

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de Recherche : Centre de Recherche en Energie

Structure de Recherche : Equipe de Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique

Discipline : Physique

Spécialité : Mécanique et Energétique

Présentée et soutenue le 16/11/2019 par :

Adil BOUNOUAR

Modélisation mathématique et numérique du transfert de chaleur au sein d'une cavité sphérique "Applications du laser dans le domaine médical"

JURY

Najem HASSANAIN	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Président
Kamal GUERAOU	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Directeur de Thèse
Mohamed BOUKALOUC	PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Rapporteur
Mohammed CHERRAJ	PH, Faculté des Sciences, Université Mohammed V - Rabat	Rapporteur
Mohamed DRIOUICH	PH, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane - Beni Mellal	Rapporteur
El Hassan EL KAFSAOUI	PES, Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail - Kenitra	Examineur
Mohammed TAÏBI	PH, Faculté des Sciences Aïn Chock, Université Hassan II- Casablanca	Examineur
Mohammed SAMMOUDA	PA, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane - Beni Mellal	Invité

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'Equipe de Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique (MSME), du Laboratoire de Physique Théorique de l'Université Med V Faculté des Sciences de Rabat, sous la direction du **Professeur Kamal GUERAOU**.

Un grand merci à mon directeur de thèse, **Monsieur Kamal GUERAOU** Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat et Responsable permanent de l'équipe de recherche : Modélisation et Simulation en Mécanique et Energétique (MSME), pour m'avoir confié ce travail. Je suis très reconnaissant pour la qualité de ses nombreux conseils, son attention, et bien évidemment pour les connaissances et son expérience dans le domaine de la recherche qu'il a su me transmettre, et qui j'en suis sûr me seront bénéfiques dans les années futures, et aussi pour ces innombrables qualités humaines.

À notre Maître et Président de thèse **Monsieur Najem HASSANAIN**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat. Nous sommes très sensibles à l'honneur que vous nous faites en acceptant la présidence de notre jury de thèse. Votre culture scientifique, votre compétence et vos qualités humaines ont suscité en nous une grande admiration, et sont pour vos élèves un exemple à suivre. Durant notre formation, nous avons eu le privilège de bénéficier de votre enseignement et d'apprécier votre sens professionnel. Veuillez accepter, cher Maître, l'assurance de notre estime et notre profond respect.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait **Monsieur Mohamed BOUKALOUCH**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, pour le soutien qui a fourni à mes égards durant la réalisation de ce mémoire de thèse. Je suis aussi très reconnaissant pour la qualité de ses conseils et ses orientations ainsi que d'avoir accepté d'être rapporteur et pour avoir accepté de siéger parmi les membres de Jury.

Je remercie vivement **Monsieur Mohammed CHERRAJ**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et d'avoir consacré une partie de son temps à l'analyse de mon travail. Je suis aussi très reconnaissant pour la qualité de ses conseils et ses orientations ainsi que d'avoir accepté d'être rapporteur et pour avoir accepté de siéger parmi les membres de Jury.

Je tiens aussi à remercier vivement **Monsieur Mohamed DRIOUICH**, Professeur Habilité à la faculté polydisciplinaire de Beni Mellal, pour s'être penchée sur mon travail en qualité de rapporteur et pour la pertinence de ses commentaires ainsi que son aide précieuse.

Je remercie vivement **Monsieur El Hassan EL KAFSAOUI**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences à Kénitra, Université Ibn Tofail, pour avoir accepté de faire partie de ce jury en qualité d'examineur et pour la pertinence de ses commentaires.

J'aimerais ensuite remercier **Monsieur Mohammed TAÏBI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences Aïn Chock Casablanca pour avoir accepté de faire partie de ce jury en qualité d'examineur, pour sa collaboration scientifique efficace et sa sympathie de tous les jours.

Je suis également très reconnaissant envers **Monsieur Mohammed SAMMOUDA**, Professeur Assistant à la Faculté polydisciplinaire de Beni Mellal, et membre associé à l'équipe de MSME pour avoir accepté de faire partie de ce jury autant qu'invité, et pour la pertinence de ses commentaires.

Un grand merci également au **Docteur Samir MEN-LA-YAKHAF** pour avoir eu la patience de répondre à mes innombrables questions. Et aussi à mes collègues de travail à savoir : **Dr. Echchikhi Azeddine, Mr. Hamid BENBIH** et **Mr. Moad MAHBOUB**.

Je souhaite aussi remercier ma famille pour m'avoir constamment soutenue tout au long de ces années

Merci encore à tous

RESUME

L'action thermique des lasers constitue aujourd'hui le mécanisme prédominant des applications thérapeutiques des lasers. L'effet thermique regroupe un large groupe de types d'interactions caractérisées par un changement de température significatif au sein du tissu illuminé par le laser. L'effet thermique peut aussi bien être obtenu avec un laser présentant une émission continue qu'avec des lasers impulsionsnels.

L'effet thermique des lasers est un processus complexe comprenant trois phénomènes : une conversion de la lumière laser en chaleur, un transfert de chaleur dans le tissu et une réaction tissulaire dépendante de la température. En fonction de la durée du chauffage réalisé, ainsi qu'en fonction de l'élévation de la température du tissu, on peut obtenir l'un des effets suivants : hyperthermie, coagulation, ou volatilisation d'un volume tissulaire donné. Pour améliorer l'efficacité de cette technique, il faut une bonne connaissance du champ de température dans la zone à traiter.

Le but de ce travail est de réaliser une étude détaillée de ce champ de température induit dans le tissu biologique par exposition directe au rayonnement laser dans la zone à traiter. Les tissus biologiques considérés seront présentés selon trois considérations géométriques : Symétrie sphérique centrale, symétrie sphérique par rapport à φ et asymétrie sphérique. Pour cela, une analyse détaillée de l'équation de la chaleur sous la forme dimensionnelle et adimensionnelle est effectuée sans tenir compte de la perfusion sanguine et du métabolisme. Les conditions aux limites et les conditions initiales sont également choisies pour répondre aux conditions d'applications concrètes.

Mots-clés : Transfert de chaleur, cavité sphérique, forme adimensionnelle, méthode des volumes finis, modélisation mathématique et numérique, laser, environnement tissulaire.

ABSTRACT

The thermal action of lasers is today the predominant mechanism of therapeutic applications of lasers. The thermal effect groups together a broad group of interaction types characterized by a significant temperature change within the tissue illuminated by the laser. The thermal effect can be obtained with a laser having a continuous emission as well as pulsed lasers.

The thermal effect of lasers is a complex process involving three phenomena: a conversion of laser light to heat, a heat transfer in the tissue and a temperature-dependent tissue reaction. Depending on the duration of the heating achieved, as well as on the rise of the tissue temperature, one of the following effects can be obtained: hyperthermia, coagulation, or volatilization of a given tissue volume. To improve the efficiency of this technique, a good knowledge of the temperature field in the treated area is required.

The purpose of this work is to carry out a detailed study of this temperature field induced in the biological tissue by direct exposure to the laser radiation in the area to be treated. The biological tissues considered will be presented according to three geometric considerations: Central spherical symmetry, spherical symmetry with respect to φ and spherical asymmetry. For this, a detailed analysis of the equation of heat in dimension and dimensionless form is performed without taking into account blood perfusion and metabolism. Boundary conditions and initials are also chosen to meet the concrete application conditions.

Keywords: Heat transfer, spherical cavity, dimensionless form, finite volume method, mathematical and numerical modeling, laser, tissue environment.

Liste des publications

1. A. Bounouar, K. Gueraoui, M. Taibi, A. Lahlou, M. Driouich, M. Sammouda, S. Men-La-Yakhaf, M. Belcadi, Numerical and mathematical modeling of an unsteady heat transfer within a spherical cavity: Applications laser in medicine, International Review of Civil Engineering (IRECE), (2017), Vol. 8, no. 4, 187-195.

2. A. Bounouar, K. Gueraoui, M. Taibi, M. Driouich, A. Rtibi, Y. Belkassmi, G. Zeggwagh, Mathematical and Numerical Modeling of an Unsteady Heat Transfer within a Spherical Cavity: Laser Interaction with Human Skin, International Review of Civil Engineering (IRECE), (2018), Vol. 9, no. 5, 209-217.

Liste des Communications

1. A. Bounouar, K. Gueraoui, M. Taibi, A. Lahlou, M. Driouich, M. Sammouda, S. Men-La-Yakhaf, M. Belcadi, Numerical and mathematical modeling of an unsteady heat transfer within a spherical cavity: Applications laser in medicine, 2nd International Conference on Materials Science and Engineering for Green Energy (IMSEGEC'18), 25-27 April, 2018, Rabat, Faculty of Sciences, Mohammed V University.

2. A. Bounouar, K. Gueraoui, M. Taibi, M. Driouich, A. Rtibi, Y. Belkassmi, G. Zeggwagh, Mathematical and Numerical Modeling of an Unsteady Heat Transfer within a Spherical Cavity: Laser Interaction with Human Skin, 9^{ème} édition de la Rencontre Nationale des Jeunes Chercheurs en Physique RNJCP, 27, 28 et 29 Décembre, 2018, Casablanca, Faculty of Sciences Ben M'Sik.

Table des Matières

Liste des symboles utilisés	11
Liste des tableaux	12
Liste des figures	13
Introduction générale	16
Chapitre I : Généralités	22
I. Introduction	23
1. Principe physique du laser	23
<i>a. Absorption</i>	
<i>b. Emission spontanée</i>	
<i>c. Emission stimulée</i>	24
II. Éléments de dispositifs Laser	25
III. Propriétés du faisceau laser	28
1. Monochromaticité	28
2. Cohérence	29
3. Divergence	31
4. Distribution énergétique, mode de champ	32
5. Densité de puissance (intensité) délivrée	33
6. Mode de fonctionnement	33
IV. Caractéristiques générales d'un tissu biologique	35
1. Définition d'un tissu biologique	35
<i>a. Association territoriale</i>	
<i>b. Association fonctionnelle</i>	
<i>c. Association biologique</i>	
2. Principales familles de tissus	36
3. Notion de Chromophore	36
4. Propriétés du tissu biologique	37
<i>a. Propriétés thermiques</i>	37
<i>b. Paramètres optiques</i>	38
V. Interaction laser-Tissu	39
1. Réflexion et Réfraction	39
2. Absorption	41
3. Diffusion	45

VI. Lasers médicaux avec leurs applications	46
1. Laser à solide.....	47
a. <i>Laser à Ruby</i>	47
b. <i>Laser Nd:YAG</i>	48
2. Laser à gaz.....	50
a. <i>Laser à Argon</i>	50
b. <i>Laser à Helium: Neon</i>	51
c. <i>Laser au Dioxyde de Carbone CO₂</i>	52
3. Laser à liquide.....	53
VII. Mécanismes d'interaction.....	55
1. Interaction photochimique.....	57
a. <i>Les phases de la photochimie</i>	57
b. <i>Champs de pratique</i>	58
2. Effet Photoablatif.....	61
3. Effet photomécanique.....	62
4. Effet thermique	62
4.1. Conversion de la lumière en chaleur : Aspect optique.....	63
a. <i>Conversion de lumière en chaleur</i>	63
b. <i>Mécanismes de transfert de la chaleur</i>	64
c. <i>Mécanisme de dénaturation tissulaire</i>	64
VIII. Conclusion.....	68
Chapitre II : Formulation mathématique.....	69
I. Introduction	70
II. Mise en équation du Phénomène (Equation de la chaleur)	70
1. Flux de chaleur à travers une surface	
2. Loi de Fourier	
3. Etablissement de l'équation générale	71
III. Equation de la chaleur en coordonnées sphériques.....	73
1. Etude dimensionnelle de l'équation de chaleur.....	73
2. Etude adimensionnelle de l'équation de chaleur	75
IV. Terme source	76
V. Conclusion.....	78
Chapitre III : Méthode de résolution numérique.....	79
I. Introduction	80
II. La méthode des volumes finis	81
1. Principe de la méthode	81

2. Etude d'un problème de diffusion à une dimension.....	81
<i>a. Maillage</i>	82
<i>b. Discrétisation</i>	82
3. Cas d'un problème instationnaire	84
III. Cas d'une structure sphérique	84
1. Maillage	84
2. Discrétisation	85
2.1. Forme dimensionnelle de l'équation de chaleur	85
2.2. Forme adimensionnelle	89
<i>a. Cas de symétrie sphérique centrale</i>	89
<i>b. Cas de symétrie sphérique par rapport à φ</i>	92
<i>c. Asymétrie sphérique</i>	97
IV. Méthode de résolution	104
1. Méthode du double balayage	104
1.1. Forme dimensionnelle dans le cas de symétrie sphérique centrale	
➤ Conditions initiales et aux limites	105
1.2. Forme adimensionnelle dans le cas de symétrie sphérique centrale	106
➤ Conditions initiales et aux limites	107
2. Résolution par la méthode de Gauss-Seidel.....	108
2.1. Cas de symétrie sphérique par rapport à φ	108
2.2. Asymétrie sphérique	109
V. Conclusion	109
Chapitre IV : Résultats et Discussions	110
I. Introduction	111
II. Structure de la peau	111
1. L'épiderme	112
2. Le derme	112
3. L'hypoderme.....	113
III. Cas du traitement thermique des angiomes	113
1. Définition	
2. Classification	
3. Angiomes	
3.1. Résultats du traitement des angiomes par laser	114
3.2. Problématiques liées à l'usage de laser	115
<i>a. Optimisation de l'étape optique</i>	116
<i>b. Optimisation de l'étape thermique</i>	116

IV. Propriétés thermiques et optiques de la peau humaine	117
V. Etude dimensionnelle	118
1. Etude de la variation de l'intensité d'irradiation en fonction de la profondeur de la peau	118
2. Evolution de la température en fonction du milieu.....	119
<i>a. Variation de la température en fonction du rayon</i>	119
<i>b. Variation de la température en fonction du temps</i>	120
3. L'influence des paramètres du faisceau laser dans cas d'un_laserNd :Yag continu ($\lambda=1064\text{nm}$)	121
<i>a. Variation de la température en fonction de la puissance</i>	121
<i>b. Variation de la température en fonction du diamètre du spot</i>	122
VI. Etude adimensionnelle	124
1. Etude de la variation de l'intensité adimensionnelle d'irradiation en fonction de la profondeur de la peau	124
2. Profil de température adimensionnelle en fonction du rayon	124
<i>a. Première considération : Symétrie sphérique centrale</i>	
<i>b. Deuxième considération: symétrie sphérique suivant ϕ</i>	125
<i>c. Troisième considération: asymétrie sphérique (3D)</i>	126
3. Comparaison des trois profils de température adimensionnelle.....	126
VIII. Conclusion	127
Conclusion Générale	128
Références	131

Liste des symboles utilisés

Grandeurs dimensionnelles

λ	Longueur de l'onde électromagnétique	(m)
c	Célérité de la lumière	(m/s)
K	Conductivité thermique	(W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
K_0	Conductivité thermique initiale	(W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
C_v	Capacité thermique massique	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
C	Capacité thermique massique moyenne	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
T	Température	(K)
T_0	Température initiale	(K)
ρ	Masse volumique	(kg.m ⁻³)
ρ_0	Masse volumique initiale	(kg.m ⁻³)
r	Rayon du rayon laser	(m)
R_0	Rayon initial du faisceau laser	(m)
ω	Pulsation de l'onde électromagnétique	(rad.s ⁻¹)
h	Constante de Planck	(J.s)
ν	Fréquence de l'onde électromagnétique	(Hz)
t	Temps	(s)
t_0	Temps initiale	(s)
α	Coefficient d'absorption	(cm ⁻¹)
D	Diffusivité thermique	(m ² .s ⁻¹)
I	Intensité du faisceau laser	(W/cm ²)
P	Puissance	(W)
μ_a	Coefficient d'absorption	(cm ⁻¹)
μ_s	Coefficient de diffusion	(cm ⁻¹)
γ	Coefficient d'atténuation	(cm ⁻¹)

Grandeurs adimensionnelles

\hat{K}	Conductivité thermique adimensionnelle
\hat{T}	Température adimensionnelle
$\hat{\rho}$	Masse volumique adimensionnelle
\hat{r}	Rayon adimensionnel du faisceau laser
\hat{t}	Temps adimensionnel
$\hat{\alpha}$	Coefficient d'absorption adimensionnel
τ	Nombre de Fourier (Fo)

Autre

Nd:YAG	Grenat d'yttrium et d'aluminium dopé au néodyme
fs	Femto-seconde (1fs=10 ⁻¹⁵ s)
ps	Pico-seconde (1ps=10 ⁻¹² s)

Liste des Tableaux

Tableau 1 : Tableau récapitulatif des paramètres caractéristiques d'un faisceau laser.....	34
Tableau 2 : Tableau récapitulatif des quatre grandes familles de tissus biologique.....	36
Tableau 3 : Chromophores biologiques cutanés et types d'UV absorbé [36].....	36
Tableau 4 : Particularité optique du matériau selon l'épaisseur optique [73].....	43
Tableau 5 : Avantages et Inconvénients de chaque laser [54] [55] [56, 57].....	114
Tableau 6 : Effets des principaux lasers utilisés dans le traitement des angiomes, en termes d'efficacité et de complications cutanées [53].....	115
Tableau 7 : Propriétés thermiques et optiques de chaque couche, Laser Nd-Yag $\lambda=1064\text{nm}$ [45] [46].....	118

Liste des Figures

Figure 1 : Modélisation du phénomène d'absorption.....	23
Figure 2 : Modélisation de l'émission spontanée.....	24
Figure 3 : Diagramme d'énergie à quatre niveaux (l'inversion de la population se fait entre les niveaux 1 et 2).....	25
Figure 4 : Schéma simplifié du principe de fonctionnement d'un oscillateur laser.....	25
Figure 5 : Composants du premier laser à rubis.....	26
Figure 6 : Cavité optique résonnante.....	27
Figure 7 : Dispersion spectrale selon la source de lumière [70].....	29
Figure 8 : Illustre la différence entre les signaux de point de vue cohérence.....	31
Figure 9 : Distribution énergétique du faisceau laser [71].....	32
Figure 10 : Géométrie de la réflexion, de la réfraction, de l'absorption et de la diffusion.....	39
Figure 11 : Géométrie de la réflexion et de la réfraction spéculaire.....	40
Figure 12 : Spectre d'absorption de la mélanine dans la peau et l'hémoglobine (HbO ₂) dans le sang. Les pics d'absorption relatifs de l'hémoglobine sont à 280 nm, 420 nm, 540 nm et 580 nm. Boulnois (1986) [25].....	44
Figure 13 : Spectre d'absorption de la peau, de la paroi aortique et de la cornée. Dans le domaine du visible, L'absorption de la peau est 20-30 fois plus élevée que l'absorption du tissu cornéen. Le spectre d'absorption de la paroi aortique présente des pics similaires à ceux de l'hémoglobine. Parrish et Anderson (1983), Keijzer et al. (1989), et Eichler et Seiler (1991) [23].....	44
Figure 14 : Schématisation du laser à Ruby [28].....	48
Figure 15 : Diagramme à quatre niveau d'énergie : Il y a quatre niveaux d'énergie $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$, correspondant à quatre niveaux de populations N_1, N_2, N_3, N_4	49
Figure 16 : Système Lasers Nd:YAG [32].....	50
Figure 17 : Schéma des processus énergétiques du laser He-Ne.....	51
Figure 18 : Schéma des processus énergétiques du laser à colorant.....	53
Figure 19 : Effets des lasers sur les tissus biologiques [36].....	56
Figure 20 : Cartographie des différents effets obtenus avec les lasers sur les tissus biologiques, en fonction de la durée d'émission du laser et de l'irradiance Boulnois (1986) [25]. Plusieurs effets peuvent être soulignés : effet photochimique, effet photothermique, effet photoablatif et effet photothermique.....	56

Figure 21 : Principe de la thérapie photochimique.....	58
Figure 22 : (a) Effet du bleu de méthylène avec ou sans irradiation laser Hélium-Néon (puissance : 7,3 mW) sur les bactéries streptocoques (b) Effet de l'ester Hématoporphyrine avec ou sans irradiation laser Hélium-Néon (puissance : 7,3 mW) sur les bactéries streptocoques [23].....	60
Figure 23 : (a) Fusion d'une partie de dent humaine par l'irradiation laser Ho:YAG (100 pulses, durée d'un pulse : 3,8 μ s, énergie par pulse : 18mJ, rampe de répétition : 1Hz). (b) zoom sur les bords de la zone fondue [23].....	61
Figure 24 : Principes de la photoablation.....	62
Figure 25 : Schéma des trois étapes de l'action thermique.....	63
Figure 26 : Tumeurs métastatique situées sur la peau humaine carbonisées avec le Laser à CO ₂ CW (Puissance : 40W). Photographier par Dr. Kurek (Heidelberg) [23].....	65
Figure 27 : Dent humaine carbonisée avec le Laser à CO ₂ en mode continu (Puissance : 40W). Photographier par Dr. Kurek (Heidelberg) [23].....	65
Figure 28 : Tissu utérin d'un rat de laboratoire, coagulé suite à l'effet thermique du Laser CO ₂ CW de puissance 10W. Photographie prise par Dr. Kurek (Heidelberg) [23].....	66
Figure 29 : Partie coagulée de la cornée humaine suite à l'application de 120 pulses avec un laser Er:YAG (durée de pulse 90 μ s, énergie par pulse: 5 mJ, rampe de répétition : 1Hz) [23].....	66
Figure 30 : a) Partie d'une dent humaine fondue après 20 impulsions d'un laser Er: YAG (impulsion Durée : 90 μ s, énergie d'impulsion: 100 mJ, taux de répétition: 1Hz). b) Elargissement montrant le bord de l'ablation.....	67
Figure 31 : Volume de contrôle.....	82
Figure 32 : Projection du segment.....	85
Figure 33 : Structure de la peau.....	112
Figure 34 : Angiome du tronc.....	114
Figure 35 : Principales pistes d'amélioration dans le traitement laser des angiomes.....	117
Figure 36 : Décroissance de l'intensité d'irradiation en fonction de la profondeur r.....	119
Figure 37 : Profil de température de l'épiderme.....	120
Figure 38 : Profil de température du derme.....	120
Figure 39 : Profil de température de l'hypoderme.....	120
Figure 40 : Profil de température de l'épiderme.....	120

Figure 41 : Profil de température du derme.....	120
Figure 42 : Profil de température de l'hypoderme.....	121
Figure 43 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance de l'épiderme.....	122
Figure 44 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance du derme.....	122
Figure 45 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance de l'hypoderme.....	122
Figure 46 : Variation de la température de l'épiderme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations.....	123
Figure 47 : Variation de la température du derme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations.....	123
Figure 48 : Variation de la température de l'hypoderme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations.....	123
Figure 49 : Diminution de l'intensité adimensionnelle de l'irradiation en fonction de la profondeur \hat{r}	124
Figure 50 : Diminution de la température adimensionnelle en fonction du rayon dans le cas d'une symétrie sphérique centrale.....	125
Figure 51 : Diminution de la température sans dimension en fonction du rayon dans le cas d'une symétrie sphérique par rapport à φ	125
Figure 52 : Diminution de la température sans dimension en fonction du rayon dans le cas de l'asymétrie sphérique (3D).....	126
Figure 53 : Le profil de température épidermique.....	126

Introduction

Générale

Les lasers sont des dispositifs qui génèrent ou amplifient un rayonnement cohérent à des fréquences dans le domaine des infrarouges, des visibles ou des ultraviolets du spectre électromagnétique de la lumière. Les Lasers opèrent en utilisant le principe fondamental inventé à l'origine aux fréquences des micro-ondes, par J. P. Gordon, H. J. Zeiger et Ch. H. Townes, nommée « MASER » (Amplification Micro-ondes par Emission Stimulée de Rayonnement). Lorsqu'il est étendu à des fréquences optiques, cela devient naturellement une amplification lumineuse par émission stimulée de rayonnement, ou « LASER ».

Au cours des vingt années après l'apparition de la lumière cohérente, les lasers sont devenus des outils très répandus et presque courants dans plusieurs domaines d'ingénierie. Son importance et ses applications, cependant, ne peuvent guère être surestimée.

Les médecins ont également pris leur part dans cette innovation, en comparant déjà le rayonnement laser avec les autres sources de lumière qui avaient été utilisés historiquement par les anciens Egyptiens et les Grecs comme un outil de traitement de divers phénomènes pathologiques à travers les siècles ou pour améliorer la santé et prévenir contre les maladies, comme la photothérapie ou l'héliothérapie (Bertolotti, 2005) [1]. Les premières expériences réussies utilisant la lumière laser pour de tels traitements ont été réalisées très rapidement après la première génération de la lumière laser, et le premier véritable succès en termes de technologie laser était dans le soin d'une rétine détachée. Le rayonnement de la lampe à arc a été remplacé par des impulsions de rubis rouge de milliseconde.

En 1949, G. Meyer-Schwickerath procédait, pour la première fois au traitement des mélanomes en concentrant la lumière du soleil sur les patients. Il était également impliqué dans la construction du premier photocoagulateur de l'œil, en utilisant l'énergie du rayonnement solaire pour souder une partie détachée de la rétine (1949); Dans les années suivantes, il développa des traitements par photocoagulation contre la sécheresse oculaire, les trous maculaires et la rétinopathie diabétique, et a également résolu d'autres problèmes de la rétine et la macula en utilisant le photocoagulateur "Zeiss" à lampe d'arc au Xénon (Meyer-Schwickerath, 1989) [2]. Il a utilisé une lampe à arc de 1000 W pour diriger la lumière dans l'œil pendant 1s pour former des cicatrices attachant la rétine au globe oculaire.

Le rayonnement rouge du laser à Rubis a été généré pour la première fois en mai 1960 par le Physicien Theodore Maiman [3]. Après cette première percée, les scientifiques ont commencé à tester les applications possibles du rayonnement laser.

Les médecins ont également comparé la lumière laser avec les autres sources lumineuses utilisées archaïquement dans le traitement médical. Car, le rayonnement lumineux était déjà largement répandu dans le traitement des maladies, principalement en dermatologie et aussi en ophtalmologie.

Le premier succès réel en termes de technologie laser a été le traitement du décollement de la rétine par des impulsions laser à Rubis (impulsions en milliseconde) [4]. L'ophtalmologiste Ch. J. Campbell puis Ch. Zweng, ont effectué avec succès, les premières opérations de décollement de la rétine sur un patient humain après avoir fait de séries de tests réussis sur des lapins (Koester et Campbell, 2003) [5].

En 1961, Leon Goldman est devenu le premier chercheur à utiliser le rayonnement laser pour traiter un mélanome cutané (maladie de la peau). En 1963, Goldman et ses collaborateurs ont publié la première étude sur les effets du rayonnement laser sur la peau, en décrivant le processus de destruction sélective des structures pigmentées de la peau (y compris les follicules pileux) en utilisant un faisceau laser à Rubis. Cette méthode est devenue courante pour enlever les taches de naissance, les nævus mélanocytaire et les tatouages avec le minimum de cicatrices. En 1966, Goldman a supervisé la première opération dans laquelle le rayonnement laser a été utilisé pour enlever une tumeur sans provoquer de lésions [6].

Le grand intérêt des impulsions laser sont leur pouvoir à couper la peau et à cautériser les vaisseaux sanguins simultanément, ouvrant ainsi la voie à plusieurs autres applications. Cependant, la difficulté réside, d'une part, dans le contrôle de la puissance de sortie et du taux d'énergie délivré par le rayonnement laser, et d'autre part, dans la capacité d'absorption relativement faible de certains types de tissus pour la lumière laser à Rubis [7].

Avec le développement du laser et les découvertes successives d'autres aspects de la technologie laser, comme la génération de nouvelles longueurs d'onde, le rayonnement avec différents niveaux d'énergie, de haute puissance, une nouvelle branche de médecine à base de traitement laser a commencé à se développer.

En 1968, F. L'Espérance, E. Gordon et E. Labuda ont traités avec succès des Rétinopathies diabétiques avec un laser à l'ion Argon (L'Espérance, 1969, L'Espérance et James, 1981) [8,7].

En 1964, la découverte des lasers CO₂ et Nd:YAG, fonctionnant respectivement dans l'Infrarouge lointain et l'Infrarouge proche a été également très importante pour la médecine moderne, ils sont devenus les dispositifs lasers les plus courants jusqu'à présent dans la pratique médicale tel que la chirurgie des organes vasculaires (Le foie, la muqueuse buccale et les tissus gynécologiques). Les utilisations chirurgicales du laser CO₂ ont été longuement étudiées entre 1967 et 1970 par des pionniers comme T. Polanyi et G. Jako, et par conséquent, le laser CO₂ est devenue bien maîtrisé au début des années 1970, surtout en oto-rhino-laryngologie et la chirurgie gynécologique [7].

En 1962 Hellwarth et Mc Clung [10] ont découvert le moyen de générer des impulsions de grandes fréquences (dizaines de Nanosecondes 10^{-9} s), pour atteindre des puissances beaucoup plus importantes [7]. L'usage de ces impulsions laser a permis l'élimination des tatouages et des nævus. Et, lorsque des impulsions de période "T" encore plus courtes dans la gamme des picosecondes apparaissaient, ils ont été utilisés très rapidement à des fins thérapeutique (Aron-Rosa et al., 1980) [9]. Les récents développements dans ce même domaine ont donné lieu à la génération d'impulsions encore plus petites, de l'ordre de femtoseconde, qui ont été utilisés très rapidement en ophtalmologie pour le remodelage de la cornée [9].

Les applications médicales du laser sont définies par le type d'interaction entre la lumière laser et les tissus. La compréhension et la maîtrise de cette interaction peut aider les médecins ou les chirurgiens à optimiser les systèmes laser et modifier le type de la thérapie.

Dans cette thèse, nous allons étudier les mécanismes de l'interaction laser-tissu et simuler la répartition de la température dans le tissu biologique, et cela requiert la connaissance de leurs propriétés thermiques telles que l'absorption, la diffusion, la pénétration et la fluorescence. Or, il est à noter qu'en raison de la structure hétérogène des milieux biologiques, les interactions entre la lumière laser et les tissus génèrent des phénomènes complexes, car, un milieu biologique est constitué de plusieurs couches comportant chacune différents types de cellules ayant ses propres propriétés optiques. Les modèles de simulation doivent donc permettre de synthétiser fidèlement ces hétérogénéités.

En d'autre terme, La diffusion de l'énergie thermique dans les tissus biologiques est une procédure compliquée comprenant différents mécanismes phénoménologiques tels que la conduction thermique, la convection, le rayonnement, les activités métaboliques et le changement de phase. Si un tissu biologique est éclairé par une lumière laser, des effets multiples comme la coagulation, la vaporisation ou fusion et la carbonisation apparaîtront.

L'intérêt de ce travail réside dans le fait que la thérapie par un traitement thermique au laser nécessite la mise au point d'une bonne stratégie d'application de la chaleur pour la destruction des tissus pathologiques. Il y a une marge de température qui doit être respectée dans les différents cas à traiter pour atteindre le but de l'hyperthermie qui est la destruction des tissus malsains sans affecter le tissu environnant. Il est donc important de connaître le profil de température dans les tissus biologiques dans des conditions de chauffage spécifique grâce à une modélisation mathématique et numérique.

Une étape préliminaire présentée dans un premier chapitre nous permet de donner un aperçu historique sur l'usage du Laser en médecine depuis son apparition, son principe de génération et de fonctionnement, sa structure physique et ses propriétés optiques. La suite logique veut que nous abordions l'interaction du laser avec la matière vivante et son application en médecine grâce à l'effet thermique du laser et à l'élévation de température locale dans les tissus biologiques.

Le second chapitre est consacré à la formulation mathématique des différents phénomènes physiques qui interviennent dans cette interaction.

Dans le troisième chapitre, les équations précédemment établies seront résolues numériquement sous FORTRAN. La méthode numérique utilisée est la méthode des volumes finis. Cette simulation nous permettra d'estimer la répartition temporelle et spatiale de la température dans le tissu biologique.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous présentons la discussion et l'interprétation des différents résultats obtenus dans cette thèse.

La conclusion générale qui clôt cette thèse fera ressortir les principaux résultats de l'étude et suggérera quelques perspectives générales, ouvertes dans le domaine des traitements médicaux par le laser.

Chapitre I : *Généralités*

I. Introduction

L'application du laser dans le traitement médical est basée sur les phénomènes d'interaction du rayonnement laser avec les tissus biologiques. Ce rayonnement laser peut être inclus dans la catégorie des rayonnements électromagnétiques générés par de nombreux types de sources de rayonnement, comme le soleil, le feu, les ampoules, les décharges électriques, le plasma, etc.

Avec le développement de tant de types de laser, il est important de choisir le laser avec les paramètres de rayonnement optimaux pour un traitement particulier des tissus. Un mauvais choix de laser peut conduire à des résultats nuls ou même à des dommages aux tissus. Donc, le choix de la technologie laser dépend de la nature du traitement médical souhaité.

1. Principe physique du laser : [1,70]

a. Absorption

L'absorption existe lorsqu'on soumet les atomes à un photon d'énergie correspondant à la différence entre deux niveaux d'énergie ΔE . Dans ce cas, il existe une possibilité que l'énergie soit absorbée par l'atome et que les électrons puissent passer d'un niveau N_1 d'énergie E_1 à un niveau N_2 d'énergie E_2 , telle que $E_2 > E_1$ [1].

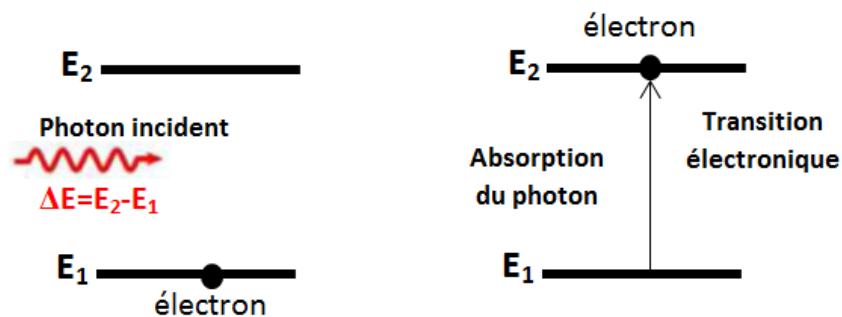


Figure 1 : Modélisation du phénomène d'absorption

b. Emission spontanée

L'émission spontanée correspond à un changement d'état d'un atome qui passe d'un niveau N_2 d'énergie E_2 à un niveau inférieur N_1 d'énergie E_1 ; et d'après le principe de

conservation de l'énergie, la différence ΔE entre les deux niveaux permet l'émission d'un photon d'énergie propre égale à ΔE . Le photon émis se définit donc par une longueur d'onde, une fréquence et une couleur. On note que les photons ont d'autant plus d'énergie que leur longueur d'onde λ est courte [1].

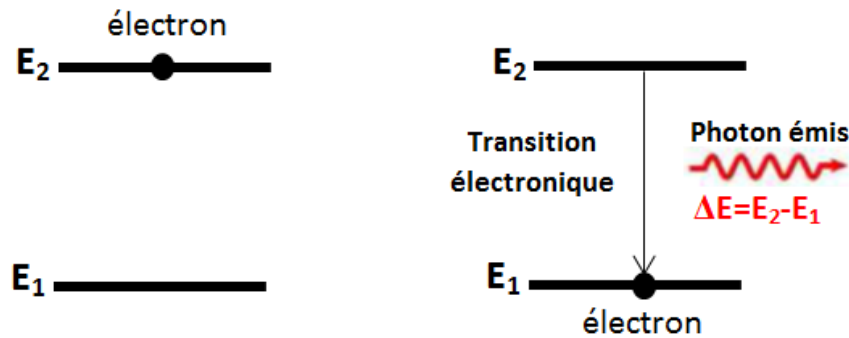


Figure 2 : Modélisation de l'émission spontanée

c. Emission stimulée

L'émission d'un faisceau Laser est basée sur le principe de l'émission stimulée, c'est-à-dire, lorsqu'un atome à l'état excité E_2 reçoit un photon incident d'énergie $h\nu$, correspondant à la différence de niveau intrinsèque $E_2 - E_1$ (E_1 niveau d'énergie de l'atome à l'état fondamental), l'atome retourne au niveau E_1 en émettant un photon de même fréquence, cette émission provoquée par le photon incident constitue un exemple de transition provoquée à partir d'un état métastable vers un état stable. Pour compléter le modèle, Einstein a émis l'hypothèse que ce phénomène était instantané, donc que le photon induit était en phase avec le photon incident, et enfin, que sa direction était également celle du photon incident [1,11].

Pour qu'un faisceau laser de qualité soit généré, il faut que l'émission stimulée l'emporte largement sur l'absorption et l'émission spontanée. Pour pouvoir émettre une multitude de photons identiques en direction et en longueur d'onde, il faut donc placer à chaque instant un nombre élevé de molécules dans un même état excité. Ceci peut être fait de manière continue ou pulsée. Cette condition aboutit à une inversion de population puisqu'à l'équilibre thermodynamique « naturel », le pourcentage N_1 d'atomes stables est très supérieur à celui N_2 d'atomes excités et que, dans le cas des lasers, on cherche à produire une inversion dans les proportions excités/stables de la population des atomes du milieu ($N_2 > N_1$) [1,11,12].

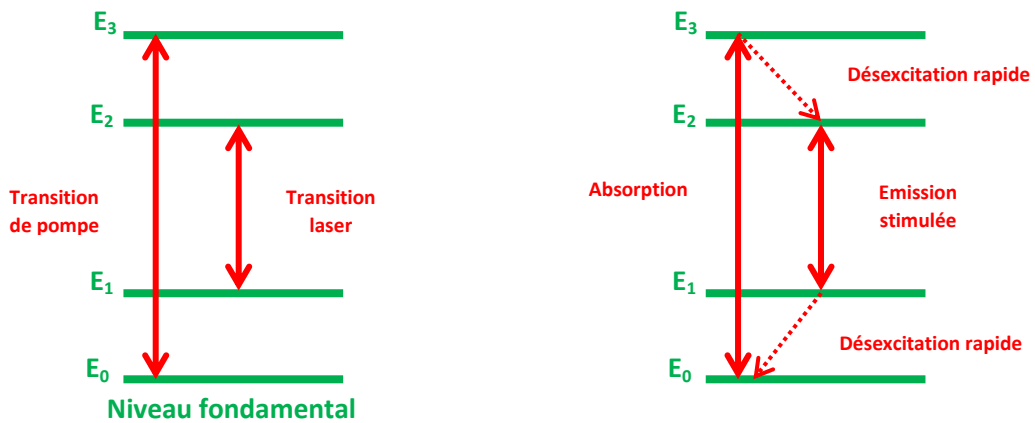


Figure 3 : Diagramme d'énergie à quatre niveaux
(l'inversion de la population se fait entre les niveaux 1 et 2)

II. Éléments de dispositifs Laser

Un Laser est composé principalement de trois éléments essentiels à son fonctionnement, à savoir un milieu actif, un résonateur optique et enfin une source de pompage [1] :

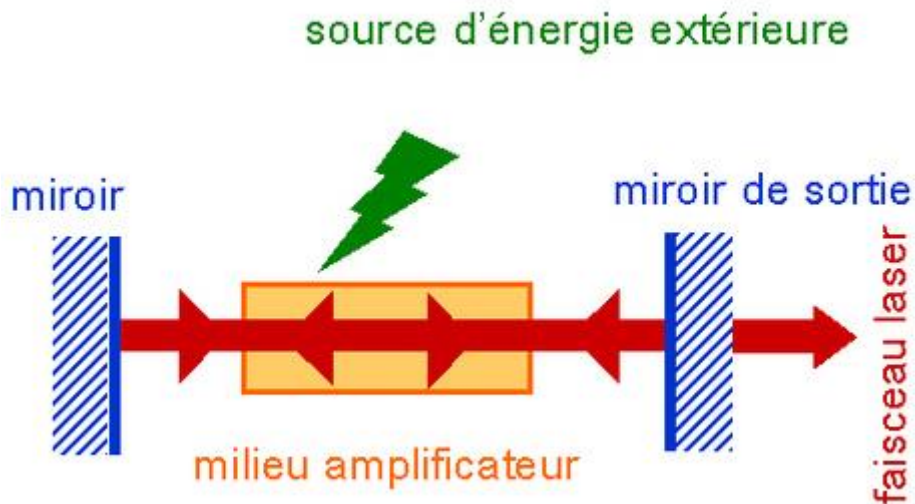


Figure 4 : Schéma simplifié du principe de fonctionnement d'un oscillateur laser

- **Milieu actif** : Il s'agit d'une collection d'atomes, de molécules ou d'ions qui peuvent être à l'état solide, liquide ou gazeux.

- Gaz : Ar^+ , Kr^+ , HeNe, CO_2 , Excimère,

- Liquide : Colorants,
- Solide : Nd : YAG, Er : YAG, Rubis (figure 5), Saphir, Alexandrite, Semi-conducteur.

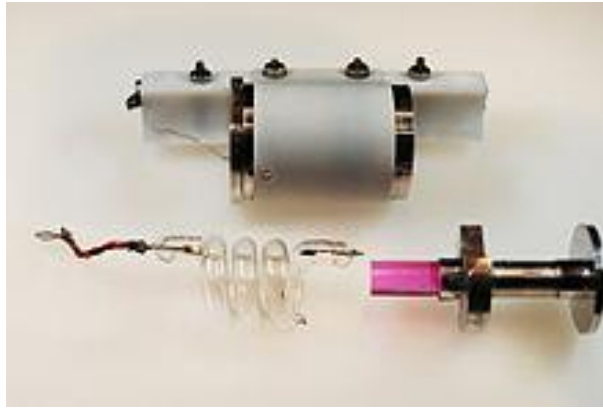


Figure 5 : Composants du premier laser à rubis

La composition du milieu laser détermine la longueur d'onde de sortie et le nom d'un laser particulier (Keye, 1990) [13].

- Pompage (processus d'inversion de population) : Source d'énergie pour pomper le milieu laser. Lorsque le milieu amplificateur qui se trouve dans la cavité optique est excité par une source externe, une inversion de population se produit et un faisceau laser est généré. Le faisceau ainsi produit quitte la cavité à travers le miroir partiellement transmissible (Cember, 1987) [13] [70].

Plusieurs moyens sont à notre disposition pour inverser ces populations : l'amplification par pompage optique (par stroboscope, laser, ...), thermique, chimique ou par décharge électrique.

- Résonateur optique : La partie précédente montre comment favoriser une inversion de population en choisissant bien le système et les niveaux d'énergie. Cependant, avoir une inversion de population positive n'est pas suffisant pour générer un effet laser. En effet, il ne faut pas oublier que les mécanismes d'émission stimulée et d'émission spontanée sont en compétition. Ainsi, avant d'être un milieu amplificateur de lumière, un milieu laser pompé par une source d'énergie extérieure est d'abord une "lampe" (émission spontanée).

C'est la cavité qui va créer les conditions favorables pour que l'émission stimulée devienne prédominante par rapport l'émission spontanée. La cavité ou résonateur optique est

composée de miroirs qui permettent à la lumière de passer de nombreuses fois dans le milieu amplificateur. On peut trouver deux types de cavités (figure 6) : des cavités dites “linéaires” (la lumière fait des allers et retour) ou des cavités en anneau (la lumière fait des tours) (Oshea et al., 1978) [13]. Au démarrage du laser, la “lampe-milieu amplificateur” émet spontanément dans toutes les directions.

Cependant, il existe une petite partie de l'émission qui se trouve dans l'axe de la cavité laser. Ces photons spontanés peuvent donc y faire des allers et retours. Au fur et à mesure, le milieu amplificateur va jouer son rôle et la quantité de lumière présente dans la cavité va augmenter de façon considérable. Le confinement de la lumière va ainsi accroître la probabilité d'émission stimulée, au détriment de l'émission spontanée.

En parallèle, la cavité va jouer le rôle de filtre à cause des multiples allers et retours : seule l'onde parfaitement perpendiculaire à l'axe de la cavité pourra se propager et certaines fréquences seront privilégiées (fréquences de résonance de la cavité). Ainsi, la cavité donne au rayonnement laser ses propriétés si particulières (directivité, finesse spectrale).

Au bout de plusieurs dizaines de milliers d'allers et retours (en général), la quantité de photons générée dans l'axe de la cavité par émission stimulée va être égale à celle qui est perdue (en particulier via le miroir de sortie). Il va donc y avoir un état stationnaire pour lequel un rayonnement (dit rayonnement laser) sort de façon continue par le miroir de sortie. On dit alors que le laser oscille : c'est à dire que le laser émet en continu un rayonnement majoritairement issu de l'émission stimulée filtré par la cavité.

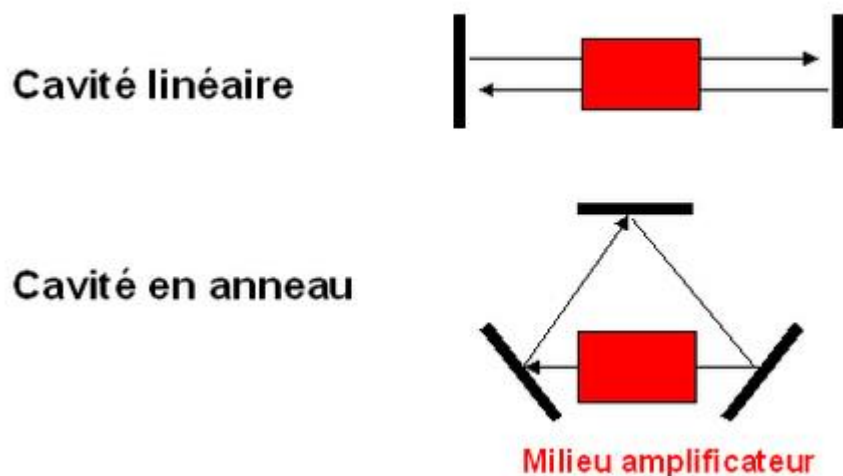


Figure 6 : Cavité optique résonnante

III. Propriétés du faisceau laser

Le rayonnement laser se caractérise par les propriétés propres suivantes [1] [14] :

- Monochromaticité,
- Cohérence du faisceau,
- Divergence du faisceau,
- Distribution énergétique et mode de champ,
- Intensité du faisceau ou Densité de puissance (intensité) délivrée,
- Modes de fonctionnement.

1. Monochromaticité

L'énergie d'un photon détermine sa longueur d'onde par la relation :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{I.1})$$

Où :

c : Vitesse de la lumière,

h : Constante de Planck,

λ : Longueur d'onde.

Dans un cas idéal, le laser émet tous les photons avec la même énergie et donc la même longueur d'onde, il est dit **monochromatique**. La lumière d'un laser provient typiquement d'une transition atomique avec une seule longueur d'onde. En conséquence, la lumière laser a une seule couleur spectrale, presque la lumière monochromatique la plus pure disponible jusqu'aujourd'hui [1] [70].

Cependant, la lumière laser n'est pas vraiment monochromatique, car une onde vraiment monochromatique nécessite un train d'onde de durée infinie.

Les facteurs responsables de ce phénomène sont :

- La lumière laser se compose essentiellement d'une longueur d'onde générée par l'émission stimulée d'un ensemble de niveaux d'énergie atomique. Ceci est possible parce que la transition laser, en principe, implique des niveaux d'énergie bien définis.

- Une onde électromagnétique de fréquence $\nu = (E_2 - E_1)$ peut seulement être amplifiée, " ν " a une certaine plage qui est appelée largeur de ligne. Cette largeur de ligne est déterminée par divers facteurs d'élargissement tels que l'effet Doppler des atomes mobiles et des molécules.

- La génération du laser est telle que la cavité laser forme un système résonant et l'oscillation laser est soutenue seulement aux fréquences de résonance de la cavité. Ceci conduit à un rétrécissement supplémentaire de la largeur de la ligne laser. Ainsi, la lumière laser est généralement très pure en longueur d'onde [1,14].

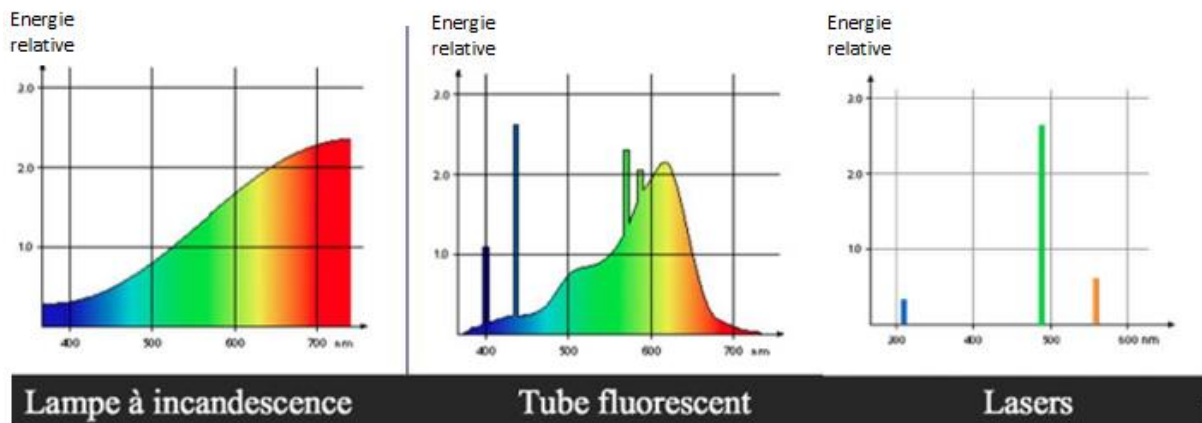


Figure 7 : Dispersion spectrale selon la source de lumière [70]

2. Cohérence

Il s'agit de la caractéristique la plus importante du faisceau laser.

Le rayonnement est dit cohérent dans le temps et dans l'espace, si on peut calculer la phase de l'onde et l'amplitude de celle-ci, à chaque moment et à chaque endroit, à partir des valeurs connues auparavant. Cela n'est pas le cas des sources de lumière naturelle pour lesquelles l'émission de la lumière a lieu spontanément, indépendamment pour chaque atome et à tout moment. Il n'y a donc pas de relation de phase dans les différents processus d'émission [1,15].

Il y a deux aspects très différents de la cohérence :

- **Cohérence spatiale** : Signifie une forte corrélation (relation de phase fixe) entre les champs électriques à différents endroits à travers le profil du faisceau. Elle représente la condition essentielle de la directionnalité forte des faisceaux laser.

- **Cohérence temporelle** : est reliée à la monochromaticité d'une source lumineuse. Les atomes excités d'une source émettent des vibrations électromagnétiques sous la forme de *trains d'ondes* plus ou moins longs. Si l'on considère un train d'ondes d'une durée T_c , la longueur occupée dans l'espace par ce train d'ondes est :

$$L_c = cT_c \quad (I.2)$$

Où L_c et T_c sont appelés longueur et temps de cohérence respectivement.

Dans le cas du laser, les trains d'ondes sont beaucoup plus longs que ceux des sources classiques. Les temps de cohérence sont de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} s et les longueurs de cohérence peuvent atteindre le kilomètre [1,71].

La figure 8 illustre la différence entre les signaux de point de vue cohérence :

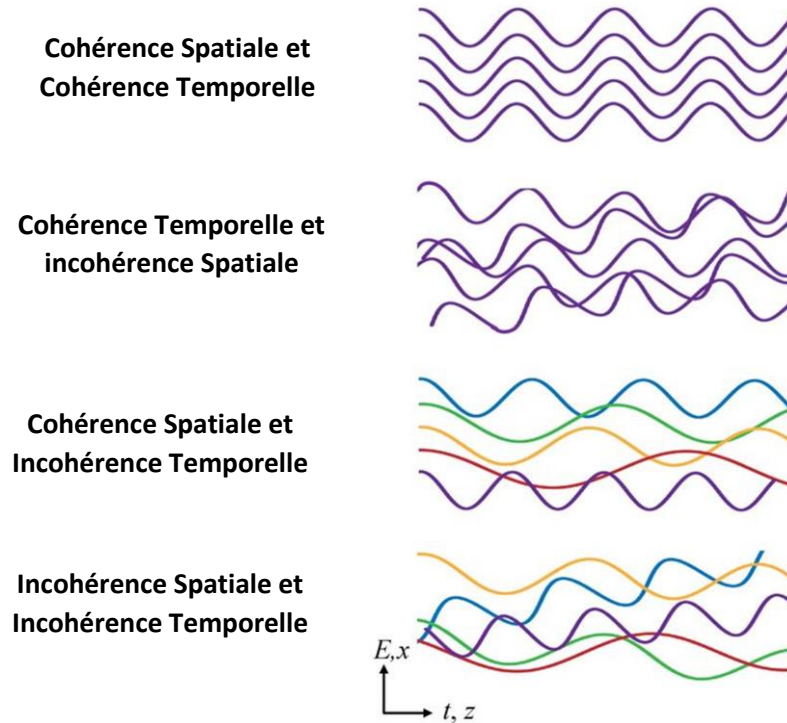


Figure 8 : Illustre la différence entre les signaux de point de vue cohérence

3. Divergence

Les sources lumineuses conventionnelles émettent dans toutes les directions. Par conséquent, leur intensité décroît avec la racine carrée de la distance. Dans le cas des lasers, à cause des propriétés du résonateur, il y a émission de la lumière uniquement très près et parallèlement à l'axe optique de la cavité [1,71].

Dans le cas d'une cohérence spatiale parfaite, le faisceau, de dimension finie, présente inévitablement une divergence du fait de la diffraction. Sa valeur θ est donnée par les lois de la diffraction :

$$\theta = \beta\lambda/D \quad (I.3)$$

Avec :

β : Facteur de proportionnalité dépendant de la distribution énergétique dans le faisceau ($\beta \approx 1$),

λ : Longueur d'onde du faisceau,

D : Diamètre de l'ouverture diffractant le faisceau.

La divergence est d'autant plus importante que la cohérence du faisceau est partielle. L'angle de divergence est une fonction plutôt des propriétés du faisceau laser que de la géométrie de la cavité dont elle dépend quand même. Sa valeur est généralement limitée à quelques milliradians [71].

4. Distribution énergétique, mode de champ

La répartition de l'intensité dans la section d'un faisceau laser contrôle sa distribution d'énergie. La forme de la distribution de l'énergie est déterminée par la configuration du résonateur (forme des miroirs, diamètre du tube, ouverture, etc.). Différentes formes sont possibles sous le nom Mode Transversal Électromagnétique (*Transverse Electromagnetic Mode*) ou TEM_{xy}. Les indices x et y , entiers positifs, dénombrent les zones d'intensité le long des deux axes x et y perpendiculaires à la direction de projection z . Ces indices transversaux représentent les modes transversaux du laser [1,71].

La figure 9 représente la distribution d'énergie dans la section du faisceau pour les premiers modes. Le faisceau laser de mode fondamental (TEM₀₀) possède une distribution énergétique gaussienne.

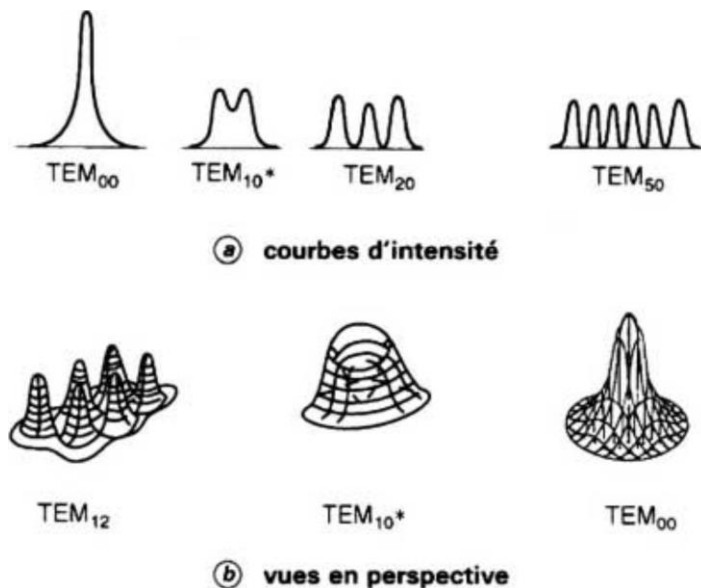


Figure 9 : Distribution énergétique du faisceau laser [71]

Il peut être focalisé en une tache très fine sur la surface à traiter et fournir ainsi la densité de puissance la plus élevée. Les modes supérieurs ne permettent pas une focalisation aussi précise, parce qu'ils correspondent à des faisceaux de plus grande divergence.

En d'autres termes, la qualité du faisceau sortant de la cavité peut être définie par son mode, traduisant la configuration du champ électromagnétique lié à l'onde. La sélection d'un mode est possible en variant la courbure des miroirs, en ajoutant des diaphragmes, des réflecteurs ou des absorbeurs (filtres) sélectifs dans le résonateur.

En ce qui concerne le laser à CO₂, pour les faibles puissances, le mode obtenu est en général le TEM₀₀. Lorsque la puissance augmente, les répartitions énergétiques sont plus complexes et peuvent présenter des modifications dans le temps [1,71].

5. Densité de puissance (intensité) délivrée

L'intensité du faisceau laser peut être très grande car la puissance délivrée est focalisée sur une très petite surface. La détermination des caractéristiques géométriques du faisceau ne peut se faire sans tenir compte de la répartition radiale de l'intensité laser I (densité de flux d'énergie exprimée en W/cm²). L'intensité I(r) suit le mode fondamental de la cavité optique [1].

Pour un mode fondamental TEM₀₀ (gaussien) :

$$I(r) = I_0 \cdot \exp\left[-\left(\frac{2r^2}{R_e^2}\right)\right] \quad (I.4)$$

Avec :

$I_0 = \frac{f_m P}{\pi R_e^2}$: Densité de puissance au centre du faisceau,

P : Puissance du faisceau laser,

R_e : Rayon d'éclairement,

f_m : Coefficient de rendement du chemin optique, tenant compte des pertes de puissance (qui ont lieu entre la source et la pièce à traiter) dues aux systèmes optiques (miroirs et lentille),

r : Rayon suivant l'axe orthogonal à l'intensité.

6. Mode de fonctionnement

Le laser peut fonctionner en mode continu ou en mode impulsionnel.

Le mode impulsionnel (appelé aussi blocage de mode) est une méthode qui permet d'obtenir des impulsions lasers ultracourtes approximativement égale à l'inverse de la largeur de ligne de transition 2 à 1 (transition générant le faisceau laser).

Ainsi, avec les lasers à gaz, dont la largeur de ligne est relativement étroite, la largeur d'impulsion peut être de 0,1 à 1ns. Ces durées d'impulsion ne sont pas considérées comme particulièrement courtes et même certains lampes-éclair peuvent émettre des durées d'un peu moins de 1ns. D'autre part, la largeur de ligne de certains lasers à solides ou à liquides peut être 10^3 - 10^5 fois plus grande que ceux d'un laser à gaz, et, dans ce cas, des impulsions très courtes peuvent être générées (jusqu'à 10fs), ce qui permet de fournir une concentration beaucoup plus importante en énergie [16].

Dans ce mode, le résonateur laser comprend soit un élément actif (un modulateur optique) ou un élément passif non linéaire (un absorbant saturable), ce qui provoque la formation d'une impulsion ultracourte circulant dans le résonateur laser [16].

Les paramètres caractéristiques d'un faisceau laser peuvent être classés en trois groupes :

Paramètres intrinsèques	Paramètres optiques, énergétiques et temporels	Paramètres géométrique du faisceau
<p>Chaque raie laser est caractérisée par :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fréquence $\nu(\text{Hz})$ ou la pulsation $\omega(\text{rad.s}^{-1})$, • Longueur d'onde $\lambda(\text{m})$ de propagation, • Energie du photon : <p>Le quantum d'énergie, E_p, s'exprimant à l'aide de la constante de Planck, h, et de la célérité de la lumière, c.</p> $E_p = h\nu \text{ ou } E_p = \frac{hc}{\lambda}$ $E_p(\text{ev}) = \frac{1,24}{\lambda(\mu\text{m})}$	<ul style="list-style-type: none"> • Etat de polarisation • Degrés de cohérence spatiale et temporelle, • Spectre d'émission (raie) et la largeur de raie $\Delta\omega(\text{rad.s}^{-1})$ correspondante, • Energie totale E (J), • Puissance P (W) intensité I (W.cm^{-2}), • Fluence (J/cm^2, Joules par centimètre carré) : Mesure l'énergie transmise par unité de surface. Lorsque la fluence est augmentée, le rayonnement laser devient plus destructeur, • Irradiance (W/cm^2) : Mesure le taux d'énergie transmis par unité de surface. L'irradiance décrit donc l'intensité de l'énergie qui atteint le matériau, • Durée d'impulsion $t_p(\text{s})$, • Taux de répétition $t_{\text{rep}}(\text{Hz})$ pour les lasers pulsés. 	<ul style="list-style-type: none"> • Degré de divergence $\theta(\text{rad})$, • Section du faisceau ou taille du spot (cm^2), • Taille minimale du rayon $W_0(\text{cm})$ et la position Z (cm).

Tableau 1 : Tableau récapitulatif des paramètres caractéristiques d'un faisceau laser [16]

L'importance de certains de ces paramètres varie suivant la nature de l'interaction laser-matière. Néanmoins, les plus prépondérants sont : la fréquence, l'énergie totale, la puissance, la durée d'impulsion (laser pulsée), et le diamètre du spot.

IV. Caractéristiques générales d'un tissu biologique

1. Définition d'un tissu biologique

Les tissus sont des ensembles coopératifs de cellules différenciées qui forment une triple association, territoriale, fonctionnelle et biologique.

Les tissus sont exclusivement constitués de cellules et de matrice extracellulaire (MEC). Seules varient d'un tissu à l'autre la nature des cellules, la composition moléculaire de la MEC et la proportion relative des cellules et de la MEC [17].

a. Association territoriale

Les tissus forment habituellement des ensembles topographiquement bien individualisés [18].

b. Association fonctionnelle

Qu'il s'agisse d'un ensemble de cellules toutes semblables (comme la plupart des tissus musculaires) ou de cellules différentes (comme par exemple les neurones, les astrocytes, les oligodendrocytes,... constituant le tissu nerveux du système nerveux central), un tissu remplit un rôle qui procède de l'intégration cohérente quantitative et/ou qualitative de la fonction des cellules qui le composent [18].

c. Association biologique

Chaque tissu a des caractéristiques biologiques qui lui sont propres, sous l'angle du renouvellement cellulaire, des contacts entre ses cellules, de son comportement en culture de tissu, etc [18].

2. Principales familles de tissus

Les tissus se répartissent en quatre grandes familles (voir tableau ci-dessous) [19] :

Epithéliums	Tissus conjonctifs	Tissus musculaires	Tissus nerveux
- Epithéliums de revêtement - Epithéliums glandulaires	- Tissu conjonctif lâche - Tissu réticulaire - Tissus conjonctifs denses - Tissu adipeux - Tissu osseux - Tissu cartilagineux	- Tissu musculaire strié squelettique - Tissu musculaire strié cardiaque - Tissu musculaire lisse	- Tissu du système nerveux central - Tissu du système nerveux périphérique

Tableau 2 : Tableau récapitulatif des quatre grandes familles de tissus biologique

3. Notion de Chromophore

Un chromophore est un composant biologique spécifique qui va capter préférentiellement une couleur de lumière et donc une longueur d'onde d'un laser. En captant de manière sélective le rayon laser, le chromophore subit des réactions localisées alors que les tissus biologiques environnant sans chromophores restent relativement intacts.

Cette absorption est fonction du couple longueur d'onde du faisceau laser/ longueur d'onde absorbée par le chromophore [71]. Voir le tableau ci-dessous :

Chromophores	Spectre d'absorption	Types d'UV absorbé
ADN	220-320 nm	UVC, UVB
Acide uronique	250-360 nm	UVC, UVB, UVA
Acide aminé aromatique	240-320 nm	UVC, UVB
Flavines	225-510 nm	UVC, UVB, UVA
Mélanines	250-700 nm	UVC, UVB, UVA
Caroténoïdes	300-500 nm	UVB, UVA
NADH, NADPH	260-400 nm	UVC, UVB, UVA
Hémoglobine	360-450 nm	UVA
Bilirubine	300-530 nm	UVB, UVA
Esters du rétinol	260-380 nm	UVC, UVB, UVA
7, dihydrocholesterol	270-315 nm	UVB

Tableau 3 : Chromophores biologiques cutanés et types d'UV absorbé [36]

- Les UVA sont les ultra-violetes dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 320 et 400 nm (on différencie les UVA courts - entre 320 et 340 nm -, des UVA longs - entre 340 et 400 nm -). Parmi les UV qui atteignent la terre, 98 % sont des UVA, ils sont Moins énergétiques que les UVB, mais ils ont un plus grand pouvoir de pénétration dans la peau [36].

- Les UVB sont les ultra-violetes dont la plage de longueurs d'ondes va de 290 à 320 nm. Ils représentent 2 % de la partie UV qui atteint la surface de la terre et ils sont très énergétiques. Ils pénètrent partiellement la peau [36].

- Les UVC sont les rayonnements dont les longueurs d'ondes sont les plus courtes (190 à 290 nm), ils sont donc extrêmement énergétiques. Cette énergie leur confère un pouvoir d'altération considérable sur les molécules biologiques, ils sont d'ailleurs utilisés pour leur activité germicide en médecine [36].

4. Propriétés du tissu biologique

a. Propriétés thermiques

Les principales propriétés d'un tissu biologique sont :

- La conductivité thermique k [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$],
- La chaleur spécifique c [$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$],
- La masse volumique ρ [kg.m^{-3}],
- La diffusivité thermique D [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$],
- L'émissivité,
- La chaleur latente [$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$].

➤ *Conductivité thermique*

La conductivité thermique d'un tissu biologique est déterminée par ses constituants. Les tissus comprennent le fluide extracellulaire et les cellules. En première approche, ces cellules contiennent un fluide intracellulaire et une membrane. En réalité leur constitution est beaucoup plus complexe. Le liquide extracellulaire est le milieu dans lequel baignent les cellules, également nommé espace extracellulaire. Il contient des protéines et des électrolytes (plasma, liquide interstitiel). La cellule est délimitée par une membrane plasmique lipidique bicouche contenant du cytoplasme qui contient les organites et le noyau de la cellule [20].

La conductivité thermique est une caractéristique propre à chaque tissu. Elle indique la quantité de chaleur qui se propage par conduction thermique.

➤ *Chaleur spécifique*

Elle est déterminée par la quantité d'énergie à apporter par échange thermique pour élever d'un Kelvin la température de l'unité de masse d'une substance. C'est donc une grandeur intensive égale à la capacité thermique rapportée à la masse du tissu biologique étudié.

➤ *Diffusivité thermique*

La diffusivité thermique est une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un matériau continu à transmettre un signal de température d'un point à un autre de ce matériau. Elle dépend de la capacité du matériau à conduire la chaleur et de sa capacité à accumuler la chaleur.

$$D = \frac{K}{\rho \cdot c} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] \quad (\text{I.5})$$

➤ *Emissivité*

En transfert radiatif, l'émissivité correspond au flux radiatif du rayonnement thermique émis par un élément de surface à température donnée, rapporté à la valeur de référence qu'est le flux émis par un corps noir à cette même température. Cette dernière valeur étant la valeur maximale possible, l'émissivité est un nombre inférieur ou égal à l'unité. Ce coefficient d'émissivité ε varie en fonction de la longueur d'onde du signal émis.

Un corps noir idéal a une émissivité de 1 ($\varepsilon = 1$) alors que n'importe quel matériau réel a une émissivité inférieure à 1 ($\varepsilon < 1$).

➤ *Chaleur latente*

Chaleur latente est la quantité de chaleur nécessaire à l'unité de masse d'un corps pour changer d'état physique à température et à pression constante.

b. Paramètres optiques [21] [38]

Les paramètres optiques du tissu biologique sont :

- Le coefficient d'absorption μ_a (cm^{-1}),
- Le coefficient de diffusion μ_s (cm^{-1}) qui tient compte du facteur d'anisotropie du milieu g ,
- Le coefficient d'atténuation γ (cm^{-1}) global c'est la somme des deux autres coefficients et il est appelé aussi coefficient d'extinction :

$$\gamma = \mu_a + \mu_s \cdot (1-g) \quad (\text{I.6})$$

V. Interaction laser-Tissu

A la surface du tissu, une partie du rayonnement du laser est réfléchi, et une partie va parvenir à traverser le volume du tissu. Pour un tissu donné, le ratio de ces phénomènes dépend de la longueur d'onde du rayonnement [22].

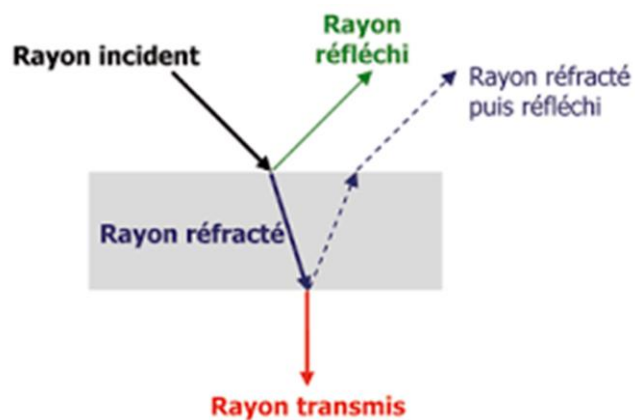


Figure 10 : Géométrie de la réflexion, de la réfraction, de l'absorption et de la diffusion

Donc on a :

$$A + R + T = 1$$

R, A et T sont respectivement les coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission du milieu. Dans les conditions habituelles de traitement par irradiation laser, l'épaisseur des tissus biologiques irradiés est tellement importante que le terme de transmission devient négligeable.

1. Réflexion et Réfraction [23]

La réflexion est définie comme le retour du rayonnement électromagnétique par les surfaces sur lequel il est incident. Cela survient au niveau de la surface réfléchissante qui sépare deux milieux ayant des indices de réfraction différents, tels que l'air et les tissus biologiques [23].

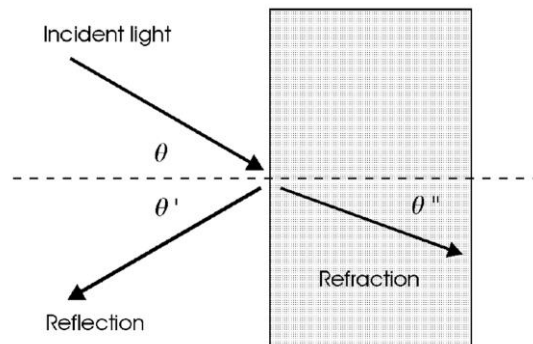


Figure 11 : Géométrie de la réflexion et de la réfraction spéculaire

La réfraction se produit aussi lorsque la surface réfléchissante sépare deux milieux d'indices de réfraction différents. Il provient d'un changement de vitesse de l'onde lumineuse. La relation mathématique simple régissant la réfraction est la loi de Snell. Il est donné par :

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v}{v'} \quad (\text{I.7})$$

Où θ'' est l'angle de réfraction, et v et v' sont respectivement les vitesses de la lumière dans le milieu avant et après la surface réfléchissante. Les indices de réfraction correspondants sont définis par :

$$n = \frac{c}{v} ; n' = \frac{c}{v'}$$

Où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide, (I.7) se transforme en :

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'' \quad (\text{I.8})$$

La réflexion et la réfraction sont fortement liées l'une à l'autre par les lois de Fresnel.

Dans les applications médicales du laser, la réfraction joue un rôle significatif lors de l'irradiation de milieux transparents comme le tissu cornéen. Habituellement, dans les milieux opaques, l'effet de la réfraction est difficile à mesurer en raison de l'absorption et la diffusion [23].

Les fluctuations de l'indice de réfraction dans un milieu biologique entraînent une dispersion de la lumière dans toutes les directions et la transformation d'une partie de l'énergie de l'onde incidente par absorption en énergie thermique. L'absorption et la diffusion agissent sur la propagation de la lumière par atténuation ou extinction de l'énergie du laser [24].

2. Absorption

L'intensité d'une onde électromagnétique incidente est atténuée en passant à travers le tissu biologique en raison de son absorption.

Ainsi, le coefficient d'absorbance est définie comme le rapport des intensités absorbées et incidentes. Elle est due à une conversion partielle de l'énergie lumineuse en chaleur à cause des vibrations moléculaires. Un milieu parfaitement transparent permet le passage de la lumière sans aucune absorption. Mais, il faut noter que, les termes «transparent» et «opaque» sont relatifs, puisqu'ils sont dépendants de la longueur d'onde. Par exemple, dans le corps humain, la cornée et la lentille, sont connues comme milieu transparent, or, leur composition à base d'eau, permet une forte absorption à des longueurs d'onde dans le spectre infrarouge.

Par conséquent, ces tissus apparaissent opaques dans cette région spectrale. Donc réellement aucun milieu n'est connu pour être transparent ou opaque à toutes les longueurs d'onde du spectre électromagnétique [23,38].

La probabilité de subir une absorption est donnée par [38] :

$$P_{abs} = 1 - e^{-\mu_a \cdot l} \quad (I.9)$$

μ_a : Coefficient d'absorption,

l : Longueur parcourue.

La capacité d'un tissu biologique à absorber le rayonnement électromagnétique dépend sur un certain nombre de facteurs, principalement la concentration des macromolécules telles que les protéines et les pigments, les molécules d'eau, la longueur d'onde du rayonnement, l'épaisseur de la couche absorbante, et la température. L'absorption des rayons IR du spectre électromagnétique peut être principalement attribuée à des molécules d'eau, or, les protéines et les pigments absorbent principalement dans l'UV et le visible. Selon Boulnois (1986) [25], les protéines en particulier, ont un pic d'absorption d'environ 280 nm.

Une loi est fréquemment appliquée qui décrit l'effet de l'épaisseur ou de la concentration sur l'absorption. Communément appelé la Loi de Beer - Lambert, et exprimées par :

$$I(z) = I_0 \cdot \exp(-\alpha z) \quad (\text{I.10})$$

Et

$$I(z) = I_0 \cdot \exp(-k' c z)$$

Où « z » désigne l'axe optique, $I(z)$ est l'intensité à une distance « z », I_0 est l'intensité incidente, « α » est le coefficient d'absorption du milieu, « c » est la concentration des agents absorbants, et « k' » dépend des paramètres internes autres que la concentration.

Selon le coefficient d'absorption α , un matériau peut se comporter de trois façons différentes vis-à-vis de ses propriétés optiques :

- Si α est grand, le matériau est dit opaque et le rayonnement incident est fortement absorbé.
- Si α est faible (tend vers 0), alors le rayonnement traverse le milieu transparent sans perte.
- Si la valeur de α est intermédiaire, le matériau est dit semi-transparent et le rayonnement peut parcourir une grande distance avant d'être complètement absorbé.

Ce coefficient est très important dans la mesure où il nous indique l'aptitude d'un rayonnement à se propager ou non au sein du matériau homogène. Dans ce cas, il est primordial de prendre en compte l'épaisseur du matériau noté "e" [25,72].

La loi de Beer-Lambert donne la fraction de l'énergie incidente qui est transmise au sein du matériau homogène avec (αe) l'épaisseur optique. C'est cette épaisseur optique qui permet de définir les zones d'opacité et de transparence [25,72] :

Epaisseur optique	Particularité optique du matériau
$\alpha e \gg 1$	<ul style="list-style-type: none"> - Distance de pénétration (ou de propagation) est petite comparée aux dimensions du milieu. - Matériau opaque
$\alpha e \ll 1$	<ul style="list-style-type: none"> - Distance de pénétration grande. - Matériau transparent
Intermédiaires	<ul style="list-style-type: none"> - Distance de pénétration moyenne. - Matériau semi-transparent

Tableau 4 : Particularité optique du matériau selon l'épaisseur optique [73]

Donc l'opacité d'un matériau peut être définie soit par son inaptitude à propager le rayonnement et c'est la profondeur de pénétration $1/\alpha$ qui convient pour caractériser le milieu, soit par son inaptitude à transmettre le rayonnement, auquel cas c'est l'épaisseur optique (αe) qui doit être utilisée [73].

Dans la figure ci-dessous (figure 12), sont indiqués respectivement, les spectres d'absorption de la mélanine et de l'hémoglobine (HbO_2) (absorbants biologiques).

La mélanine est le pigment de base de la peau et elle est de loin le plus important chromophore épidermique. Son coefficient d'absorption est supérieur dans UV. L'hémoglobine prédomine dans la vascularisation tissulaire. Elle a des pics d'absorption important autour des longueurs d'onde 280 nm, 420 nm, 540 nm, et 580 nm.

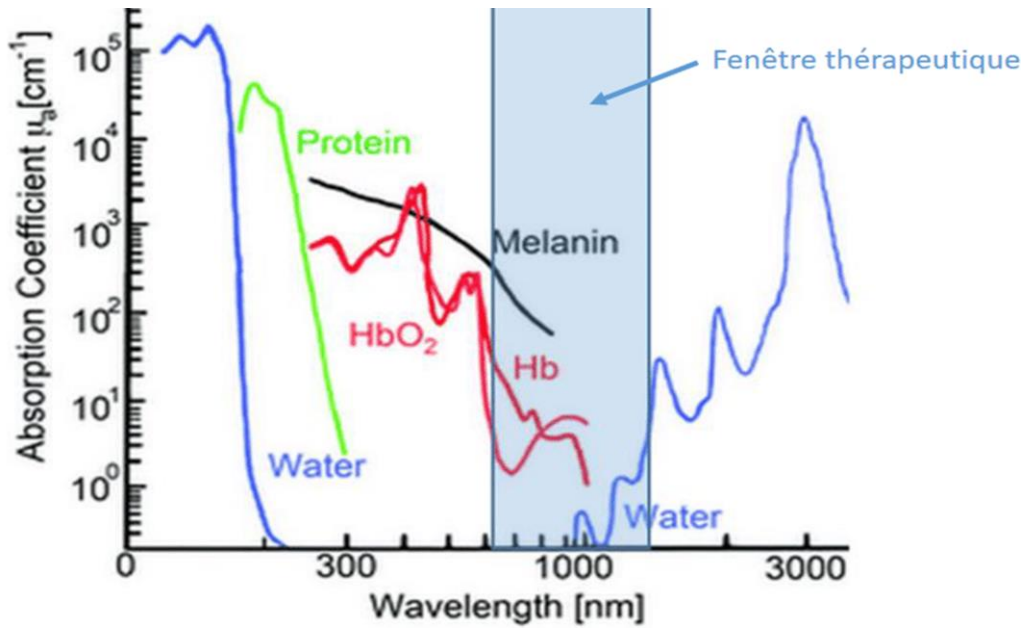


Figure 12 : Spectre d'absorption de la mélanine dans la peau, l'hémoglobine (HbO_2) dans le sang, l'eau et les protéines. Les pics d'absorption relatifs de l'hémoglobine sont à 280 nm, 420 nm, 540 nm et 580 nm. Boulnois (1986) [25]

Étant donné que ni les macromolécules ni l'eau ne peut absorber dans le proche IR, une «fenêtre thérapeutique» est donc délimitée entre environ 600 nm et 1200 nm. Dans cette gamme spectrale, le rayonnement pénètre dans les tissus biologiques avec une faible perte, permettant ainsi le traitement des structures tissulaires les plus profondes.

Les spectres d'absorption de trois tissus typiques (peau, la paroi aortique et la cornée) sont présentés dans la figure 13.

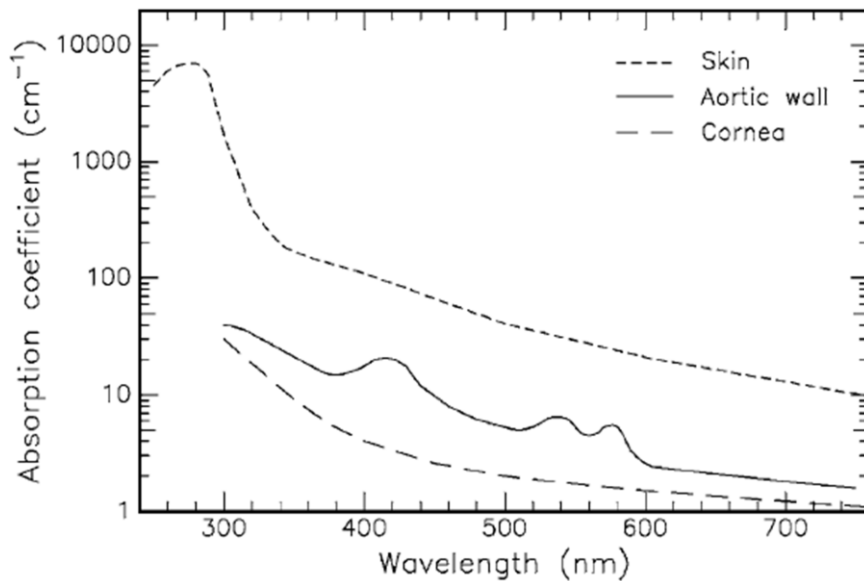


Figure 13 : Spectre d'absorption de la peau, de la paroi aortique et de la cornée. Dans le domaine du visible, L'absorption de la peau est 20-30 fois plus élevée que l'absorption du tissu cornéen. Parrish et Anderson (1983), Keijzer et al. (1989), et Eichler et Seiler (1991) [23]

Parmi ces derniers, la peau est l'absorbeur le plus important, alors que la cornée est presque transparente dans la région visible du spectre. Ces spectres d'absorption, peuvent être considérés comme une empreinte caractéristique du tissu correspondant. Cependant, de légers écarts par rapport à ces spectres peuvent se produire en raison de l'inhomogénéité de la plupart des tissus biologiques.

3. Diffusion [24]

La diffusion de la lumière est due aux multiples modifications de trajectoires dans les tissus vivants. Elle est provoquée par des variations aléatoires de la densité du tissu causées par la présence de nombreuses hétérogénéités de tailles et d'indices de réfraction variés. Les tissus biologiques sont formés de cellules, d'organites subcellulaires tels que les noyaux et les mitochondries, de fibrilles de collagène, de granulés de mélanine, de vaisseaux sanguins, etc. Quand l'onde incidente rencontre l'un de ces constituants, il se transforme en dipôles oscillants qui rayonnent des ondes secondaires à la même fréquence que l'onde incidente.

La diffusion contribue à la distribution spatiale de l'énergie absorbée. Dans la région du spectre où l'absorption est réduite, la lumière laser pénètre d'une façon importante si la diffusion est faible.

Il existe deux régimes principaux de diffusion suivant la taille de la particule par rapport à la longueur d'onde du rayon incident :

- Taille de la particule petite devant la longueur d'onde ($\lambda/10$) : La particule joue le rôle d'un dipôle électrique et la diffusion est isotrope - *Diffusion de Rayleigh* -,

- Taille de la particule grande devant la longueur d'onde : La particule est considérée comme un milieu dense – *Théorie de Mie* -.

Comme dans les tissus biologiques les particules ont des structures de tailles variées, on utilise le coefficient de diffusion moyen [cm^{-1}] défini par la relation :

$$I = I_0 \cdot \exp(-\mu_d L) \quad (\text{I.11})$$

La diffusion est anisotrope pour la plupart des tissus et le facteur d'anisotropie noté g correspond à la valeur moyenne de l'angle de diffusion entre les deux rayons incident et diffusé [38].

Le coefficient d'extinction [cm^{-1}] est l'inverse de la profondeur de pénétration du faisceau laser.

VI. Lasers médicaux et leurs applications

Il existe actuellement des centaines de types de lasers, puisque les technologies actuelles permettent de pomper un très grand nombre de matériaux solides, liquides ou gazeux, pour les rendre amplificateurs de la lumière. Or, le nombre des types de lasers d'utilisation courante est beaucoup plus restreint.

La majorité des lasers utilisés aujourd'hui se répartissent en trois catégories selon la nature du milieu excité [26]:

- Lasers à solide : Les lasers à solide utilisent des cristaux, des céramiques ou des verres dopés avec différents atomes comme milieu amplificateur de la lumière (le plus ancien est le laser à rubis). Ce sont les lasers les plus puissants. En effet, ils fonctionnent en général de manière discontinue (par exemple impulsions de 12 fs). Ils sont capables d'émettre aussi bien dans le visible que dans l'UV ou les rayons X [27].

- Lasers à gaz (atomiques, ioniques, lasers moléculaires) : Le milieu générant les photons est un gaz contenu dans un tube isolant (verre, quartz ou céramique). Le faisceau émis est très cohérent et la fréquence d'émission est très pure.

Il existe essentiellement trois familles distinctes de lasers à gaz, divisées selon la nature chimique du gaz. Il s'agit notamment du laser à gaz (Hélium-Néon), le laser à gaz ionisé (Argon), et le laser à gaz moléculaire (Dioxyde de carbone CO_2). Le laser à ion Argon Ar^+ est le laser à gaz ionisé le plus utilisé en médecine [27].

- Lasers à liquides : Appelés aussi laser à colorant. Dans ce type de laser, le milieu d'émission est un colorant organique. Le rayonnement émis peut être continu ou pulsé suivant le mode de pompage employé. Les fréquences émises peuvent être réglées à l'aide d'un prisme, et la gamme des longueurs d'onde peuvent aller de l'ultraviolet jusqu'à l'infrarouge [27].

- Lasers chimiques :

Généralement n'importe quelle réaction chimique qui émet à froid de la lumière peut être utilisée pour construire un laser. Les premiers lasers chimiques étaient basés sur la

réaction du fluor avec l'oxygène. Ces premiers lasers étaient très puissants, mais encombrants, horriblement corrosifs, polluants et très peu fiables [27].

Exemple : Un mélange d'eau oxygénée et de chlore gazeux produit des molécules excitées d'oxygène. Ces molécules sont mélangées avec des molécules d'iode et produisent des molécules excitée d'iode gazeux qui est le milieu amplificateur de la lumière.

- Lasers à semi-conducteurs :

Les lasers à semi-conducteurs utilisent principalement des diodes afin de produire un faisceau lumineux. Ce sont les lasers les plus petits mais ils sont produits en très grande quantité, grâce à leurs utilisations intenses dans les systèmes imprimantes ou les lecteurs optiques.

Ces diodes peuvent être empilées dans des ensembles ayant plusieurs dizaines de watts de puissance. Ces ensembles peuvent être groupés pour pomper des lasers continus de puissance destinés au découpage de plaques d'acier [27].

Les lasers couramment utilisés En médecine sont :

- Nd:YAG (Grenat d'Yttrium-Aluminium dopé au Néodyme ($\text{Nd:Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$)) (état solide),
- Laser Argon Ar^+ (gaz ionique),
- Laser au dioxyde de carbone CO_2 (gaz moléculaire),
- Récemment le laser à colorant (état liquide).

Nous allons citer ci-dessous, les applications des lasers en médecine selon leurs propriétés.

1. Laser à solide

a. Laser à Rubis

Le tout premier laser opérationnel était un laser à Rubis fabriqué le 16 mai 1960 par Theodore Maiman. Le rubis est un cristal d'oxyde d'aluminium dans lequel certains des atomes d'aluminium ont été remplacés par des atomes de Chrome.

Le Chrome confère au rubis sa couleur rouge caractéristique et il est responsable du comportement laser du cristal. Les atomes de chrome absorbent la lumière verte et bleue et émettent ou réfléchissent uniquement la lumière rouge.

Les longueurs d'onde verte et bleue dans le flash excitent des électrons dans les atomes de chrome à un niveau d'énergie plus élevé. En retournant à leur état normal, les électrons émettent leur lumière rouge caractéristique du rubis. Les miroirs réfléchissent une partie de cette lumière à l'intérieur du cristal, stimulant ainsi d'autres atomes de chrome pour produire plus de lumière rouge, jusqu'à ce que l'impulsion lumineuse s'accumule à une puissance élevée [26].

Le laser à l'état solide, pompé optiquement, utilise le saphir comme réseau hôte et le chrome comme ion actif. Le laser à Rubie est un laser à trois niveaux. Il produit des impulsions de lumière visible à une longueur d'onde de 694,3 nm [28].

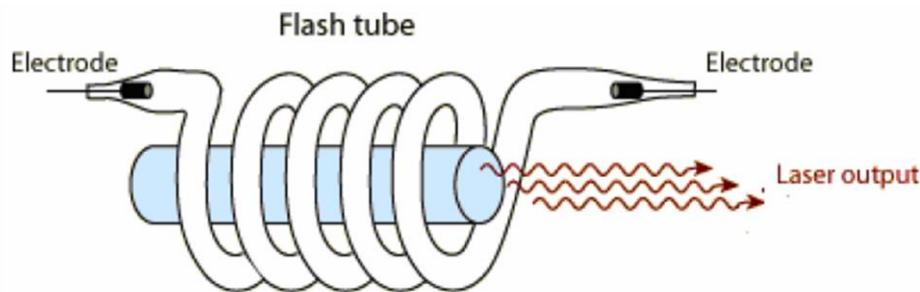


Figure 14 : Schématisation du laser à Rubie [28]

Le rayonnement laser à Rubie était utilisé pour la première fois en médecine dans le domaine de la chirurgie rétinienne. Il a la particularité d'être fortement absorbé par les pigments tissulaires de couleur bleu et noire, la mélanine dans la peau et les cheveux.

b. Laser Nd:YAG

Le laser Nd:YAG - Neodymium Doped Yttrium Aluminium Garnet - ou Grenat d'Yttrium-Aluminium Dopé au Néodyme ($\text{Nd:Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$) est un cristal utilisé comme milieu amplificateur pour les lasers utilisant des milieux solides [26].

Le dopant, du Néodyme triplement ionisé Nd^{3+} , remplace de manière typique l'ion Yttrium Y^{3+} dans la matrice cristalline, car les deux éléments ont une taille similaire. Généralement, le cristal hôte est dopé avec environ 1% en masse de Néodyme [26].

Le milieu (sous forme d'une tige) est pompé optiquement en utilisant une lampe enroulé en hélice autour de la tige (voir figure 14). La quantité du dopant dans le matériau utilisé varie en fonction de son utilisation. Pour une sortie en onde continue, le dopage est significativement moins important que pour les lasers pulsés [26].

L'énergie émise par la lampe de pompage, dans les bandes près de 530nm, 580nm et 750nm, est absorbée par l'ion Nd^{3+} et excite l'ion à des niveaux correspondant au niveau (4) (figure 15). Ces ions décroissent de nouveau par une transition rapide et non radiative R_a vers le niveau 3.

Puisque la durée de vie de la transition laser L est longue comparée à celle de R_a ($\tau_{32} \gg \tau_{43}$), une population s'accumule au niveau 3 (le niveau laser supérieur), qui peut se détendre par émission stimulée à 1,06 μm au niveau 2 (le niveau laser inférieur). Une autre désintégration non radiative R_b du niveau inférieur (2) à l'état fondamental (1) de l'ion néodyme complète le cycle de l'émission laser [26].

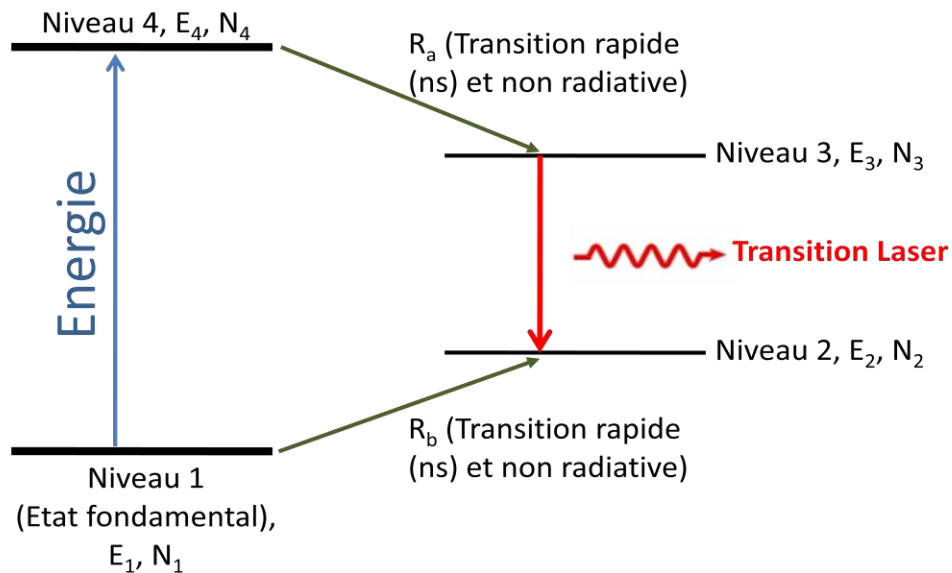


Figure 15 : Diagramme à quatre niveau d'énergie : Il y a quatre niveaux d'énergie $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$, correspondant à quatre niveaux de populations N_1, N_2, N_3, N_4

La puissance de sortie laser obtenue en mode de fonctionnement continu CW varie entre 15W et 150W, par contre, en mode pulsé on peut atteindre des puissances plus importantes (entre 400W et 10^4W) pour une durée d'impulsion de 1s à 5ms. Dans le fonctionnement à commutation Q on peut obtenir des impulsions de pointe de 10^4 kW [26].

Ce laser émet dans le proche infrarouge avec une longueur d'onde de 1060nm. Il est faiblement absorbé par le sang (Hémoglobine), et les molécules d'eau. Or, ce rayonnement pénètre plus profondément dans les tissus et transmet à travers les liquides limpides. Cela permet son usage dans l'œil ou dans les milieux aqueux comme la vessie. Le faisceau

Nd:YAG se caractérise par un fort degré de diffusion lors de son impact avec les tissus biologiques [26].

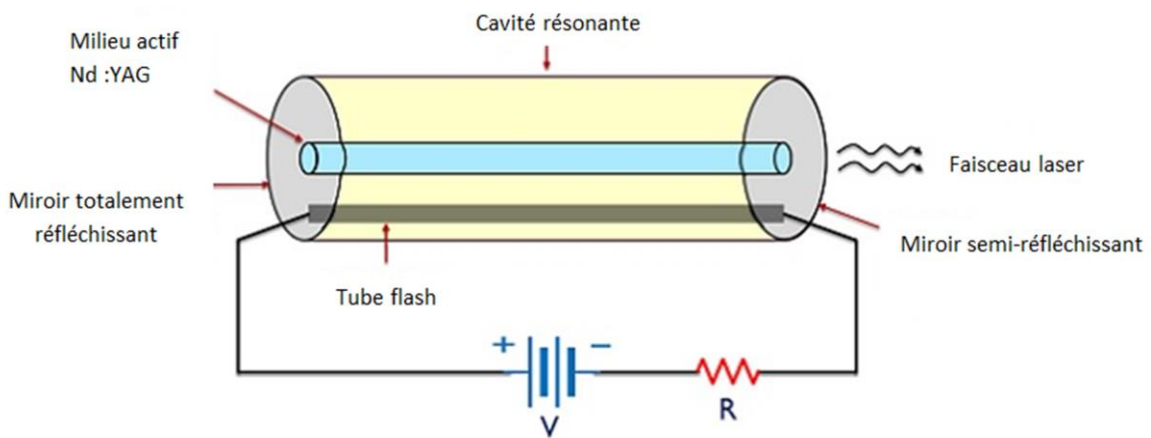


Figure 16 : Système Lasers Nd:YAG [32]

Le faisceau laser est aussi utilisé pour coaguler les vaisseaux sanguins ayant un diamètre supérieur à 4mm. Ces caractéristiques rendent ce type de laser un excellent moyen pour faire un traitement par coagulation, mais il reste imprécis dans la coupure due à des lésions tissulaires.

2. Laser à gaz

a. Laser à Argon

Le laser à argon ionisé fonctionne en continu; une décharge puissante dans l'argon ionise les atomes et crée des inversions de populations entre des niveaux excités des ions; on peut accorder le laser, c'est-à-dire le faire osciller sur une raie au choix parmi plusieurs (dans le vert, le bleu et le proche U.V.); à cet effet, on dispose entre les miroirs un prisme que l'on peut tourner, de façon à choisir 'la longueur d'onde des rayons qui reviennent sur eux-mêmes, on peut obtenir sur certaines raies des puissances de plusieurs watts [29].

Le faisceau laser est visible sous la forme d'une lumière bleu-vert de longueur d'onde entre 488 et 515 nm. Il est mieux absorbé par le sang que le laser Nd:YAG, or, dans l'eau, son absorption est inférieure à celle du laser Nd:YAG. Il se transmet facilement à travers des tissus aqueux limpides. Certains pigments tissulaires comme les chromogènes, la mélanine et l'hémoglobine absorberont très bien cette lumière. La chaleur produite localement par cette interaction permet d'avoir un bon aspect coagulatif.

La première application médicale significative de cette caractéristique d'absorption sélective a été dans le traitement de la rétinopathie diabétique en 1965. La lumière laser à l'argon est absorbée par l'épithélium pigmentaire rétinien et la chaleur générée est ensuite utilisée pour photocoaguler la rétine. La dermatologie et la chirurgie plastique sont les autres grands domaines d'applications de la thérapie au laser à l'argon. Le faisceau laser est plus absorbé par le tissu pigmenté ou la lésion pigmentée que par le tissu environnant.

Comme les autres lasers de puissance, lorsque le faisceau laser d'argon est bien focalisé sur un point très petit (ou lorsque sa puissance est suffisamment augmentée), sa densité de puissance sera suffisamment forte pour provoquer la vaporisation ou la fusion de la cible.

b. Laser Helium: Neon

Le gaz contenu dans le tube du laser est un mélange de gaz rares chimiquement inertes. Le néon est dilué dans l'hélium qui est le constituant majoritaire (90 %). Le pompage qui réalise l'inversion de population profite du fait que l'atome d'hélium a une énergie d'excitation très voisine de la valeur E_2 . Les atomes d'hélium majoritaires sont excités par décharge électrique.

Lors des collisions d'un des atomes de néon, minoritaires, initialement dans l'état fondamental, avec un atome d'hélium excité, l'énergie E_2 de l'hélium est transmise au néon. Ceci réalise le « pompage » des atomes de néon vers l'état E_2 pour obtenir l'inversion de population, l'état E_1 se dépeuplant rapidement par cascade [30].

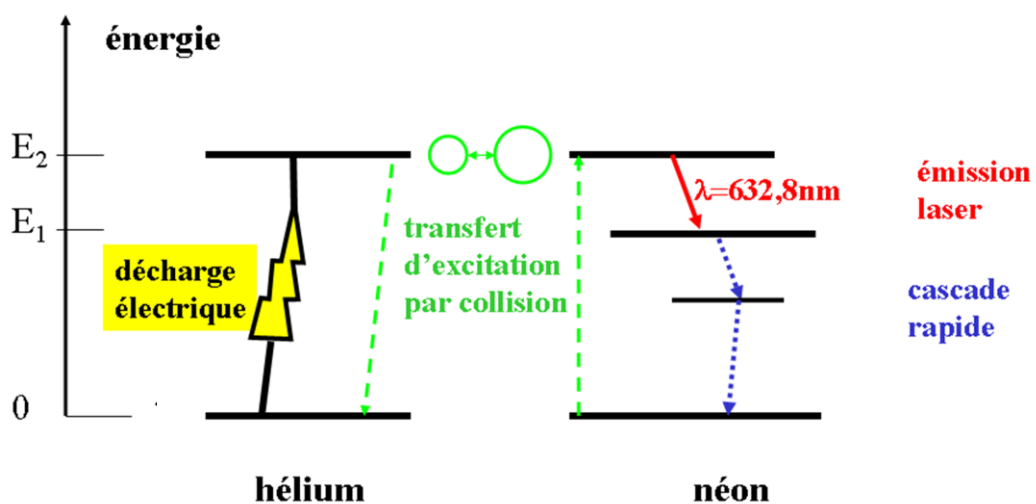


Figure 17 : Schéma des processus énergétiques du laser He-Ne

c. Laser au Dioxyde de Carbone CO₂ [31,32]

Le milieu amplificateur est un gaz excité par une décharge électrique. Ce gaz utilisé est un mélange de Dioxyde de carbone (CO₂), de Diazote (N₂) et du Dihydrogène (H₂) et/ou Xénon (Xe) et d'Hélium (He).

Le processus d'inversion de population dans ce laser est réalisé suivant la chronologie suivante :

La collision avec un électron provoque l'excitation du Diazote. La molécule Diazote est une molécule homonucléaire, ce qui ne permet pas l'émission d'un photon et donc ses niveaux d'excitation vibratoires sont métastables et ont une grande durée de vie. La collision entre le N₂ excité et le CO₂ produit l'excitation vibratoire de ce dernier, provoquant ainsi une inversion de population nécessaire pour la production d'un faisceau laser.

Ensuite la collision entre les atomes excités et les atomes d'hélium froids permet leur retour à l'état fondamental. Les atomes d'hélium ainsi chauffés à cause des chocs doivent être refroidis pour conserver leur capacité à produire une inversion de population des molécules de CO₂. Ce refroidissement se fait par échange de chaleur entre les atomes d'hélium et la paroi froide de l'ampoule.

Le laser à CO₂ émet dans l'infrarouge moyen avec une longueur d'onde de 10,6 μm. Cette plage est fortement absorbée par l'eau qui présente une teneur de composé de 70% à 90% dans les tissus biologiques, donc son absorption par le rayonnement CO₂ est indépendante de la couleur du tissu (contrairement au laser à l'ion Argon).

En raison de ce degré élevé d'absorption, la majeure partie de l'énergie incidente est fortement absorbée, mais avec une très faible profondeur de pénétration (~ 0,01 mm), limitant ainsi l'endommagement latéral du tissu et laissant une très petite zone de coagulation et de nécrose. Cela fait du laser CO₂ un instrument chirurgical précis.

Les principales applications du laser CO₂ sont la découpe, la vaporisation ou la fusion et la coagulation. La focalisation du faisceau laser sur un point permet une coupe précise (Scalpel à laser). La profondeur de la découpe est déterminée par la densité de puissance et le temps d'irradiation.

3. Lasers à liquide

Les lasers à colorants utilisent un milieu actif constitué d'une solution d'un colorant organique dans un solvant liquide tel que l'alcool éthylique ou méthylique ou l'eau. Il est pompé optiquement soit par un autre laser, soit par une lampe flash.

Une des caractéristiques les plus importantes que les lasers à colorant offrent est l'accordabilité (la sortie monochromatique des lasers colorants disponibles peut être réglée à plusieurs gammes, de l'ultraviolet à l'infrarouge proche) [32].

Lorsque le colorant est irradié avec la lumière de longueur d'onde correspondant à la différence d'énergie entre S_0 et S_1 , certaines de ces molécules qui se trouvent à l'état fondamental sont soulevées à S_1 . Ces niveaux sont indiqués comme de vastes états d'énergie contenant de nombreuses vibrations et de rotation dans leurs sous-niveaux, de manière à former une bande continue [32].

Ainsi, les spectres d'absorption et d'émission sont larges. Lorsqu'une molécule de colorant est soulevée à une position dans S_1 par pompage, il se détend dans un temps très court aux sous-niveaux les plus bas de S_1 . Cette relaxation se produit par des transitions non radiatives, qui produisent de la chaleur [32].

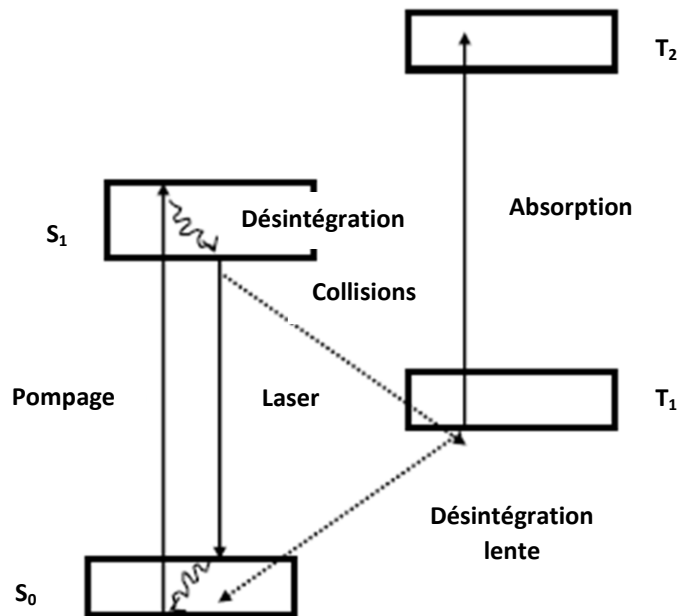


Figure 18 : Schéma des processus énergétiques du laser à colorant

Les niveaux supérieurs de S_0 sont initialement vides. Ainsi, on obtient une inversion de population entre les sous-niveaux inférieurs de S_1 et la partie supérieure des sous-niveaux de S_0 . Cette transition (de S_1 à S_0) se produit avec l'émission de lumière fluorescente. Dans ce cas, le gain par émission stimulée est possible, et le laser peut se produire grâce au phénomène d'inversion de population.

Ce rayonnement laser à une longueur d'onde plus longue que la lumière du pompage optique. Étant donné que de nombreux sous-niveaux proches du sommet de S_0 sont vides, la lumière laser peut être émise sur une plage large de longueurs d'onde. Ce fait permet la possibilité d'accorder la sortie des lasers à colorants.

La fluorescence des colorants couvre un large spectre de couleurs. Le laser à colorant est utilisé lorsqu'on requiert en thérapie une caractéristique d'absorption sélective du tissu sur une certaine longueur d'onde. Par exemple, dans le traitement de taches de vin de port, de tatouages et d'autres tissus pigmentés.

Actuellement, le laser à colorant est utilisé dans la photoradiothérapie (PRT), qui présente une nouvelle possibilité pour la détection et le traitement des tumeurs cancéreuses. Cela implique l'utilisation d'un agent photosensibilisant (agent de recherche de tumeur), tel que le dérivé d'hématoporphyrine (HPD) en combinaison avec un rayonnement laser.

L'opération se déroule comme suit :

On injecte par voie intraveineuse dans le système biologique une solution diluée (HPD). Il se propage dans le corps, mais est sélectivement retenu dans le tissu tumoral après deux à trois jours. Lorsqu'elle est activée par le rayonnement ultraviolet, son émission est caractérisée par une lumière de fluorescence à double pic répartie dans la région spectrale rouge (environ 630 nm) superposée sur le spectre de fluorescence naturelle (autofluorescence) du tissu (émission à large bande).

Les lignes spectrales du HPD identifient la tumeur et permettent de prélever des échantillons standards par biopsie. Lorsque le rayonnement laser de 630 nm est délivré à la molécule HPD, cette dernière l'absorbe et le transfère à une molécule d'oxygène qui s'excite. Cet oxygène moléculaire excité est connu pour être un agent toxique puissant. Il oxyde le tissu environnant (tumeur).

Les lasers à colorant en mode pulsé ont été utilisés pour fragmenter les calculs biliaires et les calculs rénaux. Il s'agit généralement d'impulsions microsecondes, émettant une énergie

de 50 à 100 mJ dans la région bleu-vert du spectre. Le rayonnement laser est délivré à la pierre par une fibre optique traversée par l'un des canaux d'un endoscope [26].

VII. Mécanismes d'interaction [23]

Les mécanismes d'interaction qui peuvent se produire lors de l'application du laser sur le tissu biologique sont multiples et la diversité des caractéristiques spécifiques des tissus ainsi que les différents paramètres du laser contribuent à cette différence. Les propriétés les plus importantes des tissus biologiques sont les coefficients de réflexion, d'absorption et de diffusion. L'ensemble de ces caractéristiques déterminent la transmission totale du tissu à une certaine longueur d'onde.

Les propriétés thermiques des tissus jouent aussi un rôle très important dans cette interaction. Les autres paramètres sont donnés par le rayonnement laser lui-même (longueur d'onde, temps d'exposition, énergie appliquée, diamètre du spot, densité d'énergie et densité de puissance). Parmi ceux-ci, le temps d'exposition reste un paramètre très important lors du choix d'un certain type d'interaction.

Pendant les premières décennies après l'invention du laser par Maiman (1960), de nombreuses études ont été réalisées afin d'étudier ses effets en utilisant tous les types de systèmes laser et les types de tissus. Bien que le nombre de combinaisons possibles des paramètres expérimentaux soient illimité, quatre catégories de types d'interactions sont classées aujourd'hui : Photo-chimiques, Photo-thermiques, Photo-ablatifs et Photo-mécaniques, cette diversité est due aux divers processus de conversion d'énergie laser (figure 19) [25].

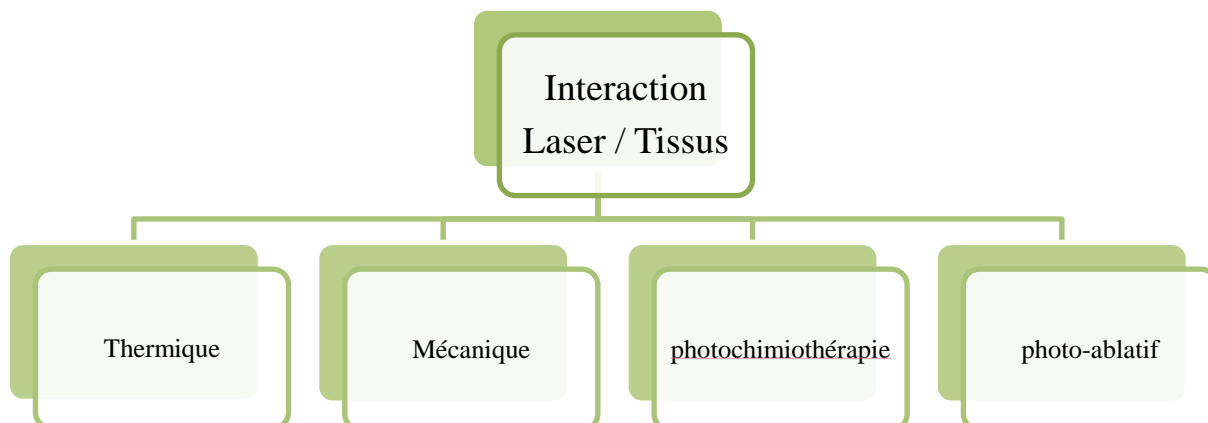


Figure 19 : Effets des lasers sur les tissus biologiques [36]

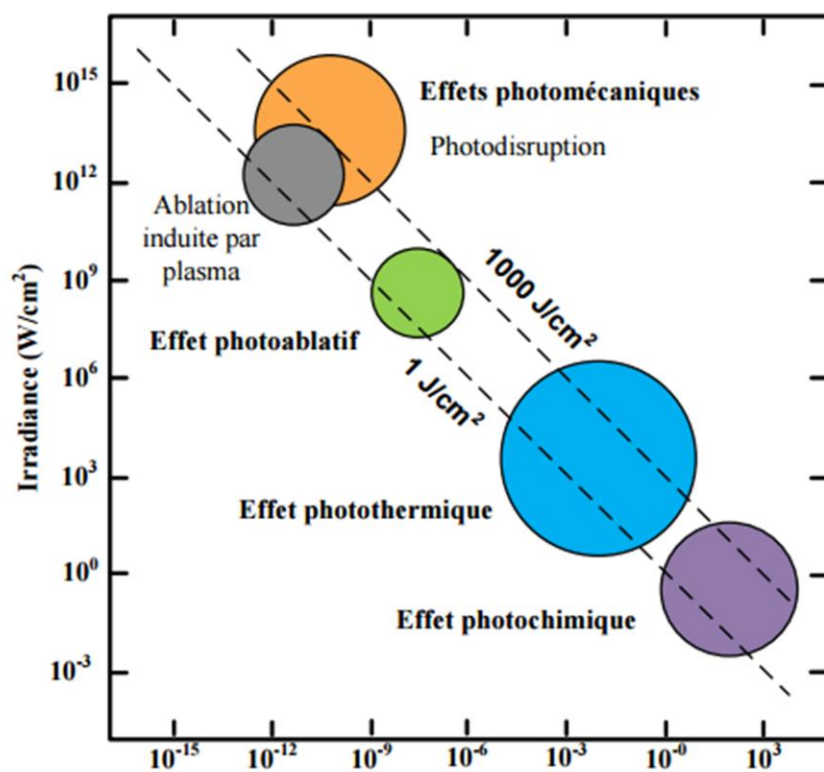


Figure 20 : Cartographie des différents effets obtenus avec les lasers sur les tissus biologiques, en fonction de la durée d'émission du laser et de l'irradiance Boulnois (1986) [25]

Cette représentation (figure 20) démontre que :

- La densité d'énergie totale du laser varie d'environ 1 J/cm^2 à 1000 J/cm^2 ,
 - Le temps d'exposition semble être le paramètre principal responsable de la variété des mécanismes d'interaction,
 - Les types d'interaction adjacents ne peuvent pas toujours être strictement séparés.
- Les effets thermiques peuvent également jouer un rôle Photochimique,

Si on applique des impulsions laser ultra-courtes de durées inférieures à 100 ps - chacune d'entre elles n'ayant aucun effet thermique – peuvent s'ajouter et contribuer à une augmentation notable de température s'elle est appliquée à des taux de répétition supérieure à environ 10-20 Hz (en fonction du laser utilisé).

De ce fait, le besoin de la maîtrise de chaque interaction laser-tissu est requis.

1. Interaction photochimique [23]

Les effets photochimiques font appel à de bas niveau d'irradiance et des temps d'application longs de la lumière. Ce mode de fonctionnement permet de provoquer des phénomènes chimiques dans les tissus avec production de radicaux libres qui peuvent détruire des structures. Ce phénomène peut survenir de façon naturelle ou lorsqu'on ajoute un agent photosensibilisant [23].

a. Les phases de la photochimie

Cette thérapie passe par trois phases [34,37] :

- **Phase I (phase d'incorporation)** : On injecte d'abord dans le tissu biologique un agent photosensibilisant (PS) (principalement par voie intra-veineuse ou topique) non toxique à l'obscurité. Le PS va ensuite s'accumuler préférentiellement dans les tissus pathologiques (ex : tissus tumoraux) plutôt que dans les tissus sains adjacents.

- **Phase II (phase photocytotoxique)** : Après un certain intervalle de temps (correspondant à la durée nécessaire à l'incorporation du PS dans les cellules cancéreuses), ce médicament est activé par une lumière laser de longueur d'onde et d'irradiance appropriées. Cette phase d'activation du médicament photoactivable implique une cascade de réactions conduisant à la production d'espèces réactives de l'oxygène dont l'oxygène singulet (oxygène moléculaire dans son état excité particulièrement réactif), principal responsable de la destruction des cellules cancéreuses.

- **Phase III** : Les dégâts causés par les espèces réactives de l'oxygène peuvent conduire ultérieurement à deux issues possibles : la survie ou l'éradication du tissu tumoral. L'efficacité du traitement est régie par les facteurs suivants :

- Le médicament (ses caractéristiques chimiques, photophysiques et biologiques),
- L'intervalle nécessaire à l'incorporation du PS dans les cellules cancéreuses,
- Les caractéristiques du signal lumineux (longueur d'onde, temps d'illumination, intensité lumineuse),
- Les propriétés de l'interaction tissus-lumière,
- Disponibilité en oxygène moléculaire.

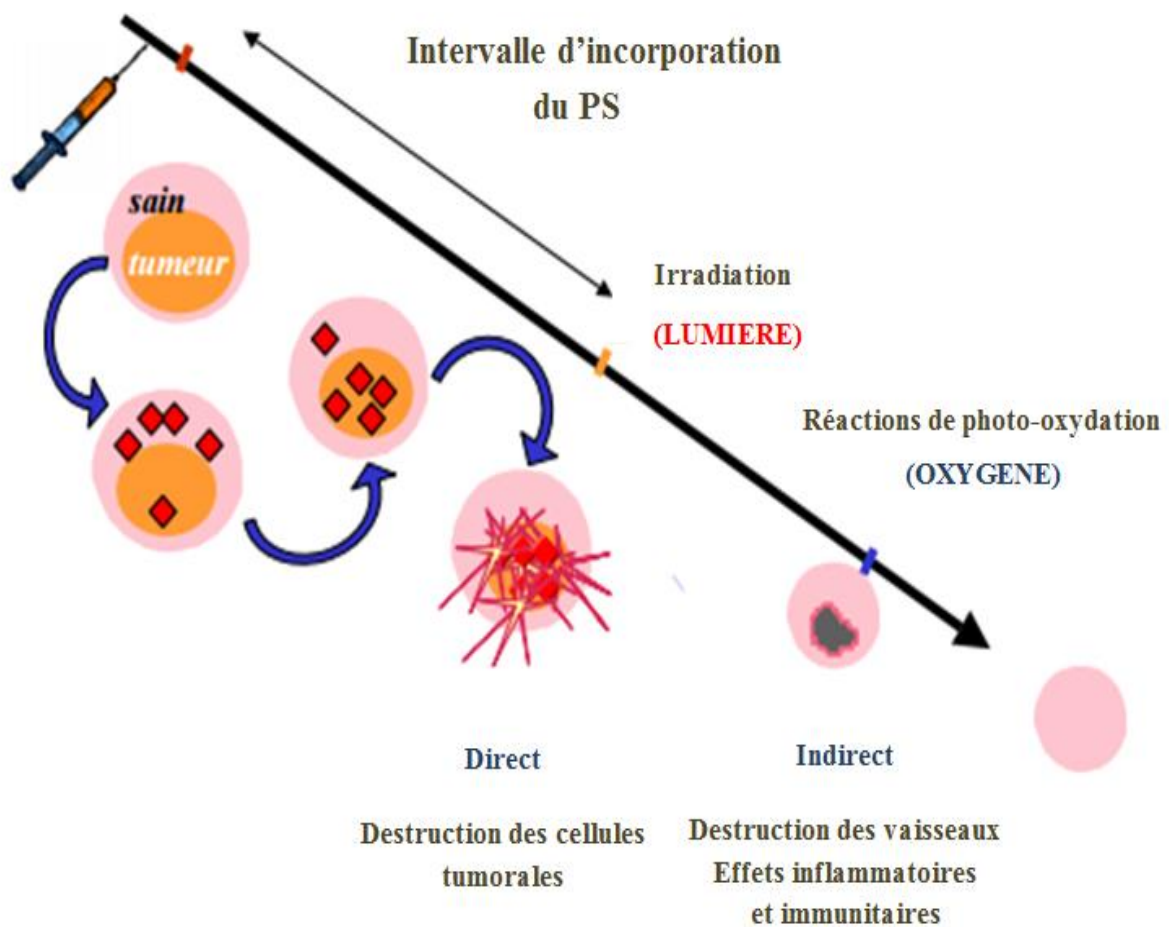


Figure 21: Principe de la thérapie photochimique

b. Champs de pratique :

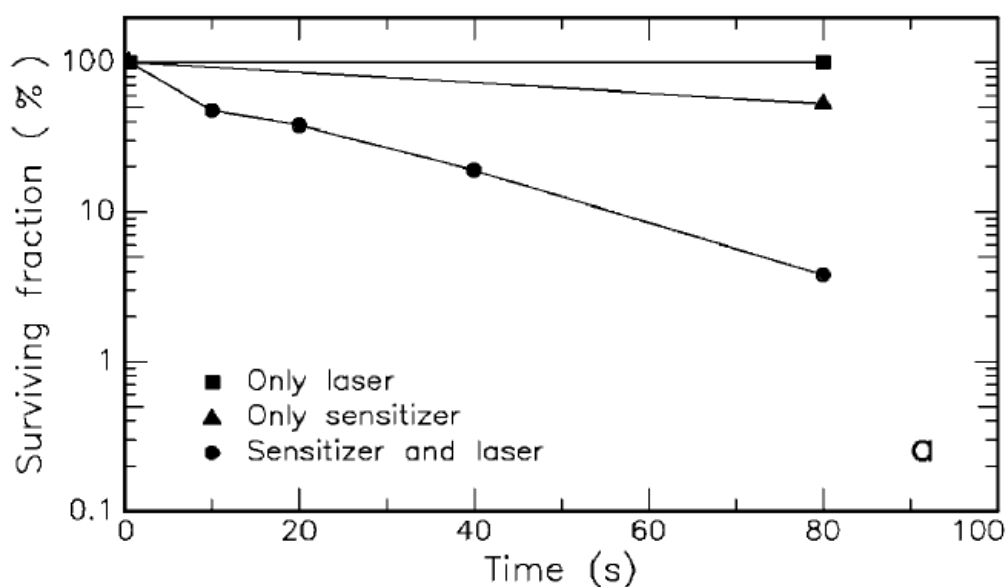
Après la première application endoscopique d'un photosensibilisateur dans le cas de cancer de la vessie humaine réalisé en 1976 par les Docteurs Kelly et Snell, l'idée de la thérapie

photodynamique est devenue l'un des principaux piliers du traitement moderne du cancer [23].

La thérapie photodynamique est réalisée comme suit : d'abord, un photosensibilisateur comme le Dérivé d'hématoporphyrine (HpD), est injecté dans une veine du patient (2,5 à 5 mg par kg de poids corporel) et dans quelques heures, l'HpD est distribué dans tous les tissus mous du corps sauf le cerveau. Le photosensibilisateur reste inactif jusqu'à l'irradiation par laser. Après 48 à 72 heures, la majeure partie est éliminée des tissus sains. Or, sa concentration dans les cellules tumorales ne diminue pas beaucoup, même après une période allant jusqu'à 10 jours. Ainsi, l'HpD ne s'accumule pas dans les cellules tumorales immédiatement après injection, mais ces cellules sont capables de stocker le HpD plus longtemps. Après environ trois jours, la concentration de HpD dans les cellules tumorales sont environ trente fois plus élevées que dans les cellules saines [23].

L'irradiation laser a généralement lieu après le troisième jour et jusqu'au septième. Dans cette période, les cellules tumorales sont encore très sensibles et la nécrose sélective est plus efficace. Cependant, de nombreux tissus sains peuvent retenir certains constituants de HpD et sont donc aussi photosensibilisés [23].

En 1993, Wilson B.C. et Patterson M.S. ont entrepris l'effet de différents photosensibilisateurs sur les bactéries de plaques dentaires (streptocoque). Certains de leurs résultats sont résumés dans la figure 22. De toute évidence, seule l'action combinée de photosensibilisateur et de l'exposition laser peut réduire considérablement la fraction des streptocoques [23].



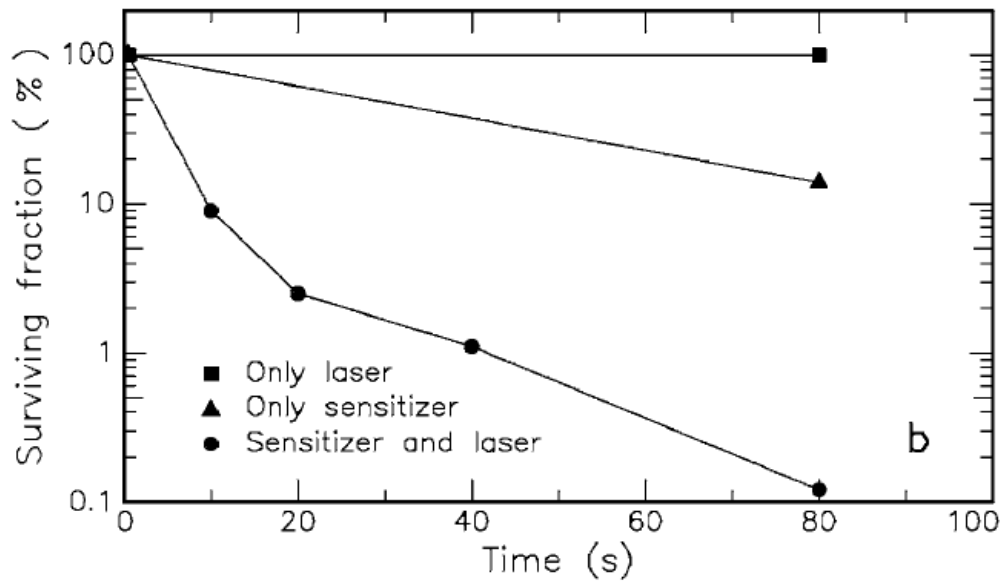


Figure 22 : (a) Effet du bleu de méthylène avec ou sans irradiation laser Hélium-Néon (puissance : 7,3 mW) sur les bactéries streptocoques (b) Effet de l'ester Hematoporphyrine avec ou sans irradiation laser Hélium-Néon (puissance : 7,3 mW) sur les bactéries streptocoques [23]



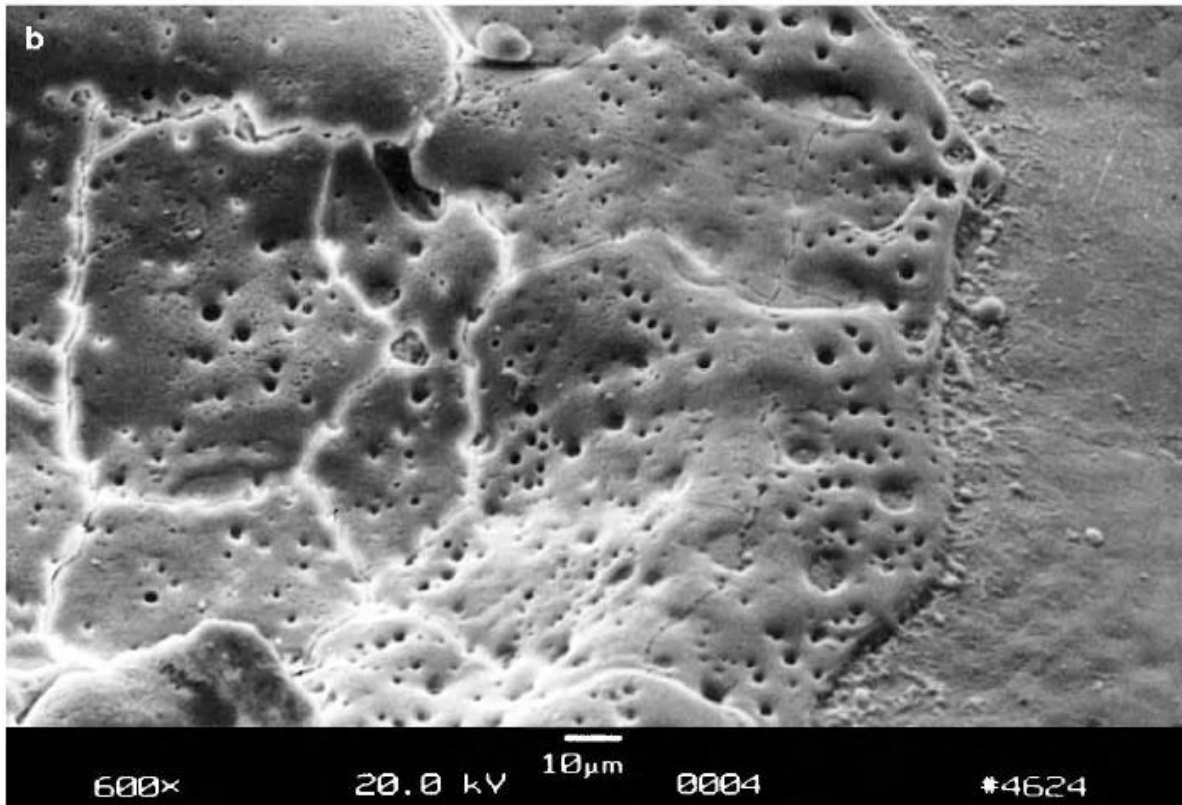


Figure 23 : (a) Fusion d'une partie de dent humaine par l'irradiation laser Ho:YAG (100 pulses, durée d'un pulse : 3,8 μ s, énergie par pulse : 18mJ, rampe de répétition : 1Hz). (b) zoom sur les bords de la zone fondue [23]

2. Effet Photoablatif

La photoablation est identifiée comme une photodécomposition ablatif, ce qui signifie que le matériau est décomposé lorsqu'il est exposé à une irradiation laser intense. Il se produit lorsque les photons énergétiques de la lumière laser décomposent les molécules en brisant les liaisons chimiques. Dans cette interaction, la photoablation est due à la "contrainte volumique" résultant de la rupture de la liaison.

L'élimination des tissus s'effectue d'une manière très propre et précise sans apparition de dommages thermiques tels que la coagulation ou la vaporisation. La photoablation a lieu dans la gamme d'intensité de 10^4 - 10^{10} Wcm^{-2} et le temps d'interaction dans la gamme de 10^{-3} - 10^{-10} s. Mais les valeurs du seuil typiques de ce type d'interaction sont de 10^7 - 10^8 Wcm^{-2} à des durées d'impulsion laser dans la plage des nanosecondes. La plupart des travaux d'ablation sont réalisés avec un laser à excimère UV.

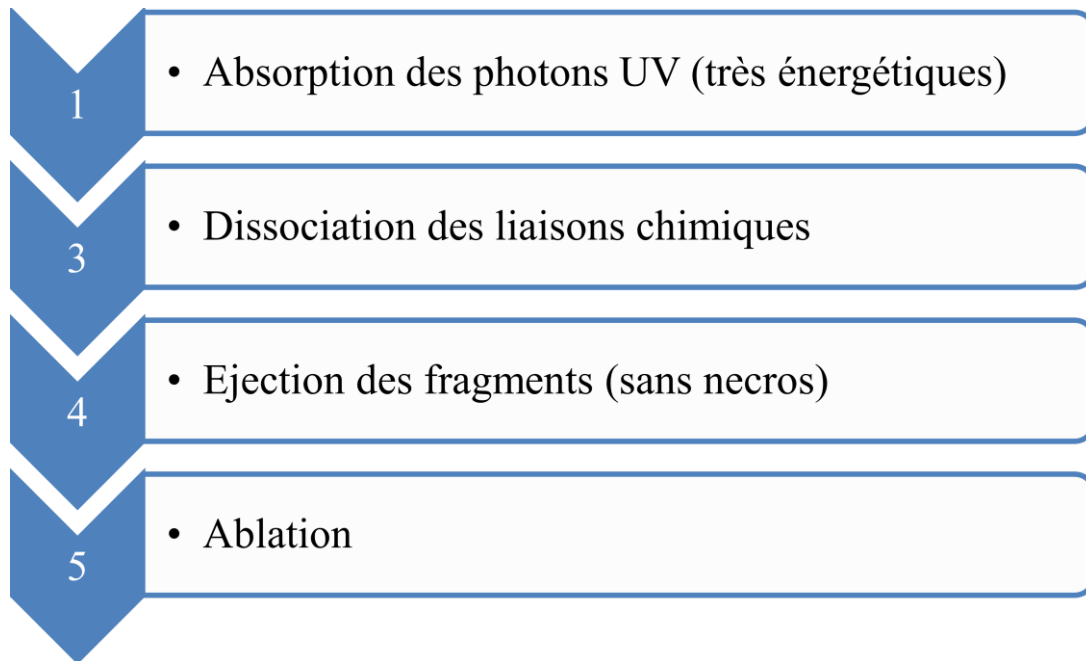


Figure 24 : Principes de la photoablation

3. Effet photomécanique

Les effets mécaniques sont obtenus avec des lasers déclenchés Nd:YAG qui émettent des impulsions extrêmement courtes, de l'ordre de la nanoseconde à la picoseconde sur de très petites surfaces. Le tissu cible reçoit une énorme quantité d'énergie qui n'a pas le temps de diffuser.

Ce confinement conduit à une violente élévation de la chaleur et de volume de la cible avec création d'un véritable traumatisme avec onde de choc. Cela induit, la création d'un plasma (état de la matière constitué de molécules chargées) du à l'ionisation des atomes et à la production d'un gradient de pression entre la zone ionisée et la zone périphérique.

Ces propriétés sont utilisées en médecine pour fragmenter des calculs ou pour détruire des pigments (mélanine dans la peau ou tatouages par pigments artificiels)[25].

4. Effet thermique

L'effet thérapeutique sur un tissu malade est lié directement à la quantité d'énergie déposée par un faisceau laser sur sa surface. Cette quantité d'énergie dépend des paramètres du laser (puissance du laser, diamètre du faisceau, longueur d'onde, taux de répétitions). Elle dépend aussi des coefficients optiques du tissu [25,80].

La conversion de la lumière absorbée en chaleur est un phénomène optique. Le transfert de cette chaleur par absorption et diffusion dans le tissu entraîne une élévation de température à travers un phénomène thermique. Ceci provoque la dénaturation des tissus et leur destruction à travers un phénomène biologique (Figure 25) [25,23,36,80].

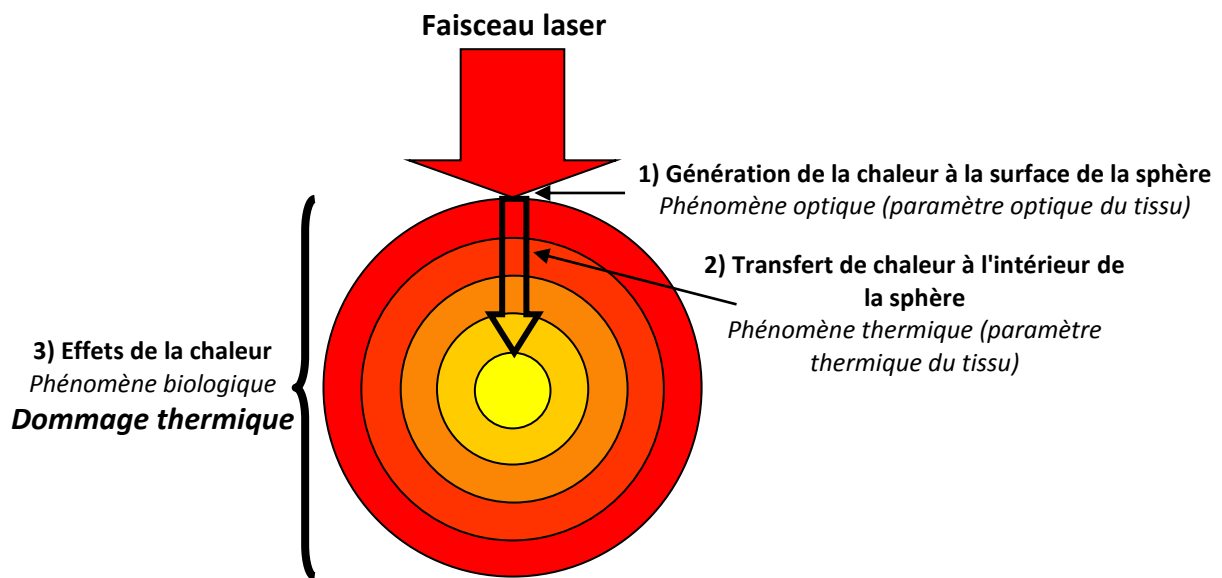


Figure 25 : Schéma des trois étapes de l'action thermique

4.1. Conversion de la lumière en chaleur : Aspect optique

a. Conversion de lumière en chaleur

La source de chaleur est induite par conversion de la lumière laser en chaleur, et ce processus se déroule comme suit : L'énergie apportée par un photon va conduire une molécule à un niveau d'énergie vibratoire et ensuite par collision inélastique avec une autre molécule à l'accroissement de l'énergie cinétique. Cette énergie est distribuée spatialement en fonction des paramètres lasers mais aussi des coefficients optiques du tissu. L'extinction du faisceau (la conversion des photons) sera proportionnelle à des coefficients d'absorption et de diffusion [23,36,80].

Exemples :

- Pour les longueurs d'onde inférieures à 590nm, l'hémoglobine est le chromophore prédominant et présente donc une forte absorption.

- Dans le rouge et le proche infra-rouge, le coefficient de diffusion contribue à environ 90 % à l'extinction du faisceau laser car ni le sang ni l'eau n'absorbent dans ce domaine de longueur d'onde.

- Pour les longueurs supérieures à 1,8 μm , l'absorption de l'eau est extrêmement importante et le coefficient d'absorption joue un rôle très important.

Un choix judicieux de la longueur d'onde vis-à-vis des dimensions de la cible, de sa position et ses coefficients optiques est essentiel pour l'effet de l'action thermique. Un vaisseau en profondeur sera, par exemple, touché par un faisceau-laser de longueur d'onde bien absorbée par l'hémoglobine mais peu par le tissu environnant.

b. Mécanismes de transfert de la chaleur

Ce transfert est essentiellement assuré par le mécanisme de conduction (l'agitation thermique qui se transmet de proche en proche, une molécule ou un atome cédant une partie de son énergie cinétique à son voisin), car l'influence de la circulation sanguine (transport par convection) est négligeable. La conduction peut être considérée comme un transfert d'énergie par interaction des particules du tissu [80].

Ce transfert se fait aléatoirement, des particules les plus énergétiques vers celles qui le sont moins et aboutit à un volume chauffé "secondaire" plus volumineux que la source "primaire" où s'est effectuée la conversion de la lumière en chaleur. C'est ce volume chauffé "secondaire" qu'il faut prendre en considération pour étudier la dénaturation du tissu [23,36].

c. Mécanisme de dénaturation tissulaire

La dénaturation du tissu est le résultat final de l'action thermique sur le tissu. La connaissance de la cinétique (il s'agit de l'étude de la vitesse de la réaction chimique) de cette transformation est nécessaire pour décrire le processus de dénaturation. Cette cinétique dépend de la température dans les tissus, de la durée de l'échauffement et de la susceptibilité du tissu à l'agression thermique [80].

On distingue 3 effets [23,36,80] :

1. **La volatilisation** correspond à une perte de substance immédiate ou les différents constituants tissulaires se volatilisent (figure 26 et 27). Elle est obtenue pour les températures allant de 100°C à 300°C.

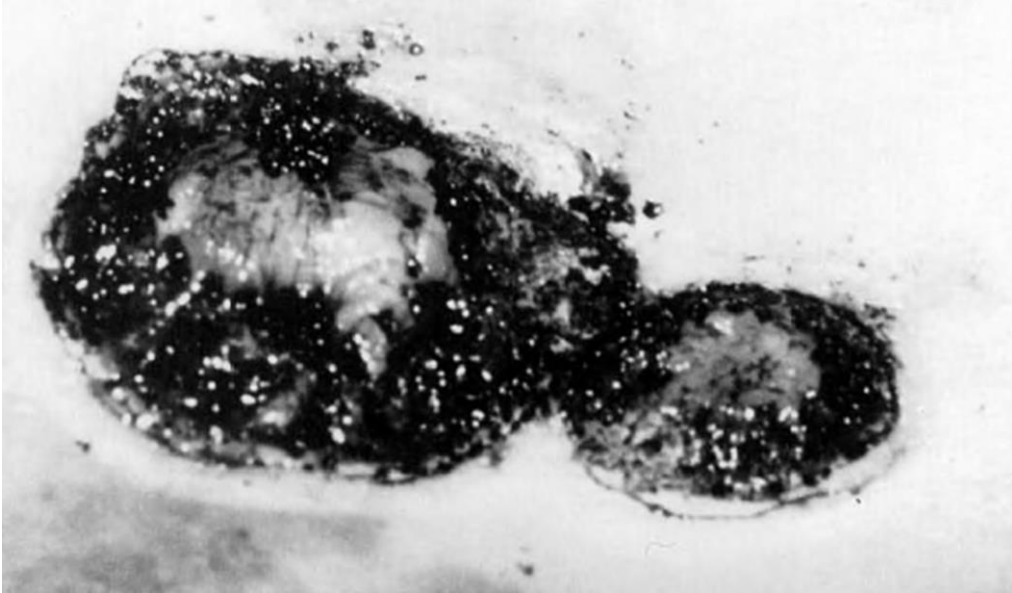


Figure 26 : Tumeurs métastasiqes situées sur la peau humaine carbonisées avec le Laser à CO₂ CW (Puissance : 40W). Photographiée par Dr. Kurek (Heidelberg) [23]

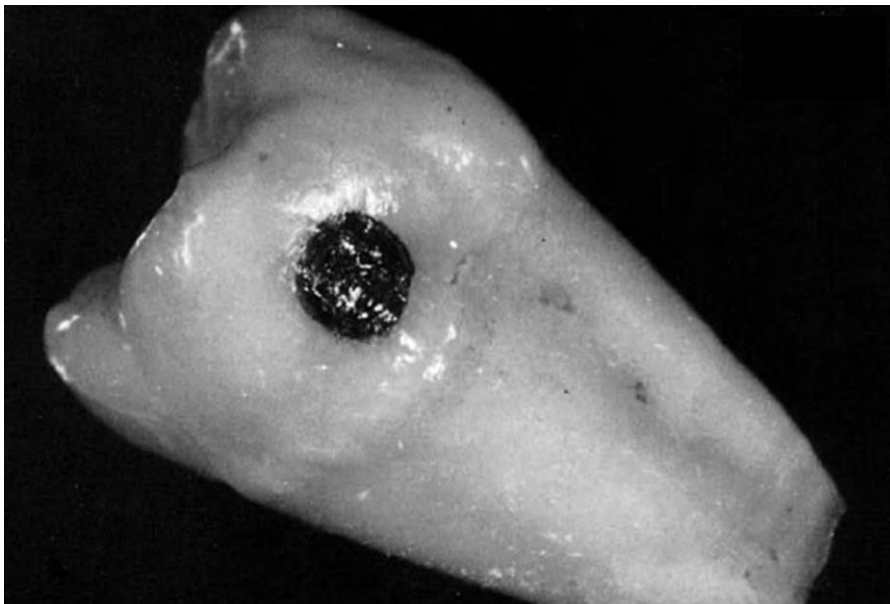


Figure 27 : Dent humaine carbonisée avec le Laser à CO₂ en mode continu (Puissance : 40W). Photographiée par Dr. Kurek (Heidelberg) [23]

2. **La coagulation** est obtenue avec des températures de l'ordre de 50°C à 99°C maintenues pendant une durée de l'ordre de la seconde. Il se produit une dessiccation (Élimination de

l'humidité de la peau) et une rétraction des tissus par dénaturation des protéines et du collagène (Figure 28, 29 et 30). En effet, les protéines sont formées de chaînes polypeptidiques dont la structure tertiaire est définie par des liaisons fortes (ponts disulfures) et faibles (liaisons hydrogènes). La chaleur n'altère pas les ponts disulfures, ni les liaisons covalentes, mais elle rompt les liaisons hydrogènes. Ainsi, la protéine est dénaturée. Les tissus vont secondairement s'éliminer (détersion, « nettoyage de la plaie ») avec apparition ensuite de processus de cicatrisation. La coagulation est utilisée soit pour détruire des phénomènes tumoraux, soit pour interrompre le flux sanguin dans des vaisseaux.

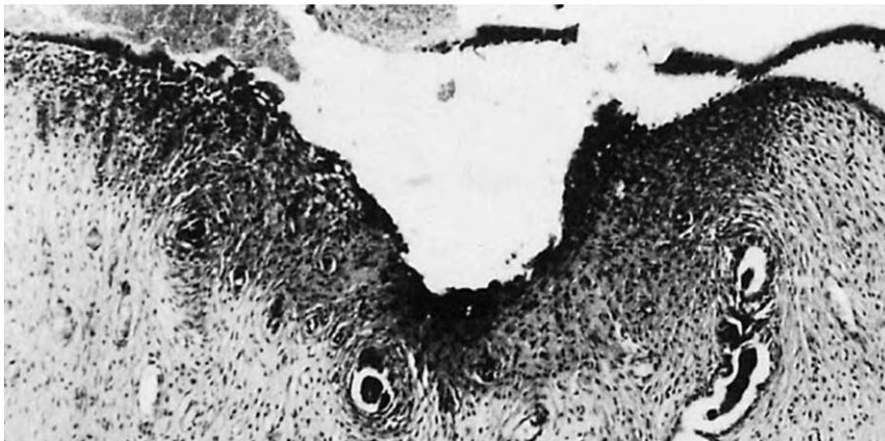


Figure 28 : Tissu utérin d'un rat de laboratoire, coagulé suite à l'effet thermique du Laser CO₂ CW de puissance 10W. Photographiée prise par Dr. Kurek (Heidelberg) [23]

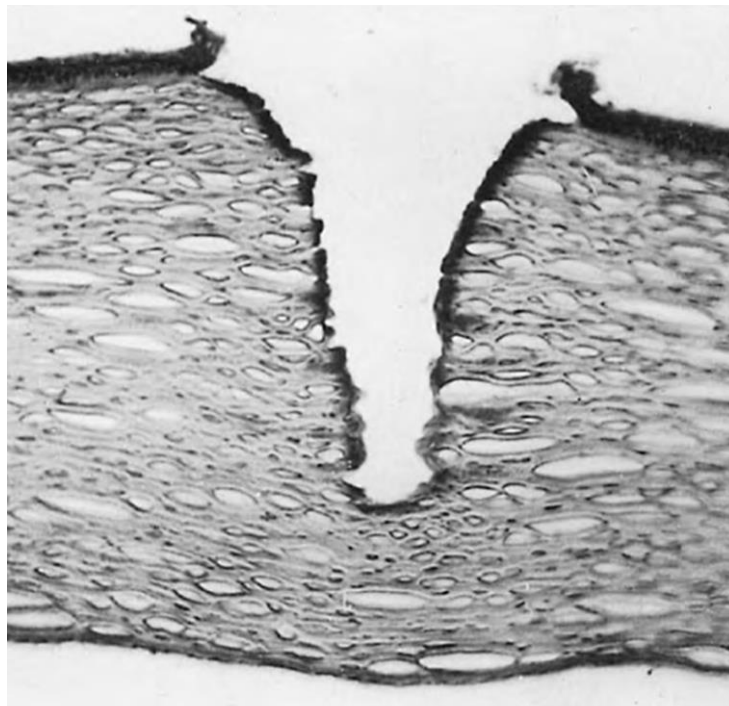


Figure 29 : Partie coagulée de la cornée humaine suite à l'application de 120 pulses avec un laser Er:YAG (durée de pulse 90 μs, énergie par pulse: 5 mJ, rampe de répétition : 1Hz) [23]

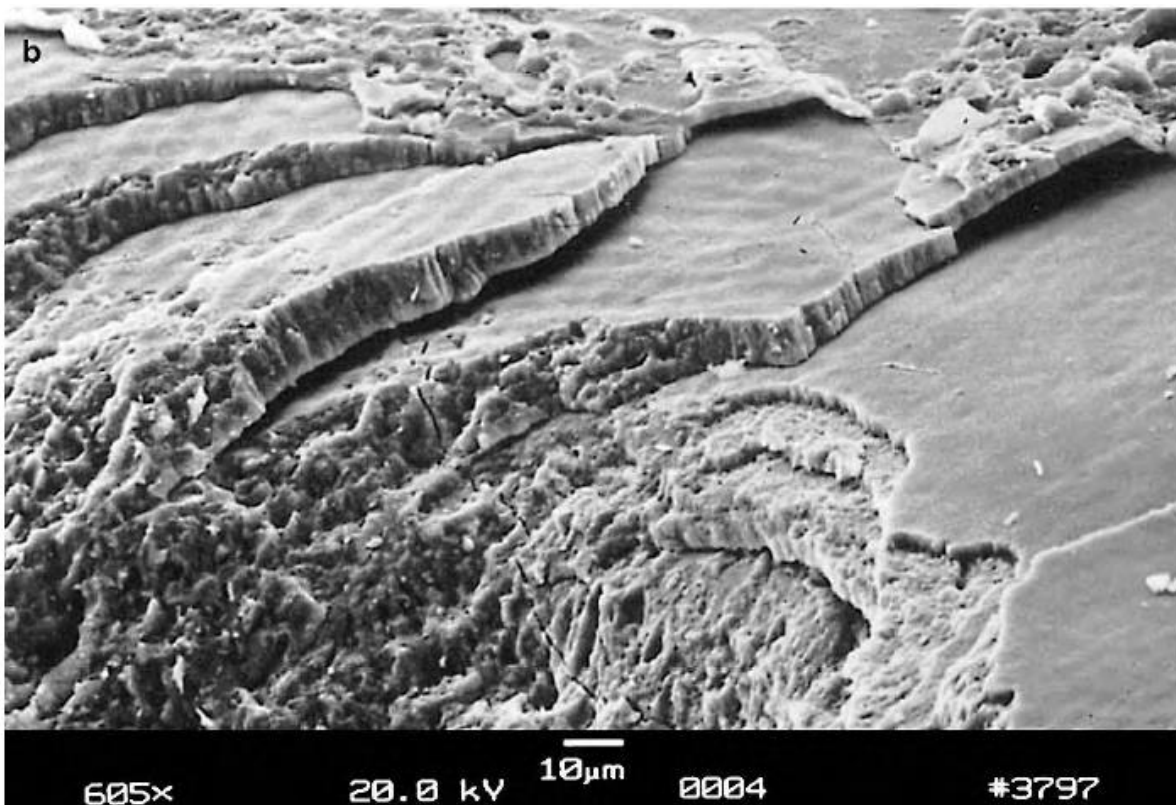
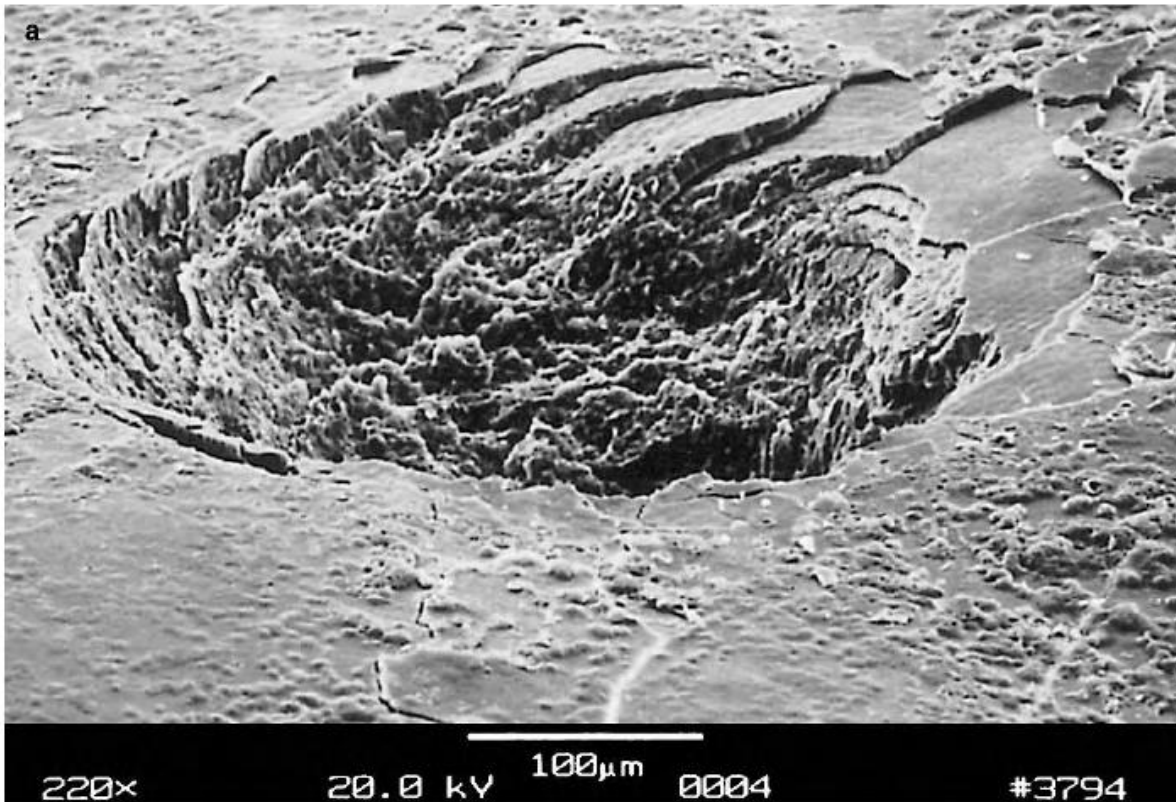


Figure 30 : (a) Partie d'une dent humaine fondue après 20 impulsions d'un laser Er: YAG (impulsion Durée : 90 μ s, énergie d'impulsion: 100 mJ, taux de répétition: 1Hz). b) Elargissement montrant le bord de l'ablation

3. Enfin, l'**hyperthermie** correspond à une élévation modérée de la température, de quelques degrés centigrades, correspondant à des températures de 41°C à 45°C maintenues pendant plusieurs dizaines de minutes. Elle entraîne une mort cellulaire retardée par atteinte des processus enzymatiques. Il s'agit d'un processus difficile à contrôler car ne s'accompagnant d'aucun effet visuel et il est donc peu utilisé en pratique.

VIII. Conclusion

L'interaction du rayonnement laser avec les tissus est très complexe et dépend de la durée d'exposition, de la puissance, de la longueur d'onde, du diamètre du faisceau, de l'incidence du faisceau, de la nature du tissu (absorption optique, propriétés thermiques, ...). Pour arriver au but, la directivité, la monochromaticité et la cohérence du faisceau sont essentielles.

Il existe quatre familles différentes de lasers, classifiées selon la nature du milieu excité : Laser à solide, laser à liquide, laser à gaz et laser à Semi-conducteur. Ils peuvent émettre une lumière continue ou impulsionnelle tel que les lasers femtoseconde.

Nous avons rappelé dans ce chapitre les principes généraux de l'interaction laser-tissus biologiques ainsi que les effets biologiques engendrés par cette interaction, à savoir :

- L'interaction photochimique,
- L'effet Photoablatif,
- L'effet photomécanique,
- L'effet thermique

Globalement, ces quatre effets sont couramment utilisés en médecine, même si les effets thermiques représentent la majorité des applications actuelles des lasers. Les principales disciplines concernées sont l'ophtalmologie, la dermatologie, et les applications endoscopiques (ORL, gynécologie, urologie, gastroentérologie,...).

Chapitre II :
Formulation mathématique

I. Introduction

Le transfert thermique est un processus complexe qui, dans le cas général, résulte de la superposition des trois modes fondamentaux de transfert : conduction, convection et rayonnement. Dans le cas où l'un de ces trois modes est prépondérant, les effets des autres sont faibles et ils peuvent être négligés, ce qui simplifie considérablement l'analyse du problème [1].

II. Mise en équation du Phénomène (Equation de la chaleur)

L'équation générale de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Cela se traduit par une constante d'intégration dans le temps et deux constantes d'intégrations dans chaque direction de l'espace. Elle admet en principe une infinité de solutions. Pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace à un temps donné pris pour origine (conditions initiales), ainsi que les lois de variations de la température T (ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié (conditions aux limites) [39].

1. Flux de chaleur à travers une surface

C'est la quantité de chaleur qui traverse la surface considérée pendant l'unité de temps. Son unité est le Watt (W).

$$d\phi = \frac{d^2Q}{dt} \quad (\text{II.1})$$

D'où la densité de flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{d\phi}{dS} \quad (\text{II.2})$$

2. Loi de Fourier

Considérons un milieu solide dans lequel une surface élémentaire dS est orientée par sa normale unitaire \vec{n} .

La quantité de chaleur d^2Q qui traverse la surface dS pendant l'intervalle de temps dt dans le sens de la normale \vec{n} est donné par la loi de Fourier :

$$d^2Q = -K. \overrightarrow{\text{grad}}(T). \vec{n}. dS. dt \quad (\text{II.3})$$

3. Etablissement de l'équation générale

Nous allons par application de la formule de Fourier calculer la quantité de chaleur d^2Q_1 qui pénètre dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps dt , donc dans le sens opposé à la normale n . le signe (-) disparaît donc de la formule :

$$d^2Q_1 = K. \overrightarrow{\text{grad}}(T). \vec{n}. dS. dt \quad (\text{II.4})$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface Σ pendant dt est alors donné par :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} K. \overrightarrow{\text{grad}}(T). \vec{n}. dS. dt \quad (\text{II.5})$$

Transformons cette intégrale de surface en une intégrale de volume en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} K. \overrightarrow{\text{grad}}(T). \vec{n}. dS. dt = \iiint_{\Delta} \text{div}(K. \overrightarrow{\text{grad}}(T)). dV. dt \quad (\text{II.6})$$

Où dV est un élément de volume pris à l'intérieur de Δ .

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q_2 créée dans le volume Δ . En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse. Soit $P(x,y,z,t)$ le flux de chaleur créé par unité de volume. Q_2 est alors donnée par la formule :

$$Q_2 = \iiint_{\Delta} P(x, y, z, t). dV. dt \quad (\text{II.7})$$

Faisons maintenant le bilan énergétique pour le volume Δ , ce qui nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (\text{II.8})$$

Où Q_3 représente la quantité de chaleur nécessaire à la variation de la température du volume :

$$Q_3 = \iiint_{\Delta} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dt dV \quad (\text{II.9})$$

D'où l'équation bilan :

$$\iiint_{\Delta} \text{div} \left(K \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) \cdot dV \cdot dt + \iiint_{\Delta} P(x, y, z, t) \cdot dV \cdot dt = \iiint_{\Delta} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dt dV \quad (\text{II.10})$$

Ou encore :

$$\text{div} \left(K \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) + P(x, y, z, t) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

Finalement, le transfert d'énergie dans chaque point du tissu biologique soumis au rayonnement laser est régi par l'équation de chaleur :

$$K \cdot \Delta T + \text{div}(\overrightarrow{K}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) + P = \rho C \frac{\delta T}{\delta t} \quad (\text{II.12})$$

Avec :

ΔT : Laplacien de la température,

P : Terme source [$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$],

ρ : Masse volumique [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$],

C : Chaleur spécifique [$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$], (Chaleur spécifique moyenne $C = C_p = C_v$)

K : Conductivité thermique [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$],

T : Température dans le solide [K],

t : Temps [s].

Une autre grandeur physique peut être utilisée, c'est la diffusivité thermique déterminée par :

$$D = \frac{K}{\rho C} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$$

Ces propriétés varient avec la température. Dans le cas général, et afin de réduire la complexité des équations à résoudre, on supposera pour le modèle analytique étudié que ces propriétés thermophysiques sont constantes.

III. Equation de la chaleur en coordonnées sphériques

L'expression générale du Laplacien en coordonnées sphériques se déduit de celui en coordonnées cartésiennes en utilisant les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Le Laplacien est déterminé sous la forme :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (\text{II.14})$$

Et le gradient sous la forme :

$$\vec{\nabla T} = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (\text{II.15})$$

1. Etude dimensionnelle de l'équation de chaleur :

Comme vu précédemment l'équation de chaleur en coordonnées sphériques s'écrit sous la forme :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Pour simplifier la démarche de résolution on va dresser deux hypothèses :

✓ **Première Hypothèse :**

Dans le cas particulier important d'un matériau homogène et isotrope, le coefficient K pouvant être considéré comme constant (ne varie pas avec la température ou sa variation est négligeable).

L'expression précédente devienne alors :

$$K. \Delta T + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.16})$$

En coordonnées sphériques (r, θ , Φ) :

$$K. \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

Ou :

$$D. \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{\rho C} P = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

Avec : $D = \frac{K}{\rho C}$

✓ **Deuxième Hypothèse :**

Dans la première partie de cette thèse on va traiter l'équation de chaleur dans le cas d'une symétrie sphérique centrale $T=f(r)$, l'équation résultante est sous la forme :

$$K. \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.19})$$

Ou encore :

$$D. \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\rho C} P = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.20})$$

2. Etude adimensionnelle de l'équation de chaleur :

L'adimensionnalisation consiste à faire apparaître des groupements de nombres qui n'ont pas de dimension dans les équations. Cette technique sert à résoudre les équations complexes qui n'ont pas de solution analytique (dérivées partielles, non-linéarité, ...). Selon la valeur des groupements, il est possible de déterminer les effets prépondérants dans le phénomène traité et ainsi de ne résoudre que les parties correspondantes dans les équations.

Dans cette deuxième partie, on cherchera une forme adimensionnelle de l'équation de chaleur.

A partir de l'équation (II.17), on a :

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + P(r) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose :

$$\hat{K} = \frac{K}{K_0} ; \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \hat{T} = \frac{T}{T_0} ; \hat{r} = \frac{r}{R_0} ; \hat{t} = \frac{t}{t_0} ; \hat{\alpha} = \alpha \cdot R_0$$

En substituant dans l'équation (II.17) :

$$\hat{K} \cdot K_0 \left(\frac{\partial^2 (\hat{T} \cdot T_0)}{\partial (\hat{r} \cdot R_0)^2} + \frac{2}{\hat{r} \cdot R_0} \frac{\partial (\hat{T} \cdot T_0)}{\partial (\hat{r} \cdot R_0)} + \frac{1}{(\hat{r} \cdot R_0)^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial (\hat{T} \cdot T_0)}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\hat{r} \cdot R_0)^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 (\hat{T} \cdot T_0)}{\partial \varphi^2} \right) + P(\hat{r} \cdot R_0) = \hat{\rho} \cdot \rho_0 \cdot C \frac{\partial (\hat{T} \cdot T_0)}{\partial (\hat{t} \cdot t_0)}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\hat{K} \cdot K_0 \left(\frac{T_0}{R_0^2} \frac{\partial^2 (\hat{T})}{\partial (\hat{r})^2} + \frac{2}{\hat{r} \cdot R_0} \frac{T_0}{R_0} \frac{\partial (\hat{T})}{\partial (\hat{r})} + \frac{T_0}{(\hat{r} \cdot R_0)^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial (\hat{T})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{T_0}{(\hat{r} \cdot R_0)^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 (\hat{T})}{\partial \varphi^2} \right) + \\ P(\hat{r} \cdot R_0) = \hat{\rho} \cdot \rho_0 \cdot C \frac{T_0}{t_0} \frac{\partial (\hat{T})}{\partial (\hat{t})} \quad (\text{II.18})$$

IV. Terme source

Représente la densité de puissance absorbée par un volume unitaire du tissu en un point, elle dépend des interactions entre la lumière laser et le tissu biologique.

On a vu précédemment que le rayonnement laser incident d'intensité I_0 absorbé à la surface, s'infiltrer à l'intérieur du tissu biologique, entraînant la diminution de l'intensité du faisceau :

$$I(r) = I_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot r) \quad (\text{II.19})$$

La puissance volumique P correspondante s'écrit sous la forme :

$$P(r, t) = (1 - R) \cdot I(t) \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha r) (\text{W.cm}^{-3}) \quad (\text{II.20})$$

En mode continu :

$$P(r) = (1 - R) \cdot I_0 \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha r) (\text{W.cm}^{-3}) \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$I(t)$: L'intensité du laser incident en fonction du temps,

r : Distance de pénétration à l'intérieur du matériau,

α : Coefficient d'absorption,

R : Coefficient de Réflexion,

$I_0 = \frac{P}{\pi(d/2)^2}$: Densité de puissance au centre du faisceau,

P : Puissance du faisceau laser,

d : Diamètre du spot.

Sous la forme adimensionnelle, le terme source s'écrit :

$$P(\hat{r} \cdot R_0) = (1 - R) \cdot I_0 \cdot \frac{\hat{\alpha}}{R_0} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \quad (\text{II.22})$$

\hat{r} : Distance adimensionnelle de pénétration à l'intérieur du matériau,

$\hat{\alpha}$: Coefficient adimensionnel d'absorption,

En introduisant ce terme dans l'équation (II.18), on aura :

$$\begin{aligned} \hat{K}.K_0.\frac{T_0}{R_0^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \\ + (1-R) \cdot \frac{\hat{I}_0 \cdot T_0 \cdot K_0}{R_0} \cdot \frac{\hat{\alpha}}{R_0} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \hat{\rho} \cdot \rho_0 \cdot C \frac{T_0}{t_0} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \end{aligned}$$

L'équation devienne :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{K}.K_0.t_0}{\hat{\rho} \cdot \rho_0 \cdot C \cdot R_0^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) + \\ \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot t_0 \cdot \hat{\alpha} \cdot K_0}{\hat{\rho} \cdot \rho_0 \cdot C} \cdot \frac{\exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r})}{R_0^2} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \quad (\text{II.23}) \end{aligned}$$

En intégrant le terme de diffusivité D :

$$D = \frac{K_0}{\rho_0 \cdot C}$$

L'équation devienne :

$$\begin{aligned} D \cdot \frac{\hat{K}.t_0}{\hat{\rho} \cdot R_0^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) + \\ \frac{(1-R) \cdot D \cdot \hat{I}_0 \cdot t_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r})}{R_0^2} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \quad (\text{II.24}) \end{aligned}$$

On introduit le nombre adimensionnel de Fourier :

$$Fo = \tau = \frac{D \cdot t_0}{R_0^2} \quad (\text{II.25})$$

L'équation finale s'écrit sous la forme :

$$\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \quad (\text{II.26})$$

V. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi l'équation sous la forme dimensionnelle et adimensionnelle qui décrit les interactions entre le rayonnement laser et les tissus biologiques (le phénomène de convection à la surface est supposé négligeable). La résolution de cette équation non linéaire nécessite l'utilisation des méthodes numériques objet du troisième chapitre.

Chapitre III :
Méthode de résolution
numérique

I. Introduction

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique, modèle de pensée ou raisonnement).

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...).

L'une des solutions est de recourir à une série d'expériences pour analyser les paramètres et grandeurs du système. Mais les essais peuvent s'avérer très coûteux et ils peuvent être très dangereux. Enfin il peut être difficile de mesurer tous les paramètres : échelles du problème trop petites (comme l'étude de couche limite en mécanique de fluide...) ou trop grandes (astrophysique, météorologie, géophysique...).

On peut aussi construire un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène physique. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage). Dans certains cas il s'agit de la seule alternative.

Dans d'autres cas, les simulations numériques sont menées en parallèle avec des expérimentations [40,41,74,75].

Parmi ces méthodes numériques, on distingue :

- Méthode des différences finies,
- Méthode des éléments finis,
- Méthode des volumes finis,
- Méthode spectrales, ...

Les différentes étapes pour modéliser un système complexe [40,41,74,75]:

- ✓ Recherche d'un modèle mathématique représentant le phénomène physique et mise en équation,
- ✓ Elaboration d'un maillage puis discrétisation des équations,

- ✓ Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre),
- ✓ Programmation des relations discrètes,
- ✓ Simulation numérique et exploitation des résultats.

II. La méthode des volumes finis

1. Principe de la méthode

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar.

La méthode à volumes finis a écarté les méthodes classiques basées sur les différences finies surtout dans le traitement des problèmes tridimensionnelles complexes.

La démarche de cette technique comprend deux étapes importantes [40,41,75]:

- Maillage : cette première étape consiste à diviser le domaine en plusieurs intervalles réguliers ou irrégulier appelés volumes de contrôle.
- Discrétisation : Cette étape comporte l'intégration de l'équation dans les volumes de contrôle.

La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC) [40,41,74,75].

2. Etude d'un problème de diffusion à une dimension

Pour bien comprendre le principe de la méthode des volumes finis, nous allons étudier un exemple de problème de diffusion dans le cas stationnaire [40,41].

Soit le problème de transport de la variable Φ par diffusion régi par l'équation suivante :

$$\text{div} \left(K \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) + S_T = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où : λ est le coefficient de diffusion et S_T le terme source.

A une dimension, l'équation s'écrit sous la forme suivante [40,41] :

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{III.2})$$

a. Maillage

Le domaine de calcul est discrétisé en nombre fini de points, s'appelant les nœuds du maillage, autour desquels on définit des segments élémentaires réguliers ou non réguliers appelés volumes de contrôles [40,41,75].

Les nœuds situés au centre des volumes des contrôles appelés nœuds principaux désigné par P. Les centres des volumes de contrôles voisins à sa droite et sa gauche sont désignés par E et O (nœud "Est" et nœud "Ouest"). On désigne par Δx la largeur du volume de contrôle étudié, il s'appelle aussi le pas de discrétisation. On désigne par "e" et "o" les extrémités du volume de contrôle (interface "est" et interface "ouest") [40,41,74,75].

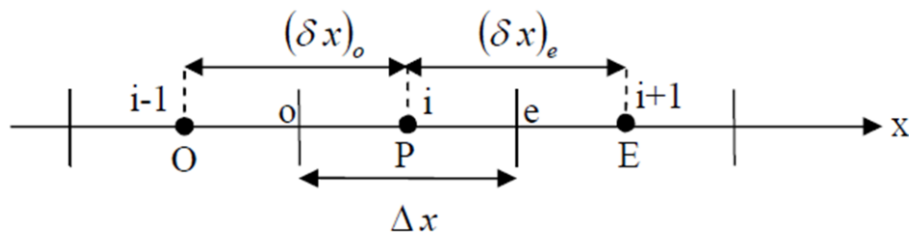


Figure 31 : Volume de contrôle

Avec :

Δx : Volume de contrôle,

i : Indice de discrétisation suivant l'axe (ox).

Remarque : Dans le cas d'un maillage régulier, $(\delta x)_o = (\delta x)_e = \Delta x$.

b. Discrétisation

L'intégration de l'équation sur le volume de contrôle de centre P donne [40,41]:

$$\int_o^e \frac{d}{dx} \left(K \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_o^e S dx = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$\iff \left[K \frac{dT}{dx} \right]_o^e + \bar{S} \Delta V = 0$$

$$\iff \left[K \frac{dT}{dx} \right]_e - \left[K \frac{dT}{dx} \right]_o + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.5})$$

Où : \bar{S} est la valeur moyenne de la source et ΔV le volume de contrôle correspondant.

Dans le cas unidimensionnel, $\Delta V = \Delta x$.

Le terme source peut dépendre de la fonction T elle-même, et dans ce cas :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p T_p$$

Et puisque le coefficient de diffusivité n'est pas toujours constant. Ses valeurs sur les facettes « e » et « o » du volume de contrôle sont exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux « P », « O » et « E » par les relations suivantes [40,41] :

$$K_e = \frac{K_E + K_P}{2} \quad \text{et} \quad K_o = \frac{K_P + K_O}{2} \quad (\text{III.6})$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations [40,41] :

$$\left[K \frac{dT}{dx} \right]_e = K_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) \quad (\text{III.7})$$

$$\left[K \frac{dT}{dx} \right]_o = K_o \left(\frac{T_P - T_O}{\Delta x} \right) \quad (\text{III.8})$$

On obtient l'équation suivante :

$$K_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - K_o \left(\frac{T_P - T_O}{\Delta x} \right) + (S_u + S_p T_p) = 0 \quad (\text{III.9})$$

Après arrangement on trouve :

$$a_p T_p = a_o T_o + a_e T_e + S_u \quad (\text{III.10})$$

Avec :

$$a_o = \frac{K_o}{\Delta x} \quad (\text{III.11}) \quad a_e = \frac{K_e}{\Delta x} \quad (\text{III.12}) \quad a_p = a_e + a_o - S_p \quad (\text{III.13})$$

Puisque les volumes de contrôle sont choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice i, le nœud O, la position d'indice i-1, le nœud E, la position d'indice i+1, etc. L'équation peut se mettre alors sous la forme [40,41,74,75] :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1} + S_u \quad (\text{III.14})$$

L'équation est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites. Afin de tenir compte des conditions aux limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières.

Le système d'équations résultant est un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues [40,41,74,75].

3. Cas d'un problème instationnaire

Les deux étapes développées précédemment (maillage puis discrétisation) sont les mêmes que dans le cas des problèmes stationnaires. La différence majeure repose sur l'intégration qui se fait aussi sur l'intervalle du temps $[t, t+\Delta t]$ [40,41,74,75].

La méthode des volumes finis permet, en général, une permutation suivant le temps et suivant l'espace.

On a :

$$\int_t^{t+\Delta t} f dt = [\alpha f^{t+\Delta t} + (1 - \alpha) f^t] \Delta t \quad (\text{III.15})$$

Avec :

f^t : Quantité de la fonction f au temps « t »,

$f^{t+\Delta t}$: Quantité de la fonction f au temps « $t + \Delta t$ »,

α : Nombre réel tel que : $0 \leq \alpha \leq 1$.

Dans notre étude nous nous baserons sur le cas où $\alpha=1$. Dans ce cas :

$$\int_t^{t+\Delta t} f dt = f^{t+\Delta t} \Delta t, \text{ correspondant à la méthode dite implicite [40,41,74].}$$

III. Cas d'une structure sphérique

1. Maillage

Le domaine est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle qui sont alors constitués d'éléments de surface réguliers. Le maillage à la forme suivante [40,41,75] :

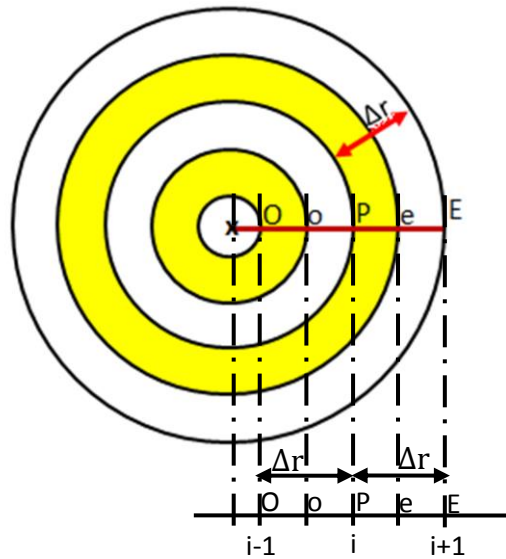


Figure 32 : Projection du segment

Où :

P : Nœud principal,

i : Indice de discrétisation suivant l'axe des "r",

En général, les lettres E, O, représentent respectivement l'Est et l'Ouest et les segments [PE] et [OP] valent Δr .

Nous avons:

- Suivant l'axe des "r":

$$i = [1 \ i_{\max}], r(i) = (i-1) \cdot \Delta r \text{ avec } \Delta r = \frac{R}{(i_{\max} - 1)}$$

- Suivant le temps "t" :

$$t = (k - 1) \cdot \Delta t \text{ avec } \Delta t = \frac{t_{\max}}{(k_{\max} - 1)}$$

2. Discrétisation

2.1. Forme dimensionnelle de l'équation de chaleur

L'équation de la chaleur réduite par les hypothèses dressées auparavant, sera résolue en appliquant la méthode des volumes finis, en tenant compte des conditions aux limites.

$$K \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.16})$$

On intègre suivant le volume de contrôle de centre P et le volume de domaine de temps, puis, on multiplie cette équation par (dt.dv) :

$$\int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} K \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] dv dt + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} P dv dt = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv dt \quad (\text{III.17})$$

En coordonnées sphériques : $dv = 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$

$$\int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} K \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \cdot r^2 \cdot dr dt + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} P r^2 \cdot dr dt = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} r^2 \cdot dr dt \quad (\text{III.18})$$

$$\int_0^e \int_t^{t+\Delta t} K \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \cdot dr dt + \int_0^e \int_t^{t+\Delta t} P r^2 \cdot dr dt = \int_0^e \int_t^{t+\Delta t} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} r^2 \cdot dr dt$$

$$\int_0^e \int_t^{t+\Delta t} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} r^2 \cdot dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_0^e \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot r^2 dr \right] dt$$

On a : $\int_0^e r^2 dr = r_p^2 \Delta r \quad (\text{III.19})$

On aura :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_0^e \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot r^2 dr \right] dt = \rho C \cdot r_p^2 \Delta r (T_p^{t+\Delta t} - T_p^t) \quad (\text{III.20})$$

Avec: $T_p^{t+\Delta t}$ est la température à l'instant $t+\Delta t$ et T_p^t est la température à l'instant précédent t .

Calcul du terme : $\int_0^e \int_t^{t+\Delta t} P \cdot r^2 \cdot dr dt$

On a :

$$\int_0^e \int_t^{t+\Delta t} P \cdot r^2 \cdot dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_0^e P \cdot r^2 \cdot dr \right] dt = P \cdot r_p^2 \Delta r \Delta t \quad (\text{III.21})$$

Calcul du terme : $\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_0^e K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot dr \right] dt$

On a :

$$\int_0^e K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot dr = \left[K \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right]_0^e = \left[K \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right]_0^e$$

On sait que :

$$\left[K \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right]_0^e = K \cdot \left[r_e^2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - r_o^2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_o \right] \text{ (K constant)}$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = \frac{T_E - T_p}{\Delta r} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_o = \frac{T_p - T_o}{\Delta r}$$

Donc :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^e K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot dr dt = K \int_t^{t+\Delta t} \left[r_e^2 \cdot \left(\frac{T_E - T_p}{\Delta r} \right) - r_o^2 \cdot \left(\frac{T_p - T_o}{\Delta r} \right) \right] dt$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_0^e K \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot dr dt = K \cdot \left[r_e^2 \cdot \left(\frac{T_E - T_p}{\Delta r} \right) \Delta t - r_o^2 \cdot \left(\frac{T_p - T_o}{\Delta r} \right) \Delta t \right] \quad \text{(III.22)}$$

On simplifiant, on obtient :

$$K \cdot r_e^2 \cdot \left(\frac{T_E - T_p}{\Delta r} \right) \Delta t - K \cdot r_o^2 \cdot \left(\frac{T_p - T_o}{\Delta r} \right) \Delta t + P \cdot r_p^2 \Delta r \Delta t = \rho C \cdot r_p^2 \Delta r (T_p - T_p^0) \quad \text{(III.23)}$$

On arrangeant les regroupements de termes :

$$\begin{aligned}
T_p^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_e^2 + \frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_o^2 + \rho C. r_p^2 \Delta r \right) \\
= \frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_e^2. T_E^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_o^2 T_o^{t+\Delta t} + P. r_p^2 \Delta r \Delta t + \rho C. r_p^2 \Delta r T_p^t
\end{aligned}
\tag{III.24}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$a_p T_p^{t+\Delta t} + a_E T_E^{t+\Delta t} + a_o T_o^{t+\Delta t} = d \tag{III.25}$$

ou

$$a_i T_i^{k+1} + a_{i+1} T_{i+1}^{k+1} + a_{i-1} T_{i-1}^{k+1} = d_i^k \tag{III.26}$$

Avec:

$$\bullet a_p = \frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_e^2 + \frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_o^2 + \rho C. r_p^2 \Delta r = \frac{\Delta t}{\Delta r} K. (r_e^2 + r_o^2) + \rho C. r_p^2 \Delta r \tag{III.27}$$

$$\bullet a_E = -\frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_e^2 \tag{III.28}$$

$$\bullet a_o = -\frac{\Delta t}{\Delta r} K. r_o^2 \tag{III.29}$$

$$\bullet d = P. r_p^2 \Delta r \Delta t + \rho C. r_p^2 \Delta r T_p^t \tag{III.30}$$

Avec :

$$r_e = \frac{r_E+r_p}{2} ; r_o = \frac{r_o+r_p}{2} \tag{III.31}$$

La résolution de l'équation algébrique se fait par la méthode du double balayage.

2.2. Forme adimensionnelle

a. Cas de symétrie sphérique centrale :

L'équation de la chaleur réduite par la symétrie sphérique centrale, sera résolue en appliquant la méthode des volumes finis, en tenant compte des conditions aux limites.

$$\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \quad (\text{III.16})$$

On intègre suivant le volume de contrôle de centre P et le volume de domaine de temps, puis, on multiplie cette équation par $(d\hat{v} \cdot d\hat{t})$:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) d\hat{v} \cdot d\hat{t} + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) d\hat{v} \cdot d\hat{t} \\ = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} d\hat{v} \cdot d\hat{t} \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques : $d\hat{v} = 4\pi \cdot \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot d\hat{r}$

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \cdot 4\pi \cdot \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} \\ + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \cdot 4\pi \cdot \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} \\ = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \cdot 4\pi \cdot \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} \\ = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} \cdot d\hat{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \int_{\hat{r}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} + \Delta \hat{t} \cdot \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \int_{\hat{r}} \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} \\ = \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} d\hat{t} \end{aligned}$$

Intégration terme par terme, donne :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{r}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} = \int_{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r}^2 \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \cdot d\hat{r} \\ = \hat{r}_e^2 \cdot \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right)_e - \hat{r}_o^2 \cdot \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right)_o = \hat{r}_e^2 \left(\frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta \hat{r}} \right) - \hat{r}_o^2 \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta \hat{r}} \right) \end{aligned}$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right)_e = \frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta \hat{r}} \text{ et } \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right)_o = \frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta \hat{r}}$$

$$\int_{\hat{r}} \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} = \hat{r}_p^2 \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \Delta \hat{r}$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} d\hat{t} = \hat{T}_p^{t+\Delta t} - \hat{T}_p^t$$

En introduisant les résultats dans l'équation :

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \left[\hat{r}_e^2 \left(\frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta \hat{r}} \right) - \hat{r}_o^2 \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta \hat{r}} \right) \right] \cdot \Delta \hat{t} + \hat{r}_p^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \\ = \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot [\hat{T}_p^{t+\Delta t} - \hat{T}_p^t] \end{aligned}$$

Avec: $\hat{T}_p^{\hat{t}+\Delta \hat{t}}$ est la température à l'instant $\hat{t} + \Delta \hat{t}$ et $\hat{T}_p^{\hat{t}}$ est la température à l'instant précédent \hat{t} .

On simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \left[\widehat{r}_e^2 \left(\frac{\widehat{T}_E^{t+\Delta t} - \widehat{T}_P^{t+\Delta t}}{\Delta \widehat{r}} \right) - \widehat{r}_o^2 \left(\frac{\widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \widehat{T}_O^{t+\Delta t}}{\Delta \widehat{r}} \right) \right] \cdot \Delta \widehat{t} + \widehat{r}_P^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \widehat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_P) \\ = \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot (\widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \widehat{T}_P^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \left[\widehat{r}_e^2 (\widehat{T}_E^{t+\Delta t} - \widehat{T}_P^{t+\Delta t}) - \widehat{r}_o^2 (\widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \widehat{T}_O^{t+\Delta t}) \right] + \widehat{r}_P^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \widehat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_P) \\ = \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot (\widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \widehat{T}_P^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 \cdot \widehat{T}_E^{t+\Delta t} - \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 \cdot \widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 \cdot \widehat{T}_P^{t+\Delta t} \\ + \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 \cdot \widehat{T}_O^{t+\Delta t} + \widehat{r}_P^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \widehat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_P) \\ = \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \widehat{T}_P^{t+\Delta t} - \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \widehat{T}_P^t \end{aligned}$$

On arrangeant les regroupements de termes :

$$\begin{aligned} \widehat{T}_P^{t+\Delta t} \left(\tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 + \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 + \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \right) = \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \widehat{T}_P^t + \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 \cdot \widehat{T}_E^{t+\Delta t} + \\ \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 \cdot \widehat{T}_O^{t+\Delta t} + \widehat{r}_P^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \widehat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_P^{t+\Delta t} \left(\tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 + \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 + \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \right) - \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_e^2 \cdot \widehat{T}_E^{t+\Delta t} - \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \widehat{t}}{\Delta \widehat{r}} \cdot \widehat{r}_o^2 \cdot \widehat{T}_O^{t+\Delta t} = \\ \widehat{r}_P^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \widehat{T}_P^t + \widehat{r}_P^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \widehat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_P) \quad (\text{III.17}) \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$a_P \widehat{T}_P^{t+\Delta t} + a_E \widehat{T}_E^{t+\Delta t} + a_O \widehat{T}_O^{t+\Delta t} = d \quad (\text{III.18})$$

ou

$$a_i \hat{T}_i^{k+1} + a_{i+1} \hat{T}_{i+1}^{k+1} + a_{i-1} \hat{T}_{i-1}^{k+1} = d_i^k \quad (\text{III.19})$$

Avec:

- $a_p = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 + \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{r}} \cdot (\hat{r}_e^2 + \hat{r}_o^2) + \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r}$
- $a_E = -\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2$
- $a_O = -\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2$
- $d = \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot \hat{T}_p^t + \hat{r}_p^2 \cdot \frac{\tau \cdot (1-R) \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p)$

Avec :

$$\hat{r}_e = \frac{\hat{r}_E + \hat{r}_p}{2} ; \hat{r}_o = \frac{\hat{r}_O + \hat{r}_p}{2} \quad (\text{III.20})$$

La résolution de l'équation algébrique se fait par la méthode du double balayage.

b. Cas de symétrie sphérique par rapport à φ : (introduction du premier terme de la forme asymétrique)

En appliquant une symétrie sphérique par rapport à φ , l'équation de la chaleur devienne :

$$\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}}$$

(III.28)

On intègre suivant le volume de contrôle de centre P et le volume de domaine de temps, puis, on multiplie cette équation par ($d\hat{v} \cdot d\hat{t}$) :

$$\tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2}{\widehat{r}} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{r}} + \frac{1}{(\widehat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) = \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{t}}$$

$$\int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2}{\widehat{r}} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{r}} + \frac{1}{(\widehat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) d\widehat{v} \cdot d\widehat{t} \\ + \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) d\widehat{v} \cdot d\widehat{t} = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{t}} d\widehat{v} \cdot d\widehat{t}$$

En coordonnées sphériques avec symétrie par rapport à φ : $d\widehat{v} = 2\pi \cdot \widehat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2}{\widehat{r}} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{r}} + \frac{1}{(\widehat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) 2\pi \cdot \widehat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t} +$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) 2\pi \cdot \widehat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t} =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{t}} 2\pi \cdot \widehat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t}$$

Donc :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2}{\widehat{r}} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{r}} + \frac{1}{(\widehat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \cdot \widehat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t} \\ + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) \cdot \widehat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t} \\ = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \widehat{t}} \cdot \widehat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\widehat{t}$$

Calcul de :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \cdot \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t}$$

$$= \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t}$$

Calcul de :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t} = \sin \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \theta \cdot \left[\hat{r}_e^2 \left(\frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta \hat{r}} \right) - \hat{r}_o^2 \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta \hat{r}} \right) \right]$$

Calcul de :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \left(\frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \cdot \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t}$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \left(\frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t}$$

$$= \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \int_{\theta} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \theta^2} \right) d\theta$$

On a :

$$\int_{\theta} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right) d\theta = \cos \theta (\hat{T}_n - \hat{T}_s) = \cos \theta \left(\frac{\hat{T}_N + \hat{T}_P}{2} - \frac{\hat{T}_p + \hat{T}_S}{2} \right) = \frac{\cos \theta}{2} (\hat{T}_N - \hat{T}_S)$$

On a aussi :

$$\int_{\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \theta^2} \right) d\theta = \sin \theta \cdot \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right]_s = \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} [\hat{T}_N + \hat{T}_S - 2 \cdot \hat{T}_P]$$

Alors :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \left[\sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \left[\widehat{r}_e^2 \left(\frac{\widehat{T}_E - \widehat{T}_P}{\Delta \widehat{r}} \right) - \widehat{r}_o^2 \left(\frac{\widehat{T}_P - \widehat{T}_O}{\Delta \widehat{r}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \Delta \widehat{r} \cdot \left[\frac{\cos \theta}{2} (\widehat{T}_N - \widehat{T}_S) + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} [\widehat{T}_N + \widehat{T}_S - 2 \cdot \widehat{T}_P] \right] \right]
\end{aligned}$$

Le 2^{ème} terme :

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) \cdot \widehat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t} \\
&= \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \int_{\widehat{r}} \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}) \cdot \widehat{r}^2 \cdot d\widehat{r} \\
&= \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \widehat{r}_p^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_p)
\end{aligned}$$

Le 3^{ème} terme :

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_{\widehat{r}} \int_{\theta} \frac{\partial \widehat{r}}{\partial \hat{t}} \widehat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\widehat{r} \cdot d\theta \cdot d\hat{t} &= \sin \theta \cdot \widehat{r}_p^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \widehat{r}}{\partial \hat{t}} \cdot d\hat{t} \\
&= \sin \theta \cdot \widehat{r}_p^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \theta \cdot (\widehat{T}_p^{t+\Delta t} - \widehat{T}_p^t)
\end{aligned}$$

La forme finale de l'équation de question est :

$$\begin{aligned}
&\tau \cdot \frac{\widehat{K}}{\widehat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \left[\sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \widehat{r}} \cdot [\widehat{r}_e^2 (\widehat{T}_E^{t+\Delta t} - \widehat{T}_p^{t+\Delta t}) - \widehat{r}_o^2 (\widehat{T}_p^{t+\Delta t} - \widehat{T}_o^{t+\Delta t})] \right. \\
&\quad \left. + \Delta \widehat{r} \cdot \left[\frac{\cos \theta}{2} (\widehat{T}_N^{t+\Delta t} - \widehat{T}_S^{t+\Delta t}) + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} [\widehat{T}_N^{t+\Delta t} + \widehat{T}_S^{t+\Delta t} - 2 \cdot \widehat{T}_p^{t+\Delta t}] \right] \right] \\
&\quad + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \widehat{I}_0 \cdot \widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}} \cdot \widehat{r}_p^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\widehat{\alpha} \cdot \widehat{r}_p) \\
&= \sin \theta \cdot \widehat{r}_p^2 \cdot \Delta \widehat{r} \cdot \Delta \theta \cdot (\widehat{T}_p^{t+\Delta t} - \widehat{T}_p^t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 \cdot \hat{T}_E^{t+\Delta t} + \hat{T}_N^{t+\Delta t} \left(\tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\cos \theta}{2} + \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \right) + \\
& \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \hat{T}_O^{t+\Delta t} - \hat{T}_P^{t+\Delta t} \left(\tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 + \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 + \right. \\
& \left. 2 \cdot \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} + \hat{r}_P^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \right) - \hat{T}_S^{t+\Delta t} \left(\tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\cos \theta}{2} - \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \right) = \\
& \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{r}_P^2}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_P) - \hat{r}_P^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \hat{T}_P^t \quad (III.29)
\end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$a_E \hat{T}_E^{t+\Delta t} + a_N \hat{T}_N^{t+\Delta t} + a_O \hat{T}_O^{t+\Delta t} + a_P \hat{T}_P^{t+\Delta t} + a_S \hat{T}_S^{t+\Delta t} = d \quad (III.30)$$

ou

$$A(i, j) \cdot \hat{T}_{i+1, j}^{t+dt} + B(i, j) \cdot \hat{T}_{i, j+1}^{t+dt} + C(i, j) \cdot \hat{T}_{i-1, j}^{t+dt} + F(i, j) \cdot \hat{T}_{i, j}^{t+dt} + G(i, j) \cdot \hat{T}_{i, j-1}^{t+dt} = D(i, j) \quad (III.31)$$

Avec:

- $A(i, j) = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2$
- $B(i, j) = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\cos \theta}{2} + \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \left(\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \right)$
- $C(i, j) = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2$
- $F(i, j) = -\tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 + \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 + 2 \cdot \frac{\Delta \hat{r}}{\Delta \theta} \right) - \hat{r}_P^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta$
- $G(i, j) = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} - \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \frac{\cos \theta}{2} = \tau \cdot \frac{\bar{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\Delta \theta} - \frac{\cos \theta}{2} \right)$
- $D(i, j) = \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{f}_0 \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{r}_P^2}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_P) - \hat{r}_P^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \hat{T}_P^t$

La résolution de l'équation algébrique se fait par la méthode de Gauss-Seidel.

c. Asymétrie sphérique :

L'équation de la chaleur (II.17), sera résolue en appliquant la méthode des volumes finis, en tenant compte des conditions aux limites.

$$\tau \cdot \frac{\hat{R}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}}$$

On intègre suivant le volume de contrôle de centre P et le volume de domaine de temps, puis, on multiplie cette équation par ($d\hat{v} \cdot d\hat{t}$) :

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\hat{R}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \\ + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{\hat{R}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) d\hat{v} \cdot d\hat{t} + \\ \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) d\hat{v} \cdot d\hat{t} = \int_{V_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} d\hat{v} \cdot d\hat{t} \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques : $d\hat{v} = \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{\hat{R}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} + \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} = \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \hat{r}^2 \cdot R_0^3 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t}
\end{aligned}$$

I.

$$\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \cdot \left[\hat{r}_e^2 \left(\frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta \hat{r}} \right) - \hat{r}_o^2 \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta \hat{r}} \right) \right]$$

II.

$$\begin{aligned}
& \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\
& = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \int_{\theta} \left(\frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right) \cdot d\theta = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \int_{\theta} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \theta^2} \right) d\theta
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{\theta} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right) d\theta = \cos \theta (\hat{T}_N - \hat{T}_S) = \cos \theta \left(\frac{\hat{T}_N + \hat{T}_P}{2} - \frac{\hat{T}_P + \hat{T}_S}{2} \right) = \frac{\cos \theta}{2} (\hat{T}_N - \hat{T}_S)$$

on a aussi :

$$\int_{\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \theta^2} \right) d\theta = \sin \theta \cdot \left[\frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right]_s = \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} [\hat{T}_N + \hat{T}_S - 2 \cdot \hat{T}_P]$$

$$\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \int_{\theta} \left(\cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \theta^2} \right) d\theta = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \left[\frac{\cos \theta}{2} (\hat{T}_N - \hat{T}_S) + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} [\hat{T}_N + \hat{T}_S - 2 \cdot \hat{T}_P] \right]$$

III.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{(\hat{r})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \hat{t} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Il suffit de calculer le terme suivant (car les autres termes sont déjà calculer précédemment) et l'intégré dans une forme générale de l'équation de chaleur :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t}$$

$$= \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \int_{\theta} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta \int_{\varphi} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} d\varphi$$

On a, d'une part :

$$\int_{\theta} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = \int_s^n \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sin(\theta)} \Delta \theta$$

Et d'autre part :

$$\int_{\varphi} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int_{s_o}^{n_e} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} d\varphi = \left(\frac{\hat{T}_{NE} - \hat{T}_P}{\Delta \varphi} \right) - \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_{SO}}{\Delta \varphi} \right) = \frac{\hat{T}_{NE} + \hat{T}_{SO} - 2 \cdot \hat{T}_P}{\Delta \varphi}$$

Finalement :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \varphi^2} \right) \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} = \Delta\hat{t} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} \Delta\theta \cdot \frac{\hat{T}_{NE} + \hat{T}_{SO} - 2 \cdot \hat{T}_P}{\Delta\varphi}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\ = \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \int_{\hat{r}} \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r}^2 \cdot d\hat{r} \\ = \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\hat{r}} \int_{\theta} \int_{\varphi} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \hat{r}^2 \cdot \sin \theta \cdot d\hat{r} \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\hat{t} \\ = \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} \cdot d\hat{t} = \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot (\hat{T}_p^{t+\Delta t} - \hat{T}_p^t) \end{aligned}$$

Après résolution des intégrales l'équation de chaleur devienne :

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \left[\sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \left(\hat{r}_e^2 \left(\frac{\hat{T}_E - \hat{T}_P}{\Delta\hat{r}} \right) - \hat{r}_o^2 \left(\frac{\hat{T}_P - \hat{T}_O}{\Delta\hat{r}} \right) \right) \right. \\ \left. + \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \left(\frac{\cos \theta}{2} (\hat{T}_N - \hat{T}_S) + \frac{\sin \theta}{\Delta\theta} (\hat{T}_N + \hat{T}_S - 2 \cdot \hat{T}_P) \right) \right. \\ \left. + \Delta\hat{t} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} \Delta\theta \cdot \frac{\hat{T}_{NE} + \hat{T}_{SO} - 2 \cdot \hat{T}_P}{\Delta\varphi} \right] \\ + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} = \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot (\hat{T}_p^{t+\Delta t} - \hat{T}_p^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta\hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \hat{r}_e^2 \cdot \hat{T}_E - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta\hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \hat{T}_P - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta\hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \hat{T}_P \right. \\ \left. + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta\hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \hat{T}_O + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \frac{\cos \theta}{2} \cdot \hat{T}_N - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \frac{\cos \theta}{2} \cdot \hat{T}_S \right. \\ \left. + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta\theta} \cdot \hat{T}_N + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta\theta} \cdot \hat{T}_S - 2 \cdot \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta\theta} \cdot \hat{T}_P \right. \\ \left. + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta\hat{t} \cdot \Delta\hat{r} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} \Delta\theta \cdot \frac{\hat{T}_{NE} + \hat{T}_{SO} - 2 \cdot \hat{T}_P}{\Delta\varphi} \right] \\ + \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\hat{t} = \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta\hat{r} \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi \cdot (\hat{T}_p^{t+\Delta t} - \hat{T}_p^t) \end{aligned}$$

$$a_E \hat{T}_E^{t+\Delta t} + a_N \hat{T}_N^{t+\Delta t} + a_O \hat{T}_O^{t+\Delta t} + a_p \hat{T}_p^{t+\Delta t} + a_S \hat{T}_S^{t+\Delta t} + a_{SO} \hat{T}_{SO}^{t+\Delta t} + a_{NE} \hat{T}_{NE}^{t+\Delta t} = d \quad (\text{III.30})$$

ou

$$\begin{aligned} A(i, j, k) \hat{T}_{i+1, j, k}^{t+dt} + B(i, j, k) \hat{T}_{i, j+1, k}^{t+dt} + C(i, j, k) \hat{T}_{i-1, j, k}^{t+dt} + F(i, j, k) \hat{T}_{i, j, k}^{t+dt} + G(i, j, k) \hat{T}_{i, j-1, k}^{t+dt} \\ + S(i, j, k) \hat{T}_{i, j, k+1}^{t+dt} + R(i, j, k) \hat{T}_{i, j, k-1}^{t+dt} = D(i, j, k) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Avec:

- $A(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_e^2 \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t}$
- $B(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \left(\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \right) \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t}$
- $C(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t}$
- $F(i, j, k) = - \left(\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \cdot \hat{r}_e^2 + \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \cdot \hat{r}_o^2 + 2 \cdot \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} + 2 \cdot \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \varphi \cdot \hat{\rho} \cdot \sin(\theta)} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta + \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \right)$
 $F(i, j, k) = -\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \hat{r} \cdot \hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t} \cdot (\hat{r}_e^2 + \hat{r}_o^2) - 2 \cdot \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \left(\sin \theta \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta \theta} - \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \varphi} \right) - \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi$
- $G(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\Delta \theta} - \frac{\cos \theta}{2} \right) \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t}$
- $S(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \varphi \cdot \hat{\rho} \cdot \sin(\theta)} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta$
- $R(i, j, k) = \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\Delta \varphi \cdot \hat{\rho} \cdot \sin(\theta)} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta$
- $D(i, j, k) = -\sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \hat{T}_p^t - \tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{J}_0 \cdot \hat{\alpha}}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \hat{r}_p^2 \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \hat{t}$

La résolution de l'équation algébrique se fait par la méthode de Gauss-Seidel.

IV. Méthodes de résolution

1. Méthode du double balayage [41]

1.1. Forme dimensionnelle dans le cas de symétrie sphérique centrale

On considère l'équation algébrique suivante qui représente le profil de température :

$$A(i).T(i - 1) + B(i).T(i) + C(i).T(i + 1) = D(i) \quad (\text{III.32})$$

Le principe de la méthode de double balayage permet d'écrire :

$$T(i) = \alpha(i).T(i + 1) + \beta(i) \quad (\text{III.33})$$

Ou encore :

$$T(i - 1) = \alpha(i - 1).T(i) + \beta(i - 1) \quad (\text{III.34})$$

En introduisant l'équation (IV.33) dans l'équation (IV.31), il vient :

$$A(i).\alpha(i - 1).T(i) + B(i).T(i) + C(i).T(i + 1) + A(i).\beta(i - 1) = D(i) \quad (\text{III.35})$$

Cette équation peut sous mettre sous la forme :

$$T(i) = \frac{-C(i)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} T(i + 1) + \frac{D(i)-A(i).\beta(i-1)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.36})$$

Une comparaison entre l'équation (III.33) et l'équation (III.36) donne :

$$\alpha(i) = \frac{-C(i)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.37})$$

Et :

$$\beta(i) = \frac{D(i)-A(i).\beta(i-1)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.38})$$

Les formules de récurrences (III.37) et (III.38) sont amorcées à l'aide de la donnée de $\alpha(1)$ et de $\beta(1)$ issus des conditions aux limites.

Lors du premier balayage allant de $i = 2$ jusqu'à $i = i_{\max}$, on détermine les fonctions α et β .

La température T sera déterminée lors du balayage inverse allant de $i = i_{\max-1}$ jusqu'à $i = 2$.

➤ **Conditions initiales et aux limites**

Les conditions initiale et aux limites sont nécessaires pour la solution de l'équation différentielle de la conduction de chaleur. La condition initiale spécifie la distribution de la température à une origine de temps (c'est-à-dire $t=0$), tandis que les conditions aux limites spécifient les conditions maintenues aux limites du milieu à étudier à $t > 0$.

- Conditions initiales

La distribution des températures à l'intérieur du tissu et sur la surface est supposée connue à l'instant $t=0$:

$$T(r, t=0) = T_0$$

Généralement le champ des températures initiales est constant, égal à la température du tissu à l'état normal : $T_0=37^\circ\text{C}$.

- Conditions aux limites

On considère que :

➤ La surface libre du tissu est parfaitement isolante de ce fait pas de perte de la chaleur à la surface. L'équation exprimant cette condition est :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r=0 \quad (\text{III.39})$$

On aura $T_1 = T_2$

D'où : $\alpha(1) = 1$ et $\beta(1) = 0$

Cette condition reflète l'approximation qu'il n'y a pas de perte de chaleur à travers la surface libre du tissu (échauffement adiabatique).

➤ La surface limite ($r=Re$) est maintenue à une température uniforme égale à la température initiale 37°C .

1.2. Forme adimensionnelle dans le cas de symétrie sphérique centrale

On considère l'équation algébrique suivante qui représente le profil de température :

$$A(i).T(i - 1) + B(i).T(i) + C(i).T(i + 1) = D(i) \quad (\text{III.21})$$

Le principe de la méthode de double balayage permet d'écrire :

$$T(i) = \alpha(i).T(i + 1) + \beta(i) \quad (\text{III.22})$$

Ou encore :

$$T(i - 1) = \alpha(i - 1).T(i) + \beta(i - 1) \quad (\text{III.23})$$

En introduisant l'équation (IV.33) dans l'équation (IV.31), il vient :

$$A(i).\alpha(i - 1).T(i) + B(i).T(i) + C(i).T(i + 1) + A(i).\beta(i - 1) = D(i) \quad (\text{III.24})$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$T(i) = \frac{-C(i)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} T(i + 1) + \frac{D(i)-A(i).\beta(i-1)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.25})$$

Une comparaison entre l'équation (III.21) et l'équation (III.24) donne :

$$\alpha(i) = \frac{-C(i)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.26})$$

et :

$$\beta(i) = \frac{D(i)-A(i).\beta(i-1)}{B(i)+A(i).\alpha(i-1)} \quad (\text{III.27})$$

Les formules de récurrences (III.26) et (III.27) sont amorcées à l'aide de la donnée de $\alpha(1)$ et de $\beta(1)$ issus des conditions aux limites.

Lors du premier balayage allant de $i = 2$ jusqu'à $i = i_{\max}$, on détermine les fonctions α et β .

La température T sera déterminée lors du balayage inverse allant de $i = i_{\max}-1$ jusqu'à $i = 2$.

➤ **Conditions initiales et aux limites**

Les conditions initiale et aux limites sont nécessaires pour la solution de l'équation différentielle de la conduction de chaleur. La condition initiale spécifie la distribution de la température à une origine de temps (c'est-à-dire $t=0$), tandis que les conditions aux limites spécifient les conditions maintenues aux limites du milieu à étudier à $t > 0$.

- Conditions initiales

La distribution des températures adimensionnelles à la surface du tissu est supposée connue à l'instant $\hat{t}=0$:

$$\hat{T}(\hat{r}, \hat{t}=0) = 1$$

Généralement le champ des températures adimensionnelles initiales est constant, égal à la température du tissu à l'état normal : $\hat{T}=1$.

- Conditions aux limites

On considère que :

➤ La surface libre du tissu est parfaitement isolante ce préserve contre la perte de la chaleur à la surface. L'équation différentielle exprimant cette condition est :

$$\frac{\partial \hat{T}(\hat{r}, \hat{t})}{\partial \hat{r}} = 0 \quad \text{pour} \quad \hat{r} = \hat{r}_{\max} = 1 \quad (\text{III.39})$$

On aura $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$

D'où : $\alpha(1) = 1$ et $\beta(1) = 0$

Cette condition reflète l'approximation qu'il n'y a pas de perte de chaleur à travers la surface libre du tissu (échauffement adiabatique).

➤ La surface limite est maintenue à une température adimensionnelle uniforme égale à la température initiale 1.

2. Résolution par la méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode pour résoudre les systèmes linéaires $Ax=b$, où A est une matrice $n*n$ et x,b sont des vecteurs de R^n . Elle consiste en la manipulation suivante: on décompose A comme $A=D-E-F$, où D est une matrice diagonale, $-E$ est une matrice triangulaire inférieure, et $-F$ est une matrice triangulaire supérieure [42].

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

On peut alors transformer le système en $Ax=b \Leftrightarrow (D-E)x-Fx=b \Leftrightarrow x=(D-E)^{-1}Fx+(D-E)^{-1}b$

On définit ensuite une suite de vecteur (x^k) par la formule

$$x^{k+1}=(D-E)^{-1}Fx^k+(D-E)^{-1}b$$

2.1. Cas de symétrie sphérique par rapport à φ :

On a :

$$a_E \hat{T}_E^{t+\Delta t} + a_N \hat{T}_N^{t+\Delta t} + a_O \hat{T}_O^{t+\Delta t} + a_p \hat{T}_p^{t+\Delta t} + a_S \hat{T}_S^{t+\Delta t} = d \quad (III.30)$$

On a :

$$A(i, j) \hat{T}_{i+1, j}^{t+dt} + B(i, j) \hat{T}_{i, j+1}^{t+dt} + C(i, j) \hat{T}_{i-1, j}^{t+dt} + F(i, j) \hat{T}_{i, j}^{t+dt} + G(i, j) \hat{T}_{i, j-1}^{t+dt} = D(i, j)$$

Alors :

$$\hat{T}_{i, j}^{t+dt} = \left(D(i, j) - A(i, j) \hat{T}_{i+1, j}^t - B(i, j) \hat{T}_{i, j+1}^t - C(i, j) \hat{T}_{i-1, j}^t - G(i, j) \hat{T}_{i, j-1}^t \right) \frac{1}{F(i, j)}$$

On introduit les termes précédemment évoqués dans la formule :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{i, j}^{t+dt} = & \left(\tau \cdot \frac{(1-R) \cdot \hat{I}_0 \cdot \hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p^2}{\hat{\rho}} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \hat{t} \cdot \exp(-\hat{\alpha} \cdot \hat{r}_p) - \hat{r}_p^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta \cdot \hat{T}_p^t - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 \cdot \hat{T}_{i+1, j}^t \right. \\ & - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \left(\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta}{\Delta \theta} \right) \cdot \hat{T}_{i, j+1}^t - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 \cdot \hat{T}_{i-1, j}^t \\ & \left. - \tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \Delta \hat{r} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\Delta \theta} - \frac{\cos \theta}{2} \right) \cdot \hat{T}_{i, j-1}^t \right) \left(\frac{1}{-\tau \cdot \frac{\hat{K}}{\hat{\rho}} \cdot \Delta \hat{t} \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_e^2 + \frac{\Delta \theta}{\Delta \hat{r}} \cdot \hat{r}_o^2 + 2 \cdot \frac{\Delta \hat{r}}{\Delta \theta} \right) - \hat{r}_p^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \hat{r} \cdot \Delta \theta} \right) \end{aligned}$$

2.2. Asymétrie sphérique :

On a :

$$A(i, j, k)\widehat{T}_{i+1,j,k}^{t+dt} + B(i, j, k)\widehat{T}_{i,j+1,k}^{t+dt} + C(i, j, k)\widehat{T}_{i-1,j,k}^{t+dt} + F(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k}^{t+dt} + G(i, j, k)\widehat{T}_{i,j-1,k}^{t+dt} \\ + S(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k+1}^{t+dt} + R(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k-1}^{t+dt} = D(i, j, k)$$

Alors :

$$\widehat{T}_{i,j,k}^{t+dt} = \left(D(i, j, k) - A(i, j, k)\widehat{T}_{i+1,j,k}^t - B(i, j, k)\widehat{T}_{i,j+1,k}^t - C(i, j, k)\widehat{T}_{i-1,j,k}^t - G(i, j, k)\widehat{T}_{i,j-1,k}^t \right. \\ \left. - S(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k+1}^t - R(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k-1}^t \right) \frac{1}{F(i, j, k)}$$

$$\widehat{T}_{i,j,k}^{t+dt} = \left(D(i, j, k) - A(i, j, k)\widehat{T}_{i+1,j,k}^t - B(i, j, k)\widehat{T}_{i,j+1,k}^t - C(i, j, k)\widehat{T}_{i-1,j,k}^t - G(i, j, k)\widehat{T}_{i,j-1,k}^t \right. \\ \left. - S(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k+1}^t - R(i, j, k)\widehat{T}_{i,j,k-1}^t \right) \frac{1}{F(i, j, k)}$$

V. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi la résolution numérique de l'équation de chaleur en coordonnées sphériques, elle est discrétisée à l'aide d'un schéma aux volumes finis. L'équation algébrique qui en découle sera résolue à l'aide d'un codage numérique en langage fortran et les résultats ainsi obtenus seront interprétés à leur juste valeur, puis exposés dans le chapitre suivant.

Il est à noter que les modèles analytiques, malgré les nombreuses hypothèses simplificatrices, fournissent des appréciations fiables, en évitant le recours systématique à des modèles physiques détaillés nécessitant un investissement important du point de vue mémoires et temps de calcul.

Chapitre IV :
Résultats et Discussions

I. Introduction

L'étude thermique de l'échauffement du tissu biologique dans le but d'une thérapie permet de prédire l'évolution de la température qui est le résultat de l'interaction laser tissu.

Pour optimiser l'utilisation d'un laser, plusieurs paramètres doivent alors être maîtrisés :

- La longueur d'onde,
- La puissance (laser continu),
- Le diamètre du spot,
- La durée d'interaction du faisceau,
- L'énergie d'un pulse dans le cas d'un laser pulsé.

Nous commençons par déterminer les paramètres des lasers pulsés et continus pour réaliser la coagulation tissulaire et estimer par la suite, la distribution spatio-temporelle de la température.

Pour mieux comprendre cette interaction, on va prendre l'exemple concret du traitement dermatologique par le Laser, puis on va interpréter les résultats obtenus à leur juste valeur.

II. Structure de la peau

La peau humaine est un tissu conjonctif complexe constitué de trois couches stratifiées : L'épiderme, le derme et l'hypoderme dont l'épaisseur et la structure biologique sont très différentes [81].

Chimiquement la peau se compose de :

- 70% d'eau.
- 27,5% de protéides.
- 2% de lipides.
- 0,5% de sels minéraux.

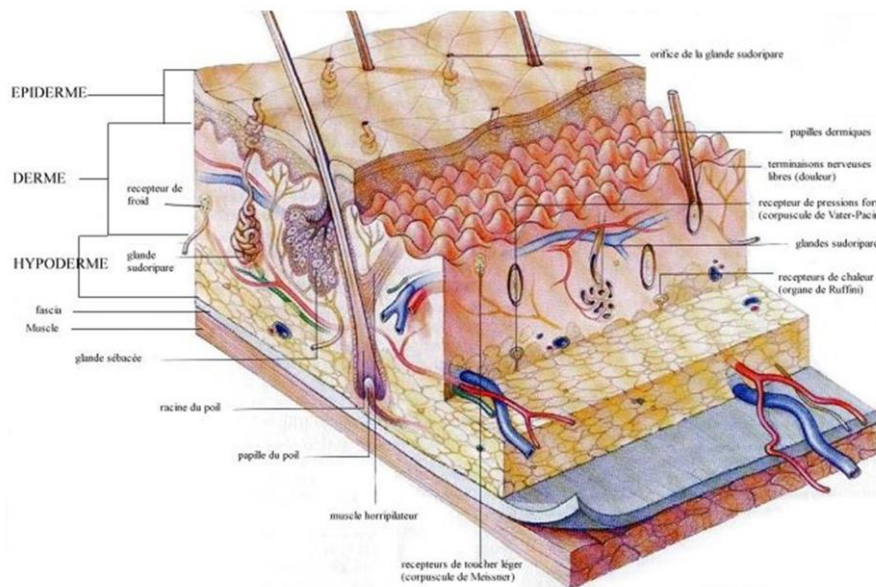


Figure 33 : Structure de la peau

1. L'épiderme

L'épiderme est la première couche de protection de l'organisme. Il est formé de quatre couches cellulaires la couche basale, la couche malpighienne, La couche granuleuse et la couche cornée [43,81].

2. Le derme

Sous-jacent à l'épiderme, le nourrit et le soutient. Il est formé d'un réseau dense de fibres entrecroisées, fibres collagènes d'une part, qui confèrent au derme sa résistance aux forces de pression, fibres élastiques d'autre part, qui donnent à la peau son élasticité.

Le derme est richement vascularisé, par un réseau de vaisseaux sanguins aussi fins que des cheveux, d'où leur nom de capillaires; ceux-ci nourrissent l'épiderme et assurent les échanges thermiques entre l'organisme et le milieu extérieur [43,81].

Le derme contient aussi un réseau nerveux d'une grande densité, de l'ordre de 10000 fibres nerveuses par mm^2 ; la plupart de ces fibres sont sensibles; elles font de la peau un organe sensoriel majeur, sensible au toucher, à la chaleur et à la pression [43,81].

3. L'hypoderme

Situé au-dessous du derme, est un matelas graisseux formé de cellules claires chargées de graisses. Il amortit les pressions exercées sur la peau, contribue à protéger les organes profonds. Il représente aussi une réserve d'énergie pour l'organisme [81].

III. Cas du traitement thermique des angiomes

1. Définition

Le terme angiome désigne un ensemble de malformations et tumeurs vasculaires bénignes, assez hétérogène par leur polymorphisme clinique, évolutif et structural [44,79,81].

2. Classification

On distingue 3 types d'angiomes [44,79,81] :

- L'angiome plan : Tache rouge, sans relief, et qui n'aura pas tendance à diminuer dans le temps.
- Les hémangiomes, que l'on appelait avant « angiomes immatures », caractérisés par des malformations vasculaires souvent complexes, avec une importante épaisseur. Ils auront souvent tendance à régresser dans le temps.
- Les angiomes stellaires : Petites lésions vasculaires fréquentes qui apparaissent habituellement sur le visage, en forme de point vasculaire et de petits vaisseaux en ramification autour. Ceux-ci font classiquement l'objet d'un traitement par laser.

3. Angiomes

Les angiomes sont des malformations capillaires appartenant au groupe des malformations vasculaires congénitales [48]. Ils concernent 0,3 % des nouveau-nés [49] et leur incidence ne varie pas en fonction du terme ou du sexe [50]. Histologiquement, les angiomes sont composés d'un épiderme sain couvrant des vaisseaux sanguins anormalement dilatés [51]. Ils se présentent sous forme de nappes roses à rouges pouvant atteindre n'importe quelle partie du corps [79,82].



Figure 34 : Angiome du tronc

Les techniques utilisées auparavant pour traiter les angiomes (la chirurgie d'exérèse avec réparation par greffe de peau, la radiothérapie, la dermabrasion, la cryothérapie) produisaient des cicatrices visible. Le laser, testé pour la première fois pendant les années 1970, est vu comme une alternative idéale [79,82].

3.1. Quelques résultats du traitement des angiomes par laser

Au début des années 1970, le laser Argon fut le premier laser utilisé dans le traitement des angiomes, avec de bons résultats [53]. Depuis, plusieurs type de laser en vue le jour. Les deux tableaux ci-dessous résument les résultats obtenus [54,55,56,57,79].

	Longueur d'onde	Avantages	Inconvénients
Laser Argon	488 à 514,5nm	Bonne absorption par l'oxyhémoglobine HbO ₂	Il faut effectuer de très nombreuses séances pour traiter l'ensemble de l'angiome car la zone d'impact est très petite (1 à 2mm)
Laser CO ₂	9,4 et 10,6 µm	Intéressant pour la volatilisation des nodules angiomeux	Risque important de cicatrices hypertrophiques
laser à vapeur de cuivre émettant Nd:YAG	532nm	Leurs longueurs d'onde semblaient plus adaptées que celles du laser Argon pour cibler l'HbO ₂	N'apporte un plus que pour les angiomes pâles
Laser à colorant pulsé (LCP)	577nm	Profondeur de pénétration cutanée plus importante qu'à 418nm ou 542nm	Absorbe « trop bien » l'HbO ₂ et la quasi-totalité des photons sont stoppés dès les couches superficielles AN
Laser à colorant pulsé (LCP)	585 et 595nm	Permet d'obtenir de meilleurs résultats pour les angiomes plus profonds et le temps d'impulsion utilisé est le plus souvent court (0,45ms en moyenne), induisant un effet de photothermolyse sélective. La taille des impacts, en général 5 ou 7mm, permet le traitement d'angiomes étendus.	Le succès n'est pas garanti. l'éclaircissement est de 12 % par séance [16], d'où la nécessité de faire succéder plusieurs séances pendant plusieurs années avant d'obtenir un pâlisement satisfaisant.

Tableau 5 : Avantages et Inconvénients de chaque laser [54,55,56,57]

Laser	Longueur d'onde (nm)	Profondeur de pénétration optique (nm)	Pâlisement de l'angiome	Risque de cicatrices
Argon	488-514,5	0,49	++	+
Laser à vapeur de cuivre	511-578	0,48-0,60	++	+
KTP	532	0,58	++	+
Laser à colorant pulsé	577-595	0,60	++	+
Lumière intense pulsée	500-1200	0,5-2 (Très variable)	++ violacés	+
Alexandrite	755	1,09	++ épais	++
Nd :YAG	1064	1,95	++ épais	++
CO₂	10 600	0,15	±	+++

Tableau 6 : Effets des principaux lasers utilisés dans le traitement des angiomes, en termes d'efficacité et de complications cutanées [53]

3.2. Problématiques liées à l'usage de laser

Le traitement des angiomes par laser se heurte toujours à deux problèmes essentiels qui sont la longueur d'onde et la durée d'émission utilisées, ce qui implique que seuls les vaisseaux d'une certaine profondeur et d'une certaine taille seront détruits. Or, la structure biologique des vaisseaux est très hétérogène. De plus, le faisceau laser doit d'abord traverser l'épiderme d'épaisseur allant de 50 à 150µm [51, 52], et son intensité peut être partiellement réduite par absorption par la mélanine. Néanmoins des paramètres peuvent prévoir le bon ou le mauvais rendement de cette technique [82] :

- La taille de l'angiome : plus elle est importante et plus le nombre de séances nécessaires sera élevé [58].

- La concentration de la mélanine dans la peau : La mélanine peut réduire la dose réelle délivrée aux vaisseaux sanguins [60,82].

- L'âge du patient : chez l'enfant, le traitement par LCP est plus efficace que chez l'adulte [59, 60], car les angiomes chez l'enfant sont de plus petite taille, ils sont moins épais et les vaisseaux sanguins sont moins gros [82].

- La couleur de l'angiome : avec le LCP, les angiomes rouges répondent mieux que les angiomes pâles [61] ou violacés [62], probablement là encore en raison de la taille et de la profondeur des vaisseaux. Pour améliorer ces résultats on peut soit optimiser l'étape optique par l'augmentation de la longueur d'onde soit agir sur l'efficacité de l'étape thermique [82].

a. Optimisation de l'étape optique

- Augmenter la longueur d'onde

L'idée est d'utiliser des lasers avec des longueurs d'onde plus élevées et donc plus pénétrantes (voir tableau 5).

- Utiliser des substances pour améliorer la transparence optique de la peau.

Certains agents qui, après application cutanée, sont capables d'induire une déshydratation de la peau et une dissociation du collagène [63, 64] (comme le glucose, le glycérol, le polypropylène glycol, le polyéthylène glycol, ...).

b. Optimisation de l'étape thermique

- Transformation de l'hémoglobine en méthémoglobine

Lorsque les vaisseaux sanguins sont chauffés pendant environ une centaine de millisecondes, l'HbO₂ se transforme en méthémoglobine qui est caractérisée par une augmentation de l'absorption du faisceau laser allant dans le proche infrarouge. Le laser Cynergy Multiplex a été développé à partir de ce principe : il associe un LCP et un Nd:YAG long pulse. Le tir initial à 595nm induit la formation de méthémoglobine. Rapidement, un tir de Nd:YAG long pulse est délivré sur la même zone. Le vaisseau devient alors une meilleure cible pour le Nd:YAG, qui pénètre profondément mais avec un risque moindre de complication cutanée du fait de cette sélectivité accrue pour les vaisseaux [65,66].

- Utiliser le vert d'indocyanine (VIC), un chromophore exogène

Une fois injectée par voie intraveineuse, le vert d'indocyanine se lie aux protéines plasmatiques, en particulier aux lipoprotéines- α [67], et augmente l'absorption de la lumière par l'HbO₂.

- Protéger l'épiderme

Par l'utilisation d'un système de refroidissement de la peau comme :

- Le refroidissement par jet d'air;
- Le refroidissement par spray de gaz cryogénique [68];
- Le refroidissement par contact avec une fenêtre en saphir [69].

- Photothérapie dynamique

La photothérapie dynamique (PDT) est une technique impliquant une réaction entre un photosensibilisant, la lumière visible (qui active le photosensibilisant avec la longueur d'onde appropriée) et l'oxygène.

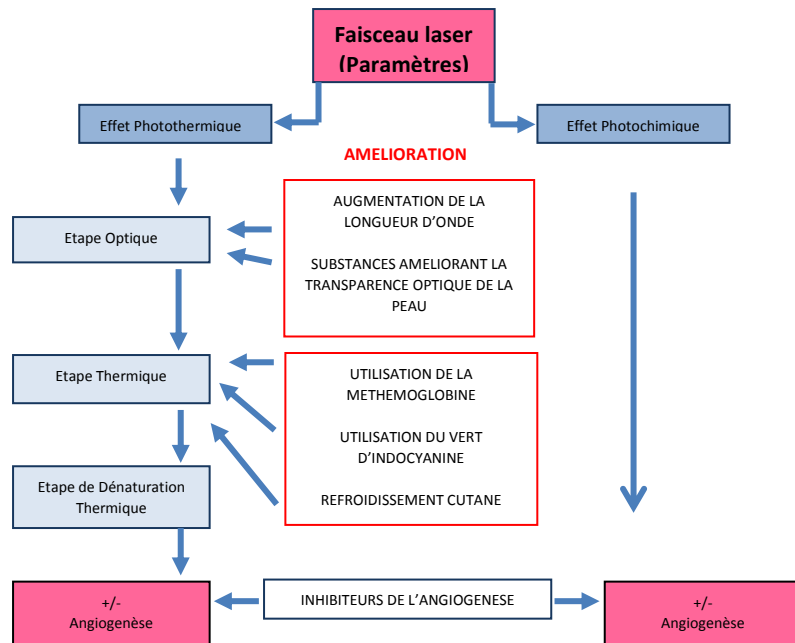


Figure 35 : Principales pistes d'amélioration dans le traitement laser des angiomes

IV. Propriétés thermiques et optiques de la peau humaine

La peau humaine est constituée de trois couches : l'épiderme, le derme et l'hypoderme, d'épaisseur respective 50, 2400 et 4000 μm [76,77].

Les propriétés thermiques et optiques de chaque couche sont représentées dans le tableau (7) [45,46,78]. On remarque que pour le laser Nd:Yag de longueur d'onde 1064nm le coefficient de diffusion de l'épiderme est 2,33 plus grand que celui du derme et 3,8 plus grand

que celui de l'hypoderme, l'épiderme absorbe plus de lumière que le derme environ 3,3 fois plus que le derme est 20 fois plus que l'hypoderme [76,77,78].

Propriétés	Epiderme	Derme	Hypoderme
$k(\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$	0,21	0,53	0,46
$\rho(\text{Kg.m}^{-3})$	1200	1200	1200
$c(\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1})$	3600	3800	3800
$\alpha(\text{m}^2.\text{s}^{-1})$	$4,86.10^{-8}$	$1,16.10^{-7}$	$1,10.10^{-7}$
$\mu_a(\text{cm}^{-1})$	4	1,2	0,2
$\mu_s(\text{cm}^{-1})$	210	90	55
g	0,77	0,77	0,77

Tableau 7 : Propriétés thermiques et optiques de chaque couche, Laser Nd-Yag $\lambda=1064\text{nm}$ [45,46]

V. Etude dimensionnelle

1. Etude de la variation de l'intensité d'irradiation en fonction de la profondeur de la peau

Comme on a vu dans les généralités, l'intensité du faisceau laser décroît selon la loi de Beer-Lambert [76,77]:

$$I(r) = I_0 \exp(-\mu_a r) \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{P}{\pi.r_{\text{spot}}^2}$$

Application :

Pour un laser Nd-Yag $\lambda=1064\text{nm}$, de puissance $P=2\text{W}$ et de diamètre de spot $D=5\text{mm}$, l'équation précédente devienne donc :

$$I(r) = 101859,16.\exp(-\mu_a r)$$

N.B : Les valeurs de μ_a sont consignées dans le tableau 7.

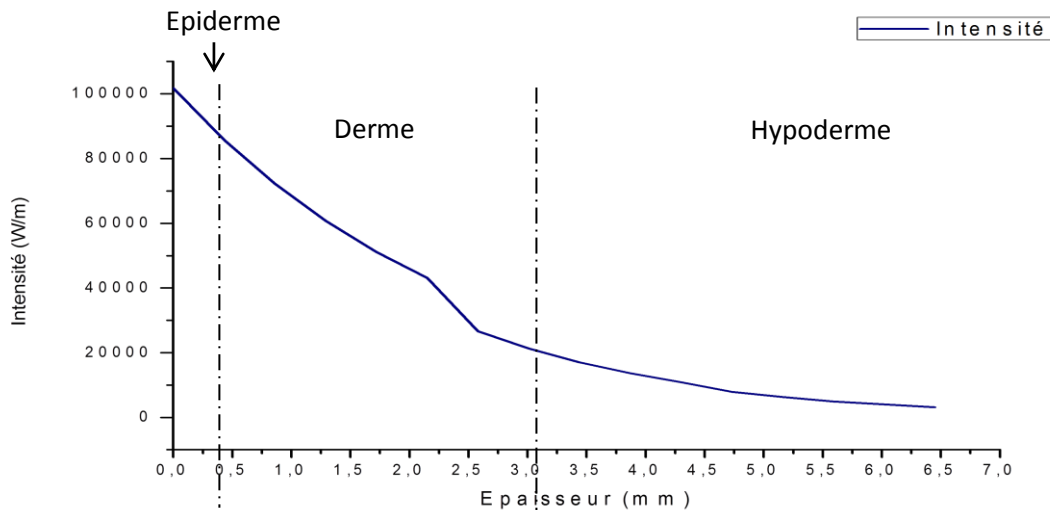


Figure 36 : Décroissance de l'intensité d'irradiation en fonction de la profondeur r

2. Evolution de la température en fonction du milieu

La profondeur de pénétration dans la peau varie en fonction de plusieurs paramètres

- La longueur d'onde : les lasers non ablatifs ont tendance à pénétrer plus profondément quand la longueur d'onde est plus importante. Aussi les lasers infrarouges pénètrent plus profondément que les lasers du domaine du visible. Cette propriété n'est plus valable pour les lasers ablatifs à cause de leur affinité pour l'eau, présente dès les premières couches de la peau. Les lasers CO₂ ou Erbium sont donc peu pénétrants [76,77,78],

- La taille du spot : la taille du spot laser joue une importance dans la répartition de l'énergie et dans la profondeur de pénétration. Pour une même longueur d'onde, les spots plus larges pénètrent plus profondément que les spots plus étroits [76,77,78],

- La durée : En allongeant la durée du pulse laser, la diffusion de chaleur sera plus importante avec, par conséquent, une pénétration en profondeur et en latéral augmentées [70,71,76,77,78].

a. Variation de la température en fonction du rayon

Dans cette partie on va tracer le profil de température en fonction du rayon pour une irradiation au laser ayant les propriétés suivantes : $P=2W$ (puissance), $D=5mm$ (diamètre du spot) et $t=1s$ (temps d'exposition).

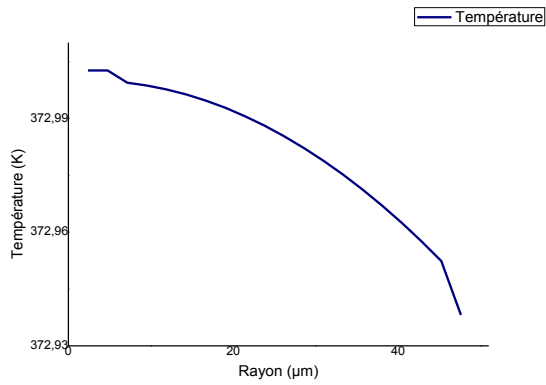


Figure 37 : Profil de température de l'épiderme

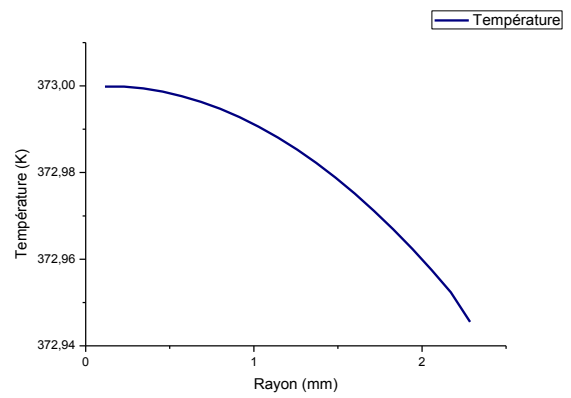


Figure 38 : Profil de température du derme

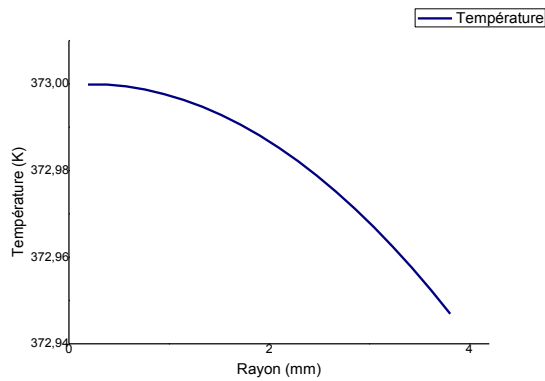


Figure 39 : Profil de température de l'hypoderme

b. Variation de la température en fonction du temps

Dans cette partie on va tracer le profil de température lors d'une exposition au laser de puissance $P=2W$ et de diamètre du spot de 5mm, pendant une seconde.

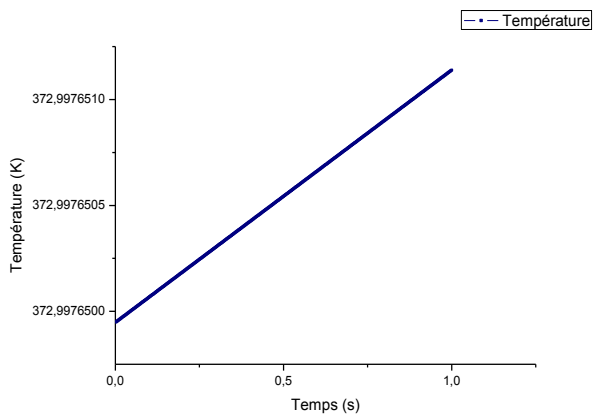


Figure 40 : Profil de température de l'épiderme

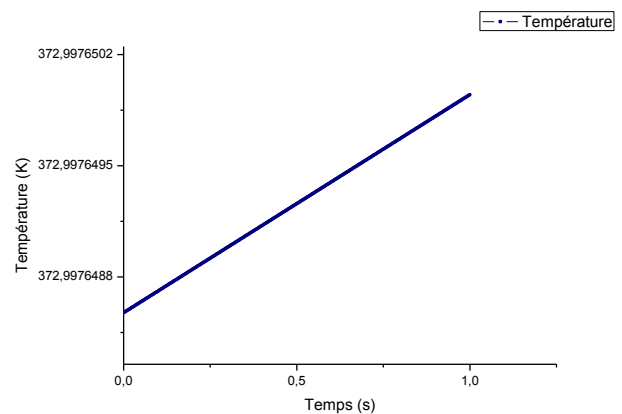


Figure 41 : Profil de température du derme

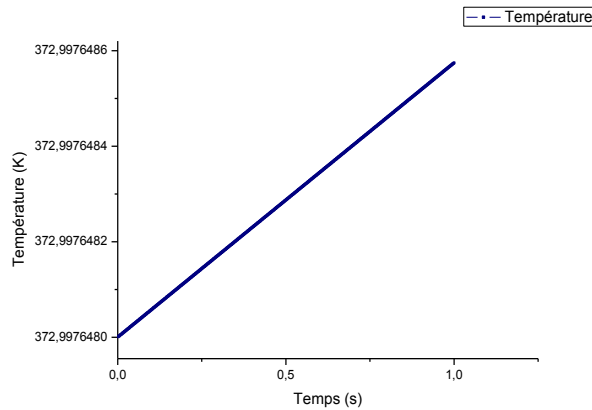


Figure 42 : Profil de température de l'hypoderme

- On peut constater dans les figures 37, 38 et 39, que la température issue de l'interaction laser-peau diminue tout en pénétrant successivement dans les trois couches de la peau. Or, la température augmente linéairement en fonction du temps (figures 40, 41 et 42).

- Les évolutions temporelles de la température sont obtenues en chaque point du domaine étudié. Dans ce sens les figures (figures 40, 41 et 42) illustrent une augmentation linéaire brutale de la température en fonction du temps pour une puissance de 2W, un diamètre du spot constant égal à 5 mm et un temps d'irradiation égal à 1s, pour atteindre des valeurs élevées favorable à la coagulation du tissu. Après l'arrêt de l'exposition au laser, la température décroîtra pour atteindre la température normale du tissu ($37^{\circ}\text{C} \approx 310\text{K}$).

3. L'influence des paramètres du faisceau laser dans cas d'un laser Nd-Yag continu ($\lambda=1064\text{nm}$)

a. Variation de la température en fonction de la puissance

Dans un premier temps, on va fixer pour un laser Nd-Yag continu ($\lambda=1064\text{nm}$) le diamètre du spot à 5 mm, la durée d'interaction est de 1,5s et on refait l'opération pour des durées d'interaction de 1s et de 0,5s.

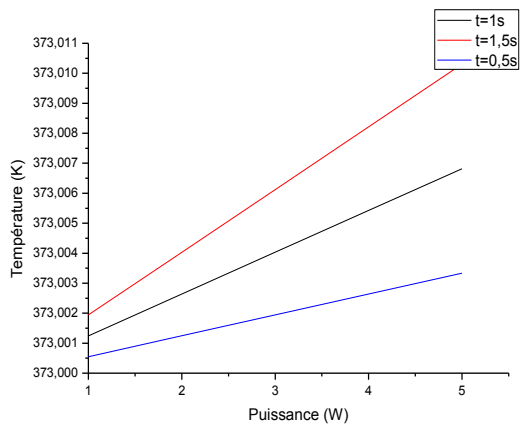


Figure 43 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance de l'épiderme

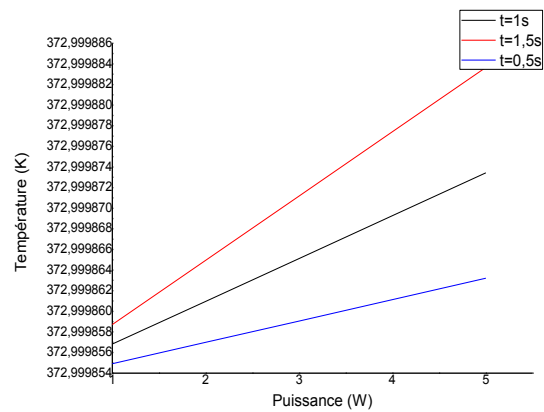


Figure 44 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance du derme

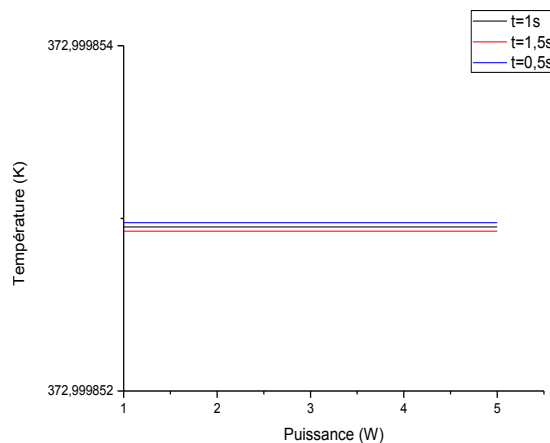


Figure 45 : Zone d'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance de l'hypoderme

- Les figures 43 et 44 montrent l'évolution linéaire de la température en fonction de la puissance, de l'épiderme et du derme. En effet lorsque la puissance P augmente, la fluence augmente (flux de particule), donc l'absorption par pigment tissulaire devienne forte et cela fait apparaître un flux de chaleur très important. Par ailleurs, la température de l'hypoderme reste presque constante quand on augmente la puissance (de 1 à 5W) et le temps de traitement par le laser (0,5s, 1s et 1,5s) car le coefficient d'absorption de cette couche est très faible (figure 45).

b. Variation de la température en fonction du diamètre du spot

Dans cette partie, on fait varier le diamètre du spot ainsi que la durée d'interaction (1,5s, 1s et 0,5s), pour le même laser (Nd:Yag continu ($\lambda=1064\text{nm}$)) on fixant la puissance à 2W.

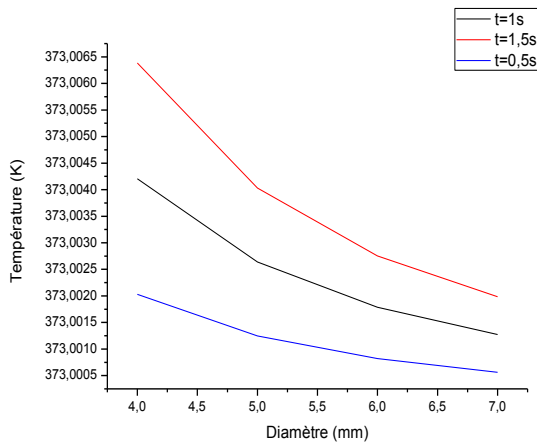


Figure 46 : Variation de la température de l'épiderme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations

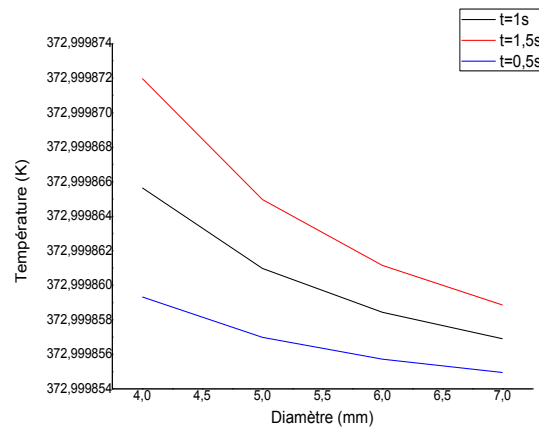


Figure 47 : Variation de la température du derme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations

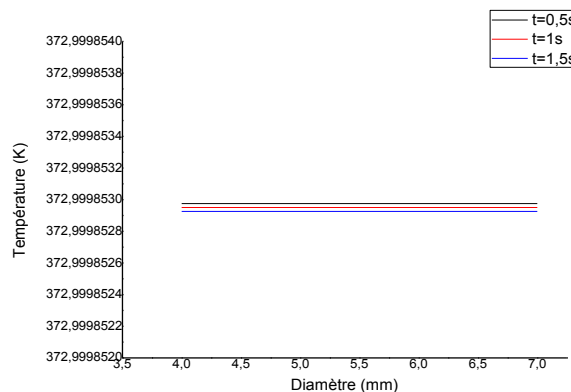


Figure 48 : Variation de la température de l'hypoderme en fonction du diamètre pour différents temps d'irradiations

- Les figures 46 et 47 montrent que la température varie inversement par rapport au diamètre du spot ceci est dû à l'irradiance qui est inversement proportionnelle au carré du diamètre du spot. Toutefois, la température reste presque constante au niveau de l'hypoderme quand on augmente le diamètre (de 4 à 7mm) et le temps de traitement par le laser (de 0,5 à 1,5s) car son coefficient d'absorption est très faible (tissu adipeux blanc) (figure 48).

VI. Etude adimensionnelle : Interaction du laser Nd:Yag continu ($\lambda=1064\text{nm}$) avec l'épiderme

1. Etude de la variation de l'intensité adimensionnelle d'irradiation en fonction de la profondeur de l'épiderme

Auparavant, il a été mentionné que, une fois que la lumière pénètre la surface, elle subit une série d'événements absorbants et diffusants. Les photons sont statistiquement dispersés ou absorbés de manière dépendante de la longueur d'onde. La diffusion dépend de la forme ou de la taille de la particule et du désaccord de l'indice de réfraction entre la particule et le milieu. Les probabilités d'absorption ou de diffusion sont déterminées par l'expérience [76,77].

Généralement, la lumière est atténuée lorsqu'elle se propage à travers les tissus (voir figure 49). Dans les tissus troubles (peau), l'atténuation d'intensité peut être décrite par la loi de Beer. Sous forme adimensionnelle, l'intensité est devenue :

$$\hat{I}(\hat{r}) = \frac{I(r)}{I_0} = \exp(-\alpha R_0 \hat{r}) \quad (40)$$

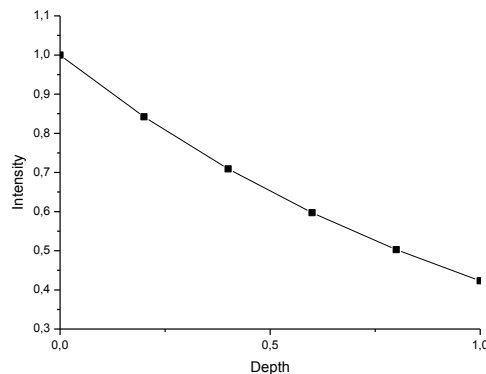


Figure 49 : Diminution de l'intensité adimensionnelle de l'irradiation en fonction de la profondeur \hat{r}

2. Profil de température adimensionnelle en fonction du rayon

a. Première considération : Symétrie sphérique centrale

Dans le cas de symétrie sphérique centrale l'étude du phénomène est réduite à une seule dimension (1D). Les figures 50, 51 et 52 illustrent la variation du profil de température adimensionnelle, dans les trois cas ci-dessous, en fonction du rayon sans dimension pour une irradiation laser ayant les propriétés suivantes: $P = 2W$, $D = 5 \text{ mm}$ et $t = 1s$. Nous remarquons que la température diminue dans un premier temps et reste ensuite presque constante.

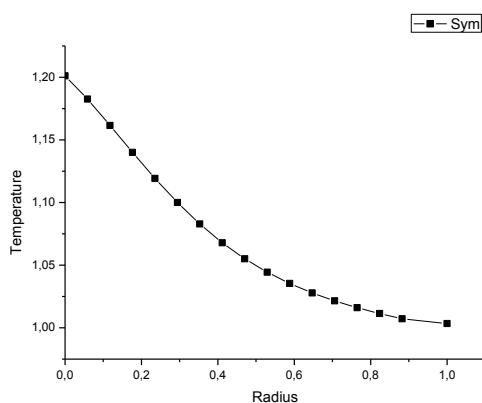


Figure 50 : Diminution de la température adimensionnelle en fonction du rayon dans le cas d'une symétrie sphérique centrale

b. Deuxième considération: symétrie sphérique suivant φ

Dans le cas de symétrie sphérique suivant φ , l'étude est réalisée suivant deux dimensions (2D).

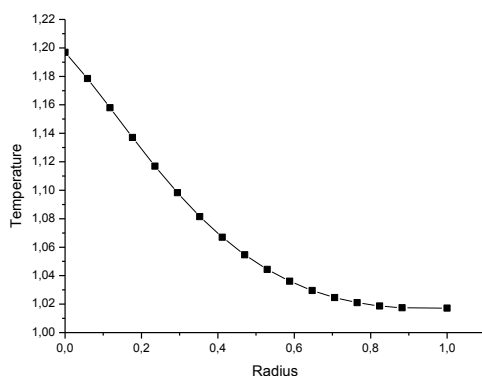


Figure 51 : Diminution de la température sans dimension en fonction du rayon dans le cas d'une symétrie sphérique par rapport à φ

c. Troisième considération: asymétrie sphérique (3D)

Généralement le transfert de chaleur est volumique, donc l'étude cette fois-ci se réalisera tri-dimensionnellement (3D).

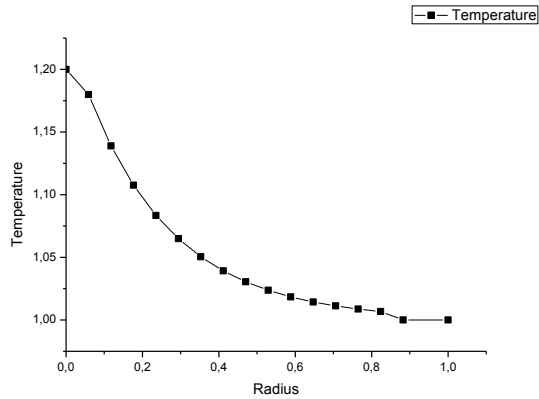


Figure 52 : Diminution de la température sans dimension en fonction du rayon dans le cas de l'asymétrie sphérique (3D)

3. Comparaison des trois profils de température adimensionnelle

Afin d'étudier l'effet de la géométrie sur la distribution radiale de la température, on a superposé les trois courbes qui représente les trois configurations géométriques sur une même figure (Figure 53).

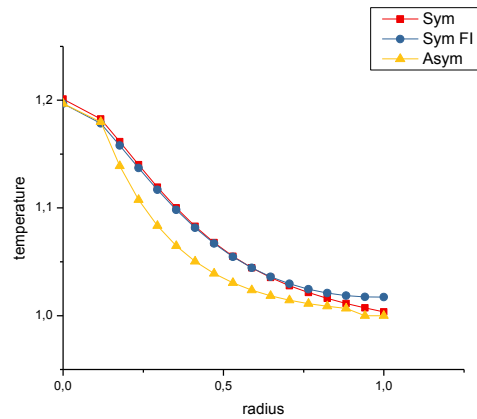


Figure 53 : Profil de température épidermique

Cette figure montre la variation de température sans dimension en fonction du rayon, dans trois configurations géométriques (symétrie sphérique centrale, symétrie sphérique selon φ , asymétrie sphérique).

Premièrement, on peut voir que la température adimensionnelle de l'interaction du laser avec l'épiderme décroît radialement (un écart de $\Delta\hat{T}=0,2$ correspondant à une diminution de température de 63°C) dans les trois configurations tout en pénétrant dans l'épiderme dans un premier temps, ensuite elle reste quasi constante. Cela peut être interprété par le fait que l'intensité diminue lorsque le faisceau laser traverse l'épiderme (loi de Beer-Lambert).

Deuxièmement, nous observons que le profil de température adimensionnelle dans les trois cas ne présente pas de différence significative, il suffit donc d'étudier la distribution thermique dans le cas de la symétrie sphérique centrale pour modéliser le phénomène de transfert de chaleur dans l'épiderme ou généralement dans les tissus biologiques ayant une forme sphérique.

VIII. Conclusion

Nous avons exposé les résultats de notre code numérique qui nous donne la possibilité de simuler le processus de transfert de chaleur à l'intérieur des tissus biologiques généré par une exposition laser Nd:Yag en mode continu de longueur d'onde 1064nm, en prenant à chaque fois les hypothèses simplificatrices qui s'imposent [76,77].

Les équations dimensionnelle et adimensionnelle déterminant ce phénomène sont résolues dans une géométrie sphérique unidimensionnelle, bidimensionnelle et tridimensionnelle. Les résultats obtenus sont en parfaite concordance avec ceux d'autres auteurs qui traitent le même problème [47].

Conclusion Générale

La science médicale a fait des avancées importantes et peut maintenant contribuer à guérir et prolonger la vie de personnes malades qui, autrefois, n'avaient pas de chance de survie. Cette plus grande avancée s'est inexorablement produite grâce à l'utilisation du laser, qui est devenu omniprésent dans ce domaine.

Lorsque l'on utilise un laser dans sa pratique courante en médecine, il faut savoir quel effet on recherche et sur quel type de tissu on veut travailler pour ne pas occasionner de dommages dus à une utilisation non consciente de son matériel. Il faut donc à la fois connaître les propriétés physiques et optiques du laser que l'on désire utiliser mais aussi celles du tissu ou des tissus qui seront la cible des tirs. En effet chaque laser possède sa propre longueur d'onde qui va définir son champ d'application clinique en fonction de l'effet qu'il est capable de produire sur un tissu donné.

Dans le premier chapitre, après une bibliographie souffrant du manque de références dans le domaine, nous avons pu développer l'interaction du rayonnement laser avec le tissu biologique dont le contrôle et la maîtrise peut être effectuée en adaptant de multiples facteurs souvent liés à la géométrie de la surface concernée, l'environnement biologique, la durée d'exposition au laser, le gradient de température et la puissance énergétique.

Dans le deuxième et troisième chapitre nous avons présenté respectivement la formulation mathématique et les codes numériques sous Fortran qui permettent de résoudre les équations dimensionnelles et adimensionnelles régissant les phénomènes mis en jeu lors de cette interaction.

Les résultats des codes numériques pour les deux formes du problème (dimensionnel et adimensionnel) ainsi que leurs interprétations sont présentés dans le quatrième chapitre.

Nous avons choisi dans cette étude l'exemple de traitement de la coagulation d'un tissu tel que les hémangiomes par le laser Nd:Yag continu de longueur d'onde 1064nm pour sa bonne pénétration dans le tissu humain. La profondeur d'action dans le cas de ce laser est plus grande par rapport aux autres lasers ce qui le rend idéale pour les traitements pathologiques en profondeur.

Les résultats obtenus au cours de ce travail sont encourageants et peuvent encore être optimisés et élargis compte tenu du grand nombre de paramètres du faisceau laser (puissance mises en jeux, durée du ou des pulsations, longueur d'onde, fluence, ...) et les caractéristiques

physico-optiques du milieu tissulaire (conductivité thermique, masse volumique, facteur d'absorption, facteur de diffusion, facteur d'anisotropie, ...) sur lesquels on peut agir.

Perspectives

Les paramètres régissant l'interaction rayonnement-milieu biologique sont nombreux.

Les effets produits dépendent :

- De la source de rayonnement (longueur d'onde, temps d'interaction, densité de puissance délivrée) ;
- Du milieu biologique : Nature histologique, propriétés (physiques, optiques et thermiques) ;
- De l'environnement (tissus biologiques voisins).

Les perspectives envisageables en prolongement direct de cette thèse concernent trois objectifs importants :

- ✓ Etendre ce travail pour couvrir d'autres gammes de lasers,
- ✓ Réaliser des combinaisons d'émission laser est les modélisées afin de prédire leurs impacts thérapeutiques,
- ✓ Valider les modèles mathématiques et numériques en amont par des expérimentations en aval, afin de valider les processus
- ✓ Affiner la précision des modèles mathématiques et numériques (Introduire les paramètres exactes du tissu malgré sa complexité, ne pas négliger le phénomène de perfusion sanguine).

Références

- [1] Mario Bertolotti (1999) “The history of the Laser”, University of Rome ‘La Sapienza’ Translated from Storia del laser
- [2] Meyer-Schwickerath G R (1989), “The history of photocoagulation”, J. Ophthalmol. 17, 427 – 434
- [3] Maiman T H (1960), “Optical and microwave- optical experiments in ruby”, Physical Review letters VOLUME 4, NUMBER 11 JUNE 1, 1960 Hughes Research Laboratories, Malibu, California (Received April 22, 1960)
- [4] Igor Kozak , Jeffrey K. Luttrull (2014) “Modern retinal laser therapy”
- [5] Magdalena Zdybel, Barbara Pilawa and Anna Krzeszewska- Zaręba (2012) “Lasers in Ophthalmology” Medical University of Silesia in Katowice Poland
- [6] Leon GOLDMAN, M.D. (1967) “Biomedical Aspects of the Laser : The Introduction of Laser Applications Into Biology and Medicine”, DOI 10.1007/978-3-642-85797-3
- [7] H. JELÍNKOVÁ, (2013) “Lasers for medical applications”, Czech Technical University in Prague, Czech Republic DOI: 10.1533/9780857097545.1
- [8] F. A. L'ESPERANCE, JR., E. F. LABUDA, AND A. M. JOHNSON (1969) “Photocoagulation delivery systems for continuous - wave lasers” From the Institute of Ophthalmology, Columbia-Presbyterian Medical Center, New York, and the Bell Telephone Laboratories, New Jersey 53, 310
- [9] Aron ROSA D, Aron J, GRIESEMANN J and THYZEL R (1980), “Use of the neodym-YAG laser to open the posterior capsule after lens implant surgery: a preliminary report”, J. Am. Intraocular Implant Soc ., 6 , 352 – 354
- [10] HELLWARTH R W and MCCLUNG F J (1962), “Giant pulsation from ruby”, J. Appl. Phys., 33, 838 – 841
- [11] Ganesh KUMAR SWAMI (2012) “Numerical modeling of heat distribution during laser tissue interaction” a thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for a degree of Bachelor of Technology in Biotechnology

- [12] WELCH, A.J., TORRES, J.H., CHEONG, WAI-FUNG (1989) “Laser Physics and Laser-Tissue Interaction”. Texas Heart Institute Journal 16, 141-149
- [13] Mohammed M. JAWAD, Sarah T. ABDUL QADER, A.A. ZAIDAN, B.B. ZAIDAN, A.W. NAJI and Ibraheem T. ABDUL QADER (2011) “An Overview of Laser Principle, Laser-Tissue Interaction Mechanisms and Laser Safety Precautions for Medical Laser Users”, International Journal of Pharmacology, Volume : 7, Issue: 2, Page No.: 149-160 DOI : 10.3923/ijp.2011.149.160
- [14] William M. STEEN, Jyotirmoy MAZUMDER (2010) “Laser Material Processing” 4th Edition
- [15] A. LAURAIN (2011) “Sources laser à semiconducteur à émission verticale de haute cohérence et de forte puissance dans le proche et le moyen infrarouge”
- [16] Orazio SVELTO, (1976) “Principles of Lasers”, translated from Italian and edited by David C. HANNA
- [17] Hélène WALTER (2017) “Les tissus biologiques : Structure, comportement mécanique et modélisation”
- [18] Jean-Michel ANDRE, Martin CATALA, Jean-Jacques MORERE, Estelle ESCUDIER, Georges KATSANIS, Jacques POIRIER (2008) “Histologie : les tissus”, Université Pierre et Marie Curie
- [19] Alan STEVENS, James LOWE (2006) “ Histologie humaine ”
- [20] Mouhamad IBRAHIM (2012) “Mesure de bio-impédance électrique par capteurs interdigites”, université de LORRAINE, Spécialité : Systèmes électroniques
- [21] KLINTEBERG, C., (1999) “L'utilisation de la lumière pour la caractérisation et le traitement des tumeurs malignes”, Rapports en physique atomique, LRAP-245, p.302
- [22] Mariem BEN HAMOUDA (2015) “Etude, conception et modélisation de la diffusion de la chaleur dans les tissus biologiques”, Université du Québec à Trois-Rivières
- [23] MARKOLF H., NIEMZ (2007) “Laser-Tissue Interactions Fundamentals and Applications”, Third, page 9 – 24
- [24] BERBAR Badiâa (2011) “Etude des Propriétés Thermiques de Matériaux Composites à Base de Nanoparticules Métalliques et de Tissus Biologiques”

- [25] Jean-luc BOULNOIS (1986) "Photophysical Processes in Recent Medical Laser Developments : a Review"
- [26] Nuha HASSAN KINASH (2008) "Applications of Laser in Medicine", thesis University of Khartoum College of Post Graduate Studies
- [27] G. MOUTHON et P. RAVUSSIN (2006) "Introduction aux lasers", Laboratoire de Physique et Chimie Biologique et Médicale Ecole Nationale Vétérinaire d'Alfort
- [28] Jeff. HECHT (1971), "The Laser and Applications Layers", Francis LTD London
- [29] F. Amoravin, Y. Maillard-Salin, D. Perrin (1998) "Les Lasers : Principe, fonctionnement et applications"
- [30] Marie-Christine Artru, (2011), "Les lasers en questions", Centre de recherche d'astrophysique de Lyon, ENS Lyon
- [31] William T. Silfast, (2004) "Laser Fundamentals", second edition, London, published by the press syndicate of the University of Cambridge
- [32] Luc DETTWILLER (1998) "Les Lasers et leurs applications"
- [33] H. MAILLET et al. (1984) "Le laser : principe et techniques d'application"
- [34] I. DIAMOND, S. GRANELLI, S. MC DONAGH, C. WILSON, and R. JAENICKE, (1972) "Photodynamic therapy of malignant tumours," Lancet, vol. 2, no. 7788, pp. 1175–1177
- [35] J.M. BRUNETAUD, S. MORDON, T. DESMETTRE et C. BEACCO, (2002) "Les applications thérapeutiques des lasers", Unité INSERM 279, Laboratoire des Lasers, Hopital C.Huriez, 59037 Lille
- [36] J.M. BRUNETAUD (2002) "Les mécanismes d'interaction laser - tissus vivants"
- [37] Jean-Baptiste TYLCZ (2013) "Identification et contrôle de systèmes biologiques Application à la thérapie photodynamique"
- [38] Adrian Bradu (2004) "Méthodes Optiques d'exploration des tissus biologiques. Spectrométrie des tissus cérébraux au moyen des sondes miniatures à fibres optiques et imagerie par Tomographie Optique Cohérente"
- [39] Pr. S. Abderafi "Cours Transfert thermique", Université Mohammed V– AGDAL, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs

- [40] Pr. Kamal GUERAOUI “Analyse numérique : Méthode des volumes finis”, Université Mohammed V– AGDAL
- [41] Dr. Mohammed BELCADI (2015) “Modélisation Théorique et Numérique de l’Usinage de l’Alumine par Combinaison du Laser et Micro-ondes”, Université Mohammed V– AGDAL
- [42] Abdenour ABTROUN (1977) “Recherche d'une permutation optimale des variables dans la méthode itérative de Gauss-Seidel”, Institut National Polytechnique de Grenoble
- [43] Huan Huang and Zhixiong Guo (2009) “Human dermis separation via ultra-shortpulsed laser plasma-mediated ablation”, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Rutgers, The State University of New Jersey, Piscataway
- [44] Dr. Yacouba Kotolama DIARRA (2010) “Aspects épidémiologiques et cliniques des angiomes au chu de gabrieltoure”, Université de BAMAKO, Faculté de Médecine de Pharmacie et Faculté de Médecine de Pharmacie et d’Odonto-Stomatologie
- [45] S. GABAY and al, (1997) “Modeling the Assessment of port wine stain parameters from skin surface temperature following a diagnostic laser pulse” lasers in surgery and medicine vol.20,pp.179-187
- [46] J.K. BARTON and al, (1998) “Optical Monte Carlo modelling of true port wine stain anatomy”, University of Texas at Austin
- [47] R. BIRGRUBER (1980) “Thermal Modeling in biological tissues”, Ed:F. Hillenkamp
- [48] MULLIKEN J.B., GLOWACKI J. (1982) “Hemangiomas and vascular malformations in infants and children: a classification based on endothelial characteristic”, Plastic and Reconstructive Surgery ; 69 : 412-422
- [49] ALPER J.C., HOLMES L.B. (1983) “The incidence and significance of birthmarks in a cohort of 4641 newborns”, Pediatric Dermatology ; 1 : 58-68
- [50] GARZON M.C. (2003) “Infantile hemangiomas”, Dermatology London: Mosby

- [51] BARSKY S.H., ROSEN S., GEER D.E., NOE J.M. (1980) "The nature and evolution of port-wine stains : A computer-assisted study", *Journal of Investigative Dermatology* ; 74 : 154-157
- [52] SMOLLER B.R., ROSEN S. (1986) "Port-wine stains : A disease of altered neural modulation of blood vessels", *Archives of Dermatology* ; 122 : 177-179
- [53] APFELBERG D.B., MASER M.R., LASH H. (1978) "Argon laser treatment of cutaneous vascular abnormalities : progress report" *Annals of Plastic Surgery*; 1 : 14-18
- [54] LANIGAN S.W., COTTERILL J.A. (1990) "The treatment of port-wine stains with the carbon dioxide laser" *British Journal of Dermatology* ; 123 : 229-235
- [55] SHEEHAN-DARE R.A., COTTERILL J.A. (1990) "Copper vapour laser treatment of port-wine stains : clinical evaluation and comparison with conventional argon laser therapy", *British Journal of Dermatology* ; 128 : 546-549
- [56] ROTTELEUR G., MORDON S., BRUNETAUD J.M. (1991) "Argon 488-514, Nd:YAG 532 and CW dye 585 for port-wine stains treatment using the hexascan Lasers", *Journal of Surgery and Medicine*; Suppl. 3 : 68
- [57] WOO W.K., JASIM Z.F., HANDLEY J.M. (2004) "Evaluating the efficacy of treatment of resistant port-wine stains with variable-pulse 595-nm pulsed dye and 532-nm Nd:YAG lasers", *Dermatologic Surgery* ; 30 : 158-162
- [58] MORELLI J.G., WESTON W.L., HUFF J.C., YOHN J.J. (1995) "Initial lesion size as a predictive factor in determining the response of port-wine stains in children treated with the pulsed dye laser", *The Archives of Pediatrics & Adolescent Medicine* ; 149 : 1142-1144
- [59] NGUYEN C.M., YOHN J.J., HUFF C., WESTON W.L., MORELLI J.G. (1998) "Facial port-wine stains in childhood : prediction of the rate of improvement as a function of the age of the patient, size and location of the port-wine stain and the number of treatments with the pulsed dye (585nm) laser", *British Journal of Dermatology* ; 138 : 821-825
- [60] FITZPATRICK R.E., LOWE N.J., GOLDMAN M.P., BORDEN H., BEHR K.L., RUIZ-ESPARZA J. (1994) "Flashlamp-pumped pulsed dye laser treatment of port-wine stains", *The Journal of dermatologic surgery and oncology*; 20 : 743-748

- [61] RENFRO L., GERONEMUS R.G. (1993) "Anatomical differences of port-wine stains in response to treatment with the pulsed dye laser", Archives of Dermatology; 129 : 182-188
- [62] TAN O.T. (1992) "Pulsed dye laser treatment of adult port-wine stains Management and treatment of benign vascular lesions", Philadelphia : Lea & Febiger 83-99
- [63] HIRSHBURG J., CHOI B., NELSON J.S., YEH A.T. (2006) "Collagen solubility correlates with skin optical clearing", Journal of Biomedical Optics; 11 : 040501
- [64] LIU H., BEAUVOIT B., KIMURA M., CHANCE M. (1996) "Dependence of tissue optical properties on solute-induced changes in refractive index and osmolarity", Journal of Biomedical Optics ; 1 : 200-211
- [65] MORDON S. (2003) "Transformation de l'hémoglobine en méthémoglobine lors du chauffage sanguin. Intérêt pour le traitement par laser Nd:YAG (1,06µm) des lésions vasculaires", Annales de dermatologie et de venereologie; 130 : 648-651
- [66] CHAPAS A., FAZELI A., GOLDBERG D., GERONIMUS R. (2006) "Sequential, dual wavelength treatment of port-wine birthmarks: pilot study Lasers", Journal of Surgery and Medicine ; Suppl. 18 : 21
- [67] MUCKLE T.J. (1976) "Plasma proteins binding of indocyanine green", Biochemical Medicine ; 15 : 17-21
- [68] NELSON J.S., MILNER T.E., ANVARI B., TANENBAUM B.S., SVAASAND L.O., KIMEL S. (1996) "Dynamic epidermal cooling in conjunction with laser-induced photothermolysis of port-wine stain blood vessels Lasers", Journal of Surgery and Medicine ; 19 : 224-229
- [69] KLAVUHN K.G., GREEN D. (2002) "Importance of cutaneous cooling during photothermal epilation : Theoretical and practical considerations Lasers", Journal of Surgery and Medicine; 31 : 97-105
- [70] A. L. MOUTARAJJI (2016) "Intérêt des lasers en dermato-cosmétologie", Université Mohammed V– Faculté de médecine et de pharmacie, RABAT
- [71] Christian DELSART (2008) « Lasers et optique non linéaire ", Physique -LMD, Universités, Ecoles d'ingénieurs, Ellipses, Bibl. Insa D8e

- [72] Sophie FAURE (2004) “Etude de l'interaction rayonnement-matière dans un milieu granulaire en vue de l'application au procédé de frittage laser”, Matériaux Céramiques et Traitements de Surface Ecole Nationale Supérieure de Céramique Industrielle
- [73] C. F. BOHREN, D. R. HUFFMAN, (1983) “Absorption and scattering of light by smallparticles”, éd. Wiley-Interscience
- [74] Dr. Samir MEN-LA-YAKHAF (2015) “Modélisation numérique et mathématique des transferts réactifs de masse et de chaleur dans les installations de stockage des résidus d’arganier et de palmier”, Université Mohammed V– AGDAL
- [75] Dr. Ilham ABERDANE (2014) “Modélisations Théorique et Numérique du Phénomène de la Pollution Atmosphérique”, Université Mohammed V– AGDAL
- [76] A. BOUNOUAR, K. GUERAOU, M. TAIBI, A. LAHLOU, M. DRIOUICH, M. SAMMOUDA, S. MEN-LA-YAKHAF, M. BELCADI (2017) “Numerical and mathematical modeling of an unsteady heat transfer within a spherical cavity: Applications laser in medicine”, International Review of Civil Engineering (IRECE), Vol. 8, no. 4, 187-195
- [77] A. BOUNOUAR, K. GUERAOU, M. TAIBI, M. DRIOUICH, A. RTIBI, Y. BELKASSMI, G. ZEGGWAGH (2018) “Mathematical and Numerical Modeling of an Unsteady Heat Transfer within a Spherical Cavity: Laser Interaction with Human Skin”, International Review of Civil Engineering (IRECE), Vol. 9, no. 5, 209-217
- [78] D. HAINA et al (1987) “Comparison of maximum coagulation depth in human skin for different types of medical lasers”, laser in Surgery and Medicines, Vol .7, pp.355-362
- [79] F.V LEMADRAND (1992) “Classification des angiomes hémangiomes et malformations vasculaires superficielles”, Revue du praticien
- [80] G. YOON, A. J. WELCH, M. J C VAN GEMERT (1985) “The thermal effect of laser light scattering in a biological”, Medium.L.L.A, vol.5, pp.105-111
- [81] Marie-Aleth Richard (2014) “Revêtement cutané - Les lasers dermatologiques”, Collège des Enseignants en Dermatologie de France

- [82] TAY YK, TAN SK (2012) "Treatment of infantile hemangiomas with the 595-nm pulsed dye laser using different pulse widths in an Asian population", *Journal of Surgery and Medicine* ; 44 : 93-6