

Laboratoire de Physique des Hautes Energies, Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Option : Physique quantique de l'information

Contribution à l'étude du rôle des corrélations quantiques dans les protocoles de métrologie quantique

Présenté par : Rachid Laghmach

Encadrant Professeur : Mohammed Daoud

Soutenue le : 16/01/2021

Devant le jury composé de :

PRÉSIDENT :

SEBBANI JAMAL

PES, Faculté des sciences Rabat

EXAMINATEURS :

AHL LAAMARA RACHID

PH, Faculté des sciences Rabat

DAOUD MOHAMMED

PES, Faculté des sciences Kenitra

EL BAZ MORAD

PES, Faculté des sciences Rabat

MANSOUR MOSTAFA

PH, Faculté des sciences Aïn Chock Casablanca

SAIDI EL HASSAN

PES, Faculté des sciences Rabat

TAIBI MOHAMMED

PH, Faculté des sciences Aïn Chock Casablanca

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat-Maroc

Tél +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, <http://www.fsr.ac.ma>

Remerciement

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein de Laboratoire de Physique des Hautes Energies-Modélisation et Simulation à Université Mohammed V -Rabat, Faculté des Sciences, sous la Direction de Monsieur SAÏDI El Hassan, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, et l'encadrement de Monsieur DAOUD Mohammed, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences Ibn Tofaïl de Kenitra.

D'abord, nous remercions Dieu de tout puissant, c'est grâce à lui que nous avons eu la fois et la force pour accomplir ce travail.

J'adresse mes remerciements les plus profonds à Monsieur SEBBANI Jamal Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté d'être le président du jury. Veuillez recevoir, Monsieur, l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

Je tiens dans un premier temps à remercier mon directeur de thèse, Monsieur SAÏDI El Hassan Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat de m'avoir accepté pour faire ma thèse au sein de son laboratoire, et que j'ai la chance de rencontrer durant ma formation, je le remercie pour son aide précieuse, ses idées, sa patience et sa persévérance dans le suivi de mon travail et ces précieux conseils et aussi pour avoir toujours été là pour m'encourager et pour me soutenir.

Tous mes remerciements vont aussi pour mon encadrant Monsieur le Professeur DAOUD Mohammed, pour sa patience, son soutien et surtout sa disponibilité durant ces années de thèse, qui m'a fait bénéficier de son enthousiasme et de ses compétences scientifiques dans le domaine de la physique théorique.

Il a su diriger ma thèse tout en me laissant une grande liberté pour réaliser ce travail. Merci Monsieur Daoud pour les nombreuses discussions, pour ton esprit critique, tes conseils pertinents durant ces années passées sous ta direction. Encore un grand merci de m'avoir transmis une partie de ton esprit, tes attitudes scientifiques et de ta volonté de travail (ta vigueur m'a beaucoup inspiré et continuera à m'inspirer) et pour ton encadrement scientifique très précieux et pour la confiance que tu m'a accordée.

Je vous remercie et j'exprime mon profond respect à Monsieur EL BAZ Morad Professeur de la Faculté des Sciences de Rabat pour avoir accepté d'être rapporteur et examinateur de ma thèse. Veuillez recevoir, Monsieur, l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur MANSOUR Mostafa Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Aïn chok casablanca, d'avoir accepté d'être rapporteur et examinateur de ma thèse, Veuillez recevoir Monsieur l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

Un grand merci à Monsieur AHL LAAMARA Rachid Professeur de la Faculté des Sciences

de Rabat, qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur et examinateur de mon travail, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Un grand merci aussi à Monsieur TAIBI Mohammed Professeur de la Faculté des Sciences de Aïn chok casablanca d'être examinateur de ma thèse. Veuillez recevoir l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

Je remercie les membres du jury de s'être intéressé à ce travail et d'avoir bien voulu accepter de l'examiner.

Mes sincères remerciements à mon Cher Professeur LFERD Mohammed Directeur CeDoc à la Faculté des Sciences de Rabat, avec qui j'ai l'honneur de travailler au sein du département de Physique, est qui m'a toujours encouragé de continuer dans la recherche académique.

Je tiens à remercier également toutes les personnes qui ont travaillé avec moi au sein du laboratoire. Je remercie en particulier Docteur Hanane EL HADFI pour leur soutien et leur gentillesse, et pour les échanges et les discussions, je remercie mon frère et ami Mostafa BOUSDER pour sa coopération avec moi je lui souhaite beaucoup de réussite. Ma reconnaissance à tous les doctorants anciens et nouveaux thésards du laboratoire de physique des hautes énergies simulation-modélisation.

Finalement, un grand Merci chaleureux à ma chère Femme Professeur Asmaa El Rmidi, pour son sacrifice et ses encouragements, sa présence dans ma vie a fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je te remercie sincèrement pour ton soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir.

Enfin, je remercie toutes les personnes, qui de loin ou de près ont contribué à l'aboutissement de cette étude.

Mes vifs remerciements vont aussi à ma chère sœur Amina Laghmach Professeur de physique à oujda pour sa présence continuelle malgré la distance et son intérêt indéniable à mes travaux de recherches.

A vous tous, du fond de mon cœur : Merci

A Mes chères enfants "Ayman Moubarek, Kawtar et Mohammed Jad que dieu les bénisse.

A Mes Neveux LAGHMACH Rabie et Sophia et Chiguer Ayoub, Meryem et Hajar, Snoussi Ikram, Yassin et Aya.

A tous ma famille sans aucune exception

A la mémoire de

Mon père Feu Mbarek Laghmach

Ma mère Feu Oumkaltoum Bouhou

Mes frères Feu Mohammed Laghmach et Feu Naïma Laghmach.

Résumé de la thèse

La tâche de la métrologie quantique est d'obtenir une estimation aussi précise que possible d'un ensemble de paramètres utilisant des sondes quantiques. Ainsi, la métrologie quantique multi-paramétrique offre un cadre aux applications technologiques très prometteuses. Dans cette thèse de doctorat intitulée " Contribution à l'étude du rôle des corrélations quantique dans les protocoles de métrologie quantique ", nous étudions comme mesures des corrélations quantiques dans des systèmes multipartites, l'incertitude quantique locale, la discordance quantique, l'information de Fisher et le pouvoir interférométrique. Nous discutons aussi la notion de discordance quantique entropique. Dans un schéma métrologique, les limites inhérentes comme : la limite quantique standard, la limite de Heisenberg et la borne de Cramér-Rao sont explicitement détaillées. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés aussi à la quantification analytique de l'information de Fisher et la métrologie quantique pour les états quasi Bell ainsi que le pouvoir interférométrique quantique. Nous montrons que les corrélations quantiques permettent l'amélioration des tâches d'estimation. Il s'en suit que l'exploitation de corrélation non classique est une ressource essentielle en métrologie quantique.

Mots-clés : Métrologie quantique, intrication, corrélation quantique, Limite quantique standard, discordance quantique, information de Fisher, état cohérent intriqué.

Abstract

The task of quantum metrology is to obtain an estimation as accurate as possible of a set of parameters using quantum probes. Thus, multi-parametric quantum metrology offers a framework for very promising technological applications. In this doctoral thesis entitled "Contribution to the Study of the Role of Quantum Correlations in Quantum Metrology Protocols", we study quantum correlations in multiparty systems, local quantum uncertainty, quantum discord, Fisher information and interferometric power as measures. We also discuss the notion of quantum entropy discord. In a metrological scheme, the inherent limits like : the standard quantum limit, the Heisenberg limit and the Cramer-Rao limit are explicitly detailed. In this thesis, we are also interested in the analytical quantification of Fisher information and quantum metrology for quasi-Bell states as well as quantum interferometric power. We show that quantum correlations allow the improvement of estimation tasks. It follows that the exploitation of unclassical correlation is an essential resource in quantum metrology.

Keywords : Quantum metrology, entanglement, quantum correlation, Limit standard quantum, quantum discord, Fisher information, coherent state entangled.

Table des figures

1.1	Transmissions de Signaux à Travers des cannaux	14
1.2	Sphère de Bloch	22
2.1	L'interféromètre de Mach-Zehnder	40
2.2	Interféromètre à un photon", BS : lame séparatrice	46
2.3	Transmission de Signaux à Travers des cannaux	47
2.4	Estimation des paramètres évoluant sous une transformation unitaire locale, qui dépend d'un paramètre φ non observable	52
3.1	Schéma illustrant les composants d'un diviseur de faisceau	69
3.2	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_1$ pour les états non antisymétriques $m = 0$	74
3.3	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_1$ pour les états antisymétriques $m = 1$	75
3.4	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_2$ pour les états non antisymétriques $m = 0$	76
3.5	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_2$ pour les états antisymétriques $m = 1$	77
3.6	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_3$ pour les états symétriques $m = 0$	78
3.7	Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_3$ pour les états antisymétriques $m = 1$	79
3.8	Allure de la discordie quantique entropique pour les états symétriques $m = 0$	80
3.9	Allure de la discordie quantique entropique pour les états antisymétriques $m = 1$	81
3.10	Pouvoir interférométrique quantique pour les états symétriques $m = 0$	83
3.11	Pouvoir interférométrique quantique pour les états antisymétriques $m = 1$	84
3.12	Allure de l'expression de l'incertitude locale quantique pour les états symétriques $m = 0$	86
3.13	Allure de l'expression de l'incertitude locale quantique pour les états antisymétriques $m = 1$	87

Table des matières

1	Mesures des corrélations quantiques dans les systèmes multipartites	13
1.1	Introduction	13
1.2	Théorie de l'information classique	14
1.2.1	Entropie de Shannon	14
1.2.2	Entropie conditionnelle ou conjointe et information mutuelle	15
1.3	Théorie de l'information quantique	15
1.3.1	Rappels utiles de la mécanique quantique	15
1.3.2	État quantique d'un système	16
1.3.3	État pur, état mixte	17
1.4	Martice densité	18
1.4.1	Opérateur densité réduite	19
1.4.2	Distance entre les opérateurs de densité	19
1.4.3	Fidélité	20
1.4.4	Négativité	20
1.5	Mesure quantique et les opérateurs de mesures à valeurs positives (OMVP) .	21
1.6	Bit Quantique et Sphère de Bloch	21
1.7	Intrication et corrélation quantique au-delà de l'intrication	23
1.7.1	Définition des états intriqués	23
1.7.2	Intrication dans des systèmes bipartites	24
1.7.3	Entropie de Von Neumann	25
1.8	Intrication dans des systèmes tripartites	27
1.9	Mesure des corrélations quantique au delà de l'intrication	28
1.9.1	Discorde quantique	28
1.9.2	La mesure géométrique de la discorde quantique	31
1.10	La monogamie de L'intrication et de corrélation quantique	34
1.10.1	La monogamie de l'intrication des états W et états GHZ	35
1.10.2	La monogamie de l'intrication pour les états mixtes (3 qubits où plus)	36
1.11	Conclusion	37

2	Corrélations quantiques en métrologie	38
2.1	Introduction	38
2.2	L'Interférométrie : exemple usuel en métrologie	39
2.2.1	Stratégie de la mesure classique	40
2.2.2	Stratégie de la mesure quantique	42
2.3	Formalismes des états quantiques	43
2.3.1	Les états de Fock	43
2.3.2	Les états cohérents	44
2.3.3	Les états NOON	47
2.4	Incertitude Quantique Local	48
2.4.1	Incertitude quantique	48
2.4.2	La discorde quantique et l'incertitude quantique locale	48
2.4.3	Aperçu géométrique de l'incertitude quantique locale	50
2.4.4	Inertitude quantique locale comme mesures des corrélations non clas- siques	51
2.5	Rôle des corrélations quantiques en métrologie quantique	51
2.6	Théorie d'estimation des paramètres classiques	53
2.6.1	Limite de Cramér-Rao et relation d'incertitude	53
2.6.2	Information de Fisher	54
2.6.3	Borne de Cramér-Rao	55
2.7	Estimation quantique des paramètres	56
2.8	Conclusion	58
3	Quantification analytique de l'information de Fisher	59
3.1	Introduction	59
3.2	Information de Fisher quantique	59
3.2.1	Propriétés de l'information de Fisher quantique	61
3.3	Théorie de l'information quantique	61
3.3.1	Information de Fisher pour les états purs	61
3.3.2	Information de Fisher quantique pour les états Mixtes	62
3.3.3	Quelques propriété de l'information de Fisher	65
3.3.4	Représentation matricielle de l'information quantique de Fisher . . .	65
3.4	Métrologie quantique pour les états quasi Bell	68
3.4.1	les états cohérents et les états quasi Bell	68
3.4.2	Mécanisme de perte de photon pour les états quasi Bell	68
3.4.3	Préparation de la sonde ρ_{AB} et l'information de Fisher quantique locale	70
3.4.4	Information de Fisher quantique locale	73
3.5	Discorde quantique entropique	79

3.6	Pouvoir interférométrique quantique	81
3.7	Incertitude locale quantique	84
3.8	conclusion	87
4	<i>Contributions</i>	88
	Conclusion générale	93
	Résumé de la thèse	94

Introduction générale

Née au début du XXe siècle, la mécanique quantique est une théorie qui est à l'origine de la plupart des avancées technologiques en exploitant les phénomènes mis en évidence par l'expérimentation à l'échelle des systèmes infiniment petit (atomes, électrons ou photons). Elle a radicalement changé notre compréhension de la matière et à ce niveau, les lois qui régissent les interactions physiques sont très différentes. Deux concepts principaux sont à la base de la formulation de la mécanique quantique, celui de "observables" et celui de "l'état" [1,2]. Le fait que la mécanique quantique soit non déterministe, entraîne une différence fondamentale par rapport à la description faite en mécanique classique. Un système classique peut être en principe totalement connu et s'il est régi par des lois déterministes, on connaît son passé et son futur parfaitement par exemple l'état d'une particule est spécifié par sa position x et son impulsion $p(x)$. Une telle description aussi précise est impossible en mécanique quantique. Ceci constitue un changement révolutionnaire dans notre compréhension du monde microscopique.

Le langage abstrait de la mécanique quantique permet de décrire un système quantique donné et surtout les mesures effectuées sur le système afin de comprendre ces propriétés. D'autre part, les lois de la mécanique quantique fournissent une base forte permettant de bien comprendre le comportement de la lumière et de la matière à l'échelle atomique. Elle a donné naissance à une multitude d'applications (transistors, lasers, imagerie par résonance magnétique IRM, les ordinateurs quantiques etc.). Le fonctionnement du transistor découvert en 1947 par les Américains John Bardeen, William Shockley et Walter Brattain, repose sur cette compréhension.

La théorie de l'information, dans le sens technique qu'on lui donne aujourd'hui, remonte au travail de Claude Shannon[4], qui a développé une théorie mathématique appelée théorie de l'information qui décrit les aspects les plus fondamentaux des systèmes de communication. Cette théorie s'intéresse à la construction et à l'étude de modèles mathématiques à l'aide essentiellement de la théorie des probabilités. Depuis ce premier exposé publié par C.Shannon en 1948[4], la théorie de l'information s'est faite de plus en plus précise et est devenue aujourd'hui incontournable dans la conception des systèmes de communication, au vrai sens du terme. Elle a été introduite comme moyen d'étudier et de résoudre les problèmes de communication ou de transmission de signaux à travers des canaux. L'extension de la théorie de l'information au cas quantique repose sur la possibilité d'exploiter les lois régissant les systèmes infiniment petits. La théorie de l'information quantique cherche à exploiter le principe de superposition et l'intrication.

L'intrication quantique est l'un des processus décrit par la mécanique quantique et qui est activement étudié par les physiciens. Il s'agit d'un phénomène physique dans lequel les

états quantiques d'un système de deux (ou plusieurs) particules sont dépendants même si les particules sont situées à une grande distance les unes des autres. En 1935, A. Einstein et ses collaborateurs publient des travaux sur l'intrication qui conduisent au principe de non-localité de la mécanique quantique. Les fameuses expériences de pensées dites du paradoxe (EPR), Einstein-Podolsky et Rosen[5] et du chat de Schrödinger[3] ont ainsi été proposées pour montrer l'opposition entre la mécanique quantique et une théorie réaliste et locale du monde physique. Selon ces expériences la mécanique quantique est une théorie incomplète vu qu'il est complètement impossible de mesurer un système quantique sans le perturber. Le phénomène d'intrication quantique est le plus étudié par la physique moderne durant ces dernières années. Il demeure encore un " mystère " aux yeux des physiciens, notamment en ce qu'elle semble contredire le principe de localité.

L'intrication quantique repose sur les principes mathématiques et physiques de la mécanique quantique, c'est-à-dire, les notions de vecteurs d'états et de produits tensoriels de ces vecteurs d'états d'un côté et les principes de superposition des états et de réduction du vecteur d'état de l'autre côté. Actuellement, l'intrication et les états " non classiques " présentent un intérêt car ils peuvent être utilisés dans des protocoles d'information ou de communication quantiques pour transmettre et coder l'information. En 1989, Greenberger-Horne-Zeilinger GHZ ont réalisé expérimentalement un nouveau type d'état GHZ énoncé un nouveau type d'états GHZ [8], qui joue un rôle important aussi dans le test de no-localité. Effectivement, l'apparition des états GHZ entraîne une grande discussion sur le complément de la mécanique quantique, ainsi que le traitement de l'information quantique.

La corrélation quantique mesurée dans des états intriqués, et celle des états séparables montrent un comportement plus résistant aux effets de l'environnement. Les résultats présentés dans cette thèse ont été développés pour contribuer à une meilleure compréhension des processus de génération et des outils de quantification des différentes formes des corrélations quantiques. Nous étudions dans ce contexte la mesure des corrélations quantiques au delà de l'intrication ainsi que la discordance quantique et sa variante géométrique.

L'information quantique est l'un des domaines les plus dynamiques de la physique quantique actuelle [10,18] , la notion et le concept d'information continuent d'attirer une grande attention scientifique et évoluer à une allure extrêmement rapide.

Cette thèse porte sur la métrologie quantique, elle est définie comme un champ de recherches prometteur qui associe la mécanique quantique et la métrologie classique. C'est une thématique de la recherche actuelle en physique théorique et expérimentale qui est en plein essor. Son objectif principal est d'explorer les capacités des systèmes quantiques qui, lorsqu'ils sont utilisés comme sondes détectant des paramètres physiques, permettent d'atteindre des précisions qui sont hors de portée des protocoles classiques. Pour cela, nous consacrons une grande partie pour les techniques générales qui permettent de quantifier la précision atteignable dans les schémas métrologiques, nous étudions l'interférométrie comme exemple usuel en métrologie quantique et quelques exemples d'application de la métrologie quantique multiparamétrique en utilisant l'interféromètre de Mach-Zehnder.

Les outils théoriques fondamentaux de ces études sont fournis par la théorie quantique d'estimation des paramètres en adoptant des protocoles d'estimation de la phase. Nous discutons un cadre mathématique qui est requis en général pour étudier les protocoles de métrologie quantique. Parmi les nombreuses ressources de la métrologie quantique, les états

cohérents qui offrent de meilleurs précisions en comparaison avec d'autres états comme les états de Fock. Nous nous intéresserons en particulier aux superposition d'états cohérents dites de types quasi Bell et nous étudions leur comportement dans un mécanisme de perte de photon. Nous quantifions la quantité de corrélations quantiques et le degré de précision de ces états dans un schéma métrologique d'interférométrie .

Structure du thèse

Le présent manuscrit se compose de quatre chapitres :

Chapitre 1 : Mesures des corrélations quantiques dans les systèmes multipartites

Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie d'information classique. Nous nous intéressons à la notion d'entropie notamment celle utilisée au théorie de l'information de Shanonn (Entropie de Shanonn), nous définissons ensuite comment ces notions de théorie de l'information classique peuvent être appliquées au monde quantique par l'entropie de Von Neumann associée à un état quantique. Après avoir rappelé l'intrication quantique pour les systèmes bipartites, nous définissons quelques mesures des corrélations quantiques pour les systèmes quantiques bipartites qui sont utiles dans les applications de la théorie quantique de l'information. Nous allons ensuite introduire les corrélations quantiques au delà de l'intrication, la discorde quantique et sa mesure géométrique en utilisant la norme de Hilbert Schmidt et la monogamie de l'intrication et de corrélation quantique pour les états W et les états GHZ[8] est également discutée.

Chapitre 2 : Corrélations quantiques en métrologie

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons le domaine de la métrologie quantique. Nous donnons le concept d'incertitude quantique locale (LQU) comme mesure de corrélation quantique de type discordant, à l'aide de la notion d'information de Wigner-Yanase[9]. Nous explicitons les concepts de la métrologie quantique comme l'information de Fisher et la borne de Cramér-Rao très importante dans le contexte de la métrologie quantique.

Chapitre 3 : Quantification Analytique de l'information de Fisher

Le troisième chapitre portera sur l'étude formelle de la quantification analytique de l'information de Fisher. Nous commençons par une brève description de la théorie classique des paramètres. Nous décrivons les concepts de base de l'information quantique de Fisher et la borne de Cramér-Rao. Nous nous concentrons sur la métrologie quantique pour les états quasi Bell dans ces deux formes (symétriques et antisymétriques). Cette étude porte sur l'utilisation des dynamiques locales particulières pour illustrer les comportements de ces états dans un système qui interagit avec l'environnement. Nous proposons de quantifier les corrélations quantiques non classiques par trois mesures (le pouvoir interférométrique, l'incertitude locale quantique et la discorde quantique entropique) pour comprendre l'effet de pertes de photons dans ce système ainsi pour déterminer lequel des états symétriques ou antisymétriques sont bons pour les applications technologiques.

Chapitre 4 : Contributions

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de nos propre résultats qu'on a publié dans l'article 1 (Dynamic of quantum Fisher information and quantum interfemetric power

in multipartite coherent states : ” Dynamique des corrélations quantiques dans des états cohérents multipartites via le pouvoir interférométrique) est axé sur l’application des états cohérents intriqués (ECS) dans le domaine de la métrologie quantique. Nous avons étudié également les effets des corrélations quantiques inclus dans les suppositions paires et impaires d’états cohérents de Glauber pour améliorer la précision d’un paramètre inconnu dans un contexte interférométrique. Dans ce sens, il est important d’étudier le comportement des corrélations quantiques pour déterminer les conditions dans lesquelles ces corrélations non classiques peuvent être utilisées pour améliorer les protocoles d’estimation des paramètres. Nous présentons l’expression explicite des informations quantiques de Fisher lorsque la dynamique du premier qubit est gouverné par un hamiltonien local. Nous discutons les situations où la meilleure estimation du paramètre de déphasage est obtenue. Nous donnons l’expression analytique du pouvoir interférométrique dans les états considérés et nous comparons ce quantificateur de corrélations quantiques à la discorde quantique entropique. Enfin nous analysons l’évolution dynamique des informations quantiques de Fisher évoluent dans un canal de déphasage pour examiner les effets de décohérence sur les protocoles d’estimation.

Un deuxième résultat a fait l’objet d’un deuxième article intitulé (Fisher and skew information for two-qubit Bell states under decoherence effects : l’information de Fisher pour les états de Bell à deux qubits sous effets de la décohérence). Dans cette article, nous avons étudié en détail les informations de Fisher pour un système à deux qubits sous les effets de décohérence. En particulier, nous avons présenté des résultats intéressants concernant la dynamique d’information quantique de Fisher (QFI) et de l’information asymétriques (SI) pour les états de Bell à deux qubits sous effets de décohérence. Nous avons notamment étudié l’évolution de ces deux grandeurs avec la température T et le paramètre anisotrope. Nous avons également comparé ces mesures à l’intrication thermique quantifiée. Les résultats obtenus indiquent que l’intrication thermique est une ressource efficace pour les protocoles de métrologie. En effet, nous avons montré que lorsque le modèle Heisenberg XY à deux qubits présente une quantité importante d’intrication, les états correspondants offrent la meilleure efficacité d’estimation. La deuxième aspect important étudié dans cet article concerne l’influence de canaux sur l’intrication thermique et son rôle dans l’amélioration ou la réduction de la précision de température. En particulier, nous avons montré que l’état thermique est plus résistant au PDC (Phase Damping Channel) et au DPC (Depolarizing Channel : canal d’épolarisant). Ce rapport se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Mesures des corrélations quantiques dans les systèmes multipartites

1.1 Introduction

Dans le présent chapitre nous allons nous intéresser à l'étude des notions de base de la théorie de l'information quantique. Nous allons rappeler la théorie d'information classique qui a été introduite par Claude Shannon en 1948 [4] pour décrire le stockage, la transmission et le traitement de l'information. Nous définissons les lois de la mécanique quantique permettant la description d'un système quantique à travers des axiomes et des formalismes mathématiques de la mécanique quantique et de la théorie de l'information classique qui sont nécessaires pour aborder la théorie de l'information quantique.

Dans la première partie allons introduire les notions d'entropie classique de Shannon, l'entropie conditionnelle et l'entropie relative. Nous définissons comment ces notions de la théorie de l'information classique peuvent être appliquées au monde quantique par l'entropie de Von Neumann qui est un prolongement naturel de l'information en théorie de l'information quantique de l'entropie de Shannon. Nous présenterons ensuite les outils mathématiques de base utilisés dans la description des états quantiques, en particulier la notion de bits quantiques supports indispensables pour coder l'information dans les états d'un système quantique, et le formalisme de l'opérateur densité, mesure quantique POVM etc.

Ce chapitre présentera encore quelques mesures qui nous permettent de distinguer entre les états qui contiennent des corrélations purement quantiques de ceux contenant uniquement des corrélations de nature classique. Après avoir rappelé l'intrication quantique pour les systèmes bipartites, nous introduisons quelques mesures des corrélations quantiques pour les systèmes quantiques bipartites qui sont utiles dans les applications de la théorie quantique de l'information, par exemple, la concurrence [6], l'intrication de formation [11] qui est basée sur la notion de la concurrence introduite par Wootters. Aussi, nous discutons les formalismes mathématiques de l'intrication dans les systèmes bipartites, cette intrication était depuis longtemps considérée comme synonyme de corrélation quantique, en utilisant quelques critères de séparabilité. Cependant certaines études récentes ont montré que l'intrication est non seulement un type particulier de corrélations quantiques. En effet, les états quantiques

non intriqués peuvent également posséder des corrélations quantiques qui jouent un rôle important dans l'amélioration des protocoles de communication et d'information quantique mieux que leurs analogues classiques [12]. Enfin nous allons introduire les corrélations quantiques au delà de l'intrication, la discordance quantique et sa mesure géométrique en utilisant la norme de Hilbert Schmidt et la monogamie de l'intrication et de corrélation quantique pour les états W et les états GHZ.

1.2 Théorie de l'information classique

1.2.1 Entropie de Shannon

En 1872 le physicien Boltzman est le premier qui a fourni une interprétation statistique de l'entropie thermodynamique ($S = k \ln W$). En 1948, dans son texte fondateur de la théorie de l'information, Shannon a défini la notion de la communication[4], qui se base sur celle de la probabilité et définit le terme " Bit " comme mesure logarithmique de l'information, ainsi que la notion d'entropie informatique (par analogie de celle de Boltzmann en physique statistique). Il a défini mathématiquement la capacité d'un canal de transmission " on peut transmettre l'information d'une façon fiable, tant que le débit ne dépasse pas cette capacité. Le bruit présent dans le canal ne limite pas la qualité de la communication, mais uniquement le débit de transmission".

Si X est une variable aléatoire discrète alors l'entropie de X ou l'incertitude de cette variable est définie par :

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log_2 p(x) \quad (1.1)$$

$H(X)$ est une fonction mathématique qui correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information.

Cette théorie probabiliste permettant aussi de quantifier le contenu moyen en information d'un ensemble de message, en particulier le domaine de communication ou de transmissions de signaux à travers des canaux, l'objet de cette théorie est de modéliser la communication avec ou sans bruit (Figure 1.1).

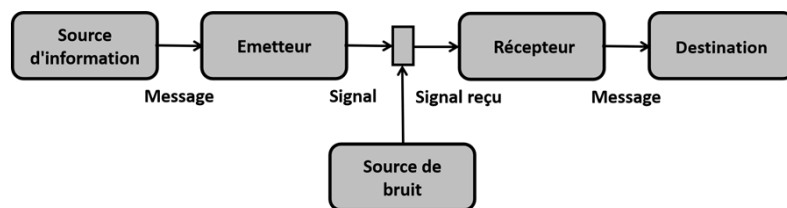


FIGURE 1.1 – Transmissions de Signaux à Travers des canaux

1.2.2 Entropie conditionnelle ou conjointe et information mutuelle

Grâce à l'entropie conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à une autre variable aléatoire Y on a pu écrire l'incertitude qu'on a sur X une fois qu'on a observé Y . Ainsi l'entropie conditionnelle représente une moyenne et l'incertitude qu'on a sur X peut varier selon les différentes réalisations de Y .

L'entropie conditionnelle ou l'incertitude conditionnelle est alors donnée par :

$$H(X/Y) = - \sum_{x,y} p(x)p(y/x) \log_2 p(y/x) \quad (1.2)$$

Plus généralement, lorsque X et Y sont deux séquences aléatoires, l'entropie conjointe $H(X, Y)$ est définie comme suit :

$$H(X, Y) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2(p(y/x)) \quad (1.3)$$

L'information mutuelle dans X et Y représente respectivement les informations communes entre X et Y et elle est définie par :

$$H(X : Y) = \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x, y) - \sum_x p(x) \log_2 p(x) \quad (1.4)$$

1.3 Théorie de l'information quantique

En mécanique quantique l'état d'un système est décrit par le vecteur d'état $|\psi\rangle$ qui a un caractère intrinsèquement probabiliste.

En physique classique l'état d'un système décrit d'une façon absolue et les résultats de mesures des grandeurs physiques sont bien précises. Une telle chose est impossible en physique quantique (non déterministe).

1.3.1 Rappels utiles de la mécanique quantique

Soit un système S appelée Espace de Hilbert complexe H telque tout vecteur de norme 1 de l'espace H définit un état possible du système S . Un espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe linéaire muni d'un produit scalaire, de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, est défini par une fonction $\langle x, x \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ de deux variables est appelée produit interne si

- Le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
- L'additivité $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ($x, y, z \in H$) ;
- Linéaire conjuguée $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- Propriété symétrie Hermitienne $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- La norme positive $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour $x \in H$ est nulle $\langle x, x \rangle = 0$ seulement si $x = 0$.

Il est intéressant de rappeler quelques notions fondamentales de la mécanique quantique.

$$\forall \psi, \varphi_1, \varphi_2 \in H; \text{ et } \forall a, b \in \mathbb{C} :$$

Soit le vecteur d'état du système appartenant à l'espace de Hilbert H ,

- La linéarité :

$$\langle \psi | a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = a \langle \psi | \varphi_1 \rangle + b \langle \psi | \varphi_2 \rangle$$

- Symétrie Hermitienne :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle^*$$

- La positivité :

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle > 0$$

- ψ est une fonction nulle.

$$\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Rightarrow \psi \text{ est nulle}$$

1.3.2 État quantique d'un système

Soit un système de deux qubits A et B, associés aux états $A(|0_A\rangle; |1_A\rangle)$ et le qubit $B(|0_B\rangle; |1_B\rangle)$

Supposons que chaque qubit se trouve dans un état de superposition alors :

- Pour le qubit A :

$$|\psi_A\rangle = a|0_A\rangle + b|1_A\rangle$$

- Pour le qubit B :

$$|\psi_B\rangle = c|0_B\rangle + d|1_B\rangle$$

- Pour le système (A; B)

$$|\psi_A\rangle |\psi_B\rangle = ac|0_A\rangle |0_B\rangle + ad|0_A\rangle |1_B\rangle + bc|1_A\rangle |0_B\rangle + bd|1_A\rangle |1_B\rangle$$

La simplification des notations conduit à :

$$|\psi_A\rangle |\psi_B\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

L'état d'un système quantique est représenté par la combinaison linéaire de plusieurs états fondamentaux ainsi, la superposition d'un état quantique $|\psi\rangle$ est donnée comme suit :

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \quad (1.5)$$

Avec $a_{i,j}$ étant des coefficients complexes et $|ij\rangle$ sont des vecteurs de base choisie.

Le bra associé au Ket $|\psi\rangle$ et la conjugué de $|\psi\rangle^*$ noté par $\langle\psi|$.

Le produit scalaire de deux kets $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ est noté par $\langle\psi|\varphi\rangle$ avec $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$

1.3.3 État pur, état mixte

a- État pur :

On définit l'état quantique comme une distribution de probabilité associé à chaque observable du système. Mathématiquement un état pur est représenté par un vecteur à l'instant t dans un espace de Hilbert $|\psi\rangle \in H$ toute grandeur A est représentée par un opérateur hermitien $\hat{A}$ agissant sur H .

On considère $|a_i\rangle$ des vecteurs propres de l'opérateur $\hat{A}$ alors ce vecteur admet la décomposition suivante :

$$|\psi\rangle = \sum_i C_i |a_i\rangle \quad (1.6)$$

Où C_i sont des nombres complexes de norme $\sum_i |C_i|^2 = 1$ et les $\{|a_i\rangle\}$ forment une base orthonormée de l'espace des états.

Soit ρ la matrice de densité alors si :

$$\tilde{\rho} = \langle \rho | \langle \psi | \psi \rangle | \rho \rangle = \tilde{\rho}^2 \quad (1.7)$$

et réciproquement si : $\tilde{\rho}^2 = \tilde{\rho}$ alors $\tilde{\rho}$ est une matrice densité d'un état pur. Les valeurs propres de $\tilde{\rho}$ vérifient $\lambda_k^2 = \lambda_k$ tel que : $\lambda_k \in \{0, 1\}$ et $\sum_k \lambda_k = 1$, donc il ya une seule valeur propre $\lambda_i = 1$ et toutes les autres valeurs sont nulles $\lambda_{k \neq i} = 0$ et $Tr(\rho^2) = 1$. Dans le cas général un état quantique bipartite $|\psi\rangle \in H = H_1 \otimes H_2$ est un état pur (de dimension d_1 et d_2) est séparable s'il peut être écrit comme un état produit tensoriel $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \equiv |\varphi_1\rangle$ avec $|\varphi_1\rangle \in H_1$ et $|\varphi_1, \varphi_2\rangle \in H_2$ si non $|\psi\rangle$ est un état intriqué.

Pour savoir si un état quelconque est intriqué ou séparable il est utile d'écrire cet état quantique pur à l'aide de la décomposition de Schmidt[13]

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i |u_i\rangle |v_i\rangle \quad (1.8)$$

Où d est le nombre non nul dit " Nombre de Schmidt" et les nombres positifs $\{\lambda_i\}$ sont dites coefficients de Schmidt et par conséquent les deux matrices densité réduites de $|\psi\rangle$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 |u_i\rangle \langle u_i| \\ \rho_2 &= \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 |v_i\rangle \langle v_i| \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ils ont les mêmes valeurs propres non nulles λ_i^2 et leur nombre totale est le nombre de Schmidt d .

b- État mixte :

Considérons un mélange statistique d'états dites états mixtes et soit les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_k$ de trouver notre système dans les états $1, 2, \dots, k, \dots$ satisfaisant :

$$\forall k \in k\{0, 1\}; \sum_k p_k = 1$$

La probabilité pour qu'une mesure de l'observable A donne le résultat a_n est donnée par :

$$p(a_n) = \sum_k p_k |\langle \psi | u_n \rangle|^2 = \sum_k p_k \text{Tr}\{p_k p_n\} = \text{Tr}\{\rho p_n\} \quad (1.10)$$

Un état mixte ρ peut être décomposer comme une combinaison convexe des états purs

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (1.11)$$

donc l'état $|\psi_1\rangle$ est préparé avec la probabilité p_1 , $|\psi_2\rangle$ préparé avec p_2 etc...

Si ρ est un état pur alors l'opérateur ρ est décomposé sous forme de produit tensoriel des états purs.

Pour un système bipartite, compte tenu de l'ambiguïté sur la préparation de l'état ρ , nous ne pouvons pas savoir si les corrélations entre ses deux sous-systèmes ont été produites à cause des interactions quantique entre les sous-systèmes ou bien par des opérations classique de LOCC (Local Operations and Classical Communication) et par conséquent un état mixte peut être considéré séparable c'est à dire classiquement corrélé s'il existe au moins un moyen de produire par des LOCC (Local Operations and Classical Communication : Opérations locales et communication classique) alors si ρ est intriqué c'est à dire quantiquement corrélé si entre toute les procédures permettant de le préparer il n'ya aucune parmi elles qui se repose seulement sur des opérations LOCC[14].

1.4 Martice densité

L'état d'un système quantique est pur, s'il peut être représenté par un vecteur unitaire dans l'espace de Hilbert. Dans la plus part des cas, le système quantique concerné peut être dans l'un des états purs $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ etc., avec des probabilités $p_1, p_2, \dots$ respectivement. Von Neumann a introduit l'opérateur densité pour représenter les états d'un système quantique [15]. Une matrice densité est une matrice positive, dont la trace est égale à 1.

Considérons un système quantique dans un des états $|\psi_i\rangle$ avec la probabilité p_i . L'ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ est un ensemble d'états purs. Alors, la matrice densité qui décrit le système est définie par l'équation :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.12)$$

Avec :

- ρ a une trace égale à un $\text{Tr}(\rho) = 1$;
- ρ est un opérateur positif $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$.

La matrice densité d'un système d'état correspond à $|\psi\rangle$ peut être exprimée à travers la matrice de Pauli et le vecteur de Bloch telque :

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\theta}{2}) & e^{-i\varphi} \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\varphi} \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin^2(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Avec $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. $n_1 = \sin(\theta) \sin(\varphi)$ et $n_2 = \sin(\theta) \cos(\varphi)$ et $n_3 = \cos(\theta)$ est le vecteur de Bloch et $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les matrices de Pauli données par :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.4.1 Opérateur densité réduite

Considérons un seul des sous-systèmes d'un système quantique composite. Alors si le système total est décrit par l'opérateur de densité ρ^{AB} alors le système de A est décrit par l'opérateur densité réduite :

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}) \quad (1.14)$$

où Tr_B est appelé trace partielle sur le sous-système B. La trace partielle est définie par

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle |b_2\rangle) = |a_1\rangle |a_2\rangle \text{Tr}(|b_1\rangle |b_2\rangle) = |a_1\rangle |a_2\rangle \langle b_2 | b_1 \rangle$$

avec $|a_1\rangle$ et $|a_2\rangle$ sont deux vecteurs dans H_A et $|b_1\rangle$ et $|b_2\rangle$ deux vecteurs dans H_B

La trace partielle est linéaire soit :

$$\text{Tr}_B(\rho^{AB} + \sigma^{AB}) = \text{Tr}_B(\rho^{AB}) + \text{Tr}_B(\sigma^{AB}) \quad (1.15)$$

1.4.2 Distance entre les opérateurs de densité

On définit la distance de trace par :

$$D_t(\rho - \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho - \sigma| \quad (1.16)$$

Où ρ, σ sont 2 opérateurs densité quelconques.

Pour un opérateur M , $\text{Tr} |M| = \sqrt{M^\dagger M}$ est la norme trace de l'opérateur M . Les valeurs propres non négatives λ_i et les vecteurs propres $|i\rangle$ définis comme $\sqrt{M^\dagger M} = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$. La distance de trace satisfait à toutes les propriétés d'une distance générale D :

- $D_t(\rho, \sigma) \geq 0$ et $D_t(\rho, \sigma) = 0$ si et seulement si $\rho = \sigma$;
- D_t est symétrique $D_t(\rho, \sigma) = D_t(\sigma, \rho)$;
- D_t satisfait l'inégalité triangulaire $D_t(\rho, \tau) \leq D_t(\rho, \sigma) + D_t(\sigma, \tau)$.

En théorie de l'information quantique la distance de trace a une interprétation importante égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} D_t(\rho, \sigma)$ qui est la probabilité optimale de succès pour distinguer deux états quantiques décrits par des opérateurs densité ρ, σ .

1.4.3 Fidélité

La fidélité est une mesure utilisée pour déterminer la proximité entre deux états et pour calculer le degré de ressemblance entre les états. Soit deux distributions de probabilité $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ et $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ d'un ensemble d'événement $\{1, 2, \dots, n\}$.

La fidélité entre les deux probabilités P et Q est définie par :

$$F(P, Q) = \sum_i p_i q_i \quad (1.17)$$

qui donne pour une distribution $F(P, P) = \sum_i p_i = 1$

Dans le cas quantique, la fidélité entre deux opérateurs de densité ρ, σ :

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}) \quad (1.18)$$

Lorsque ρ, σ commutent, ils peuvent être diagonalisés dans la même base, d'où $\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$ et $\sigma = \sum_i q_i |i\rangle \langle i|$ alors $F(\rho, \sigma) = \sum_i p_i q_i$, qui se réduit à la fidélité classique entre les distributions p_i et q_i .

Dans le cas où σ est pur : $\sigma = |\varphi\rangle \langle \varphi|$ donc $F(\rho, |\varphi\rangle \langle \varphi|) = \text{Tr}(\sqrt{\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle} |\varphi\rangle \langle \varphi|) = \sqrt{\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle}$

Dans le cas où ρ et σ sont purs : avec $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ et $\sigma = |\varphi\rangle \langle \varphi|$ alors $F(|\psi\rangle \langle \psi|, |\varphi\rangle \langle \varphi|) = |\langle \psi | \varphi \rangle|$

La fidélité possède quelques propriétés :

- La fidélité est comprise entre 0 et 1 : $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$;
- La fidélité de deux états purs est symétrique : $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$;
- La fidélité est invariante par transformation unitaire : $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$;
- La fidélité est reliée à la distance $D_t(\rho, \sigma)$ par : $1 - F(\rho, \sigma) \leq D_t(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)}$.

1.4.4 Négativité

La négativité est une mesure de l'intrication quantique introduite par Vidal [27], qui utilise la transposée partielle d'un état quantique ρ employé dans le critère de séparabilité. Cette mesure est considérée comme une version quantitative du critère de Perez-Horodecki selon Vidal [27].

La négativité et la négativité logarithmique sont basées sur la norme trace de transposée partielle de l'opérateur densité ρ d'un système bipartite. La négativité est définie par :

$$N(\rho) = \frac{\|{}^T \rho^A\|_1 - 1}{2} = 2 \sum_i \max(0, \mu_i) \quad (1.19)$$

Où μ_i étant les valeurs propres négatives, ${}^T \rho$ est la transposé partielle d'un état ρ . Avec :

$$\|{}^T \rho^A\|_1 = \text{Tr} \sqrt{A A^\dagger}$$

La négativité logarithmique est définie par :

$$E_N = \log_2 \|{}^T \rho\|_1 = \log_2 (1 + 2N(\rho)). \quad (1.20)$$

1.5 Mesure quantique et les opérateurs de mesures à valeurs positives (OMVP)

Les mesures quantiques sont décrites par une collection d'opérateurs de mesures $\{M_m\}$ qui vérifient la condition suivante :

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I} \quad (1.21)$$

Où I est l'opérateur identité. Lorsque le résultat d'une mesure sur l'état $|\psi\rangle$ est m , l'état du système après la mesure est donnée par :

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p_m}} \quad (1.22)$$

La probabilité d'obtenir le résultat m , correspondant à l'opérateur M_m est donnée par :

$$p_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (1.23)$$

Les mesures quantiques satisfont les propriétés suivantes :

- $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}$;
- $M_i M_j = \delta_{ij} M_i$;
- $M_m = M_m^\dagger$.

Les opérateurs de mesures à valeur positive sont des opérateurs qui donnent la formulation la plus générale d'une mesure dans la théorie de la physique quantique.

Ils s'agit d'opérateurs hermitiens $\{E_m\}$ non négatifs sur l'espace de Hilbert qui satisfait la condition de normalisation suivante :

$$\sum_m E_m = \sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I} \quad (1.24)$$

La probabilité d'obtenir l'élément E_m OMVP est :

$$p_m = \text{Tr}(\rho E_m) \quad (1.25)$$

1.6 Bit Quantique et Sphère de Bloch

En informatique quantique le qubit (quantum bit) est une unité élémentaire pour décrire un système physique comportant deux niveaux distincts. Un photon dans un état de polarisation horizontal ou vertical est un atome dans un état fondamental ou excité, les deux états de spin d'un électron up et down etc.

Un qubit est la petite unité de stockage d'information quantique. On représente généralement un qubit par l'expression $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ où α et β sont deux coefficients complexes

représentant les amplitudes de probabilités d'obtenir l'état $|1\rangle$ où l'état $|0\rangle$ lors d'une mesure de l'état $|\psi\rangle$, elles vérifient la condition de normalisation suivante : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Après la mesure, l'état du système $|\psi\rangle$ est modifié et devient l'état mesuré $|\psi'\rangle$.

Si les qubits $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ sont deux états tels que : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ et $|\varphi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ alors l'état composé de ces deux qubits est donné par le produit tensoriel :

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \quad (1.26)$$

Cette construction se formalise à des systèmes à plusieurs niveaux et à des systèmes comprenant plus de deux sous- systèmes.

Pour un système à n états (niveaux) tel que $n > 2$, on a des superpositions de différents états dans l'espace de Hilbert $H = C^n$

D'autre part, nous pouvons écrire l'état du système comme suit :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (1.27)$$

Avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$, sont des nombres réels définissant un point sur une sphère appelée (sphère de Bloch). La variation des ces deux variables permet à un état quantique de prendre toutes les valeurs sur la sphère de Bloch (figure 1.2).

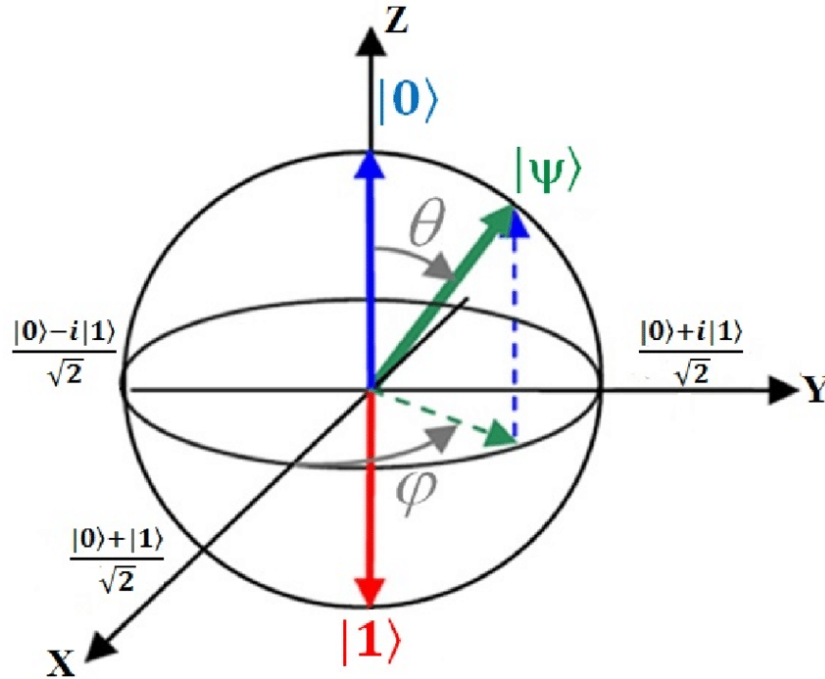


FIGURE 1.2 – Sphère de Bloch

L'équation (1.27) représente une image de l'espace des états d'un qubit et montre qu'il est possible de présenter de façon unique l'état par le vecteur de Bloch de coordonnées $\vec{r}(x, y, z)$ sur une sphère de rayon unité dans $\mathbb{R}^3$

Avec :

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (1.28)$$

La matrice densité du systèmes d'états purs $|\psi\rangle$ est exprimée à l'aide de trois matrices usuelles de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et du vecteur de Bloch $\vec{r}$.

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad (1.29)$$

Avec : $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$ où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et (n_x, n_y, n_z) tel que : $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$.

1.7 Intrication et corrélation quantique au-délà de l'intrication

1.7.1 Définition des états intriqués

Dans cette partie nous allons aborder l'intrication quantique. Cette notion a longtemps été considérée comme un élément essentiel en informatique quantique, il s'agit d'un phénomène physique dans lequel les états quantiques d'un système de deux (ou plusieurs) particules sont dépendants même si les particules sont à grande distance les unes des autres. Les deux objets doivent être décrits globalement sans pouvoir séparer l'un de l'autre.

L'intrication quantique est importante dans la description et l'étude de plusieurs concepts ou processus quantiques (non-localité, décohérence etc..). Il est même nécessaire à l'implémentation de nouveaux processus de traitement quantique de l'information (cryptographie quantique, téléportation, ordinateur quantique, etc.). L'intrication est une conséquence du principe de superposition et la structure du produit tensoriel de l'espace de Hilbert H . La question principale de la théorie de l'intrication quantique est : Pour un état arbitraire donné, comment peut-on déterminer si cet état est intriqué ou non ?.

Considérons l'état quantique $|\psi\rangle$ dans l'espace de Hilbert H à n dimension. Un état de deux système A et B est un vecteur dans l'espace de Hilbert $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ à $n \times n'$ dimension noté $|\psi\rangle_{AB}$.

Les éléments de l'espace H_{AB} s'écrivent comme suit :

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \text{ avec } C_{ij} \text{ complexes} \quad (1.30)$$

Un état $|\psi\rangle_{AB} \in H_A \otimes H_B$ est non intriqué ou bien séparable si l'on peut l'écrire sous la forme $|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ donc les deux systèmes sont indépendants.

Si on ne peut pas écrire l'état $|\psi\rangle_{AB}$ sous forme d'un produit tensoriel des états de deux sous-systèmes A et B , on dit que notre état est intriqué. Dans ce cas là on ne peut pas faire des mesures sur un système indépendamment de l'autre système.

Exemple : L'état quantique de deux qubits. L'état du système conjoint s'écrit comme un développement sur la base produit tensoriel des bases propres de deux qubits soit $\{|b\rangle \otimes |b'\rangle \Leftrightarrow |bb'\rangle\}$ du système où $b, b' \in \{0, 1\}$.

On peut donc écrire l'état global comme

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle \quad (1.31)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des coefficients complexes qui satisfont la condition de normalisation. Remarquons que l'état global ne peut se factoriser en produit tensoriel des états individuels des deux qubits donc $|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. On dit que les deux qubits sont intriqués, sinon on dit que l'état est séparable.

Par exemple l'état $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ est un état intriqué.

Ce type d'état entraîne des corrélations qui peuvent apparaître étrange à priori, la mesure de l'état du premier qubit projette l'état global. Nous avons donc projeté l'état du deuxième qubit sur celui du premier après la mesure sans l'avoir fait interagir directement avec l'appareil de mesure. Cela ne viole pas le principe de relativité restreinte car le résultat de la mesure est aléatoire.

1.7.2 Intrication dans des systèmes bipartites

La détection de l'intrication dans le traitement de l'information quantique ainsi que dans les calculs quantiques joue un rôle important dans plusieurs protocoles de la communication quantique.

Plusieurs mesures de la quantité d'intrication ont été proposées pour les systèmes quantiques multipartites [6,17], comme par exemple l'entropie de formation, la concurrence, la négativité logarithmique, etc., qui ont été utilisés pour quantifier les corrélations qui sont de nature quantique.

La concurrence et l'intrication de formation dans le cas pur et mixte

Pour quantifier l'intrication dans des systèmes de deux qubits, la mesure la plus simple et la plus utilisée est la concurrence qui a été proposé par Wootters [6]. Elle fournit un moyen pour décider de la séparabilité d'un système à deux qubits.

Le théorème de l'intrication pour les états purs est donnée par [17] :

$$E(|\psi\rangle) = \xi(C(|\psi\rangle))$$

Où la concurrence C est définie par $C(|\psi\rangle) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right|$ avec $|\psi\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle$ et σ_y la transformation de spin-flip. Le Tilde représente l'opérateur spin-flip défini par $|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle$ avec σ_y est la matrice de pauli.

La fonction ξ est défini par :

$$\xi(C) = H\left(\frac{1 + \sqrt{C^2}}{2}\right) \quad (1.32)$$

avec $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$. Si $C = 0$ on dit alors que l'état est séparable et si $C = 1$ l'état est maximalement intriqué.

- Pour les états mixtes de deux qubits la concurrence est définie par

$$C(\rho) = \text{Max} \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (1.33)$$

Où λ_i sont les valeurs propres dans l'ordre décroissant de la matrice Hermitienne suivante :

$$M = \sqrt{\rho \tilde{\rho} \rho} \quad (1.34)$$

Exemple : Considérons un état pur $|\psi\rangle$ à deux qubits défini par :

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (1.35)$$

où α_{ij} satisfaisent la condition de normalisation $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$

- On définit la concurrence par $C(|\psi\rangle) = 2 |\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}|$

donc la concurrence est égal à 0 pour un état séparable si $\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0$ et égal à 1 pour un état maximalement intriqué.

- L'intrication de formation est largement étudiée pour quantifier les corrélations quantiques. Elle permet la mesure de l'intrication d'un système bipartite général, et permet la caractérisation des corrélations non classiques au delà d'autres critères (décomposition de Schmidt). Pour un état pur $|\psi\rangle$ l'intrication de formation est exprimée en terme de la concurrence $C(|\psi\rangle)$ par la relation :

$$E(|\psi\rangle) = \xi(C(|\psi\rangle)) \quad (1.36)$$

Où la fonction ξ est donnée par l'équation (1.35).

- La concurrence pour un état mixte de deux qubits est définie par :

$$C(\rho) = \inf \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle) \quad (1.37)$$

Où $C(|\psi_i\rangle)$ est la concurrence de l'état $|\psi_i\rangle$.

Wooters et Hill [11] ont obtenu une formule explicite de la concurrence est donnée par (équation 1.33) avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ avec (ρ^* le complexe conjugué de ρ).

L'intrication de formation d'un état mixte de deux qubits définie par

$$E(\rho) = \xi(C(\rho)) \quad (1.38)$$

1.7.3 Entropie de Von Neumann

L'entropie de Von Neumann a été introduite par John Von Neumann en 1932 près de 16 ans avant l'entropie de Shannon (1948). Cette Théorie est la version quantique qui remplace l'entropie de Shannon sur laquelle se base la théorie classique d'information [33]. L'entropie

de Von Neumann a une interprétation en terme de ressources pour coder l'information[13]. Elle est basée sur la notion de la densité de probabilité. C'est l'entropie la plus étudiée et la plus utilisée.

L'Entropie de Von Neumann mesure l'information contenue dans un système quantique. Pour un opérateur densité, elle est définie par

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log(\rho)) \quad (1.39)$$

Pour un état pur $S(\rho) = 0$

Par un simple calcul on peut démontrer que l'entropie $S(\rho)$ ne dépend que des valeurs propres de la matrice densité :

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log(\rho)) = -Tr\left(\sum_i \lambda_i |u_i\rangle \langle u_i| \log(\lambda_i |u_i\rangle \langle u_i|)\right)$$

d'où

$$S(\rho) = -Tr\left(\left(\sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) |u_i\rangle \langle u_i| \langle u_i| \langle u_i|\right)\right) = -\sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) = H(\lambda_i) \quad (1.40)$$

Quelques propriétés de L'Entropie $S(\rho)$ sont comme suit :

- Positivité $S(\rho) \geq 0$.
- L'entropie est inchangé par un changement unitaire de base : $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.
- Si $S(\rho) = 0$

$$S(\rho) = 1 \log(1) + 0 \log(0) = 0$$

- L'entropie atteint sa valeur maximale : $S(\rho) = 1$ pour l'état $\rho = \mathbb{I}$ (Matrice Identité).

$$S\left(\frac{1}{N}\mathbb{I}\right) = -\frac{1}{N}Tr(\log_2 \frac{1}{N}\mathbb{I})N = \log_2 N \quad (1.41)$$

Pour un système AB composé de deux systèmes A et B indépendants :

- $S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2)$
- $S(\rho_{AB}) \leq S(Tr_A(\rho_{AB})) + S(Tr_B(\rho_{AB}))$
- $S(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i \lambda_i S(p_i)$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$
- Si $S = \sum_i^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ alors : $S(\rho) \leq H(p_1 \dots p_N)$

D'une façon général on peut considéré l'entropie de Von Neumann comme l'entropie de shannon du spectre d'un état quantique.

Par analogie avec l'entropie de shannon on peut définir l'entropie conjointe et conditionnelle de Von Neumann.

Soit AB un système composé, par analogie avec l'entropie de Shanonn, l'entropie conditionnelle est définie par :

$$S(A/B) = S(A, B) - S(B) \quad (1.42)$$

L'entropie conjointe $S(A, B)$ de Von Neumann est définie par :

$$S(A, B) = S(\rho_{AB}) = -Tr \rho_{AB} \log \rho_{AB} \quad (1.43)$$

Et l'information mutuelle de Von Neumann :

$$S(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (1.44)$$

L'information mutuelle quantique quantifie la mesure des corrélations totales entre les sous-systèmes du système global.

1.8 Intrication dans des systèmes tripartites

Actuellement, le traitement quantique de l'information ainsi que le calcul quantique ont considérablement attiré l'attention des chercheurs de la communauté scientifique[7]. L'intrication a été considéré pendant longtemps comme la principale ressource du traitement quantique de l'information où elle joue un rôle important dans de nombreux protocoles quantique[19,20].

Dans les systèmes multiples, il est difficile de quantifier les corrélations quantiques, pour cela il faut noter que la décomposition par pair des corrélations totales offre une bonne alternative pour évaluer la quantité de toutes les corrélations existantes dans un système multipartites.

Dans un système tripartites A-B-C, la corrélation totale peut être écrite comme la somme de deux corrélations bipartites, donc soit la corrélation partagée entre A et B où entre A et le sous-système B-C. Il vient alors la corrélation totale peut être dérivée en termes des corrélations bipartites [22].

La mesure des corrélations quantiques tripartites peut être définie comme la somme des corrélations quantiques dans toute les partitions possibles du système en entier.

Nous considérons un système à trois qubits A-B-C. Les qubits peuvent être intriqués par pair, c'est à dire que A peut être intriqué avec soit B ou C, ou bien deux qubits peuvent partager certaines intrications avec le troisième qubit. Ces types d'intrications peuvent être quantifiés.

Les différents types d'intrication peuvent être quantifiés par le type de l'intrication tripartite appelée " le tangle"

Tangle-2 : Pour un état pur de 3 qubits qui est définie comme :

$$\tau_2 = \frac{C_{12}^2 + C_{23}^2 + C_{13}^2}{3} \quad (1.45)$$

Où C_{ik} est la concurrence entre les paires des qubits i et k . L'intrication entre un qubit et les deux autres qubits, considéré comme un qubit logique, est donnée par :

$$C_{i(jk)} = \sqrt{2(1 - \text{tr}(\rho_i^2))} \quad (1.46)$$

Où ρ_i est la matrice densité réduite du qubit i obtenu. Si l'état du troisième qubit est un état produit, ρ_i est pur alors ($\rho_i = \rho_i^2$) et donc $\text{Tr}(\rho_i^2) = 1$ donc $C_{i(jk)} = 0$.

Pour un état intriqué $Tr(\rho_i^2) < 0$ et $C_{i(jk)} > 0$ dans le cas où l'état est maximalement intriqué. Cependant, lorsque le qubit i est intriqué avec les 2 autres, cette intrication a lieu avec un seul d'entre eux ou avec les deux, et peut être quantifier par "tangle-3" définie par :

$$\tau_3 = C_{i(jk)}^2 - (C_{(ij)}^2 + C_{(ik)}^2) \quad (1.47)$$

Où $C_{(ij)}^2 + C_{(ik)}^2$ est la concurrence bipartite entre i et j ou i et k .

La différence entre l'intrication pur "tangle2" et "tangle-3" peut être maintenue en considérant les états GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) et W [23] :

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (1.48)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (1.49)$$

La différence entre ces états est évidente donc si nous effectuons une mesure sur un des trois qubits. Dans le cas de l'état GHZ si on mesure le troisième qubit et on obtient le résultat 0 donc le système est dans l'état $|000\rangle$ qui n'est pas un état intriqué et donc la mesure de l'une de ces qubits détruit complètement l'intrication. Il s'agit par consequence de l'intrication "tangle-3". Par contre si on mesure le troisième qubit de l'état W et on obtient le résultat 0 donc on se retrouve avec l'état $|010\rangle + |100\rangle$. Dans ce cas les deux premiers qubits sont maximalement intriqués il s'agit de l'intrication par paires " tangle-2".

1.9 Mesure des corrélations quantique au delà de l'intrication

1.9.1 Discorde quantique

La discorde quantique est une mesure quantitative des corrélations quantiques au delà de l'intrication. Elle a été proposée par Olivier et Zurek en 2001[24]. Ils ont suggéré dans ce fameux article l'utilisation de mesures de types Von Neumann pour quantifier la discorde quantique et qui va au delà de l'entropie de formation. Il s'agit de la différence entre l'information mutuelle entre deux systèmes (classique et quantique)

$$D(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB}) = S(\rho_B) + \check{S}_{\min} - S(\rho_{AB}) \quad (1.50)$$

Vue que l'information mutuelle fait partie de la discorde quantique, elle est définie à partir de l'information mutuelle classique (Voir équation 1.4) :

$$H(X : Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 p(x,y) - \sum_x p(y) \log_2 p(y)$$

Et dans la théorie de l'information quantique, les mesures peuvent perturber les systèmes quantiques et les deux expressions équivalentes de l'information mutuelle I et J sont incompatibles, les variables X et Y dans (équation 1.4) sont remplacés par ρ_{AB} qui représente la

matrice densité de l'ensemble du système AB , $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ et $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ les deux matrices densités réduites de sous-système A et de sous-système B . L'entropie de Von Neumann et $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log(\rho))$, où les variables aléatoires sont remplacés par les matrices densité ρ_{AB} .

où $I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, $J(\rho_{AB})$ les corrélations classique et avec $S(\rho)$ est l'entropie de Von Neumann d'un état quantique ρ .

Notons bien que en général, il est très difficile d'obtenir une expression analytique de la discorde quantique. La discorde quantique est une mesure quantifiant les corrélations d'origine purement quantique et elle possède quelques propriétés que sont

- * En cas général la discorde quantique est une quantité non symétrique $D(\rho_{AB}) \neq D(\rho_{BA})$.
- * La discorde quantique est positive $D(\rho_{AB}) \geq 0$ et égale à 0 pour les états classiquement corrélés donc $D(\rho_A) = D(\rho_B) = 0$
- * La valeur de la discorde quantique est supérieur ou égale à l'entropie de Von Neumann puisque l'information mutuelle peut être écrite sous la forme :

$$J(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_A/\rho_B) \quad (1.51)$$

où l'entropie quantique conditionnelle $S(\rho_A/\rho_B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$, et puisque l'information mutuelle contient à la fois des corrélations classiques et quantiques entre les deux sous-systèmes on peut donc écrire :

$$I(\rho_{AB}) = C(\rho_{AB}) + D(\rho_{AB}) \quad (1.52)$$

Où $C(\rho_{AB})$ correspond à la partie classique des corrélations.

Exemple : Calcul de la discorde quantique pour les états bipartites de forme X

La matrice densité d'un état de ce système à deux qubits AB de forme X est représenté dans la base standard $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ par

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{30} & 0 & 0 & \rho_{33} \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

On peut la représenter dans la base $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$ comme suit

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{03} & 0 & 0 \\ \rho_{30} & \rho_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11} & \rho_{12} \\ 0 & 0 & \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\rho_{AB} = (\rho_{AB})_1 + (\rho_{AB})_2$$

Avec

$$(\rho_{AB})_1 = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{03} \\ \rho_{30} & \rho_{33} \end{bmatrix} \text{ et } (\rho_{AB})_2 = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice densité ρ_{AB} de deux qubits sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_1\right)^2 - \det(\rho_{AB})_1} \text{ et} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_2\right)^2 - \det(\rho_{AB})_2} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Nous considérons dans la suite du problème la situation où ρ_{AB} est de rang 2 il suffit donc de supposer que $\det(\rho_{AB})_1 = \det(\rho_{AB})_2 = 0$.

Les valeurs propres (1.63) deviennent $\lambda_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_1 = \rho_{00} + \rho_{33}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho_{AB})_2 = \rho_{11} + \rho_{22}$

notez bien que $\lambda_1^+ + \lambda_2^+ = 1$ c'est à dire que $\text{tr}(\rho_{(\rho_{AB})_1}) \neq 0$ et $\text{tr}(\rho_{(\rho_{AB})_2}) \neq 0$

En utilisant ici la méthode de purification de la relation Koachi-Winter[26] cette relation établit la connexion entre la corrélation classique de l'état bipartite ρ_{AB} et l'entropie de formation de son complément ρ_{BC}

La matrice densité ρ_{AB} peut être réécrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{|\rho_{30}|^2 + |\rho_{33}|^2}} \{ \rho_{30} |00\rangle + \rho_{33} |11\rangle \} \text{ et} \\ |\psi_2\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{|\rho_{12}|^2 + |\rho_{22}|^2}} \{ \rho_{12} |00\rangle + \rho_{22} |11\rangle \} \end{aligned} \quad (1.56)$$

En attachant un qubit C au système de deux qubits A et B

$$|\psi\rangle_{ABC} = \sqrt{\lambda_1^+} |\psi_1\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_C + \sqrt{\lambda_2^+} |\psi_2\rangle_{AB} \otimes |1\rangle_C \quad (1.57)$$

Et puisque l'ensemble du système ABC est décrit par la matrice densité pur $\rho_{ABC} = |\psi\rangle_{ABC} \langle\psi|_{ABC}$, d'après toujours la relation Koachi-Winter[26] la valeur de l'entropie conditionnelle qui coïncide avec l'entropie de formation de la matrice densité ρ_{BC} est :

$$\tilde{S}_{\min} = E(\rho_{BC}) \quad (1.58)$$

$E(\rho_{BC})$ est donnée par :

$$E(\rho_{BC}) = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - |C(\rho_{BC})|^2}\right) \quad (1.59)$$

où $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ est la fonction d'entropie binaire et $C(\rho_{BC})$ est la concurrence de la matrice densité ρ_{BC} qui est donnée par

$$|C(\rho_{BC})|^2 = \frac{4(\rho_{00} + \rho_{33})(\rho_{11} + \rho_{22})(\rho_{30}\rho_{12} - \rho_{22}\rho_{33})}{(|\rho_{30}|^2 + |\rho_{33}|^2)(|\rho_{12}|^2 + |\rho_{22}|^2)} \quad (1.60)$$

La relation Kochi-Winter et la procédure de purification nous fournissent une expression calculable de la discorde quantique dans l'état bipartite ρ_{AB} . Cette expression est donnée par :

$$D(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}) + E(\rho_{BC}) \quad (1.61)$$

Avec :

$$S(\rho_{AB}) = -\lambda_1^+ \log_2 \lambda_1^+ - \lambda_2^+ \log_2 \lambda_2^+$$

Les deux entropies $S(\rho_A)$ et $S(\rho_B)$ sont données par :

$$S(\rho_A) = -\lambda_1^A \log_2 \lambda_1^A - \lambda_2^A \log_2 \lambda_2^A \quad \text{et} \quad S(\rho_B) = -\lambda_1^B \log_2 \lambda_1^B - \lambda_2^B \log_2 \lambda_2^B$$

Avec :

$$\lambda_1^A = \rho_{00} + \rho_{11} , \quad \lambda_2^A = \rho_{22} + \rho_{33} \quad \text{et} \quad \lambda_1^B = \rho_{00} + \rho_{22} , \quad \lambda_2^B = \rho_{11} + \rho_{33}$$

En remplaçant ces equations des valeurs propres dans (l'équation 1.50) la discorde quantique dans l'état ρ_{AB} est donnée par

$$D(\rho_{AB}) = H(\rho_{00}+\rho_{11})-H(\rho_{00}+\rho_{33})+H\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1-4(\rho_{00}+\rho_{33})(\rho_{11}+\rho_{22})(\rho_{30}\rho_{12}-\rho_{22}\rho_{33})}{(|\rho_{30}^2|+|\rho_{33}^2|)(|\rho_{12}^2|+|\rho_{22}^2|)}\right)\right) \quad (1.62)$$

Il faut noter qu'en cas général, il n'existe pas de méthode analytique pour calculer la discorde quantique pour une densité de rang strictement supérieur à deux qubits.

1.9.2 La mesure géométrique de la discorde quantique

Dans la partie précédente nous avons définie la discorde quantique par le biais de l'entropie de Von Neumann et nous avons déterminé l'expression de la discorde quantique et ses différentes propriétés. Nous avons également obtenu la relation entre cette quantité et l'intrication (intrication de formation, concurrence etc..). Dans ce qui est suit nous allons introduire le formalisme de la discorde quantique géométrique.

La distance de Hilbert-Schmidt

La difficulté d'obtenir des solutions analytiques pour la discorde quantique. Darik [21] propose une mesure géométrique de la discorde quantique. La corrélation quantique est quantifié à l'aide de la distance de Hilbert-Schmidt entre l'état considéré et l'état de la discorde quantique. Cette distance est donnée par la relation :

$$D_A^{(2)}(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|^2 \quad (1.63)$$

Où Ω_0 désigne l'ensemble des états de discorde nulle et $\|X - Y\|^2 = \text{Tr}(X - Y)^2$ où $\|X\|^2 = \text{Tr}(X^\top X)$ est la norme de Hilbert-Schmidt [21]. χ désigne un éléments de l'espace

des états de discorde nulle. Un état $\chi \in H_A \otimes H_B$ est de discorde égale à zéro. Elle s'écrit comme :

$$\chi = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \otimes \rho_i \quad (1.64)$$

Où p_i est une distribution de probabilité, $\{|\psi_i\rangle\}$ est une base orthogonale arbitraire agissant sur H_A et ρ_i est un ensemble d'états arbitraires (opérateur de densité) agissant sur H_B . Darik et al [21] ont également obtenu une expression simple pour calculer mathématiquement la mesure géométrique de la discorde quantique pour un système à deux qubits. Dans la décomposition de Bloch un état bipartite ρ s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{4} [\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \otimes \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 y_i \mathbb{I} \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^3 T_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j] \quad (1.65)$$

Où $x_i = \text{Tr} \rho(\sigma_i \otimes \mathbb{I})$ et $y_i = \text{Tr} \rho(\mathbb{I} \otimes \sigma_i)$ sont les composantes des vecteurs locaux de Bloch et $\sigma_i \{i = 1, 2, 3\}$ sont les trois matrices de Pauli et $R_{i,j} = \text{Tr} \rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)$ sont les composantes du tenseur de corrélations pour chaque état ρ .

Pour chaque état ρ . Nous associons un triple $\{\vec{x}, \vec{y}, R\}$ nous caractérisons l'ensemble Ω_0 par les états de la discorde nulle ayant la forme χ où $\{|\psi_1\rangle; |\psi_2\rangle\}$ est une base orthogonale et avec ρ_1 et ρ_2 sont les matrices densités d'ordre 2×2 et p_1, p_2 sont des nombres positifs satisfaisant la relation $p_1 + p_2 = 1$

Nous considérons $t = p_1 - p_2$ et les trois vecteurs telque

$$\vec{e} = \langle \psi_1 | \vec{\sigma} | \psi_1 \rangle \quad \text{et} \quad \vec{S}_{\pm} = \text{Tr}(p_1 \rho_1 \pm p_2 \rho_2)$$

Il est facile de démontrer que $\vec{e}$ et $\vec{S}_{+}$ représente les vecteurs de Bloch locaux du premier et second qubit. Les vecteurs $\vec{S}_{-}$ est directement lié au tenseur de corrélation de la forme $T = \vec{e} \vec{S}_{-}^T$ et par conséquent un état de discorde nulle est associé au vecteur $\vec{\chi} = \{t \vec{e}, \vec{S}_{+}, \vec{e} \vec{S}_{-}^T\}$. La distance entre l'état ρ_{AB} et χ est donnée par

$$\begin{aligned} \|\rho_{AB} - \chi\|^2 &= \|\rho_{AB}\|^2 - 2\text{Tr} \rho_{AB} \chi + \|\chi\|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{I} + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|T\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbb{I} + t \vec{x} \cdot \vec{e} + \vec{y} \cdot \vec{S}_{+} + \vec{e}^T T \vec{S}_{-}) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\mathbb{I} + t^2 + \|\vec{S}_{+}\|^2 + \|\vec{S}_{-}\|^2) \end{aligned} \quad (1.66)$$

où $\|T\|^2 = \text{Tr}(T^T T)$

Nous optimisons la distance en fonction des paramètres $\vec{S}_{\pm}$ et t , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\rho_{AB} - \chi\|^2}{\partial t} &= \frac{1}{2} (-\vec{x} \cdot \vec{e} + t) = 0 \\ \frac{\partial \|\rho_{AB} - \chi\|^2}{\partial \vec{S}_{+}} &= \frac{1}{2} (-\vec{y} + \vec{S}_{+}) = 0 \\ \frac{\partial \|\rho_{AB} - \chi\|^2}{\partial \vec{S}_{-}} &= \frac{1}{2} (-\vec{T}^T \vec{e} + \vec{S}_{-}) = 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

La solution est $t = \vec{x} \vec{e}$; $\vec{S}_+ = \vec{y}$; et $\vec{S}_- = \vec{T}^t \vec{e}$

Nous reportons cette solution dans l'équation (1.66), pour obtenir :

$$\|\rho_{AB} - \chi\|^2 = \frac{1}{4}(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{R}\|^2 - \vec{e}(\vec{x} \vec{x}^t + R R^t) \vec{e}) \quad (1.68)$$

Nous considérons la matrice $K = x x^t + R R^t$. La mesure géométrique de la discorde quantique est donnée par :

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4}(\|x\|^2 + \|R\|^2 - \lambda_{\max}) \quad (1.69)$$

où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de la matrice K .

Il est facile de vérifier que $\|x\|^2 + \|R\|^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ avec λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de la matrice K .

Exemple : On considère un état de Type X de deux qubits dont la matrice densité est représenté dans la base de calcul standard $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ par :

$$\rho_X = \begin{bmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{30} & 0 & 0 & \rho_{33} \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

L'état X peut être réécrite dans la représentation de Fano-Bloch avec la matrice de corrélation R qui est donnée par :

$$R = \begin{bmatrix} \rho_{03} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{30} & i(\rho_{03} - \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{30}) & 0 \\ i(\rho_{03} + \rho_{12} - \rho_{21} - \rho_{30}) & -\rho_{03} + \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{30} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{00} - \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Et $x = (0, 0, \rho_{00} + \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33})^T$. La discorde quantique géométrique, peut être calculée selon l'équation(1.69) donnée par :

$$D_g(\rho) = \frac{1}{4}\{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3 + \lambda_1\} \quad (1.72)$$

Où les valeurs propres de la matrice K en terme d'éléments de la matrice densité ρ_X

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|)^2 \quad \text{et} \\ \lambda_2 &= 4(|\rho_{12}| - |\rho_{03}|)^2 \quad \text{et} \\ \lambda_3 &= 2[(\rho_{00} - \rho_{22})^2 + (\rho_{11} - \rho_{33})^2] \end{aligned} \quad (1.73)$$

Puisque $\lambda_1 > \lambda_2$ alors on doit traiter uniquement, les deux cas séparément de la MGDQ qui est $\lambda_1 \leq \lambda_3$ et $\lambda_1 \geq \lambda_3$

- Pour $\lambda_1 \leq \lambda_3$ la mesure géométrique de la discorde quantique est :

$$D_g(\rho_X) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (1.74)$$

- Et pour $\lambda_1 \geq \lambda_3$ alors :

$$D_g(\rho_X) = \frac{1}{4}(\lambda_2 + \lambda_3). \quad (1.75)$$

1.10 La monogamie de L'intrication et de corrélation quantique

En général, la monogamie est considéré comme une propriété fondamentale de l'intrication, dans ce contexte, la monogamie signifie par exemple, que si 2 systèmes quantique (telque deux photos par exemple) sont intriqués au maximum, ils se trouvent alors dans un état commun " pur".

L'inégalité de la monogamie nous dit que si une particule A dans un système quantique multipartite est intriquée avec une autre particule B, alors A ne peut pas être intriquée avec d'autres particules à l'exception de B. Contrairement aux corrélations classiques qui peuvent être partagées entre plusieurs parties du systèmes multiples [7].

Si deux parties d'un système multipartite est maximalelement intriqué alors aucun intrication peut être tranférer au reste des qubits du système [53]. Cette propriété de la monogamie de l'intrication [48,67] et introduite par Coffman, Kundu et Wootters en 2000 [27]. Les auteurs ont montré la relation de monogamie en trois qubits et une généralisation à plusieurs qubits a été proposée par Osborne et al [28].

En effet, une forte intrication entre deux systèmes quantiques conduit à une faible intrication avec d'autres systèmes.

La monogamie d'intrication pour les états purs (en fonction de la concurrence entre qubit A et la pair BC)

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq C_{A(BC)}^2 \quad (1.76)$$

La monogamie d'intrication pour les états mixtes, soit $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ avec l'ensemble de toute la décomposition d'états purs $\{(\psi_i, p_i)\}$

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq (C_{A(BC)}^2)^{\min} \quad (1.77)$$

la monogamie d'intrication pour les systèmes arbitraires, soit $\rho_{A_1, \dots, A_n}$ un état à n quits donc

$$C_{A_1 A_2}^2 + \dots + C_{A_1 A_n}^2 \leq C_{A_1 (A_2 \dots A_n)}^2 \quad (1.78)$$

On peut même exprimer le concept de la monogamie de l'intrication par $E_{A/B}$ (l'intrication partagée entre A et B) et ($E_{A/BC}$ l'intrication partagée entre A et le système composite comprenant B et C) on dit E est monogame si et seulement si

$$E_{A/B} + E_{A/C} \leq E_{A/BC} \quad (1.79)$$

cette inégalité traduit le principe de la monogamie. La quantité d'intrication partagée entre A et B limite la quantité possible d'intrication entre A et C de sorte que leur somme ne dépasse pas l'intrication bipartite totale entre A et le système composite BC.

On conclu que la monogamie de corrélation quantique, qui implique qualitativement que de forte corrélation entre deux systèmes quantiques conduises à leurs faibles corrélation avec d'autres systèmes et par conséquence pour un état tripartite ρ_{ABC} la monogamie de corrélation de discorde quantique donne l'inégalité suivante ;

$$D(\rho_{AB}) + D(\rho_{AC}) \leq D(\rho_{ABC}) \quad (1.80)$$

Et la monogamie de corrélation de discord géométrique quantique donne :

$$D_g(\rho_{AB}) + D_g(\rho_{AC}) \leq D_g(\rho_{ABC}) \quad (1.81)$$

Avec : $\rho_{AB} = \text{Tr}_C(\rho_{ABC})$ et $\rho_{AC} = \text{Tr}_B(\rho_{ABC})$.

1.10.1 La monogamie de l'intrication des états W et états GHZ

Soit l'état pur $|\phi\rangle$ à trois qubits $|\phi\rangle_{ABC} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Avec :

$$|\phi\rangle_{ABC} = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}^1 \phi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} |\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\rangle \quad (1.82)$$

$\{|\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\rangle \equiv |\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_3\rangle\}$ et la base des trois qubits, par exemple l'état $|000\rangle$ représente trois spin "Up". Les huit coefficients $\{\phi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}\}$ sont des nombres complexes satisfaisant la contrainte de normalisation $\langle\phi|\phi\rangle = 1$. Nous nous focalisons sur deux types bien distincts étudiés précédemment les états du type W[68] et les états de type GHZ[69]. Voir (1.48) et (1.49).

On désigne son intrication bipartite par rapport à trois bipartitions possibles par $\tau_{A/BC}$, $\tau_{B/AC}$, $\tau_{C/AB}$. Nous définissons la valeur du tangle moyen par :

$$\tau_1(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) = \frac{\tau_{A/BC} + \tau_{B/AC} + \tau_{C/AB}}{3} \quad (1.83)$$

Le tangle moyen τ_1 est toujours positif et pour le système à trois qubits le tangle ne peut pas être supérieur à l'unité, cette valeur maximale est obtenue par l'état GHZ c'est à dire

$$\tau_1(|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 1 \quad (1.84)$$

D'autres part, on définit une seconde mesure pour le tangle de trois qubits notée τ_2 basée sur la notion de la tangle de deux qubits cohérent à un état de trois qubits $|\phi\rangle_{ABC}$ donnée par :

$$\tau_2(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) = \frac{\tau_{A/B} + \tau_{B/C} + \tau_{A/C}}{3} \quad (1.85)$$

Où $\tau_{A/B}$ (de même pour $\tau_{B/C}$, $\tau_{A/C}$) désigne $\tau(\rho_{AB})$ où ρ_{AB} (de même ρ_{BC} et ρ_{AC}) est la matrice de densité réduite de deux qubits obtenue à partir de $|\phi\rangle_{ABC}$. Pour l'état GHZ :

$$\tau_2(|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 0 \quad (1.86)$$

Parce que chaque matrice de densité réduite de deux qubits dans $|GHZ\rangle_{ABC}$ est séparable. Donc :

$$\tau_1(|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 1 > \tau_2(|GHZ\rangle_{ABC} \langle GHZ|) = 0 \quad (1.87)$$

Cette inégalité entre τ_1 et τ_2 est toujours valable pour tout état pur arbitraire de trois qubits $|\phi\rangle_{ABC}$.

Cette inégalité n'est jamais saturée par un état intriqué de trois qubits. Le tangle moyen $\tau_2(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|)$ dans cette inégalité est maximal pour l'état W :

$$\tau_2(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) \leq \tau_2(|W\rangle_{ABC} \langle W|) = \frac{4}{9} \quad (1.88)$$

Cette limite supérieur résulte de la formule fermée donnée par[7] :

$$\tau(\rho_{AB}) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2 \quad \text{pour} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \quad (1.89)$$

Les états de type W ont la forme :

$$|\phi\rangle_{ABC} = \alpha |000\rangle_{ABC} + \beta |010\rangle_{ABC} + \gamma |001\rangle_{ABC} \quad (1.90)$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

L'état W est cas particulier dans lequel $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pour les états de type W, en utilisant l'expression du tangle défini par [17] (voir équation 1.88).

Il est facile de voir que :

$$\tau_{A/BC} = \tau_{A/B} + \tau_{A/C} \quad (1.91)$$

Les états de type Waturent la relation de la monogamie. Par conséquent, cette égalité implique aussi pour un état W de trois qubits de la forme $|\phi\rangle_{ABC}$ nous avons :

$$\tau_1(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) = 2\tau_2(|\phi\rangle_{ABC} \langle\phi|) \quad (1.92)$$

A ce niveau, il faut signaler que la première caractérisation du concept de monogamie des corrélations quantiques a été formulée l'équation (1.91) spécifiquement Coffman, Kundu et Wootters, pour tout état à trois qubits[27]ont montré que

$$\tau_{A/BC} \geq \tau_{A/B} + \tau_{A/C} \quad (1.93)$$

1.10.2 La monogamie de l'intrication pour les états mixtes (3 qubits où plus)

Pour un état mixte de trois qubits représenté par $\rho_{ABC} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_{ABC} \langle\psi_i|$ et supposons que $\{p_i, |\psi_i\rangle_{ABC}\}$ la décomposition optimale minimisant le tangle moyen de ρ_{ABC} par rapport à la bipartition A/BC entre le sous-système A et BC . on a

$$\tau_{A/BC}(\rho_{ABC}) = \sum_i p_i \tau_{A/BC}(|\psi_i\rangle_{ABC} \langle\psi_i|) \quad (1.94)$$

Comme chaque $|\psi_i\rangle_{ABC}$ dans la décomposition est un état pur de trois qubits donc il satisfait l'inégalité de la monogamie[11] $E_{ABC} = E_{A/BC} - E_{A/B} - E_{A/C}$ ainsi pour chaque i

$$\tau_{A/BC}(|\psi_i\rangle_{ABC} \langle\psi_i|) \geq \tau(\rho_{AB}^i) + \tau(\rho_{AC}^i) \quad (1.95)$$

avec ρ_{AB}^i et ρ_{AC}^i sont les matrices de densités réduite de $|\psi_i\rangle_{ABC}$ sur les sous-systèmes AB et AC , donc l'inégalité de la monogamie. Voir (1.87) et (1.88), pour n'importe quel état mixte de n qubits $\rho_{A_1, A_2, \dots, A_n}$ où $\rho_{A_1 A_i}$ désigne la matrice densité réduite agissant sur les sous-systèmes $A_1 A_i$ pour $i = 2, \dots, n$

1.11 Conclusion

Le monde quantique révèle parfois d'étranges phénomènes. L'un des phénomènes décrit par la mécanique quantique est l'intrication quantique qui est admise comme étant une ressource quantique indispensable dans le traitement de l'information quantique et dans des applications en informatique quantique (la cryptographie, téléportation quantique et les réseaux quantiques etc.).

Malgré les activités actuelles de recherches intenses notre compréhension de l'intrication et de la corrélation quantique est encore loin d'être achevée.

Dans ce chapitre nous avons présenté les outils théoriques de base nécessaires à la compréhension des phénomènes physiques "la théorie de l'information quantique".

Nous avons ainsi introduit les mesures quantiques telles la concurrence, la fidélité etc., et nous avons également discuté l'intrication quantique et la notion de séparabilité. Nous avons aussi discuté la discordance quantique qui permet de classer les états selon leur degré d'intrication et nous avons donné sa variante géométrique basée sur l'utilisation de la distance Hilbert-Schmidt.

Finalement nous avons discuté la notion de la monogamie d'intrication. Il est important de souligner que les expressions de mesures des corrélations quantiques que nous avons discuté dans ce chapitre ne concernent que des systèmes à deux qubits.

Ces corrélations seront développées davantage dans le contexte de la métrologie quantique qui sera étudiée en détail dans les chapitres qui vont suivre.

Chapitre 2

Corrélations quantiques en métrologie

2.1 Introduction

La métrologie se traduit par "la science de la Mesure". Elle s'intéresse à la détermination de caractéristiques (appelée grandeurs) qui peuvent être fondamentales comme par exemple "une longueur, une masse, un temps etc. Mesurer une grandeur physique consiste à lui attribuer une valeur quantitative en prenant pour référence une grandeur de même nature appelée Unité. Dans le langage des "Métrologues" on entend souvent dire mesurer c'est comparer!

La métrologie quantique est l'axe de recherche qui étudie les propriétés des systèmes quantiques. Dans des protocoles métrologiques il est naturel de voir si la corrélation quantique autre que l'intrication peut améliorer la précision. Girolami et al[29], ont introduit le concept d'incertitude quantique locale (LQU) comme mesures de corrélations quantiques de type discorde. Elle est définie comme l'incertitude minimale induite par la mesure d'une seule observable local sur un état quantique à l'aide de la notion de l'information de Wigner-Yanase[9]. Cette mesure satisfait à toute les exigences physiques d'une mesure de corrélation quantique.

L'incertitude quantique locale est aussi liée à l'information quantique de Fisher (QFI) dans le contexte de la métrologie quantique. En effet, il a été prouvé que dans le cas de la dynamique unitaire d'un état, l'information de Wigner - Yanase est bornée par l'information quantique de Fisher associée au paramètre de phase et l'analogue quantique de l'inégalité Cramer-Rao classique peut être écrit en termes d'information de Wigner - Yanase[32,33].

Récemment, le concept de l'information locale de Fisher quantique (LQFI) a été introduit dans la référence [34]. Le quantificateur est de type discorde quantique et il est basé sur la minimisation de l'information quantique de Fisher par rapport à un observable local d'information maximale associé à un des sous-systèmes. De plus, l'information de Fisher quantique locale offre un outil prometteur pour comprendre le rôle des corrélations quantiques autres que l'intrication dans l'amélioration des précisions et de l'efficacité des protocoles de métrologies.

Nous commençons par montrer, grâce à un exemple introductif, en quoi des techniques quantiques peuvent permettre de dépasser les limites des stratégies de mesure standard que

nous appellerons ” Classique”. Nous poserons ensuite un cadre plus formel à notre discussion en présentant les éléments de la théorie de l'estimation avant de développer dans le chapitre suivant les concepts de Fisher et l'information de Fisher quantique.

Dans la théorie quantique de la lumière il existe plusieurs façons de décrire l'état d'un champ électromagnétique. Nous présentons dans ce chapitre les états de Fock et les états cohérents ainsi que les états NOON. Finalement, nous allons définir l'incertitude quantique local et la discordance quantique liée à cette incertitude ainsi que l'aperçu géométrique de l'incertitude quantique locale comme mesures des corrélations non classiques. On introduit aussi la théorie d'estimation des paramètres classiques (limite de Cramér-Rao, information de Fisher et la borne de Cramér-Rao etc..) ainsi que l'estimation quantique des paramètres (information de Fisher et Borne de Cramér-Rao quantique).

2.2 L'Interférométrie : exemple usuel en métrologie

La mesure par l'interférométrie est très utilisée en métrologie. Il s'agit de la méthode traditionnelle pour mesurer des phases. Son fonctionnement général repose sur une interférence provenant de la comparaison de phases accumulées le long de deux chemins différents. L'exemple prototype de dispositif associé est l'interféromètre de Mach-Zender représenté sur la figure (2.1).

Le principe est le suivant : La lumière entre l'appareil par le mode d'entrée A d'une lame semi-réfléchissante (B étant laissé vide) se propage selon deux chemins différents avant d'être recombinaisonnée par une deuxième lame semi-réfléchissante et de ressortir par les voies C et D .

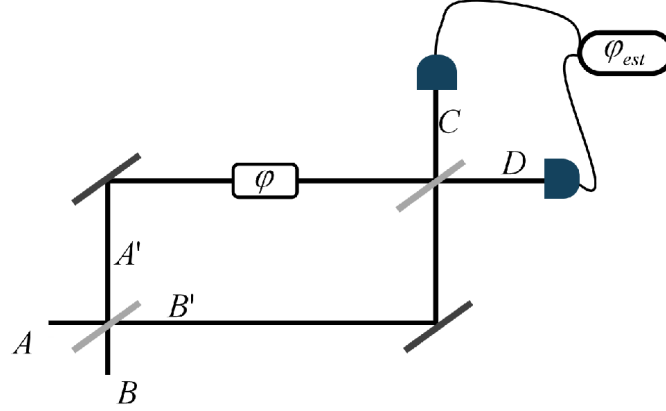
La différence de chemins optiques entre les deux bras de l'interféromètre se matérialise par un déphasage de la lumière, noté φ , sur un déphasage par rapport à l'autre. L'information sur cette phase, objet de mesure interférométrique peut être obtenue en détectant la lumière issues des deux voies de sortie (mesure par exemple la différence d'intensité).

Nous allons utiliser le formalisme mathématique de la mécanique quantique pour étudier ce processus de mesure. Chaque état lumineux présent dans les modes A , B , C et D de l'interféromètre Mach-Zender [49] peut être décomposé en état de Fock[35] de la lumière $|n\rangle$ contenant n quanta d'énergie.

Ces états correspondant aux états propres de l'opérateur $\tilde{N}$ qui est appelé ” opérateur nombre”. Pour le mode A , on définit les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ correspondant aux opérateurs annihilation et création qui sont conjugués l'un de l'autre. Leurs actions sur les états de Fock et la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}\tag{2.1}$$

FIGURE 2.1 – L'interféromètre de Mach-Zehnder



Dans le mode A . Les deux opérateurs vérifient la relation de commutation suivante $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. On définit de même les opérateurs d'annihilation pour les autres modes $\hat{b}$, $\hat{c}$ et $\hat{d}$ est associés respectivement aux modes B , C et D .

Les expressions de $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sont données par :

$$\hat{c} \equiv \frac{(\hat{a}' + ie^{i\varphi}\hat{b}')}{\sqrt{2}} \text{ et } \hat{d} \equiv \frac{(i\hat{a}' + e^{i\varphi}\hat{b}')}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

Avec les opérateurs d'annihilation associés aux deux chemins intermédiaires A' et B' juste après la première lame séparatrice sont données par :

$$\hat{a}' \equiv \frac{(\hat{a} + i\hat{b})}{\sqrt{2}} \text{ et } \hat{b}' \equiv \frac{(i\hat{a} + \hat{b})}{\sqrt{2}} \quad (2.3)$$

Ces relations nous permettent de déduire les opérateurs d'annihilation dans les modes C et D à la sortie de l'interféromètre en fonction de ceux des modes A et B

$$\hat{c} \equiv \frac{\hat{a}(1 - ie^{i\varphi}) + i\hat{b}(1 + e^{i\varphi})}{2} \quad \text{et} \quad \hat{d} \equiv \frac{i\hat{a}(1 + ie^{i\varphi}) - \hat{b}(1 - ie^{i\varphi})}{2} \quad (2.4)$$

2.2.1 Stratégie de la mesure classique

Il s'agit d'une stratégie simple de mesure classique du paramètre φ qui consiste à injecter par le mode A un faisceau classique. Quels sont les états classiques à choisir pour représenter les états d'excitation d'un oscillateur avec le formalisme quantique ?

Il s'agit des états cohérents, introduit par Glauber [36] et notés $|\alpha\rangle$. Ils correspondent aux états propres de l'opérateurs annihilation du mode (dans notre cas $\hat{a}$) associé aux valeurs propres α donc :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.5)$$

Ces états cohérents se décomposent dans la base des états de Fock sous la forme :

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle. \quad (2.6)$$

Ce qui veut dire qu'un état cohérent n'a pas un nombre de photons fixé mais que la distribution des photons dans chaque état de Fock est une distribution poissonnienne centrée autour de la valeur moyenne $\bar{n} = |\alpha|^2$ de l'opérateur nombre prise pour $|\alpha\rangle$ et de variance $\Delta n = \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{|\alpha|^2}$.

Supposons que nous injectons par la voie A un état cohérent $|\alpha\rangle$ contenant un nombre $\bar{n} = N$ de photons en moyenne et le vide par la voie B . Nous noterons cet état $|0, \alpha\rangle$, nous pouvons calculer l'action de $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sur cet état

$$\begin{aligned} \hat{c}|0, \alpha\rangle &= \frac{\alpha}{2}(1 - e^{-i\varphi})|0, \alpha\rangle \\ \hat{d}|0, \alpha\rangle &= \frac{i\alpha}{2}(1 + e^{-i\varphi})|0, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il est aisé d'en déduire le nombre de photons détectés sur chaque voie en sortie de l'interféromètre :

$$\begin{aligned} N_c &= \langle 0, \alpha | \hat{c}^\dagger \hat{c} | 0, \alpha \rangle = \frac{N}{2}(1 - \cos \varphi) \\ N_d &= \langle 0, \alpha | \hat{d}^\dagger \hat{d} | 0, \alpha \rangle = \frac{N}{2}(1 + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous détectons une fraction $\cos^2(\frac{\varphi}{2})$ des photons dans la voie D et d'autre fraction $\sin^2(\frac{\varphi}{2})$ dans la voie C . La différence des signaux de détections des deux voies donne un signal S d'amplitude N . Oscillant en φ , et contenant toute l'information reçue par les deux détecteurs

$$S = N_d - N_c = N \cos \varphi \quad (2.9)$$

Instinctivement, on a envie d'assimiler la précision accessible sur la mesure de φ au plus petit déphasage que l'on peut mesurer avec ces franges. De manière plus générale et symétrique, on peut quantifier l'erreur sur la mesure donnée par l'interféromètre que l'écart-type $\Delta(\varphi)$ obtenu sur φ qui égale à l'écart-type sur le signal S .

$$\Delta^T \varphi = \frac{\Delta S}{\left| \frac{\delta S}{\delta \varphi} \right|}, \quad \text{et soit :} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{N} |\sin \varphi|} \quad (2.10)$$

La sensibilité η de l'interféromètre est définie comme l'inverse de $\Delta \varphi$. Ces quantités dépendent ici de la valeur de la phase elle-même. Si l'on place l'interféromètre à la phase correspondant au maximum de pente, c'est à dire ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc le maximum de précision $\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$). Cette limite sur la précision correspond ici à la limite quantique standard. Elle est due à la quantification du champ qui fait apparaître les photons comme des entités individuelles.

Regardons le même dispositif expérimental dans lequel on aurait introduit un photon unique, objet résolument non classique, par la voie A (on laisse toujours la deuxième voie B vide) . Dans ce cas, avec le même raisonnement que précédemment, on trouve que le photon est détecté avec une probabilité $\cos^2(\frac{\varphi}{2})$ dans le mode D est une probabilité $\sin^2(\frac{\varphi}{2})$ dans le mode C . Le signal S devient

$$S = N_d - N_c = \cos \varphi \quad (2.11)$$

Toujours en se plaçant à mi-pente de frange ainsi obtenue, on en déduit que l'écart-type le plus petit que l'on peut avoir sur φ vaut 1. Si l'on répète la mesure un grand nombre N de fois (toujours un seul photon individuel), le théorème de la limite centrale établit que la moyenne d'un grand nombre de mesures indépendantes (ici N), ayant chacun un écart-type $\Delta\varphi^{(1)}$, converge vers une distribution gaussienne d'écart-type $\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi^{(1)}}{\sqrt{N}}$ qui donnait l'écart-type obtenu pour la mesure d'un état cohérent contenant en moyenne N photons. Le nom de bruit de grenaille associé au bruit de photon intrinsèque de l'état cohérent et donc très parlant. . C'est en effet l'indépendance de chacun des photons dans l'état cohérent qui fixe la limite quantique standard. On peut y voir un reflet de l'inégalité de Heisenberg (ici qualitative) liant nombre photons et phase

$$\Delta\varphi\Delta N \geq 1 \quad (2.12)$$

Puisque le bruit sur le nombre de photon $\sqrt{N}$ de l'état initial impose alors $\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$ [41].

Toutefois, la mécanique quantique n'impose pas que ΔN soit limité à $\sqrt{N}$, on sait qu'en remédiant à ce problème d'indépendance des photons on pourrait probablement augmenter encore la précision. Les stratégies basées sur les états non classique, avec par exemple des corrélations quantiques ont été développées pour cette raison.

2.2.2 Stratégie de la mesure quantique

Considérons à présent la situation suivante : nous envoyons les N photons ensemble dans l'interféromètre par le mode A (toujours rien dans le mode B qui est vide) et nous remplaçons la première lame séparatrice par " une lame séparatrice spéciale" permettant de préparer la superposition d'états suivante dans l'interféromètre[38]

$$|\psi_{int}\rangle = \frac{|N, 0\rangle_{A', B'} + |0, N\rangle_{A', B'}}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

On peut noter que expérimentalement cet état maximalement intriqué multi-photons a été réalisé jusqu'à $N = 3$ à partir d'un état non intriqué. On pourra trouver le détail d'un des processus de préparations possibles pour deux photons dans la référence[39] et pour trois photons dans la référence[40].

Seuls les photons présents dans le bras supérieur vont subir un déphasage de φ et l'état devient :

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{e^{iN\varphi} |N, 0\rangle_{A', B'} + |0, N\rangle_{A', B'}}{\sqrt{2}} \quad (2.14)$$

Comme précédemment, on va relier la précision sur l'estimation de la phase à la distinction de l'état initial et de l'état déphasé et donc à leur recouvrement. Le facteur N dans le déphasage accumulé dans la dynamique se retrouve directement dans la probabilité de détecter l'état final $|\psi_{out}\rangle$ identique à l'état initial $|\psi_{int}\rangle$ qui vaut ainsi $P = \cos^2(\frac{N\varphi}{2})$.

Cette fois l'écart-type $\Delta\varphi$ prend l'expression suivante :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta P}{\left| \frac{\delta P}{\delta\varphi} \right|} = \frac{1}{N} \quad (2.15)$$

Avec le même nombre N de photons, cette nouvelle stratégie d'intrication des photons nous a donc permis de gagner un facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ par rapport à la limite quantique standard atteinte pour des états décorrélés. On peut montrer que le nouvelle écart-type correspond à n'importe quelle mesure de déphasage [41,42] pour ce nombre moyen de photon, elle est appelée Limite de Heseinberg. A travers l'exemple d'un processus de mesure interférométrique, nous avons montré que les caractéristiques propres à la physique quantique pouvaient permettre d'augmenter substantiellement la précision que l'on peut obtenir sur la mesure d'un paramètre. Ceci sert de motivation aux sections qui vont suivre, posant le cadre plus général et aussi plus formel de la théorie de l'estimation d'un paramètre. Nous reviendrons sur certains des notions que nous avons fait apparaître dans cet exemple et qui sont de fait d'importance majeur.

2.3 Formalismes des états quantiques

Pendant longtemps, les physiciens ont pensé que la lumière pouvait être entièrement décrite comme une onde électromagnétique classique obeissant aux équations de Maxwell.

Cependant, au cours des dernières décennies, il est devenu impossible à comprendre dans le contexte de l'électromagnétique classique, et exigeant l'utilisation de formalisme de l'optique quantique. Ce domaine se prête aux applications de la métrologie quantique[44,45]. De nombreux protocoles ont été examinés en exploitant les propriétés de certains états non-classique afin d'estimer un paramètre physique avec la meilleure précision. Nous présentons ici les états de Fock, les états cohérents et les états NOON ainsi que la représentation de Heisenberg qui nous seront utiles par la suite dans ce chapitre.

2.3.1 Les états de Fock

Les états de Fock, bien qu'apparaissant naturel lors de la quantification théorique du champ, sont délicats à obtenir expérimentalement. D'un point de vue mathématique, c'est une représentation de l'algèbre de Lie de Heisenberg, introduit par V.A.Fock dans les année 30 pour mathématiser certaines théories de la physique quantique. Ces états jouent cependant un rôle central dans l'étude du champ électromagnétique quantifié (à titre d'exemple). En optique quantique les états nombre ou états Fock sont utilisés pour les variables discrètes où le champ électromagnétique quantifié s'écrit :

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 w_k}} (a_k(t)u_k(r) + a_k^\dagger u_k^*(r))$$

Où $a_k^\dagger$ et a_k sont les opérateurs de création et d'annihilation des photons dans le mode k , l'état de vide est défini par $a_k |0\rangle = 0$

Il est aussi parfois appelé état fondamental, parcequ'il correspond à l'état de plus basse énergie du système physique utilisé. Les états de Fock sont des états propres de l'opérateur de nombre $N_k = a_k^\dagger a_k$ ($a_k^\dagger a_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle$) où n_k représente le nombre d'excitation dans le k -ième mode qui sont appelés photons. Les opérateurs de création $a_k^\dagger$ et d'annihilation a_k créent et annihilent respectivement des photons

$$a_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \text{ et } a_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \quad (2.16)$$

Les états $|n_k\rangle$ peuvent être produits à partir de vide comme suit :

$$|n_k\rangle = \frac{(a_k^\dagger)^n}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle \quad (2.17)$$

Les états monomodes $\{|n_k\rangle\}$ constituent une base orthonormée et complète.

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{kk} \text{ et } \sum_k |n_k\rangle \langle n_k| = 1$$

Pour différents modes, l'espace de Fock est engendré par $|n_k\rangle = |n_{k1}\rangle \otimes |n_{k2}\rangle \otimes \dots = |n_{k1}, n_{k2}, \dots\rangle$. Où on a n_{k1} photons présents dans le mode k_1 , et n_{k2} photons présents dans le mode k_2 .

Dans l'espace de Fock, on connaît avec précision le nombre de photons dans chaque mode donné. Nous constatons que pour un très grand nombre de photons, la description en terme d'état de Fock devient compliquée dès lorsque le système subit des pertes. Ainsi, ces états ne sont pas adaptés pour la description de faisceau relativement intenses.

2.3.2 Les états cohérents

Les états cohérents ont été introduit la première fois par Schrödinger en 1927[43] comme solution au problème de l'oscillateur harmonique quantique dans le but de retrouver les expressions du mouvement classique de la masse oscillante. Dans les années 60 ces états ont été utilisés comme états de la lumière dans le cadre du développement d'une théorie quantique de l'optique. Glauber a largement contribué au développement des états cohérents (on les appelle aussi des états Glauber) dont nous allons très brièvement rappeler certains résultats [36]

Les états cohérents sont les analogues les plus proches des ondes planes progressives monochromatiques dans le cadre de l'optique géométrique et de l'électromagnétique. De tels états sont les états classiques qui peuvent être trouvés dans le domaine de l'optique quantique. Ils peuvent être produits par un laser qui fonctionne très au-dessus du seuil. Un faisceau laser classique peut être représenté dans l'espace de phase par un point bien défini correspond à une amplitude $|\alpha|$ et une phase ϕ . Par contre pour un état cohérent, l'amplitude $|\alpha|$ et la phase ϕ sont des valeurs moyennes, à laquelle s'ajoutent des fluctuations quantiques. Plus rigoureusement, les états cohérents, où également états quasi-classiques, sont les états $|\alpha\rangle$ pour

lequels, la valeur moyenne de l'amplitude et celle de l'énergie de champ électromagnétique quantifié dans un mode quelconque sont égales à celles du champ classique.

$$\langle \alpha | (\hat{a}e^{i(kr-wt)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(kr-wt)}) | \alpha \rangle = \alpha e^{i(kr-wt)} - \alpha^* e^{-i(kr-wt)} \quad (2.18)$$

$$\hbar w \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \hbar w |\alpha|^2 \quad (2.19)$$

Les deux équations (2.18) et (2.19) sont suffisantes pour définir les états cohérents $|\alpha\rangle$ comme étant les états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$ d'un oscillateur harmonique

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad \text{et} \quad \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \alpha^* \quad (2.20)$$

où α est une valeur propre nécessairement complexe puisque l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$ n'est pas Hermitien. Elle constitue l'amplitude complexe de l'état cohérent $|\alpha\rangle$

Exemple 1 : Génération d'un état cohérent

Dans l'espace des phases, considérons l'opérateur $\hat{D}(\alpha)$ appelé opérateur déplacement et défini par

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad \text{avec} \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = 1. \quad (2.21)$$

L'opérateur déplacement peut être décomposé à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\frac{-1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} = e^{\frac{+1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \quad (2.22)$$

Sous l'action de $\hat{D}(\alpha)$, les opérateurs annihilation et création peuvent être transformés en :

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^* \end{aligned} \quad (2.23)$$

De plus on a $\hat{a} \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \hat{D}(\alpha) (\hat{a} + \alpha) |0\rangle = \alpha (\hat{D}(\alpha) |0\rangle)$. On peut alors conclure en utilisant la définition (2.20) qu'un état cohérent est un état du vide déplacé dans l'espace de phase tel que $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$.

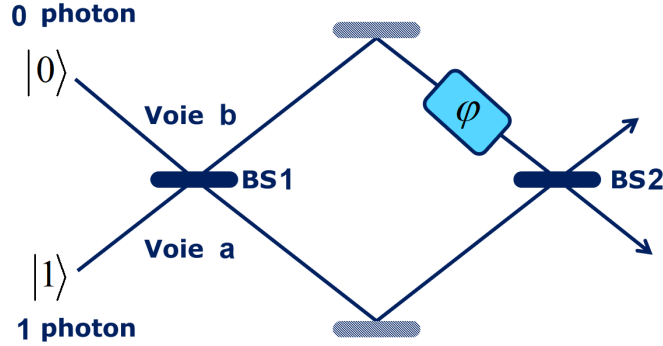
Exemple 2 : Application de la lumière non-classique à des interféromètres optiques (dans notre cas Interféromètres Mach-Zender)

Nous proposons d'utiliser l'interféromètres de Mach-Zender (fig 2.3) lorsqu'il est éclairé avec une source émettant un photon à l'entrée, sachant qu'un photon se présente à l'entrée de l'interféromètre, l'état décrivant le système après la première lame séparative s'écrit :

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_a |0\rangle_b + |0\rangle_a |1\rangle_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle) \quad (2.24)$$

où $|\phi_1\rangle$ dispose un photon 1 dans le mode A et 0 photon dans le mode B , où 0 photon dans le mode A et 1 photon dans le mode B .

FIGURE 2.2 – Interféromètre à un photon”, BS : lame séparatrice



Au niveau de la seconde lame séparatrice (BS2) l'état $|\phi_1\rangle$ devient :

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + e^{i\varphi} |0, 1\rangle) \quad (2.25)$$

En effet, le déphasage φ résultant sur la voie B de l'interféromètre peut être mesuré en utilisant l'opérateur M donné par :

$$M = |1, 0\rangle \langle 1, 0| + |0, 1\rangle \langle 0, 1| \quad (2.26)$$

Le calcul de la valeur moyenne M donne :

$$\langle M \rangle_2 = \langle \phi | M | \phi \rangle_2 = \cos \varphi \quad (2.27)$$

Et l'expression de la variance est donc donnée par :

$$(\Delta M)^2 = \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = \sin^2 \varphi \quad (2.28)$$

Donc, quand on effectue N fois la même mesure on obtient alors :

$$\langle M \rangle_N = N \cos \varphi \quad \text{et} \quad (\Delta M)_N^2 = N \sin^2 \varphi \quad (2.29)$$

Par conséquent, la plus petite variance de la phase de mesure est donnée par :

$$\Delta \varphi = \frac{(\Delta M)_N}{\frac{d\langle M \rangle_N}{d\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.30)$$

Pour aller au delà de la limite quantique standard, les états NOON constituent un candidat potentiel.

2.3.3 Les états NOON

Il est possible de créer des états NOON du type $|\psi\rangle = |N\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |0\rangle_1 \otimes |N\rangle_2$ où $|n\rangle_i$ désigne un état de Fock, contenant n photons dans le mode $i = 1, 2$.

Les états NOON sont des états maximalelement intriqués. On dit d'un état NOON est un état intriqué multimode définie par exemple l'état $|\phi\rangle$ avec :

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + |0, N\rangle) \quad (2.31)$$

pour l'état $|n_1, n_2\rangle$ décrit un système à n_1 photons dans la première mode et n_2 photons dans la deuxième mode.

L'évolution de cet état à l'intérieur de l'interféromètre conduit à la fonction d'onde suivante à l'entrée de la lame séparatrice de sortie (BS)[47]

$$|\phi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + e^{iN\varphi} |0, N\rangle) \quad (2.32)$$

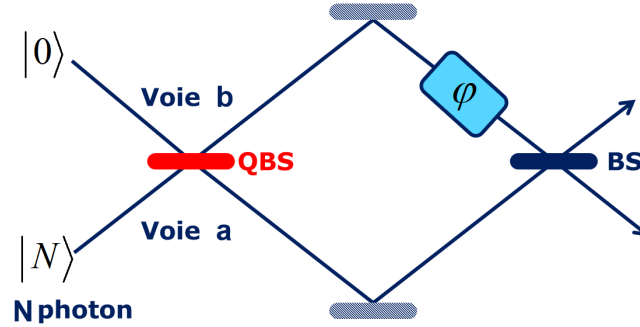


FIGURE 2.3 – Transmission de Signaux à Travers des cannaux

La phase φ est mesurée en utilisant l'opérateur M_N

$$M_{N2} = \langle \phi | M | \phi \rangle_2 = \cos(N\varphi) \quad (2.33)$$

Ainsi, la variance sur la mesure effectuée à l'opérateur M est :

$$(\Delta M_N) = \langle (M_N - \langle M_N \rangle)^2 \rangle = \sin^2(N\varphi) \quad (2.34)$$

donc la plus petite variance de phase mesurable φ est donné par

$$\Delta\varphi = \frac{\langle \Delta M_N \rangle}{\frac{d\langle M \rangle}{d\varphi}} = \frac{1}{N} \quad (2.35)$$

ce qui est correspond à la limite de Heisenberge où l'incertitude et donc réduite d'un facteur $\sqrt{N}$.

2.4 Incertitude Quantique Local

2.4.1 Incertitude quantique

Nous considérons des systèmes quantiques avec des espaces d'états de dimensions finies. Nous nous intéressons à la mesure d'une observable représentée par un opérateur Hermitien non dégénéré ayant la décomposition spectrale[63] $O = \sum_i o_i |i_0\rangle \langle i_0|$. Les informations sur O dans un état représenté par une matrice de densité ρ peuvent être quantifié par le changement d'état dû à la mesure de O .

Nous utilisons le modèle de matrice de Von Neumann[74] $\rho \rightarrow \rho' = \sum_i |i_0\rangle \langle i_0| \rho |i_0\rangle \langle i_0|$ pour $\rho = \rho'$ alors si et seulement si l'état et l'observable commute c'est à dire que si l'état est un état pur où un mélange d'états purs.

Prenons la forme $\rho_O = \sum_i p_i |i_0\rangle \langle i_0|$. En l'absence de la cohérence, l'incertitude de mesure n'est due qu'à une connaissance incomplète de l'état du système, qui est une source d'erreur classique.

Dans le cas plus général des états présentant une cohérence, la contribution à l'incertitude de mesure est alors double. Outre le caractère aléatoire classique, il existe une composante quantique supplémentaire. Pour quantifier l'incertitude quantique, la première quantité est la variance $V(\rho, O) = \text{Tr}[\rho O^2] - [\text{Tr}(\rho O)]^2$.

Pour les états mixtes, la variance inclut une contribution de l'incertitude classique due à la mixité de l'état.

On peut facilement voir que la variance ne s'annule pas même si ρ et O commute. La variance n'est donc pas appropriée pour quantifier l'incertitude quantique.

Une façon de résoudre le problème est de diviser formellement la variance est écrire l'incertitude de mesure totale comme la somme de deux contributions quantiques et classiques $V = V_Q + V_C$ [32]. Une bonne mesure de l'incertitude quantique V_Q devrait être nulle si et seulement si ρ et O commutent.

En outre, une mesure de l'incertitude quantique doit être convexe, c'est à dire qu'elle ne doit pas augmenter dans le cas d'un mélange classique, parceque cela ne génère qu'une incertitude classique

$$V_Q(\sum_i p_i \rho_i, O) \leq \sum_i p_i V_Q(\rho_i, O).$$

Un candidat approprié est l'information de Wigner et Yanase [9] donnée par :

$$I(\rho, O) = \frac{1}{2} \text{tr}[(\rho^{\frac{1}{2}}, O)^2]. \quad (2.36)$$

Dans le cas d'états purs $I(\rho, O) \leq V(\rho_i, O)$. Ceci peut être illustré comme suit [32]. En définissant $O_0 = O - \text{tr}[\rho O]$ on a $V(\rho_i, O) = \text{tr}[\rho O_0^2]$ et $I(\rho, O) = \text{tr}[\rho O^2] - \text{tr}[\rho^{\frac{1}{2}} O_0 \rho^{\frac{1}{2}} O_0] = V(\rho, O) - \text{tr}[\rho^{\frac{1}{2}} O_0 \rho^{\frac{1}{2}} O_0]$

Il est facile de voir que la deuxième terme n'est pas négatif parcequ'il est égale à $\text{tr}[(\rho^{\frac{1}{4}} O_0 \rho^{\frac{1}{4}})(\rho^{\frac{1}{4}} O_0 \rho^{\frac{1}{4}})]$ et notant que $\rho^{\frac{1}{4}} O_0 \rho^{\frac{1}{4}}$ est auto-adjoint.

2.4.2 La discord quantique et l'incertitude quantique locale

Nous avons identifié l'incertitude quantique réelle de la mesure effectuée par une mise en oeuvre expérimentale parfaitement réussie, c'est à dire lorsqu'il n'y a même pas d'incertitude

classique, les résultats sont déterministes. Pourtant, une incertitude quantique intrinsèque sur des mesures observables individuelles apparaît chaque fois que le système étudié partage entre ces parties des corrélations non-classiques. Examinons, l'incertitude quantique des mesures quantiques locales dans un système bipartite.

Exemple : Considérons un système à deux qubits préparé dans un état d'intrication maximal $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Il s'agit d'un état pur propre de l'observable global $\sigma_z \otimes \sigma_z$ ce qui signifie qu'il n'y a pas d'incertitude quantique lorsqu'on mesure cet observable. Toutefois, toute mesure local du spin aura une incertitude intrinsèque. Le seul vecteur n pour lequel $n \cdot \sigma_A \otimes \mathbb{I}_B |\psi_{AB}\rangle = k |\psi_{AB}\rangle$, $k \in \mathbb{R}$ où σ sont les matrices de Pauli, est en effet $n = 0$. Plus généralement, seuls les états produits peuvent être des états propres des observables locaux. Pour les états mixtes, il est clair que l'on ne veut pas associer l'incertitude quantique à la mixité des états.

Nous exigeons que la mesure laisse l'état mélangé ρ_{AB} invariant si et seulement si elle commute avec l'observable. En supposant sans perte de généralité que la mesure soit effectuée sur A , cela signifie qu'il doit être possible d'exprimer l'état sous la forme suivante :

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|_A \otimes \sigma_B^i \quad (2.37)$$

Où les éléments $\{|i\rangle\}$ forment une base orthonormée de A et σ_B^i sont des états arbitraires de B . Ces matrices de densités sont appelées états classiques-quantiques (CQ) et ce sont précisément des états de discorde quantique nulle[12]. Par conséquent, les corrélations non classique impliquent une incertitude quantique locale.

Autrement dit, pour n'importe quel état classique-quantique, il ya au moins une mesure locale qui ne la modifie pas, alors que, pour d'autres états, l'incertitude quantique apparaît toujours. Cependant, l'interaction entre le caractère aléatoire local et les effets quantiques non locaux s'avère plus profonde. L'incertitude quantique minimale des mesures locales est un quantificateur des corrélations non classiques. Pour quantifier l'incertitude quantique d'une observable O_A dans un état ρ_{AB} nous utilisons l'information de Wigner - Yanase $I(\rho_{AB}, O_A \otimes \mathbb{I}_B)$. En rappelant la définition de l'équation(2.36).

Nous notons que la quantité dépend de l'état de l'observable, alors que la corrélation non classiques sont une propriété seulement de l'état. Donc il est raisonnable d'introduire l'incertitude quantique local (Local Quantum Uncertainty LQU)[29], définie comme étant l'information minimale de biais entre l'état et un Observable local. Pour être plus précis, définissons l'ensemble des observables locaux $\{K_A^\Lambda := K_A^\Lambda \otimes \mathbb{I}_B\}$. Où les K_A^Λ sont des opérateurs hermitiens ayant un spectre Λ . Nous exigeons que Λ non dégénérés, pour représenter une source d'incertitude classique supplémentaire. Ainsi, l'incertitude quantique locale par rapport au sous-système A est donnée par :

$$\Theta_A^\Lambda := \min_{K_A^\Lambda} I(\rho_{AB}, K_A^\Lambda) \quad (2.38)$$

A une optimisation sur l'ensemble des observables locales définies précédemment avec un spectre non dégénéré Λ . Nous les réécrivons en $K_A^\Lambda = U_A \text{diag}(\Lambda) U_A^\dagger$; $U_A \in SU(d)$ où d

est la dimension du sous-système A et $diag(\Lambda)$ est une matrice diagonale avec les valeurs propres observables étant les éléments diagonaux. La minimisation est faite ensuite sur toutes les transformations unitaires possibles U_A . L'incertitude quantique locale reste dépend du spectre. Ce qui peut être interprété comme la fixation d'une "règle" pour la mesure. La condition de non-dégénérescence assure la qualité de la règle, à savoir qu'il existe des états pour lesquels une mesure sera maximalement informative. Tout choix du spectre identifie une mesure différente des corrélations non classiques.

Exemple : Nous considérons le cas où les système A et B sont représentés par un qubit et un qubit, c'est à dire que les états sont définis sur un espace de Hilbert $C^2 \otimes C^d$. Il reste à répondre à la question de savoir de quelle manière l'incertitude quantique locale dépend du choix du spectre non dégénéré Λ . Il est facile de montrer que, pour Λ un qubit alors tous les $\Theta_A^\Lambda(\rho_{AB})$ (voir l'équation 2.38) dépendants sont équivalents à un facteur multiplicatif. En effet, une observable locale générale K_A^Λ avec un spectre fixe non dégénéré peut être paramétrée comme suit[29] :

$$K_A^\Lambda = U_A(\alpha\sigma_{zA} + \beta\mathbb{I}_B)U_A^\dagger = \alpha_n\sigma_A + \beta\mathbb{I}_A \quad (2.39)$$

Où α et β sont des constantes ($\alpha \neq 0$) et n un vecteur définie sur la sphère unité.

De la définition de l'information Wigner - Yanase, il résulte que $I(\rho_{AB}, K_A^\Lambda) = \alpha^2 I(\rho_{AB}, n.\sigma_A)$. Par conséquent pour les systèmes qubit-qubit, le choix du spectre n'affecte pas la quantification des corrélations non classiques et sans perte de généralité, nous prenons les observations locales comme étant de la forme $K_A = n.\sigma_A$. Après avoir simplifié la forme des observables sur lesquels, nous avons besoin d'optimiser, nous pouvons écrire l'incertitude quantique locale de la manière suivante :

$$\Theta_A^\Lambda(\rho_{AB}) = 1 - \lambda_{\max}(W_{AB}) \quad (2.40)$$

Avec $\lambda_{\max}(W_{AB})$ sont les valeurs propres maximales de la matrice symétrique (3×3) , W avec des entrées

$$(W_{AB})_{ij} = \text{tr}[\rho_{AB}^{\frac{1}{2}} \otimes (\sigma_{iA} \otimes \mathbb{I}_B) \rho_{AB}^{\frac{1}{2}} (\rho_{jB} \otimes \mathbb{I}_B)] \quad (2.41)$$

où σ_i, σ_j dénotent les matrices de Pauli.

2.4.3 Aperçu géométrique de l'incertitude quantique locale

Nous fournissons une interprétation géométrique de l'incertitude quantique locale pour des états qubit-qubit. La distance (au carré) de Hellinger entre deux états ρ et σ est définie comme[30] :

$$D_H^2 = \frac{1}{2} \text{tr}[\rho^{\frac{1}{2}} - \sigma^{\frac{1}{2}}]^2 = \mathbb{I} - \text{tr}(\rho^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}) \quad (2.42)$$

Puisque $K_A = n.\sigma$ est une racine d'unité unitaire pour chaque fonction f est chaque état bipartite on a :

$$K_A f(\rho_{AB}) K_A = f(K_A \rho_{AB} K_A) \quad (2.43)$$

Par conséquent, l'information de biais prend la forme suivante[29] :

$$\begin{aligned}
 I(\rho_{AB}, K_A) &= 1 - \text{tr}[\rho_{AB}^{\frac{1}{2}} K_A \rho_{AB}^{\frac{1}{2}} K_A] \\
 &= 1 - \text{tr}[\rho_{AB}^{\frac{1}{2}} (K_A \rho_{AB}^{\frac{1}{2}} K_A)^{\frac{1}{2}}] \\
 &= D_H^2(\rho_{AB}, K_A \rho_{AB} K_A)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

l'incertitude quantique locale représente alors la distance minimale entre l'état avant et après l'application d'une racine d'unité locale d'opérations unitaires.

2.4.4 Inertitude quantique locale comme mesures des corrélations non classiques

Nous examinons ici la preuve que l'incertitude quantique locale est une mesure de corrélations non classiques, c'est à dire qu'il répond aux critères d'identification des quantificateurs de discorde[69]. Nous travaillerons toujours avec l'incertitude quantique locale défini par les mesures sur A , pour montrer les propriétés[29] suivante :

- l'incertitude quantique locale est nul si l'état est classique - quantique
- l'incertitude quantique locale est invariant sous les transformations unitaires locales.

Un simple calcul permet de voir

$$\begin{aligned}
 \Theta_A^\Lambda[(U_A \otimes U_B)\rho_{AB}(U_A \otimes U_B)^\dagger] &= \min_{K_A^\Lambda} I[(U_A \otimes U_B)\rho_{AB}(U_A \otimes U_B)^\dagger, K_A^\Lambda \otimes \mathbb{I}_B] \tag{2.45} \\
 &= \min_{K_A^\Lambda} I[\rho_{AB}, (U_A \otimes U_B)^\dagger K_A^\Lambda \otimes \mathbb{I}_B (U_A \otimes U_B)] \\
 &= \min_{K_A^\Lambda} I[\rho_{AB}, (U_A^\dagger K_A^\Lambda U_A) \otimes \mathbb{I}_B] \\
 &= \Theta_A^\Lambda(\rho_{AB})
 \end{aligned}$$

NB : minimiser sur K_A^Λ equivalent à minimiser sur l'observable $U_A^\dagger K_A^\Lambda U_A$

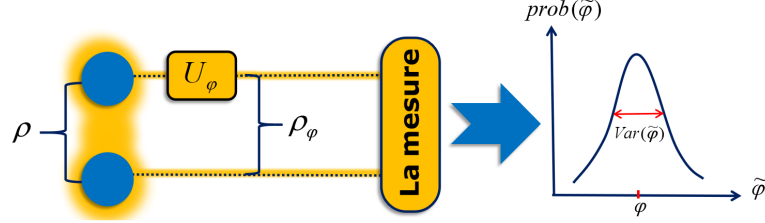
- l'incertitude quantique locale se réduit à un intrication monotone pour les états purs.

2.5 Rôle des corrélations quantiques en métrologie quantique

Corrélations quantiques en terme de l'incertitude locale

Nous discutons maintenant le rôle opérationnel de l'incertitude quantique locale pour quantifier la discorde quantique. En métrologie quantique est dans le scénario de l'estimation de phase [49]. Nous nous concentrons ici sur une configuration interférométrique utilisant des états bipartites comme le montre la figure (2.4).

FIGURE 2.4 – Estimation des paramètres évoluant sous une transformation unitaire locale, qui dépend d'un paramètre φ non observable



Nous considérons un état bipartite ρ (généralement mixte) utilisé comme sonde, le sous-système A subi une transformation unitaire (par exeptmle un déphasage) de sorte que l'état global passe à $\rho' = U_\phi \rho U_\phi^\dagger$ où $U_\phi = e^{-i\phi H_A}$ avec H_A un Hamiltonien local sur A . L'objectif est d'estimer le paramètre non observable ϕ . Le protocole, qui a de nombreuses applications de la gravitométrie aux technologies de détection [49,50], peut être optimisé en choisissant le meilleur état de sonde ρ et la mesure la plus informative à la sortie. On sait que cette dernière optimisation peut être résolue en général en choisissant, pour n'importe quel état de sonde, la stratégie de mesure quantitative à l'aide de l'inégalité de Cramér-Rao[51].

Nous considérons ici que l'optimisation de l'état d'entrée, dans des conditions pratiques, par exemple lorsque la manipulation des états de sondes s'effectue dans un environnement thermique avec un degré de contrôle réduit, il n'est pas toujours possible d'éviter un certain degré de mélange dans les états de sonde préparés. Il est donc essentiel et pratique d'étudier la précision réalisable lorsque l'estimation de phase est effectuée dans des environnement spécifiques[52,59].

Nous évaluons ici comment les corrélations quantiques dans l'état ρ jouent un rôle dans la détermination de la meilleure sensibilité de l'estimation. Notez que les autres étapes du processus d'estimation sont supposées sans bruit (la transformation inconnue U_ϕ est unitaire et la mesure de sortie est la mesure idéale).

L'observation clé découle de la relation entre les mesures de Wigner-Yanese et de Fisher [32, 76,77].

Comme H_A n'est pas nécessairement l'observable locale la plus certaine avec le spectre Λ .

$$\Theta_A^\Lambda(\rho) \leq I(\rho, H_A) = I(\rho_\phi, H_A) \leq \frac{1}{4} F(\rho_\phi) \quad (2.46)$$

Ensuite pour les états de la sonde avec n'importe quelle quantité non nulle de discorde, et pour $n \gg 1$ répétitions de l'expérience, la stratégie de détection optimale qui sature la borne quantique de Cramer-Rao produit un estimateur ϕ_{best} avec une variance nécessairement limitée de la façon suivante :

$$V(\phi_{best}) = \frac{1}{nF(\rho_\phi)} \leq \frac{1}{4n\Theta_A^\Lambda(\rho)} \quad (2.47)$$

Ainsi nous avons établi sur des bases rigoureuses que les corrélations quantiques mesurées par l'incertitude quantique locale, sans être nécessaires [78, 79 ,80] sont une ressource suffi-

sante pour assurer une limite supérieure sur la variance la plus petite possible avec laquelle une phase peut être mesurée par des sondes mixtes. Le lien entre l'incertitude quantique locale et la sensibilité de l'estimation des paramètres peut également être appréciée en termes géométriques plus abstraits. Comme le montre Brody[81], l'information de biais $I(\rho_\phi, H_A)$ du l'Hamiltonien H_A détermine la vitesse quadratique d'évolution de la matrice de densité ρ sous la transformation unitaire $U_\phi = e^{-i\phi H_A}$. Ceci fournit une autre interprétation géométrique pour l'incertitude quantique locale. L'observable K_A qui conduit à la valeur minimale dans l'équation (2.38) est l'observable locale avec la propriété que l'opération unitaire locale résultante $e^{-i\phi H_A}$ fait évoluer l'état donné ρ du système entier aussi lentement que possible (l'observable K_A est le moins perturbant dans ce sens spécifiques).

Notre résultat peut être interprété comme suit : la quantité de discord (l'incertitude quantique locale) dans un état de sonde mixte corrélé ρ utilisé pour l'estimation d'un paramètre ϕ délimite sous la vitesse quadratique d'évolution de l'état sous toute les Hamiltoniens d'évolution local $e^{-i\phi H_A}$. Il s'en suit que la sensibilité d'un état donné ρ à une variation de ϕ , qui est une mesure générale de la précision pour une tâche métrologique considérée.

2.6 Théorie d'estimation des paramètres classiques

la métrologie quantique est une branche très jeune de la science de l'information quantique, elle cherche à utiliser les caractéristiques propres à la mécanique quantique pour la dépasser et se rapprocher le plus possible de la limite ultime. Elle a un but très précis, estimer un paramètre donné en utilisant des systèmes physiques comme des sondes préparés soigneusement et profiter de caractère purement quantique des sondes pour améliorer la précision. La métrologie quantique est largement appliquée à l'interféromètre optique[63].

Un protocole général dans une tâche métrologique passe par trois étapes :

- 1- La préparation d'une sonde dans un état initial
- 2- L'interaction ou bien perturbation de la sonde, qui encode l'information dans celle-ci
- 3- la mesure de l'état et analyse de données résultants.

Les protocoles de mesure au niveau quantique sont bornés par des limites sur la mesure. Ces limites peuvent être absolues ou sont des limites naturelles qu'on peut dépasser à l'aide de protocoles de mesures et un processus de préparation d'état très avancés. Pour un protocole qui utilise l'intrication de N particules, on peut mesurer la phase avec une variance $\Delta\varphi = \frac{1}{N} \neq \frac{1}{\sqrt{N}}$ (voir l'équation 2.15). Cette limite est appelée limite de Heisenberg[64]. Cette mesure dépasse la limite de précision imposée par une mesure de N particules qui ne sont pas intriqué $\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Cette limite est appelé limite quantique Standard.

2.6.1 Limite de Cramér-Rao et relation d'incertitude

Cramér et Rao[63] ont démontrée qu'il existe des limites générales à cette précision liées à la nature statistique de la mesure. Elle représente l'information maximale sur un paramètre que l'on peut extraire d'un échantillon de θ mesures d'un paramètre. En supposant ici que

l'ensemble des résultats possibles de la mesure est discret. Celui-ci est définie par

$$F(X) = \sum_k p_k(X) \left(\frac{d \ln p_k(X)}{dX} \right)^2 \quad (2.48)$$

Où $p_k(X)$ représente la probabilité d'obtenir le résultat de mesure k . L'incertitude sur la valeur de X ne peut être petite qu'une certaine valeur donnée par la limite de Cramér-Rao :

$$\Delta X \geq \frac{1}{\sqrt{\vartheta F(X)}} \quad (2.49)$$

Cette expression n'est toutefois pas suffisante pour l'expérimentateur puisqu'elle ne lui donne accès qu'à la meilleure précision qu'il peut espérer sur le paramètre à mesurer avec l'état initial du système choisi et le processus de mesure. Comment être sûr qu'il a fait les meilleurs choix possible ? Comment être sûr qu'il a atteint la meilleure précision possible dans l'absolu ?

L'information de Fisher permet de répondre à ces questions. Nous allons la définir dans le paragraphe suivant et nous allons essayer de l'étudier explicitement dans le troisième chapitre.

2.6.2 Information de Fisher

Lorsqu'on se restreint à la métrologie quantique locale c'est à dire lorsqu'on souhaite déterminer la valeur d'un paramètre qui se trouve dans une certaine petite plage, l'information de Fisher quantique permet de répondre à ces attentes. Elle fournit l'information maximale que l'on peut obtenir à partir de la mesure optimale d'un état quantique donné et ce, même si on ne connaît pas cette mesure. L'expression de l'information de Fisher quantique est obtenue en maximisant l'information de Fisher quantique par rapport à toute les mesures possibles

$$F_Q(X) = \max_{\{\tilde{E}(\varepsilon)\}} F(X, \{\tilde{E}(\varepsilon)\}) \quad (2.50)$$

où $\{\tilde{E}(\varepsilon)\}$ représente l'ensemble des opérateurs du POVM (Positive Operator Valued Measure : mesure d'opérateurs positif). L'information de Fisher quantique dépend de l'état initial du système mesuré. Il faut donc choisir un état telque cette information soit la plus grande possible pour optimiser l'estimation du paramètre.

Notons bien que l'information de Fisher quantique obtenue à l'aide d'un état initial "classique" comme l'état cohérent dans le cas d'un oscillateur harmonique, nous permet de définir l'information maximale que l'on peut obtenir avec des méthode standard. Autrement dit, l'information de Fisher quantique d'un état classique défini quantitativement la limite quantique standard (SQL). De plus, on peut montrer que l'inégalité de Cramér-Rao[65], dans laquelle on remplace l'information de Fisher F par l'information de Fisher quantique F_Q . Elle manque une limite infrachassante physiquement pour la précision sur la valeur d'un paramètre[53] on appelle limite de Heisenberg.

En conclusion pour estimer une variable aléatoire associée à un paramètre inconnu X , l'information de Fisher permet d'exécuter cette tâche avec une précision remarquable. Elle permet d'extraire un taux d'information contenu par une variable aléatoire X .

$$F(\varphi) = \int p(x/\varphi) \left(\frac{\partial \ln p(x/\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 dx \quad (2.51)$$

avec $p(x/\varphi)$ est la fonction de distribution de probabilité et $(\frac{\partial \ln p(x/\varphi)}{\partial \varphi})$ est le logarithme de vraisemblance.

Nous discuterons également la quantification analytique de l'information de Fisher dans le troisième chapitre.

2.6.3 Borne de Cramér-Rao

Nous avons déjà défini en détail la limite de Cramér-Rao (2.49). Dans un protocole d'estimation, il est important de fixer une limite ou borne sur la précision de la mesure. Plusieurs limites ont été discutées précédemment à savoir la limite de Heisenberg et la limite quantique standard. La théorie d'estimation nous fournit la borne qui s'avère très efficace dans des protocoles d'estimation. Il s'agit de la borne de Cramér-Rao.

Une bonne estimation requiert l'utilisation d'un estimateur sans biais. Considérons que nous avons un estimateur sans biais, alors la valeur moyenne de cet estimateur est donnée par :

$$E(\hat{\varphi} \setminus \varphi) = \int \hat{\varphi}(x) p(x \setminus \varphi) dx = \varphi \quad (2.52)$$

où $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $dx = (dx_1 \dots dx_m)$ et $p(x \setminus \varphi) = (p(x \setminus \varphi)_1 \dots p(x \setminus \varphi)_m)$ décrivons l'équation (2.51) par rapport à φ donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int p(x \setminus \varphi) (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx &= \int \frac{\partial p(x \setminus \varphi)}{\partial x} (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx - \int \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \varphi} p(x \setminus \varphi) dx \quad (2.53) \\ &= \int \frac{\partial p(x \setminus \varphi)}{\partial x} (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx - \int p(x \setminus \varphi) dx \\ &= \int \frac{\partial p(x \setminus \varphi)}{\partial x} (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\int \frac{\partial p(x \setminus \varphi)}{\partial x} (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx = \int p(x \setminus \varphi) \frac{\partial \ln p(x \setminus \varphi)}{\partial x} (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) dx = 1 \quad (2.54)$$

L'équation peut se factorisée en deux fonctions f et g comme suit :

$$\int ((\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)) (\sqrt{p(x \setminus \varphi)} (\frac{\partial \ln p(x \setminus \varphi)}{\partial \varphi}))) dx \quad (2.55)$$

Avec $f = (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x))\sqrt{p(x|\varphi)}$ et $g = (\frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi})$ cette décomposition nous permet d'utiliser l'inégalité de Cauchy Schwartz définie par :

$$\int |fg|^2 \leq \left| \int f dx \right|^2 \left| \int g dx \right|^2 \quad (2.56)$$

En remplaçant f et g par leur valeurs on obtient :

$$\left| \int (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x))\sqrt{p(x|\varphi)} \left(\frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi} \right) dx \right|^2 \leq \left| \int \hat{\varphi}(x) - \varphi(x) \sqrt{p(x|\varphi)} dx \right|^2 \left| \int \frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi} dx \right|^2 \quad (2.57)$$

A partir de (2.51) la quantité $\left| \int (\hat{\varphi}(x) - \varphi(x))\sqrt{p(x|\varphi)} \left(\frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi} \right) dx \right|^2 = 1$ donc l'équation est réécrit sous la forme

$$1 \leq \left| \int \hat{\varphi}(x) - \varphi(x) \sqrt{p(x|\varphi)} dx \right|^2 \left| \int \frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi} dx \right|^2 \quad (2.58)$$

L'inégalité résultante exprime deux termes connus. Le premier terme n'est d'autre que la variance de l'estimateur φ qui est définie par

$$Var(\varphi) = \delta\varphi = \int \hat{\varphi}(x) - \varphi(x) \sqrt{p(x|\varphi)} dx \quad (2.59)$$

Le deuxième terme exprime l'information de Fisher classique dans un protocole d'estimation avec un nombre de répétition M . Ce dernier est exprimé par :

$$MF(\varphi) = \int p(x|\varphi) \left(\frac{\partial \ln p(x|\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 dx \quad (2.60)$$

Finalement l'expression finale de l'inégalité est reformulé par :

$$\delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{MF(\varphi)}} \quad (2.61)$$

2.7 Estimation quantique des paramètres

La théorie de l'estimation quantique cherche la meilleure stratégie pour estimer un ou plusieurs paramètres $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ appartenant à la matrice densité $(\rho(\varphi_1), \rho(\varphi_2), \dots, \rho(\varphi_n))$ d'un système quantique[65]. Pour établir une estimation quantique, la conversion du classique au quantique est primordiale. On considère des états quantiques décrit par $\rho(\varphi)$ caractérisé par un paramètre φ . Ce paramètre qu'on veut estimer ne correspond pas en général à une observable quantique. En mécanique quantique, la mesure d'une observable est triviale pour estimer un paramètre. Cet estimateur est un opérateur self adjoint qui décrit un protocole de mesure quantique suivi par tout traitement classique de données subit part le résultat de cette mesure. En mécanique quantique, pour procéder à une conversion classique-quantique on adopte la règle de Born. Selon Born on a $p(x|\varphi) = Tr(\rho(\varphi)\Pi_x)$ où $\{\Pi_x\}$ sont les éléments d'un opérateur de mesure de valeur positive POVM et $\rho(\varphi)$ est l'opérateur densité paramétré par la quantité φ qu'on veut estimer

Information de Fisher et Borne de Cramér-Rao quantique

Rappelons que dans un protocole d'estimation quantique, la fonction densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$p(x/\varphi) = \text{Tr}(\rho(\varphi)\Pi_x); \quad \int dx \Pi_x = \mathbb{I}$$

Introduisons donc la dérivée symétrique logarithmique, un opérateur self adjoint vérifiant l'équation (on note $\rho(\varphi) = \rho_\varphi$) :

$$\frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{L_\varphi \rho_\varphi + \rho_\varphi L_\varphi}{2}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi p(x/\varphi) &= \partial_\varphi \text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x) = \text{Tr}(\partial_\varphi \rho_\varphi \Pi_x) \\ &= \text{Tr}(\Pi_x \frac{L_\varphi \rho_\varphi + \rho_\varphi L_\varphi}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\Pi_x L_\varphi \rho_\varphi) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Pi_x \rho_\varphi L_\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\Pi_x L_\varphi \rho_\varphi) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Pi_x L_\varphi \rho_\varphi)^* \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la trace cyclique, l'équation se réécrit :

$$\partial_\varphi p(x/\varphi) = \text{Re}(\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x L_\varphi)) \quad (2.62)$$

Cette donnée nous permet de réécrire l'expression de Fisher comme suit :

$$F(\theta) = \int dx \frac{\text{Re}(\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x L_\varphi))^2}{\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x)} \quad (2.63)$$

Comme nous l'avons discuté dans le cas de l'estimation classique, la fixation d'une limite à la mesure est d'importance primordiale. En estimation quantique, l'obtention d'une borne supérieure passe par la maximisation de l'information de Fisher sur toutes les mesures quantiques. Alors on a :

$$\begin{aligned} F(\varphi) &\leq \int dx \left| \frac{\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x L_\varphi)}{\sqrt{\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x)}} \right|^2 \\ &= \int dx \left| \text{Tr} \left(\frac{\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\varphi}}{\sqrt{\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x)}} (\sqrt{\Pi_x} L_\varphi \sqrt{\rho_\varphi}) \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz $|\text{Tr}(f \dagger g)|^2 \leq \text{Tr}(f \dagger f) + \text{Tr}(g \dagger g)$, l'équation (2.64) devient :

$$F(\varphi) \leq \int dx \Pi_x L_\varphi \rho_\varphi \Pi_x \quad (2.65)$$

$$\text{Avec : } g = (\sqrt{\Pi_x} L_\varphi \sqrt{\rho_\varphi}) \quad \text{et} \quad f^\dagger = \frac{\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\varphi}}{\sqrt{\text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_x)}}$$

Donc :

$$F(\rho_\varphi) = \text{Tr}(L_\varphi \rho_\varphi L_\varphi) = \text{Tr}(\rho_\varphi L_\varphi^2) \quad (2.66)$$

La quantité trouvée est appelée information de Fisher quantique. Sachant que la borne de Cramér-Rao est une borne supérieure de l'information de Fisher classique, elle l'est aussi à l'échelle quantique. La borne de Cramér-Rao quantique est proportionnelle à l'inverse de l'information de Fisher. Elle s'écrit comme :

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{MF(\varphi)}} \quad (2.67)$$

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté les éléments essentiels et indispensables pour étudier les différents protocoles métrologiques. Nous avons commencé par le formalisme mathématique sur lequel repose la métrologie classique et quantique.

Aussi nous nous sommes intéressés aux différents éléments de la théorie de l'estimation (classique, quantique). Nous avons étudié en parallèle les formalismes de l'optique quantique (états de Fock, états cohérents et les états NOON etc.). Cette étude nous a permis d'approfondir notre connaissance et nous a aidé à dévoiler en plus le monde quantique.

La limite de Cramér-Rao et sa borne quantique en terme de l'information quantique de Fisher a été étudié, ce dernier aspect sera développé d'avantage dans le chapitre qui suivra.

Chapitre 3

Quantification analytique de l'information de Fisher

3.1 Introduction

L'information de Fisher dépend non seulement des propriétés du système sonde mais également du processus à l'origine de son évolution et de la mesure choisie à cause de la loi de probabilité.

Un des buts de la métrologie étant de trouver le schéma de rendre l'information de Fisher maximale et donc déterminer quel est le meilleur protocole de mesure de système.

Ce chapitre portera sur l'étude formelle de la quantification analytique de l'information de Fisher. Dans la première partie nous décrirons les concepts de base de l'information quantique de Fisher. Dans la deuxième partie nous allons nous concentrer sur la métrologie quantique pour les états quasi Bell et dans ce contexte nous présenterons la discordance quantique entropique et enfin nous évaluerons l'expression du pouvoir interférométrique quantique dans les protocoles de la métrologie quantique en discuteront les cas où on utilise les états symétriques et antisymétriques d'incertitude locale quantique.

3.2 Information de Fisher quantique

L'importance de la métrologie dans l'estimation des paramètres est discutée en détail dans la référence[6]. Le but est d'assigner une fonction de probabilité notée $P_\theta(x)$ aux résultats de mesure indépendants x d'une variable aléatoire X . Le paramètre θ , qui est inconnu et non mesurable agit comme une coordonnées dans l'espace de fonction de probabilité. Il s'agit ensuite d'extraire un estimateur observable $\tilde{\theta}(x)$ à partir des résultats de mesure, de sorte que $P_{\tilde{\theta}}$ caractérise bien les données observées. Nous exigeons que l'estimateur soit non biaisé c'est-à-dire que sa valeur moyenne soit égale à la valeur réelle de paramètre $\int(\theta - \tilde{\theta}(x)P_{\tilde{\theta}(x)})dx = 0$. La quantité de l'estimateur peut alors être quantifié par la variance de l'estimateur $\tilde{\theta}$. Il est possible d'établir une limite fondamentale à l'estimateur des paramètres. En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Le meilleur estimateur $\tilde{\theta}_{best}$ est défini comme celui qui maximise la fonction d'algorithme. Cela signifie que $P_{\tilde{\theta}_{best}}(x)$ est la meilleure fonction

pour décrire les résultats de la mesure. Les informations sur θ , qui peuvent être obtenues par les données x , sont quantifiées par le taux de variations de la fonction de vraisemblance avec la valeur du paramètre. Une mesure de ces informations est la fonction de la valeur moyenne nulle. Le deuxième moment s'appelle l'information de Fisher :

$$F(\theta) = \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log[p(x, \theta)] \right)^2 p(x, \theta) dx \quad (3.1)$$

On a déjà vu dans le chapitre précédent que la borne Cramér-Rao est un résultat important dans les statistiques classiques qui donne une borne inférieure sur la variance de $\tilde{\theta}$.

$$V(p_\theta, \tilde{\theta}) \geq \frac{1}{nF(\theta)} \quad (3.2)$$

pour n répétitions de la mesure. Nous observons que, dans l'hypothèse d'une estimation non biaisée à paramètre unique, le meilleur estimateur est celui qui sature la borne. Parlons maintenant de ce qui concerne le cas quantique. L'état du système étudié est représenté par une matrice de densité paramétrée ρ_θ . Supposons que le paramètre représente l'information sur une perturbation unitaire $\rho_\theta = U_\theta \rho_0 U_\theta^\dagger$.

Où $U_\theta = \exp(-iH\theta)$. Un estimateur est construit par une mesure positive généralisée de la valeur de l'opérateur (POVM) $\{\Pi_x\}$ sur l'état de sortie.

Où Π_x désigne les opérateurs correspondants aux résultats de mesure de sortie, avec : $\rho_\theta(x) = \text{tr}[\rho_\theta \Pi_x]$.

L'expression de Fisher pour un POVM arbitraire est :

$$F(\rho_\theta) = \int dx \frac{1}{\text{tr}[\rho_\theta \Pi_x]} (\text{tr} \rho_\theta \Pi_x)^2$$

Cependant, le scénario quantique implique une nouvelle amélioration de la mesure[62, 85]. On peut prouver que l'estimateur optimal est donné par une mesure projective dans la base propre de la dérivée logarithmique symétrique (SLD) L qui est définie implicitement comme $2\partial_\theta \rho_\theta = \rho_\theta L + L \rho_\theta$.

En particulier, on obtient une limite supérieure $F(\rho_\theta) \leq \text{tr}[\rho_\theta L^2]$. L'information quantique de Fisher (QFI dorénavant) est alors donnée par la stratégie de mesure optimale $F(\rho, H) := \text{tr}[\rho L^2]$ où, nous avons enlevé la dépendance du paramètre[86]. Le prolongement quantique de la borne de Cramér-Rao est alors donnée comme suit :

$$V(\rho, \tilde{\theta}) \geq \frac{1}{[nF(\rho, H)]} \quad (3.3)$$

Comme le cas classique est saturé asymptotiquement par le meilleur estimateur. L'information quantique de Fisher possède une expression particulièrement compacte est exprimé par :

$$F(\rho, H) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{\lambda_k + \lambda_l} |\langle k | H | l \rangle|^2 \quad (3.4)$$

Où nous avons utilisés les compositions propres de l'états $\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|$. La formule indique que la sensibilité d'une sonde et donc sont utilisés pour l'estimateur de phase est

quantifiée par la non-commutativité de son état avec le Hamiltonien. En fait, l'information quantique de Fisher mesure la sensibilité de l'état ρ à l'évolution unitaire $\exp(-iH\theta)$. En d'autres termes lorsque la vitesse d'évolution de la sonde sous une telle dynamique si et seulement si H est diagonale dans la base propre de ρ , la transformation laisse ρ invariant et il est facile de voir que dans le cas $F(\rho, H) = 0$.

3.2.1 Propriétés de l'information de Fisher quantique

Nous mentionnons une liste non exhaustive des propriétés de l'information quantique de Fisher

1- L'information quantique de Fisher est limitée par la variance $F(\rho, H) \leq 4V(\rho, H)$, où l'égalité est atteinte pour les états purs.

2- l'information quantique de Fisher est convexe $F(p\rho_1 + (1-p)\rho_2, H) \leq pF(\rho_1, H) + (1-p)F(\rho_2, H)$

3- Pour les transformations unitaires U

$$F(U\rho U^\dagger, H) = F(\rho, U^\dagger H U) \quad (3.5)$$

4- l'information quantique de Fisher n'augmente pas sous les transformations cartes de conservation de traces complètement positives (CPTP ϕ : completely positive trace preserving) qui ne dépend pas du paramètre $F(\phi(\rho), H) \leq F(\rho, H)$

3.3 Théorie de l'information quantique

3.3.1 Information de Fisher pour les états purs

Rappelons que pour un état pur $\rho = \rho^2$ la matrice densité de cet état s'écrit sous la forme :

$$\rho_\varphi = |\psi_\varphi\rangle \langle \psi_\varphi| \quad (3.6)$$

L'information de Fisher pour les états purs ($\rho_\varphi^2 = \rho_\varphi$) dépend de l'expression de la dérivée symétrique logarithmique L_φ qui est définie par :

$$\frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{L_\varphi \rho_\varphi + \rho_\varphi L_\varphi}{2} \quad (3.7)$$

Pour un état pur l'équation s'exprime par :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \rho_\varphi &= \partial_\varphi (\rho_\varphi)^2 = \rho_\varphi (\partial_\varphi \rho_\varphi) + (\partial_\varphi \rho_\varphi) \rho_\varphi \\ \frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{L_\varphi \rho_\varphi + \rho_\varphi L_\varphi}{2} \end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$L_\varphi = 2\partial_\varphi \rho_\varphi \quad (3.8)$$

L'expression de la dérivée logarithmique symétrique pour une famille d'états purs est définie par :

$$L_\varphi = 2\partial_\varphi(|\partial_\varphi\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi| + |\psi_\varphi\rangle\langle\partial_\varphi\psi_\varphi|) \quad (3.9)$$

L'obtention de l'expression de la dérivée logarithmique symétrique pour un état pur permet d'aboutir à l'expression de l'information de Fisher.

Rappelons que pour un protocole de l'estimation quantique, l'information de Fisher est définie par :

$$F(\theta) = \text{Tr}(\partial_\varphi L_\varphi^2) \quad (3.10)$$

Cependant :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\partial_\varphi L_\varphi^2) &= 2\partial_\varphi \rho_\varphi \\ &= \langle\psi_\varphi|\rho_\varphi L_\varphi^2|\psi_\varphi\rangle \\ &= \underbrace{\langle\psi_\varphi|\rho_\varphi^2|\psi_\varphi\rangle}_{=1} \langle\psi_\varphi|L_\varphi^2|\psi_\varphi\rangle \\ &= \langle\psi_\varphi|L_\varphi^2|\psi_\varphi\rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

En injectant l'équation (3.9) dans l'équation (3.11), on obtient l'expression finale de l'information de Fisher pour les états purs qui est définie par :

$$F(\varphi) = 4\text{Re}[\langle\partial_\varphi\psi_\varphi|\partial_\varphi\psi_\varphi\rangle - \langle\partial_\varphi\psi_\varphi|\psi_\varphi\rangle^2]. \quad (3.12)$$

Pour une famille unitaire des états purs on a : $|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi|\psi\rangle$ avec $(U_\varphi = e^{-i\varphi H})$

$$|\partial_\varphi\psi_\varphi\rangle = -iH|\psi_\varphi\rangle, \quad \langle\partial_\varphi\psi_\varphi|\partial_\varphi\psi_\varphi\rangle = \langle\psi_\varphi|H^2|\psi_\varphi\rangle, \quad \langle\partial_\varphi\psi_\varphi|\psi_\varphi\rangle = -i\langle\psi_\varphi|H^2|\psi_\varphi\rangle.$$

Où H est un opérateur hermitien décrivant la dynamique du système. L'expression finale de l'information de Fisher pour une famille unitaire est donnée par :

$$F(\varphi) = 4[\langle\psi|H^2|\psi\rangle - |\langle\psi|H|\psi\rangle|^2] = 4\Delta^2 H \quad (3.13)$$

3.3.2 Information de Fisher quantique pour les états Mixtes

Pour le cas des états mixtes, on considère un système à N dimension (N peut être infini) muni de l'opérateur densité ρ_φ qui dépend du paramètre φ . Cet opérateur s'écrit sous forme de décomposition spectrale comme suit :

$$\rho_\varphi = \sum_{i=1}^s p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (3.14)$$

Où les nombres réels p_i sont les valeurs propres de l'état $|\psi_i\rangle$ et s est la dimension de l'ensemble de support de ρ_φ noté $\text{sup}(\rho_\varphi)$. Rappelons que pour un protocole d'estimation quantique, l'information de Fisher est définie par :

$$F(\theta) = \text{Tr}(\rho_\varphi L^2) \quad (3.15)$$

En exprimant dans la base propre de ρ_φ cela donne :

$$\langle \psi_i | \partial_\varphi \rho_\varphi | \psi_i \rangle = (p_i + p_j) L_{ij} \quad (3.16)$$

Où est l'opérateur dérivée logarithmique symétrique

$$\frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{L \rho_\varphi + \rho_\varphi L}{2}. \quad (3.17)$$

Comme précédemment pour les états purs, nous calculons l'expression de la dérivée logarithmique symétrique pour les états mixtes.

Exprimons l'équation (3.17) dans la base propre de ρ_φ donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} (\langle \psi_i | L \rho_\varphi | \psi_i \rangle + \langle \psi_i | \rho_\varphi L | \psi_j \rangle) \\ &= \frac{1}{2} [p_k \sum_{k=1} \langle \psi_i | L | \psi_k \rangle \delta_{kj} + p_l \sum_{l=1} \delta_{il} \langle \psi_l | L | \psi_j \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [p_j L_{ij} + p_i L_{ij}] = L_{ij} = \frac{2(\partial_\varphi \rho_\varphi)_{ij}}{p_i + p_j} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En remplaçant l'équation (3.14) dans l'équation (3.15) et en utilisant la relation de normalisation on obtient :

$$F = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^N p_i L_{ij} L_{ji}$$

Où N est la dimension de l'espace des états du système. L'équation résultante peut se reformuler de la manière suivante :

$$F_\varphi = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^N \frac{4p_i}{(p_i + p_j)^2} |(\partial_\varphi \rho_\varphi)_{ij}|^2 \quad (3.19)$$

Grâce à la décompositions spectrale de ρ_{AB} on peut remarquer que :

$$(\partial_\varphi)_{ij} = \partial_\varphi p_i + (p_j - p_i) \langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle$$

Où nous avons utilisé l'équation :

$$\langle \partial_\varphi \psi_i | \psi_j \rangle = - \langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle.$$

Pour $i \in [1, s]$ et $j \in [s+1, N]$, l'expression de $(\partial_\varphi)_{ij}$ se réduit à $-p_i \langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle$.

On obtient alors :

$$F_\varphi = \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\varphi p_i)^2 + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^N \frac{4p_i(p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_j | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2. \quad (3.20)$$

De plus la deuxième partie de l'équation ci-dessus peut être divisée en deux parties F_1 et F_2 . La première partie F_1 s'exprime comme :

$$F_1 = \sum_{i,j=1}^s \frac{4p_i(p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_j | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2 \quad (3.21)$$

Quant à la deuxième partie F_2 elle est donnée par :

$$F_2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N 4p_i |\langle \psi_j | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2. \quad (3.22)$$

A partir de la relation de fermeture nous avons :

$$\sum_{i=1}^s |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \mathbb{I} - \sum_{j=1}^s |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \quad (3.23)$$

La substitution de cette équation dans l'expression de F_2 (équation 3.22) donne :

$$\sum_{i=1}^s 4p_i |\langle \partial_\varphi \psi_i | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2 - 4 \sum_{i=1}^s p_i |\langle \psi_j | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2. \quad (3.24)$$

L'information de Fisher peut s'exprimer par :

$$F_\varphi = \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\varphi p_i)^2 + \sum_{i=1}^s 4p_i |\langle \partial_\varphi \psi_i | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2 - 8 \sum_{i,j=1}^s \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle|^2 \quad (3.25)$$

Le premier terme est traité comme une contribution classique du à une analogie sous le terme de l'information de Fisher classique, puisque :

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\varphi p_i)^2 = 4 \sum_{i=1}^s (\partial_\varphi \sqrt{p_i})^2$$

Alors l'information de Fisher quantique pour un système quantique peut être séparée en deux parties :

une contribution classique et une contribution quantique comme suit :

$$F_\varphi = F_{class} + F_{qt}. \quad (3.26)$$

Où la contribution classique est donnée par :

$$F_{class} = 4 \sum_{i=1}^s (\partial_\varphi \sqrt{p_i})^2, \quad (3.27)$$

Et la contribution quantique est exprimée par :

$$F_{qt} = \sum_{i=1}^s 4p_i |\langle \partial_\varphi \psi_i | \partial_\varphi \psi_i \rangle|^2 - 8 \sum_{i,j=1}^s \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle|^2 \quad (3.28)$$

La contribution classique possède des propriétés [87] intéressantes :

- Elle est nulle pour les états purs
- Elle devient nulle en présence d'une paramétrisation unitaire
- Elle est invariante sous les transformations unitaires des matrices densités même si les transformation sont dépendant d'un paramètre ou pas.

Pour une paramétrisation unitaire, l'expression de l'information de Fisher quantique devient :

$$F_Q = \sum_{i=1}^s p_i F_Q(|\psi_i\rangle) - \sum_{i,j=1}^s \frac{8p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \quad (3.29)$$

avec $F_Q(|\psi_i\rangle)$ se réduit à une forme proportionnelle à la variance de l'opérateur H comme suit :

$$F_Q(|\psi_i\rangle) = 4(\Delta H)_{\psi_i}^2 \quad (3.30)$$

Où $(\Delta H)_{\psi_i}^2 = \langle \psi_i | H^2 | \psi_i \rangle - |\langle \psi_i | H | \psi_i \rangle|^2$

3.3.3 Quelques propriété de l'information de Fisher

L'information de Fisher quantique possède plusieurs propriétés[88] intéressantes qui nous discutons ci-dessus

(1) Pour les états purs :

$$F_Q[\rho, A] = 4(\Delta A)^2 \quad (3.31)$$

(2) Pour les états mixtes :

$$F_Q[\rho, A] \leq 4(\Delta A)^2 \quad (3.32)$$

Cette équation nous donne une formule de la borne supérieure de l'information quantique de Fisher qui est facile à calculer

- L'information de Fisher est convexe c'est à dire que :

$$F_Q[p\rho_1 + (1-p)\rho_2, A] \leq pF_Q[\rho_1, A] + (1-p)F_Q[\rho_2, A] \quad (3.33)$$

3.3.4 Représentation matricielle de l'information quantique de Fisher

Nous définissons une matrice diagonale M de dimension N , avec $M_{ii} = p_i$.

Nous considérons la contribution classique donnée par l'équation (3.27) qui peut être réécrite sous la forme :

$$F_{class} = 4tr(\partial_\varphi M)^2 \quad (3.34)$$

Pour établir l'expression de la contribution quantique sous une forme matricielle, on considère la matrice P de dimension N dont les éléments sont définis par :

$$P_{i,j} = |\langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle|^2 \quad (3.35)$$

Il est facile de voir que la matrice P est réelle et symétrique ($\langle \partial_\varphi \psi_i | \psi_j \rangle = -\langle \psi_i | \partial_\varphi \psi_j \rangle$).

De plus, elle peut être traitée comme une matrice de "transfert" entre les vecteurs propres $(|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_i\rangle, \dots, |\psi_N\rangle)^T$ et son vecteur dérivé. Nous considérons ensuite la matrice constante $\mathbb{I}$ de dimension N dont tous les éléments sont égaux à 1 ($I_{i,j} = 1; \forall i, j$); et nous allons définir une matrice diagonale par blocs g de dimension N , qui est donnée par :

$$g = \text{diag}[H_{s \times s}, 0_{(N-s) \times (N-s)}] \quad (3.36)$$

où $H_{s \times s}$ est une matrice symétrique réelle de dimension s et les éléments sont les valeurs moyennes harmoniques $H_{ij} = \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j}$. En utilisant la matrice introduite ci-dessus et en utilisant la symétrie de H ($H_{ij} = H_{ji}$), la contribution quantique (équation 3.28) peut être reformulée de la manière suivante :

$$F_{qt} = 4\text{Tr}[M\mathbb{I} - g)P]. \quad (3.37)$$

Ceci est la représentation matricielle de la contribution quantique de l'information quantique de Fisher. Il est facile de voir que la matrice de coefficients $M(\mathbb{I} - g)P$ est de trace nulle. Nous donnons un exemple pour la représentation matricielle de l'information quantique de Fisher.

Exemple :

Considérons un système à n particules. Nous définissons la matrice densité ρ_φ de la matrice suivante :

$$\rho_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \rho_\varphi^{(n)} \quad (3.38)$$

Où Q_n est un nombre réel indépendant de φ , $\rho_\varphi^{(n)}$ est un état de n particules dans l'espace de Hilbert. Pour une paramétrisation unitaire, la décomposition spectrale de ρ_φ s'écrit :

$$\rho_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n Q_n q^n \left| \psi_i^{(n)} \right\rangle \left\langle \psi_i^{(n)} \right| \quad \text{Avec} \quad \left| \psi_i^{(n)} \right\rangle = e^{-iH_\varphi} \left| \phi_i^{(n)} \right\rangle. \quad (3.39)$$

Dans ce cas, la contribution classique s'annule. Si la transition entre les sous-espaces propres de différentes particules à travers le Hamiltonien H est impossible, à savoir $\left\langle \psi_i^{(n)} \right| H \left| \phi_j^{(n')} \right\rangle = 0$ pour $n \neq n'$, alors la matrice de "transfert" P peut être écrite sous une forme diagonale par blocs $P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$ est la matrice de "transfert" dans l'espace à n particules. En effectuant la trace, seule la partie diagonale par bloc correspondante aux coefficients M , $\mathbb{I}$ et g intervient dans le calcul de la contribution quantique. En définissant les matrices M^n , $\mathbb{I}$ et $g^{(n)}$ pour n particules, les parties diagonales par bloc de M , $\mathbb{I}$ et g peuvent être exprimés sous formes de $\sum_n Q_n M^n$, $\sum_n \mathbb{I}$, $\sum_n Q_n g^n$ respectivement, il s'ensuit que, l'information de Fisher quantique est :

$$F_Q = 4 \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \text{Tr}[(M^n \mathbb{I}_n - g^n)P^n] \quad (3.40)$$

En outre, on peut constater que l'information quantique de Fisher $F_Q^{(n)}$ dans le sous-espace de n particules est donnée par :

$$F_Q^{(n)} = 4\text{Tr}[(M^n \mathbb{I}_n - g^n)P^n] \quad (3.41)$$

Par conséquent, on peut écrire l'information de Fisher quantique totale sous la forme :

$$F_Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n F_Q^{(n)} \quad (3.42)$$

Cette forme de l'information quantique de Fisher a été largement exploitée dans des problèmes d'interférométrie optique[89], pour n particules. Un état initial $|\psi_{in}^{(n)}\rangle$ est envoyé dans un dispositif interférométrique (interféromètre de Mach-Zender), en supposant que nous avons n photons à notre disposition et nous souhaitons à trouver que cet état permet d'effectuer l'estimation de phase avec la meilleure précision possible, c'est à dire de donner la valeur la plus élevée de l'information de Fisher à savoir :

$$(\delta_\varphi)^2 \geq \frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_Q}. \quad (3.43)$$

Où le nombre moyen de photons est $N = \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 n$, sous l'évolution libre entre les n photons, l'état donné par l'équation(3.39) est physiquement équivalent à un mélange est exprimé par :

$$\rho_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 |\psi_{in}^{(n)}\rangle \langle \psi_{in}^{(n)}|. \quad (3.44)$$

De plus, comme l'information quantique de Fisher est convexe (équation 3.33) ($F_Q[\rho, H] = 4(\Delta H)^2$) nous avons donc :

$$F_Q(\rho_n) \leq |\beta_n|^2 F_Q(|\psi_{in}^{(n)}\rangle \langle \psi_{in}^{(n)}|). \quad (3.45)$$

Par conséquent il est toujours préférable d'utiliser un état avec un nombre fixe de photons $|\psi_{in}^{(n)}\rangle$ de probabilité $|\beta_n|^2$, plutôt que d'utiliser une superposition (qui est effectivement un mélange). Plus généralement, en tenant compte de la transition entre les sous-espaces de différentes particules, on peut encore séparer P en blocs selon le nombre de particules considérés. Dans ce cas, la matrice P est donnée par :

$$P = \sum_n P^n + \sum_{n \neq n'}^{(nn')} P^{(nn')} \quad (3.46)$$

Ici tous les éléments de $P^{(nn')}$ sont non-négatifs (d'après la propriété de P). Ainsi, l'information quantique de Fisher totale peut être écrite comme :

$$F_Q = \sum_n Q_n F_Q^n + \sum_{n \neq n'} Tr[\gamma^{(nn')} P^{(nn')}] \quad (3.47)$$

Où $\gamma^{(nn')} = Q_n M^n \mathbb{I}_n - g^{(nn')}$.

À partir de cette équation, on peut constater que lorsque tous les éléments de $\gamma^{(nn')}$ sont non négatifs. La transition entre les sous-espaces de différentes particules c'est à dire que le second élément de l'équation (3.47), peut améliorer l'information quantique de Fisher totale.

3.4 Métrologie quantique pour les états quasi Bell

3.4.1 les états cohérents et les états quasi Bell

Les états cohérents sont les analogues les plus proches des ondes planes progressives monochromatiques dans le cadre de l'optique géométrique et de l'électromagnétisme [89]. De tels états sont les états les plus classiques qui peuvent être trouvés dans le domaine de l'optique quantique. Ils peuvent être produits par un laser qui fonctionne très au-dessus du seuil. Un faisceau laser classique peut être représenté dans l'espace des phases par un point bien défini correspondant à une amplitude $|\alpha|$ et une phase ϕ . Par contre, pour un état cohérent, l'amplitude $|\alpha|$ et la phase ϕ sont des valeurs moyennes, à laquelle s'ajoutent des fluctuations quantiques, ce qui rend la représentation de cet état dans l'espace des phases avec précision une tâche impossible. Plus rigoureusement, les états cohérents, ou également états quasi-classiques, sont les états $|\alpha\rangle$ pour lesquels, la valeur moyenne de l'amplitude et celle de l'énergie de champ électromagnétique quantifié dans un mode quelconque sont égales à celles du champ classique [90].

Les états quasi Bell sont une forme d'états de Bell munis des superpositions non orthogonales basés sur les états cohérent de Glauber le fait que le non orthogonalité de ces superpositions et le fait qu'ils ont un degré complet d'intrication [91] a attiré notre attention pour étudier et explorer ces états dans un contexte métrologique.

Dans cette partie nous présentons un système d'état à deux qubits des états quasi Bell a deux modes pour le but d'exploiter ces états en métrologie quantique par quantité le degré de précision qu'ils peuvent nous offrir et puis examiner l'effets de pertes de photon dans ce système par la mesure des corrélations quantiques présents dans ce système.

3.4.2 Mécanisme de perte de photon pour les états quasi Bell

La description du mécanisme de perte de photons est modélisé par l'action d'un diviseur de faisceau nommé aussi amortissement d'amplitude. Considérons le système AB composé des deux modes d'états quasi-Bell et leur environnement E dans un état initial

$$\rho_{ABE}(0) = \rho_{AB} \otimes \rho_E(0) \quad (3.48)$$

Où

$$\rho_{AB} = |\alpha, \alpha; m\rangle \langle \alpha, \alpha; m| \quad \rho_E(0) = |0\rangle_{EE} \langle 0| \quad (3.49)$$

La dynamique du système est unitaire définie par :

$$\rho_{ABE} = U \rho_{ABE}(0) U^\dagger \quad (3.50)$$

Deux cas peut être distingués : le cas où les deux qubits interagissent seulement avec leur environnement local et le cas où seulement un qubit est affecté par un environnement local.

Le premier cas (respectivement le deuxième) est appelé canal d'amortissement d'amplitude local les deux qubits (respectivement un qubit). On considère la situation où seulement le deuxième mode des états quasi Bell qui interagit avec l'environnement. Dans cette configuration l'opérateur unitaire décrivant l'évolution dynamique du système s'écrit comme :

$$U = \mathbb{I} \otimes B(\theta) \quad (3.51)$$

Où est l'opérateur identité est l'opérateur décrivant l'action d'un diviseur de faisceau l'opérateur qui décrit l'interaction entre le sous système B et de l'environnement E est donné par :

$$\theta = \exp\left[\frac{\theta}{2}(a_B^- a_E^+ - a_B^+ a_E^-)\right] \quad (3.52)$$

Les objets a_L^- et a_L^+ où $L = (B, E)$ sont les opérateurs d'échelle de l'oscillateur harmonique habituel agissant sur les modes de Fock dans des sous-systèmes B et E . Les coefficients de réflexion et de transmission sont :

$$t = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } r = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.53)$$

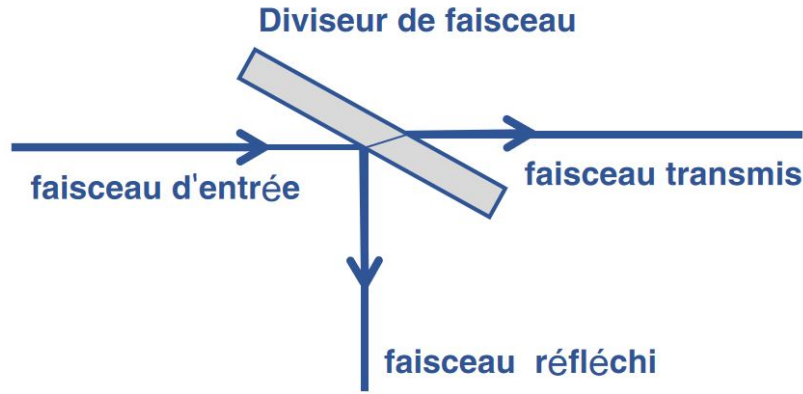


FIGURE 3.1 – Schéma illustrant les composants d'un diviseur de faisceau

Le diviseur de faisceau modélise la dégradation de la corrélation quantique qui est transmise avec un faisceau $t = \exp(-\lambda L)$ (qui peut être liée à la perte d'énergie d'une fibre optique) où λ est le coefficient de perte de la fibre sur une distance de transmission. L'évolution dynamique du système sous l'action d'un diviseur de faisceau est donné par :

$$\begin{aligned} \rho_{ABE} &= (\mathbb{I} \otimes B(\theta) \rho_{ABE}(0) (\mathbb{I} \otimes B(\theta)^\dagger) \\ &= (\mathbb{I} \otimes B(\theta) \rho_{AB}(0) \otimes \rho_E(0) (\mathbb{I} \otimes B(\theta)^\dagger) \\ &= (\mathbb{I} \otimes B(\theta) |\alpha, \pm\alpha; m\rangle_{ABAB} \langle\alpha, \pm\alpha; m| \otimes |0\rangle \langle 0| (\mathbb{I} \otimes B(\theta)^\dagger) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il est simple de vérifier que le système totale est décrit par la matrice densité :

$$\begin{aligned} \rho_{ABE} &= \frac{1}{N_m} (|\alpha, \pm at; \pm ar\rangle \langle\alpha, \pm at; \pm ar| + e^{im\pi} |-\alpha, \mp at; \pm ar\rangle \\ &\quad + |-\alpha, \pm at; \pm ar\rangle \langle-\alpha, \mp at; \mp ar| + e^{-im\pi} |\alpha, \pm at; \pm ar\rangle \langle-\alpha, \mp at; \mp ar|) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Où l'état ρ_{ABE} est un état pur. Notre intérêt porte sur l'étude de la distribution des corrélations quantiques ainsi que les pertes de photons dans ce système, donc on effectue une trace sous tous les modes de l'environnement nous obtenons :

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= \text{Tr}_E(\rho_{ABE}) \\ &= \left[\frac{1}{2}(1 + C_r) |\alpha, \pm\alpha; m\rangle \langle \alpha, \pm\alpha; m| + \frac{1}{2}(1 - C_r) Z |\alpha, \pm\alpha; m\rangle \langle \alpha, \pm\alpha; m| Z \right]\end{aligned}\quad (3.56)$$

Où la quantité $C_r = e^{-2r^2}$ et les états $|\alpha, \pm\alpha; m\rangle$ sont définis par :

$$|\alpha, \pm\alpha; m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_m(t)}} (|\alpha, \pm\alpha; t\rangle + e^{im\pi} |\alpha, \mp\alpha; t\rangle) \quad (3.57)$$

Dans cette dernière équation de normalisation est donnée par

$$N_m(t) = 2(1 + e^{-2(1+t^2)|\alpha|^2} \cos(m\pi)) \quad (3.58)$$

Dans l'équation (3.57) l'opérateur de Pauli Z est défini par :

$$Z |\alpha, \pm\alpha; m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_m(t)}} (|\alpha, \pm\alpha; t\rangle - e^{im\pi} |-\alpha, \mp\alpha; t\rangle) \quad (3.59)$$

3.4.3 Préparation de la sonde ρ_{AB} et l'information de Fisher quantique locale

En utilisant les résultats de la section précédente, la densité résultante ρ_{AB} est définie par :

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= \frac{N_m(t)}{N_m} \left[\frac{1}{2}(1 + C_r) |\alpha, \pm\alpha; m\rangle \langle \alpha, \pm\alpha; m| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 - C_r) Z |\alpha, \pm\alpha; m\rangle \langle \alpha, \pm\alpha; m| Z \right]\end{aligned}\quad (3.60)$$

L'étude des corrélations quantiques entre les modes A et B implique un codage spécial des qubits représentant ces modes. On procède de la manière suivante :

Pour faciliter et simplifier nos calculs, nous prenons a_α et b_α réels tel que :

$$a_\alpha = \sqrt{\frac{1+p}{2}} \text{ et } b_\alpha = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \text{ avec } p = \langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2} \quad (3.61)$$

Où p définit la recouvrement entre les deux états cohérents.

De même, nous introduisons une base à deux dimensions engendrée par les vecteurs $|u_{\alpha t}\rangle$ définis comme :

$$|\alpha\rangle = a_{\alpha t} |u_{\alpha t}\rangle + b_{\alpha t} |u_{\alpha t}\rangle \text{ et } |-\alpha\rangle = a_{\alpha t} |u_{\alpha t}\rangle - b_{\alpha t} |u_{\alpha t}\rangle \quad (3.62)$$

$$\text{Avec } a_\alpha = \sqrt{\frac{1+p}{2}} \quad \text{et} \quad b_\alpha = \sqrt{\frac{1-p}{2}}$$

La matrice densité ρ_{AB} peut se présenter sous la forme matricielle suivante :

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} (1+q_r)a_\alpha^2 a_{\alpha t}^2 & 0 & 0 & (1+q_r)a_\alpha a_{\alpha t} b_\alpha b_{\alpha t} \\ 0 & (1+q_r)a_\alpha^2 b_{\alpha t}^2 & (1-q_r)a_\alpha a_{\alpha t} b_\alpha b_{\alpha t} & 0 \\ 0 & (1-q_r)a_\alpha a_{\alpha t} b_\alpha b_{\alpha t} & (1-q_r)b_\alpha^2 a_{\alpha t}^2 & 0 \\ (1+q_r)a_\alpha a_{\alpha t} b_\alpha b_{\alpha t} & 0 & 0 & (1+q_r)b_\alpha^2 b_{\alpha t}^2 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

avec r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission pour un diviseur de faisceaux, ils sont caractérisés par : $r^2 + t^2 = 1$. Dans la représentation engendrée par les états produit de deux qubits :

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |u_\alpha\rangle_A \otimes |u_{\alpha t}\rangle_B & \text{et} & & |2\rangle &= |u_\alpha\rangle_A \otimes |u_{\alpha t}\rangle_B \\ \text{et } |3\rangle &= |u_\alpha\rangle_A \otimes |u_{\alpha t}\rangle_B & \text{et} & & |4\rangle &= |u_\alpha\rangle_A \otimes |u_{\alpha t}\rangle_B \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dans la matrice densité ρ_{AB} la quantité :

$$q_r = C_r \cos(m\pi) \quad (3.65)$$

Information de Fisher quantique locale

Le but principale de cette partie est de calculer l'information de Fisher Locale pour notre système de sonde ρ_{AB} donnée par :

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Avec :

$$\rho_{11} = \frac{(p+1)(p'^2+1)(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)} \quad \text{et} \quad \rho_{14} = \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p'^2}(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)}$$

$$\rho_{22} = \frac{(p+1)(1-p'^2)(1-p'^2\cos(m\pi))}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)} \quad \text{et} \quad \rho_{23} = \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p'^2}(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)}$$

$$\rho_{32} = \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p'^2}(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)} \quad \text{et} \quad \rho_{33} = \frac{(1-p)(p'^2+1)(1-\cos(m\pi)p'^2)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)}$$

$$\rho_{41} = \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p'^2}(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)} \quad \text{et} \quad \rho_{44} = \frac{(1-p)(1-p'^2)(\cos(m\pi)p'^2+1)}{2(2\cos(m\pi)p^2+2)}$$

Les valeurs propres de la matrice densité sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(p^{t^2+1} + 1)(\cos(m\pi)p^{t^2} + 1)}{2(p^2 \cos(m\pi) + 1)} \text{ et } \lambda_2 = \frac{(p^{t^2+1} - 1)(\cos(m\pi)p^{t^2} - 1)}{2(p^2 \cos(m\pi) + 1)} \\ \lambda_3 &= 0 \quad \text{et} \quad \lambda_4 = 0\end{aligned}\quad (3.67)$$

Et leur états propres correspondant sont sous la forme :

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \left\{ \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p^{2t^2}}}{\sqrt{2}(p-1)(p^{t^2}-1)\sqrt{\frac{p^{t^2+1}+1}{(p-1)(p^{t^2}-1)}}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{p^{t^2+1}+1}{(p-1)(p^{t^2}-1)}}} \right\} \\ |\psi_2\rangle &= \left\{ 0, -\frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p^{2t^2}}}{\sqrt{2}(p-1)(p^{t^2}+1)\sqrt{\frac{p^{t^2+1}-1}{(p-1)(p^{t^2}+1)}}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{p^{t^2+1}-1}{(p-1)(p^{t^2}+1)}}}, 0 \right\} \\ |\psi_3\rangle &= \left\{ 0, \frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p^{2t^2}}}{\sqrt{2}(p+1)(p^{t^2}-1)\sqrt{\frac{p^{t^2+1}-1}{(p-1)(p^{t^2}-1)}}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{p^{t^2+1}-1}{(p-1)(p^{t^2}-1)}}}, 0 \right\} \\ |\psi_4\rangle &= \left\{ -\frac{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p^{2t^2}}}{\sqrt{2}(p+1)(p^{t^2}+1)\sqrt{\frac{p^{t^2+1}+1}{(p+1)(p^{t^2}+1)}}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{p^{t^2+1}+1}{(p+1)(p^{t^2}+1)}}} \right\}\end{aligned}\quad (3.68)$$

L'information de Fisher quantique locale pour les états s'exprime sous la forme suivante :

$$F(\rho, H) = \sum_i^2 \lambda_i F(|\psi\rangle, H) - \frac{8\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle\psi| H |\psi\rangle|^2 \quad (3.69)$$

Où $F(|\psi\rangle, H)$ est définie par :

$$F(|\psi\rangle, H) = 4(\Delta H)_{\psi_i}^2 = 4\langle\psi_i| H^2 |\psi_i\rangle - |\langle\psi_i| H |\psi_i\rangle|^2 \quad (3.70)$$

Avec $(\Delta H)_{\psi_i}^2$ est la variante de l'opérateur Hamiltonien H . Dans ce qui suit, nous supposons que la dynamique de l'état est réagi par les transformations locales agissant sur le premier qubit.

La forme générale du l'hamiltonien local mis en considération est donnée par :

$$H_1 = r \cdot \sigma = r_1 \cdot \sigma_1 + r_2 \cdot \sigma_2 + r_3 \cdot \sigma_3 \quad (3.71)$$

où $|r| = 1$; $r = \{\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha\}$ et $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ représentent les matrices de Pauli qui sont respectivement représentés par :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\ \hat{\sigma}_y &= -i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1| \\ \hat{\sigma}_z &= -|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\end{aligned}\quad (3.72)$$

3.4.4 Information de Fisher quantique locale

Dans cette partie nous décrivons l'expression de l'information de Fisher locale en présence des dynamiques locales particulières agissant sur les états quantiques symétrique ($m = 1$) et antisymétriques ($m = 0$) des états de Bell type chat de Schrödinger.

Information de Fisher locale pour $H_1 = \sigma_1$

Nous illustrons l'allure de l'information de Fisher locale pour une évolution unitaire suivant l'axe x pour les deux états symétriques ($m = 0$) et antisymétriques ($m = 1$). Pour mieux représenter l'information de Fisher, un facteur de normalisation de $\frac{1}{4}$ a été introduit lors de la production des figures.

a- États symétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction x ($H = \sigma_x$); l'information de Fisher devient :

$$F(\rho, \sigma_1) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(-p'^2 - 1)(1 - p'^2)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \quad (3.73)$$

Le comportement de l'information de Fisher $F(\rho, \sigma_1)$ le long de la direction x en fonction du paramètre p qui décrit le recouvrement entre deux états cohérents est représenté dans la figure (3.2) pour des valeurs précis du paramètre de reflexion carré r^2 du diviseur de faisceaux. En analysant l'allure des courbes, on remarque que la valeur de l'information de Fisher connaît une hausse pour p comprise entre 0 et 0.2 puis elle exprime une stagnation dans la région où p est comprise entre 0.8 et 1.

Nous nous intéressons à l'étude de l'information de Fisher dans les limites ($p = 0$) respectivement ($p = 1$).

L'information de Fisher est maximale pour ($p = 1$) pour les différents valeurs de r^2 , elle atteint la plus grande valeur pour $r^2 = 0.0125$.

L'information de Fisher local est minimale pour ($p = 0$) pour les différents valeurs de r^2 , elle atteint la valeur la plus basse pour $r^2 = 0.2$.

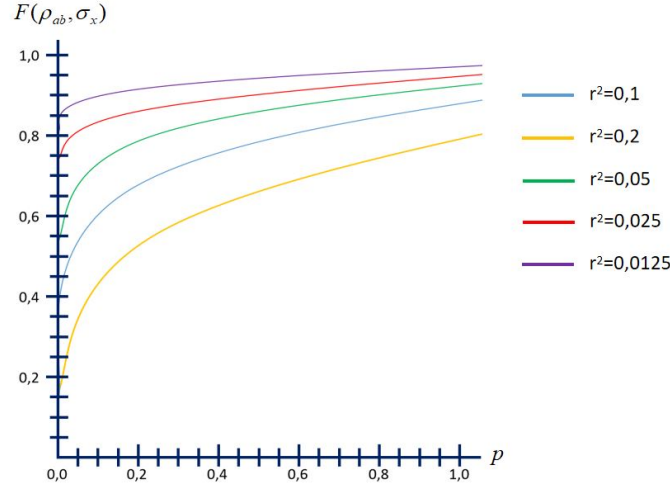


FIGURE 3.2 – Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_1$ pour les états non antisymétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction x ($H_1 = \sigma_x$) l'information de Fisher quantique pour les états antisymétrique (m pair) est donnée par :

$$F(\rho, \sigma_1) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(-p^{r^2} - 1)(1 - p^{r^2})(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \quad (3.74)$$

Le comportement de l'information de Fisher $F(\rho, \sigma_1)$ illustré sur la figure (3.3) pour des valeurs du paramètre de réflexion carré r^2 du diviseur de faisceaux.

L'allure de l'information de Fisher pour les états antisymétriques est identique à celle pour les états symétriques. C'est un indicateur qui nous informe de l'inexistence de pertes de photon soit pour les états symétriques ou bien pour les états antisymétriques pour la distance x .

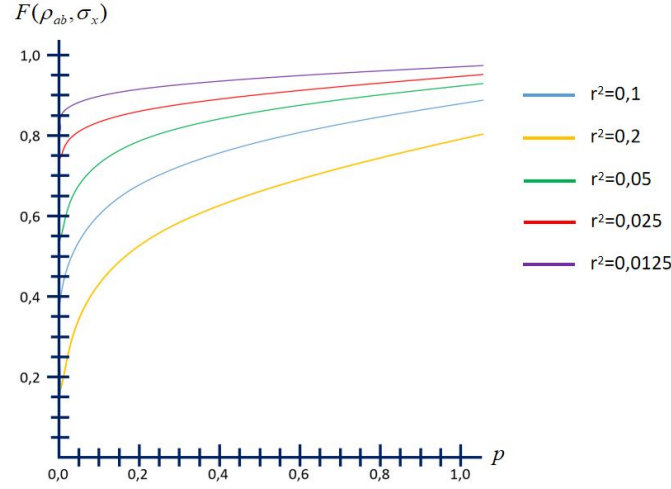


FIGURE 3.3 – Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_1$ pour les états antisymétriques $m = 1$

Information de Fisher locale pour $H_1 = \sigma_2$

a- États symétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction y ($H = \sigma_y$) l'information de Fisher s'écrit :

$$F(\rho, \sigma_2) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(1 - p^2)p^{2(1-r^2)}(p^{r^2} - 1)(p^{r^2} + 1)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(p^2 + 1)^2(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \quad (3.75)$$

La représentation de l'information de Fisher pour la direction y affiche un comportement satisfaisant puisque l'information de Fisher locale est maximale généralement pour les différents valeur de r^2 malgré une fluctuation au niveau de $r^2 = 0.2$. L'information de Fisher garde son allure.

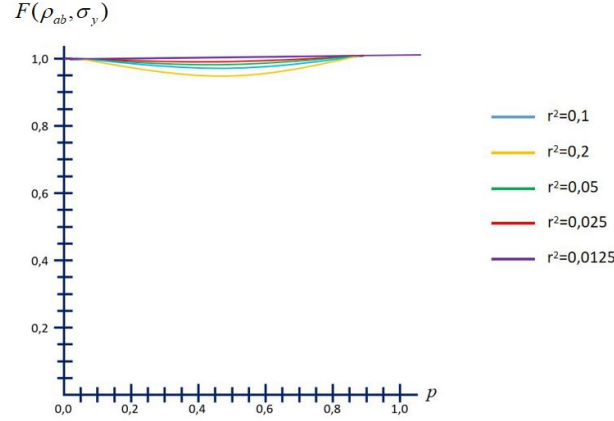


FIGURE 3.4 – Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_2$ pour les états non antisymétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction y ($H = \sigma_y = \sigma_2$) l'information devient :

$$F(\rho, \sigma_2) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4p^{2(1-r^2)}(-p^2 - 1)p^{2(1-r^2)}(1 - p'^2)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \quad (3.76)$$

L'allure de l'information de Fisher pour les états antisymétriques diffère de celle pour les états symétriques. En effet, nous percevons des pertes lorsqu'on augmente les valeur de r^2 pour des valeurs inférieure à 0.1 l'information de Ffisher pour les états antisymétrique affiche un comportement similaire à celui de l'information de Fisher pour les états symétriques.

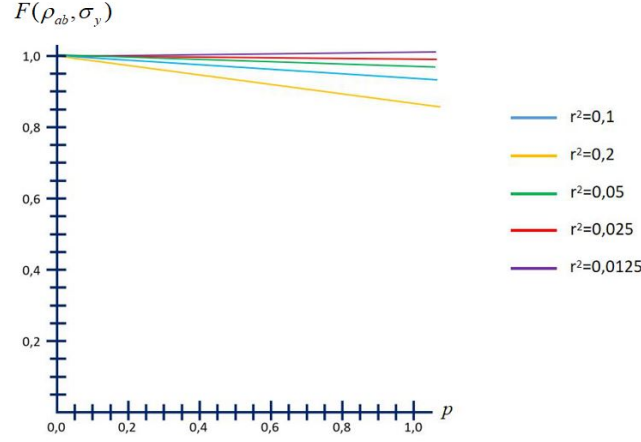


FIGURE 3.5 – Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_2$ pour les états antisymétriques $m = 1$

Information de Fisher locale pour $H_1 = \sigma_3$

a- États symétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction z ($H = \sigma_z$) l'information s'écrit :

$$F(\rho, \sigma_3) = 4 \left(\frac{(p^{r^2} - 1)(p^{2-r^2} - 1)(1 - \frac{(p - p^{1-r^2})^2}{(p^{2-r^2} - 1)^2})}{2(p^2 + 1)} + \frac{(p^{r^2} + 1)(p^{2-r^2} + 1)(1 - \frac{(p^{1-r^2} + p)^2}{(p^{2-r^2} + 1)^2})}{2(p^2 + 1)} \right) \quad (3.77)$$

On voit clairement qu'on est à la présence d'une monotonie d'intrication ce qui prouve que les états dans $F(\rho, \sigma_3)$ sont purs sous l'effet de la décohérence.

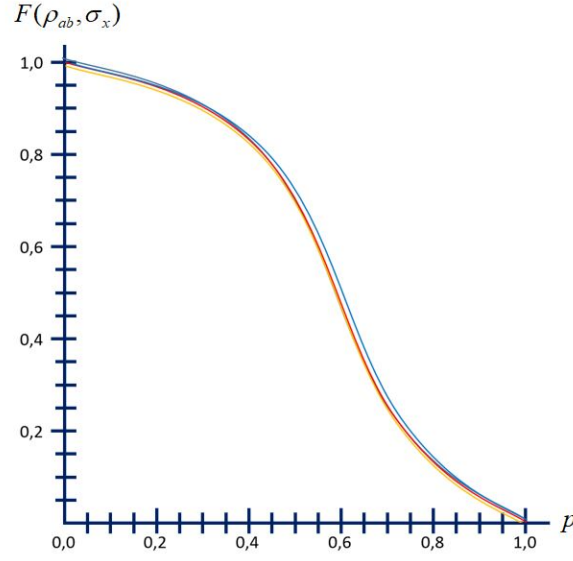


FIGURE 3.6 – Allure de l’information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_3$ pour les états symétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Pour une évolution unitaire le long de la direction z ($H = \sigma_z$) l’information devient :

$$F(\rho, \sigma_3) = 4 \left(\frac{(-p^{r^2} - 1)(p^{2-r^2} - 1)(1 - \frac{(p-p^{1-r^2})^2}{(p^{2-r^2}-1)^2})}{2(1-p^2)} + \frac{(1-p^{r^2})(p^{2-r^2} + 1)(1 - \frac{(p^{1-r^2}+p)^2}{(p^{2-r^2}+1)^2})}{2(1-p^2)} \right) \quad (3.78)$$

Le profile de l’information de Fisher $F(\rho, \sigma_3)$ le long de la direction z est représenté dans la figure (3.7) pour des valeurs du paramètre r^2 du diviseur de faisceau. Les états antisymétriques pour la direction z connaissent un comportement similaire que les différents directions traitées.

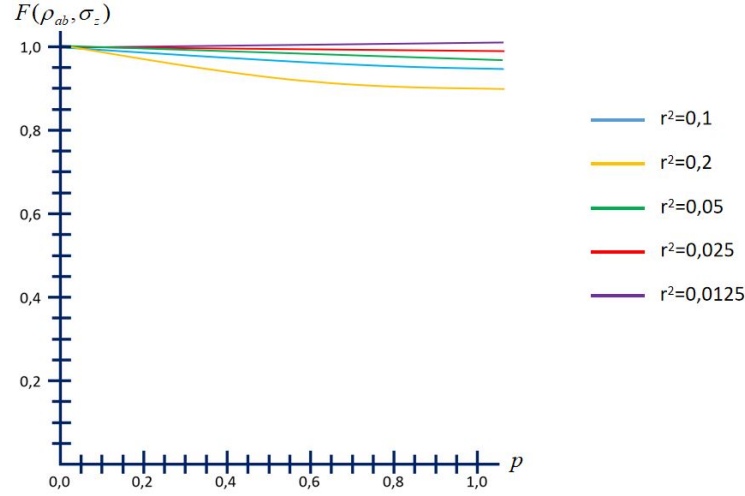


FIGURE 3.7 – Allure de l'information de Fisher quantique locale pour $H_1 = \sigma_3$ pour les états antisymétriques $m = 1$

3.5 Discorde quantique entropique

Nous avons déjà déterminé l'expression explicite du pouvoir interférométrique quantique et nous avons également étudié l'effet de ce genre de corrélation quantique pour l'amélioration de la précision des paramètres dans les protocoles de métrologie quantique.

La discorde quantique entropique quantifie les corrélations purement quantique. Cette mesure établit une barrière entre le monde classique et quantique. Ces deux expressions sont redéfinies comme la corrélation totale et corrélation classique. dû à la difficulté rencontrée pour calculer la discorde quantique, lorsque la mesure est effectuée sur le sous-système A du système bipartite AB , la discorde quantique est exprimée par [53] (voir l'équation 1.50) :

$$D(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + \tilde{S}_{\min} - S(\rho_{AB}) \quad (3.79)$$

a- États symétriques

Les trois quantités $S(\rho_A)$, $\tilde{S}_{\min}$ et $S(\rho_{AB})$ sont données par l'expression de Von Neumann de la matrice densité ρ_A :

$$S(\rho_A) = H \left(\frac{(p^{r^2} + 1)(p^{2-r^2} + 1)}{2p^2 + 2} \right) \quad (3.80)$$

Avec $H = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$

L'expression de $\tilde{S}_{\min}$ est donnée par :

$$\tilde{S}_{\min} = H \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2(p^{r^2} - 1)(p^{r^2} + 1)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)}{2(p^2 + 1)^2} \right) \quad (3.81)$$

$S(\rho_{AB})$ est l'expression de l'entropie de Von Neumann pour la matrice densité ρ_{AB} donnée par :

$$S(\rho_A) = H\left(\frac{(p+1)^2}{2p^2+2}\right) \quad (3.82)$$

Le profile de l'expression de la discorde quantique entropique pour les états symétriques est présenté sur la Figure (3.8). Nous constatons que le profile de la discorde connait une chute brusque lorsqu'elle atteint le maximum. On note aussi que pour une valeur inférieure du paramètre r la discorde marque la plus grande valeur, pour une valeur de $p \geq 0.4$ la discorde subit une forte chute puis pour $p \geq 0.95$ de la discorde s'annule. Ces fortes chutes brusques sont un indicateur de perte de photon sous l'effet de la décohérence.

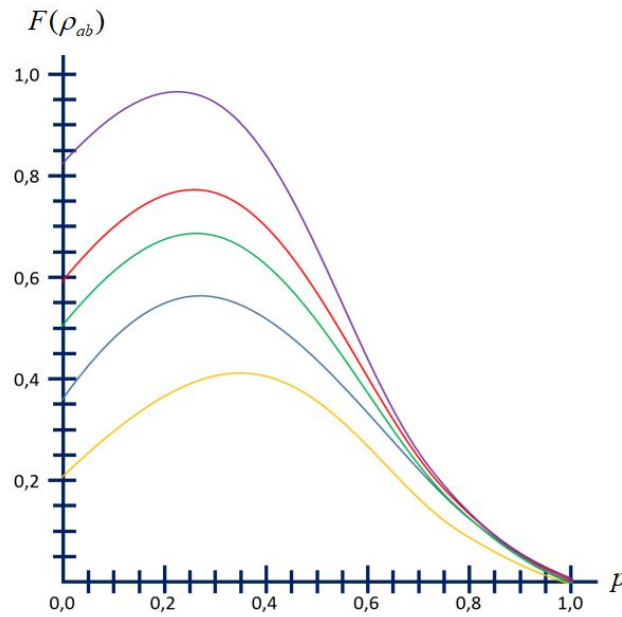


FIGURE 3.8 – Allure de la discorde quantique entropique pour les états symétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Les trois quantités $S(\rho_A)$, $\tilde{S}_{\min}$ et $S(\rho_{AB})$ sont données par l'expression de Von Neumann de la matrice densité ρ_A

$$S(\rho_A) = H\left(\frac{(1-p^{r^2})(p^{2-r^2}+1)}{2p^2+2}\right) \quad (3.83)$$

Avec $H = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$

L'expression de $\tilde{S}_{\min}$ et $S(\rho_{AB})$ sont données par :

$$\tilde{S}_{\min} = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{p^2(-p^{r^2}-1)(1-p^{r^2})(p^{1-r^2}-1)(p^{1-r^2}+1)}{(1-p^2)^2}}\right) \quad (3.84)$$

$$S(\rho_{AB}) = H\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.85)$$

Le profile de la discorde quantique entropique pour les états antisymétriques est présenté sur la figure (3.9). Nous constatons sur cette figure que l'allure de la discorde quantique continuer à augmenter jusqu'à atteindre une valeur maximale aux environs de $p = 1$. On note aussi, comme le cas pour les états symétriques, que pour une valeur inférieure du paramètre r la discorde affiche la plus grande quantité des corrélations. Les états symétriques sont résistants au pertes de photon et exhibent de très grandes quantités de corrélations quantiques.

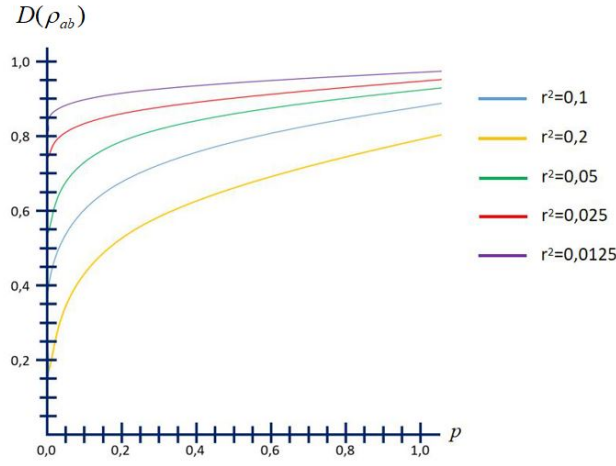


FIGURE 3.9 – Allure de la discorde quantique entropique pour les états antisymétriques $m = 1$

3.6 Pouvoir interférométrique quantique

Dans les protocoles de la métrologie quantique, le pouvoir interférométrique quantique introduit dans [92] joue un rôle principal comme quantificateur des corrélation quantiques. Nous comparons également cet indicateur des corrélations avec la discorde quantique basée sur l'entropie de Von Neumann[24, 93, 103]. Le pouvoir interférométrique quantique est généralement admis comme une bonne mesure des corrélations similaires à la discorde. Elle est définie par le minimum de l'information de Fisher quantique par l'expression :

$$P^A(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \min_{H_A} F(\rho_{AB}, H_A) \quad (3.86)$$

Les propriétés de l'information quantique de Fisher[94] confèrent au pouvoir interférométrique quantique (QIP) de nombreuses propriétés intéressantes (il est toujours positif et vaut

0 pour les états classiquement corrélés). Dans le cas général, il n'est pas symétrique par échange des rôles des sous-systèmes A et B ($P(H_A) \neq P(H_B)$) sauf pour les états quantiques symétriques. Il est intéressant de noter que presque tous les états quantique ont un pouvoir interférométrique quantique non nul. Pour les états mixtes séparables P peut être non nul.

Pour un état quantique arbitraire d'un système bipartite où le sous-système A est un qubit, le pouvoir interférométrique est donné par :

$$P(\rho_{AB}) = \lambda_{\min}[M] \quad (3.87)$$

Où $\lambda_{\min}[M]$ est la plus petite valeur propre de la matrice symétrique 3×3 composé d'éléments donnés par :

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l, \lambda_k \neq \lambda_l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{\lambda_k + \lambda_l} \langle \psi_k | \sigma_i \otimes \mathbb{I} | \psi_l \rangle \langle \psi_l | \sigma_j \otimes \mathbb{I} | \psi_k \rangle \quad (3.88)$$

L'ensemble $\{\lambda_k, |\psi_k\rangle\}$ décrit les valeurs propres et vecteurs propres du système.

a- États symétriques

Le pouvoir interférométrique pour les états (3.60) prend la forme suivante :

$$P(\rho) = \frac{1}{4} \min \{F(\rho, \sigma_1), F(\rho, \sigma_2), F(\rho, \sigma_3)\} \quad (3.89)$$

Les expression de l'information de Fisher sont données par :

$$\begin{aligned} F(\rho, \sigma_1) &= \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(-p^2 - 1)(1 - p^2)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \\ F(\rho, \sigma_2) &= \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(1 - p^2)p^{2(1-r^2)}(p^{r^2} - 1)(p^{r^2} + 1)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(p^2 + 1)^2(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)} \\ F(\rho, \sigma_3) &= 4 \left(\frac{(p^{r^2} - 1)(p^{2-r^2} - 1)(1 - \frac{(p-p^{1-r^2})^2}{(p^2-r^2-1)^2})}{2(p^2 + 1)} + \frac{(p^{r^2} + 1)(p^{2-r^2} + 1)(1 - \frac{(p^{1-r^2}+p)^2}{(p^2-r^2+1)^2})}{2(p^2 + 1)} \right) \end{aligned}$$

En comparant les expressions ci-dessus, il est clair que $F(\rho, \sigma_2)$ prend l'ascendant comme la plus large expression. Donc, la détermination de l'expression minimale est décidé entre $F(\rho, \sigma_1)$ et $F(\rho, \sigma_3)$.

La vérification de différence $F(\rho, \sigma_1) - F(\rho, \sigma_3)$ est un processus facile lorsque p, r satisfont la condition suivante :

$$4(p^2 - 1)p^{4r^2} + 4(4p^4 + p^2 - 1)p^2 - 4(p^4 + 4p^2 - 1)p^{2r^2} \geq 0 \quad (3.90)$$

La résolution numérique de cette condition nous révèle que le pouvoir interférométrique est divisé en deux régions :

- Région 1 : Où $p < p_+$ l'expression du pouvoir interférométrique est donné par :

$$P_{AB} = \frac{1}{4} F(\rho, \sigma_2) \quad (3.91)$$

- Région 2 : Où $p > p_+$ l'expression du pouvoir interférométrique est donné par :

$$P_{AB} = \frac{1}{4}F(\rho, \sigma_2) \quad (3.92)$$

Le comportement du pouvoir interférométrique est illustré sur la figure (3.10). L'allure de la courbe est composée de deux régions :

- Région 1 : Où règne l'expression de l'information de Fisher quantique locale suivant la direction x pour $p < p_+$.

On note la présence d'un pic indiquant la valeur maximale de la quantité du pouvoir, l'expression du pouvoir interférométrique connaît une hausse avant d'atteindre la valeur maximale. Les états dans cette région comportent une quantité importante de corrélations quantiques d'autre part, ces états garantissent une bonne précision et peuvent être employés dans des applications liés à la communication quantique.

- Région 2 : Où règne l'expression de l'information de Fisher quantique locale suivant la direction x pour $p > p_+$. Nous remarquons que l'allure prend la forme d'une monotonie d'intrication, cela est exprimé par une forte décroissance, en arrivant à $p > 0.8$ l'expression du pouvoir s'annule, on est à la présence de corrélation classique. La région (2) est lieu du phénomène de la décohérence.

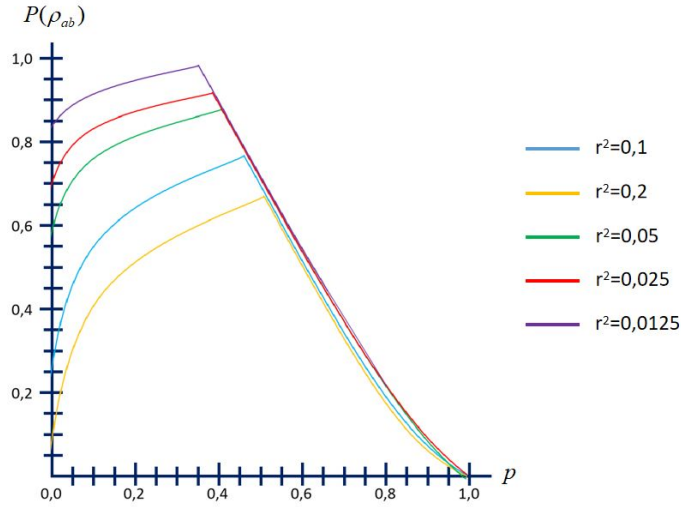


FIGURE 3.10 – Pouvoir interférométrique quantique pour les états symétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Le pouvoir interférométrique pour les états (3.61) prend la forme :

$$P(\rho) = \frac{1}{4} \min \{F(\rho, \sigma_1), F(\rho, \sigma_2), F(\rho, \sigma_3)\} \quad (3.93)$$

Où les expressions de l'information de Fisher sont données par (3.75), (3.77), (3.79)

$$F(\rho, \sigma_1) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4(-p^{r^2} - 1)(1 - p^{r^2})(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)}$$

$$F(\rho, \sigma_2) = \frac{4 - 4p^2}{1 - p^2} - \frac{4p^{2(1-r^2)}(-p^2 - 1)p^{2(1-r^2)}(1 - p'^2)(1 - p^{2(1-r^2)})}{(1 - p^2)(p^{1-r^2} - 1)(p^{1-r^2} + 1)}$$

$$F(\rho, \sigma_3) = 4 \left(\frac{(-p^{r^2} - 1)(p^{2-r^2} - 1)(1 - \frac{(p-p^{1-r^2})^2}{(p^{2-r^2}-1)^2})}{2(1 - p^2)} + \frac{(1 - p^{r^2})(p^{2-r^2} + 1)(1 - \frac{(p^{1-r^2}+p)^2}{(p^{2-r^2}+1)^2})}{2(1 - p^2)} \right)$$

Pour les états antisymétrique, en comparant les expression de l'information de Fisher locale, le pouvoir interférométrique n'est d'autre que l'expression de l'information de Fisher dans la direction x

$$P_{AB} = \frac{1}{4} F(\rho, \sigma_1) \quad (3.94)$$

L'allure du pouvoir interférométrique pour les états antisymétrique donc est identique à l'expression de Fisher locale dans la direction x .

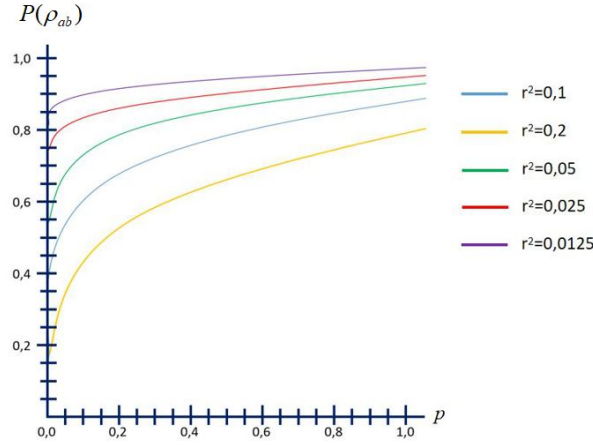


FIGURE 3.11 – Pouvoir interférométrique quantique pour les états antisymétriques $m = 1$

3.7 Incertitude locale quantique

L'incertitude locale quantique est une mesure soeur au pouvoir interférométrique quantique puisque les deux sont les mesures similaires à la discorde. Contrairement au pouvoir interférométrique, l'incertitude locale quantique se base sur l'information de Wigner-Yanase[9]. Elle est définie par la formule suivante

$$U_{\Lambda}^A(\rho_{AB}) = \min_{K_{\Lambda}^A} \zeta(\rho_{AB}, K_{\Lambda}^A) \quad (3.95)$$

L'incertitude locale quantique satisfait tous les critères posés pour une mesure basée sur la discorde. Pour les états bipartites Girolami et al[29] ont proposé une expression compacte pour l'incertitude locale

$$U_{\Lambda}^A(\rho_{AB}) = 1 - \max\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \quad (3.96)$$

où $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ sont les valeurs propres de la matrice 3×3 symétrique W , ses éléments sont définis par

$$W_{ij} = Tr \sqrt{\rho}(\sigma_i \otimes \Pi_B) \sqrt{\rho}(\sigma_j \otimes \Pi_B) \quad (3.97)$$

a- États symétriques

Les expressions des valeurs propres pour les états symétriques sont définies par :

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{(p-1)(p+1) \sqrt{\frac{(p^2-1)(p^2-r^2-1)}{p^2+1}} \sqrt{\frac{(p^2+1)(p^2-r^2+1)}{p^2+1}}}{p^{2(1-r^2)+2} - 1} \\ w_{22} &= \frac{(p-1)(p+1)p^{2(1-r^2)} \sqrt{\frac{(p^2-1)(p^2-r^2-1)}{p^2+1}} \sqrt{\frac{(p^2+1)(p^2-r^2+1)}{p^2+1}}}{p^{2(1-r^2)+2} - 1} \\ w_{33} &= \frac{p^{2(1-r^2)} - 2p^{2(1-r^2)+2} + p^2 - p^2(p^{2(1-r^2)} + p^2 - 2)}{(p^2+1)(p^{2-r^2}-1)(p^{2-r^2}+1)} \end{aligned} \quad (3.98)$$

L'obtention de l'expression de l'incertitude locale quantique pour les états symétriques est faite par la détermination de l'expression maximale des valeurs propres obtenus par la matrices (3.98). En comparant les trois expressions il s'avère que l'obtention de l'expression maximale passe par comparer les deux expressions w_{11} et w_{22} . L'allure de l'incertitude locale quantique pour les états symétriques affiche un comportement similaire au pouvoir interférométrique quantique, nous observons la formation de deux régions :

La région (1) pour $p \leq p_+$ caractérise la valeur maximale pour

$$U(\rho_{AB}) = 1 - \lambda_{\max} = 1 - w_{11} \text{ avec } p \leq p_+ \quad (3.99)$$

La région (2) pour $p \geq p_+$ l'expression de l'incertitude locale quantique

$$U(\rho_{AB}) = 1 - \lambda_{\max} = 1 - w_{33} \text{ avec } p \geq p_+ \quad (3.100)$$

L'allure de l'incertitude locale quantique pour les états symétriques exhibe un développement captivant. Dans une première observation, on note l'existence d'un pic qui caractérise la valeur maximale des corrélations quantique. Le comportement de l'information locale est caractérisé par une augmentation de la valeur de l'incertitude quantique jusqu'à la valeur maximale puis un changement brusque de comportement décrit par une forte chute. Les états dans la région(2) sont fortement affectés par la décohérence, ils décrivent une intrication monotone, à $p \geq 0.8$ la valeur de l'incertitude locale quantique s'annule.

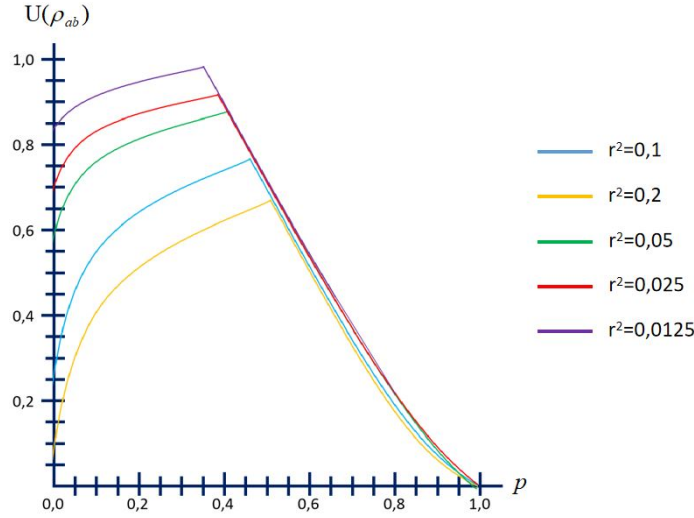


FIGURE 3.12 – Allure de l'expression de l'incertitude locale quantique pour les états symétriques $m = 0$

b- États antisymétriques

Les expressions des valeurs propres pour les états antisymétriques sont définis par :

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= \frac{(p-1)(p+1)\sqrt{\frac{(-p^{r^2}-1)(p^{2-r^2}-1)}{1-p^2}}\sqrt{\frac{(1-p^{r^2})(p^{2-r^2}+1)}{1-p^2}}}{p^{2(1-r^2)+2}-1} \\
 w_{22} &= \frac{(p-1)(p+1)p^{2(1-r^2)}\sqrt{\frac{(-p^{r^2}-1)(p^{2-r^2}-1)}{1-p^2}}\sqrt{\frac{(1-p^{r^2})(p^{2-r^2}+1)}{1-p^2}}}{p^{2(1-r^2)+2}-1} \\
 w_{33} &= \frac{p^{2(1-r^2)}-2p^{2(1-r^2)+2}+p^2+p^2(p^{2(1-r^2)}+p^2-2)}{(1-p^2)(p^{2-r^2}-1)(p^{2-r^2}+1)}
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

L'incertitude locale quantique pour les états antisymétriques obéit au même principe adopté pour les états symétriques. En comparant les trois valeurs propres de la matrice symétrique w_{ij} , il s'avère que la valeur maximale des valeurs propres est w_{11} , donc l'expression de l'incertitude locale quantique pour les états antisymétrique est :

$$\begin{aligned}
 U(\rho_{AB}) &= 1 - \lambda_{\max} \\
 &= 1 - w_{11} \\
 &= 1 - \frac{(p-1)(p+1)\sqrt{\frac{(-p^{r^2}-1)(p^{2-r^2}-1)}{1-p^2}}\sqrt{\frac{(1-p^{r^2})(p^{2-r^2}+1)}{1-p^2}}}{p^{2(1-r^2)+2}-1}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

L'allure de l'expression de l'incertitude locale quantique exhibe de bonnes valeurs des corrélations quantiques, nous remarquons que l'incertitude locale quantique maintient un comportement croissant, ceci indique l'inexistence de pertes de photons des grandes valeurs de l'incertitude locale quantique sont indice d'une bonne précision

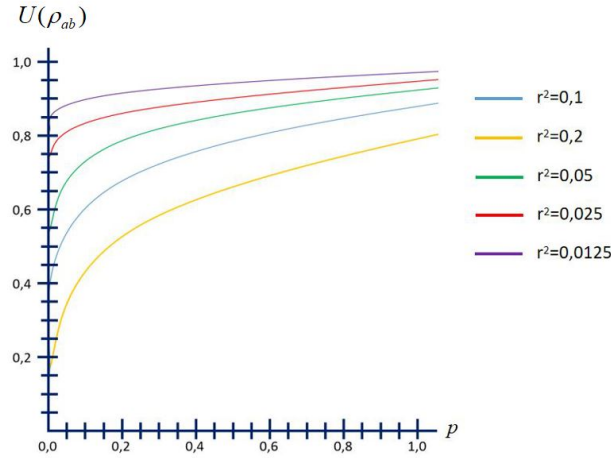


FIGURE 3.13 – Allure de l’expression de l’incertitude locale quantique pour les états anti-symétriques $m = 1$

3.8 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité analytiquement l’information de Fisher en exprimant sa représentation matricielle et en examinant le rôle des corrélations en métrologie quantique. Nous avons montré également que le pouvoir interférométrique joue un rôle primordial comme quantificateur des corrélations quantiques et peut être aussi utilisé comme une bonne mesure des corrélations quantiques dans des états bipartites et en particulier pour des matrices de rang supérieur pour lesquelles le calcul des expressions analytiques de la discorde quantique entropique est très difficile à déterminer.

Dans ce sens, le pouvoir interférométrique quantique fournit un bon outil géométrique pour identifier la quantification et la caractérisation des corrélations quantiques et les systèmes quantiques bipartites.

Le deuxième aspect important étudié dans ce chapitre est l’utilisation des états Bell dans des tâches métrologiques dans le but d’utiliser ces états pour la production d’une technologie quantique utilisant des corrélations au delà de l’intrication. Afin de bien traiter cet aspect, nous avons utilisé trois mesures des corrélations non classiques à savoir la discorde quantique et deux mesures métrologiques similaires à la discorde qui sont le pouvoir interférométrique quantique et l’incertitude locale quantique. Les résultats démontrent que les états antisymétriques sont convenables aux applications de la métrologie quantique puisqu’ils comptent une quantité intéressante de corrélations quantiques et résistent aux effets perturbateurs de l’environnement. A la lumière de ce qui précède, nous déduisons que les corrélations au delà de l’intrication auront un futur prometteur dans le domaine des communications quantiques.

Chapitre 4

Contributions

Contribution1 :

Titre : Dynamic of quantum Fisher information and quantum interferometric power in multipartite coherent states

Auteurs : Rachid Laghmach, Hanane El Hadfi, Wiam Kaydi, and Mohammed Daoud.

Journal : Eur. Phys. J. D (2019) 73 (9) 194

Résumé :

Les corrélations quantiques présentent une ressource importante dans plusieurs protocoles quantiques de traitement de l'information quantique (voir les références de l'article 1) [1–3]. Dans ce contexte, les récents développements théoriques et expérimentaux en métrologie quantique montrent que les corrélations non classiques constituent une ressource utile pour aller au-delà des protocoles d'estimation classiques [4–17]. L'information quantique de Fisher joue un rôle considérable en métrologie quantique [18–20]. Elle fournit un ingrédient quantitatif pour déterminer la précision d'un paramètre inconnu [4,18,21,23–25]. Son inverse donne une borne inférieure sur la précision via l'inégalité quantique de Cramer-Rao [18]. En effet, la notion de précision est sensiblement limitée par la quantité de bruit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ où N est le nombre de sondes (photons, atomes) utilisées dans l'expérience [18,21,26]. La théorie quantique offre les ressources appropriées pour améliorer la borne classique en introduisant des sondes intriquées pour atteindre l'échelle de Heisenberg $\frac{1}{N}$ [27–29]. Fournissant une plus grande information quantique de Fisher (QFI), les systèmes intriqués constituent des ressources utiles meilleurs que celles avec des systèmes séparables en métrologie quantique. Certains des systèmes quantiques intriqués multipartites peuvent dépasser la limite de sensibilité la plus élevée que les systèmes conventionnels peuvent fournir [30,31]. Il est également essentiel de signaler que l'information quantique de Fisher peut être utilisée comme quantificateur des corrélations quantiques [32]. Il est également intéressant de se demander si la corrélation quantique autre que l'intrication peut améliorer la précision des protocoles de métrologie. Ce problème a été récemment étudié dans les références [33–36]. En fait, pour comprendre le rôle de la corrélation quantique au-delà de l'intrication dans une tâche de métrologie quantique, un quantificateur de corrélation quantique appelé puis-

sance interférométrique quantique a été récemment introduit [31] (voir référence [35]). Ce quantificateur est directement lié aux informations quantiques de Fisher et donne également la précision d'une estimation de phase interférométrique. Cela confirme que la puissance interférométrique quantique ajoute un nouvel outil à la liste existante des quantificateurs de corrélations quantiques dans les systèmes quantiques bipartites (voir par exemple référence [37]). La plus connue est la discorde quantique entropique introduite dans [38]. Une formule compacte de la discorde quantique entropique n'est disponible que pour des cas particuliers des états à deux qubits [39–48]. Cela est dû à la complexité d'obtenir son expression analytique. La puissance interférométrique quantique est un autre outil pour quantifier les corrélations quantiques dans un système bipartite. Il offre un moyen pour comprendre le rôle de la corrélation quantique dans l'amélioration de la précision des paramètres dans les protocoles de métrologie quantique. Cela est essentiellement dû à sa fiabilité et à sa facilité de calcul. L'étude de la robustesse de la corrélation quantique contre la décohérence est cruciale pour tout protocole quantique [49,50]. Ainsi, il est nécessaire d'étudier la robustesse des informations quantiques de Fisher sous processus de décohérence [51]. Ce problème a été abordé dans des études récentes [52] en considérant différents canaux de décohérence.

Cet article est axé sur l'application des états cohérents intriqués (ECS) dans le domaine de la métrologie quantique. Nous remarquons que des états cohérents intriqués ont été utilisés comme ressource fondamentale pour effectuer diverses applications quantiques comme la téléportation quantique [29,53], le calcul quantique [54–56] et la théorie de l'estimation [18] (voir aussi les références [57,58]).

Motivés par les caractéristiques prometteuses de ce type d'états quantiques en métrologie quantique, nous étudions également les effets des corrélations quantiques inclus dans les suppositions paires et impaires d'états cohérents de Glauber pour améliorer la précision d'un paramètre inconnu dans un contexte interférométrique. Une autre question importante de ce travail concerne l'extrême sensibilité des états cohérents à la décohérence environnementale et les conséquences de cette sensibilité considérable aux bruits dans les protocoles de métrologie quantique [59–62]. En particulier, les états maximalelement intriqués sont extrêmement fragiles contre les pertes de particules et la précision optimale peut être aussi moindre que la limite quantique standard [57,63,64]. En ce sens, il est important d'étudier le comportement des corrélations quantiques pour déterminer les conditions dans lesquelles ces corrélations non classiques peuvent être utilisées pour améliorer les protocoles d'estimation des paramètres.

Dans la seconde section de cette contribution, nous introduisons les superpositions paires et impaires d'états cohérents multipartites et nous discutons deux différents schémas de codage.

Dans la troisième section, l'information quantique locale de Fisher est dérivée pour les deux schémas de codage. En particulier, nous présentons l'expression explicite de l'information quantique de Fisher lorsque la dynamique du premier qubit est régie par un Hamiltonien local.

Dans la quatrième section, nous discutons les situations où la meilleure estimation du paramètre de déphasage est obtenue. Nous donnons l'expression analytique de la puissance interférométrique dans les états considérés et nous comparons ce quantificateur de corrélations quantiques à la discorde quantique entropique.

Dans la cinquième section, nous analysons l'évolution dynamique de l'information quan-

tique de Fisher sous un canal de déphasage pour examiner les effets de décohérence sur les protocoles d'estimation. Des remarques finales sont données à la section 6.

En conclusion, dans cette contribution, nous examinons le rôle des corrélations quantiques dans des états cohérents multipartites de Glauber, pour améliorer la précision dans l'estimation d'un déphasage inconnu. En outre, un intérêt particulier est consacré à la dérivation de la puissance interférométrique quantique qui quantifie la quantité de corrélations non classiques. Ce quantificateur de corrélations quantiques est comparé à la discorde quantique originale basée sur l'entropie de Von Neumann et nous discutons les effets des corrélations quantiques dans les protocoles de métrologie quantique. De plus, la dynamique de l'information quantique de Fisher sur le canal de la déphasage est étudiée. Afin d'illustrer nos résultats, nous examinons la situation qui implique des états tripartites cohérents pour déterminer la sensibilité de l'état de la sonde lorsque la dynamique du premier qubit gouverné par un Hamiltonien local arbitraire. Pour illustrer notre étude, nous avons présenté trois cas de 'Hamiltonien' locaux pour lesquels nous avons dérivé les expressions analytiques des informations quantiques de Fisher.

Nous avons montré l'intérêt de la puissance interférométrique quantique comme étant un quantificateur de corrélations quantiques qui nous permet d'observer le rôle de la corrélation non classique dans l'amélioration des protocoles dans la métrologie quantique. Puis nous avons également comparé la puissance interférométrique quantique à la discorde quantique basée sur l'entropie de Von Neumann. A partir de cette comparaison, on peut conclure que la puissance quantique interférométrique peut être adoptée comme un bon quantificateur de corrélations quantiques. Nous avons aussi analysé le rôle de la corrélation quantique pour améliorer l'estimation d'un paramètre inconnu. Notre étude prouve que l'intrication est une ressource appropriée pour améliorer la précision. Et enfin, nous avons examiné la robustesse des informations quantiques de Fisher pour les états cohérents multipartites traversant un canal de déphasage. Nous avons considéré les états avec $n = 3$ particules et nous avons montré que l'information quantique de Fisher est robuste contre les effets dissipatifs lorsque l'évolution du premier qubit est gouverné par un Hamiltonien local $H_1 = \sigma_2$.

Dynamic of quantum Fisher information and quantum interferometric power in multipartite coherent states

Contribution2 :

Titre : Fisher and skew information for two-qubit Bell states under decoherence effects.

Auteurs : R. Laghmach, H. El Had, B. Maroufi and M. Daoud

Journal : International Journal of Quantum Information
(2020) 2050018, 8(4)2020.

Résumé :

Dans cette contribution, nous avons étudié en détail l'information de Fisher pour les états de Bell à deux qubits en tenant compte des effets de la décohérence. Nous donnons les expressions explicites des informations quantiques de Fisher et les informations de Wigner - Yanase pour un état de Bell à deux qubits. Nous discutons également de l'intrication thermique quantifiée par la concurrence de Wootters pour trois canaux de décohérence. Nous comparons son comportement dynamique avec les informations quantiques de Fisher et les informations de Wigner - Yanase. Nous utilisons ensuite cette comparaison pour étudier l'influence des canaux bruyants sur l'intrication thermique et son rôle dans l'amélioration des performances des protocoles de métrologie. En particulier nous avons présenté des résultats intéressants concernant la dynamique du QFI (information quantique de Fisher) et du SI (information asymétrique une version de QFI) qui est également devenue une notion très étudiée ces dernières années. En plus, cette grandeur joue un rôle fondamental dans la théorie de l'estimation quantique. Pour les états de Bell à deux qubits sous effets de décohérence, nous avons notamment étudié l'évolution de ces deux grandeurs avec la température T du paramètre d'anisotropie du modèle de Heisenberg sous canaux d'amortissement. Nous avons également comparé les mesures à l'intrication thermique quantifiée. Les résultats obtenus indiquent que l'intrication thermique est une ressource efficace pour les protocoles de métrologie. En effet, nous avons montré que lorsque le modèle Heisenberg XY à deux qubits présente un enchevêtrement important, les états correspondants offrent la meilleure efficacité d'estimation. Le deuxième aspect important étudié dans cette contribution concerne l'influence des canaux bruyants sur l'intrication thermique et son rôle dans l'amélioration ou la réduction de la précision de la température. En particulier, nous avons montré que l'état thermique est plus résistant à PDC (Phase damping channel : canal d'amortissement de phase) et DPC (Depolarizing channel : canal dépolarisant) .

Avec le développement de la théorie de l'information quantique, les corrélations devraient jouer un rôle important dans l'amélioration des performances des protocoles quantiques. En particulier, il a été largement reconnu, au cours des dernières décennies, que les corrélations sont des ressources précieuses pour le traitement de l'information quantique. Il est donc souhaitable de caractériser et de quantifier les corrélations dans le contexte quantique à partir de diverses perspectives. Récemment, une mesure alternative des corrélations a été introduite en termes d'information quantique de Fisher (QFI), motivée par son rôle dans les protocoles d'estimation quantique. En effet, dans le domaine de la métrologie quantique, un effort particulier a été consacré à l'analyse de l'information quantique de Fisher. Différents protocoles et stratégies ont été proposés et réalisés en métrologie quantique.

L'information asymétrique (SI), une version de QFI, est également devenue une notion très étudiée ces dernières années. Ceci justifier notre intérêt pour ces deux quantificateurs dans cette contribution.

Conclusion Générale

La seconde révolution de la physique quantique a fait naître une science qui regroupe une multitude d'outils et de moyens de traitements et d'analyse de l'information nommée la métrologie quantique. Il est inutile de rappeler que la métrologie classique a eu un immense impact sur le monde dans lequel nous vivons. Elle a amélioré la qualité de vie des gens en facilitant des progrès tels que la navigation, les télécommunications, les transports et la médecine ainsi que la facilitation des échanges. Etant donné que cette science traite des questions relatives à la précision avec laquelle des quantités inconnues peuvent être estimées ou détectées, la métrologie quantique se veut une continuité pour obtenir une estimation aussi précise que possible de paramètres physiques en utilisant des sondes quantiques. Ainsi la métrologie quantique multiparamétrique fournit le cadre pour atteindre ces objectifs en exploitant les ressources quantiques. Il faut cependant noter que la métrologie quantique est à ses débuts et on s'attend à beaucoup de progrès dans le domaine des méthodes de la mesure et de la précision afin d'arriver à un stade plus développé. En fait, ce domaine connaît encore des limites technologiques, plusieurs méthodes techniques et expérimentales sont en cours de développement. Dans ce travail, nous avons traité de manière rigoureuse le protocole de la métrologie quantique en théorie quantique de l'information. Le premier chapitre est consacré à la description des différents concepts de base de la théorie de l'information classique et comment ses notions peuvent être appliquées au monde quantique. Il s'agit aussi de présenter des mesures qui permettent de quantifier les corrélations quantiques pour les systèmes quantiques bipartites et tripartites. Le second chapitre concerne le rôle des corrélations quantiques en métrologie quantique. Dans ce contexte, nous avons utilisé l'incertitude quantique locale (LQU) comme incertitude quantique minimale liée à l'information quantique de Fisher. Cette mesure correspond à toutes les exigences physiques d'une mesure de corrélation quantique. Nous avons étudié le rôle des corrélations quantiques pour dépasser les limites des stratégies des mesures classiques. Nous avons présenté aussi les concepts de l'information quantique de Fisher. Nous nous sommes concentrés dans le troisième chapitre sur la quantification analytique de l'information de Fisher. Nous avons introduit le concept du pouvoir interférométrique qui peut être utilisé comme une très bonne mesure des corrélations quantiques. Nous nous sommes intéressés également à l'étude formelle de la quantification analytique de l'information de Fisher. Nous avons proposé un schéma métrologique basé sur l'utilisation des états de Bell en tenant compte des corrélations au delà de l'intrication. Au terme de ce qui précède, il résulte que les corrélations quantiques auront un futur prometteur dans le domaine des communications quantiques. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons présenté nos contributions dans le domaine de la métrologie quantique. Nous avons commencé par le traitement de la dynamique des corrélations quantiques dans des états cohérents multipartites via le pouvoir interférométrique. Dans ce contexte les corrélations quantiques présentent une ressource importante et utile pour aller au-delà des protocoles d'estimation classiques. Nous avons aussi analysé le rôle des informations quantiques de Fisher en métrologie quantique. Il est également essentielle de mentionner que les informations quantiques de Fisher sont aussi utilisées comme quantificateurs de corrélations quantiques. Par ailleurs, il convient de considérer la corrélation quantique comme une ressource essentielle pour l'amélioration de la précision des protocoles de métrologie. Cela confirme que le

pouvoir interférométrique quantique ajoute un nouveau quantificateur de corrélations quantiques dans les systèmes quantiques bipartites. Nous avons également analysé l'utilisation des états cohérents intriqués qui sont des ressources fondamentales pour effectuer diverses tâches comme la téléportation quantique, le calcul quantique et les protocoles de l'estimation. Enfin, nous nous sommes concentrés sur l'information de Fisher pour les états de Bell à deux qubits soumis aux effets de la décohérence. Nous avons discuté l'intrication thermique et son évolution. Nous avons notamment étudié l'évolution des états de Bell à deux qubits sous effets de décohérence en fonction de la température T . Il résulte de cette analyse que l'intrication thermique est une ressource efficace pour les protocoles de métrologie.

Résumé de la thèse : La tâche de la métrologie quantique est d'obtenir une estimation aussi précise que possible d'un ensemble de paramètres utilisant des sondes quantiques. Ainsi, la métrologie quantique multi-paramétrique offre un cadre aux des applications technologiques très prometteuses. Dans cette thèse de doctorat intitulée " Contribution à l'étude du rôle des corrélations quantique dans les Protocoles de Métrologie quantique ". Nous étudions comme mesures des corrélations quantiques dans des systèmes multipartites, l'incertitude quantique locale, la discordance quantique, l'information de Fisher et le pouvoir interférométrique. Nous discutons aussi la notion de discordance quantique entropique. Dans un schéma métrologique, les limites inhérentes comme : la limite quantique standard, la limite de Heisenberg et la borne de Cramér-Rao sont explicitement détaillé. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés aussi à la quantification analytique de l'information de Fisher et la métrologie quantique pour les états quasi Bell ainsi que le pouvoir interférométrique quantique. Nous montrons que les corrélations quantiques permettent l'amélioration des tâches d'estimation. Il s'en suit que l'exploitation de corrélation non classique et une ressource essentielle en métrologie quantique.

Mots-clés : Métrologie quantique, intrication, corrélation quantique, Limite quantique standard, discordance quantique, information de Fisher, état cohérent intriqué.

Bibliographie

- [1] R. P. Feynman, Quantum-mechanical computers. *Foundations of physics* 16 (1986) 507-531.
- [2] R. P. Feynman, Simulating physics with computers, *International Journal of Theoretical Physics* 21 (1982) 467-488.
- [3] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* 23, 807, 823, 844 (1935).
- [4] A Mathematical Theory of Communications “Une théorie mathématique des télécommunications” *Bell. Syst. Techn. J.*, (U. S. A.) (Juillet 1948) C.E.Shannon
- [5] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, “Description of Physical Reality” *Phys. Rev.* 47 (1935) 777.
- [6] W. K. Wootters, *Quantum Information and Computation* 1, 27, (2001).
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [8] M. Daniel, A. Michael, A. Shimony, A. Zeilinger : “Bell’s theorem without inequalities” *Pub* 30 July 1990.
- [9] E.P. Wigner, M.M. Yanasse, Information contents of distributions, *Proc. Natl.Acad. Sci. USA* 49,910 (1963).
- [10] M. Le Bellac, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [11] S. Hill and W. K. Wootters “Entanglement of a Pair of Quantum Bits” Department of Physics, Williams College, Williamstown MA 01267 (1997).
- [12] C.H.Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters “Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels”, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895-1899 (1993).
- [13] J. Preskill, *Quantum information and computation*, lecture (1998). (livre)
- [14] Werner, R.F. : Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden variable model. *Phys. Rev. A* 40, May (1989).
- [15] Book : *Mathematical foundations of quantum mechanics* by John Von Neumann. Translation from the German by Robert.T.Beyer
- [16] C.Lancien et al, “Should Entanglement Measures be Monogamous or Faithful?” *Phys. Rev. Lett.* (1 Aug 2016).
- [17] William K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Physical Review Letters*, 80 (1997) 2245.

- [18] M. A. Nielsen et I. L. Chuang, Cambridge University Press (2000).
- [19] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, “Quantum Information and communication” Nature 404, 247 (2000).
- [20] S. Braunstein, C. Caves, R. Jozsa, N. Linden, S. Popescu and R. Schack, “Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing” Phys. Rev. Lett. 83, 1054 (1999).
- [21] B. Dakic, V. Vedral et C. Brukner, Phys. Rev. Lett 105 (2010) 190502.
- [22] J. Martin et al., “Multiqubit symmetric states with high geometric entanglement” Phys. Rev. A 81 (2010) 062347.
- [23] M. Water, D. Gross and J. Eisert “Multi-Partite entanglement” 5 Feb 2017.
- [24] Ollivier, H., Zurek, W.H. : Quantum Discord : a measure of the quantumness of correlations. Phys. Rev. Lett. 88, 017901 (2001).
- [25] B. Dakic, V. Vedral, and C. Brukner, ”Necessary and Sufficient Condition for Non zero Quantum Discord” Phys. Rev. Lett. 105 5 Nov(2010) 90502.
- [26] M. Koashi et A. Winter, ‘ Monogamy of quantum entanglement and other correlations” Phys. Rev. A, 69 (2004) 022309.
- [27] V. Coffman, J. Kundu and W.K. Wootters “ Distributed Entaglement” 24 Jul 1999.
- [28] T. Osborne et F. Verstraete, Phys. Rev. Lett 96 (2006) 220503.
- [29] D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, “ Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty”, Phys. Rev. Lett. 110, 240402 (2013).
- [30] J.S.Kim, G.Gour et B.C.Sanders “ Limitations to Sharing entaglement Phys. Rev. Lett 18 Oct 2012.
- [31] B. Groisman, S. Popescu, and A. Winter, Phys. Rev. A 72 (2005) 032317.
- [32] S. Luo, Wigner-Yanase ” Skew information and uncertainty relations, Phys. Rev. Lett. 91, 180403 (2003).
- [33] D.Petz, Entropy, von Neumann and the von Neumann entropy, In John von Neumann and the foundations of quantum physics, Springer Netherlands (2001) 83.
- [34] P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (Oxford University Press, Oxford, 1930).
- [35] J. Huang et al, Annual Review of Cold Atoms and Molecules “ Quantum Metrology of cold atoms, 2 (28 Nov 2013)365-415.
- [36] R. J. Glauber ” Coherent and incoherent states of the radiation field” Phys. Rev. 131, no 6,2766 (Sep 1963)
- [37] Greenberger, D. M., M. Horne, and A. Zeilinger (1989), \Going beyond Bells theorem,” in Bells Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe, Fundamental Theories of Physics, Vol. 37, edited by M. Kafatos (Springer Netherlands).
- [38] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, et L. Davidovich. “Quantum metrology for noisy systems”. Brazilian Journal of Physics,41, no 4, 229 (2011).

-
- [39] J. G. Rarity, P. R. Tapster, E. Jakeman, T. Larchuk, R. A. Campos, M. C. Teich, et B. E. A. Saleh. “Two-photon interference in a mach-zehnder interferometer”. *Phys. Rev. Lett.*, 65, 1348 (Sep 1990).
 - [40] M. W. Mitchell, J. S. Lundeen, et A. M. Steinberg. “Super-resolving phase measurements with a multiphoton entangled state”. *Nature*, 429, no6988, 161 (May 2004).
 - [41] Y. Ou. “Fundamental quantum limit in precision phase measurement”. *Phys. Rev. Vol* 55 Number 4 April 1997.
 - [42] J.J.Bollinger, Wayne M.Itano, and D.J.Wineland “ Optimal frequency measurement with correlated States” *Physical Review A Volume 54 Number 6* 1996.E.Schrödinger. *Collected papers on wave mechanics*. Chelsea Publishing Company(1978). (Livre).
 - [43] E. Shrödinger “ Collected Papers on wave Mechanics” *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part I)* Vol 79 1926.
 - [44] V. Giovannetti, S. Lloyd et L. Maccone, *Science*, 306 (2004) 1330.
 - [45] F. Toscano et al, *Phys. Rev. A*, 73 (2006) 023803.
 - [46] M. Daoud, R.A. Laamara, *J.Phys.A : Math.Theor.* 45 (2012)325302. 1330.
 - [47] J.Liu, X.Jing et X.Wang, “ Phase matching condition for enhancement of phase sensitivity in quantum metrology” *Phys. Rev. A*, 88 (2013) 042316.
 - [48] J.S.Kim, G. Gour, B. C. Sanders, *Contemp. Phys* 53 (2012) 417-432.
 - [49] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Advances in quantum metrology. Nature Photon.* 5, 222 (2011).
 - [50] M. G. A. Paris, *Quantum estimation for quantum technology. Int. J. Quant. Inf.* 7, 125 (2009).
 - [51] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press Book Review(1946)./ C. R. Rao. *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley & Sons, Inc. (1973).
 - [52] U. Dorner et al. *Optimal quantum phase estimation. Phys. Rev. Lett.* 102, 040403 (2009).
 - [53] Koashi, M., Winter, A. “ Monogamy of quantum entanglement and other correlations”. *Phys. Rev. A* 69, 022309 (2004).
 - [54] Fanchini, F.F., Cornelio, M.F., de Oliveira, M.C., Caldeira, A.O. “ Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum Discorde”. *Phys. Rev. A* 84, 012313 (2011)
 - [55] Dakic, B., et al. “Quantum Discorde as resource for remote state preparation”. *Nat. Phys.* 14 Aug (2013).
 - [56] A.Streltsov, H.Kampermann, D.Bru ,” Quantum cost for sending entanglement”. *Phys. Rev. Lett.* 108, 250501 (2012).
 - [57] W.H. Zurek, “ Einselection and decoherence from an information theory perspective”. *Ann. Phys. (Leipzig)* 9, 855{864 (2000)
 - [58] Streltsov, A., Zurek, W.H. : Quantum Discorde cannot be shared. *Phys. Rev. Lett.* 111, 040401 (2013)
-

-
- [59] R.D.Dobrzanski,J.Kolodynski,andM.Guta,” The elusive Heisenberg limit in quantum-enhanced metrology metrology, *Nature Commun.* 3, 1063 (18 Sep 2012).
 - [60] Clauser, J.F., Horne,M.A., Shimony, A., Holt, R.A. : Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23, 880{884 (1969).
 - [61] Clauser, J.F., Horne,M.A., Shimony, A., Holt, R.A. : Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23, 880{884 (1969).
 - [62] M. M. Wilde, “From Classical to Quantum Shannon Theory” arXiv preprint 1106-1445. July 16, 2019
 - [63] P.Bogaert and D.Girolami July 7, 2018 “Metrological measures of non-classical correlations”. In *Lecures on general Quantum correlations and their Applications*. Department of Atomic and Laser Physics, University of Oxford
 - [64] T.Nagata, R.Okamoto, J. L. O’Brien, K.Sasaki and S. Takeuchi *New Series*, Vol. 316, No. 5825 (May 4, 2007), pp. 726-729 “Beating the Standard Quantum Limit with Four-Entangled Photons”.
 - [65] C. W. Helstrom. “Quantum detection and estimation theory”. *Journal of Statistical Physics*,1, no 2, 231 (1969).
 - [66] A.Aspect, P.Grangier, and G.Roger, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell’s Inequalities” *PHYS REVIEW LETT* vol 49. 12 July 1982.
 - [67] A. Streltsov, G. Adesso, M. Piani et D. Bruss, *Phys. Rev. Lett* 109 (2012) 050503.
 - [68] W.Dûr, G.Vidal et JI.Cirac “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways” *Phys. Rev. Lett* Feb 2008.
 - [69] D.Bouwmeester, J.W. Pan, M.Daniell, H. Weinfurter & A.Zeilinger “Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement *Phys. Rev.* 13 Oct 1998.
 - [70] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* 84, 1655 (2012).
 - [71] Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G. : Experimental test of Bell’s inequalities using time-varyinganalyzers. *Phys. Rev. Lett.* 49, 1804{1807 (1982).
 - [72] Datta, A. “ A Condition for the Nullity of Quantum Discorde” , arXiv :1003.5256 (2018)
 - [73] U. Dorner et al. Optimal quantum phase estimation. *Phys. Rev. Lett.* 102, 040403 (2009).
 - [74] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* ,Princeton University Press, New Jersey, (1955).
 - [75] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich, General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology, *Nature Phys.* 7, 406 (2011).
 - [76] D. Petz and C. Ghinea, Introduction to quantum Fisher information. e-print arXiv :1008.2417 (2010).

- [77] S. Luo, Wigner-Yanase skew information vs quantum Fisher information, *Proc. Am. Math. Soc.* 132,885 (2003).
- [78] L. Pezze and A. and Smerzi, Entanglement, nonlinear dynamics, and the Heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.* 102, 100401 (2009).
- [79] K. Modi, H. Cable, M. Williamson, and V. Vedral, Quantum correlations in mixedstate metrology. *Phys. Rev. X* 1, 021022 (2011)
- [80] S. Boixo, S. T. Flammia, C. M. Caves, and J. M. Geremia, Generalized limits for single-parameter quantum estimation. *Phys. Rev. Lett.* 98, 090401 (2007).
- [81] D. C. Brody, Information geometry of density matrices and state estimation. *J. Phys. A : Math. Theor.* 44, 252002 (2011).
- [82] Schrodinger, E. : Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* 23, 807{812 (1935) “The Early History of Quantum Entaglement, 1905-1935 Aug (2007).
- [83] Bell, J.S. : On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* (Long Island City, N.Y.) 1, 195{ 200 (1964).
- [84] J.R. Torgerson et L.Mandel. *Phys, Rev. Lett*, 76(1996) 3939-3942
- [85] J. S. Joseph, “ Quantum Entanglement : An Exploration of a Weird Phenomenon1” Sabiduria, Vol. 1, 2
- [86] A. K. Ekert, “ Quantum Cryptography Based on Bell’s Theorem “ *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).
- [87] L.Jing , J. Xiaoxing , & W. Zhong, W.Xiaoguang “Quantum Fisher information for density matrices with arbitrary ranks” 25 Dec 2013
- [88] G.Tôth1 & D. Petz, “Extremal properties of the variance and the quantum Fisher information” *Phys. Rev.* March 2013.
- [89] R. Demkowicz-Dobrzanski, U. Dorner, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek et I. Walmsley, *Phys. Rev. A*, 80(2009) 013825.
- [90] U. Leonhardt. *Measuring the quantum state of light*. Book Cambridge University Press, (1997).
- [91] O. Hirota, M. Sasaki (2002) entanglement state based on monorthogonal state. In *Quantum Communication*. Springer Boston MA.
- [92] D. Girolami, A.M. Souza, V. Giovannetti, T. Tufarelli, J.G. Filgueiras, R.S. Sarthour, D.O. Soares-Pinto, I.S. Oliveira et G. Adesso *Phys. Rev. Lett*, 112 (2014)210401.
- [93] R.A. Fisher, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 22 (1925) 700 .
- [94] M. Shi, W. Yang, F. Jiang et J. Du, *J. Phys. A : Math. Theor*, 44 (2011) 415304.
- [95] B. Lanyon, M. Barbieri, M. Almeida and A. White, “ Experimental quantum computing without entanglement” *Phys. Rev. Lett.* 101, 200501 (2008).
- [96] V. Vedral and M.B. Plenio “Entanglement Measures and Purification Procedures” (February 1, 2008)
- [97] G. Adesso. *Phys, Rev A*, 90 (2014) 022321

- [98] G. Vidal, et R. Werner, “Quantum error correction and detection : quantitative analysis of a coherent-state amplitude damping code” *Phys. Rev. A* 65(3) (2002) 032314.
- [99] S. Luo, “Quantum discord for two-qubit systems” *Phys. Rev. A* 77 (2008) 042303.
- [100] M.S. Sarandy, T.R De Oliveira et L. Amico, *Inter. J. Mod. Phys. B*, 27 (2013), 1345030
- [101] Jing Liu, Xiao-Xing jing, et Xiaoguang wang, Quantum metrology with unitary parametrization processus, arxiv : 1409.4057v2
- [102] P.Boes, J. Eisert, R. Gallego, Markus P. Müller and Henrik Wilming : “Von Neumann entropy from unitarity. 23 Jul 2018.
- [103] L. Henderson et V. Vedral, *J. Phys A : Math. General* , 34 (2001) 6899.
- [104] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral et M. Williamson, *Phys. Rev. Lett* 104 (2010) 080501.