×2	2.46E-01		9.10E-02		4.06E-02			
	4×4	3.73E-02	2.72	1.05E-02	3.12	2.82E-03	3.84		
	8×8	3.61E-03	3.37	8.62E-04	3.61	1.13E-04	4.64		
	16×16	2.78E-04	3.70	6.04E-05	3.83	3.78E-06	4.90		
ANMF-1 <i>Guessous</i> [50]	2×2	1.33E-01		3.47E-02		1.93E-03		1.45E-02	
	4×4	1.66E-02	3.00	2.68E-03	3.69	1.41E-04	3.76	4.52E-04	5.00
	8×8	1.76E-03	3.23	2.00E-04	3.74	6.74E-06	4.39	9.00E-06	5.65
	16×16	7.04E-05	4.64	1.19E-05	4.06	2.26E-07	4.89	1.31E-07	6.09

TAB. 1.3 – Comparaison des erreurs en normes L^2 et L^∞ et des ordres de convergence de la méthode "HONEM-1" avec d'autres méthodes nodales [61]-[50]

Dans le tableau (1.3) nous comparons les erreurs et les ordres de convergence de la méthode "HONEM-1" (pour les normes $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_{L^2}^u$, $\| \cdot \|_{L^2}^{(0,1)\&(1,0)}$, et $\| \cdot \|_{L^2}^{(1,1)}$) avec les méthodes nodales polynomiales "RT1-a", "BDFM1-a", "RT1-b" et "BDFM1-b" analysées dans [61] et la méthode nodale analytique (ou intégrale) "ANMF-1" étudiée par Guessous [49, 50] et Hennart [56].

Notons que la méthode nodale de Raviart-Thomat "RT1-a" présentée dans [61] correspond au schéma nodale "PMNM-1" de la section (1.3.1), quant à la méthode nodale "BDFM1-a" elle correspond à la version primale de l'élément fini mixte Brezzi-Douglas-Fortin-Marini. [19]

Notons aussi que les schémas "RT1-b" et "BDFM1-b" présentés dans [61] préservent les mêmes espaces d'interpolations et les mêmes degrés de liberté que les schémas "RT1-a" et "BDFM1-a", sauf que la résolution par "RT1-b" et "BDFM1-b" se base sur un processus d'intégration transverse avec quadratures numériques (voir [61] pour plus de détails sur ces méthodes).

En analysant le tableau (1.3) on constate que :

- l'ordre de convergence en norme L^2 de la méthode "RT1-a" est 3, ce qui correspond à l'ordre de convergence théorique donné par le théorème (1.1).
- L'approximation par la méthode nodale "HONEM-1" donne plus de précision que les méthodes "RT1-a", "BDFM1-a", "RT1-b" et "BDFM1-b" pour toutes les normes figurants au tableau.
- La méthode "HONEM-1" gagne un ordre de convergence par rapport aux méthodes "RT1-a", "BDFM1-a", et elle dépasse légèrement celui des méthodes "RT1-b" et "BDFM1-b".
- La precision et les ordres de convergence de la méthode "HONEM-1" sont presque semblables à ceux fournis par la méthode "ANMF-1".
- Les ordres de convergence de la méthode "HONEM-1" par rapport au moments centrés sont au voisinages de 5 pour les moments (0, 1) et (1, 0) et de 6 pour les moments (1, 1). Ce résultat de super-convergence appelé "super-convergence aux noeuds(degrés de liberté)" on le retrouve dans la résolution des équations au dérivées partielles uni-dimensionnelles par la méthode des éléments finis (voir par exemple [29]) et qui peut aussi être expliqué par la presence des fonctions de base quadratiques-cubiques et cubiques-quadratiques avec les moments centrés (0, 1) et (1, 0) et cubiques-cubiques avec ceux d'ordre (1, 1).

2. Résultats relatifs à la solution analytique P01 (1.65)

Les résultats relatifs à la solution analytique P01 sont données aux tableaux

(1.4)-(1.5) et (1.6) et ils sont identiques à ceux trouvés pour la solution analytique P00.

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty}^u$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^u$	α	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{nu}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{nu}$	α
HONEM-0	2×2	5.63E-02		1.26E-02		7.50E-03		1.50E-02	
	4×4	2.00E-02	1.48	3.73E-03	1.75	3.97E-03	0.91	4.78E-03	1.64
	8×8	5.38E-03	1.89	1.01E-03	1.88	1.12E-03	1.81	1.26E-03	1.91
	16×16	1.28E-03	2.06	2.51E-04	2.00	2.90E-04	1.95	3.21E-04	1.97
	32×32	2.21E-04	2.53	6.25E-05	2.01	7.32E-05	1.98	8.05E-05	1.99
HONEM-1	2×2	4.14E-03		8.44E-04		2.84E-04		5.68E-04	
	4×4	2.22E-04	4.21	5.46E-05	3.94	4.25E-05	2.73	4.68E-05	3.60
	8×8	1.84E-05	3.59	3.55E-06	3.94	4.24E-06	3.32	3.14E-06	3.89
	16×16	8.68E-07	4.40	2.19E-07	4.01	3.35E-07	3.66	2.00E-07	3.97
	32×32	6.08E-08	3.83	1.35E-08	4.01	2.35E-08	3.83	1.25E-08	3.99

TAB. 1.4 – Erreurs et ordres de convergence en normes L^2 et L^{∞} pour les méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" appliquées au problème P01

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\mathcal{I}\ _{\infty}^u$	α	$\ \varepsilon\mathcal{I}\ _{L^2}^u$	α
HONEM-0	2×2	5.65E-03		1.13E-02		4.14E-01		1.07E-02	
	4×4	2.89E-03	0.96	3.49E-03	1.69	1.58E-01	1.38	3.23E-03	1.73
	8×8	8.19E-04	1.82	9.21E-04	1.92	4.36E-02	1.85	8.92E-04	1.85
	16×16	2.10E-04	1.95	2.33E-04	1.98	1.04E-02	2.06	2.21E-04	2.01
	32×32	5.31E-05	1.98	5.85E-05	1.99	1.83E-03	2.50	5.48E-05	2.01
HONEM-1	2×2	2.46E-04		4.93E-04		3.54E-03		7.76E-04	
	4×4	1.93E-05	3.66	3.34E-05	3.88	2.13E-04	4.05	4.99E-05	3.95
	8×8	1.51E-06	3.67	2.15E-06	3.95	1.80E-05	3.56	3.25E-06	3.94
	16×16	1.06E-07	3.83	1.35E-07	3.98	8.53E-07	4.40	2.00E-07	4.02
	32×32	7.04E-09	3.91	8.49E-09	3.99	5.91E-08	3.85	1.22E-08	4.02

TAB. 1.5 – Erreurs et ordres de convergence en normes L^2 et L^{∞} pour les moments centrés (0,0) et les erreurs d'interpolation relatives aux méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" appliquées au problème P01.

	mesh	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{(0,1)\&(1,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,1)\&(1,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{\infty}^{(1,1)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(1,1)}$	α
HONEM-1	2×2	1.39E-05		2.79E-05		1.24E-04		2.49E-04	
	4×4	4.01E-06	1.79	5.68E-06	2.29	5.05E-06	4.62	5.31E-06	5.55
	8×8	2.47E-07	4.02	2.15E-07	4.72	1.38E-07	5.18	9.16E-08	5.85
	16×16	1.07E-08	4.52	7.04E-09	4.93	3.22E-09	5.42	1.48E-09	5.95
	32×32	4.02E-10	4.73	2.22E-10	4.98	7.11E-11	5.50	2.45E-11	5.91

TAB. 1.6 – Les erreurs et les ordres de convergence des moments centrés "(0,1) et (1,0)" et (1,1) en normes L^2 et L^∞ de la méthode "HONEM-1" appliquée au problème P01

Problème test P1

Considérons le Benchmark donnée par Mosé [79], modélisant un écoulement dans une nappe phréatique, dont l'équation est :

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi = Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (1.69)$$

où $\Omega =]0, 100[\times]0, 100[$ et D représente la conductivité hydraulique, qui bascule entre 1 et 10^{-5} . Les dimensions et conditions au bord du problème (1.69) sont illustrés dans la figure (1.6).

Étant donnée que ce problème ne possède pas une solution exacte, une comparaison entre la représentation graphique tridimensionnelle des solutions données par "HONEM-0" et "HONEM-1", et celles données par Moulton [77] et Hennart [61], est illustrée dans les figures (1.7) et (1.8), pour un maillage uniforme 25×25 . On remarque que les graphes obtenus par les méthodes "HONEM-0" et "HONEM-1" sont identiques à ceux obtenus par la méthode "RT1-b" [61] et la méthode nodale intégrale "NIM" [77].

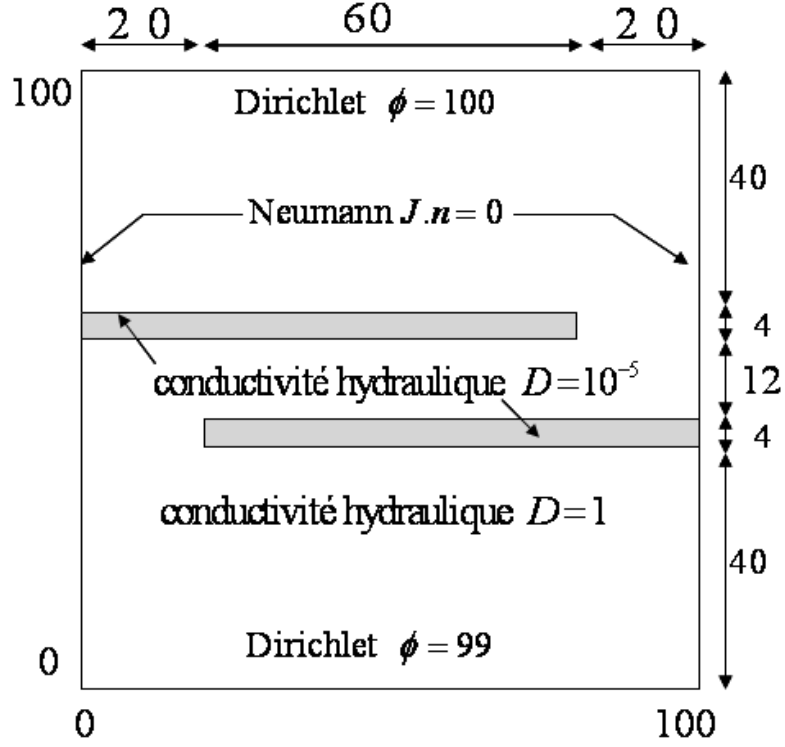


FIG. 1.6 – Les dimensions et les paramètres du problème P1.

Comparaison entre différents solveurs pour la résolution du système (1.61) relatif au problème P0

Nous proposons une comparaison entre les solveurs : BICG, BICGSTAB et QMR pour la résolution du système (1.61) (voir [86] pour la définition de ces solveurs).

Deux préconditionneurs seront implémentés :

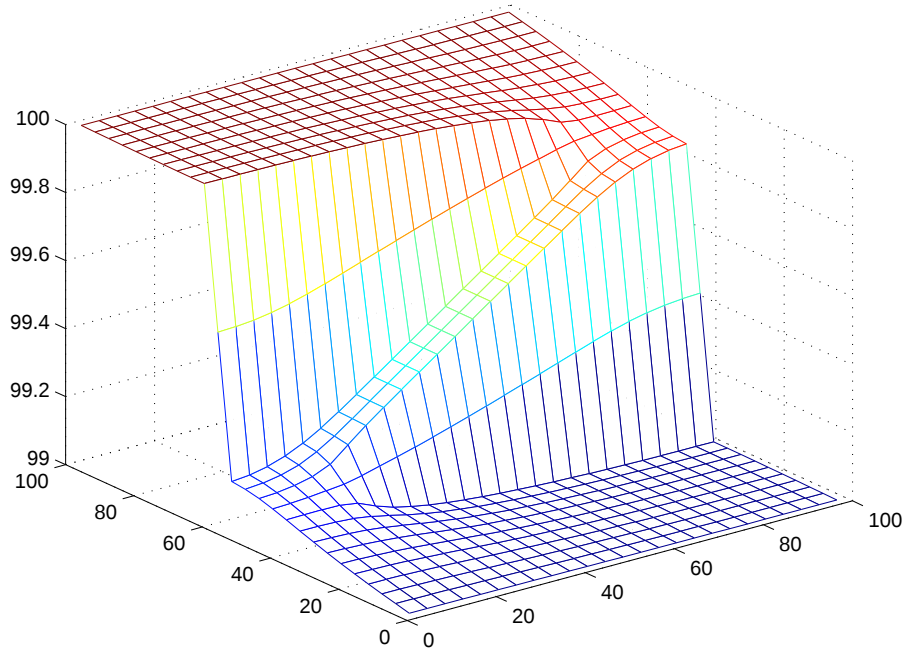
- Le préconditionneur ILU de la factorisation incomplète [86].
- Un préconditionneur par bloc, présenté dans [78], et qui prend la forme suivante :

$$B = \begin{bmatrix} \hat{B} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

où $\hat{B}$ est une matrice diagonale, dont chaque élément est égale à la somme des éléments de la colonne correspondante de A_{xx} .

Dans tous les tableaux suivants, les notations : ITER, et COND indiqueront respectivement, le nombre des itérations correspondant à la valeur calculée de la solution et le conditionnement de la matrice préconditionnée. La tolérance " ϵ " pour le résidu relatif et le nombre maximale des itérations " $maxiter$ " sont fixés respectivement à 10^{-6} et 5000.

La solution du problème P1 par "HONEM1" en 25*25 points pour un maillage 25*25



La solution du problème P1 par "HONEM-0" dans un maillage 25*25 calculée en 25 points

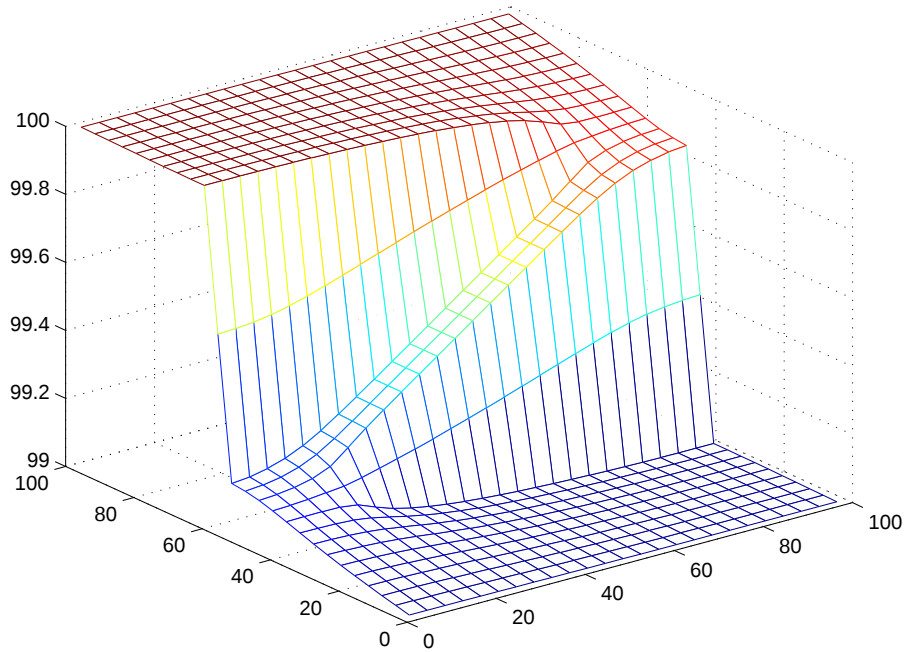


FIG. 1.7 – Graphiques des solutions de P1 par "HONEM-0" et "HONEM-1"

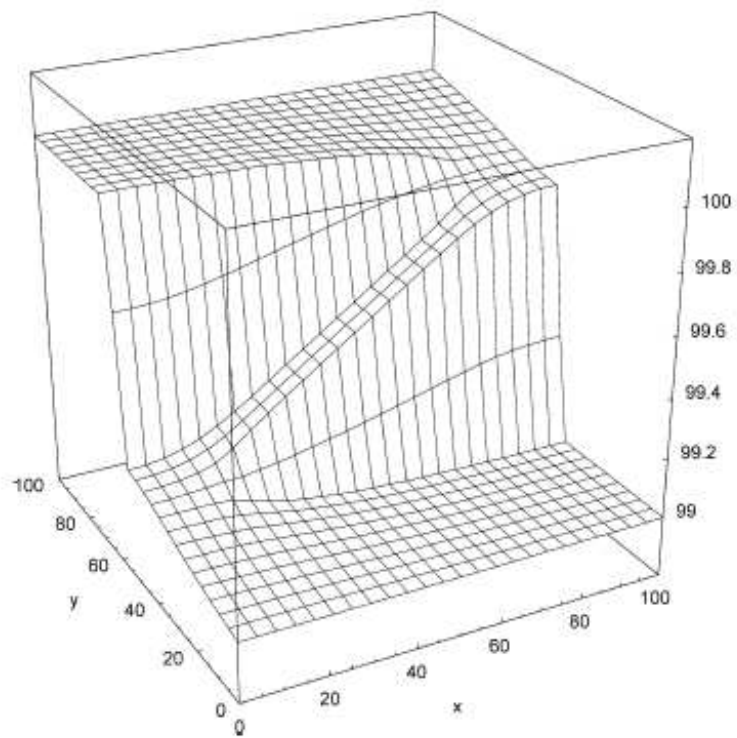
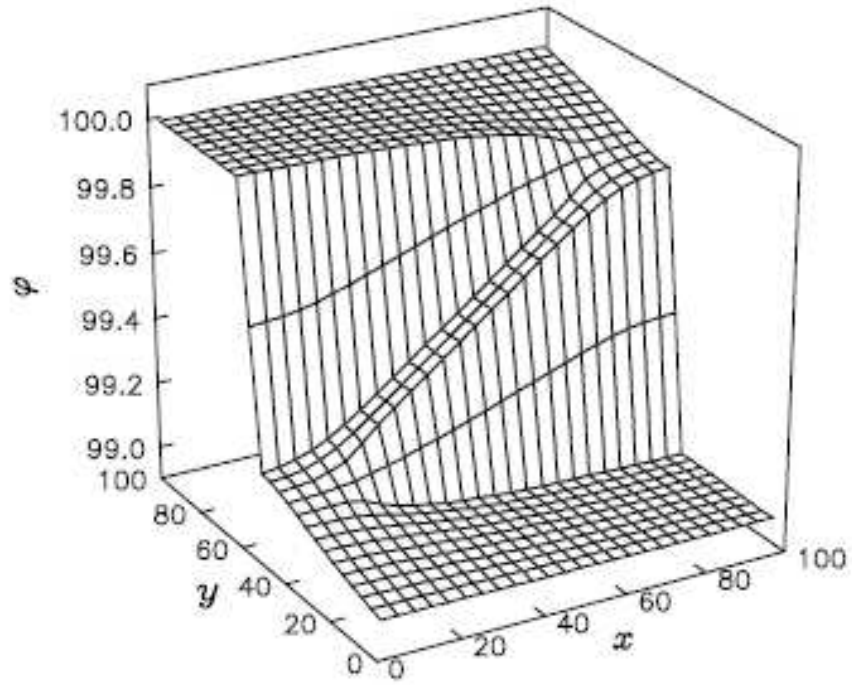


FIG. 1.8 – Graphiques des solutions de P1. En haut "NIM" [77] et en bas "RT1-b" [61]

	<i>BICG</i>	<i>BICGSTAB</i>	<i>QMR</i>
Sans préconditionnement (COND = 1.30E+03)			
ITER	38	27	38
Avec préconditionneur ILU (COND = 1.11E+03)			
ITER	30	20	30
Avec préconditionneur par bloc (COND = 5.9E+01)			
ITER	06	04	06

TAB. 1.7 – Comparaison entre différentes méthodes itératives avec et sans préconditionnements pour la méthode "HONEM-0", appliquée au problème P0 dans un maillage 30×30

Dans le tableau (1.7) on constate que le préconditionneur B diminue considérablement le nombre des itérations pour la méthode "HONEM-0", pour tous les solveurs. On remarque aussi que le solveur BCGSTAB converge en un nombre minimum des itérations en utilisant le préconditionneur B . Les courbes de convergence relatifs aux deux preconditionneurs sont données dans FIG (1.9).

La comparaison pour la méthode "HONEM-1", donnée au tableau (1.8) montre aussi l'efficacité du préconditionneur B pour l'accélération de la convergence. Ainsi on constate que le solveur BICGSTAB converge en un nombre minimum d'itérations en utilisant le préconditionneur B . Les courbes de convergence relatives à "HONEM-1" sont données dans FIG (1.10)

	<i>BICG</i>	<i>BICGSTAB</i>	<i>QMR</i>
Sans préconditionnement (COND = 3.19E+03)			
ITER	109	82	106
Avec préconditionneur ILU (COND = 1.42E+03)			
ITER	51	34	50
Avec préconditionneur par bloc (COND = 5.73E+01)			
ITER	09	05	09

TAB. 1.8 – Comparaison entre différentes méthodes itératives avec et sans préconditionnement pour la méthode "HONEM-1", appliquée au problème P0, dans un maillage 30×30

Comparaison entre différents solveurs pour la résolution du système (1.61) relatif au problème P1

Dans le tableau (1.9) on constate que le préconditionneur B diminue considérablement le nombre des itérations pour la méthode "HONEM-0", pour tous les solveurs.

On remarque aussi que le solveur BCGSTAB converge en un nombre minimum des itérations. Les courbes de convergence relatifs aux deux preconditionneurs sont données dans FIG (1.11).

	<i>BICG</i>	<i>BICGSTAB</i>	<i>QMR</i>
Sans preconditionnement (COND = 5.42E+05)			
ITER	771	2221	762
Avec preconditionneur ILU (COND = 6.77E+03)			
ITER	98	52	96
Avec preconditionneur par bloc (COND = 4.11E+01)			
ITER	3	2	3

TAB. 1.9 – Comparaison entre différentes méthodes itératives avec et sans preconditionnements pour la méthode "HONEM-0", appliquée au problème P1 dans un maillage 25×25

La comparaison pour la méthode "HONEM-1", donnée au tableau (1.10) montre aussi l'efficacité du preconditionneur B pour l'accélération de la convergence. Ainsi on constate que le solveur BICGSTAB convergen en un minimum nombre d'itérations en utilisant le preconditionneur B . Les courbes de convergence relatives à "HONEM-1" sont données dans FIG (1.12).

	<i>BICG</i>	<i>BICGSTAB</i>	<i>QMR</i>
Sans preconditionnement (COND = 8.73E+05)			
ITER	2382	4173	1742
Avec preconditionneur ILU (COND = 7.72E+03)			
ITER	84	50	84
Avec preconditionneur par bloc (COND = 7.29E+01)			
ITER	3	2	3

TAB. 1.10 – Comparaison entre différentes méthodes itératives avec et sans preconditionnements pour la méthode "HONEM-1", appliquée au problème P1 dans un maillage 25×25

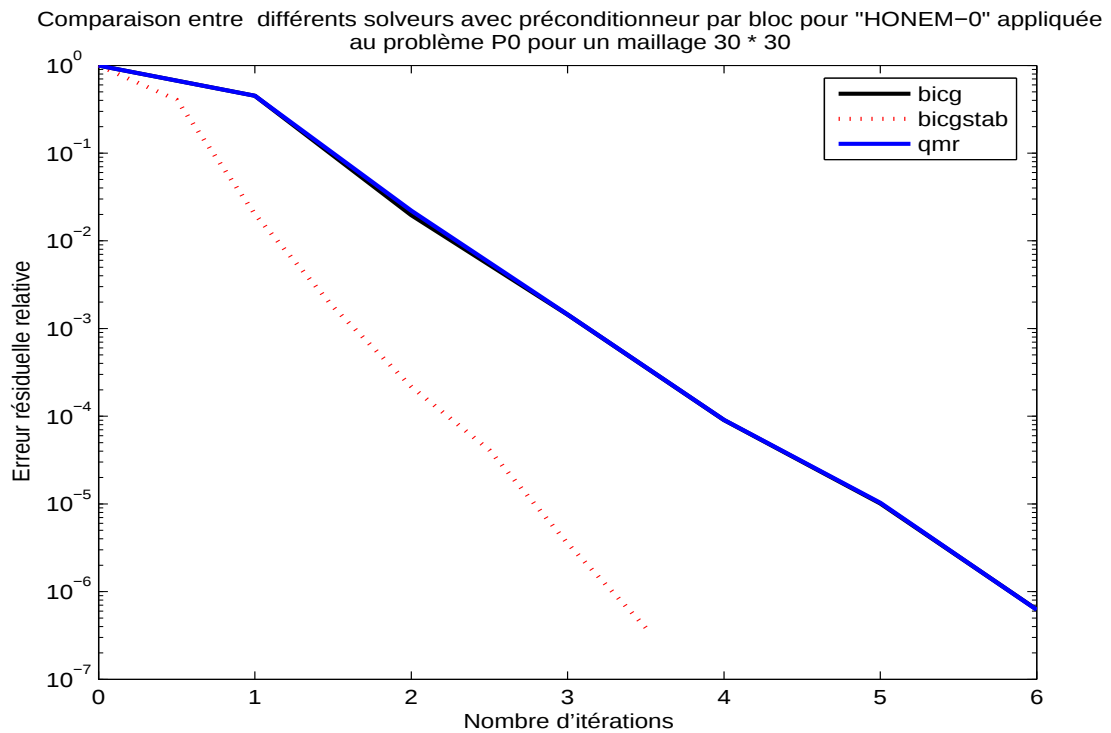
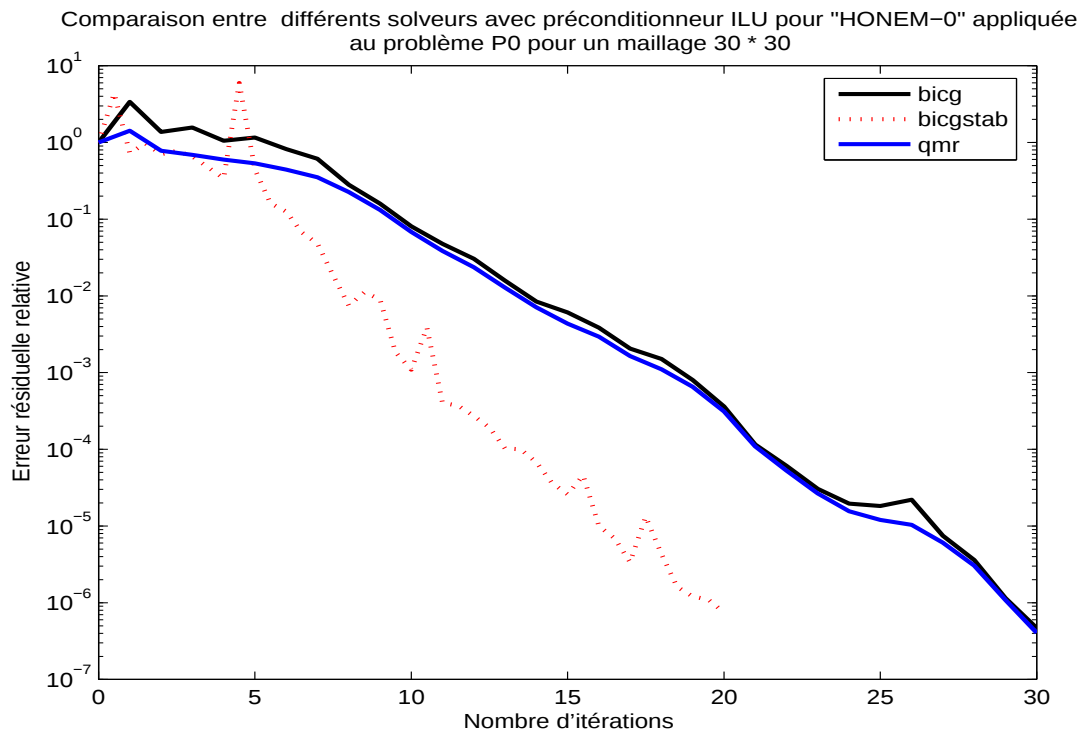


FIG. 1.9 – Courbes de convergence pour "HONEM-0" appliquée à P0.

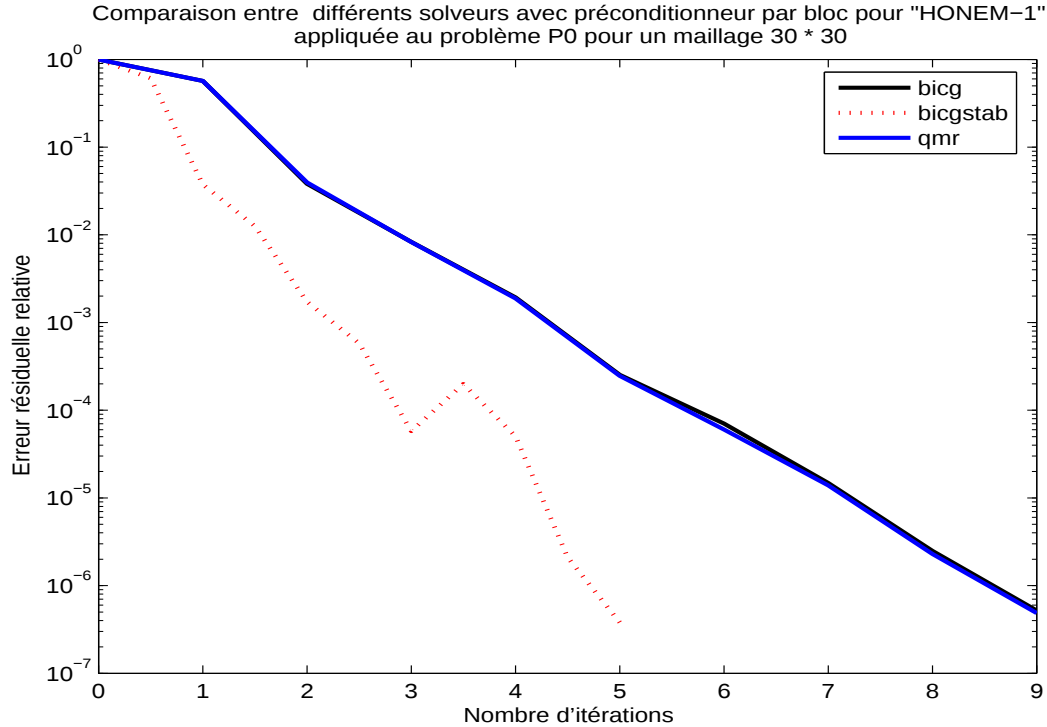
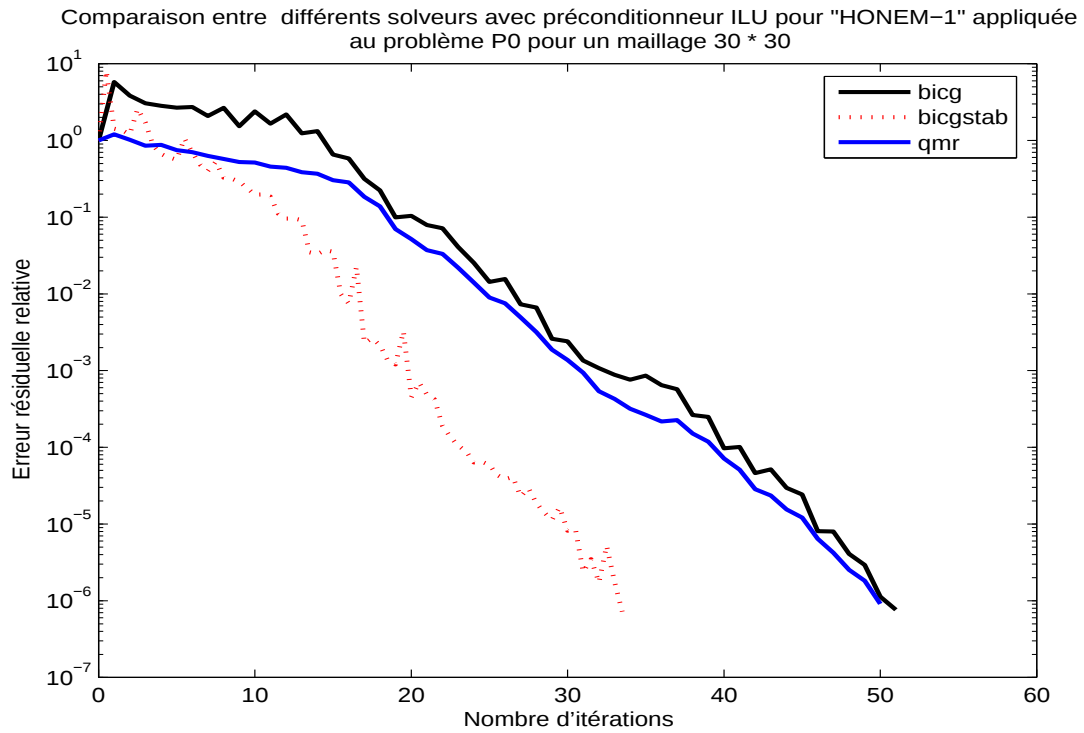


FIG. 1.10 – Courbes de convergence pour "HONEM-1" appliquée à P0.

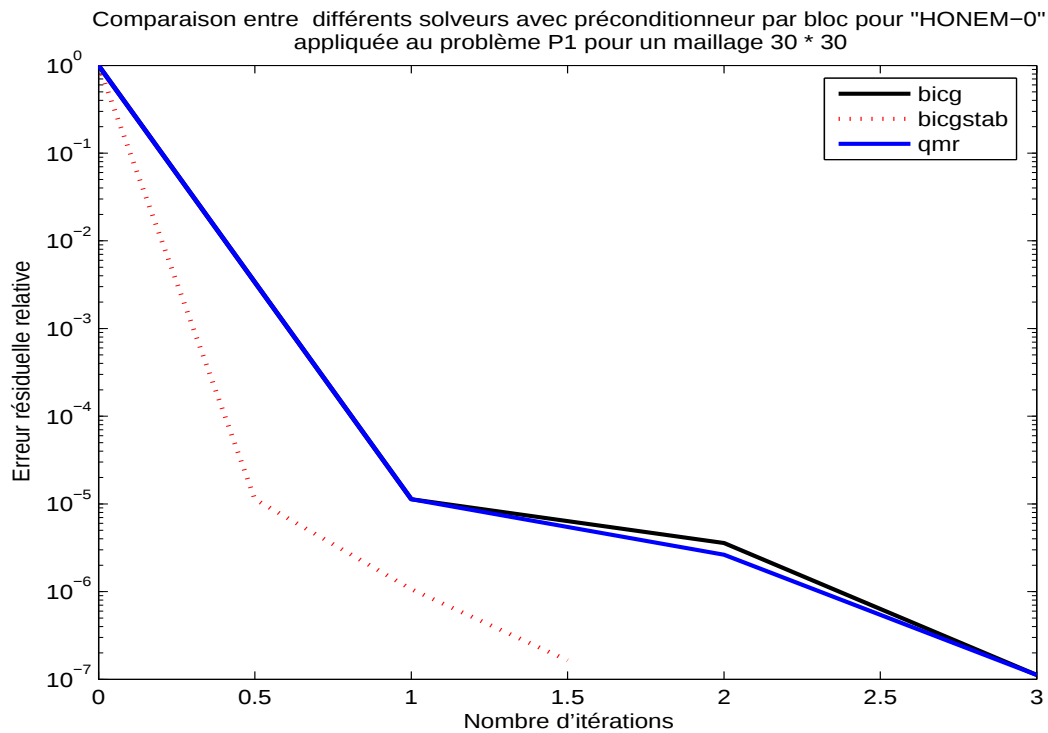
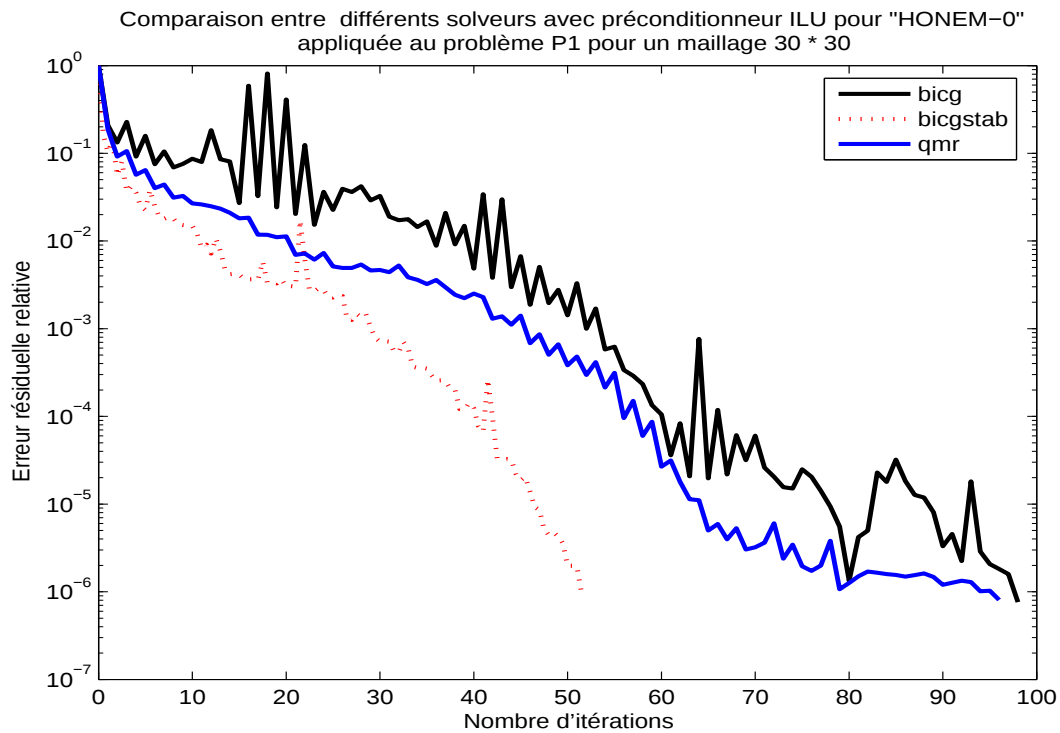


FIG. 1.11 – Courbes de convergence pour "HONEM-0" appliquée à P1.

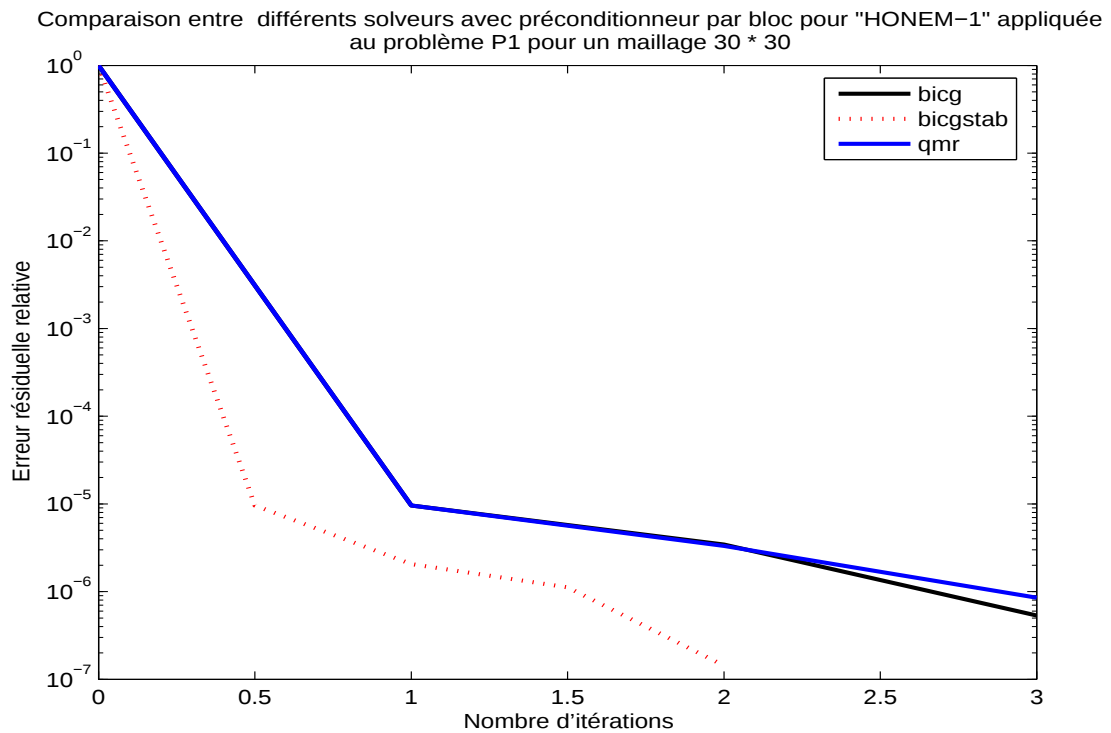
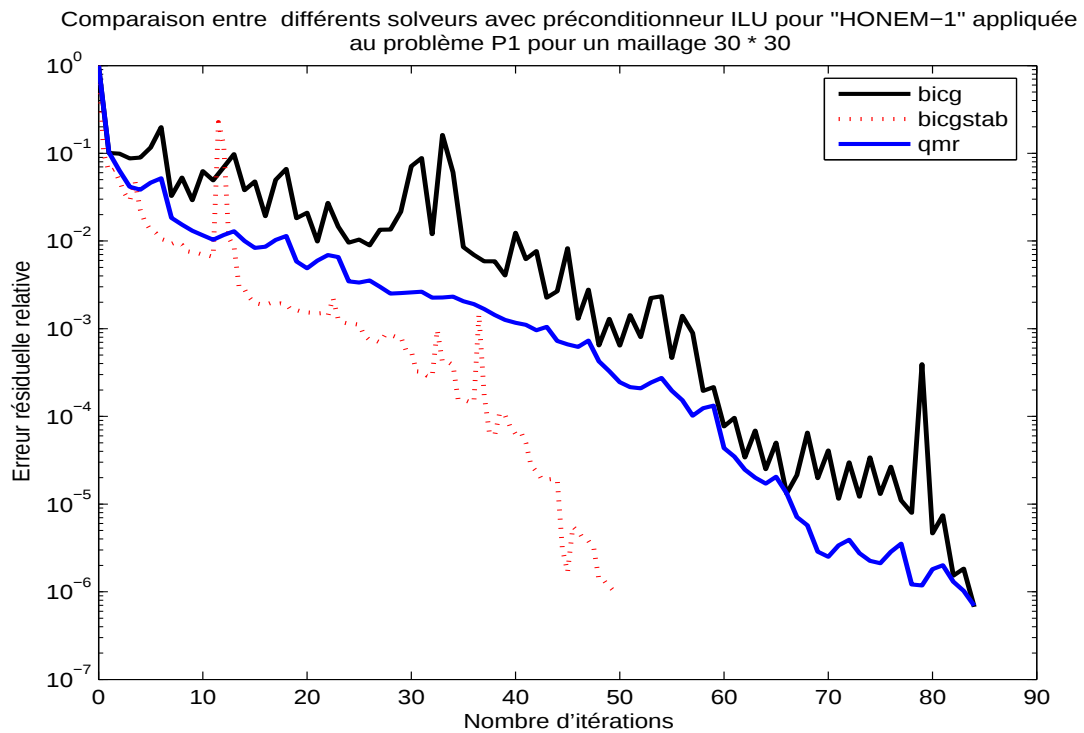


FIG. 1.12 – Courbes de convergence pour "HONEM-1" appliquée à P1.

Chapitre 2

Méthode nodale intégrale d'ordre élevé appliquée à un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible

2.1 Introduction

Après avoir appliqué dans le premier chapitre une méthode nodale d'ordre élevé à une équation elliptique linéaire, nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution des équations de Naviers-Stokes qui régissent la dynamique des fluides incompressibles (i.e. à masse volumique constante) en état stationnaire.

Rappelons qu'en mécanique des fluides, on distingue généralement les écoulements irrotationnels, les écoulements de fluides compressibles et enfin les écoulements de fluides incompressibles. Si les deux premiers concernent principalement les aérodynamiciens, on retrouve le troisième dans pratiquement tous les domaines allant des processus industriels aux phénomènes naturels pour lesquels la condition d'incompressibilité est une hypothèse suffisante. Tous les fluides étant, en effet, plus ou moins compressibles, la condition d'incompressibilité revient à considérer comme négligeables les influences de la pression et de la température (ou de la concentration) sur la masse volumique. La cavitation et les changements de phase liquide-vapeur sont deux exemples pour lesquels on ne peut faire l'hypothèse d'incompressibilité. D'autre part, un gaz peut être considéré comme incompressible si le nombre de Mach est faible ($U/c < 0,2$) et si la variation de température l'est aussi. Les petites variations de densité qui sont à l'origine des mouvements de convection naturelle sont prises en compte quant à elles (grâce à l'hypothèse de Boussinesq) par un terme source dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. On ne s'intéressera ici qu'à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles où l'on se trouve confronté à de nombreuses

difficultés intrinsèques parmi lesquelles on notera le traitement numérique des termes convectifs et du couplage pression-vitesse. Pour rendre ce problème (généralement assez difficile à résoudre) plus abordable, nous nous plaçons dans le cadre simplifié des équations bidimensionnelles (2D).

Les méthodes généralement utilisées sont les différences finies [80], les éléments finis [44, 91, 92], et les volumes finis [33, 34, 37, 40] que l'on ne traitera pas.

Les méthodes nodales du premier ordre, qui ont été initiées pour les équations de Naviers-Stokes incompressibles en régime stationnaire par Azmy et Dorning [12, 13], ont connu un progrès considérable par leurs applications en mécanique des fluides, citant à titre d'exemples les travaux [4, 6, 38, 62, 74, 75, 76, 85, 98, 100, 101].

Comparer à ce qui a été fait dans le premier chapitre, nous nous proposons de donner une formulation générale de la méthode nodale intégrale d'ordre élevé, appliquée à un écoulement stationnaire incompressible, une formulation qui généralisera la méthode nodale intégrale d'indice 0 donné par Azmy et Dorning [12, 13]. Notre souci dans ce développement est d'une part, de préserver les caractéristiques générales de la méthode nodale intégrale, à savoir, l'équation de bilan, l'unicité des valeurs nodales transverses et la continuité des valeurs moyennes transverses ainsi que certains de leurs dérivées à travers les interfaces du maillage et d'autre part, d'obtenir à la fin un système non-linéaire bien défini en termes d'inconnues principales.

Parmi les difficultés rencontrées dans cette formulation, c'est l'approximation du terme non-linéaire (de convection), que nous avons développé en série de Legendre sur chaque interface du maillage. A la fin de ce chapitre nous proposerons deux tests numériques pour la méthode nodale intégrale d'ordre 0. Le premier test est celui d'un écoulement en poiseuille, qui a été étudié aussi dans le travail de Azmy et Dorning [12, 13], nous retrouvons les mêmes résultats numériques. Le profil de la vitesse sera illustré. Au second test nous traiterons un écoulement en cavité entraîné [89]. Vu que ce problème possède une solution analytique, et dans l'absence d'une étude théorique de l'erreur de cette méthode, les ordres de convergence de vitesse et de pression seront calculés numériquement [6].

2.2 Formulation de la méthode nodale integrale

L'écoulement 2D (dans le plan (x,y)) d'un fluide de masse volumique ρ constante est complètement décrit par son champ vectoriel de vitesse $V = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$, et son champ scalaire de pression $p(x,y) \in \mathbb{R}$.

Ces grandeurs seront déterminées à partir des lois de conservation suivantes :

– La conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

– La conservation de la quantité de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = {}_x f. \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} = {}_y f. \quad (2.3)$$

Où ν désigne la vitesse cinématique du fluide, $p(x, y)$ la pression divisée par densité ρ , et $f = ({}_x f(x, y), {}_y f(x, y))$ les forces extérieures par unité de masse.

Dans la suite de ce chapitre nous serons amenés à utiliser le tenseur normal des contraintes $T(x, y) = ({}_x T(x, y), {}_y T(x, y))$ défini par :

$${}_x T(x, y) = \nu \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - p(x, y). \quad (2.4)$$

$${}_y T(x, y) = \nu \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) - p(x, y). \quad (2.5)$$

Nous subdivisons le domaine Ω en des rectangles : $\bar{\Omega} = \bigcup_{i,j}^{N_x, N_y} \bar{\Omega}_{i,j}$ que nous appelons aussi noeuds, où $\Omega_{i,j} = [-a_{i,j}, +a_{i,j}] \times [-b_{i,j}, +b_{i,j}]$.

Pour plus de lisibilité dans les équations nous omettons pour l'instant l'écriture de l'indice (i, j) relative aux noeuds du maillage.

Placons nous dans un noeud $K = [-a, a] \times [-b, b]$. Les polynômes de Legendre q_i , $i \in \mathbb{N}$ de degré i définis par exemple sur l'intervalle $[-a, +a]$ sont normalisés par la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-a}^{+a} q_i(x) q_j(x) = N_i^a \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker et $N_i^a = \frac{2a}{2i+1}$.

En multipliant les équations (2.1)-(2.3) par $\frac{q_j(y)}{N_j^b}$ $j \in \{0, \dots, M\}$ (M désigne l'ordre de la méthode) et en intégrant entre $-b$ et $+b$ dans la direction y , nous obtenons le système des équations transverses pondérées suivant la direction x :

$$\frac{d\bar{u}_y^j}{dx}(x) = \bar{S}_{1y}^j(x). \quad (2.6)$$

$$\frac{d_x \bar{T}_y^j}{dx}(x) = \bar{S}_{2y}^j(x). \quad (2.7)$$

$$\nu \frac{d^2 \bar{v}_j^y}{dx^2}(x) = \bar{S}_{3y}^j(x). \quad (2.8)$$

Le système des équations transverses pondérées suivant la direction y est obtenu en multipliant les équations (2.1)-(2.3) par $\frac{q_i(x)}{N_i^a}$, $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ et en intégrant entre $-a$ et $+a$ dans la direction x :

$$\frac{d\bar{v}_x^i}{dy}(y) = \bar{S}_{1x}^i(y). \quad (2.9)$$

$$\nu \frac{d^2 \bar{u}_x^i}{dy^2}(y) = \bar{S}_{2x}^i(y). \quad (2.10)$$

$$\frac{d_y \bar{T}_x^i}{dy}(y) = \bar{S}_{3x}^i(y). \quad (2.11)$$

Rappelons les expressions des moments nodales et faciales d'une fonction g définie sur un noeud $K = [-a, a] \times [-b, b]$ du maillage :

$$\bar{g}_t^j(r) = \frac{1}{N_j^S} \int_{-S}^{+S} q_j(t) g(t, r) dt.$$

$$\bar{g}_{t,r}^{j,i} = \frac{1}{N_i^R} \int_{-R}^{+R} q_i(r) \bar{g}_t^j(r) dr.$$

La fonction g désigne une des composantes de la vitesse (u, v) , la pression p ou les composantes du tenseur normal des contraintes :

$$g \equiv u, v, {}_xT, {}_yT, p \text{ et } t \equiv x, y; r \equiv y, x; x \in [-a, a], y \in [-b, b].$$

Ce processus d'intégration transverse engendre des nouvelles inconnues :

$$\bar{S}_{1y}^j(x), \bar{S}_{2y}^j(x), \bar{S}_{3y}^j(x), \bar{S}_{1x}^j(y), \bar{S}_{2x}^j(y), \bar{S}_{3x}^j(y)$$

appelés pseudo-sources et qui se composent d'une part des valeurs moyennes pondérées des forces extérieures et d'autre part des termes des variables dépendantes ($u, v, {}_xT$ et ${}_yT$) :

Ces termes s'écrivent :

$$\overline{S}_{1y}^j(x) = -\frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y) \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.12)$$

$$\overline{S}_{2y}^j(x) = \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y) \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial u^2}{\partial y^2} \right] dy - \overline{f}_y^j(x). \quad (2.13)$$

$$\overline{S}_{3y}^j(x) = \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y) \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial v^2}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} dy - \overline{f}_y^j(x). \quad (2.14)$$

$$\overline{S}_{1x}^j(y) = -\frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.15)$$

$$\overline{S}_{2x}^i(y) = \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x) \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} dx - \overline{f}_x^i(y). \quad (2.16)$$

$$\overline{S}_{3x}^i(y) = \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x) \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial v^2}{\partial x^2} \right] dx - \overline{f}_x^i(y). \quad (2.17)$$

Précisons que les variables principales sont :

$$S = \{ \overline{u}_y^j(\pm a), \overline{v}_y^j(\pm a), \overline{{}_xT}_y^j(\pm a), \overline{u}_x^i(\pm b), \overline{v}_x^i(\pm b), \\ \overline{{}_yT}_x^i(\pm b), \overline{u}_{y,x}^{j,i}, \overline{v}_{y,x}^{j,i}, \overline{{}_xT}_{y,x}^{j,i}, \overline{{}_yT}_{x,y}^{i,j}, i, j = 0, 1, \dots, M \}$$

Remarque 2.1

Nous avons utilisé le tenseur normal des contraintes au lieu de la pression pour découpler le système des équations transverses en termes des inconnues principales.

Par la suite nous procéderons à la résolution analytique des équations transverses. Ainsi Considérons les équations différentielles du premier ordre (2.6) et (2.7) , nous intégrons de $x_0 \in [-a, +a]$ à $+a$, pour obtenir :

$$\overline{u}_y^j(x_0) = \overline{u}_y^j(a) - \int_{x_0}^a \overline{S}_{1y}^j(x) dx. \quad (2.18)$$

$$\overline{xT}_y^j(x_0) = \overline{xT}_y^j(a) - \int_{x_0}^a \overline{S}_{2y}^j(x) dx. \quad (2.19)$$

Pour l'équation du second ordre (2.8), nous intégrons deux fois de $-a$ à x_0 , puis deux fois de x_0 à $+a$ pour aboutir aux formules suivantes :

$$\nu \overline{v}_y^j(x_0) = \nu \overline{v}_y^j(-a) + \nu(x_0 + a) \frac{d\overline{v}_y^j}{dx} \Big|_{-a} + \int_{-a}^{x_0} dx \int_{-a}^x \overline{S}_{3y}^j(x') dx'. \quad (2.20)$$

$$\nu \overline{v}_y^j(x_0) = \nu \overline{v}_y^j(+a) - \nu(a - x_0) \frac{d\overline{v}_y^j}{dx} \Big|_{+a} + \int_{x_0}^{+a} dx \int_x^{+a} \overline{S}_{3y}^j(x') dx'. \quad (2.21)$$

De façon similaire en intégrant les équations (2.9)-(2.11) nous obtenons les relations suivantes pour les équations transverses en y :

$$\overline{v}_x^i(y_0) = \overline{v}_x^i(+b) - \int_{y_0}^b \overline{S}_{1x}^j(y) dy \quad (2.22)$$

$$\overline{yT}_x^i(y_0) = \overline{yT}_x^i(+b) - \int_{y_0}^b \overline{S}_{2x}^i(y) dy \quad (2.23)$$

$$\nu \overline{u}_x^i(y_0) = \nu \overline{u}_x^i(-b) + \nu(y_0 + b) \frac{d\overline{u}_x^i}{dy} \Big|_{-b} + \int_{-b}^{y_0} dy \int_{-b}^y \overline{S}_{2x}^i(y') dy' \quad (2.24)$$

$$\nu \overline{u}_x^i = \nu \overline{u}_x^i(+b) - \nu(b - y_0) \frac{d\overline{u}_x^i}{dy} \Big|_{+b} + \int_{y_0}^{+b} dy \int_y^{+b} \overline{S}_{2x}^i(y') dy' \quad (2.25)$$

Nous supposons pour le moment que les pseudo-sources sont connus. Afin de construire le système discret de la méthode nodale intégrale d'ordre M (HONIM- M), on procède comme suit :

Plaçons-nous dans un noeud $[-a_{l,k}, +a_{l,k}] \times [-b_{l,k}, b_{l,k}]$. On multiplie les équations (2.6) et (2.7) par $\frac{q_i(x)}{N_i^a}$ $i \in \{0, 1, \dots, M\}$, ensuite nous intégrons entre $-a$ et $+a$ pour obtenir le système :

$$-\frac{1}{N_i^{a_{l,k}}} \sum_{t=0}^{i-1} d_{ti} \bar{u}_{y,x}^{j,t} + \frac{1}{N_i^{a_{l,k}}} [\bar{u}_y^j(+a_{l,k}) - (-1)^i \bar{u}_y^j(-a_{l,k})] = \bar{S}_{1y,x}^{j,i} \quad (2.26)$$

$$-\frac{1}{N_i^{a_{l,k}}} \sum_{t=0}^{i-1} d_{ti} \bar{T}_{y,x}^{j,t} + \frac{1}{N_i^{a_{l,k}}} [\bar{T}_y^j(+a_{l,k}) - (-1)^i \bar{T}_y^j(-a_{l,k})] = \bar{S}_{2y,x}^{j,i} \quad (2.27)$$

Remarquons la présence des termes de la première dérivée de vitesse dans les équations (2.20) et (2.21). Ces termes qui seront utiles à formuler les conditions au bord de type Neumann, sont aussi d'une grande utilité dans la formulation du système discret. Ils apparaissent dans les équations (2.20) et (2.21) de façon naturelle après le processus d'intégration transverse.

Par rapport à ce que nous avons déjà vu dans le premier chapitre, une condition de continuité de la première dérivée de la variable étudiée (par exemple le flux des neutrons) a été imposée à travers les interfaces du maillage. Dans cet esprit nous imposons la continuité de $\frac{d\bar{v}_y^j}{dx}$ à travers les interfaces verticales, et de $\frac{d\bar{u}_x^i}{dy}$ à travers les interfaces horizontales du maillage. Considérons donc deux noeuds adjacents $\Omega_{l,k}$ et $\Omega_{l+1,k}$. Cette condition de continuité de la dérivée de $\bar{v}_y^j$ à travers la face commune de $\Omega_{l,k}$ et $\Omega_{l+1,k}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\left. \frac{d\bar{v}_y^j}{dx} \right|_{x=+a_{l,k}} = \left. \frac{d\bar{v}_y^j}{dx} \right|_{x=-a_{l+1,k}} \quad j = 0, \dots, M. \quad (2.28)$$

Ainsi pour éliminer la présence des termes dérivés dans les équations (2.20) et (2.21), faisons tendre x_0 vers $+a$ dans (2.20) et vers $-a$ dans (2.21), puis utilisons la condition (2.28), cela donne finalement :

$$\begin{aligned} & \nu \left\{ \frac{\bar{v}_y^j(a_{l+1,k})}{a_{l+1,k}} - \bar{v}_y^j(a_{l,k}) \left[\frac{1}{a_{l+1,k}} + \frac{1}{a_{l+1,k}} \right] + \frac{\bar{v}_y^j(-a_{l,k})}{a_{l,k}} \right\} \\ &= \frac{1}{a_{l+1,k}} \int_{-a_{l+1,k}}^{+a_{l+1,k}} dx \int_{-a_{l+1,k}}^x \bar{S}_{3y}^j(x') dx' + \frac{1}{a_{l,k}} \int_{-a_{l,k}}^{+a_{l,k}} dx \int_x^{+a_{l,k}} \bar{S}_{3y}^j(x') dx'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

De façon similaire dans l'autre direction, en multipliant les équations (2.9) et (2.11) par $\frac{q_j(y)}{N_j^b}$ $i \in \{0, \dots, M\}$ et en intégrant de $-b$ à $+b$ nous obtenons :

$$-\frac{1}{N_j^{b_{l,k}}} \sum_{t=0}^{j-1} d_{tj} \bar{v}_{x,y}^{i,t} + \frac{1}{N_j^{b_{l,k}}} [\bar{v}_x^i(+b_{l,k}) - (-1)^j \bar{v}_x^i(-b_{l,k})] = \bar{S}_{1x,y}^{i,j} \quad (2.30)$$

$$-\frac{1}{N_j^{b_{l,k}}} \sum_{t=0}^{j-1} d_{tj} \bar{T}_{x,y}^{i,t} + \frac{1}{N_j^{b_{l,k}}} \left[\bar{T}_x^i(+b_{l,k}) - (-1)^j \bar{T}_x^i(-b_{l,k}) \right] = \bar{S}_{3y,x}^{j,i}. \quad (2.31)$$

Dans l'autre direction la continuité de $\bar{u}_x^i(y)$ à travers les interfaces horizontales sera imposée pour éliminer les termes dérivés figurant dans les équations (2.24) et (2.25). Pour cela considérons deux noeuds adjacents $\Omega_{l,k}$ et $\Omega_{l,k+1}$ sur une bonde verticale. La condition de continuité de la valeur moyenne pondérée de u à travers la face commune de $\Omega_{l,k}$ et $\Omega_{l,k+1}$ s'écrit :

$$\left. \frac{d\bar{u}_x^i}{dx} \right|_{y=+b_{l,k}} = \left. \frac{d\bar{u}_x^i}{dx} \right|_{y=-b_{l,k+1}} \quad i = 0, \dots, M \quad (2.32)$$

En faisons tendre y_0 vers $+b_{l,k}$ dans (2.24) et vers $-b_{l,k+1}$ dans (2.25) puis en utilisant la continuité (2.32), on abouti à :

$$\begin{aligned} & \nu \left\{ \frac{\bar{u}_x^i(b_{l,k+1})}{b_{l,k+1}} - \bar{u}_x^i(b_{l,k}) \left[\frac{1}{b_{l,k+1}} + \frac{1}{b_{l,k}} \right] + \frac{\bar{u}_x^i(-b_{l,k})}{b_{l,k}} \right\} \\ &= \frac{1}{b_{l,k+1}} \int_{-b_{l,k+1}}^{+b_{l,k+1}} dy \int_{-b_{l,k+1}}^y \bar{S}_{2x}^j(y') dy' + \frac{1}{b_{l,k}} \int_{-b_{l,k}}^{+b_{l,k}} dy \int_y^{+b_{l,k}} \bar{S}_{2x}^i(y') dy', \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\bar{S}_{ty,x}^{j,i}$ et $\bar{S}_{tx,y}^{i,j}$, $t = 1, 2, 3$ désignent les valeurs moyennes transverses d'indice i et j respectivement des pseudo-sources $\bar{S}_{ty}^j(x)$ et $\bar{S}_{tx}^i(y)$, $t = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{hy,x}^{j,i} &= \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x) \bar{S}_{hy}^j(x) dx \\ \bar{S}_{hx,y}^{i,j} &= \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(x) \bar{S}_{hx}^i(y) dy, \quad h = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Les coefficients d_{ti} figurant dans l'équation, ne sont rien d'autre que les coefficients du développement de $\frac{dq_i}{dx}(x)$ en série de polynômes de Legendre.

Remarques 2.1 .

- *Implicitement nous avons utilisé la continuité des valeurs moyennes transverses suivantes $\bar{u}_y^j, \bar{v}_y^j, \bar{T}_y^j, \bar{u}_x^i, \bar{v}_x^i$ et $\bar{T}_x^i$ à travers les interfaces du maillage.*
- *Jusqu'à cette étape, nous n'avons utilisé aucune approximation, et toutes les équations obtenues sont exactes.*

Afin de compléter les équations discrètes (2.26)-(2.33), une approximation des valeurs moyennes des pseudo-sources sur chaque noeud est nécessaire. Ces termes qui se composent d'une part des forces extérieures et d'autre part des termes d'inconnus principaux (vitesse et tenseur normal des contraintes). Le calcul de ces variables auxiliaires "pseudo-sources" en faveur des variables principales, ne sera accessible que si on impose les deux conditions supplémentaires :

- L'unicité des valeurs moyennes nodales de toutes les variables sur chaque noeud.
- Les équations du bilan pondérées relatives à la conservation de masse et de la quantité de mouvement.

Ces deux conditions qui seront illustrées et détaillées pour chaque variable dans la section suivante, ne servent pas seulement à calculer les pseudo-sources, mais elles garantissent aussi la stabilité du schéma numérique.

2.3 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées

La nécessité de cette contrainte provient du fait que les valeurs moyennes nodales sont les quantités les plus importantes à calculer, vue que parfois dans le domaine de l'ingénierie on s'intéresse à des comportements en valeurs moyennes sur chaque bloc du maillage. Par conséquent ces valeurs doivent être uniques et indépendante du choix de l'intégration (cela revient à dire que l'intégral double est commutatif).

$$\bar{g}_{x,y}^{i,j} = \bar{g}_{y,x}^{j,i}. \text{ Où } g = u, v, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

2.3.1 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées des composantes de la vitesse

Les valeurs moyennes nodales de la vitesse (u, v) peuvent être calculées à partir des équations transverses (2.18) et (2.20) ou aussi à partir de (2.22) et (2.24).

En éliminant la dérivée de la vitesse dans (2.20) et (2.24), par passage à la limite de x_0 vers $+a$ et de y_0 vers $+b$ et en appliquant les conditions d'unicité $\bar{u}_{y,x}^{j,i} = \bar{u}_{x,y}^{i,j}$ et $\bar{v}_{y,x}^{j,i} = \bar{v}_{x,y}^{i,j}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, M$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \delta_{i,0} \bar{u}_y^j(+a) - \delta_{j,0} \bar{u}_x^i(-b) - \frac{\delta_{j1} + \delta_{j0}}{2} [\bar{u}_x^i(+b) - \bar{u}_x^i(-b)] \\
&= \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x_0) dx_0 \int_{x_0}^{+a} \bar{S}_{1y}^j(x) dx - \frac{\delta_{j1} + \delta_{j0}}{2\nu} \int_{-b}^{+b} dy \int_{-b}^y \bar{S}_{2x}^i(y') dy' \\
& \quad + \frac{1}{\nu N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y_0) dy_0 \int_{-b}^{y_0} dy \int_{-b}^y \bar{S}_{2x}^i(y') dy'
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{j,0} \bar{v}_x^i(+b) - \delta_{i,0} \bar{v}_y^j(-a) - \frac{\delta_{i1} + \delta_{i0}}{2} [\bar{v}_y^j(+a) - \bar{v}_y^j(-a)] \\
&= \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y_0) dy_0 \int_{y_0}^{+b} \bar{S}_{1x}^i(y) dy \\
& \quad - \frac{\delta_{i1} + \delta_{i0}}{2\nu} \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^x \bar{S}_{3y}^i(x') dx' \\
& \quad + \frac{1}{\nu N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x_0) dx_0 \int_{-a}^{x_0} dx \int_{-a}^x \bar{S}_{3y}^j(x') dx'
\end{aligned} \tag{2.35}$$

2.3.2 Unicité des valeurs moyennes nodales pondérées de la pression

Comme nous l'avons déjà signalé, nous avons utilisé le tenseur normal des contraintes à la place de la pression afin de découpler le system des équations transverses par rapport aux inconnues principales, dans le but de les résoudre analytiquement. Toutefois nous pouvons récupérer le terme pression et ses valeurs moyennes transverses et nodales grâce aux expressions (2.4) et (2.5). En intégrant ces deux dernières équations, on récupère aussi les valeurs moyennes transverses et nodales à travers les formules suivantes :

$$\bar{p}_y^j(x) = \nu \frac{d\bar{u}_y^j}{dx}(x) - x T_y^j(x) \tag{2.36}$$

$$\bar{p}_x^i(y) = \nu \frac{d\bar{v}_x^i}{dy}(y) - y T_x^i(y) \tag{2.37}$$

$$\bar{p}_{y,x}^{j,i} = \nu \bar{S}_{1y,x}^{j,i} - x T_{y,x}^{j,i} \tag{2.38}$$

$$\bar{p}_{x,y}^{i,j} = \nu \bar{S}_{1x,y}^{i,j} - y T_{x,y}^{i,j} \tag{2.39}$$

En utilisant ces dernières équations avec la contrainte $\bar{p}_{y,x}^{j,i} = \bar{p}_{x,y}^{i,j}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \bar{S}_{1y,x}^{j,i} - \bar{T}_y^j(a) + \frac{1}{N_i^a} \int_{-a}^{+a} q_i(x_0) dx_0 \int_{x_0}^{+a} \bar{S}_{2y}^j(x) dx \\
&= \bar{S}_{1x,y}^{i,j} - \bar{T}_x^i(b) + \frac{1}{N_j^b} \int_{-b}^{+b} q_j(y_0) dy_0 \int_{y_0}^{+b} \bar{S}_{3x}^i(y) dy
\end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4 Equations du bilan pondérées

Cette condition que nous avons utilisée au premier chapitre sera présente pour les équations de Navier-Stokes. Elle garantit la conservation de la masse et de la quantité de mouvement du fluide sur chaque noeud, ceci en reliant les valeurs moyennes faciales et nodales aux termes sources.

Nous obtenons cette condition en intégrant sur chaque noeud, les equations (2.1)-(2.3) avec poids $\frac{p_{i,j}(x,y)}{N_i^a N_j^b}$, pour obtenir :

$$\overline{S}_{1y,x}^{j,i} + \overline{S}_{1x,y}^{i,j} = 0. \quad (2.41)$$

$$\overline{S}_{2y,x}^{j,i} + \overline{S}_{2x,y}^{i,j} = \frac{1}{N_i^a N_j^b} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q_i(x) q_j(y) \left[-f_x + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy. \quad (2.42)$$

$$\overline{S}_{3y,x}^{j,i} + \overline{S}_{3x,y}^{i,j} = \frac{1}{N_i^a N_j^b} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q_i(x) q_j(y) \left[-f_y + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy. \quad (2.43)$$

2.5 Approximation des équations nodales

Pour une méthode nodale intégrale d'ordre M , les pseudo-sources sont développés en série de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre M :

$$\overline{S}_{ty}^j(x) = \sum_{i=0}^M \overline{S}_{ty,x}^{j,i} q_i(x) \quad t = 1, 2, 3.$$

$$\overline{S}_{tx}^i(y) = \sum_{j=0}^M \overline{S}_{tx,y}^{i,j} q_j(y) \quad t = 1, 2, 3.$$

Les coefficients $\overline{S}_{ty}^j(x)$ et $\overline{S}_{tx}^i(y)$ sont calculés en utilisant les équations, (2.26), (2.27), (2.30), (2.31), (2.34) et (2.35).

Nous remarquons que la non-linéarité des équations de Navier-Stokes est repérée au niveau des équations de bilan de la quantité du mouvement (2.42) et (2.43). Ces termes non-linéaires prennent la forme suivante :

$$E_{ij} := \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q_i(x) q_j(y) \left[u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} \right] dx dy \quad g \equiv u, v$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse (2.1) puis en intégrant par partie nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_{ij} = & - \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} [q'_i(x)q_j(y)ug + q'_j(y)q_i(x)vg] dx dy \\ & + \int_{-b}^{+b} q_j(y) [ug(a, y) - (-1)^i ug(-a, y)] dy \\ & + \int_{-a}^{+a} q_i(x) [vg(x, +b) - (-1)^j vg(x, -b)] dx. \end{aligned}$$

Pour que l'approximation des $E_{i,j}$ tient en compte tous les valeurs moyennes transverses et nodales des variables en question, nous développons chaque variable à l'intérieur de l'intégrale en série de Legendre jusqu'à l'ordre M :

$$g(x, y) = \sum_{i,j=0}^M \bar{g}_{y,x}^{j,i} p_i(x) p_j(y) \quad \forall (x, y) \in [-a, a] \times [-b, b], \quad g = u, v. \quad (2.44)$$

$$g(\mp a, y) = \sum_{j=0}^M \bar{g}_y^j(\mp a) p_j(y) \quad \forall y \in [-b, b], \quad g = u, v. \quad (2.45)$$

$$g(x, \mp b) = \sum_{i=0}^M \bar{g}_x^i(\mp b) p_i(x) \quad \forall x \in [-a, a], \quad g = u, v. \quad (2.46)$$

Remarque 2.1

- Après le calcul des pseudo-sources, on remarque que certaines inconnues principales peuvent être déduites en fonction des autres inconnues à savoir :

$$\left\{ \bar{u}_{y,x}^{j,M}, \bar{x}_{y,x}^{j,M}, \bar{v}_{x,y}^{i,M}, \bar{y}_{x,y}^{i,M}; \quad j \in \{0, 1, \dots, M\} \right\}$$

- Le système discret final est non-linéaire et se compose des équations (2.29), (2.33), (2.40), (2.41), (2.42) et (2.43) pour la discrétisation de l'intérieur du domaine, et d'autres équations pour les conditions au bord. Ces dernières se déduisent de la même façon et dépendent de la nature du problème étudié (écoulement en poiseuille, cavité...)

2.6 Résultats numériques

Dans cette partie nous allons présenter quelques résultats numériques relatifs à la méthode nodale intégrale d'ordre 0, qu'on notera "NS.HONIM-0".

Vue que le système discret final se compose des équations non-linéaires, on utilisera

la méthode de Newton-Raphson pour le résoudre. L'idée de base de cette méthode est de développer le vecteur $\underline{F}(\underline{U})$ du système discret en une série de Taylor en $\underline{U}$ jusqu'à l'ordre 1, où $\underline{U}$ représente le vecteur colonne des inconnues principales. Ce développement au voisinage d'une valeur initiale $\underline{U}^0$ s'écrit :

$$\underline{F}(\underline{U}) = \underline{F}\underline{U}^0 + \underline{J}(\underline{U}^0)\underline{\Delta U} \quad (2.47)$$

où $\underline{\Delta U} = \underline{U} - \underline{U}^0$ et $\underline{J}(\underline{U}^0)$ est la matrice Jacobienne donnée par :

$$\underline{J}(\underline{U}^0) = \frac{\partial F_i}{\partial U_j}.$$

La solution exacte du système discret satisfait :

$$\underline{F}(\underline{U}^*) = 0. \quad (2.48)$$

Ainsi on force l'équation (2.47) à être nulle et on calcule la nouvelle valeur initiale $\underline{U}^1$. L'algorithme de Newton-Raphson s'écrit :

1. Donner $\underline{U}^0$.
2. **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ *until* convergence **do**
3. Évaluer $b = -\underline{F}(\underline{U}^k)$ et $\underline{J} = \underline{J}(\underline{U}^k)$
4. *solve* $\underline{J}s=b$.
5. $\underline{U}^{k+1} = \underline{U}^k + s$
6. **end for**

Les itérations s'arrêtent si les deux critères suivants sont satisfaits :

- $F_i(\underline{U}^k) \leq \epsilon, \quad 1 \leq i \leq I,$
- $\frac{\Delta U_i^k}{U_i^{k-1}} \leq \epsilon, \quad 1 \leq i \leq I,$

où I est la taille de la matrice Jacobienne. On propose deux tests numériques, le premier concerne un écoulement entre deux plaques parallèles avec une vitesse d'entrée $u_0 = 0.01$, pour un nombre de Reynold (Re) égale à 10. Les dimensions et les conditions au bord du problème sont présentés dans FIG (2.1). La simulation de cet exemple constitue une première étape de validation de schéma nodal. Le profil de la vitesse est illustré dans FIG 2.3 pour des mailles 8×8 et 16×16 .

Les valeurs moyennes nodales de la vitesse et de la pression, pour des mailles pour des maillages 4×4 et 6×6 sont listés dans l'annexe [B] et sont identiques à ceux trouvées par Azmy [12].

Par la suite nous proposons d'étudier un écoulement en cavité entraîné (FIG (2.2)) par une vitesse $u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2)$ sur le bord supérieur du domaine $\Omega =$

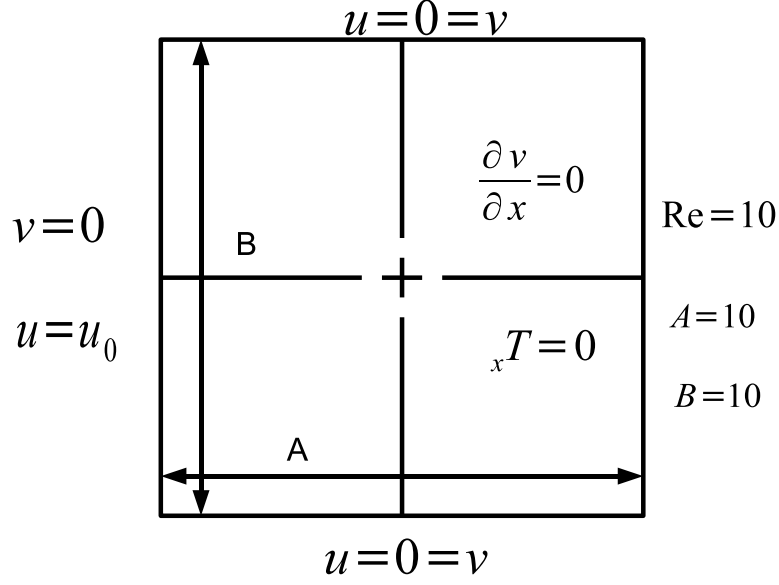


FIG. 2.1 – Dimensions et paramètres de l'écoulement entre deux plaques parallèles.

$[0, 1] \times [0, 1]$. Cet exemple présenté par Shih [89], possède une solution analytique, ce qui permet de calculer les ordres de convergence numériquement.

La définition de l'erreur discrète en norme L^2 , pour les moments centrés est donnée par la formule (1.68). tandis que l'erreur discrète maximale relative est calculée par la formule :

$$\|\varepsilon\|_{\infty, r}^{(0,0)} = \max_{i,n} |\bar{\varepsilon}_{C|i,n}^{0,0}| / \max_{i,n} |\overline{(u_{exa})}_{C|i,n}^{0,0}| \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq n \leq N_y \quad (2.49)$$

	<i>maille</i>	$\ \varepsilon(U)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(V)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(P)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α
NS.HONIM-0	2×2	3.99E-04		6.84E-02		1.66E-00	
	4×4	1.31E-02	-5.04	1.52E-02	2.17	3.75E-01	2.15
	8×8	3.63E-03	1.85	3.57E-03	2.08	1.05E-01	1.83
	16×16	9.32E-04	1.96	8.83E-04	2.01	2.87E-02	1.87
	32×32	2.35E-04	1.98	2.20E-04	2.00	7.46E-03	1.94
	64×64	5.88E-05	1.99	5.50E-05	2.00	1.89E-03	1.98

TAB. 2.1 – Erreurs et ordres de convergence en norme L^2 des moments centrés $(0, 0)$ pour l'écoulement en cavité entraînée avec $Re=10$

A partir des tables (2.1) les ordres de convergence en norme L^2 des moments centrés pour la pression et les composantes de la vitesse sont de 2.

Les ordres de convergence en norme maximale relative sont presque semblables à ceux trouvés en norme L^2 . C'est à dire, 2 pour les composantes de la vitesse et environ 2 pour la pression.

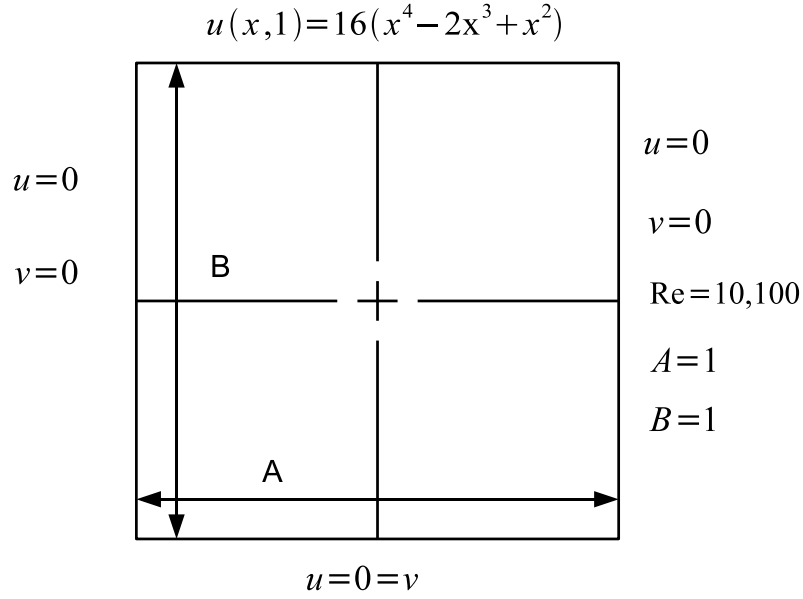


FIG. 2.2 – dimensions et paramètres de l'écoulement en cavité entraînée.

	<i>maille</i>	$\ \varepsilon(U)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(V)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(P)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α
NS.HONIM-0	2×2	4.00E-03		4.63E-01		5.90E-00	
	4×4	5.13E-02	-3.67	1.25E-01	1.88	1.65E-00	1.83
	8×8	1.33E-02	1.94	3.23E-02	1.94	5.60E-01	1.55
	16×16	4.48E-03	1.57	9.96E-03	1.69	1.86E-01	1.58
	32×32	1.16E-03	1.94	2.81E-03	1.82	5.92E-02	1.65
	64×64	3.01E-04	1.95	7.56E-04	1.89	1.70E-02	1.79

TAB. 2.2 – Erreurs et ordres de convergence en norme maximale relative des moments centrés $(0,0)$ pour l'écoulement en cavité entraînée avec $Re=10$

	<i>maille</i>	$\ \varepsilon(U)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(V)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(P)\ _{L^2}^{(0,0)}$	α
NS.HONIM-0	2×2	3.99E-03		6.85E-02		1.67E-01	
	4×4	1.32E-02	-1.73	1.52E-02	2.16	3.97E-02	2.07
	8×8	3.65E-03	1.85	3.60E-03	2.08	1.11E-02	1.82
	16×16	9.38E-04	1.96	8.89E-04	2.01	3.02E-03	1.88
	32×32	2.36E-04	1.98	2.22E-04	2.00	7.82E-04	1.95
	64×64	5.92E-05	1.99	5.54E-05	2.00	1.98E-04	1.98

TAB. 2.3 – Erreurs et ordres de convergence en norme L^2 des moments centrés $(0,0)$ pour l'écoulement en cavité entraîné avec $Re=100$

Les ordres de convergence affichés aux tables (2.3)et (2.4), pour un nombre de Reynold Re égale à 100, sont presque identiques à ceux trouvés pour $Re = 10$.

Une analyse plus détaillée des tables (2.1)-(2.2)-(2.3) et (2.4), révèle des oscillations des composantes de la vitesse et de la pression, pour des mailles 2×2 et 4×4 . Ces oscillations s'annulent à partir des mailles 8×8 .

Le profile de la vitesse pour $Re = 10, 100$ est illustré dans FIG (2.4) et FIG (2.5).

Enfin, notons que l'algorithme de Newton-Raphson utilisé pour la résolution de système discret final, converge en 3 itérations pour le problème de cavité entraînée et en 4 itérations pour le problème de l'écoulement entre deux plaques parallèles pour $\epsilon = 10^{-6}$.

	<i>maille</i>	$\ \varepsilon(U)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(V)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon(P)\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α
NS.HONIM-0	2×2	4.13E-02		4.81E-01		2.86E-00	
	4×4	5.86E-02	-5.02	1.25E-01	1.93	4.85E-01	2.56
	8×8	1.44E-02	2.02	3.26E-02	1.94	1.16E-01	2.05
	16×16	4.68E-03	1.62	9.99E-03	1.70	3.08E-02	1.91
	32×32	1.20E-03	1.95	2.81E-03	1.82	8.92E-03	1.78
	64×64	3.12E-04	1.95	7.56E-04	1.89	2.48E-03	1.84

TAB. 2.4 – Erreurs et ordres de convergence en norme maximale relative des moments centrés $(0, 0)$ pour l'écoulement en cavité entraîné avec $Re=100$

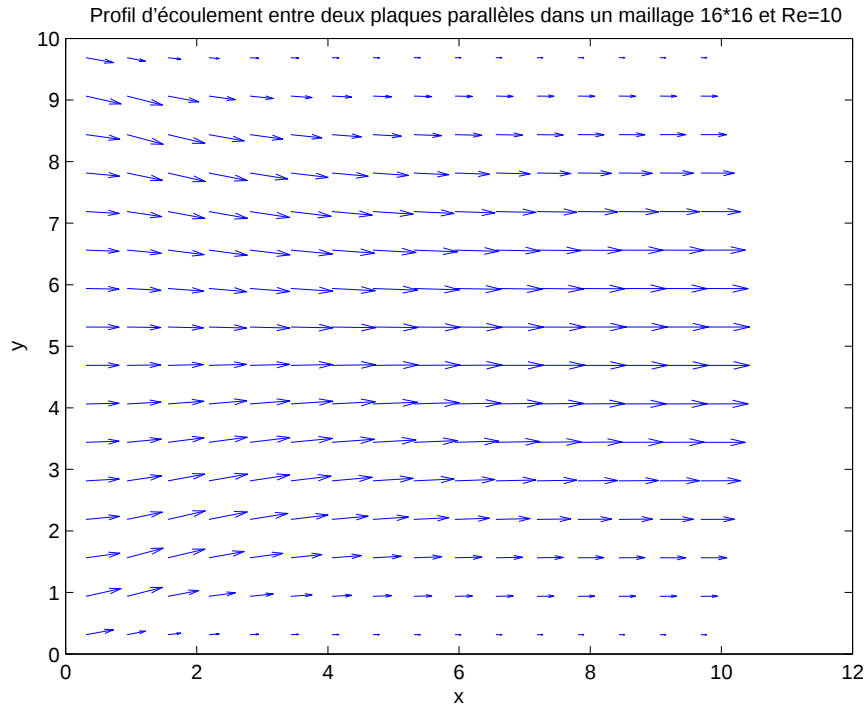
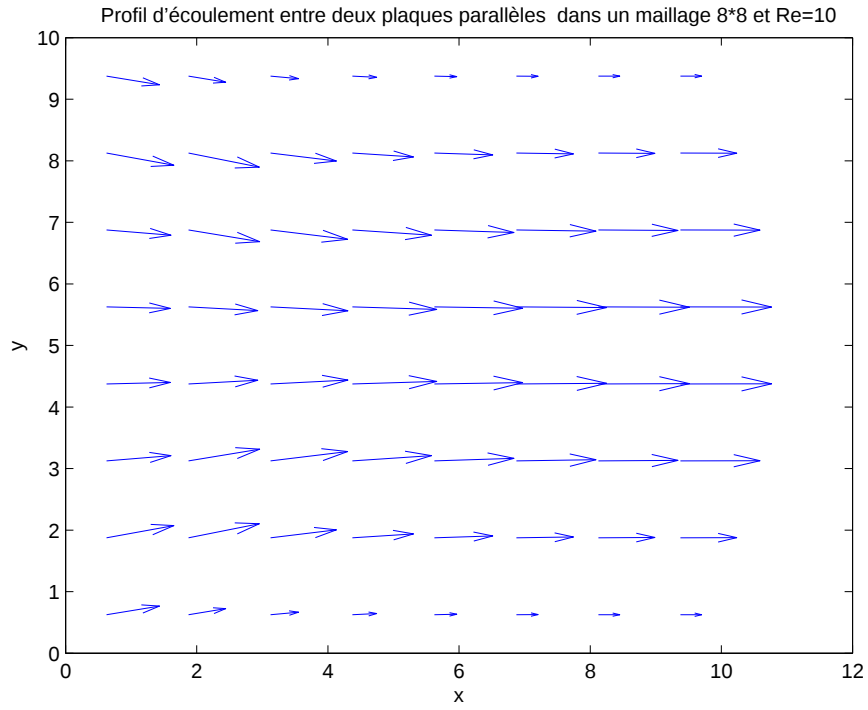


FIG. 2.3 – Profil de la vitesse pour l'écoulement entre deux plaques parallèles pour $Re = 10$ et des maillage 8×8 et 16×16 . .

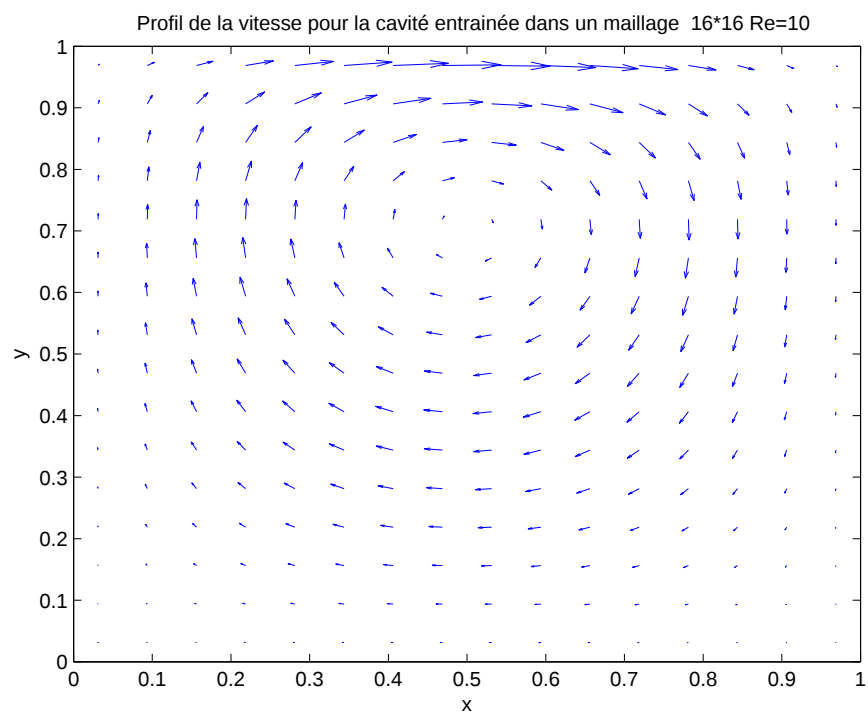
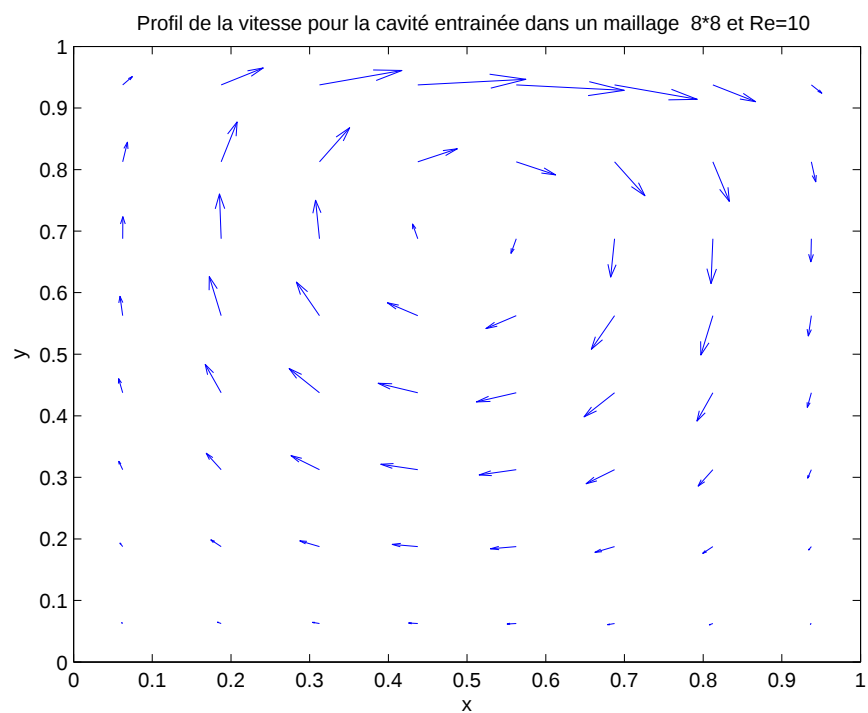


FIG. 2.4 – Profil de la vitesse pour la cavité entraînée pour $Re = 10$ et des mailles 8×8 et 16×16 .

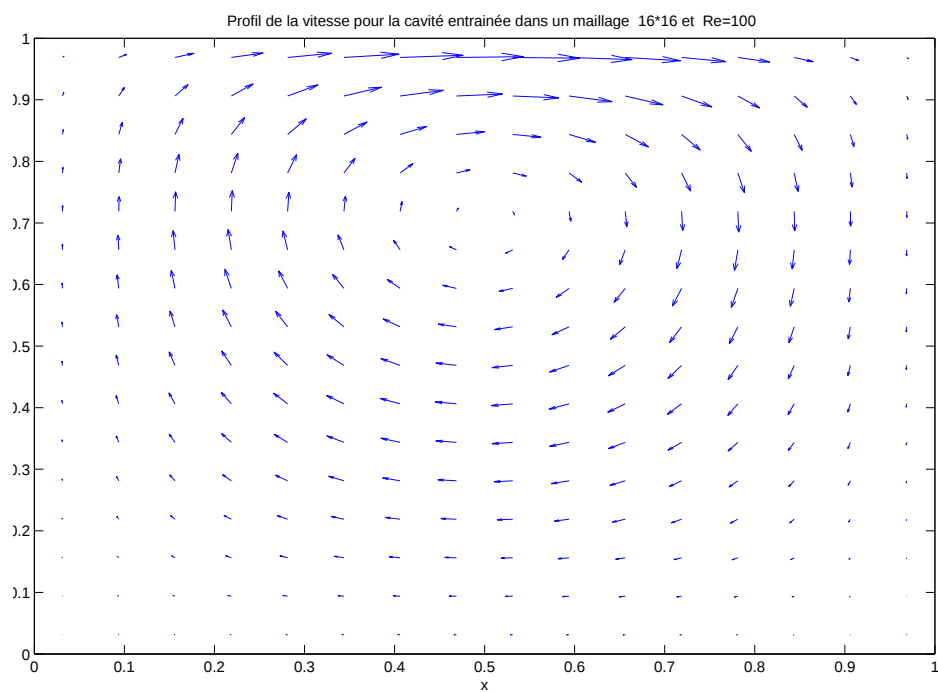
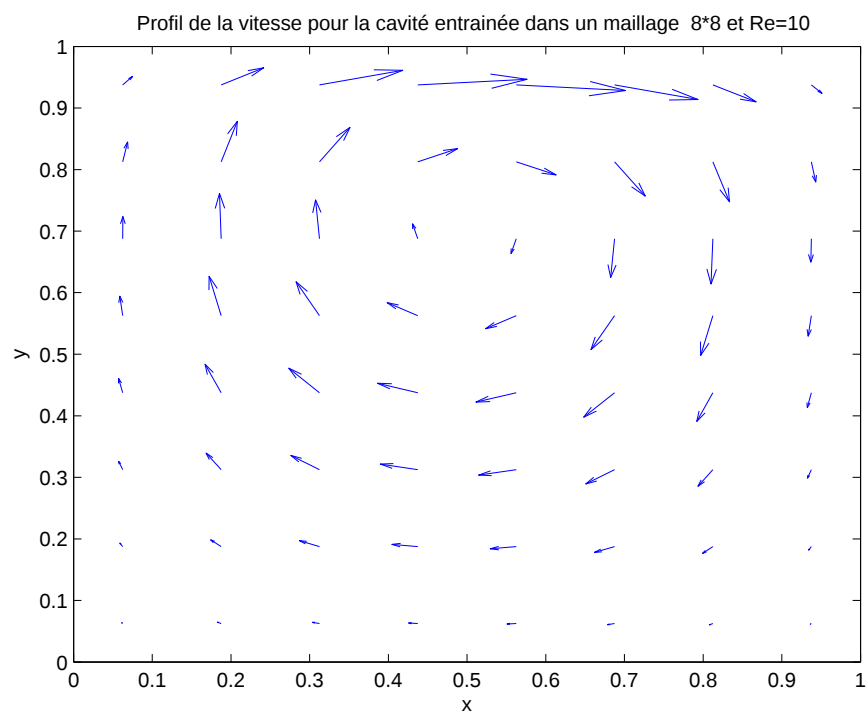


FIG. 2.5 – Profil de la vitesse pour la cavité entraînée pour $Re = 100$ et des mailles 8×8 et 16×16 .

Chapitre 3

Méthode nodale intégrale appliquée à l'équation de la chaleur uni-dimensionnelle avec condition non-locale.

3.1 Introduction

Après avoir étudié aux chapitres précédents des problèmes en régime stationnaire. Nous nous intéressons spécialement dans ce chapitre à un problème de diffusion (moléculaire, de la chaleur, etc.), et qui a pour modèle de description mathématique l'équation de la chaleur. Ce type de problème en une dimension avec des conditions au bord de type Neumann ou Dirichlet a déjà été traité avec la méthode nodale intégrale par plusieurs auteurs à citer, [4, 100]. De ce fait nous nous proposons d'explorer d'autres types de conditions au bord, appelées non locales, ou aussi de conservation de masse. Nous adapterons plusieurs schémas numériques pour la discrétisation de l'équation de chaleur et nous proposerons d'autres pour la condition non-locale au bord. A la fin nous donnerons des tests numériques divers et des comparaisons avec d'autres méthodes standards et actuelles, pour la validation des schémas proposés.

3.2 Discrétisation

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

assujettie à la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.2)$$

et à la condition au bord

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3.3)$$

et la condition non locale :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3.4)$$

où f, g et m sont des fonctions données, Q est une fonction source et α constante.

Les propriétés analytiques de la solution du problème ((3.1)-(3.4)) ont été étudiées par plusieurs auteurs [15, 21, 25, 63, 72, 103, 82].

Shi [87] a montré en utilisant la transformée de Fourier et une formulation variationnelle l'existence et l'unicité du problème ((3.1)-(3.4)) dans un espace de Sobolev avec poids.

Le domaine d'étude $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ est subdivisé en $N_x \times N_t$ rectangles, appelées noeuds (ou élément) : $[-a_{i,j}, +a_{i,j}] \times [-\tau_{i,j}, +\tau_{i,j}]$, $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_t$.

La numérotation des faces et des noeuds du maillage est illustrée dans la figure (FIG. 3.1).

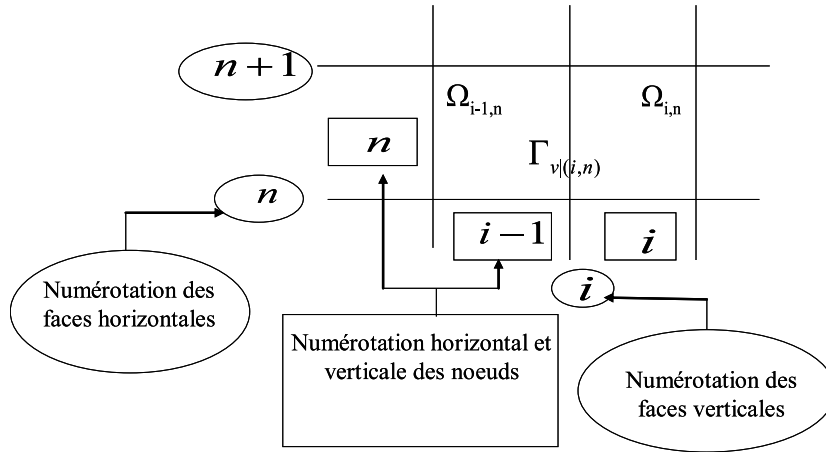


FIG. 3.1 – Numérotation des faces et des noeuds .

On omettra l'écriture de l'indice (i, j) relatif aux noeuds.

Plaçons nous dans une maille $K = [-a, +a] \times [-b, +b]$. L'équation aux dérivées partielles (3.1) est convertie en appliquant des intégrations transverses, suivant les deux directions x et t au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \alpha \frac{d^2 \bar{u}_t}{dx^2}(x) = S_t(x), & 0 < x < 1. \\ \frac{d \bar{u}_x}{dt}(t) = S_x(t), & 0 < t < T \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\bar{u}_t(x) := \bar{u}_t^0(x) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} u(x, t) dt.$$

$$\bar{u}_x(t) := \bar{u}_x^0(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} u(x, t) dx.$$

Les pseudo-sources sont donnés par :

$$\begin{cases} S_t(x) = \frac{[u(x, +\tau) - u(x, -\tau)]}{2\tau} \\ S_x(t) = \frac{\alpha}{2a} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(+a, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-a, t) \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

On s'intéresse à explorer une méthode nodale intégrale d'ordre 0 appliquée au problème (3.1)- (3.4). Donc les pseudo-sources seront approchés par des constantes sur chaque noeud $[-a, +a] \times [-\tau, +\tau]$:

$$\begin{cases} S_t(x) \simeq S_t := \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} S_t(x) dx & -a \leq x \leq +a \\ S_x(t) \simeq S_x := \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} S_x(t) dt & -\tau \leq t \leq +\tau \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi le système (3.5) devient :

$$\alpha \frac{d^2 \bar{u}_t}{dx^2}(x) = S_t, -a \leq x \leq +a. \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_x(t) = S_x, -\tau \leq t \leq +\tau. \quad (3.9)$$

Ce dernier est un système d'équations différentielles ordinaires dont les conditions au bord sont les valeurs moyennes transverses de la variable u aux interfaces de chaque noeud, à savoir : u_L, u_R, u_B et u_T . On rappelle la définition des valeurs moyennes transverses et nodales :

$$\begin{aligned} u_L &:= \bar{u}_t(-a), & u_B &:= \bar{u}_x(-\tau) \\ u_R &:= \bar{u}_t(+a), & u_T &:= \bar{u}_x(+\tau) \\ \bar{u}_{t,x} &:= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \bar{u}_t(x) dx, & \bar{u}_{x,t} &:= \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \bar{u}_x(t) dt. \end{aligned}$$

Les valeurs moyennes transverses et nodales sont représentées dans la figure (FIG. 3.2).

Après avoir approximer des pseudo-sources par des constantes (3.7), la solution analytique du système ((3.8)-(3.9)) s'écrit :

$$\bar{u}_t(x) = \frac{S_t}{2\alpha} x^2 + A.x + B \quad (3.10)$$

$$\bar{u}_x(t) = S_x.t + C \quad (3.11)$$

En faisant tendre x vers $\mp a$ dans (3.10) et t vers $\mp \tau$ dans (3.11) on obtient :

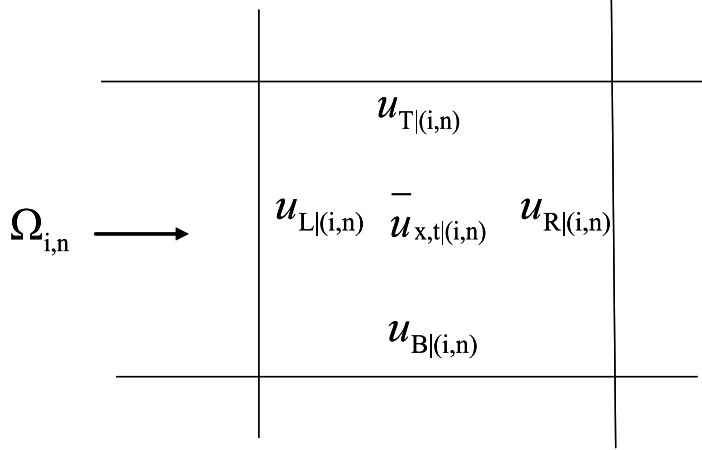


FIG. 3.2 – Les inconnues principales dans un noeud $\Omega_{i,n}$.

$$\begin{cases} A &= \frac{u_R - u_L}{2a} \\ B &= \frac{u_R + u_L}{2a} - \frac{a^2}{2\alpha} \cdot S_t \\ C &= \frac{u_B + u_T}{2} \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$S_x = \frac{u_T - u_B}{2\tau}. \quad (3.13)$$

On constate dans (3.12), qu'il reste à déterminer la valeur du pseudo-source S_t en fonction des valeurs moyennes transverses u_L, u_R, u_B et u_T . Pour cela deux conditions seront imposées sur chaque noeud :

- L'unicité des valeurs moyennes nodales de u .
- L'équation du bilan sur chaque noeud.

3.3 L'unicité des valeurs moyennes nodales.

La valeur moyenne nodale de u peut être calculée de deux façons : La première en intégrant $\bar{u}_t(x)$ dans l'équation (3.10), de $-a$ à $+a$, pour obtenir :

$$\bar{u}_{t,x} = \frac{a^2}{6\alpha} S_t + B = \frac{u_R + u_L}{2a} - \frac{a^2}{3\alpha} S_t \quad (3.14)$$

La seconde en intégrant $\bar{u}_x(t)$ à partir de l'équation (3.11) de $-\tau$ à $+\tau$, ce qui donne :

$$\bar{u}_{x,t} = C = \frac{u_B + u_T}{2} \quad (3.15)$$

Moyennant (3.14) et (3.15) avec la condition d'unicité de la valeur moyenne nodale de u : $\bar{u}_{t,x} = \bar{u}_{x,t}$, on obtient :

$$S_t = \frac{3\alpha}{2a^2}[u_L + u_R - u_B - u_T] \quad (3.16)$$

Ayant déterminé les valeurs des pseudo-sources en fonction des moyennes faciales de u , la solution analytique du système ((3.8)-(3.9)) s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{u}_t(x) = & \left(\frac{3}{4a^2}x^2 - \frac{1}{2a}x - \frac{1}{4}\right)u_L + \left(\frac{3}{4}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{4}\right)u_R \\ & + \left(-\frac{3}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4}\right)u_B + \left(-\frac{3}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4}\right)u_T \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\bar{u}_x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau} + 1\right)u_T + \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{\tau} + 1\right)u_B \quad (3.18)$$

3.4 Equation du bilan

Cette condition qui caractérise les méthodes nodales intégrales (ou analytiques) et qui garantit la stabilité et la conservation du schéma nodale, sera imposée pour l'équation de la chaleur.

On l'obtient en intégrant l'équation (3.1) sur chaque noeud $[-a, +a] \times [-\tau, +\tau]$ par rapport aux deux directions x et t , ce qui donne :

$$\frac{\alpha}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{d^2 \bar{u}_t}{dx^2}(x) dx = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{d}{dt} \bar{u}_x(t) dt \quad (3.19)$$

Ou aussi, en fonction des pseudo-sources :

$$S_t = S_x \quad (3.20)$$

En remplaçant S_t et S_x par leurs formules (3.16)-(3.13) dans (3.20), on obtient une relation qui relie les quatre valeurs moyennes faciales (u_R, u_L, u_B et u_T) au terme source Q par des combinaisons linéaires :

$$\frac{3\alpha}{2a^2}[u_L + u_R] + \left[\frac{-3\alpha}{2a^2} + \frac{1}{2\tau}\right]u_B + \left[\frac{-3\alpha}{2a^2} - \frac{1}{2\tau}\right]u_T = 0 \quad (3.21)$$

Le schéma relatif à l'équation du bilan est illustré dans la figure 3.3-(C).

3.5 Formulations du système discret

De la même manière que pour les méthodes nodales étudiées dans les deux chapitres précédents, on supposera la continuité de $\bar{u}_t(x)$ et $\frac{d\bar{u}_t}{dx}(x)$ à travers les interfaces intérieures verticales (FIG. 3.4) et la continuité de $\bar{u}_x(t)$ à travers les interfaces intérieures horizontales (FIG. 3.5) du domaine d'étude Ω .

La continuité de ces valeurs moyennes peut être présentée dans le système discret implicitement ou explicitement. ce qui sera détaillé pour chaque formulation.

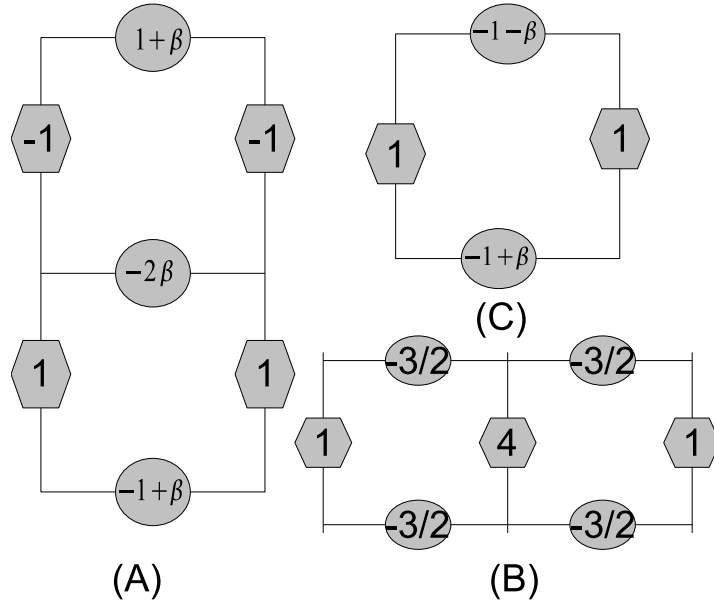


FIG. 3.3 – Les schémas relatifs aux formulations discrets ($a = \tau$ et $\beta = \frac{a}{3\alpha}$)

3.5.1 Première formulation

Considérons deux noeuds adjacents $\Omega_{k,n} = [-a_k, +a_k] \times [-\tau_n, +\tau_n]$ et $\Omega_{k+1,n} = [-a_{k+1}, +a_{k+1}] \times [-\tau_n, +\tau_n]$,

La continuité de $\frac{d\bar{u}_t}{dx}(x)$ à travers l'interface commune de $\Omega_{k,n}$ et $\Omega_{k+1,n}$ (FIG 3.4) s'écrit :

$$\left. \frac{d\bar{u}_t}{dx} \right|_{x=+a_k} = \left. \frac{d\bar{u}_t}{dx} \right|_{x=-a_{k+1}} \quad (3.22)$$

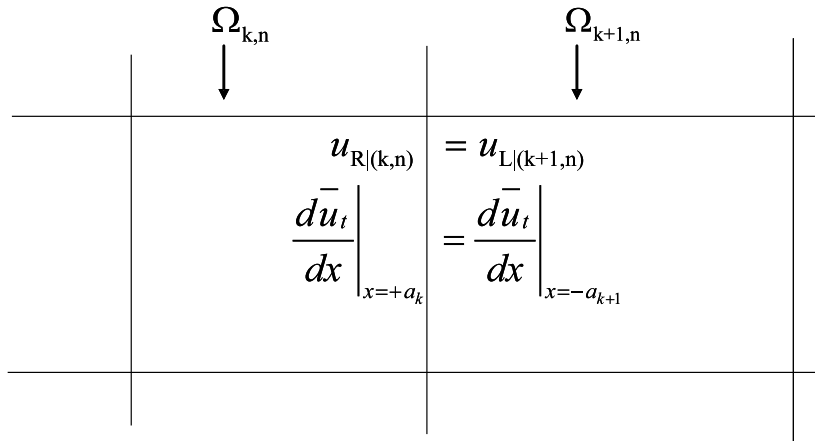


FIG. 3.4 – continuité à travers les interfaces verticales .

En dérivant l'équation (3.17), on obtient :

$$\frac{d\bar{u}_t}{dx}(x) = \left(\frac{3x}{2a^2} - \frac{1}{2a}\right)u_L + \left(\frac{3x}{2a^2} + \frac{1}{2a}\right)u_R - \frac{3x}{2a^2}u_B - \frac{3x}{2a^2}u_T \quad (3.23)$$

En faisant tendre x vers $+a_k$ et $-a_{k+1}$ dans (3.23), on aboutit à :

$$\left. \frac{d\bar{u}_t}{dx} \right|_{x=+a_k} = \frac{1}{a_k} \left[u_{L|(k,n)} + 2u_{R|(k,n)} - \frac{3}{2}u_{B|(k,n)} - \frac{3}{2}u_{T|(k,n)} \right] \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{d\bar{u}_t}{dx} \right|_{x=-a_{k+1}} = \frac{-1}{a_k} \left[2u_{L|(k+1,n)} + u_{R|(k+1,n)} - \frac{3}{2}u_{B|(k+1,n)} - \frac{3}{2}u_{T|(k+1,n)} \right] \quad (3.25)$$

ici la notion $u_{E|(k,n)}$ est relative à u_E dans le noeud $\Omega_{k,n}$, ou $E = L, R, B$ ou T .

En substituant (3.24) et (3.25) dans (3.22) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_k} u_{L|(k,n)} + 2 \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) u_{R|(k,n)} + \frac{1}{a_k} u_{R|(k+1,n)} \\ & - \frac{3}{2a_k} [u_{B|(k,n)} + u_{T|(k,n)}] - \frac{3}{2a_{k+1}} [u_{B|(k+1,n)} + u_{T|(k+1,n)}] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

La première formulation se constitue de l'équation (3.26) et de l'équation du bilan (3.21).

On obtient ainsi un schéma à 7 points par interface verticale intérieure et un schéma à 4 points par noeud, FIG 3.3-(B-C).

Notons que dans ce schéma, nous avons utilisé la continuité de la dérivée de $\bar{u}_t(x)$ explicitement, ce qui est présenté dans l'équation (3.26), tandis que la continuité de $\bar{u}_t(x)$ et $\bar{u}_x(t)$ à travers les interfaces intérieures est présentée implicitement dans (3.21) et (3.26).

Remarque 3.1 La discrétisation de la condition au bord (3.3) se déduit de la formule (3.24) en prenant $k = N_x$.

3.5.2 Deuxième formulation :

La condition de continuité de $\bar{u}_x(t)$ à travers les interfaces horizontales sera explicite à travers l'équation du bilan :

Ainsi considérons deux noeuds adjacents $\Omega_{k,n} = [-a_k, +a_k] \times [-a_n, +a_n]$ et $\Omega_{k,n+1} = [-a_k, +a_k] \times [-a_{n+1}, +a_{n+1}]$ suivant une bande verticale.

En utilisant l'équation du bilan (3.21) dans ces deux noeuds avec la condition $u_{T|(k,n)} = u_{B|(k,n+1)}$ (FIG. 3.5) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(-1 + \frac{a_k^2}{3\alpha\tau_n} \right) u_{B|(k,n)} + \left(\frac{-a_k^2}{3\alpha\tau_n} + \frac{-a_k^2}{3\alpha\tau_{n+1}} \right) u_{B|(k,n+1)} + \left(-1 + \frac{a_k^2}{3\alpha\tau_{n+1}} \right) u_{T|(k,n+1)} \\ & + \left[u_{L|(k,n)} + u_{R|(k,n)} - u_{L|(k,n+1)} - u_{R|(k,n+1)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La deuxième formulation se constitue des équations (3.26) et (3.27), donc la continuité de $\bar{u}_x(t)$ à travers les interfaces horizontales et celle de $\frac{d\bar{u}_t}{dx}(x)$ à travers les interfaces

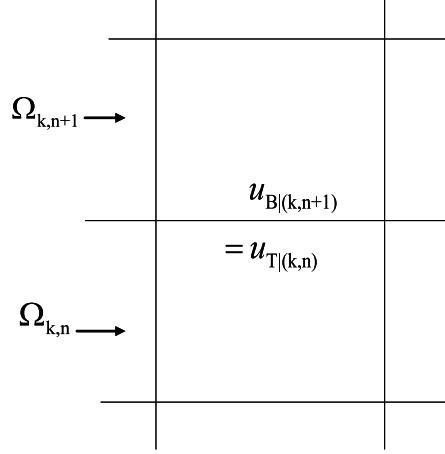


FIG. 3.5 – continuité à travers les interfaces horizontales .

verticales est explicite.

Le schéma représentant le schéma à 7 points issu de (3.27) est représenté dans la figure (FIG.3.3-(A)).

Remarque 3.2 *En parcourant tous les éléments du maillage, les équations (3.27) sont algébriquement équivalentes aux équations du bilan (3.21). Sauf que le système issu de (3.21) est plus creux que celui obtenu par (3.27).*

La discrétisation à l'intérieur du domaine établi, nous nous proposons d'explorer différentes discrétisations pour la condition non locale.

3.6 Discrétisation de la condition non-locale

Rappelons la condition non-locale :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = m(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.28)$$

où m est une fonction donnée.

Nous nous proposons trois schémas différents pour discrétiser l'équation intégrale (3.28). Le premier est représenté par une équation discrète exacte et les deux derniers sont obtenus par dérivation.

Première discrétisation :

Considérons une nouvelle notation de la partition du domaine d'étude Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i,j=1}^{N_x, N_t} I_i \times J_n, \quad \text{où } I_i = [x_i, x_{i+1}] \text{ et } J_n = [t_n, t_{n+1}], \text{ avec } x_{i+1} - x_i = 2a_i \text{ et } t_{n+1} - t_n = 2\tau_n$$

Le premier terme de l'équation (3.28) s'écrit :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \sum_{i=1}^{N_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t) dx = \sum_{i=1}^{N_x} 2a_i \bar{u}_{x|i}(t)$$

où

$$\bar{u}_{x|i}(t) = \frac{1}{2a_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t) dx = \frac{1}{2a_i} \int_{-a_i}^{+a_i} U(X, t) dX$$

avec $X = x - \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$, et $U(X, t) = u(x, t)$.

Donc l'équation (3.28) devient :

$$\sum_{i=1}^{N_x} 2a_i \bar{u}_{x|i}(t) = m(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.29)$$

Par suite sa forme discrète :

$$\sum_{i=1}^{N_x} 2a_i \bar{u}_{x|i}(t_n) = m(t_n), \quad n = 2, \dots, N_t. \quad (3.30)$$

Notons qu'aucune approximation n'est utilisée dans l'équation (3.30). Donc c'est une équation discrète exacte.

2^{me} et 3^{me} discrétisations :

On dérive l'équation (3.28) par rapport à t , puis on utilise l'équation (3.1), ce qui donne :

$$\int_0^1 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx = \frac{dm}{dt}(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.31)$$

En intégrant transversalement l'équation (3.31) entre $-\tau_n$ et τ_n , on obtient :

$$\alpha \left(\frac{d\bar{u}_t}{dx} \Big|_{x=+1} - \frac{d\bar{u}_t}{dx} \Big|_{x=0} \right) = \frac{m(\tau_{n+1}) - m(\tau_n)}{2\tau_n}. \quad (3.32)$$

En substituant $\frac{d\bar{u}_t}{dx} \Big|_{x=+1}$ et $\frac{d\bar{u}_t}{dx} \Big|_{x=0}$ par leurs formules données dans (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned} & \alpha \left[\frac{1}{a_{N_x}} u_{L|(N_x, n)} + \frac{2}{a_{N_x}} u_{R|(N_x, n)} - \frac{3}{2a_{N_x}} (u_{B|(N_x, n)} + u_{T|(N_x, n)}) \right] \\ & + \alpha \left[\frac{2}{a_1} u_{L|(1, n)} + \frac{1}{a_1} u_{R|(1, n)} - \frac{3}{2a_1} (u_{B|(1, n)} + u_{T|(1, n)}) \right] \\ & = \frac{m(\tau_{n+1}) - m(\tau_n)}{2\tau_n}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Une troisième discrétisation de la condition non-locale peut être déduite de (3.32) en exploitant la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = g(t)$, $0 < t \leq T$, ce qui donne :

$$\alpha \frac{d\bar{u}_t}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha \bar{g}_{t|n} - \frac{m(\tau_{n+1}) - m(\tau_n)}{2\tau_n}. \quad (3.34)$$

Et en utilisant (3.25), on obtient :

$$\begin{aligned} -\alpha \left[\frac{2}{a_1} u_{L|(1,n)} + \frac{1}{a_1} u_{R|(1,n)} - \frac{3}{2a_1} (u_{B|(1,n)} + u_{T|(1,n)}) \right] \\ = \alpha \bar{g}_{t|n} - \frac{m(\tau_{n+1}) - m(\tau_n)}{2\tau_n}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Remarque 3.3 *Les équations (3.33) et (3.35) sont algébriquement équivalentes, sauf que le système linéaire résultant avec (3.35) est plus creux que celui avec (3.33).*

Les discrétisations de la condition non-locale formulées. nous nous proposons d'utiliser une interpolation multi-variables (voir [46, 47, 48]) pour construire une approximation de $u(x, t)$ à partir de ses valeurs moyennes transverses faciales et nodales.

Cet opérateur que nous avons déjà utilisé pour des problèmes elliptiques, prouvera son efficacité pour la discrétisation nodale de l'équation de chaleur, chose qui sera illustrée avec des tests numériques.

Soit donc l'approximation de u en tout point de coordonnées (x, t) du domaine Ω :

$$u(x, t) \simeq \bar{u}_t(x) + \bar{u}_x(t) - \bar{u}_{t,x} \quad (3.36)$$

En substituant (3.17) et (3.18) dans (3.36), on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, t) \simeq & \left(\frac{3}{4a^2} x^2 - \frac{1}{2a} x - \frac{1}{4} \right) u_L + \left(\frac{3}{4a^2} x^2 + \frac{1}{2a} x - \frac{1}{4} \right) u_R \\ & + \left(-\frac{3}{4a^2} x^2 - \frac{1}{2\tau} t + \frac{3}{4} \right) u_B + \left(-\frac{3}{4a^2} x^2 + \frac{1}{2\tau} t + \frac{3}{4} \right) u_T \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.7 Résultats numériques

Pour la validation des schémas nodaux, on propose deux tests numériques qui figurent dans plusieurs travaux anciens et récents (pour $\alpha = 1$).

Considérant alors le problème (3.1) sur le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, avec les deux solutions exactes suivantes :

$$P_0 : \begin{cases} f(x) &= \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ g(t) &= -\pi \exp(-\pi^2 t) & 0 < t < 1 \\ m(t) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\pi^2 t) \right) & 0 < t < 1 \\ u(x, t) &= \exp(\pi^2 t) \sin(\pi x) & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Et

$$P_1 : \begin{cases} f(x) &= \cos(\frac{\pi}{2} x) & 0 < x < 1 \\ g(t) &= \exp(-\frac{\pi^2}{4} t) & 0 < t < 1 \\ m(t) &= \frac{2}{\pi} \exp(-\frac{\pi^2}{4} t) & 0 < t < 1 \\ u(x, t) &= \exp(-\frac{\pi^2}{4} t) \cos(\frac{\pi}{2} x) & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

D'après la remarque (3.2) les deux formulations (3.27) et (3.21) à l'intérieur du domaine sont algébriquement équivalentes et d'après la remarque (3.3) les deux discrétisations pour la condition non-locale (3.33) et (3.35) sont aussi algébriquement équivalentes. Par conséquent on choisit d'implémenter la formulation à l'intérieur du domaine (3.21) avec les deux discrétisations pour la condition non-local : (3.30) et (3.33), qu'on notera respectivement : "H1.NIM" et "H2.NIM".

Soit $\varepsilon = u_{exa} - u_h$, la solution qui représente l'erreur numérique, où u_{exa} est la solution exacte et u_h est la solution approchée. Notons que, pour un pas de maillage uniforme $N_x = N_t$, h désigne la largeur ou la hauteur de la maille.

Les erreurs en normes, maximale relative et L^2 pour une distribution de points relative à $N_x \times N_t$ mailles, sont données par :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{\infty, r} &= \max_{i, n} |\varepsilon(x_i, t_n)| / \max_{i, n} |u_{exa}(x_i, t_n)| \quad 1 \leq i \leq N_x \quad 1 \leq n \leq N_t \\ \|\varepsilon\|_{L^2} &= \left[\frac{1}{N_x N_t} \sum_{i, n} \varepsilon^2(x_i, t_n) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Les erreurs en normes, maximale relative et L^2 , pour les moments centrés (0,0) sont données par :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{\infty, r}^{(0,0)} &= \max_{i, n} |\bar{\varepsilon}_{C|i, n}^{0,0}| / \max_{i, n} |(\overline{u_{exa}})_{C|i, n}^{0,0}| \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq n \leq N_t \\ \|\varepsilon\|_{L^2}^{(0,0)} &= \left[\frac{1}{N_x N_t} \sum_{i, n} (\bar{\varepsilon}_{C|i, n}^{0,0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

La table (3.1) montre un ordre de convergence de 2 pour les deux formulations "H1.NIM" et "H2.NIM", par rapport à toutes les normes.

Les résultats de la table (3.2), pour la solution analytique P_1 , révèlent aussi un ordre de convergence de 2, pour toutes les normes calculées.

L'analyse des erreurs calculées dans les deux tables (3.1) et (3.2) montre que, les résultats donnés par les schémas "H1.NIM" et "H2.NIM" sont identiques. Par conséquent ces deux schémas sont numériquement équivalents, pour les deux solutions analytiques étudiées.

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty,r}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}$	α	$\ \varepsilon\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,0)}$	α
H1.NIM	2×2	4.56E-00		1.93E-01		1.50E-00		1.36E-01	
	4×4	6.90E-01	2.72	8.21E-02	1.23	3.33E-01	2.17	5.53E-02	1.29
	8×8	1.60E-01	2.10	2.56E-02	1.68	9.07E-02	1.87	1.70E-02	1.69
	16×16	4.14E-02	1.95	6.84E-03	1.90	2.50E-02	1.85	4.54E-03	1.90
	32×32	1.08E-02	1.93	1.74E-03	1.97	6.85E-03	1.87	1.15E-03	1.97
	64×64	2.82E-03	1.94	4.37E-04	1.99	1.82E-03	1.90	2.60E-04	1.99
H2.NIM	2×2	4.56E-00		1.93E-01		1.50E-00		1.36E-01	
	4×4	6.90E-01	2.72	8.21E-02	1.23	3.33E-01	2.17	5.53E-02	1.29
	8×8	1.60E-01	2.10	2.56E-02	1.68	9.07E-02	1.87	1.70E-02	1.69
	16×16	4.14E-02	1.95	6.84E-03	1.90	2.50E-02	1.85	4.54E-03	1.90
	32×32	1.08E-02	1.93	1.74E-03	1.97	6.85E-03	1.87	1.15E-03	1.97
	64×64	2.82E-03	1.94	4.37E-04	1.99	1.82E-03	1.90	2.60E-04	1.99

TAB. 3.1 – Erreurs et ordres de convergence en normes, maximale relative et L^2 , des schémas "H1.NIM" et "H2.NIM" pour P_0

Nous allons par la suite, comparer l'erreur maximale relative pour la solution P_1 calculée au point $(0.05, 0.1)$, par le schéma nodale *H1.NIM*, avec celles calculées par les schémas : Implicite [24], Galerkin [22], Keller-Box [41], RKC [73] et Saulyev I [32]. (Le lecteur pourra consulté les références citées pour plus des détails sur ces schémas)

La table (3.3), nous montre que la solution $u(0.5, 0.10)$ donnée par le schéma "H1.NIM" au point de coordonnées $(0.05, 0.1)$ est plus précise que celles données par les autres schémas.

Ces essais numériques ont été réalisés sur un ordinateur Pentium 4 de vitesse CPU 2.4 GHZ avec 800 de RAM.

	maille	$\ \varepsilon\ _{\infty,r}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}$	α	$\ \varepsilon\ _{\infty,r}^{(0,0)}$	α	$\ \varepsilon\ _{L^2}^{(0,0)}$	α
H1.NIM	2×2	1.54E-01		5.07E-02		8.93E-02		3.40E-02	
	4×4	3.96E-02	1.96	1.35E-02	1.90	2.33E-02	1.93	9.15E-03	1.89
	8×8	1.05E-02	1.90	3.45E-03	1.97	6.56E-03	1.83	2.33E-03	1.97
	16×16	2.77E-03	1.92	8.66E-04	1.99	1.78E-03	1.87	5.85E-04	1.99
	32×32	7.17E-04	1.95	2.16E-04	1.99	4.69E-04	1.92	1.46E-04	1.99
H2.NIM	2×2	1.54E-01		5.07E-02		8.93E-02		3.40E-02	
	4×4	3.96E-02	1.96	1.35E-02	1.90	2.33E-02	1.93	9.15E-03	1.89
	8×8	1.05E-02	1.90	3.45E-03	1.97	6.56E-03	1.83	2.33E-03	1.97
	16×16	2.77E-03	1.92	8.66E-04	1.99	1.78E-03	1.87	5.85E-04	1.99
	32×32	7.17E-04	1.95	2.16E-04	1.99	4.69E-04	1.92	1.46E-04	1.99

TAB. 3.2 – Erreurs et ordres de convergence en normes, maximale relative et L^2 , des schémas "H1.NIM" et "H2.NIM" pour P_1

maille	Implicit	Galerkin	Keller-box	RKC	Saul'yev I	H1.NIM
20×20	9.1E-03	9.9E-02	9.4E-02	9.8E-02	9.6E-03	2.45E-03
40×40	2.3E-03	3.0E-02	2.4E-02	3.7E-02	2.5E-03	6.40E-04
100×100	3.8E-04	4.9E-03	4.1E-03	6.1E-03	3.9E-04	4.92E-05

TAB. 3.3 – Comparaison de l'erreur maximale relative du schéma "H1.NIM" au point $(0.05, 0.1)$, avec d'autres schémas numériques

Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'application des méthodes nodales intégrales et polynômiales d'ordre élevé pour la résolution des équations de diffusion et d'écoulement des fluides incompressibles.

Les formulations proposées sont basées sur un processus d'intégrations transverses pondérées par des polynômes de Legendre d'ordre élevé. Elles préservent aussi toutes les caractéristiques des méthodes nodales du plus bas ordre, à savoir les équations du bilan, la condition de continuité des variables principales à travers les interfaces et l'unicité des valeurs moyennes nodales.

Au début nous avons proposé une définition de la méthode nodale avec développement polynômiale d'ordre élevé " HONEM- m ". Définition qui dans son ordre le plus bas ($m = 0$) est équivalente à la méthode " NEM " proposée par Finemann [42]. Dans le but d'obtenir une approximation de la solution en tout point du domaine nous avons utilisé un opérateur d'interpolation à multi-variables dites de Gordon [46, 47, 48], grâce à cet opérateur et en utilisant des quadratures numériques du type Gauss-Radau nous avons établi l'équivalence entre la méthode " HONEM- m " et la méthode nodale polynômiale mathématique "PMNM- m " proposée par Hennart[55], ce qui nous a permis d'exhiber un ordre de convergence supérieur ou égale à $m + 2$ pour la méthode " HONEM- m " et ceci si la solution exacte est assez régulière (dans H^{m+2}). Des tests numériques pour la validation de la méthode " HONEM- m " pour $m = 0, 1$ révèlent un ordre de convergence égale à 2 pour $m = 0$ et égale à 4 pour $m = 1$. Ce résultat obtenu pratiquement pour la méthode " HONEM-1 " nous lance dans une recherche pour l'établir théoriquement.

Par la suite nous avons proposé une formulation de la méthode nodale intégrale d'ordre élevé " HONIM- m " appliquée à un écoulement d'un fluide incompressible en état stationnaire. Formulation qui généralise celle donnée par Azmy [12] pour $m = 0$. Pour la validation du schéma à l'ordre 0($m = 0$) nous avons simulé deux problèmes tests. Le premier traite un écoulement en poiseuille dont les résultats sont identiques à ceux trouvés dans [10]. Le second concerne un écoulement en cavité entraîné par une vitesse non nulle dans son bord supérieur. Ce dernier exemple possède une solution analytique ce qui nous a permis de bien calculer les ordres de convergence numériquement, qui sont de l'ordre de 2 pour les composantes de la vitesse et de la pression.

A la fin de ce travail nous avons étudié plusieurs schémas nodaux d'ordre 0 pour la discrétisation de l'équation de la chaleur avec une condition non-locale. Les tests numériques donnés pour la validation des schémas proposés nous révèlent un ordre de convergence égale à 2. Une comparaison avec d'autres méthodes numériques anciennes et récentes nous montre la supériorité en précision de la méthode nodale d'ordre 0.

Annexe A

Les équations du bilan pondérées pour la méthode nodale HONEM-m, $m = 0, 1$.

Plaçons nous dans un noeud $K = [-a, +a] \times [-b, +b]$ du maillage.

A.1 L'équation du bilan pour la méthode HONEM-0

En integrant l'équation (1.5) sur K on obtient :

$$\bar{\phi}_C^{0,0} = R_0 \left[b^2(\phi_L^0 + \phi_R^0) + a^2(\phi_B^0 + \phi_T^0) \right] + \frac{2a^2b^2R_0}{3D} \bar{Q}_C^{0,0} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{où } R_0 = \frac{3D}{2(3Da^2 + \Sigma a^2b^2 + 3Db^2)}.$$

A.2 Les équations du bilan pondérées pour la méthode HONEM-1

En intégrant l'équation (1.5) sur K avec des poids $p_i(x)p_j(y)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_C^{0,0} &= \frac{3R_{0,0}}{2} \left[b^2\phi_L^0 + b^2\phi_R^0 + a^2\phi_B^0 + a^2\phi_T^0 \right] + \frac{a^2b^2R_{0,0}}{D} \bar{Q}_C^{0,0} \\ \bar{\phi}_C^{1,0} &= \frac{R_{1,0}}{2} \left[-15b^2\phi_L^0 + 15b^2\phi_R^0 + 3a^2\phi_B^1 + 3a^2\phi_T^1 \right] + \frac{a^2b^2R_{1,0}}{D} \bar{Q}_C^{1,0} \\ \bar{\phi}_C^{0,1} &= \frac{R_{0,1}}{2} \left[3b^2\phi_L^1 + 3b^2\phi_R^1 - 15a^2\phi_B^0 + 15a^2\phi_T^0 \right] + \frac{a^2b^2R_{0,1}}{D} \bar{Q}_C^{0,1} \\ \bar{\phi}_C^{1,1} &= \frac{15R_{0,0}}{2} \left[-b^2\phi_L^1 + b^2\phi_R^1 - a^2\phi_B^1 + a^2\phi_T^1 \right] + \frac{a^2b^2R_{1,1}}{15D} \bar{Q}_C^{1,1} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où

$$\begin{aligned}
R_{0,0} &= \frac{D}{3Da^2 + \Sigma a^2 b^2 + 3Db^2} \\
R_{1,0} &= \frac{D}{3Da^2 + \Sigma a^2 b^2 + 15Db^2} \\
R_{0,1} &= \frac{D}{15Da^2 + \Sigma a^2 b^2 + 3Db^2} \\
R_{1,1} &= \frac{D}{15Da^2 + \Sigma a^2 b^2 + 15Db^2}
\end{aligned}$$

Annexe B

Solutions du problème d'écoulement entre deux plaques parallèles

L'élément (i, j)	$\bar{u}_C^{0,0}$	$\bar{v}_C^{0,0}$	$\bar{p}_C^{0,0}$
1.1	8.8690e-003	1.1310e-003	-9.0477e-006
1.2	1.1131e-002	1.1310e-003	9.0477e-006
1.3	1.1131e-002	-1.1310e-003	9.0477e-006
1.4	8.8690e-003	-1.1310e-003	-9.0477e-006
2.1	7.0469e-003	6.9114e-004	-5.5291e-006
2.2	1.2953e-002	6.9114e-004	5.5291e-006
2.3	1.2953e-002	-6.9114e-004	5.5291e-006
2.4	7.0469e-003	-6.9114e-004	-5.5291e-006
3.1	6.2756e-003	8.0157e-005	-6.4126e-007
3.2	1.3724e-002	8.0157e-005	6.4126e-007
3.3	1.3724e-002	-8.0157e-005	6.4126e-007
3.4	6.2756e-003	-8.0157e-005	-6.4126e-007
4.1	6.2129e-003	-1.7462e-005	1.3970e-007
4.2	1.3787e-002	-1.7462e-005	-1.3970e-007
4.3	1.3787e-002	1.7462e-005	-1.3970e-007
4.4	6.2129e-003	1.7462e-005	1.3970e-007

TAB. B.1 – Les valeurs moyennes nodales des composantes de la vitesse et de la pression pour un maillage 4×4

(i, j)	$\bar{u}_C^{0,0}$	$\bar{v}_C^{0,0}$	$\bar{p}_C^{0,0}$
1.1	8.5024e-003	1.4976e-003	-1.7971e-005
1.2	1.1217e-002	1.7787e-003	1.4598e-005
1.3	1.0281e-002	2.8109e-004	3.3731e-006
1.4	1.0281e-002	-2.8109e-004	3.3731e-006
1.5	1.1217e-002	-1.7787e-003	1.4598e-005
1.6	8.5024e-003	-1.4976e-003	-1.7971e-005
2.1	6.0419e-003	9.6292e-004	-1.1555e-005
2.2	1.2227e-002	2.1323e-003	-2.4771e-006
2.3	1.1732e-002	1.1693e-003	1.4032e-005
2.4	1.1732e-002	-1.1693e-003	1.4032e-005
2.5	1.2227e-002	-2.1323e-003	-2.4771e-006
2.6	6.0419e-003	-9.6292e-004	-1.1555e-005
3.1	4.7772e-003	3.0180e-004	-3.6216e-006
3.2	1.1565e-002	1.0587e-003	-5.4607e-006
3.3	1.3658e-002	7.5686e-004	9.0823e-006
3.4	1.3658e-002	-7.5686e-004	9.0823e-006
3.5	1.1565e-002	-1.0587e-003	-5.4607e-006
3.6	4.7772e-003	-3.0180e-004	-3.6216e-006
4.1	4.3584e-003	1.1698e-004	-1.4037e-006
4.2	1.1057e-002	2.8688e-004	-6.3520e-007
4.3	1.4585e-002	1.6991e-004	2.0389e-006
4.4	1.4585e-002	-1.6991e-004	2.0389e-006
4.5	1.1057e-002	-2.8688e-004	-6.3520e-007
4.6	4.3584e-003	-1.1698e-004	-1.4037e-006
5.1	4.2600e-003	-1.8627e-005	2.2352e-007
5.2	1.1023e-002	-5.5696e-005	2.2130e-007
5.3	1.4717e-002	-3.7069e-005	-4.4483e-007
5.4	1.4717e-002	3.7069e-005	-4.4483e-007
5.5	1.1023e-002	5.5696e-005	2.2130e-007
5.6	4.2600e-003	1.8627e-005	2.2352e-007
6.1	4.3427e-003	-6.4007e-005	7.6808e-007
6.2	1.1056e-002	-1.4302e-004	1.8002e-007
6.3	1.4601e-002	-7.9008e-005	-9.4810e-007
6.4	1.4601e-002	7.9008e-005	-9.4810e-007
6.5	1.1056e-002	1.4302e-004	1.8002e-007
6.6	4.3427e-003	6.4007e-005	7.6808e-007

TAB. B.2 – Les valeurs moyennes nodales des composantes de la vitesse et de la pression pour un maillage 6×6

Bibliographie

- [1] M. AKHMOUCH, N. GUESSOUS,
Partial current nodal method for the multigroup neutron diffusion equations.
Int. Conf. Num. Algorithm, Oct, 2001.
- [2] M. AKHMOUCH, N. GUESSOUS,
Higher order analytical nodal methods in response matrix formulation for the multigroup neutron diffusion equations.
An. Nuc. Engerg.29(15), pp 1765-1778, 2002.
- [3] M. AKHMOUCH, N. GUESSOUS,
High-order analytical nodal methods for the multigroup neutron diffusion equations.
Numerical Algorithms. 34, pp 137-146, 2003.
- [4] M. AKHMOUCH ,
Méthodes nodales de résolution des équations aux dérivées partielles en neutronique et en mécanique des fluides incompressibles.
Thèse de Doctorat d'état en Mathématiques, Université S. M. Ben Abedellah-FES, Juillet, 2007.
- [5] H. S. AMRANI, U. Van RIENEN, N. GUESSOUS,
Comparative study between iterative Solvers for Saddle Point Problems in Computational Electromagnetism.
Research report, Fakultät für Informatik und Elektrotechnik, Rostock, (2005).
- [6] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS, M. AKHMOUCH,
Higher-Order Nodal Integral Method for the Numerical solution of Incompressible Fluid Flow Equations.
Phys. Chem. News, (30), 01-06, 2006.
- [7] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS, M. AKHMOUCH, U. VAN RIENEN,
Higher-Order Nodal Integral Method for the Numerical solution of Navier-Stokes Equations.

Conference, KWT 2005 : Advances in Electromagnetic Research, 21-26 August 2005.

- [8] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS,
Higher-Order Nodal Expand Method for diffusion equation error estimate and numerical experiment.
En rédaction.
- [9] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS,
A new primitive velocity-presure nodal integral method for the numerical solution of incompressible fluid flow problem.
Premier congrès de la SM2A à l'ENIM, du 6 au 8 Février 2008.
- [10] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS,
Nodal Integral method for the one-dimensional Heat equation subject to a non-local condition.
submitted to The 5th Congress of Scientific Research Outlook and Technology Development in the Arab World (SRO5), FEZ-Morocco, 26- 30 October, 2008.
- [11] H. S. AMRANI, N. GUESSOUS,
New Nodal Integral method for the one-dimensional Heat equation subject to a specification of mass.
En rédaction
- [12] Y. Y. AZMY,
A Nodal Integral Method for the Numerical Solution of Incompressible Fluid Flow Problems.
MS Thesis, University of Illinois, 1982.
- [13] Y. Y. AZMY, J. J. DORNING,
A Nodal Integral Approach to the numerical solution of partial equations.
Advanced in Reactor Computations, American Nuclear society, Vol II, p.893, 1983.
- [14] Y. Y. AZMY ,
A comparaison between the finite difference and nodal integral methods for the neutron diffusion equation.
An. Nuc. Soc .Lagrange Park, Vol 4, pp 16.1 (2-1), 1991.
- [15] G.W. BATTEN ,
Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations.
Math Comput 17, pp. 405-413, 1963.

- [16] A. BOUZIANI ,
On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition.
 Acad R Belg Bull Cl Sci 10, pp. 61-77, 1999.
- [17] A. BOUZIANI ,
On the weak solution of a three-point boundary value problem for a class of parabolic equations with energy specification.
 Abstr Appl Anal 10, pp. 573-589, 2003.
- [18] H. BREZIS,
Analyse fonctionnelle, Théorie et application.
 Masson, 1983.
- [19] F. BREZZI , J. DOUGLAS , M. FORTIN and L.D MARINI ,
Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables.
 Math. Models Numer,Anal 21, 581, 1985.
- [20] T. J. BURNS ,
the partial current balance method : A nodal Green's function technique for numerical solution of multidimensional neutron diffusion problem.
 Ph.D thesis, Univesity of Illinois, Urbana, 1979.
- [21] J. R. CANNON ,
The solution of the heat equation subject to the specification of energy.
 Quart Appl Math 21, pp. 155-160, 1963.
- [22] J. R. CANNON ,
The one dimensional heat equation.
 Encyclopedia of mathematics and its applications vol. 23, Addison-Welsey, Menlo Park (CA), 1984.
- [23] J. R. CANNON , A.L MATHESON
A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass.
 Int J Eng Sci 31(3), pp. 347-355, 1993.
- [24] J. R. CANNON , PREZ-ESTEVA and J. VAN DER HOEK ,
S. A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass.
 SIAM J Num Anal 24, pp. 499-515, 1987.
- [25] J. R. CANNON , Y. LIN ,
S. A Galerkin procedure for diffusion equations with boundary integral conditions.
 Int J Eng Sci 28 (7), pp. 579-587, 1990.

- [26] Y.S. CHOI , K.Y. CHAN ,
S. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry.
 Nonlinear Anal Theory Methods Appl 18 (4), pp. 317-331, 1992.
- [27] G. P. CIARLET,
Introduction à l'analyse numerique matricielle et à l'optimisation.
 Collection Mathématiques Appliquées pour la maitrise, Masson, 1982.
- [28] G. P. CIARLET,
Hand book of numerical analysis F.E.M part II.
 North-Holland, 1991.
- [29] J. F. CIVALDINI , J. F. CROUZEIX ,
A finite element method scheme for one dimensional elliptic equations with high super convergence at the nodes.
 Numer. Math, 46, pp 417-427, 1985.
- [30] J. F. CROUZEIX , A. L. MIGNOT
Analyse numérique des équations différentielles.
 Barcelone, New York, Paris : Masson, 1984.
- [31] K.L. DECKERT , C.G. MAPLE
Solutions for diffusion equations with integral type boundary conditions.
 Proc Iowa Acad Sci 70, pp. 345-361, 1963.
- [32] M. DEGHAN ,
The one-dimensional heat equation subject to a boundary integral specification.
 Chaos, Solitons & Fractals Volume 32 (2), pp. 661-675, April 2007.
- [33] K. DJADEL ,
Méthodes de volumes finis et singularités.
 Ph. D. Thesis, Univ. de Lille, Lille, 2005.
- [34] K. DJADEL , S. NICAISE
A nonconforming finite volume method of weighted upstream type for the two-dimensional stationary Navier-Stokes system
 Preprint Macs, University of Valenciennes, Valenciennes, 2005.
- [35] J. DORNING ,
Modern Coarse-Mesh Methods. A development of 70s.
 Computational Methods in Nuclear Engineering, NTFIS,
 Washington,D.C, Vol 1, pp 31, 1979.

- [36] M. E ELBARARY,
Legendre expansion method for solution of the second-and fourth-order elliptic equations.
 Math. comput. simu. vol. 59, N°5, pp. 389-399, 2002.
- [37] P. EMONOT
Méthode de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence.
 Ph. D. Thesis, Univ. Lyon, 1992.
- [38] P. D. ESSER , R. J. WITT ,
An upwind nodal integral method for incompressible fluid flow.
 Nucl. Sci. Eng, N°114, pp 20-35, 1993.
- [39] L.C EVANCS,
Partial Differential Equations.
 Graduate Studies in Math, Vo 19, 1997.
- [40] R. EYMARD, R. HERBIN
A finite volume scheme on general meshes for the steady Navier-Stokes problem in two spaces dimensions.
 Int. J. Finite volume, electronic journal, 2005.
- [41] R.E. EWING , T. LIN ,
A class of parameter estimation techniques of fluid flow in porous media.
 Adv Water Resour 14, pp. 89-97, 1991.
- [42] H. FINNEMAN, F. BENNEWITZ, M. R. WAGNER,
Interface current technique for multidimensional reactor calculations.
 Atomkerenergie, 30, 1977.
- [43] H. D. FISCHER, H. FINNEMAN,
The nodal integration method-A diverse solver for neutron diffusion problems.
 Atomkerenergie, Kerntechink Bd 39, Lfg 4, 1981.
- [44] V. GIRAULT, H. A-. RAVIART,
Finite element methods approximation of the Navier-Stokes equations.
 L. N. in Mathematics, 749, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [45] G. H. GOLUB, C. F. VANLOAN,
Matrix computation.
 North-Oxford Academic, Oxford, 1983.
- [46] J. GORDON, WILLIAM ,
Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and

- approximation.
SIAM J. Numer. Anal, 8, pp 158-177, 1971.
- [47] J. GORDON, WILLIAM , A. C. HALL
Transfinite element methods : blending-function interpolation over arbitrary curved element domains.
Numer. Math. 21, pp 109-129, 1973/74.
- [48] J. GORDON, WILLIAM , A. C. HALL, J. C. Cavendish
Ritz-Galerkin approximations in blending function spaces.
Numer. Math. 26, no. 2, 155-178, 1976.
- [49] N. GUESSOUS,
Méthodes nodales de discrétisation des équations de diffusion multigroupe.
Thèse de docteur en science, Université Libre de Bruxelles, 1993.
- [50] N. GUESSOUS,
Higher Order Analytical Nodal Methods for the Discretization of Diffusion Equations,
Colloque Maghrébine TAM-TAM, 14-18 Avril, 2003.
- [51] N. K. GUPTA , E. ,
Nodal methods for three-dimensional simulators.
Prog. Nucl. Ener, N°7, pp 127-149.
- [52] E. GUYON, J. P. HULIN, L. PETIT
Hydrodynamique Physique.
Inter-editions/Editions du CNRS, 1991.
- [53] J. P. HENNART, E. H. MUND,
singularities in the finite element approximation of two dimensional diffusion problems.
Nuclear Science and Engineering, Vol 62, 1977.
- [54] J. P. HENNART,
A general finite elements framework for nodal methods.
The Mathematics of Finite Element and Applications. V, J.R Whiteman, ed. London Academic press, pp 309-316, 1985.
- [55] J. P. HENNART,
A General family of nodal schemes.
Siam. J. Sci, Stat Comput Vol 7, pp 264, 1986.

- [56] J. P. HENNART,
On the Numerical Analysis of analytical nodal methods.
 Numerical Methods for partial differential equations,4, pp 233-254, 1988.
- [57] J. P.HENNART, J. JAFFRÉ , J.E. ROBERTS,
A constructive method for deriving finite elements of nodal type.
 Numer. Math. 53, pp 701-738, 1988.
- [58] J. P. HENNART,
Finite element approach to point and mesh centred finite difference schemes over rectangular grids.
 Ann. Nuc. Enegy, Vol 19 N°10.12, pp 663-678, 1992.
- [59] J. P. HENNART, E. DEL VALLE,
On the relationship between nodal schemes and mixed-hybrid finite elements.
 Nume Methods for Partial Differential Equations, 9, pp. 411-430, 1993.
- [60] J. P. HENNART, E. DEL VALLE ,
Mesh-centered finite differences from nodal finite elements for elliptic problems.
 Numer. Methods Partial Differential Equations, 14,pp 439-465, 1998.
- [61] J. P. HENNART, E. H. MUND and E. DEL VALLE,
Third order nodal finite element methods with transverse and reduced integration for elliptic problems.
 Applied.Num.Math, 46, pp 209-230, 2003.
- [62] W. C. HORAK, J. J. DORNING,
A Nodal Coarse-Mesh method for the efficient numerical solution of Laminar Flow problems,
 J.Comp. Phys, 59, p 405, 1985.
- [63] L.I. KAMYNIN
A boundary value problem in the theory of heat conduction with a non-classical boundary condition.
 USSR Comput Math Math Phys 4, pp. 33-59, 1964.
- [64] S. LANGENBUCH, W. MAURER, W.WERNER,
on oarse-meshflux-expansion methodfor the analysis of space-time effects in large light water reactor cores.
 Nucl. Sci. Engng 63, pp. 437-456, 1977.
- [65] S. LANGENBUCH, W. MAURER, W.WERNER,
High-order schemes for neutron kinetics calculations, based on a local polynomial

- approximation.
Nucl. Sci. Engng 64, pp. 508-516, 1977.
- [66] P. LASCAUX , R. THÉODOR ,
Analyse numerique matricielle appliquée à l'art de l'ingenieur.
Masson, 1986.
- [67] R. D. LAWRENCE,
Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport.
Prog. Nuc. Energy, 17, pp 271-301, 1986.
- [68] R. D. LAWRENCE,
A nodal Green's function method for multidimensional neutron diffusion calculation.
Ph.D thesis, University of Illinois, 1979.
- [69] R. D. LAWRENCE, J. J. DORNING,
A nodal Green's function method for multidimensional neutron diffusion calculation.
Trans. Am. Nucl. Soc, 28, p 248, 1978.
- [70] R. D. LAWRENCE,
Three dimensional nodal diffusion and transport methods for the analysis of fast-reactor critical experiments.
Prog. Nuc. Energy, 18, pp 101-111, 1986.
- [71] V. LOUVET,
Etude numérique de problèmes de diffusion neutronique en présence de singularités.
Thèse de Doctorat, Université de France Compté, février 1998 .
- [72] N.I. IONKIN ,
Solution of a boundary value problem in heat conduction with a non-classical boundary condition.
Different Equat 13, pp. 204-211, 1977.
- [73] V.L MAKAROV , D.T KULYEV,
Solution of a boundary value problem for a quasi-linear parabolic equation with nonclassical boundary conditions.
Different Equat 21, pp. 296-305, 1985.
- [74] E. P. E. MICHAEL, J. J. DORNING, E. M. GELBARD and RIZWAN-UDDIN,
Nodal Integral Method for the convection diffusion Heat Equation.
Trans. Am. Nuc. Soc, vol.69, p 239, 1993.

- [75] E. P. E. MICHAEL, J. J. DORNING and RIZWAN-UDDIN,
Third-Order nodal Integral Method for the Convection-Diffusion Equation.
Trans. Am. Nuc. Soc, vol.71, p 195, 1994.
- [76] E. P. E. MICHEL, and J. J. DORNING and RIZWAN-UDDIN,
Studies on nodal integral methods for the convection diffusion equations.
Nuc. Sci. Eng, 137,pp 380-399, 2001.
- [77] J. D. MOULTON ,
Nodal methods : Analysis, Performance And Fast Iterative Solvers.
Ph.D thesis, University Of British Columbia, November 1996.
- [78] J. D. MOULTON , J. E. MOREL , U. M. ASCHER
Approximate Schur Complement Preconditioning of the Lowest-Order Nodal Discretizations.
SIAM Journal on Scientific Computing, Vol 19, pp 185-205, 1998.
- [79] R. MOSE, P. SIEGEL , P. ACKERER , G. CHAVENT
Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model : Luxury or necessity ?.
Water Resources Res, Vol 30, pp 3001-3012, 1994.
- [80] R. A. NICOLAIDES,
Analysis and convergence of the MAC scheme II : Navier-Stokes equations.
Math. Comput. , 65, pp. 29-44. 1996.
- [81] A. M. OUGOUAG, H. L. RAJIC, ILLIC-HO,
A Self-consistent Higher Order Coarse-Mesh Nodal Method.
Nucl. Sci. Eng, vol 100, p 332, 1988.
- [82] A. K. PANI,
A finite element method for a diffusion equation with constrained energy and nonlinear boundary conditions.
J Aust Math Soc Ser B 35, pp. 87-102, 1993.
- [83] P. A. RAVIART, J. M. THOMAS
A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems.
In mathematical Aspects of the Finite Element Method, I. Galligani and E. Magenes, eds, Vol 606 of Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, pp 292-315, 1977.
- [84] P. A. RAVIART, J. M. THOMAS
Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Ed Masson, 1983.

- [85] RIZWAN-UDDIN,
A Hybrid Nodal Integral/Finite-Element Method for Arbitrary Geometries.
Trans. Am. Nuc. Soc. 76, pp 170-172, 1997.
- [86] Y. SAAD,
Iterative methods for sparse linear systems.
PWS Publishing ; New York, NY, 1996.
- [87] P. SHI ,
Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint.
SIAM J Math Anal 24 (1), pp. 46-58, 1993.
- [88] P. SHI , M. SHILLOR
Design of contact patterns in one-dimensional thermoelasticity,
Theoretical aspects of industrial design, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA 1992.
- [89] T.M. SHIH , C.H. TAN , B.C. HWANG ,
Effects of grid staggering on numerical schemes.
Int.J.Met.Fluids, 9, pp.193-212, 1989.
- [90] G. STRANG, G. J. FIX,
A Hybrid Nodal Integral/Finite-Element Method for Arbitrary GeometriesAn
Analysis of the Finite Element Method.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp 306, 1973.
- [91] R. TEMAM ,
Navier-Stokes equations.
North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [92] F. THOMASSET ,
Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.
Springer-Verlag, 1981.
- [93] C. TOOCI , S. ADAMS,
Applied Maple for Engineers and Scientists.
Artech House Publishers, edition August 1996.
- [94] A. J. TOREJA,RIZWAN-UDDIN,
Hybrid numerical methods for convection-diffusion problems in arbitrary
geometries.
Computers and Fluids, Vol 32, N° 6, pp. 835-872(38), July 2003.

- [95] A. J. TOREJA, RIZWAN-UDDIN,
A hybrid nodal method for the Navier-Stokes equations in arbitrary geometries.
 Trans. Am. Nucl. Soc, N° 86, pp 133-135. 2002.
- [96] M. R. WAGNER and H. FINNEMANN, K. KOBEKE, H.-J WINTER,
validation of nodal expansion method and the depletion program MEDIUM-2 by
 benchmark calculations and directe comparaison with experiment.
 Atomkernergie, N° 30, pp 129-135, 1977.
- [97] M. R. WAGNER, K. KOBEKE, H.-J WINTER,
A Nonlinear extension of the Nodal Expansion Method.
 Proc. ANS/ENS Int'l. Topical Mtg., Munich, FRG, 2, p. 43, Apr.1981.
- [98] F. WANG , RIZWAN-UDDIN,
A nodal scheme for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations.
 Trans. Am. Nucl. Soc, N° 83, pp 422-424. 2000.
- [99] S. WANG , Y. LIN ,
A numerical method for the diffusion equation with nonlocal boundary
 specifications.
 Int J Eng Sci 28 (6), pp. 543-546, 1990.
- [100] L. WILSON ,
Time-Dependent Nodal Integral Method.
 Ph.D, Thesis, University of virginia, 1987.
- [101] L. WILSON , R. A. RYDIN , Y. Y. AZMY
Time-Dependent Nodal Integral Method.
 Conference internationale sur les developpements en phisique des reacteurs et
 methods de calcul, 27-30 Avril 1987, Paris-France. 35-46, 1990.
- [102] L. WILSON , R. A. RYDIN ,
Nodal integral method solutions for Bénard natural convection.
 International Journal For Numerical Methods In Fluids. Vol 10, pp 35-46, 1990.
- [103] N.I. YURCHUK ,
Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations.
 Different Equat 22 , pp. 1457-1463, 1986.