



**Formation Doctorale : Sciences et Technologies de l'Information
et de la Communication (STIC)**

Discipline : Physique

Spécialité : Génie électrique

Laboratoire : Electronique, Signaux, Systèmes et d'Informatique (LESSI)

THESE DE DOCTORAT

Présentée par
Hicham KARMOUNI

**Algorithmes Rapides et Stables de Calcul des Moments de Charlier pour
L'analyse et la Classification des Images 2D/3D**

Soutenue le 26/12/2019 devant le jury composé de :

Pr. Driss CHENOUNI	ENS, Fès	Président
Pr. Mohammed SEBBANE	FS, Meknès	Rapporteur
Pr. Brahim AKSASSE	FST, Errachidia	Rapporteur
Pr. Ahmed TAHIRI	ENS, Fès	Rapporteur
Pr. Abdellah REZZOUK	FSDM, Fès	Examineur
Pr. Mhamed SAYYOURI	ENSA, Fès	Co-Encadrant de thèse
Pr. Hassan QJIDAA	FSDM, Fès	Directeur de thèse

À l'âme de ma grande mère

À mon père

À ma mère

À mon frère et ma sœur

A tous ceux à qui, je dois ce que je suis devenu

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du laboratoire d'Electronique, Signaux-Systèmes et d'Informatique de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès; sous la direction de Monsieur le Professeur **Hassan QJIDAA**. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour l'encadrement de ce travail, sa grande disponibilité et l'enthousiasme dont il a fait preuve tout au long de la période d'encadrement.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur **Mhamed SAYYOURI**, Co-encadrant de thèse, pour son suivi, ses conseils judicieux et ses discussions qui m'ont beaucoup aidé au cours de mes recherches.

Je remercie Monsieur **Driss CHENOUNI**, Directeur de l'Ecole Normale Supérieure, Fès, d'avoir accepté de me faire l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements à Monsieur **Mohammed SEBBANE**, Professeur à la Faculté des Science, Meknès, et de **Brahim AKSASSE** Professeur à la Faculté des Science et Technique, Errachidia, et à Monsieur **Ahmed TAHIRI**, Professeur de l'Ecole Normale Supérieure, Fès, d'avoir pris le temps de juger ce travail et surtout de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur **Abdellah REZZOUK**, Professeur de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde sympathie à toutes les personnes qui composent le laboratoire LESSI.

Aussi, je ne remercierais jamais assez ma mère, mon père, mon frère et ma sœur, de m'avoir toujours encouragé, et soutenu tout au long de mes études.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	4
Liste des figures	7
Liste des tableaux	10
Liste des abréviations, des sigles et des acronymes	11
Résumé	13
Abstract	14
Introduction générale.....	15
1. Contexte et problématique	15
2. Approches proposées.....	16
3. Plan du manuscrit	17
Chapitre I : Méthode de Calcul des Moments Orthogonaux Discrets de Charlier 2D/3D	19
1. Introduction	19
2. Etat de l'art	19
3. Polynômes orthogonaux d'une variable discrète.....	22
3.1. Equation de différence	22
3.2. Forme générale des polynômes orthogonaux discrets	23
3.3. Propriété d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets	25
3.4. Domaines d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets	26
3.5. Relation de récurrence par rapport à l'ordre n	26
3.6. Relation de récurrence par rapport à la variable x	26
4. Les moments orthogonaux discrets de Charlier	28
4.1. Les moments de Charlier unidimensionnels (1D).....	29
4.2. Les moments de Charlier bidimensionnels (2D).....	30
4.3. Les moments de Charlier tridimensionnels (3D)	30
5. Polynômes orthogonaux d'une variable discrète de Charlier	31
5.1. Calcul directe des polynômes de Charlier.....	31
5.2. Relation de récurrence par rapport à l'ordre n	32
5.2.1. Représentation graphique des polynômes de Charlier calculés par la relation de récurrence par rapport à l'ordre n	33
5.3. Relation de récurrence par rapport à la variable x	33
6. Conclusion.....	36
Chapitre II : Calcul Rapide des Moments de Charlier et de ses Inverses par la Formule de Récurrence de Clenshaw	37
1. Introduction	37
2. Calcul des Moments de Charlier et ses Inverses par la Formule de Clenshaw	38
2.1. Formule de récurrence de Clenshaw	38
2.2. Moments de Charlier unidimensionnels (1D).....	39
2.3. Moments de Charlier bidimensionnels (2D).....	40
3. Reconstruction des images par la formule de Clenshaw	42

3.1. Reconstruction des signaux unidimensionnels.....	42
3.2. Reconstruction d'images 2D	43
4. Résultats de Simulations.....	44
4.1. Temps de calcul des moments de Charlier et ses inverses.....	45
4.2. Reconstruction d'images via les moments de Charlier et de Krawtchouk calculés par la formule de Clenshaw	47
5. Conclusion.....	48
Chapitre III: Algorithme Rapides et Stables de calcul des Moments de Charlier 2D/3D via les Filtres Numériques	49
1. Introduction	49
2. Calcul rapide et stable des moments de Charlier 2D [Karmouni et al, 2018]	49
2.1. Sortie des filtres numériques 2D	50
2.2. Calcul rapide des moments de Charlier 2D via les filtres numériques 2D	52
2.3. Reconstruction rapide et stable d'image 2D via les filtres numériques 2D à partir des blocs fixes.....	54
3. Calcul rapide et stable des moments de Charlier 3D et de ses inverses [Karmouni et al, 2019a]	56
3.1. Sortie des filtres numériques 3D	57
3.2. Calcul rapide des moments de Charlier 3D et de ses inverses via les filtres numériques 3D.....	59
3.3. Reconstruction d'image 3D via les moments de Charlier 3D calculés par les filtres numériques 3D.....	61
3.4. Reconstruction rapide et stable d'image 3D via les moments de Charlier 3D calculés à partir des cuboïdes fixe	62
4. Résultats de Simulations et Discussions.....	64
4.1. Temps de calcul des moments de Charlier 2D/3D.....	64
4.2. Reconstruction d'image 2D via les moments de Charlier calculés par l'approche 1 .	68
4.3. Reconstruction d'image 3D via les moments de Charlier calculés par l'approche 2 .	71
Chapitre IV: Reconstruction Rapide d'Images 3D via les Moments de Charlier 3D	76
1. Introduction	76
2. Représentation d'image 3D par cuboïdes (ICR), [Karmouni et al, 2019b].....	77
3. Calcul rapide des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D.....	79
3.1. Calcul direct des moments de Charlier 3D	79
3.2. Calcul matriciel des moments de Charlier 3D	81
4. Reconstruction rapide d'images 3D par les moments de Charlier 3D	84
4.1. Reconstruction locale d'images 3D par le calcul direct des moments de Charlier 3D	84
4.2. Reconstruction locale d'images 3D par le calcul matriciel des moments de Charlier 3D	85
5. Résultats de simulations et discussion.....	87
5.1. Temps de calcul des moments de Charlier 3D.....	87

5.2.Reconstruction d'images 3D par les méthodes globale et locale en utilisant les moments de Charlier 3D.....	92
6. Conclusion.....	100
Chapitre V: Extraction Rapide et Stable des Invariants des Moments de Charlier 3D pour la Classification des Images 3D	101
1. Introduction	101
2. Moments orthogonaux discrets invariants de Charlier 3D	102
2.1.Moments géométriques invariants 3D	102
2.2.Moments discrète invariants de Charlier 3D.....	105
3. Calcul rapide et stable des moments invariants de Charlier 3D	106
4. Résultats expérimentaux.....	109
4.1. Temps de calcul des invariants des moments de Charlier 3D.....	109
4.2. Invariabilité	112
4.3. Classification d'image 3D.....	116
5. Conclusion.....	119
Conclusion générale	120
Liste des publications	121
Références	125

Liste des figures

Figure I.1. Classification des familles des moments d'image	21
Figure I.2. Distribution des fonctions des moments par la dimension	29
Figure I.3. Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à l'ordre n pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$	33
Figure I.4. Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à la variable x pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$	34
Figure I.5. (a): Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence de $\omega(x)$ et $\rho(n)$ pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): Tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$	35
Figure II.1. Images de test : Image binaire "Zewaka" et Image en niveaux de gris "Lena"	45
Figure II.2. Temps de calcul des moments de Charlier pour l'image binaire "Zewaka" par les trois méthodes	45
Figure II.3. Temps de calcul des moments de Charlier pour l'image en niveau de gris "Lena" par les trois méthodes	45
Figure II.4. Ensemble des images reconstruites des images "Zewaka" et "Lena" par les moments de Charlier calculés par la formule de Clenshaw	46
Figure II.5. Erreurs de reconstruction de l'image binaire "Zewaka" en utilisant les moments de Krawtchouk et de Charlier. (a): "MSE" et (b): "PNSR"	47
Figure II.6. Erreurs de reconstruction de l'image "Lena" en utilisant les moments de Krawtchouk et de Charlier. (a): "MSE" et (b): "PNSR"	48
Figure III.1. La structure de filtre numérique sur le chemin de retour	50
Figure III.2. La structure des filtre numériques pour générer la sortie 1D y_n à l'ordre n	50
Figure III.3. La structure des filtres numériques pour générer la sortie 2D y_{nm} à l'ordre $(n+m)$	52
Figure III.4. Illustration de la méthode de reconstruction d'image par blocs en utilisant les moments orthogonaux discrets de Charlier. (a): partitionnement de l'image initiale en N_b sous-images. (b): extraction de moments pour chaque bloc. (c): reconstruction et fusion des N_b blocs	55
Figure III.5. Diagramme de reconstruction d'image 2D par blocs	56
Figure III.6. La structure des filtres numériques pour générer la sortie y_{nmk} 3D à l'ordre $(n+m+k)$	58
Figure III.7. La représentation d'image 3D en cuboïdes de taille fixe	62
Figure III.8. Ensemble d'images binaires : (a) Chicken, (b) Lizzard et (c) Dog	65
Figure III.9. Ensemble d'images en niveaux de gris : (a) Lena, (b) Livingroom et (c) Cameraman	65
Figure III.10. Temps de calcul moyen des moments de Charlier pour trois images binaires en utilisant trois méthodes différentes (a) image sous forme de blocs de taille $[4 \times 4]$ (b) image sous forme de blocs de taille $[8 \times 8]$	65
Figure III.11. Temps de calcul moyen des moments de Charlier pour trois images en niveau de gris, en utilisant trois méthodes différentes (a) image sous forme de blocs de taille $[4 \times 4]$ (b) image sous forme de blocs de taille $[8 \times 8]$	66
Figure III.12. Images 3D de taille $128 \times 128 \times 128$ voxels utilisées dans l'évaluation du temps de calcul des moments de Charlier 3D	66

Figure III.13. Temps de calcul des moments de Charlier 3D pour six images 3D de taille 128×128×128 voxels en utilisant les trois méthodes.....	67
Figure III.14. Erreur de reconstruction d'images binaires en utilisant trois méthodes différentes de calcul des moments de Charlier à partir des blocs de tailles : (a) [4x4] et (b) [8x8]....	69
Figure III.15. Erreur de reconstruction d'images en niveaux de gris en utilisant trois méthodes différentes calcul des moments de Charlier à partir des blocs de tailles : (a) [4x4] et (b) [8x8]	69
Figure III.16. Images binaires reconstruites selon l'approche proposée 1 en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille [4x4] et [8x8]	70
Figure III.17. Images en niveaux de gris reconstruites selon l'approche proposée en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille [4x4] et [8x8]	70
Figure III.18. (a) Image en niveaux de gris "Woman", (b) Image bruité par "Sel & Poivre" et (c) Image bruité par "Gaussien"	71
Figure III.19. Erreur de reconstruction de l'image bruité " Women ", en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille (a) [4x4] et (b) [8x8].....	71
Figure III.20. Reconstruction d'images 3D par ICRF via les moments de Charlier 3D.....	72
Figure III.21. La moyenne des erreurs quadratiques moyennes (MSE) des images reconstruites par des cuboïdes de différentes tailles.....	73
Figure III.22. Reconstruction d'images par ICRF en utilisant des cuboïdes de taille fixe [4×4×4] pour différents types des moments.....	74
Figure III.23. Moyenne des erreurs de reconstruction d'image 3D pour les différents moments en utilisant l'approche proposée basée sur des cuboïdes de taille [4x4x4], (a) MSE et (b) PSNR.....	75
Figure IV.1. Représentation d'une image 3D	77
Figure IV.2. Plusieurs vues de la représentation d'image "Airplane" par cuboïdes	79
Figure IV.3. Organigramme de reconstruction d'image 3D	87
Figure IV.4. Ensemble des images 3D et ses représentations par cuboïdes en utilisant l'algorithme (ICR).....	88
Figure IV.5. Ensemble des images 3D et ses représentations par cuboïdes en utilisant l'algorithme (ICR).....	89
Figure IV.6. Temps de calcul des moments de Charlier 3D pour les images 3D "Ant" (a) et "Bird" (b) en utilisant la méthode récursive et les méthodes proposées : directe et matricielle.....	90
Figure IV.7. Le temps de reconstruction des images 3D "Ant" (a) et "Bird" (b) par les moments 3D Charlier en utilisant la méthode récursive et les méthodes proposées directe et matricielle.....	91
Figure IV.8. (a) " MSE " et (b): " PNSR " en utilisant les moments de Charlier 3D pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale	93
Figure IV.9. (a) " MSE " et (b) " PNSR " en utilisant les moments de Charlier 3D pour l'image 3D "IRM" par les méthodes globale et locale	93
Figure IV.10. (a) " MSE " et (b) " PNSR " en utilisant les moments 3D de Tchebichef pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale	94
Figure IV.11. (a) " MSE " et (b) " PNSR " en utilisant les moments 3D de Krawtchouk pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale	94
Figure. IV.12 : (a) " MSE " et (b) " PNSR " en utilisant les moments 3D de Hahn pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale.....	94
Figure IV.13. (a) " MSE " et (b) " PNSR " en utilisant les moments 3D de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn et Charlier pour l'image 3D "Crab" par la méthode locale	95
Figure IV.14. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Airplane" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement.....	96

Figure IV.15. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Table" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement.....	97
Figure IV.16. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Image 2" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement.....	98
Figure IV.17. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Image 3" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement.....	99
Figure V.1. La représentation d'image par Cuboïde en utilisant l'algorithme (ICR), pour les images binaires 3D de "Dog", "Crabs" et "Teddy-bears"	110
Figure V.2. La représentation d'image par Cuboïde en utilisant l'algorithme (ICR), pour les images en niveaux de gris 3D de MRI 1 et MRI 2.....	111
Figure V.3. Les images binaires 3D : (a). Human et (b). Spiders de taille, $200 \times 200 \times 200$ voxels	113
Figure V.4. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions translatées utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	113
Figure V.5. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions mises à l'échelle utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	113
Figure V.6. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions pivotées utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	114
Figure V.7. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions bruitées utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	114
Figure V.8. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions translatées utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	115
Figure V.9. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions mises à l'échelle utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	115
Figure V.10. Erreurs relatives pour (a). "Human" et (b). "Spiders" entre les images originales et les versions pivotées utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée	116
Figure V.11. Collection de 10 objets extraits de la base de données PSB utilisés comme ensemble d'apprentissage	117

Liste des tableaux

Tableau I.1. Les données de base des polynômes orthogonaux discrets de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier	23
Tableau I.2. La fonction poids, le facteur de normalisation et la fonction norme carré des polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et de Meixner	25
Tableau I.3. Les coefficients de récurrence les polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et de Meixner	26
Tableau I.4. Les valeurs initiales de la relation de récurrence à trois termes par rapport à la variable x pour les polynômes de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier .	28
Tableau II.1. Temps reconstruction de l'image en niveau de gris "Zewaka" par les trois méthodes	46
Tableau II.2. Temps reconstruction de l'image en niveau de gris "Lena" par les trois méthodes	46
Tableau III.1. Temps moyen de calcul des moments 3D par les trois méthodes et le pourcentage de réduction de l'image 3D "Airplane"	68
Tableau III.2. Temps moyen de reconstruction d'image 3D en utilisant les moments 3D par les trois méthodes et le pourcentage de réduction de l'image 3D "Airplane"	68
Tableau IV.1. Temps moyen de calcul et pourcentage de réduction des moments de l'image 3D "Bird" par les trois méthodes	91
Tableau IV.2. Temps moyen de reconstruction de l'image 3D "Bird" en utilisant les moments 3D par les trois méthodes	92
Tableau V.1. Temps moyens en secondes et pourcentages de réduction des moments discrets invariants pour l'ordre des moments 18, utilisant la méthode ICR proposée et la méthode classique, pour les images binaires de "Dog" et "Crabs"	111
Tableau V.2. Temps moyens en secondes et pourcentages de réduction des moments discrets invariants pour l'ordre des moments 18, en utilisant la méthode ICR proposée et la méthode classique, pour les images multi-niveaux de "MRI 1" et "MRI 2"	112
Tableau V.3. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance euclidienne d_1	118
Tableau V.4. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance du bloc de ville d_2	118
Tableau V.5. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance en corrélation d_3	118
Tableau V.6. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance euclidienne d_1	119
Tableau V.7. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance du bloc de ville d_2	119
Tableau V.8. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance en corrélation d_3	119

Liste des abréviations, des sigles et des acronymes

Symboles	Significations
σ	Polynôme de 2 ^{ième} degré.
τ	Polynôme de 1 ^{ième} degré.
λ_n	Une constante appropriée.
Δ	L'opérateur de différence en avance.
∇	L'opérateur de différence en arrière.
$P_n(x)$	Le $n^{\text{ème}}$ polynôme d'une variable discrète x .
$C_n^{a_1}(x)$	Les polynômes orthogonaux discrets de Charlier.
$H_n^{(a,b)}(x, N)$	Les polynômes orthogonaux discrets de Hahn.
$t_n(x, N)$	Les polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef.
$K_n^p(x, N)$	Les polynômes orthogonaux discrets de Krawtchouk.
$M_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	Les polynômes orthogonaux discrets de Meixner.
B_n	Le facteur de normalisation.
$\omega_n(x)$	La fonction de poids de l'ordre n .
$\omega(x)$	La fonction de poids de l'ordre $n=0$.
∇^n	L'opérateur de différence en arrière de l'ordre n .
${}_rF_s$	La série hypergéométrique généralisée.
$(a)_k$	Le symbole de Pochhammer de a .
Γ	La fonction gamma.
$\langle a \rangle_k$	La factorielle décroissante.
$S(k, i)$	Le nombre de Stirling.
$\rho(n)$	La fonction norme carrée.
δ_{nm}	La fonction de Dirac.
CM_n	Les moments de Charlier d'ordre (n)
CM_{nm}	Les moments de Charlier d'ordre $(n+m)$
CM_{nmk}	Les moments de Charlier d'ordre $(n+m+k)$
$f(x)$	Fonction d'un signal 1D
$f(x, y)$	Fonction d'une image 2D
$f(x, y, z)$	Fonction d'une image 3D
MPEG-7	La base d'image MPEG-7 CE-shape-1 Part B.
McGill	La base de données 3D Shape Benchmark de McGill.
ETIR%	Le taux d'amélioration de temps d'exécution.

MSE	L'erreur quadratique moyenne pour une image.
$PSNR$	Le rapport Peak Signal-To-Noise Ratio.
$H(z)$	La fonction de transfert d'ordre $n=0$
$H_n(z)$	La fonction de transfert d'ordre n
y_n	La sortie des filtres numériques 1D.
y_{nm}	La sortie des filtres numériques 2D.
y_{nmk}	La sortie des filtres numériques 3D.
ICRF	La représentation d'image 3D par cuboïdes fixe.
ICR	La représentation d'image 3D par cuboïdes.
Cub	Le Cuboïde d'une image 3D
MC	Les moments de Charlier
MH	Les moments de Hahn
MT	Les moments de Tchebichef
MK	Les moments de Krawtchouk
MM	Les moments de Meixner
GM_{nmk}	Les moments géométriques 3D $(n+m+k)$.
μ_{nmk}	Les moments géométriques centraux 3D $(n+m+k)$.
GMI_{nmk}	Les moments géométriques invariants 3D $(n+m+k)$.
$\alpha_{n,i}^{a_i}$	Les coefficients des monômes du polynôme de Charlier.
$PGMI_{nmk}$	Les moments géométriques invariants proposés 3D $(n+m+k)$.
$PGMI_{nmk}^i$	Les moments géométriques invariants proposés d'intensité i 3D $(n+m+k)$.
$PGMI_{nmk}^{cub_j^i}$	Les moments géométriques invariants proposés d'intensité i de chaque cuboïde j 3D $(n+m+k)$
CMI_{nmk}	Les moments invariants de Charlier 3D d'ordre $(n+m+k)$
MIC	Les moments invariants de Charlier
MIH	Les moments invariants de Hahn
MIT	Les moments invariants de Tchebichef
MIK	Les moments invariants de Krawtchouk
MIM	Les moments invariants de Meixner
V	Le vecteur de primitives.
TV	Le vecteur de translation.
$E(f, g)$	L'erreur relative entre f et g .
d_1	La distance Euclidienne
d_2	La distance de bloc de ville
d_3	La distance de corrélation
η	La précision de la reconnaissance.

Résumé

Les travaux proposés dans cette thèse s'intéressent aux applications des moments orthogonaux discrets de Charlier dans le domaine de l'analyse d'images. Ces travaux sont présentés suivant quatre axes différents concernant la reconstruction et la classification des images 2D/3D. Dans le premier axe, nous proposons une méthode efficace pour l'accélération du processus du calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier et leurs inverses en utilisant la formule de récurrence de Clenshaw.

Le deuxième axe traitera les problèmes de consommation de temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier et de stabilité numérique des valeurs polynômiales pour les ordres élevés. Pour résoudre ces problèmes, nous proposons deux algorithmes rapides et stables pour la reconstruction d'image 2D/3D, en se basant sur les filtres numérique 2D/3D pour accélérer le temps de calcul des moments de Charlier et la représentation d'image 2D/3D par blocs et cuboïdes fixes pour assurer la stabilité numérique.

L'objectif du troisième axe est la reconstruction rapide et stable des images 3D en proposant une nouvelle approche basée sur la représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR). Par cette représentation, l'image 3D sera décomposée par un ensemble de cuboïdes de même niveau de gris au lieu des voxels. Ceci permet de réduire considérablement la quantité des éléments traités et par conséquent de réduire le temps de calcul des moments et le temps de reconstruction des images 3D.

Dans le quatrième axe, nous présentons une nouvelle approche pour l'extraction rapide et stable des invariants des moments de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation en utilisant la représentation d'image par cuboïdes. Cette approche a permis de réduire considérablement le temps d'extraction des moments invariants de Charlier 3D.

Mots-clefs : Polynômes de Charlier, moments de Charlier 1D/2D/3D, formule de Clenshaw, reconstruction des images 2D/3D, représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR), classification des images 3D.

Abstract

The work proposed in this thesis focuses on the applications of Charlier's discrete orthogonal moments in the field of image analysis. This work is presented according to four different axes concerning the reconstruction and classification of 2D/3D images. In the first axis, we propose an efficient method for accelerating the process of calculating Charlier's discrete orthogonal moments and their inverses using the Clenshaw recurrence formula.

The second axis will address the problems of time consumption for calculating discrete orthogonal Charlier moments and the numerical stability of polynomial values for high orders. To solve these problems, we propose two fast and stable algorithms for 2D/3D image reconstruction, based on 2D/3D digital filters to accelerate the calculation time of Charlier moments and 2D/3D image representation by fixed blocks and cuboids to ensure digital stability.

The objective of the third axis is the rapid and stable reconstruction of 3D images by proposing a new approach based on the representation of 3D images by cuboids (ICR). By this representation, the 3D image will be decomposed by a set of cuboids of the same grey scale instead of voxels. This significantly reduces the amount of elements processed and subsequently reduces the time required to calculate moments and reconstruct 3D images.

In the fourth axis, we present a new approach for the fast and stable extraction of invariants of Charlier 3D moments by translation, scaling and rotation using cuboid image representation. This approach has considerably reduced the extraction time of the invariant moments of Charlier 3D.

Keywords: Charlier polynomials, 1D/2D/3D Charlier moments, Clenshaw formula, 3D image cuboids representation (ICR), 2D/3D image reconstruction, 2D/3D image classification.

Introduction générale

Les travaux présentés dans ce rapport de thèse s'inscrivent dans le domaine de l'analyse d'images 2D/3D, plus précisément la reconstruction, la reconnaissance des formes et la classification par les moments orthogonaux discrets de Charlier. Les contributions présentées dans cette thèse donnent des solutions aux problèmes liés au calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier et leurs applications pour la reconstruction et la classification des images 2D/3D. Dans cette introduction, nous présenterons d'abord le contexte dans lequel nous nous plaçons, suivi d'une description des approches proposées. Ensuite, nous exposons les contributions de cette thèse et nous concluons par un plan de ce document.

1. Contexte et problématique

La théorie des moments a connu un regain d'intérêt ces dernières années dans le domaine du traitement d'image et les applications de la classification de forme. Ceci est dû à leurs capacités à décrire l'image complètement en codant son contenu d'une manière compacte. Parmi les types de moments, les moments orthogonaux présentent deux propriétés capitales : une redondance minimale et un pouvoir de discrimination important.

Les moments et les fonctions moments sont appliqués aux différents types d'images définies en 2D et 3D pour la reconnaissance des formes, avec des applications à savoir la détection des contours, la classification et la segmentation d'image, l'analyse de texture, l'identification des invariants, la classification d'objets, le codage d'image, la reconstruction d'image.

L'idée fondamentale de la théorie des moments est la projection de l'espace des données sur une base complète souvent orthogonale pour extraire les informations utiles. Ces dernières sont extraites sous forme des coefficients de projection appelés moments. Cette projection permet d'une part une réduction importante de l'information car elle utilise un nombre réduit de ces facteurs au lieu de l'image entière, et d'autre part la caractérisation de l'image par des facteurs invariants par transformations géométriques de rotation, translation et changement d'échelle.

Chaque famille des moments est directement liée à la base de projection utilisée. On peut distinguer trois types des moments : les moments non orthogonaux (moments géométriques, complexes), les moments orthogonaux continus (moments de Legendre, Zernike,...) et les moments orthogonaux discrets (Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier, Meixner,...).

Le calcul des moments non orthogonaux et des moments orthogonaux continus nécessite des transformations appropriées des coordonnées de l'image dans l'intervalle de définition des

polynômes et une approximation appropriée des intégrales par des sommations finies. En effet, la fonction de l'intensité de l'image est toujours définie sur un domaine discret, ce qui provoque des erreurs de discrétisation issues de l'approximation de l'intégral lors d'implémentation de ce type des moments. Pour éliminer définitivement ces erreurs, les chercheurs ont proposé d'utiliser les moments orthogonaux discrets qui sont basés sur les polynômes orthogonaux discrets comme les polynômes de Tchebichef, Krawtchouk, Racah, Dual-Hahn, Hahn, Meixner et Charlier pour les tâches de l'analyse de l'image. L'utilisation de ce type des polynômes comme fonctions de base pour le calcul des moments de l'image, élimine le besoin de l'approximation numérique, et satisfait exactement la propriété de l'orthogonalité dans le domaine discret de l'espace des coordonnées de l'image. Cette propriété rend les moments orthogonaux discrets supérieurs aux moments orthogonaux continus conventionnels dans le sens de la capacité de la représentation de l'image.

Si le problème de l'erreur de discrétisation a été résolu par l'utilisation des bases orthogonales discrètes, le problème de la consommation de temps de calcul des moments reste un problème délicat. En effet, le calcul des moments est une tâche complexe et couteuse en termes du temps, ce qui limite leurs utilisations surtout pour les images 2D/3D et lorsque le calcul en ligne est nécessaire.

Dans cette thèse, nous allons aborder quatre principales problématiques concernant les moments orthogonaux discrets de Charlier :

- ✓ Le temps et la complexité de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier 2D/3D.
- ✓ La stabilité numérique lors de calcul des moments de Charlier pour les images 2D/3D.
- ✓ La reconstruction rapide et stable des images 2D/3D par les moments de Charlier.
- ✓ L'extraction rapide et stable des invariants par transformations géométriques de translation, de changement d'échelle et de rotation des moments de Charlier d'images 3D.

2. Approches proposées

Afin de surmonter les problèmes soulevés précédemment, nous proposons des contributions permettant l'utilisation rapide et efficace des moments orthogonaux discrets de Charlier pour l'analyse des images 2D/3D. Ces contributions sont résumées comme suit :

- ✓ Proposition d'une méthode pour l'accélération du temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier et ses inverses pour les images 2D en utilisant la formule

de récurrences de Clenshaw.

- ✓ Proposition d'une méthode rapide et stable pour le calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier pour les images 2D/3D en utilisant les filtres numériques 2D/3D.
- ✓ Proposition d'une nouvelle approche pour la reconstruction rapide d'images 3D en utilisant les moments de Charlier 3D et la représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR).
- ✓ Proposition d'une nouvelle méthode pour le calcul rapide et stable des invariants des moments de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation en utilisant la représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR).

3. Plan du manuscrit

La présente thèse est composée de cinq chapitres en plus d'une introduction et une conclusion générales.

Dans le premier chapitre, nous commençons par quelques propriétés des polynômes orthogonaux discrets. Ensuite, nous définissons les moments orthogonaux discrets de Charlier 1D/2D/3D, nous présentons aussi les polynômes orthogonaux discrète de Charlier et les différentes méthodes de calcul des valeurs de ces polynômes, qui seront utiles pour la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons l'accélération du temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier en utilisant la formule de récurrence de Clenshaw pour les images 2D.

Dans le troisième chapitre, nous proposons deux nouvelles approches de calcul rapide et stable des moments orthogonaux discrets de Charlier et ses inverses 2D/3D. Ces approches sont basées sur l'utilisation de deux notions fondamentales : la première consiste à utiliser les filtres numériques 2D/3D pour accélérer le processus de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier. La seconde est la description de l'image 2D/3D par un ensemble des morceaux (bloc 2D et cuboïde 3D) de taille fixe au lieu de pixels ou voxels individuels en décomposant l'image en morceaux de petites tailles pour assurer la stabilité numérique.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour le calcul rapide des moments de Charlier d'une image 3D, basée sur la représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR). Par cette représentation, l'image 3D sera décomposée en un ensemble de cuboïdes de même niveau de gris au lieu des voxels, ce qui nous permet de réduire considérablement la quantité des éléments traités et par conséquent de réduire le temps de calcul des moments et le

temps de reconstruction d'image. Nous proposons également une nouvelle méthode de reconstruction d'images 3D basée sur la reconstruction partielle des images 3D à partir des cuboïdes en utilisant les moments de Charlier au lieu de la reconstruction globale de l'image 3D.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons une nouvelle méthode rapide et efficace pour calculer les moments orthogonaux discrets invariants de Charlier 3D pour les images 3D dans le domaine de la classification. La méthode proposée est basée sur l'extraction des moments orthogonaux discrets invariants de Charlier 3D par les moments géométriques invariants 3D, en utilisant la stratégie de représentation d'images 3D par cuboïde (ICR), dans laquelle chaque cuboïde est traité indépendamment. Dans cette représentation, les moments orthogonaux discrets invariants de Charlier 3D seront extraits des cuboïdes au lieu d'image globale. Elle nous aussi permet d'améliorer le résultat de classification et d'accélérer le processus de reconnaissance des formes sans affecter la propriété d'invariance par rapport à la méthode classique.

Enfin, la conclusion générale présente une synthèse des différentes contributions apportées, ainsi que les pistes qui définissent des perspectives possibles pour nos travaux.

Chapitre I

Méthode de Calcul des Moments Orthogonaux Discrets de Charlier 2D/3D

1. Introduction

Les moments sont des grandeurs scalaires utilisés pour caractériser une fonction et capturer ses caractéristiques importantes. Ils ont été largement utilisés pendant des années dans les statistiques, pour la description de la forme d'une fonction de densité de probabilité et dans la mécanique classique pour mesurer la distribution de masse d'un corps. De point de vue mathématique, les moments sont des « projections » d'une fonction sur une base polynomiale. La théorie des moments a connu un regain d'intérêt ces dernières années dans le domaine de traitement d'image sur tout pour les applications de la classification et de la reconnaissance de forme. Ceci est dû à leurs capacités à décrire l'image complètement en codant son contenu d'une manière compacte. Actuellement, une attention particulière est accordée aux moments orthogonaux discrets, car ils se sont révélés efficaces pour représenter les signaux et les images 2D/3D sans erreurs d'approximation et de discrétisation contrairement aux moments orthogonaux continus. En effet, les chercheurs sont orientés vers l'utilisation des moments de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Dual-Hahn, Racah, Meixner et Charlier. En général, le calcul des moments orthogonaux discrets dépend fortement du calcul des polynômes orthogonaux discrets qui les définissent. Par conséquent, Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les définitions des polynômes orthogonaux discrets et leurs propriétés. Puis, nous présenterons les moments orthogonaux discrets de Charlier 2D et 3D qui sont définis à partir des polynômes orthogonaux discrète de Charlier. Ensuite, nous allons définir aussi les différentes méthodes de calcul des valeurs des polynômes de Charlier à savoir le calcul direct et le calcul récursif et pour des raisons de précision, nous présenterons aussi certains termes, définitions et propositions qui seront utiliser tout le long de cette thèse.

2. Etat de l'art

Historiquement, le premier papier significatif utilisant la théorie des moments invariants, dans un modèle de reconnaissance bidimensionnel, a été publié par Hu [Hu, 1962]. Dans les années qui suivent, les moments et les fonctions moments ont été largement utilisés en analyse d'images pour la reconnaissance des formes [Flusser & Suk, 1993] avec des applications allant de la détection des contours [Luo et al, 1993], la segmentation d'image [Yokoya & Levine,

1989], l'analyse de texture [Tuceryan, 1994], [Tuceryan & Jain, 1998], l'identification des invariants [Li et al, 2011], [Yang & Dai, 2011], [Yang et al, 2011], la classification d'objets [Sayyouri et al, 2013], le codage d'image [Teague, 1980], [Teh & Chin, 1988], la reconstruction d'image [Liao & Pawlak, 1996], [Yang & Dai, 2012], [Sayyouri et al, 2012], l'analyse de la scène [Jerome, 2009], [Sadjadi & Hall, 1978], l'analyse d'objets 3D [Bronstein et al, 2005], [Sadjadi & Hall, 1980]. La description des images avec des moments signifie qu'on utilise les propriétés globales de l'image plutôt que ses propriétés locales.

Les moments géométriques sont apparus les premiers et ont été très utilisés essentiellement pour leur simplicité et leur interprétation géométrique explicite. Néanmoins, les moments géométriques ne sont pas orthogonaux, il est alors difficile de reconstruire une image à partir de ces moments sans perte d'informations. Teague en 1980 dans [Teague, 1980] a montré qu'une grande efficacité pouvait être atteinte lorsque l'image était analysée par les moments orthogonaux de Legendre et de Zernike. En outre, il a été prouvé que les moments de Zernike pouvaient capturer l'information d'une image avec une redondance minimale et qu'ils ont la propriété d'invariance en rotation. Puisque les moments de Legendre et de Zernike sont tous les deux définis dans le domaine continu, des transformations appropriées des coordonnées image sont nécessaires pour l'implémentation de ces moments dans le cas discret. Le calcul des moments de Legendre nécessite donc une transformation des coordonnées de l'image dans l'intervalle où les polynômes sont orthogonaux $[-1,1]$. D'autre part, les polynômes de Zernike sont définis seulement sur le disque de rayon unité [Mukundan & Ramakrishnan, 1998]. De plus, l'erreur de discrétisation issue de l'approximation de l'intégral reste inévitable lors de leur implémentation, ce qui limite la précision des moments calculés [Liao & Pawlak, 1996]. Liao et Pawlak ont conduit une analyse théorique sur l'erreur de discrétisation des moments continus et ont proposé une approche limitant l'erreur d'approximation de l'intégral d'un certain niveau selon la règle de Simpson. D'autres travaux de recherche visant à améliorer la précision des moments continus se sont focalisés sur les moments géométriques et les moments de Legendre [Hosny, 2007a], [Hosny, 2007b]. Pour éliminer définitivement les erreurs de discrétisation, Mukundan et al. [Mukundan et al, 2001] ont proposé un ensemble de fonctions des moments orthogonaux discrets basé sur les polynômes discrets de Tchebichef, pour les tâches de l'analyse de l'image. Plus récemment, un ensemble des moments orthogonaux discrets, basés sur des polynômes orthogonaux discrets, est introduit dans le domaine de l'image tels que les moments orthogonaux discrets de Krawtchouk [Yap et al, 2003], Hahn [Yap et al, 2007], [Sayyouri et al, 2012], [Sayyouri et al, 2013], Charlier [Zhu et al, 2010], [Sayyouri et al, 2012], Racah [Zhu et al, 2007a], Dual Hahn [Zhu et al, 2007b], [Karakasis et al, 2013] et Meixner [Zhu et al, 2010].

L'utilisation des polynômes discrets orthogonaux comme fonctions de base pour le calcul des moments de l'image, élimine le besoin de l'approximation numérique, et satisfait exactement la propriété de l'orthogonalité dans le domaine discret de l'espace des coordonnées de l'image. Cette propriété rend les moments orthogonaux discrets supérieurs aux moments orthogonaux continus conventionnels dans le sens de la capacité de la représentation de l'image.

Généralement, la famille des moments peut être classés en deux groupes principaux : (1) Les moments non orthogonaux qui se basent sur des bases non orthogonales, telle que les bases géométrique et complexe. (2) les moments orthogonaux, où la fonction de base est généralement représentée par un polynôme orthogonal continu ou discret. Selon, le domaine de définition de la base des polynômes utilisés, les moments orthogonaux peuvent être divisés en moments définis en coordonnées polaires ou en coordonnées cartésiennes. Parmi les avantages des moments définis par les coordonnées cartésiennes, la possibilité d'obtenir les invariants d'échelle et de translation par rapport à ceux définis par les coordonnées polaires. Alors que les invariants de rotation peuvent être facilement obtenus à partir des coordonnées polaires. Une classification complète des familles des moments existants est illustrée dans la figure I.1 :

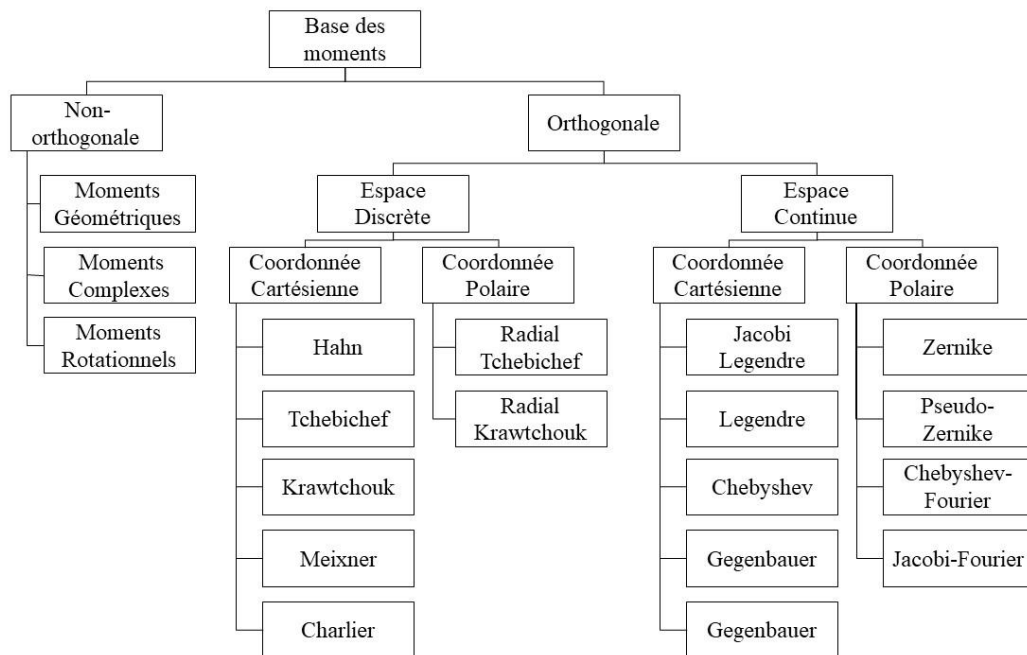


Figure I.1. Classification des familles des moments d'image

Les moments possèdent les propriétés de robustesse contre le bruit et de redondance nulle de l'information [Teh & Chin, 1988]. De plus, ils ne nécessitent aucune information à priori. Ils sont aussi insensibles aux dégradations locales des images traitées du fait de leur traitement global. Nous distinguerons à travers la littérature, qu'il existe deux grands paradigmes dans

l'utilisation des moments pour le traitement d'image :

- La reconstruction d'image : comment à partir d'un nombre fini de moments extraits d'une image, on peut reconstruire cette image avec un maximum de fidélité à l'image originale. Ce paradigme inclut notamment la compression d'image qui code l'image originale par un nombre fini de ses moments.
- La reconnaissance de forme : comment extraire et sélectionner un vecteur de moments de manière à discriminer les classes d'un problème de reconnaissance de forme.

Le traitement d'image par la méthode des moments passe par le calcul des moments et des polynômes. Dans la section suivante, nous traitons les méthodes de calcul des polynômes orthogonaux discrets en mettant l'accent sur les polynômes de Charlier qui seront la brique de base de ce travail.

3. Polynômes orthogonaux d'une variable discrète

Les familles des polynômes de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier, sont appelées polynômes orthogonaux d'une variable discrète [Nikiforov & Uvarov, 1988], [Nikiforov et al, 1991]. Elles forment une classe importante de fonction spéciale dans le traitement des divers problèmes de mathématiques, de physique théorique et d'ingénierie. Les polynômes orthogonaux discrets sont des solutions des équations de différence de type hypergéométrique.

3.1. Equation de différence

Les polynômes orthogonaux d'une variable discrète d'ordre n sont définis en termes d'équation de différence de type hypergéométrique par [Nikiforov & Uvarov, 1988] :

$$\sigma(x)\Delta\nabla P_n(x) + \tau(x)\Delta P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0 \quad (I.1)$$

où

- $\Delta P_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x)$ indique l'opérateur de différence en avance.
- $\nabla P_n(x) = P_n(x) - P_n(x-1)$ indique l'opérateur de différence en arrière.
- $\sigma(x)$: polynôme du deuxième et premier degré.
- $\tau(x)$: polynôme du premier degré.
- λ_n est une constante appropriée.

Les fonctions $\sigma(x)$, $\tau(x)$ et λ_n correspondant aux polynômes orthogonaux d'une variable discrète de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et de Charlier, sont énumérées dans le tableau I.1 [Nikiforov et al, 1991].

$P_n(x)$	Hahn $H_n^{(a,b)}(x, N)$	Tchebichef $t_n(x, N)$	Krawtchouk $K_n^p(x, N)$	Meixner $M_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	Charlier $C_n^{a_1}(x)$
$\sigma(x)$	$x(N + a - x)$	$x(N - x)$	$x(1 - p)$	x	x
$\tau(x)$	$(b + 1)(N - 1) - (a + b + 2)x$	$N - 1 - 2x$	$Np - x$	$\gamma\mu - x(1 - \mu)$	$a_1 - x$
λ_n	$n(a + b + n + 1)$	$n(n + 1)$	n	$n(1 - \mu)$	n

Tableau I.1. Les données de base des polynômes orthogonaux discrets de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier

3.2. Forme générale des polynômes orthogonaux discrets

La forme générale des polynômes orthogonaux discrets est obtenue en résolvant l'équation de différence Eq. (I.1). Les solutions de cette équation s'expriment par la formule de Rodriguez [Nikiforov et al, 1991] :

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\omega(x)} \nabla^n [\omega_n(x)] \quad (I.2)$$

où

- $\omega(x)$ est la fonction poids de $\omega_n(x)$ dans le cas où $n = 0$.
- B_n est le facteur de normalisation.
- ∇^n est l'opérateur de différence en arrière de l'ordre n .

Les polynômes solutions de l'équation (I.1) sont déterminés par la formule de Rodriguez Eq. (I.2) selon les facteurs de normalisation B_n .

En utilisant des opérations successives de l'opérateur de différence en arrière, nous obtenons la propriété suivante [Nikiforov et al, 1991] :

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x - k) \quad (I.3)$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est la combinaison de k éléments parmi n éléments.

En combinant les équations (I.2) et (I.3), nous obtenons l'expression explicite des polynômes orthogonaux d'une variable discrète :

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\omega(x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \omega_n(x - k) \quad (I.4)$$

En littérature, les polynômes orthogonaux discrets peuvent être définis à partir des fonctions hypergéométriques. Ces fonctions sont définies comme suit :

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} ; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_r)_k}{(b_1)_k \dots (b_s)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (I.5)$$

Selon la relation Eq. (I.5), les polynômes orthogonaux classiques de Hahn et de Tchebichef sont représentés en termes des fonctions ${}_3F_2$:

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix}, x\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(a_1)_k (a_2)_k (a_3)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{I.6})$$

Ensuite, les polynômes orthogonaux de Krawtchouk et Meixner sont définis à partir de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ suivante :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix}, x\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(a_1)_k (a_2)_k}{(b_1)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{I.7})$$

Alors que le polynôme de Charlier est défini par ${}_2F_0$:

$${}_2F_0\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ - \end{matrix}, x\right) = \sum_{k=0}^n (a_1)_k (a_2)_k \frac{x^k}{k!} \quad (\text{I.8})$$

où $(a)_k$ est le symbole de Pochhammer défini par :

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad k \geq 1, a \neq 0 \quad (\text{I.9})$$

avec $(a)_0 = 1$, et Γ est la fonction gamma définie par: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

Pour des raisons de simplification, Nous introduisons le symbole de la factorielle décroissante $\langle a \rangle_k$ défini par :

$$\langle a \rangle_k = (-1)^k (-a)_k = a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-k+1)} \quad (\text{I.10})$$

$$k \geq 1, \quad \langle a \rangle_0 = 1$$

Selon [Zhi et al, 2018], $\langle x \rangle_k$ peut être étendu comme

$$\langle x \rangle_k = \sum_{i=0}^k S(k, i) x^i \quad (\text{I.11})$$

où $S(k, i)$ sont les nombres de Stirling du premier type, obtenus par la relation de récurrence suivante :

$$S(k, i) = S(k-1, i-1) - (k-1)S(k-1, i) \quad (\text{I.12})$$

avec $S(k, 0) = S(0, i) = 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \forall i \geq 1$ et $S(0, 0) = 1$

3.3. Propriété d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets

Les polynômes orthogonaux discrets d'une seule variable $\{P_n(x)\}$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\sum_{x=0}^s P_n(x) P_m(x) \omega(x) = \rho(n) \cdot \delta_{nm} \quad ; \quad 0 \leq m, n \leq s \quad (\text{I.13})$$

où

- $\rho(n)$ représente la fonction norme carrée des polynômes orthogonaux correspondant.
- δ_{nm} désigne la fonction de dirac.

Ainsi la définition des polynômes orthogonaux normalisés nécessite l'utilisation de la fonction norme carrée $\rho(n)$ et la fonction poids $\omega(x)$ suivant la relation :

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(x) \sqrt{\frac{\omega(x)}{\rho(n)}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, s \quad (\text{I.14})$$

La propriété d'orthogonalité des polynômes orthogonaux normalisés dans l'équation (I.13) devient :

$$\sum_{x=0}^s \tilde{P}_n(x) \tilde{P}_m(x) = \delta_{nm} \quad ; \quad 0 \leq n, m \leq s \quad (\text{I.15})$$

Le tableau I.2 représente les données concernant les fonctions poids, les facteurs de normalisation et les fonctions norme carré des polynômes orthogonaux discrets de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et de Charlier.

$P_n(x)$	Hahn $H_n^{(a,b)}(x, N)$	Tchebichef $t_n(x, N)$	Krawtchouk $K_n^p(x, N)$	Meixner $M_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	Charlier $C_n^{a_1}(x)$
B_n	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{(-1)^n (1-p)^n}{n!}$	$\frac{1}{\mu^n}$	$\frac{1}{a_1^n}$
$\omega_n(x)$	$\frac{\Gamma(N+a-x)\Gamma(n+b+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$	$\frac{\Gamma(N-x)\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$	$\frac{N! p^{x+n} (1-p)^{N-n-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-n-x)}$	$\frac{\mu^{x+n} \Gamma(n+\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)x!}$	$\frac{e^{-a_1} a_1^{x+n}}{x!}$
$\rho(n)$	$\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)(a+b+n+1)_N}{(a+b+2n+1)(N-n-1)n!}$	$\frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}$	$(-1)^n \left(\frac{1-p}{p} \right)^n \frac{n!}{(-N)_n}$	$\frac{n! (\gamma)_n}{\mu^n (1-\mu)^{\gamma}}$	$\frac{n!}{a_1^n}$

Tableau I.2. La fonction poids, le facteur de normalisation et la fonction norme carré des polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et de Meixner

Après avoir défini la formule générale (I.4) des polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et de Meixner, nous allons définir leurs domaines d'orthogonalité.

3.4. Domaines d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets

Le domaine d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et Meixner dépend du domaine de définition des fonctions de poids $\omega(x)$. Ces dernières sont définies dans le domaine discret suivant :

$$G = \{x / 0 \leq x \leq s\} \quad (I.16)$$

où

- $s = N$ pour le cas des polynômes de Krawtchouk.
- $s = N - 1$ pour le cas des polynômes de Tchebichef et de Hahn.
- $s = \infty$ pour le cas des polynômes de Charlier et de Meixner.

3.5. Relation de récurrence par rapport à l'ordre n

La forme explicite des polynômes orthogonaux d'une variable discrète Eq. (I.4) permet de définir une relation de récurrence entre trois termes successifs P_{n+1} , P_n et P_{n-1} . Cette relation est définie comme suit [Nikiforov et al, 1991] :

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad (I.17)$$

où α_n , β_n et γ_n sont des coefficients donnés dans le tableau I.3.

La relation de récurrence des trois termes des polynômes orthonormés discrets $\tilde{P}_n(x)$ est obtenue à partir de la relation de récurrence de trois termes des polynômes orthogonaux discrets Eq. (I.17) et de la forme orthonormée des polynômes discrets Eq. (I.14) par la relation suivante [Koekoek et al, 2010] :

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = \frac{x - \beta_n}{\alpha_n} \sqrt{\frac{\rho(n)}{\rho(n+1)}} \tilde{P}_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \sqrt{\frac{\rho(n-1)}{\rho(n+1)}} \tilde{P}_{n-1}(x) \quad (I.18)$$

$P_n(x)$	Hahn $H_n^{(a,b)}(x, N)$	Tchebichef $t_n(x, N)$	Krawtchouk $K_n^p(x, N)$	Meixner $M_n^{(\gamma, \mu)}(x)$	Charlier $C_n^{a_1}(x)$
α_n	$\frac{(n+1)(a+b+n+1)}{(a+b+2n+1)n!(N-n-1)}$	$\frac{n+1}{2(2n+1)}$	$n+1$	$\frac{\mu}{1-\mu}$	$-a_1$
β_n	$\frac{a-b+2N-2}{4} + \frac{(b-a)(a+b+2N)}{4(a+b+2n)(a+b+2n+2)}$	$\frac{N-1}{2}$	$n + p(N-2n)$	$\frac{n+\mu(n+\beta)}{1-\mu}$	$n + a_1$
γ_n	$\frac{(a+n)(b+n)(a+b+N+n)(N-n)}{(a+b+2n)(a+b+2n+1)}$	$\frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$	$p(1-p)(N-n+1)$	$\frac{n(n-1+\beta)}{\mu-1}$	$-n$

Tableau I.3. Les coefficients de récurrence les polynômes orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn, Charlier et de Meixner

3.6. Relation de récurrence par rapport à la variable x

Le calcul des valeurs des polynômes orthogonaux d'une variable discrète en utilisant la relation de récurrence par rapport à l'ordre n pour les grands ordres nécessite beaucoup de

temps de calcul et provoque la propagation des erreurs numériques. Pour remédier à ce problème, Mukundan a proposé une solution dans [Mukundan et al, 2001] pour calculer les polynômes de Tchebichef en utilisant la relation de récurrence par rapport à la variable x au lieu de la relation de récurrence par rapport à l'ordre n . Zhu a proposé également la même stratégie pour accélérer le calcul des polynômes de Krawtchouk, Hahn, Charlier et Meixner [Zhu et al, 2010].

Dans cette sous-section, on va présenter la forme générale de la relation de récurrence par rapport à la variable x pour calculer les polynômes orthogonaux d'une variable discrète de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier.

En considérant les propriétés des opérateurs de différence en arrière ∇ et de différence en avance Δ , nous avons la relation suivante :

$$\Delta \nabla P_n(x) = \nabla \Delta P_n(x) = P_n(x+1) - 2P_n(x) + P_n(x-1) \quad (I.19)$$

Donc, la relation de récurrence des polynômes orthogonaux discrets par rapport à la variable x est obtenue à partir des équations (I.1) et (I.19) comme suit :

$$P_n(x) = \frac{2\sigma(x-1) + \tau(x-1) - \lambda_n}{\sigma(x-1) + \tau(x-1)} P_n(x-1) - \frac{\sigma(x-1)}{\sigma(x-1) + \tau(x-1)} P_n(x-2) \quad (I.20)$$

On se basant sur les équations (I.14) et (I.20), on obtient la forme générale de la relation de récurrence par rapport à la variable x des polynômes orthonormés discrets :

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{\sqrt{\omega(x)}}{\sigma(x-1) + \tau(x-1)} \times \left[\frac{2\sigma(x-1) + \tau(x-1) - \lambda_n}{\sqrt{\omega(x-1)}} \tilde{P}_n(x-1) - \frac{\sigma(x-1)}{\sqrt{\omega(x-2)}} \tilde{P}_n(x-2) \right] \quad (I.21)$$

La forme orthonormée des polynômes orthogonaux discrets de l'équation (I.21), peut être exprimée en remplaçant x par $x+1$, comme suit :

$$\tilde{P}_n(x+1) = \frac{\sqrt{\omega(x+1)}}{\sigma(x) + \tau(x)} \times \left[\frac{2\sigma(x) + \tau(x) - \lambda_n}{\sqrt{\omega(x)}} \tilde{P}_n(x) - \frac{\sigma(x)}{\sqrt{\omega(x-1)}} \tilde{P}_n(x-1) \right] \quad (I.22)$$

Par suite, les relations de récurrence des polynômes orthonormés discrets de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier par rapport à la variable x est obtenue à partir de la formule générale Eq. (I.21) ou Eq. (I.22) et les données du tableau I.1.

En utilisant la formule de Rodriguez Eq. (I.4), la relation d'orthogonalité Eq. (I.14) et le tableau I.1, on obtient les valeurs initiales de relation de récurrence par rapport à la variable x (Tableau I.4). Les équations ci-dessus peuvent être utilisées pour calculer les polynômes orthonormés discrets de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier.

$\tilde{P}_n(x)$	$x = 0$	$x = 1$
$\tilde{H}_n^{(a,b)}(x)$	$(1-N)_n \binom{n+b}{b}_n \sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}}$	$\frac{(n+b+1)(N-n-1)-n(N+a-1)}{(b+1)(N-1)} \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} \tilde{H}_n^{(a,b)}(0)$
$\tilde{t}_n(x)$	$(-1)^n (N-n)_n \sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}}$	$\left(1 + \frac{n(n+1)}{1-N}\right) \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} \tilde{t}_n(0)$
$\tilde{K}_n^p(x)$	$\sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}}$	$\left(1 - \frac{n}{Np}\right) \sqrt{\frac{\omega(1)}{\rho(n)}} \tilde{K}_n^p(0)$
$\tilde{M}_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	$(\gamma)_n \sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}}$	$\frac{\mu(n+\gamma)-n}{\mu\gamma} \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} \tilde{M}_n^{(\gamma,\mu)}(0)$
$\tilde{C}_n^{a_1}(x)$	$\sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}}$	$\frac{a_1-n}{a_1} \sqrt{\frac{\omega(1)}{\rho(n)}} \tilde{C}_n^{a_1}(0)$

Tableau I.4. Les valeurs initiales de la relation de récurrence à trois termes par rapport à la variable x pour les polynômes de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier

4. Les moments orthogonaux discrets de Charlier

Théoriquement, toutes les bases de polynômes de même degré sont équivalentes, car elles génèrent le même espace de fonctions. N'importe quel moment par rapport à une certaine base peut être exprimé en termes de moments par rapport à toute autre base. De ce point de vue, les différents types des moments orthogonaux sont équivalents à des moments géométriques. Cependant, une différence significative apparaît lorsqu'on considère la stabilité et les problèmes du calcul dans un domaine discret.

Les puissances standards sont dépendantes à la fois des petites et des grandes valeurs d'exposant et augmentent rapidement quand l'ordre augmente. Ce qui conduit à des moments géométriques en corrélations et à la nécessité d'une grande précision de calcul. Les moments orthogonaux discrets peuvent capturer les caractéristiques de l'image d'une façon efficace et non redondante. Ils ont aussi l'avantage de ne pas exiger des grandes précisions de calcul parce que nous pouvons les évaluer à l'aide des relations récurrentes, sans les exprimer en termes de puissances habituelles. On distingue deux types de moments orthogonaux : les moments orthogonaux continus et les moments orthogonaux discrets.

Les moments orthogonaux discrets d'une image sont considérés comme des grandeurs statistiques qui décrivent la distribution des pixels à l'intérieur de l'espace d'image. Dans les trois sous-sections suivantes, nous présentons les moments orthogonaux discrets de Charlier qui sont basés sur les polynômes orthogonaux d'une variable discrète de Charlier et qui seront l'objet de ce travail par la suite.

L'utilisation de ces polynômes comme fonctions de base pour le calcul des moments, élimine le besoin de l'approximation numérique des intégrales par des sommations et satisfait exactement la propriété de l'orthogonalité dans le domaine discret de l'espace des coordonnées de l'image.

Les fonctions des moments sont basées sur leur dimension (nombre de variables), il existe des fonctions de moment 1D, 2D et 3D appliquées aux signaux (unidimensionnels), aux images (bidimensionnels) et aux volumes (tridimensionnels), respectivement, comme illustré la figure I.2:

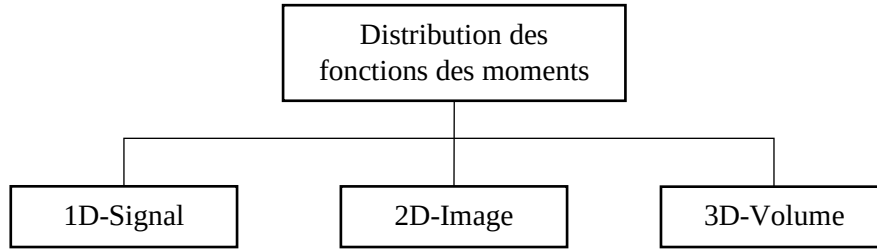


Figure I.2. Distribution des fonctions des moments par la dimension

4.1. Les moments de Charlier unidimensionnels (1D)

Les moments orthogonaux discrets de Charlier sont définis à partir des polynômes orthogonaux discrets de Charlier et sont utilisés pour les tâches de l'analyse d'image par Zhu et al. [Zhu et al, 2010]. Les moments orthogonaux discrets de Charlier CM_n unidimensionnels (1D) d'un signal discret unidimensionnel $f(x)$ de longueur N d'ordre n sont définis par :

$$CM_n = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) f(x), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (I.23)$$

où $f(x)$ est un signal unidimensionnel (1D) de longueur N .

$\tilde{C}_n^{a_1}(x)$ est le $n^{ème}$ polynôme orthogonal discrets normalisés à une variable discrète x de Charlier.

La reconstruction du signal $f(x)$ à partir d'un ensemble des moments orthogonaux discrets de Charlier CM_n d'ordre max est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} CM_n \tilde{C}_n^{a_1}(x), \quad x = 0, 1, \dots, N-1 \quad (I.24)$$

L'estimation du signal $f(x)$ à partir des moments orthogonaux discrets unidimensionnels par une série tronquée à un ordre max est donné par :

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{max} CM_n \tilde{C}_n^{a_1}(x), \quad x = 0, 1, \dots, N-1 \quad (I.25)$$

4.2. Les moments de Charlier bidimensionnels (2D)

Les moments orthogonaux discrets de Charlier CM_{nm} bidimensionnels (2D) d'ordre $(n + m)$ d'une image d'intensité $f(x, y)$ de taille $N \times M$ sont définis par la relation suivante:

$$CM_{nm} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) f(x, y) \quad (I.26)$$

En théorie, une fonction d'image originale $f(x, y)$ peuvent être représentés à partir d'une série infinie de moments de Charlier 2D par la formule suivante :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) CM_{nm} \quad (I.27)$$

Mais en pratique, nous nous limitons à un ordre fini max . Ainsi, la fonction d'image originale peut être approchée par une série tronquée :

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{n=0}^{max} \sum_{m=0}^n \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) CM_{nm} \quad (I.28)$$

Par conséquent, plus max approche de l'infini, plus la différence entre l'image originale et l'image reconstruite est tend vers zéro.

4.3. Les moments de Charlier tridimensionnels (3D)

Les moments de Charlier tridimensionnels sont définis comme les projections d'une image 3D sur une base orthogonale des polynômes orthogonaux discrets de Charlier. Par conséquent, pour une image numérique 3D $f(x, y, z)$ avec la taille $N \times M \times K$, à savoir $x \in [0, N - 1]$, $y \in [0, M - 1]$ et $z \in [0, K - 1]$, d'ordre des moments $(n + m + k)^{th}$ est défini comme suit:

$$CM_{nmk} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f(x, y, z) \quad (I.29)$$

Dans le cas d'image 3D, la fonction d'image $f(x, y, z)$ peuvent être représentés à partir d'une série infinie de moments de Charlier 3D :

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) CM_{nmk} \quad (I.30)$$

Mais en pratique, nous nous limitons à un ordre fini max . Ainsi, l'image originale 3D peut être approchée par une série tronquée :

$$\hat{f}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{max} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) CM_{nmk} \quad (I.31)$$

Le calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels passe par le calcul des valeurs des polynômes orthogonaux d'une variable

discrète de Charlier.

La section suivante donne un aperçu général sur les polynômes orthogonaux discrets de Charlier et les différentes méthodes de calcul.

5. Polynômes orthogonaux d'une variable discrète de Charlier

Dans cette section, nous présenterons les différentes méthodes de calcul des valeurs des polynômes de Charlier à savoir le calcul direct à partir des fonctions hypergéométriques et le calcul récursif utilisant les relations de récurrence par rapport l'ordre n et la variable x .

5.1. Calcul directe des polynômes de Charlier

Les polynômes orthogonaux discrets de Charlier $C_n^{a_1}(x)$ d'une seule variable satisfont l'équation de différences partielles du second ordre suivante [Nikiforov et al, 1991; Zhu et al, 2010]:

$$\begin{aligned} \sigma(x)\Delta\nabla C_n^{a_1}(x) + \tau(x)\Delta C_n^{a_1}(x) + \lambda_n C_n^{a_1}(x) &= 0 \\ \text{avec} \\ x, n &= 0, 1, 2, \dots, N, \quad a_1 > 0 \\ \sigma(x) &= x; \quad \tau(x) = a_1 - x; \quad \lambda_n = n \end{aligned} \quad (I.32)$$

Le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Charlier est défini à partir de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$ (I.8) par la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_n^{a_1}(x) &= {}_2F_0(-n, -x; 1/a_1) = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n}^{a_1} x^k \\ \text{avec } x, n &= 0, 1, 2, \dots, N, \quad a_1 > 0 \end{aligned} \quad (I.33)$$

Le polynôme orthogonal discret d'ordre n de Charlier peut être écrit explicitement comme suit :

$$C_n^{a_1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(a_1)^k k!} (-x)_k \quad (I.34)$$

Les n^{th} polynômes de Charlier dans Eq. (I.34) peut être exprimé en termes de nombres de Stirling Eq. (I.11) comme suit :

$$C_n^{a_1}(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{(-n)_k}{(a_1)^k k!} S(k, i) x^i \quad (I.35)$$

Ensuite, Eq. (I.35) peut être réécrit comme :

$$C_n^{a_1}(x) = \sum_{i=0}^n \psi_{n,i}^{a_1} x^i \quad (I.36)$$

où $\psi_{n,i}^{a_1}$ sont les coefficients des monômes des polynômes de Charlier :

$$\psi_{n,i}^{a_1} = \sum_{k=i}^n \frac{(-n)_k}{(a_1)_k k!} S(k, i) \quad (I.37)$$

L'ensemble des polynômes de Charlier $C_n^{a_1}(x)$ forment un ensemble complet de fonctions de base discret avec la fonction de poids $\omega(x)$ définie par :

$$\omega(x) = \frac{e^{-a_1} a_1^x}{x!} \quad (I.38)$$

et satisfait la condition d'orthogonalité

$$\sum_{x=0}^N \omega(x) C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(x) = \rho(n) \delta_{nm} \quad (I.39)$$

avec $\rho(n)$ est le facteur de normalisation défini par:

$$\rho(n) = \frac{n!}{a_1^n} \quad (I.40)$$

Les polynômes orthonormés discrets de Charlier sont obtenus par la normalisation des polynômes orthogonaux discrets de Charlier par le facteur de normalisation et la multiplication de ces polynômes par la racine carrée de la fonction poids. L'ensemble des polynômes orthonormés discrets de Charlier est donc défini par :

$$\tilde{C}_n^{a_1}(x) = C_n^{a_1}(x) \sqrt{\frac{\omega(x)}{\rho(n)}} \quad (I.41)$$

de telle sorte que la condition d'orthogonalité soit :

$$\sum_{x=0}^N \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(x) = \delta_{nm} \quad (I.42)$$

Le calcul des valeurs polynomiales orthonormés de Charlier à partir de l'équation (I.34) est très coûteux en termes de temps du fait quand on doit calculer, pour chaque ordre du polynôme, un certain nombre de multiplications et additions (factorielles, puissances, somme, etc.). Pour résoudre ce problème, nous utilisons les méthodes de calcul récursif.

5.2. Relation de récurrence par rapport à l'ordre n

La relation de récurrence par rapport à l'ordre n des polynômes orthogonaux discrets de Charlier est donnée par la formule suivante [Jahid et al, 2018a] :

$$C_n^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x + n - 1}{a_1} C_{n-1}^{a_1}(x) - \frac{n-1}{a_1} C_{n-2}^{a_1}(x) \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (I.43)$$

avec $C_n^{a_1}(0) = 1$ et $C_n^{a_1}(1) = \frac{a_1 - n}{a_1}$

En utilisant les équations (I.41) et (I.43), nous obtenons la relation de récurrence des polynômes orthonormés de Charlier :

$$\tilde{C}_n^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x + n - 1}{a_1} \sqrt{\frac{\rho(n-1)}{\rho(n)}} \tilde{C}_{n-1}^{a_1}(x) - \frac{n-1}{a_1} \sqrt{\frac{\rho(n-2)}{\rho(n)}} \tilde{C}_{n-2}^{a_1}(x) \quad (I.44)$$

avec $C_0^{a_1}(x) = \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^x}{x!}}$ et $C_1^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x}{a_1} \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^{x+1}}{x!}}$

5.2.1. Représentation graphique des polynômes de Charlier calculés par la relation de récurrence par rapport à l'ordre n

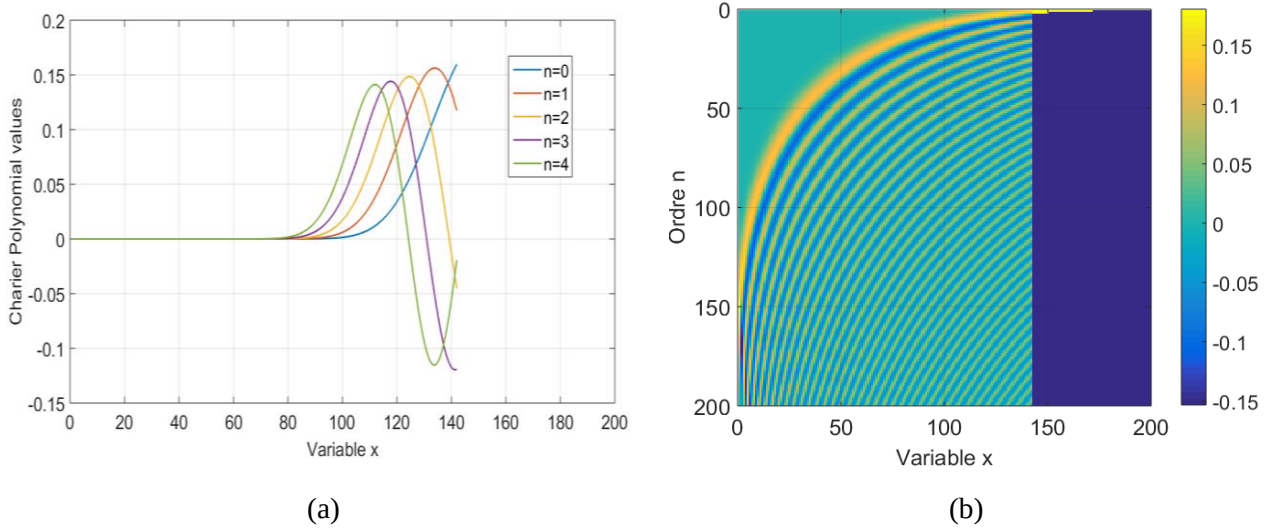


Figure I.3. Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à l'ordre n pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$

La figure I.3 (a) présente les courbes des cinq premiers ordres des polynômes orthonormés discrets de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à l'ordre n , définie par l'équation (I.44) pour $N = 200$ et $a_1 = 140$ alors que la figure I.3 (b) présente le tracé de la matrice 2D des valeurs polynomiales de Charlier pour $n, x = 0 : 200$.

5.3. Relation de récurrence par rapport à la variable x

La relation de récurrence par rapport à la variable x des polynômes orthogonaux discrets de Charlier est donnée comme suit [Karmouni et al, 2019a] :

$$C_n^{a_1}(x) = \frac{x-1+a_1-n}{a_1} C_n^{a_1}(x-1) - \frac{x-1}{a_1} C_n^{a_1}(x-2) \quad (I.45)$$

Selon l'équation (I.41) et (I.45), la relation de récurrence des polynômes orthonormés de Charlier est donnée par :

$$\tilde{C}_n^{a_1}(x) = \frac{\sqrt{\omega(x)}}{a_1} \left[\frac{x-1+a_1-n}{\sqrt{\omega(x-1)}} \tilde{C}_n^{a_1}(x-1) - \frac{x-1}{\sqrt{\omega(x-2)}} \tilde{C}_n^{a_1}(x-2) \right] \quad (I.46)$$

pour $x = 2, \dots, N-1$

La forme orthonormée des polynômes orthogonaux discrets de Charlier de l'équation (I.46), peut être exprimée en remplaçant x par $x+1$, comme suit :

$$\tilde{C}_n^{a_1}(x+1) = \frac{\sqrt{\omega(x+1)}}{a_1} \left[\frac{x+a_1-n}{\sqrt{\omega(x)}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) - \frac{x}{\sqrt{\omega(x-1)}} \tilde{C}_n^{a_1}(x-1) \right] \quad (I.47)$$

Les deux premiers ordres $x=0$ et $x=1$ des polynômes orthonormés discrets de Charlier $\tilde{C}_n^{a_1}(x)$ sont calculés à partir de l'équation (I.41) comme suit :

$$\begin{aligned} C_n^{a_1}(0) &= \sqrt{\frac{\omega(0)}{\rho(n)}} = \sqrt{\frac{e^{-a_1} a_1^n}{n!}} \\ C_n^{a_1}(1) &= \frac{a_1-n}{a_1} \sqrt{\frac{\omega(1)}{\rho(n)}} = \frac{a_1-n}{a_1} \sqrt{\frac{a_1^{n+1} e^{-a_1}}{n!}} \end{aligned} \quad (I.48)$$

La figure I.4 (a) présente les courbes des cinq premiers ordres des polynômes orthonormés discrets de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à la variable x , définie par l'équation (I.46), pour $N = 200$ et $a_1 = 140$ alors que la figure I.4 (b) présente le tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier pour $n, x = 0 : 200$.

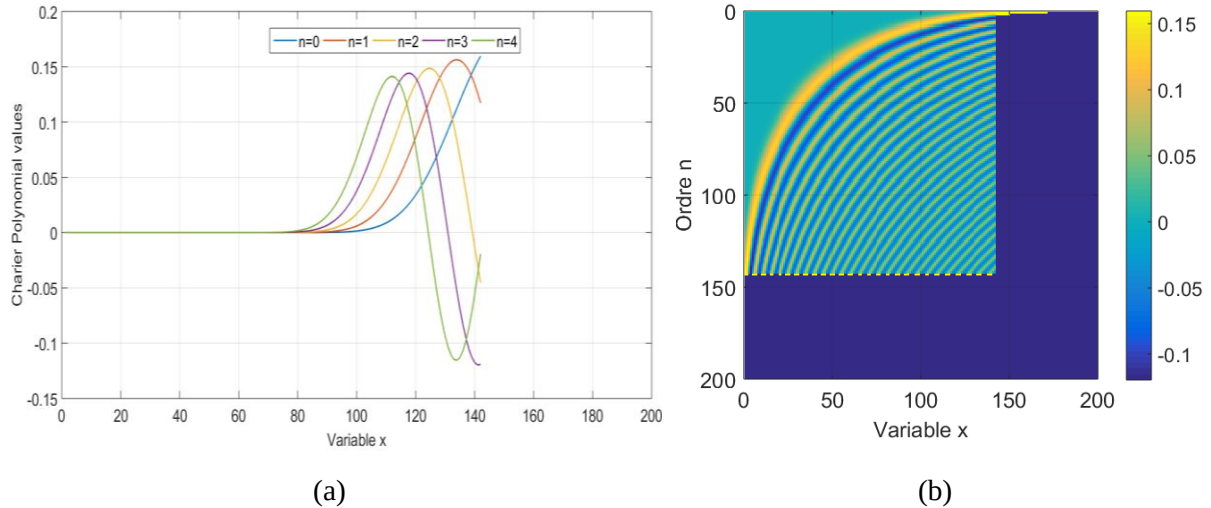


Figure I.4. Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence par rapport à la variable x pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$

En analysant les deux figures (I.3 et I.4), on remarque que les valeurs des polynômes orthonormés de Charlier ne sont plus calculées à partir de l'ordre 155 à cause de la divergence

des valeurs de polynômes. Après une étude expérimentale de la source des problèmes de divergence et de fluctuation numérique des valeurs polynomiales de Charlier (Figure I.3 et Figure I.4), on a constaté que la divergence provient de la fonction de poids $\omega(x)$ et du facteur de normalisation $\rho(n)$ (exemple: $\omega(172) = 0$ et $\rho(172) = Inf$ en utilisant Matlab).

Pour résoudre ces problèmes, nous proposons de calculer la fonction de poids $\omega(x)$ et le facteur de normalisation $\rho(n)$ par récurrence afin d'éviter les fluctuations des valeurs numériques. En effet, en utilisant les équations (I.38) et (I.40), on obtient les relations de récurrence de la fonction poids $\omega(x)$ et du facteur de normalisation $\rho(n)$ comme suit :

$$\omega(x+1) = \frac{a_1}{x+1} \omega(x) \quad \text{avec} \quad \omega(0) = e^{-a_1} \quad (I.49)$$

$$\rho(n+1) = \frac{(n+1)}{a_1} \rho(n) \quad \text{avec} \quad \rho(0) = 1 \quad (I.50)$$

Le calcul de $\omega(x)$ et $\rho(n)$ en utilisant les relations de récurrence définies par les équations (I.49) et (I.50) est indépendant des termes de puissance et de factoriel, ce qui nous a permis de calculer les valeurs de Charlier sans fluctuation numérique jusqu'à l'ordre 1000.

La figure I.5 montre les tracés de valeurs polynomiales de Charlier de l'ordre 0 jusqu'à 200 sans divergence. Ce qui permet de calculer les moments de Charlier jusqu'à l'ordre 1000 et d'analyser des images de grande taille.

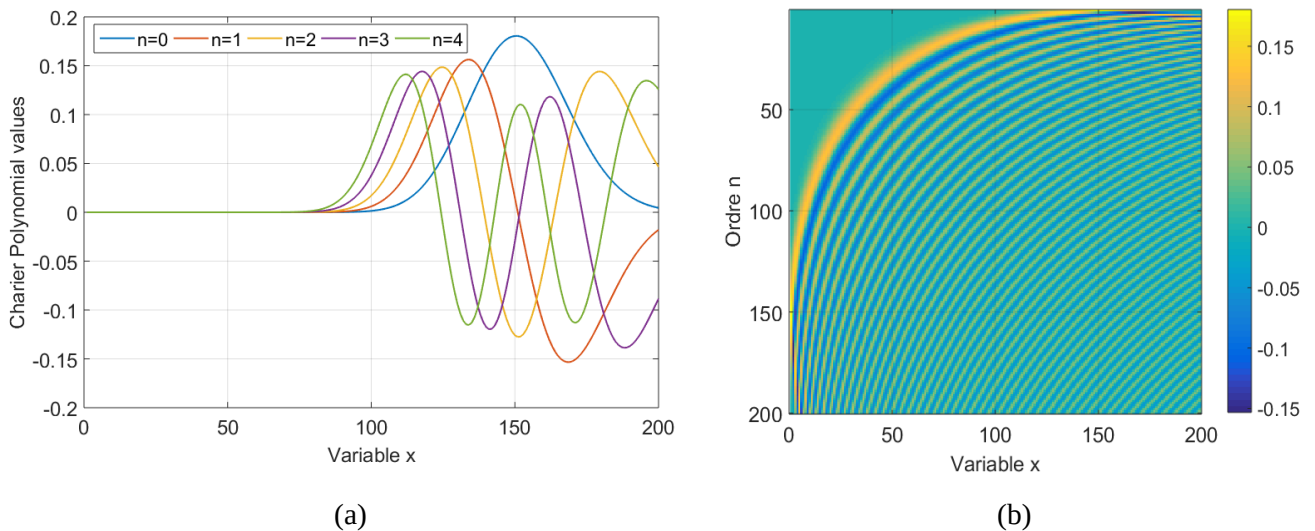


Figure I.5. (a): Tracés des polynômes de Charlier en utilisant la relation de récurrence de $\omega(x)$ et $\rho(n)$ pour des ordres n allant de 0 à 4, (b): Tracé de la matrice 2D des valeurs des polynômes de Charlier avec $N = 200$ et $a_1 = 140$

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions et les propriétés des différents types des polynômes orthogonaux discrets qui seront utilisés dans ce travail. Nous avons présenté aussi les moments orthogonaux discrets de Charlier 1D, 2D et 3D qui sont définis à partir de la projection de signal (objet) sur la base de polynôme orthogonaux discrets de Charlier. Ensuite on a introduit les méthodes de calcul des polynômes orthogonaux discrets de Charlier à savoir: la méthode directe qui se base sur le calcul des valeurs des polynômes de Charlier à partir de leurs définitions en termes des fonctions hypergéométriques et la méthode récursive en utilisant deux types de relation de récurrence: la relation de récurrence par rapport à l'ordre n et la relation de récurrence par rapport à la variable x . Ces méthodes sont très coûteuses en termes de temps de calcul surtout pour les images de grande taille. Pour résoudre à ce problème, nous proposons dans le chapitre suivant une nouvelle approche pour la simplification et l'accélération de temps du calcul des moments de Charlier.

Chapitre II

Calcul Rapide des Moments de Charlier et de ses Inverses par la Formule de Récurrence de Clenshaw

1. Introduction

Les moments orthogonaux discrets sont reconnus comme des outils utiles pour la représentation d'objets et l'analyse d'images. En général, le calcul des moments orthogonaux discrets dépend fortement du calcul des valeurs des polynômes orthogonaux discrets. Ces derniers sont calculés soit par la méthode directe à partir des fonctions hypergéométriques qui les définissent, soit à partir de calculs récursifs par rapport à l'ordre n ou à la variable x . Le calcul direct est très complexe et conduit des propagations des erreurs numériques, alors que les calculs récursifs sont moins complexes, moins coûteux en temps de calcul et réduisent considérablement la propagation d'erreurs numériques surtout pour les ordres élevés des polynômes.

Dans la littérature, plusieurs algorithmes sont introduits afin de réduire le temps de calcul des moments orthogonaux discrets [Sayyouri et al, 2014a], [Hmimid et al, 2015], [Spiliotis & Mertzios, 1998], [Shu et al, 2010]. Ces algorithmes se basent principalement sur deux approches différentes : l'approche polynomiale et l'approche pixel.

La première approche se base sur des algorithmes qui réduisent temps de calcul des valeurs des polynômes orthogonaux discrets en utilisation les relations de récurrence pour calculer chaque ordre polynomial à partir des ordres inférieurs au lieu du calcul direct. En plus l'utilisation des propriétés de symétrie de certains polynômes (Tchebichef [Abdulhussain et al, 2017b], Krawtchouk [Abdulhussain et al, 2018], Hahn [Sayyouri et al, 2013]) permettent de réduire d'avantage le temps de calcul des moments. Selon ces propriétés de symétrie, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs polynomiales pour tous les pixels symétriques, mais seulement pour une petite partie d'entre eux, en fonction du type de symétrie.

La deuxième approche se base sur la réduction de nombre de pixels de l'image où les polynômes et les moments sont évalués sans perte d'informations. Ceci est réalisé en décomposant l'image par un ensemble des slices homogène (même niveau de gris) et des blocs rectangulaires de petite taille [Spiliotis & Mertzios, 1998] et [Karmouni et al, 2018]. Il est à

que certains algorithmes combinent les deux approches de calcul afin de réduire le maximum possible le temps de calcul des moments [Papakostas et al, 2009] et [Papakostas et al, 2010].

Par conséquent, dans ce chapitre, nous proposons un algorithme efficace et rapide pour le calcul des moments de Charlier basé sur la formule de récurrence de Clenshaw pour le calcul rapide des polynômes de Charlier.

Bien que cette formule a été appliquée pour le calcul des valeurs polynomiales de Tchebichef [Guo-bao Wang et al, 2006] et de Krawtchouk [Raj et al, 2007], aucun travail n'a été effectué pour le calcul des moments de Charlier à l'aide de la formule de Clenshaw. Ainsi, l'application de cet algorithme nous a permis d'accélérer considérablement le temps de calcul des moments de Charlier par rapport aux méthodes basées le calcul direct et sur le calcul récursif.

En effet, dans ce chapitre, nous allons d'abord définir les relations de récurrence à trois termes des polynômes de Charlier par rapport à l'ordre n et par rapport à la variable x . Ensuite, nous présenterons la formule de récurrence de Clenshaw [Jahid et al, 2018a], qui sera appliquée pour le calcul des moments de Charlier et ses inverses pour les signaux discrets 1D puis pour les images 2D, et nous présenterons enfin les résultats des études comparatives entre les méthodes classiques et la méthode proposée.

2. Calcul des Moments de Charlier et ses Inverses par la Formule de Clenshaw

Dans cette section, nous présentons d'abord la formule de récurrence de Clenshaw, puis nous montrons comment l'appliquer pour calculer les moments de Charlier et ses inverses pour un signal discret 1D, puis nous l'étendons pour les images discrètes 2D.

2.1. Formule de récurrence de Clenshaw

[Teukolsky et al, 1992] proposent une formule de récurrence de Clenshaw pour évaluer une somme de produits de coefficients indexés par des fonctions obéissant à une relation de récurrence. La somme doit correspondre à la récurrence suivante :

$$I(x) = \sum_{n=0}^k c_n F_n(x) \quad (\text{II.1})$$

tel que $F_n(x)$ suit la relation de récurrence suivante :

$$F_{n+1}(x) = \alpha(n, x) F_n(x) + \beta(n, x) F_{n-1}(x) \quad (\text{II.2})$$

pour des fonctions $\alpha(n, x)$ et $\beta(n, x)$.

La somme $I(x)$ peut être évaluée en utilisant la formule de récurrence de Clenshaw suivante:

$$I(x) = \beta(1, x) F_0(x) \psi_2 + F_1(x) \psi_1 + c_0 F_0(x) \quad (\text{II.3})$$

Pour obtenir ψ_1 et ψ_2 , nous devons résoudre à l'envers, pour $n = K, K-1, \dots, 1$, l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \psi_{k+2} &= \psi_{k+1} = 0 \\ \psi_n &= \alpha(n, x) \psi_{n+1} + \beta(n+1, x) \psi_{n+2} + c_n \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Nous allons d'abord calculer les moments de Charlier 1D via la formule de Clenshaw, puis nous utiliserons la forme obtenue pour calculer les moments de Charlier 2D.

2.2. Moments de Charlier unidimensionnels (1D)

Les moments de Charlier d'un signal discret $f(x)$ sont définis comme suit:

$$CM_n = \sum_{x=0}^N \tilde{C}_n^{a_1}(x) f(x) \quad (\text{II.5})$$

La relation de récurrence par rapport à la variable x définie dans le premier chapitre par l'équation I. (48), correspond à l'équation (II.5), en considérant $F_x(n) = \tilde{C}_n^{a_1}(x)$ on obtient les expressions des fonctions α et β :

$$\begin{aligned} \alpha(n, x) &= \frac{x + a_1 - n}{a_1} \sqrt{\frac{\omega(x+1)}{\omega(x)}} = \frac{x + a_1 - n}{a_1} \sqrt{\frac{a_1}{x+1}} \\ \beta(n, x) &= \beta(x) = \frac{-x}{a_1} \sqrt{\frac{\omega(x+1)}{\omega(x-1)}} = -x \sqrt{\frac{1}{x(x+1)}} \quad \text{pour } x \succ 1 \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Nous pouvons donc mettre la somme $I(x)$ de l'équation (II.1) sous la forme réduite de l'équation (II.3) pour obtenir la forme suivante des moments de Charlier:

$$\begin{aligned} CM_n &= \beta(1, x) F_0(n) \psi_2 + F_1(n) \psi_1 + f(0) F_0(n) \\ &= \beta(1, x) \tilde{C}_n^{a_1}(0) \psi_2 + \tilde{C}_n^{a_1}(1) \psi_1 + f(0) \tilde{C}_n^{a_1}(0) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

avec

$$\tilde{C}_n^{a_1}(1) = \frac{a_1 - n}{a_1} \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} \tilde{C}_n^{a_1}(0) = \frac{a_1 - n}{a_1} \sqrt{a_1} \tilde{C}_n^{a_1}(0) \quad (\text{II.8})$$

Ensuite, nous pouvons écrire l'équation (II.7) en utilisant l'équation (II.8), comme suit:

$$CM_n = \tilde{C}_n^{a_1}(0) \left[\beta(1) \psi_2 + \frac{a_1 - n}{a_1} \sqrt{a_1} \psi_1 + f(0) \right] \quad (\text{II.9})$$

D'après l'équation (II.7), pour $x = N-1, \dots, 0$ on définit :

$$\begin{aligned}\psi_{N+1} &= \psi_N = 0 \\ \psi_x &= \alpha(n, x)\psi_{x+1} + \beta(x+1)\psi_{x+2} + f(x)\end{aligned}\quad (\text{II.10})$$

avec :

$$\alpha(n, N-1) = 0 \text{ et } \beta(N-1) = \beta(N) = 0 \quad (\text{II.11})$$

pour $x=0$ on peut écrire :

$$\psi_0 = \alpha(n, 0)\psi_1 + \beta(1)\psi_2 + f(0) = \frac{a_1 - n}{a_1} \sqrt{a_1} \psi_1 + \beta(1)\psi_2 + f(0) \quad (\text{II.12})$$

À partir des équations (II.9) et (II.12), nous pouvons écrire :

$$CM_n = \tilde{C}_n^{a_1}(0) \psi_0 \quad (\text{II.13})$$

De toute évidence, l'utilisation de la formule de récurrence de Clenshaw permet de limiter le calcul des polynômes de Charlier pour $x=0$ et $n=1, 2, \dots, N-1$, ce qui réduit considérablement le temps de calcul des moments de Charlier.

2.3. Moments de Charlier bidimensionnels (2D)

Comme notre objectif est d'améliorer le calcul des moments de Charlier d'images 2D. Ces derniers sont définis comme suit :

$$CM_{nm} = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{C}_m^{a_1}(y) f(x, y) \quad (\text{II.14})$$

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme suivante :

$$CM_{nm} = \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \varphi_y(n) \quad (\text{II.15})$$

avec :

$$\varphi_y(n) = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) f(x, y) \quad (\text{II.16})$$

Ainsi, les coefficients $\varphi_y(n)$ sont d'abord évalués pour chaque $y = M-1, \dots, 1, 0$, à partir de l'équation (II.16), comme suit:

$$\varphi_y(n) = \tilde{C}_n^{a_1}(0) \psi_0 \quad (\text{II.17})$$

Les valeurs de ψ_0 pour $x = N-1, \dots, 1, 0$ sont obtenues à partir de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\psi_{N+1} &= \psi_N = 0 \\ \psi_x &= \alpha(n, x)\psi_{x+1} + \beta(x+1)\psi_{x+2} + f(x, y)\end{aligned}\quad (\text{II.18})$$

Nous résumons les étapes de calcul des moments de Charlier 1D via la Formule de récurrence de Clenshaw proposée dans l'algorithme II.1 suivant :

Algorithme II.1. Le calcul des moments de Charlier 1D par la formule de Clenshaw

Entrée : Une image 2D $f(x, y)$, ordre $n, m \geq 0$, paramètre $a_1 \geq 0$;

Les trois étapes évaluées pour chaque $y = M-1, \dots, 1, 0$;

Etape 1 : pour $x = N-1, \dots, 0$, calculer ψ_0 en utilisant l'Eq. (II.18) ;

Etape 2 : pour $n = N-1, \dots, 0$, calculer $\tilde{C}_n^{a_1}(0)$ en utilisant l'Eq. (I.48) ;

Etape 3 : pour $n = N-1, \dots, 0$, calculer $\varphi_y(n)$ en utilisant l'Eq. (II.17) ;

Sortie : $\varphi_y(n)$

Ensuite, nous calculons les moments de Charlier CM_{nm} en utilisant les coefficients $\varphi_y(n)$, pour obtenir la forme standard de Clenshaw :

$$CM_{nm} = \tilde{C}_m^{a_1}(0) \phi_0 \quad (II.19)$$

Les coefficients ϕ_0 sont calculés en utilisant la récurrence en arrière comme suit, pour chaque $y = M-1, \dots, 1, 0$:

$$\begin{aligned} \phi_{M+1} &= \phi_M = 0 \\ \phi_y &= \alpha(m, y) \phi_{y+1} + \beta(y+1) \phi_{y+2} + \varphi_y(n) \end{aligned} \quad (II.20)$$

En résumé, les moments de Charlier 2D d'ordre $(n+m)$ sont calculés en trois étapes dans l'algorithme II.2 suivants :

Algorithme II.2. Le calcul des moments de Charlier 2D par la formule de Clenshaw

Entrée : Matrice $\varphi_y(n)$, ordre $n, m \geq 0$, paramètre $a_1 \geq 0$;

Les trois étapes évaluées pour chaque $x = N-1, \dots, 1, 0$;

Etape 1 : pour $y = M-1, \dots, 0$, calculer ϕ_0 en utilisant l'Eq. (II.22) ;

Etape 2 : pour $m = M-1, \dots, 0$, calculer $\tilde{C}_m^{a_1}(0)$ en utilisant l'Eq. (I.48) ;

Etape 3 : pour $m = M-1, \dots, 0$, calculer CM_{nm} en utilisant l'Eq. (II.21) ;

Sortie : CM_{nm}

Ainsi, en utilisant la méthode proposée, nous remarquons que pour un certain ordre n , nous devons calculer uniquement les polynômes de Charlier pour $x=0$, par contre avec les méthodes classiques, on doit calculer toutes les valeurs de $x, y = 0, 1, \dots, N-1$. Donc, pour calculer les moments d'un certain ordre, nous devons calculer $N \times M$ somme de produit de deux polynômes de cet ordre pour x, y et le point $f(x, y)$.

Par conséquent, en utilisant la méthode proposée pour le cas 2D, nous devons calculer $2(N+M)$ additions pour $2(N+M)+1$ produits.

De même façon, on peut calculer les moments de Charlier 3D en les décomposant par la formule de séparation suivante :

$$CM_{nmk} = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_k^{a_1}(z) f(x, y, z) \quad (\text{II.21})$$

puis, on applique la formule de Clenshaw trois fois.

Dans la section suivante, nous procédons à la reconstruction de signaux discrets 1D et des images 2D à partir des moments calculés par la formule de Clenshaw.

3. Reconstruction des images par la formule de Clenshaw

3.1. Reconstruction des signaux unidimensionnels

La reconstruction d'un signal $f(x)$ à partir des moments orthogonaux discrets CM_n est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) CM_n \quad (\text{II.22})$$

Afin d'appliquer la formule de Clenshaw pour calculer cette somme, on prend $F_n(x) = \tilde{C}_n^{a_1}(x)$ et on considère la relation de récurrence par rapport à l'ordre n des polynômes de Charlier définie par la formule suivante :

$$\tilde{C}_{n+1}^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x + n}{a_1} \sqrt{\frac{a_1}{n+1}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \tilde{C}_{n-1}^{a_1}(x) \quad (\text{II.23})$$

Nous pouvons donc déduire que :

$$\begin{aligned} \alpha(n, x) &= \frac{a_1 - x + n}{a_1} \sqrt{\frac{a_1}{n+1}} \\ \beta(n, x) &= \beta(n) = -\sqrt{\frac{n}{n+1}} \end{aligned} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{II.24})$$

Selon la formule de récurrence de Clenshaw, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta(1, x) F_0(x) \psi_2 + F_1(x) \psi_1 + CM_0 F_0(x) \\ f(x) &= \beta(1) \tilde{C}_0^{a_1}(x) \psi_2 + \tilde{C}_1^{a_1}(x) \psi_1 + CM_0 \tilde{C}_0^{a_1}(x) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

avec

$$\tilde{C}_1^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x}{a_1} \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(1)}} \tilde{C}_0^{a_1}(x) = \frac{a_1 - x}{a_1} \sqrt{a_1} \tilde{C}_0^{a_1}(x) \quad (\text{II.26})$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta(1)\tilde{C}_0^{a_1}(x)\psi_2 + \frac{a_1-x}{a_1}\sqrt{a_1}\tilde{C}_0^{a_1}(x)\psi_1 + CM_0\tilde{C}_0^{a_1}(x) \\ &= \tilde{C}_0^{a_1}(x)\left[\beta(1)\psi_2 + \frac{a_1-x}{a_1}\sqrt{a_1}\psi_1 + CM_0\right] \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont calculées par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \psi_{N+1} &= \psi_N = 0 \\ \psi_n &= \alpha(n, x)\psi_{n+1} + \beta(n+1)\psi_{n+2} + CM_n \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

avec :

$$\psi_0 = \alpha(0, x)\psi_1 + \beta(1)\psi_2 + CM_0 = \frac{a_1-x}{a_1}\sqrt{a_1}\psi_1 + \beta(1)\psi_2 + CM_0 \quad (\text{II.29})$$

À partir des équations (II.28) et (II.29), nous la formule finale du signal reconstruit $f(x)$:

$$f(x) = \tilde{C}_0^{a_1}(x)\psi_0 \quad (\text{II.30})$$

3.2. Reconstruction d'images 2D

Comme précédemment, on va suivre les mêmes étapes pour calculer l'image reconstruite en utilisant les moments de Charlier et la formule de Clenshaw. L'image reconstruite est donnée par la formule suivante :

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{C}_m^{a_1}(y) CM_{nm} = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \varphi_m(x) \quad (\text{II.31})$$

avec

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) CM_{nm} \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients $\varphi_m(x)$ sont évalués pour chaque $m = M-1, \dots, 1, 0$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \psi_{N+1} &= \psi_N = 0 \\ \psi_n &= \alpha(n, x)\psi_{n+1} + \beta(n+1)\psi_{n+2} + CM_{nm} \quad \text{pour } n = N-1, \dots, 1, 0 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Donc

$$\varphi_m(x) = \tilde{C}_0^{a_1}(x)\psi_0 \quad (\text{II.34})$$

Ainsi, $\varphi_m(x)$ sont exploités pour calculer récursivement la fonction $\hat{f}(x, y)$ en évaluant d'abord les coefficients ϕ_m :

$$\begin{aligned} \phi_{M+1} &= \phi_M = 0 \\ \phi_m &= \alpha(m, y) \phi_{m+1} + \beta(m+1) \phi_{m+2} + \varphi_m(x) \quad \text{pour } m = M-1, \dots, 1, 0 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

et par suite, on obtient l'image reconstruite :

$$\hat{f}(x, y) = \tilde{C}_0^{a_1}(y) \phi_0 \quad (\text{II.36})$$

Nous résumons les étapes de calcul des moments de Charlier et de ses inverses 1D via la relation de récursive de Clenshaw proposée par l'algorithme II.3 suivants :

Algorithme II.3. Reconstruction du signal 1D par les moments de Charlier

Entrée : Matrice CM_{nm} , ordre $n, m \geq 0$, paramètre $a_1 \geq 0$;

Les trois étapes évaluées pour chaque $m = M-1, \dots, 1, 0$;

Etape 1 : pour $n = N-1, \dots, 1, 0$, calculer ψ_0 en utilisant l'Eq. (II.33) ;

Etape 2 : pour $x = N-1, \dots, 0$, calculer $\tilde{C}_0^{a_1}(x)$ en utilisant l'Eq. (I.44) ;

Etape 3 : pour $x = N-1, \dots, 0$, calculer $\varphi_m(x)$ en utilisant l'Eq. (II.34) ;

Sortie : $\varphi_m(x)$

Nous résumons aussi les étapes de calcul des moments de Charlier et de ses inverses 2D via la relation de récursive de Clenshaw proposée par l'algorithme II.4 suivants :

Algorithme II.4. Reconstruction d'image 2D par les moments de Charlier

Entrée : Matrice $\varphi_m(x)$, ordre $n, m \geq 0$, paramètre $a_1 \geq 0$;

Les trois étapes évaluées pour chaque $n = N-1, \dots, 1, 0$;

Etape 1 : pour $m = M-1, \dots, 1, 0$, calculer ϕ_0 en utilisant l'Eq. (II.35) ;

Etape 2 : pour $y = M-1, \dots, 0$, calculer $\tilde{C}_0^{a_1}(y)$ en utilisant l'Eq. (I.44) ;

Etape 3 : pour $y = M-1, \dots, 0$, calculer $\hat{f}(x, y)$ en utilisant l'Eq. (II.36) ;

Sortie : $\hat{f}(x, y)$

4. Résultats de Simulations

Dans cette section, des expériences ont été menées pour vérifier l'efficacité des polynômes de Charlier et la rapidité de calcul des moments de Charlier et ses inverses avec la méthode proposée basée sur la formule de récurrence de Clenshaw. Donc, pour tester cette méthode, nous allons utiliser deux images de tailles 256×256 , la première est une image binaire "Zewaka" et la deuxième est une image en niveaux de gris "Lena" (Figure II.1).



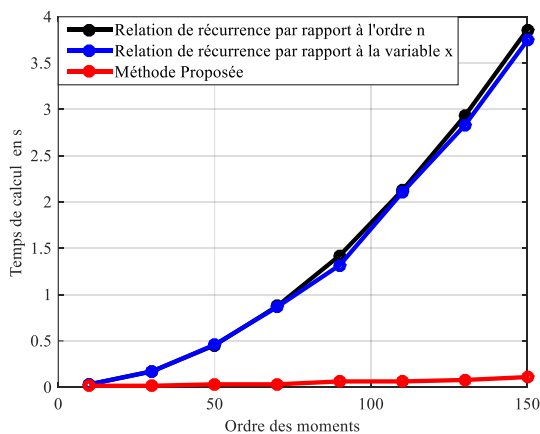
Figure II.1. Images de test : Image binaire "Zewaka" et Image en niveaux de gris "Lena"

Pour les tests expérimentaux, nous utilisons $a_1 = 256/2 = 128$ en tant que paramètre des polynômes de Charlier. Ce choix est expérimental mais significatif en raison de la capacité de ce paramètre pour définir une région d'intérêt d'une image.

4.1. Temps de calcul des moments de Charlier et ses inverses

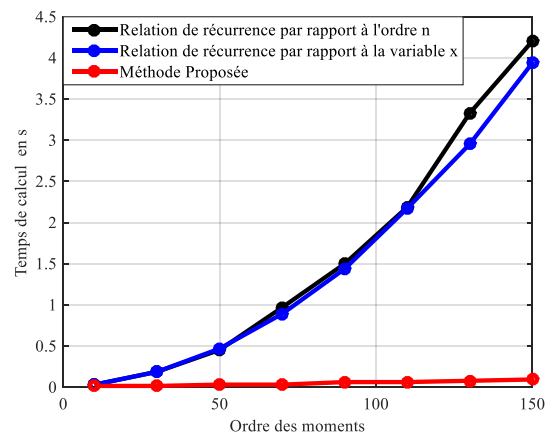
Tout d'abord, nous comparons le temps consommé par le calcul des moments de Charlier, pour deux images : binaire et en niveaux de gris (Figure II.1), et le temps nécessaire pour reconstruire les deux images également. En fait, toutes les expériences ont été réalisées sous Matlab par un PC de processeurs Intel ® Core i5-4200M à 1,60 GHz et de RAM 4,00 Go sous Windows 10 Professional 64 bits.

Les figures II.2 et II.3 montrent le temps nécessaire pour calculer les moments Charlier pour les deux images, pour des ordres différents par trois méthodes : la méthode de récurrence par rapport à l'ordre n , la méthode de récurrence par rapport à la variable x et la méthode proposée basée sur la relation de récurrence de Clenshaw. En conséquence, nous pouvons, sans aucun doute, constater que la méthode proposée basée sur la formule de récurrence de Clenshaw est très rapide par rapport aux méthodes récursives par rapport à n et par rapport à x , ce qui montre la capacité de la méthode proposée pour le calcul des moments de Charlier.



(a)

Figure II.2. Temps de calcul des moments de Charlier pour l'image binaire "Zewaka" par les trois méthodes



(b)

Figure II.3. Temps de calcul des moments de Charlier pour l'image en niveau de gris "Lena" par les trois méthodes

Dans le deuxième test, on va comparer le temps de calculer des transformées inverses des moments de Charlier (temps de reconstruction d'image) pour les deux images précédentes par les trois méthodes. Les résultats de simulations sont donnés dans les tableaux II.1 et II.2, nous constatons encore que la méthode proposée est stable et très rapide par rapport aux méthodes de récurrence. Ces expériences montrent clairement que la méthode de récurrence de Clenshaw améliore considérablement le temps de calcul des moments de Charlier et ses inverses.

Méthode	Ordre de Reconstruction par les moments de Charlier en utilisant								Temps de calcul moyen
	10	30	50	70	90	110	130	150	
Récurrence par rapport n	0,0781	0,2344	0,5313	0,9844	1,5313	2,2344	3,0625	4,0156	1,5840
Récurrence par rapport x	0,0469	0,2344	0,5109	0,9844	1,4298	2,1904	3,0021	3,8566	1,5319
Récurrence de Clenshaw	0,1094	0,1250	0,1250	0,1250	0,1406	0,1406	0,1406	0,1493	0,1301

Tableau II.1. Temps reconstruction de l'image binaire "Zewaka" par les trois méthodes

Méthode	Ordre de Reconstruction par les moments de Charlier en utilisant								Temps de calcul moyen
	10	30	50	70	90	110	130	150	
Récurrence par rapport n	0,0469	0,2344	0,5938	1,0469	1,5625	2,3594	3,1875	4,2969	1,6660
Récurrence par rapport x	0,0469	0,2344	0,5469	0,9844	1,5625	2,2656	3,0781	4,0156	1,5918
Récurrence de Clenshaw	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1406	0,1406	0,1563	0,1563	0,1367

Tableau II.2. Temps reconstruction de l'image en niveau de gris "Lena" par les trois méthodes

La figure II.4 présente un ensemble des images reconstruites des deux images "Zewaka" et "Lena" via les moments de Charlier calculés par la méthode proposée basée sur la formule de récurrence de Clenshaw pour des ordres allant de 0 à 250.

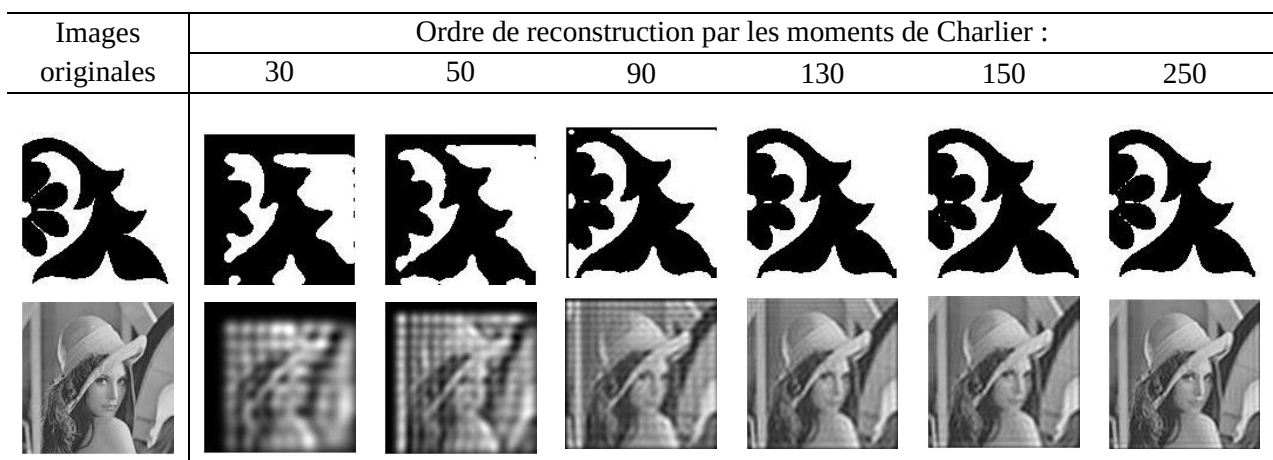


Figure II.4. Ensemble des images reconstruites des images "Zewaka" et "Lena" par les moments de Charlier calculés par la formule de Clenshaw

4.2. Reconstruction d'images via les moments de Charlier et de Krawtchouk calculés par la formule de Clenshaw

Afin de confirmer la robustesse de la méthode proposée basée sur la formule de récurrence de Clenshaw en utilisant les moments de Charlier, en termes de capacité de représentation de l'image, nous allons comparer, dans le troisième test, la capacité de reconstruction d'image des moments de Charlier avec ceux de Krawtchouk [Jahid et al, 2017a]. Dans cette expérience, on a utilisé les images "Zewaka" et "Lena" de tailles 128×128 pixels.

Comme critère de reconstruction, nous choisissons le rapport de signal sur bruit (PSNR) pour mesurer la qualité de l'image reconstruite par rapport à l'image originale. Donc, pour le calculer, nous devons d'abord calculer l'erreur quadratique moyenne (MSE) :

$$MSE = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(f(x_i, y_j) - \hat{f}(x_i, y_j) \right)^2 \quad (II.38)$$

avec $\hat{f}$ est l'image reconstruite :

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{G \max^2}{MSE} \right) \quad (II.39)$$

où $G \max^2$ est le niveau de gris maximum pour une image en niveaux de gris (1 pour une image binaire).

Les résultats des simulations (Figures II.5 et II.6) montrent la capacité de ces moments pour la reconstruction d'images avec une légère efficacité pour les moments de Charlier par rapport aux moments de Krawtchouk. En conclusion, on peut également noter que les moments de Charlier sont plus adéquats pour la reconstruction d'image par rapport aux autres types de moments.

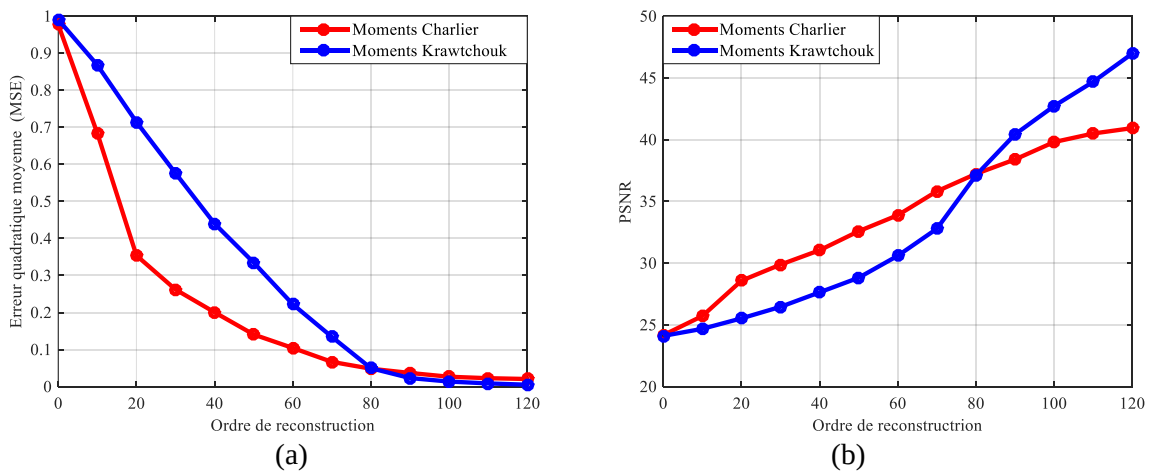


Figure II.5. Erreurs de reconstruction de l'image binaire "Zewaka" en utilisant les moments de Krawtchouk et de Charlier. (a): "MSE" et (b): "PSNR"

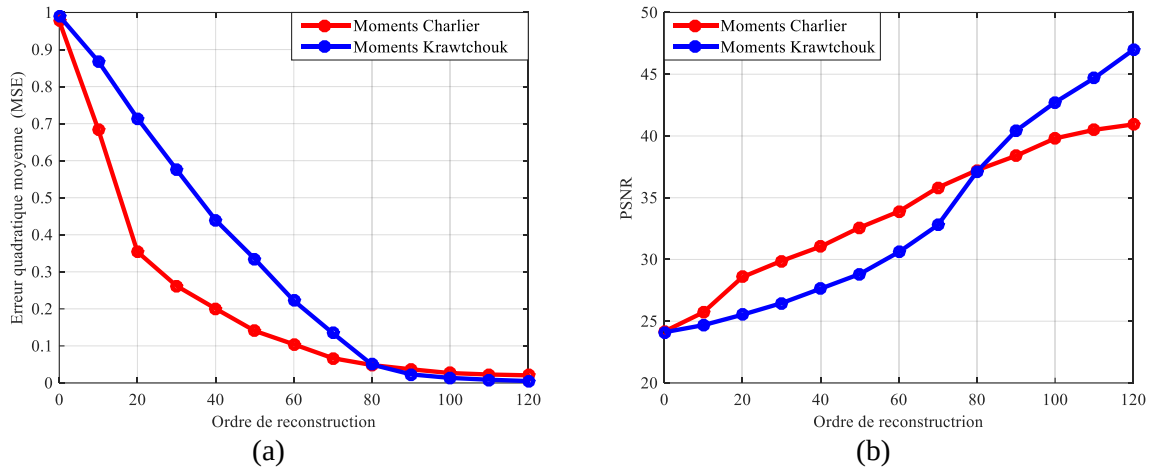


Figure II.6. Erreurs de reconstruction de l'image "Lena" en utilisant les moments de Krawtchouk et de Charlier. (a): "MSE" et (b): "PSNR"

5. Conclusion

Dans chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour le calcul des moments de Charlier basée sur la formule de récurrences de Clenshaw. La méthode proposée présente les avantages de rapidité et de stabilité, pour deux méthodes récursives, par rapport à l'ordre n et par rapport à la variable x . Les résultats expérimentaux ont montré l'efficacité de la méthode proposée en termes de temps de calcul des moments de Charlier et de ses inverses, tellement la complexité de calcul est réduite de 50% par rapport les méthodes existantes, et également en termes de qualité de reconstruction d'images binaires et en niveaux de gris. Néanmoins de point de vue stabilité numérique des valeurs des polynômes, cette dernière présente des difficultés majeures dans l'analyse d'images binaires et en niveaux de gris de grandes tailles. Ces difficultés nous ont poussé à développer des algorithmes rapides, précis et stables pour le calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier. Ces algorithmes feront l'objet du troisième chapitre.

Chapitre III

Algorithme Rapides et Stables de calcul des Moments de Charlier 2D/3D

via les Filtres Numériques

1. Introduction

Si le problème du temps de calcul est plus au moins résolu dans le deuxième chapitre, le problème de la propagation des erreurs numériques, surtout pour les ordres élevés, reste un problème ouvert. Ce dernier affecte sérieusement la qualité de reconstruction et de classification des images 2D et 3D, il constitue donc un véritable défi à résoudre dans ce chapitre. Motivés par la résolution de ce problème, nous proposons, dans ce chapitre, deux approches de calcul rapide et stable des moments orthogonaux discrets de Charlier ce qui permet d'améliorer la qualité de la reconstruction des images 2D et 3D.

Dans la première approche [Karmouni et al, 2018], nous avons combiné deux concepts principaux : Le premier est l'utilisation des filtres numériques 2D basés sur la transformation en Z pour accélérer le processus de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier 2D. Le deuxième concept est la subdivision d'image 2D en un ensemble de blocs de tailles fixes afin de réduire la quantité traitée des pixels. Alors que, dans la deuxième approche [Karmouni et al, 2019a], on a suivi les mêmes démarches pour étendre la première approche pour le cas des images 3D. Dans ce cadre, on a développé les filtres numériques 3D pour accélérer le processus de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D en décomposant l'image 3D par un ensemble des sous-images 3D appelés cuboïdes de petites tailles pour assurer la stabilité numérique lors de traitement des images 3D.

L'application des deux approches ainsi proposées permet de calculer les moments de Charlier 2D et 3D avec stabilité et rapidité à partir des morceaux (blocs 2D ou cuboïdes 3D) au lieu de l'image entière.

2. Calcul rapide et stable des moments de Charlier 2D [Karmouni et al, 2018]

Historiquement, les filtres numériques ont été introduits pour la première fois par Hatamian [Hatamian, 1986] pour le calcul des moments géométrique. Kotoulas et Andreadis [Kotoulas et Andreadis, 2006] ont montré le lien direct entre les résultats des filtres numériques et le calcul

des moments de Tchebichef, ce qui a contribué de manière significative à la réduction de la complexité du calcul. Honarvar [Honarvar et al, 2013] et [Honarvar et al, 2014a] ont introduit également les filtres numériques 1D et 2D en utilisant les propriétés de la transformation en Z en termes des polynômes de Tchebichef et de Krawtchouk.

Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche pour un calcul rapide et stable des moments orthogonaux de Charlier 2D [Karmouni et al, 2018]. Cette approche se base sur deux notions fondamentales :

- ✓ L'utilisation des filtres numériques 2D, afin d'accélérer le temps de calcul des moments orthogonaux discrets bidimensionnelle de Charlier.
- ✓ La représentation d'image par bloc en décomposant l'image 2D sous forme des blocs de tailles fixes où chaque bloc sera traité indépendamment.

La réduction significative de l'espace d'image 2D, lors du partitionnement permet de représenter les moindres détails de l'image avec seulement des ordres faibles des moments orthogonaux discrets de Charlier, ce qui assure la stabilité numérique.

2.1. Sortie des filtres numériques 2D

La fonction de transfert d'un filtre numérique sur le chemin de retour $H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, en donnant comme entrée un signal $f(x)$ et produit une sortie $y(x)$, représenté sur la figure III.1 comme suit :

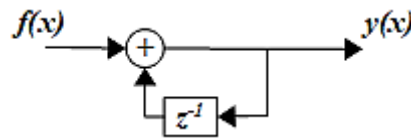


Figure III.1. La structure de filtre numérique sur le chemin de retour

Pour une série d'accumulateurs $n+1$, l'équation qui décrit la forme en cascade d'un accumulateur de la fonction de transfert $H_n(z) = \frac{Y_n(z)}{F(z)} = \frac{1}{(1-z^{-1})^{n+1}}$, représenté sur la figure III.2:

III.2:

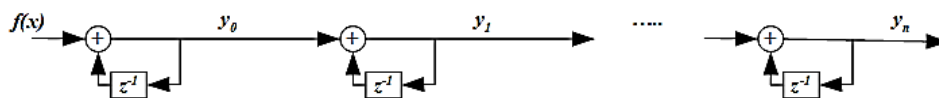


Figure III.2. La structure des filtres numériques pour générer la sortie 1D y_n à l'ordre n

La transformée en z inverse $H_n(z)$ est définie par la relation suivante :

$$H_n(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{n+1}} \xleftrightarrow[\text{Transformée en } z]{\text{Transformée en } z \text{ inverse}} h_n(x) = \binom{x}{n} \quad (\text{III.1})$$

La relation entre la sortie des filtres numériques y_n et le signal d'entrée $\tilde{f}(x)$ de taille N , en utilisant la transformation en z inverse Eq. (III.1), est donnée par :

$$y_n = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{f}(x) \binom{x}{n} \quad (\text{III.2})$$

sachant que $\tilde{f}(x) = \sqrt{\omega(x)} f(x)$ est le signal pondéré.

Les valeurs de sortie des filtres numériques 1D sont obtenue par l'algorithme III.1 suivant :

Algorithme III.1. Calcul la sortie des filtres numériques 1D

Entrée : $n, N, \tilde{f}(x)$

Sortie : Matrice y_n

pour $r \leftarrow 0$ **to** n **faire**

pour $x \leftarrow 0$ **to** $N-1$ **faire**

Calculer y_n utilisant Eq. (III.2) et Figure III.2 ;

fin

fin

fin

La fonction de transfert d'accumulateur des filtres numériques 2D $H_{nm}(z_1, z_2) = \frac{Y_{nm}(z_1, z_2)}{F(z_1, z_2)} = \frac{1}{(1-z_1^{-1})^n \times (1-z_2^{-1})^m}$, en donnant comme entrée l'image $\tilde{f}(x, y)$ et produit une sortie y_{nm} , représenté sur la figure III.3.

La sortie des filtres numériques pour une image 2D d'entrée $\tilde{f}(x, y)$ avec la taille $N \times M$ en utilisant la transformation en z inverse Eq. (III.1), définie par l'expression suivante :

$$y_{nm} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{f}(x, y) \binom{x}{n} \binom{y}{m} \quad (\text{III.3})$$

Sachant que $\tilde{f}(x, y) = \sqrt{\omega(x)\omega(y)} f(x, y)$ est l'image pondérée.

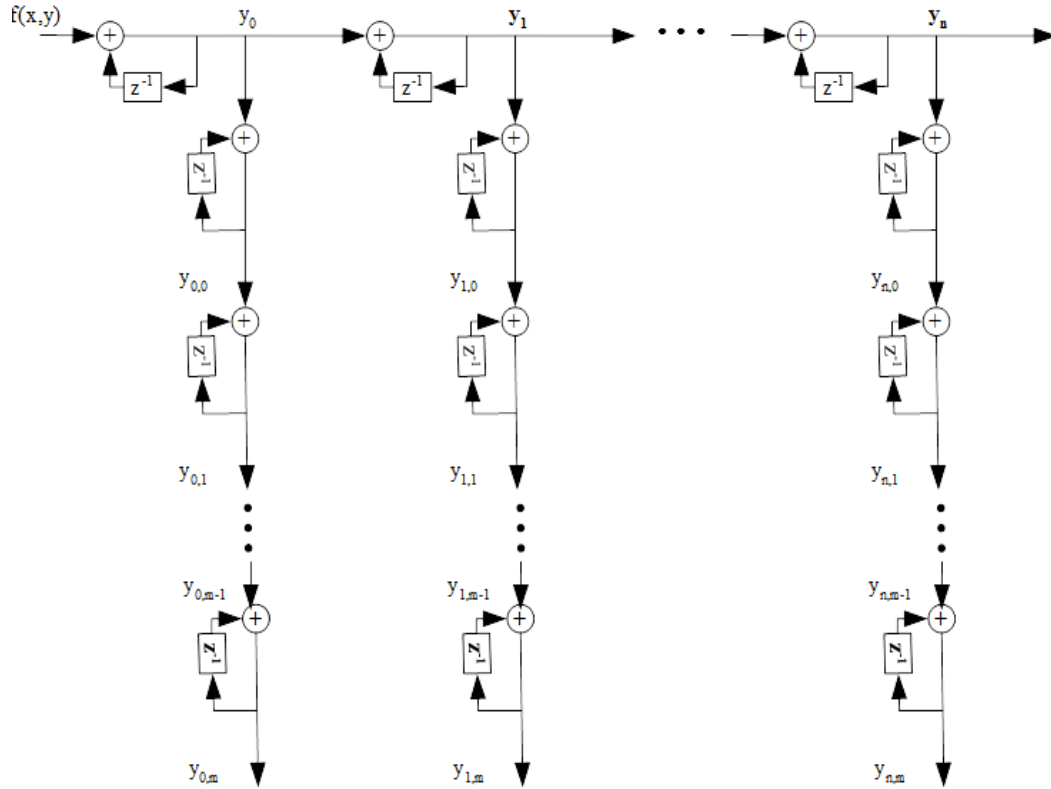


Figure III.3. La structure des filtres numériques pour générer la sortie 2D y_{nm} à l'ordre $(n+m)$

Les valeurs de sortie des filtres numériques 2D sont calculés par l'algorithme suivant :

Algorithme III.2. Calcul la sortie des filtres numériques 2D

Entrée : $n, m, N, M, \tilde{f}(x, y)$

Sortie : Matrice y_{nm}

pour $r \leftarrow 0$ **to** n **faire**

pour $s \leftarrow 0$ **to** m **faire**

pour $x \leftarrow 0$ **to** $N-1$ **faire**

pour $y \leftarrow 0$ **to** $M-1$ **faire**

 Calculer y_{nm} utilisant Eq. (III.3) et Figure III.3 ;

fin

fin

fin

fin

fin

2.2. Calcul rapide des moments de Charlier 2D via les filtres numériques 2D

Avant de calculer les moments de Charlier 2D via les filtres numériques 2D, on va développer le symbole de Pochhammer en termes de coefficients binomial :

$$(-x)_k = (-1)^k k! \binom{x}{k} \quad (\text{III.4})$$

Une forme explicite des polynômes de Charlier 2D est donnée par la formule suivante:

$$C_n^{a_1}(x) = \sum_{k=0}^n (-n)_k \left(\frac{1}{a_1} \right)^k \binom{x}{k} \quad (\text{III.5})$$

Par conséquence, l'Eq. (III.5) peut être exprimé en termes de binomial $\binom{x}{k}$ comme suit :

$$C_n^{a_1}(x) = \sum_{k=0}^n \Gamma_k(n, a_1) \binom{x}{k} \quad (\text{III.6})$$

avec $\Gamma_k(n, a_1)$ est une matrice triangulaire inférieure définie par l'expression suivante :

$$\Gamma_k(n, a_1) = \frac{(-n)_k}{(a_1)^k} \quad (\text{III.7})$$

Pour une image numérique $f(x, y)$ de taille $N \times M$, avec $x \in [0, N-1]$ et $y \in [0, M-1]$, les moments de Charlier 2D d'ordre $(n+m)^{th}$ sont définis comme suit :

$$CM_{nm} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) f(x, y) \quad (\text{III.8})$$

En remplaçant les polynômes normalisés de Charlier dans l'expression précédente, on obtient :

$$CM_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\rho(n)\rho(m)}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(y) \sqrt{\omega(x)\omega(y)} f(x, y) \quad (\text{III.9})$$

En remplaçant $\frac{1}{\sqrt{\rho(n)\rho(m)}}$ par A_{nm} et $\sqrt{\omega(x)\omega(y)} f(x, y)$ par $\tilde{f}(x, y)$, on obtient

l'expression des moments de Charlier comme suit :

$$CM_{nm} = A_{nm} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(y) \tilde{f}(x, y) \quad (\text{III.10})$$

Ensuite, en utilisant l'expression des moments dans l'Eq. (III.10), et la forme binomiale des polynômes de Charlier dans l'Eq. (III.6), les moments de Charlier 2D sont redéfinis comme suit:

$$\begin{aligned}
 CM_{nm} &= A_{nm} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{k=0}^n \Gamma_k(n, a_1) \binom{x}{k} \sum_{l=0}^m \Gamma_l(m, a_1) \binom{y}{l} \tilde{f}(x, y) \\
 &= A_{nm} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \Gamma_k(n, a_1) \Gamma_l(m, a_1) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \binom{x}{k} \binom{y}{l} \tilde{f}(x, y) \\
 &= A_{nm} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \Gamma_k(n, a_1) \Gamma_l(m, a_1) y_{kl} \\
 &= A_{nm} \sum_{k=0}^n \Gamma_k(n, a_1) \left[\sum_{l=0}^m \Gamma_l(m, a_1) y_{kl} \right]
 \end{aligned} \tag{III.11}$$

avec y_{kl} est la sortie des filtres numériques 2D de l'image d'entrée $\tilde{f}(x, y)$:

$$y_{kl} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \tilde{f}(x, y) \binom{x}{k} \binom{y}{l} \tag{III.12}$$

Nous posons : $Y = \{y_{nm}\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}$ et $\Gamma = \{\Gamma_{nm}\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}$.

Alors, les moments de Charlier 2D sont obtenus en termes de produit matriciel comme suit :

$$CM_{nm} = A_{nm} Q_{nm} \quad \text{avec} \quad Q = \Gamma Y \Gamma^T \tag{III.13}$$

$()^T$ dénote la transposition de la matrice.

Après le calcul de la matrice Q , on multiplie Q_{nm} par le coefficient A_{nm} pour obtenir les moments de Charlier 2D CM à l'ordre $(n+m)$:

$$CM = \{CM_{nm}\}_{n,m=0}^{N-1, M-1} \tag{III.14}$$

2.3. Reconstruction rapide et stable d'image 2D via les filtres numériques 2D à partir des blocs fixes

La méthode d'analyse d'image par blocs connue par l'acronyme anglais " 2D Image Block Representation by fixed size " (IBRF) [Karmouni et al, 2018] permet de calculer les moments de Charlier 2D de chaque bloc et de reconstruire l'image à partir de ces blocs au lieu de la reconstruction globale. L'idée de base de cette méthode réside dans l'utilisation des moments d'ordre faible sur de petits intervalles, plutôt que des ordres élevés sur un seul intervalle.

L'image à reconstruire est partitionnée en plusieurs blocs de taille (k, l) produisant un nombre de sous-images qui seront ensuite reconstruites séparément.

Soit (M, N) la taille de l'image initiale et (k, l) la taille du bloc de partitionnement. En introduisant les variables :

$$s_1 = \frac{M}{k}, s_2 = \frac{N}{l} \tag{III.15}$$

Le nombre total de blocs de l'image s'exprime par :

$$N_b = s_1 \cdot s_2 . \quad (\text{III.16})$$

Sachant que l'espace image est donné par :

$$\Omega = \{ x, y / \quad 0 \leq x \leq M-1 , \quad 0 \leq y \leq N-1 \} \quad (\text{III.17})$$

Nous définissons le sous-espace bloc $f^{p_1, p_2} \subset \Omega$ comme étant :

$$f^{p_1, p_2} = \{ x, y / \quad p_1 k \leq x \leq (p_1 + 1)k , \quad p_2 l \leq y \leq (p_2 + 1)l \} \quad (\text{III.18})$$

Notons que l'espace de l'image globale Ω peut s'exprimer en termes des sous-espaces blocs par la relation suivant :

$$\Omega = \bigcup_{p_1=0}^{(s_1-1)} \bigcup_{p_2=0}^{(s_2-1)} f^{p_1, p_2} \quad (\text{III.19})$$

Alors, la fonction image associée à chaque sous-espace f^{p_1, p_2} est définie par :

$$f^{p_1, p_2}(x, y) = \{ f(i, j) / i, j \in D^{p_1, p_2} \} \quad (\text{III.20})$$

À partir de cette expression, nous pouvons obtenir une image reconstruite comme indiqué sur la figure III.4(c) :

$$\hat{f}(x, y) = \bigcup_{p_1=0}^{(s_1-1)} \bigcup_{p_2=0}^{(s_2-1)} \hat{f}^{p_1, p_2}(x, y) \quad (\text{III.21})$$

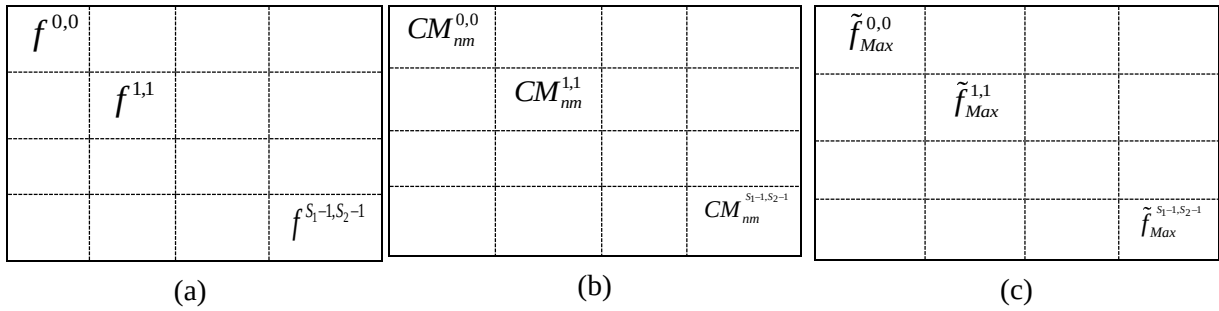


Figure III.4. Illustration de la méthode de reconstruction d'image par blocs en utilisant les moments orthogonaux discrets de Charlier. (a): partitionnement de l'image initiale en N_b sous-images. (b): extraction de moments pour chaque bloc. (c): reconstruction et fusion des N_b blocs

Selon ces définitions, les moments de Charlier 2D de chaque bloc sont calculés en utilisant les filtres numériques 2D pour une image décomposée en blocs par la relation suivante :

$$CM_{nm}^{p_1, p_2} = A_{nm} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m \Gamma_r(n, a_1) \Gamma_s(m, a_1) y_{rs}^{p_1, p_2} \quad (\text{III.22})$$

avec $y_{rs}^{p_1, p_2}$ la sortie des filtres numériques 2D de chaque bloc, définis par:

$$y_{rs}^{p_1, p_2} = \sum_{x=p_2 k}^{(p_2+1)k} \sum_{y=p_1 l}^{(p_1+1)l} \tilde{f}^{p_1, p_2}(x, y) \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \quad (III.23)$$

$$x, y \in f^{p_1, p_2}$$

Les moments de Charlier 2D de chaque bloc $CM_{nm}^{p_1, p_2}$ sont calculés en deux étapes comme suit:

$$CM_{nm}^{p_1, p_2} = A_{nm} Q_{nm}^{p_1, p_2} \quad (III.24)$$

avec

$$Q^{p_1, p_2} = \Gamma Y^{p_1, p_2} \Gamma^T \quad (III.25)$$

()^T désigne la transposition de la matrice.

avec CM^{p_1, p_2} , Q^{p_1, p_2} , Y^{p_1, p_2} et Γ sont définis comme :

$$\begin{aligned} CM^{p_1, p_2} &= \left\{ CM_{nm}^{p_1, p_2} \right\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}; \\ Q^{p_1, p_2} &= \left\{ Q_{nm}^{p_1, p_2} \right\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}; \\ Y^{p_1, p_2} &= \left\{ y_{nm}^{p_1, p_2} \right\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}; \\ \Gamma &= \left\{ \Gamma_{nm} \right\}_{n,m=0}^{N-1, M-1}. \end{aligned} \quad (III.26)$$

La figure III.5 montre l'organigramme permettant de calculer les moments de Charlier 2D et de ses inverses par bloc fixe via les filtres numériques 2D :

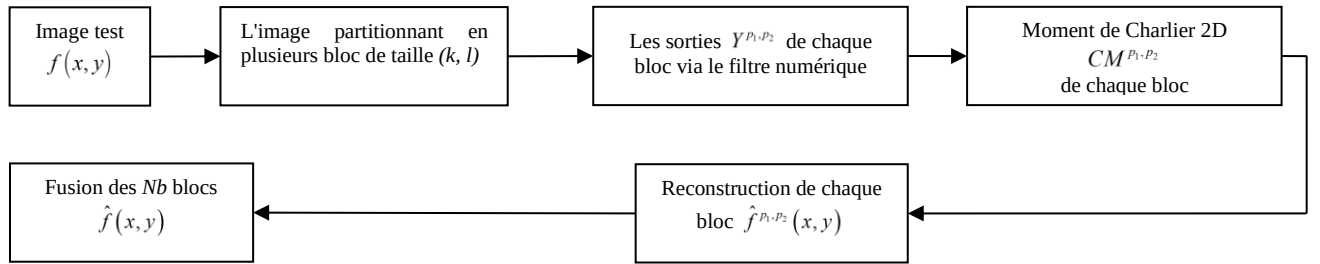


Figure III.5. Diagramme de reconstruction d'image 2D par blocs

3. Calcul rapide et stable des moments de Charlier 3D et de ses inverses [Karmouni et al, 2019a]

L'image 3D nécessite plus de quantité d'informations à traiter. Par conséquent, la complexité augmente d'une manière plus significative que dans le cas 2D, surtout pour les ordres élevés. Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche pour accélérer le traitement d'image tridimensionnelle par les moments orthogonaux discrets de Charlier 3D. L'approche proposée repose sur deux notions fondamentales:

- ✓ La première est l'accélération du temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier d'une image 3D en utilisant des filtres numériques 3D.
- ✓ La seconde est la description d'image 3D par un ensemble des cuboïdes de taille fixe au lieu de voxels individuels en décomposant l'image 3D en cuboïdes de petites tailles pour assurer la stabilité numérique.

Par application de cette approche, les moments de Charlier 3D sont calculés à partir des cuboïdes au lieu de l'image entière 3D. Ce qui permet d'accélérer le temps de calcul des moments et d'éviter le problème de propagation des erreurs numériques rencontrées lors de l'utilisation de filtres numériques 3D pour des images 3D de grandes tailles.

3.1. Sortie des filtres numériques 3D

Le réseau accumulateur des filtres numériques 3D est formée par une distribution connexe des filtres numériques sur une ligne et $n + 1$ colonnes sachant que chaque colonne représente un réseau accumulateur des filtres numériques 2D formé à base des filtres à un seul pôle et à un seul zéro comme le montre la figure III. 6 [Jahid et al, 2017b] et [Karmouni et al, 2018].

La fonction de transfert du réseau accumulateur des filtres numériques 3D $H_{nmk}(z_1, z_2, z_3) = \frac{Y_{nmk}(z_1, z_2, z_3)}{F(z_1, z_2, z_3)} = \frac{1}{(1 - z_1^{-1})^n \times (1 - z_2^{-1})^m \times (1 - z_3^{-1})^k}$, en donnant comme entrée l'image $\tilde{f}(x, y, z)$ et produit une sortie y_{nmk} , représentée sur la figure III.6.

La sortie des filtres numériques 3D pour une image 3D d'entrée $\tilde{f}(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ en utilisant la transformation inverse en z Eq. (III.1), définie par l'expression suivante :

$$y_{nmk} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{f}(x, y, z) \binom{x}{n} \binom{y}{m} \binom{z}{k} \quad (\text{III.27})$$

avec $\tilde{f}(x, y, z) = \sqrt{\omega(x)\omega(y)\omega(z)} f(x, y, z)$ est l'image pondéré.

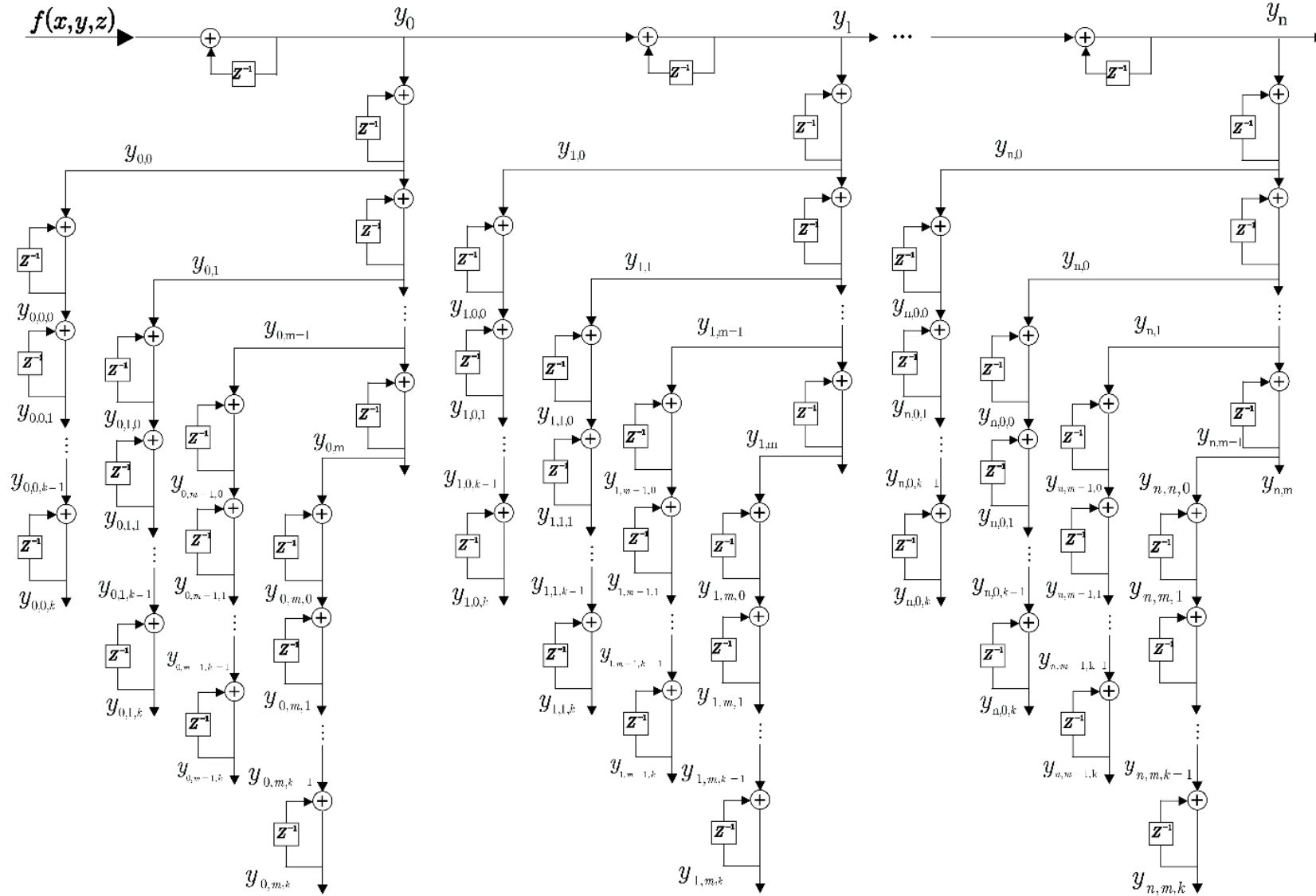


Figure III.6. La structure des filtres numériques pour générer la sortie y_{nmk} 3D à l'ordre $(n+m+k)$

Les valeurs de sortie des filtres numériques 3D sont calculée par l'algorithme III.3 suivant :

Algorithme III.3. Calcul la sortie des filtres numériques 3D

Entrée : $n, m, k, N, M, K, f(x, y, z)$

Sortie : Matrice y_{nmk}

pour $r \leftarrow 0$ **to** n **faire**

pour $s \leftarrow 0$ **to** m **faire**

pour $l \leftarrow 0$ **to** k **faire**

pour $x \leftarrow 0$ **to** $N - 1$ **faire**

pour $y \leftarrow 0$ **to** $M - 1$ **faire**

pour $z \leftarrow 0$ **to** $K - 1$ **faire**

 Calculer y_{nmk} utilisant d'Eq. (III.27) et Figure III.6;

fin

fin

fin

fin

fin

fin

3.2. Calcul rapide des moments de Charlier 3D et de ses inverses via les filtres numériques 3D

Les moments de Charlier 3D d'ordre $(n + m + k)^{th}$, d'une image 3D d'intensité $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ sont exprimés par la relation suivante :

$$CM_{nmk} = \frac{1}{\sqrt{\rho(n)\rho(m)\rho(k)}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(y) C_k^{a_1}(z) \sqrt{\omega(x)\omega(y)\omega(z)} f(x, y, z) \quad (III.28)$$

L'ensemble de ces moments Eq. (III.28), sont écrits explicitement comme suit :

$$CM_{nmk} = A_{nmk} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(y) C_k^{a_1}(z) \tilde{f}(x, y, z) \quad (III.29)$$

avec :

$$A_{nmk} = \frac{1}{\sqrt{\rho(n)\rho(m)\rho(k)}} \quad (III.30)$$

$$\tilde{f}(x, y, z) = \sqrt{\omega(x)\omega(y)\omega(z)} f(x, y, z) \quad (III.31)$$

Malheureusement, les nombreuses applications de ces moments entravent les exigences informatiques des moments de Charlier 3D. Cette méthode prend beaucoup de temps, donc ne peut pas être étendue pour calculer les moments de Charlier 3D. Pour accélérer le calcul

temporel des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D, nous proposons une nouvelle méthode de calcul des moments en utilisant la sortie des filtres numériques 3D.

L'expansion polynomiale dans l'équation Eq. (III.6) est utile pour exprimer les moments Charlier 3D en termes la sortie des filtres numériques 3D. Alors, nous pouvons de remplacer dans l'Eq. (III.29) les polynômes de Charlier 3D par leurs expressions de l'Eq. (III.6) de la manière suivante :

$$CM_{nmk} = A_{nmk} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \sum_{r=0}^n \Gamma_r(n, a_1) \binom{x}{r} \sum_{s=0}^m \Gamma_s(m, a_1) \binom{y}{s} \sum_{l=0}^k \Gamma_l(k, a_1) \binom{z}{l} \tilde{f}(x, y, z) \quad (III.32)$$

où

$$CM_{nmk} = A_{nmk} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^k \Gamma_r(n, a_1) \Gamma_s(m, a_1) \Gamma_l(k, a_1) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{f}(x, y, z) \binom{x}{r} \binom{y}{s} \binom{z}{l} \quad (III.33)$$

Les trois dernières sommations de l'équation (III.33) sont équivalentes à la sortie des filtres numériques 3D, décrite par l'équation (III.27). Par conséquence, les moments de Charlier 3D sont exprimés à partir la sortie des filtres numériques 3D comme suit :

$$CM_{nmk} = A_{nmk} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^k \Gamma_r(n, a_1) \Gamma_s(m, a_1) \Gamma_l(k, a_1) y_{rsl} \quad (III.34)$$

L'algorithme III.4 est utilisé pour calculer les moments de Charlier 3D via les filtres numériques 3D illustré au figure III.6.

Algorithme III.4. Calcul des moments de Charlier 3D via les filtres numériques 3D

Entrée : n, m, k

Sortie : Matrice des moments de Charlier 3D CM_{nmk}

Calculer la norme A_{nmk} utilisant Eq. (III.30) ;

Calculer la matrice du triangle inférieur $\Gamma_r(n, a_1)$ utilisant Eq. (III.7) ;

Calculer la sortie y_{rsl} utilisant Algorithme.III.3 ;

pour $r \leftarrow 0$ **to** n **faire**

pour $s \leftarrow 0$ **to** m **faire**

pour $l \leftarrow 0$ **to** k **faire**

 Calculer CM_{nmk} utilisant Eq. (III.34) ;

fin

fin

fin

fin

3.3. Reconstruction d'image 3D via les moments de Charlier 3D calculés par les filtres numériques 3D

La reconstruction d'image 3D $f(x, y, z)$, est obtenue en utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes orthogonaux discrets normalisés, à partir d'un ensemble des moments de Charlier 3D d'Eq. (III.34) d'ordre "**max**" :

$$\hat{f}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\max} \sum_{m=0}^{\max} \sum_{k=0}^{\max} CM_{nmk} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad (\text{III.35})$$

Pour tester la qualité de reconstruction des images 3D via les moments de Charlier 3D, on utilise deux critères fondamentaux :

Le premier est l'erreur quadratique moyenne définie comme suit :

$$MSE = \frac{1}{N \times M \times K} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \left(f(x, y, z) - \hat{f}(x, y, z) \right)^2 \quad (\text{III.36})$$

avec $\hat{f}(x, y, z)$ la version reconstruite de la fonction d'image originale 3D $f(x, y, z)$ pour chaque voxel (x, y, z) .

Le deuxième est le rapport signal sur bruit maximum défini en décibels (d_b) par la relation suivante:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{k^2}{MSE} \right) \quad (\text{III.37})$$

k : est la valeur maximale dans chaque voxel de l'image d'origine 3D.

Si le problème de la consommation de temps de calcul des moments a été résolu en utilisant les filtres numériques 3D, le problème de la stabilité numérique des images reconstruites reste un problème délicat. En effet, l'inconvénient majeur de calcul des moments de Charlier 3D en utilisant les filtres numériques 3D est l'instabilité numérique de ses valeurs affectées par le calcul des formes binomiales d'Eq. (III.27). Par exemple, les valeurs des moments 3D d'ordre $30 \times 30 \times 30$ allant jusqu'à $3.8741e+41$ et pour ordre $50 \times 50 \times 50$ allant jusqu'à $1.2207e+63$ pour une image 3D de taille $128 \times 128 \times 128$.

Pour résoudre ce problème on va utiliser la représentation d'image 3D par des cuboïdes de taille fixe [Karmouni et al, 2019a]. Cette représentation sera détaillée dans la section suivante.

3.4. Reconstruction rapide et stable d'image 3D via les moments de Charlier 3D calculés à partir des cuboïdes fixe

Dans cette section, on propose un nouvel algorithme pour le calcul rapide et stable des moments de Charlier et de ses inverses basés sur la représentation d'images 3D en cuboïde de taille fixe, connue par l'acronyme anglais ICRF "3D image cuboid representation by fixed size" [Karmouni et al, 2019a]. Cet algorithme est utilisé à la fois pour minimiser l'erreur générée dans le calcul des moments de Charlier 3D en utilisant les filtres numériques 3D, et pour assurer la stabilité numérique lors du traitement de l'image 3D.

Cette approche est purement locale ce qui induit une amélioration significative et garantit une reconstruction rapide et stable des images 3D avec une qualité supérieure.

Soit une image 3D de taille (N, M, K) , il est divisé en un ensemble de cuboïdes de taille fixe (l_n, l_m, l_k) comme indiqué dans la figure III.7 :

$$c_n = \frac{N}{l_n}, c_m = \frac{M}{l_m}, c_k = \frac{K}{l_k} \quad (\text{III.38})$$

Par conséquent, le nombre total des cuboïdes d'image 3D, est définis par $N_c = c_n \cdot c_m \cdot c_k$.

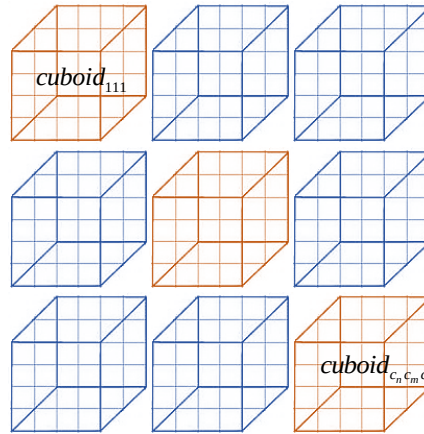


Figure III.7. La représentation d'image 3D en cuboïdes de taille fixe

Chaque cuboïde correspond à un objet 3D ou à une partie d'un objet 3D. Ce cuboïde est défini comme un volume cubique comprenant un groupe de voxels connectés. L'image 3D, est générée de la manière suivante :

$$f(x, y, z) = \sum_{p_1=1}^{c_n} \sum_{p_2=1}^{c_m} \sum_{p_3=1}^{c_k} cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z) \quad (\text{III.39})$$

avec :

$$cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z) = \left\{ f(i, j, t) / i, j, t \in cuboid_{p_1 p_2 p_3} \right\} \quad (III.40)$$

Selon ces définitions, les moments de Charlier 3D $CM_{nmk}^{p_1 p_2 p_3}$ d'ordre $(n + m + k)^{th}$ de chaque cuboïde $\{cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z)\}$ en utilisant les filtres numériques 3D $y_{rsl}^{p_1 p_2 p_3}$ de chaque cuboïde, sont définis par la relation suivante:

$$CM_{nmk}^{p_1 p_2 p_3} = A_{nmk} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^k \Gamma_r(n, a_1) \Gamma_s(m, a_1) \Gamma_l(k, a_1) y_{rsl}^{p_1 p_2 p_3} \quad (III.41)$$

avec $y_{rsl}^{p_1 p_2 p_3}$ est la sortie des filtres numériques du cuboïde $\{cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z)\}$:

$$y_{rsl}^{p_1 p_2 p_3} = \sum_{x=p_1 l_n}^{(p_1+1)k} \sum_{y=p_2 l_m}^{(p_2+1)l} \sum_{z=p_3 l_k}^{(p_3+1)l} cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z) \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ l \end{pmatrix} \quad (III.42)$$

$$x, y, z \in cuboid_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z)$$

La reconstruction locale d'ordre "**max**" par le calcul direct est obtenue via les moments de Charlier 3D de chaque cuboïde par la formule de reconstruction suivante :

$$\hat{cuboid}_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\max} \sum_{m=0}^{\max} \sum_{k=0}^{\max} CM_{nmk}^{p_1 p_2 p_3} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad (III.43)$$

Enfin, nous fusionnons les cuboïdes ainsi reconstruits pour avoir l'image reconstruite globale, de même taille que l'image 3D originale, utilisant l'équation suivante :

$$\hat{f}(x, y, z) = \sum_{p_1=1}^{c_n} \sum_{p_2=1}^{c_m} \sum_{p_3=1}^{c_k} \hat{cuboid}_{p_1 p_2 p_3}(x, y, z) \quad (III.44)$$

La reconstruction locale d'une image 3D en utilisant le calcul des moments de Charlier 3D passe par les quatre étapes de l'algorithme suivant :

Algorithme III.5. La reconstruction locale par ICRF

Etape 1 : Division de l'image 3D $f(x, y, z)$ de taille (N, M, K) en N_c cuboïdes travers l'Eq. (III.38) ;

Etape 2 : Calcul des moments de Charlier 3D de chaque cuboïde en utilisant l'Eq. (III.41) et Algorithme.III.4;

Etape 3 : Reconstruction locale de chaque cuboïde en utilisant l'Eq. (III.43) ;

Etape 4 : Fusion des cuboïdes reconstruits en utilisant l'Eq. (III.44) ;

En conclusion, les moments de Charlier 3D sont calculés à partir des cuboïdes au lieu de l'image entière ce qui permet d'accélérer le temps de calcul des moments et d'éviter le problème de propagation des erreurs numériques rencontrées lors de l'utilisation des filtres numériques 3D pour l'image entière 3D. Finalement, afin de valider les résultats théoriques développés dans

les sections précédentes et de tester les performances de la méthode proposée en termes de temps de calcul et de qualité de reconstruction, plusieurs simulations ont été présentées dans la section suivante.

4. Résultats de Simulations et Discussions

Afin de valider les résultats théoriques développés dans les sections précédentes, nous présentons dans cette section les résultats des simulations en utilisant les deux approches proposées pour le calcul rapide des moments de Charlier 2D/3D et pour la reconstruction stable d'images 2D/3D à partir de ces moments. Nous comparerons également la capacité des moments de Charlier pour la reconstruction d'images 3D avec d'autres types des moments orthogonaux discrets tels les moments de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk et Meixner.

4.1. Temps de calcul des moments de Charlier 2D/3D

Généralement, les moments de Charlier peuvent être calculés globalement ou partiellement : globalement, en calculant les moments de Charlier à partir de l'image globale et partiellement en utilisant la représentation d'image par blocs dans le cas d'image 2D [Hmimid et al, 2015] ou par cuboïdes dans le cas d'images 3D [Karmouni et al, 2019b]. Dans ce cas, l'image est décomposée en plusieurs morceau (bloc 2D ou cuboïde 3D) de même taille (décomposition géométrique) et les moments de Charlier sont calculés à partir de la sortie des filtres numériques dans chaque morceau.

Par conséquent, nous ne pouvons pas comparer le temps de calcul des moments par les deux approches car les ordres des moments de Charlier par la méthode de Hmimid [Hmimid et al, 2015] et de Karmouni [Karmouni et al, 2019b], dépendent de la taille de chaque morceau de chaque niveau de gris, mais par ces approches, les ordres des moments de Charlier sont les mêmes pour tous les morceaux car ils ont les mêmes tailles.

4.1.1. Moments de Charlier 2D

Afin de tester le rendement de la première approche proposée en termes de temps de calcul des moments de Charlier 2D, on a utilisé deux ensembles d'images 2D de types différents :

- Un ensemble de trois images binaires de taille 256×256 extraits de la base de données d'images MPEG-7 CE-shape-1 Part B [MPEG-7, 2014] (Figure III.8).
- Un ensemble de trois images en niveaux de gris de taille 256×256 (Figure III.9).

Chacune des six images contient 4096 blocs de taille $[4 \times 4]$ et 1024 blocs de taille $[8 \times 8]$.

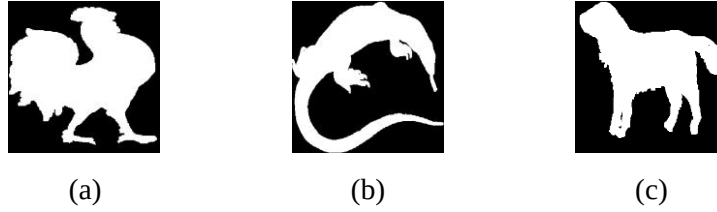


Figure III.8. Ensemble d'images binaires : (a) Chicken, (b) Lizzard et (c) Dog

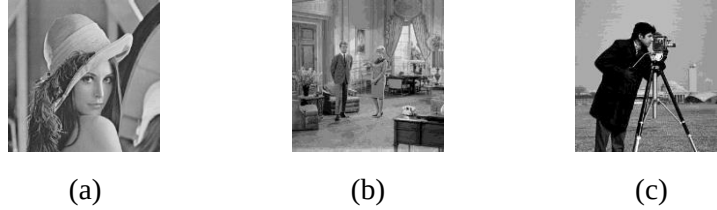
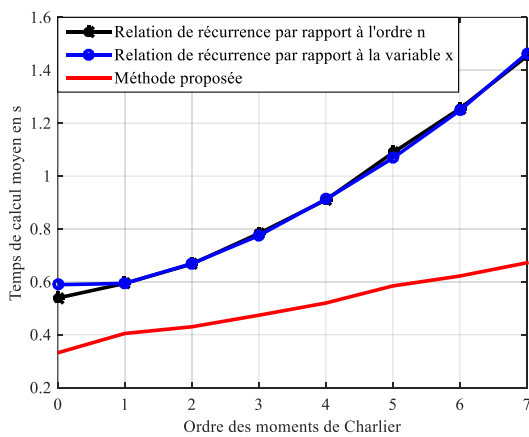


Figure III.9. Ensemble d'images en niveaux de gris : (a) Lena, (b) Livingroom et (c) Cameraman

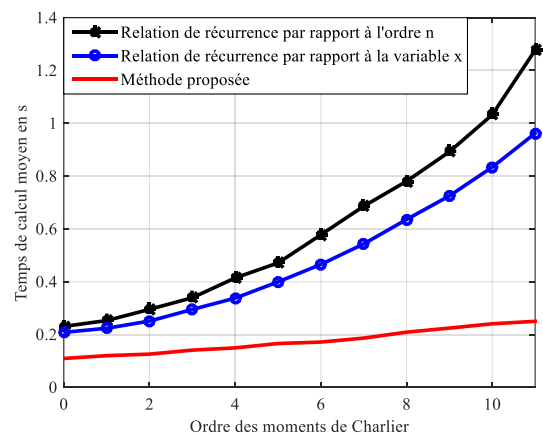
Les moments orthogonaux discrets de Charlier sont calculés pour des ordres allant de 0 à 7 pour les blocs de taille $[4 \times 4]$ et de 0 à 11 pour les blocs de taille $[8 \times 8]$. Les deux figures (III.10 et III.11) représentent le temps moyen de calcul des moments de Charlier pour les trois images binaires et les trois images en niveaux de gris, respectivement. Notez que, les expériences ont été mises en œuvre dans Matlab sur un PC Dual Core 2,10 GHz, 4 Go de RAM.

La durée moyenne du calcul des moments de Charlier par la méthode proposée 1 utilisée est comparée à celle des méthodes récursives :

- par rapport à l'ordre n [Karmouni et al, 2018].
- par rapport à la variable x [Karmouni et al, 2018].

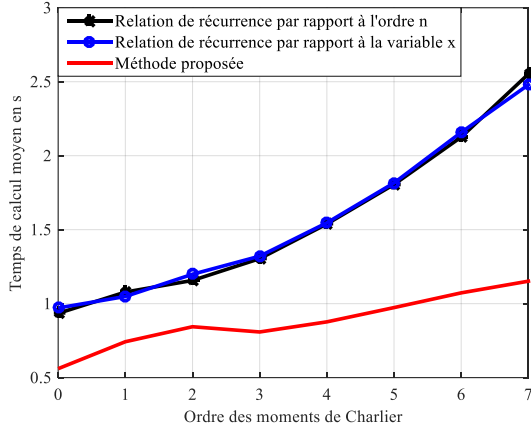


(a)

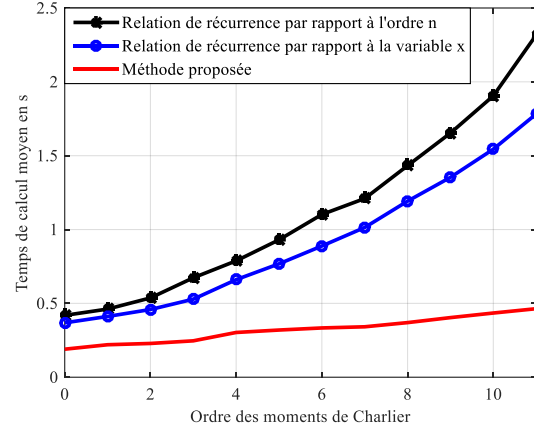


(b)

Figure III.10. Temps de calcul moyen des moments de Charlier pour trois images binaires en utilisant trois méthodes différentes (a) image sous forme de blocs de taille $[4 \times 4]$ (b) image sous forme de blocs de taille $[8 \times 8]$



(a)



(b)

Figure III.11. Temps de calcul moyen des moments de Charlier pour trois images en niveau de gris, en utilisant trois méthodes différentes (a) image sous forme de blocs de taille [4x4] (b) image sous forme de blocs de taille [8x8]

Les figures III.10 et III.11 montrent clairement que la méthode proposée est plus rapide aux deux autres méthodes récursives par rapport à l'ordre n et par rapport à la variable x .

4.1.2. Moments de Charlier 3D

Dans ce test, nous comparons le temps de calcul des moments de Charlier 3D et ses inverses par la méthode directe, la méthode de Hosny [Hosny et al, 2012] et la méthode proposée basée les filtres numériques 3D présenté dans la section 3.

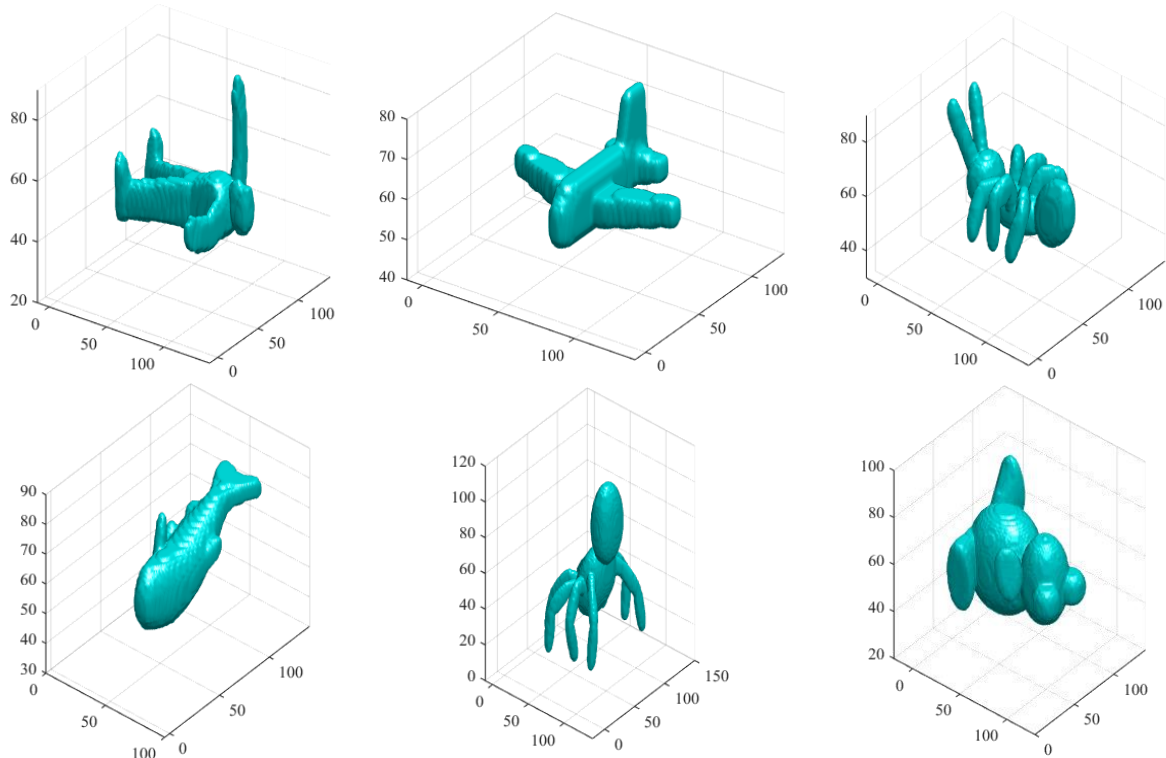


Figure III.12. Images 3D de taille 128×128×128 voxels utilisées dans l'évaluation du temps de calcul des moments de Charlier 3D

En effet, un ensemble de six images 3D de taille 128x128x128 voxels extraites de la base d'images [McGill, 2017] (Figure III.12) a été utilisée comme image de test. Le calcul des moments de Charlier 3D et le processus de reconstruction d'image sont effectués 10 fois pour des ordres allant de 0 à 120 pour chacune des six images.

La figure III.13 représente respectivement le temps de calcul des moments de Charlier et de reconstruction d'image par trois méthodes: la méthode directe, la méthode de Hosny [Hosny et al, 2012] et la méthode proposée. Cette figure montre que le temps moyen de calcul des moments de Charlier 3D et de reconstruction des images 3D de par la méthode proposée est plus petit que celui des méthodes directe et Hosny [Hosny et al, 2012] ce qui montre la rapidité de la méthode proposée par rapport aux autres méthodes en termes de temps de calcul des moments en termes de reconstruction des images 3D.

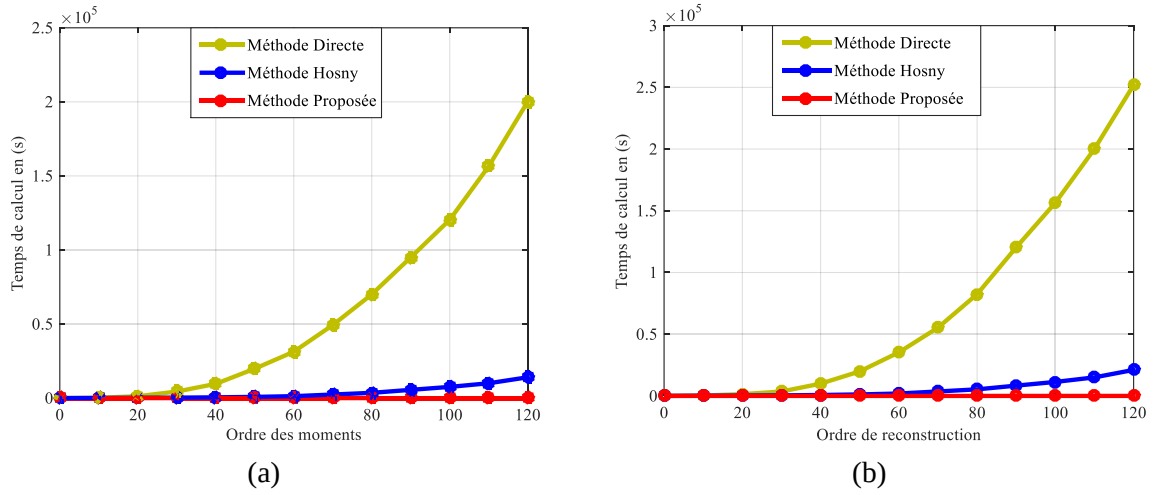


Figure III.13. Temps de calcul des moments de Charlier 3D pour six images 3D de taille 128x128x128 voxels en utilisant les trois méthodes

Dans un second test, nous comparons le temps de calcul des moments de Charlier 3D avec le celui des autres moments orthogonaux discrets 3D tels les moments de Hahn [Hmimid et al, 2015], de Tchebichef [Benouini et al, 2018], de Krawtchouk [Hmimid et al, 2015] et de Meixner [Jahid et al, 2017b]. En effet, on a utilisé pour ce teste une image 3D " Airplane " présentée dans la figure III.12.

Les processus de calcul et de reconstruction sont effectués 20 fois par les trois méthodes pour les différents types des moments pour des ordres allant de 0 à 120. Ainsi le taux d'amélioration du temps d'exécution ($ETIR$) est utilisé comme critère [Hosny et al, 2011a] pour comparer les différentes méthodes de calcul. Ce dernier est défini par la relation suivante :

$$ETIR = \left(1 - \frac{Time1}{Time2}\right) \times 100 \quad (III.45)$$

où $Time_1$ et $Time_2$ sont les temps d'exécution de la première et de la deuxième méthode sachant que si les deux temps d'exécution sont identiques on a $ETIR = 0$.

Les tableaux III.1 et III.2 présentent le temps de calcul moyen des moments 3D de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier pour des ordres allant de 0 à 120 de l'image 3D " Airplane " par les trois méthodes présentées précédemment.

Notons que $ETIR_1$ est calculé entre la méthode directe et la méthode proposée et $ETIR_2$ est calculée entre la méthode de Hosny [Hosny et al, 2012] et la méthode proposée.

Le temps moyen de calcul des moments par les trois méthodes					
Moments 3D	Hahn	Tchebichef	Krawtchouk	Meixner	Charlier
Méthode Directe	8.3673e+04	7.4417e+04	7.8781e+04	7.6927e+04	7.5813e+04
Méthode Hosny	6.436e+03	5.724e+03	6.060e+03	5.917e+03	5.831e+03
Méthode Proposée	0.4326	0.2888	0.3052	0.3279	0.2930
$ETIR_1$ %	99.9995	99.9996	99.9996	99.9996	99.9996
$ETIR_2$ %	99.9933	99.9949	99.9950	99.9945	99.9950

Tableau III.1. Temps moyen de calcul des moments 3D par les trois méthodes et le pourcentage de réduction de l'image 3D "Airplane"

Le temps moyen de reconstruction d'image 3D utilisant des moments 3D par les trois méthodes					
Moments 3D	Hahn	Tchebichef	Krawtchouk	Meixner	Charlier
Méthode Directe	9.8820e+04	9.6211e+04	9.8820e+04	9.5598e+04	9.3716e+04
Méthode Hosny	7.6108e+03	7.4008e+03	7.6015e+03	7.3537e+03	7.2089e+03
Méthode Proposée	0.5939	0.4350	0.4721	0.4714	0.4443
$ETIR_1$ %	99.9994	99.9995	99.9995	99.9995	99.9995
$ETIR_2$ %	99.9921	99.9941	99.9938	99.9936	99.9938

Tableau III.2. Temps moyen de reconstruction d'image 3D en utilisant les moments 3D par les trois méthodes et le pourcentage de réduction de l'image 3D "Airplane"

Les résultats de simulations (Tableaux III.1 et III.2) montrent que le temps de calcul des moments et de reconstruction d'images 3D par la méthode proposée [Hosny et al, 2017] est beaucoup plus court que celui des méthodes directes et de Hosny [Hosny et al, 2012] avec un taux d'amélioration de temps d'exécution qui atteint 99%. Ceci montre la rapidité et la robustesse de la méthode proposée pour le calcul des moments et pour la reconstruction d'images 3D par rapport à la méthode directe et à la méthode de Hosny [Hosny et al, 2012].

4.2. Reconstruction d'image 2D via les moments de Charlier calculés par l'approche 1

Pour illustrer les performances de l'approche proposée 1 en termes de qualité de reconstruction, on a utilisé deux tests sur deux types d'images (Figure III.8 et Figure III.9).

Le premier test de reconstruction d'image 2D est réalisée en utilisant la décomposition d'image par blocs de tailles $[4 \times 4]$ et $[8 \times 8]$ et les moments de Charlier calculés par trois méthodes :

- Filtres numériques basés sur la transformation en Z.
- Relation de récurrence par rapport à l'ordre n .
- Relation de récurrence par rapport à la variable x .

Les deux figures (Figure III.14 et Figure III.15) représentent les erreurs quadratiques moyennes MSE entre les images reconstruites et les images originales en fonction des ordres de reconstruction. L'ordre de reconstruction varie entre 0 et 8 pour les blocs de taille $[4 \times 4]$, et entre 0 et 12 pour les blocs $[8 \times 8]$.

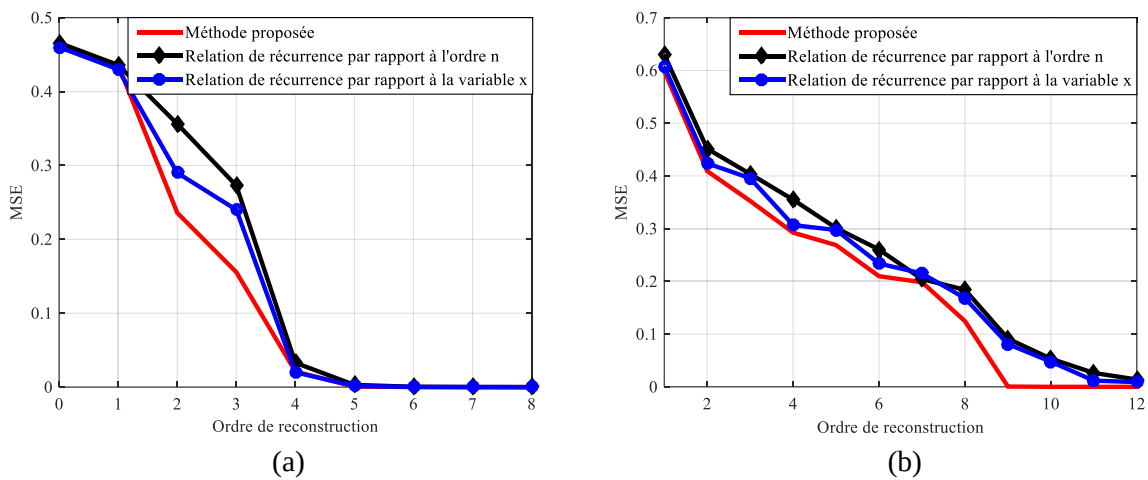


Figure III.14. Erreur de reconstruction d'images binaires en utilisant trois méthodes différentes de calcul des moments de Charlier à partir des blocs de tailles : (a) $[4 \times 4]$ et (b) $[8 \times 8]$

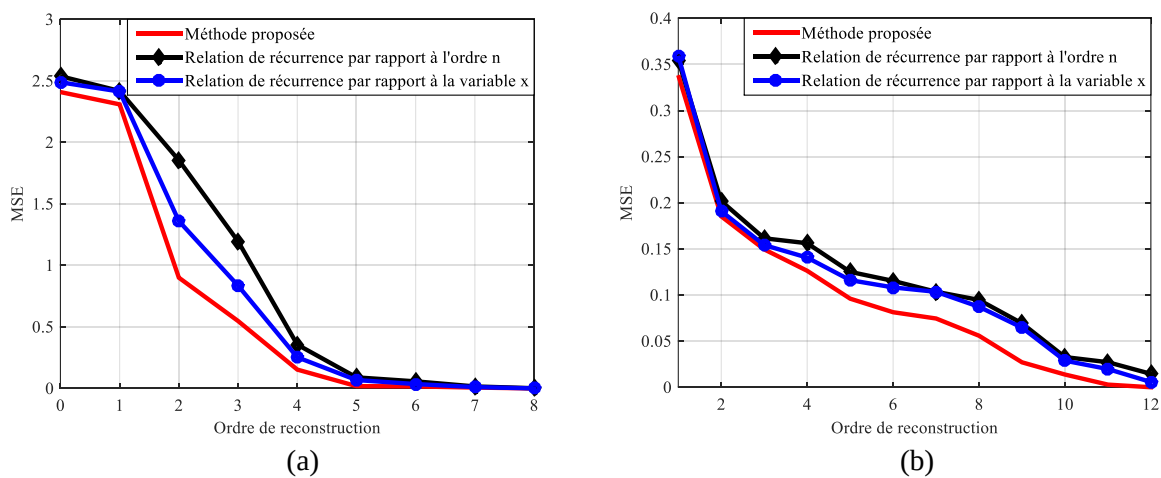


Figure III.15. Erreur de reconstruction d'images en niveaux de gris en utilisant trois méthodes différentes calcul des moments de Charlier à partir des blocs de tailles : (a) $[4 \times 4]$ et (b) $[8 \times 8]$

Les deux figures montrent que les erreurs de reconstruction des trois méthodes décroissent et tendent vers 0 avec la croissance des ordres des moments et que MSE de l'approche proposée est inférieure à celle des autres méthodes. Ceci montre que l'approche proposée est efficace en termes de qualité de reconstruction pour les images binaires et en niveaux de gris.

Un ensemble d'images reconstruites binaires et en niveaux de gris par l'approche proposée 1 en utilisant les moments de Charlier sont illustrés aux figures III.16 et III.17.

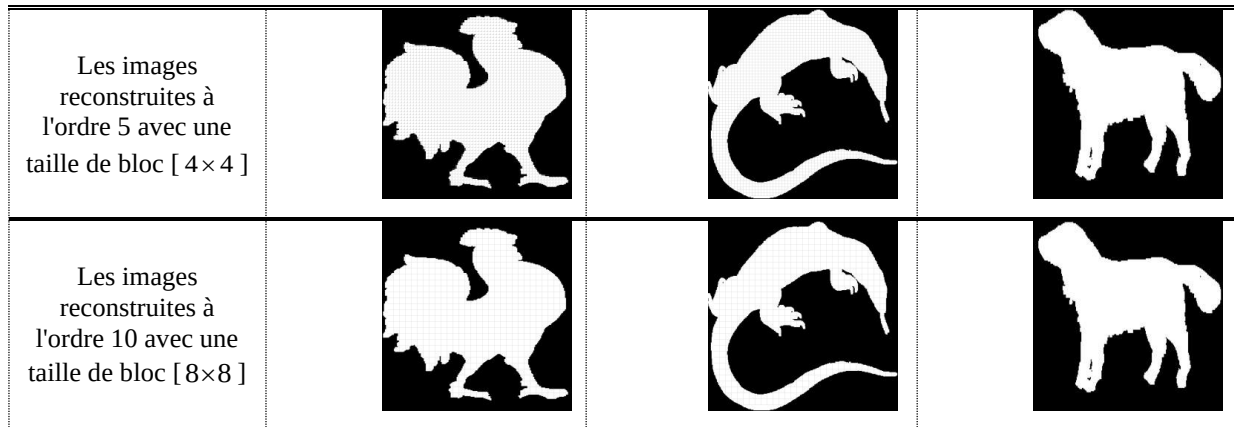


Figure III.16. Images binaires reconstruites selon l'approche proposée 1 en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille [4x4] et [8x8]



Figure III.17. Images en niveaux de gris reconstruites selon l'approche proposée en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille [4x4] et [8x8]

Dans un second test, nous allons tester la robustesse de cette approche vis-à-vis de différents types de bruit. En effet, deux expériences sont réalisées sur une image en niveaux de gris "Woman" de taille 256×256 pixels (Figure III.18(a)) en utilisant deux types de bruit : bruit "Sel & Poivre" de densité 0,03 et le bruit " Gaussien" avec une moyenne nulle et une variance égale à 0,01.

Les images contaminées par les deux types de bruit sont présentées aux figures (III.18(b) et III.18(c)) sont reconstruites en utilisant les moments de Charlier. Les figures III.19(a) et

III.19(b) montrent l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre les images reconstruites et les images originales.

On peut constater que les trois erreurs diminuent et prennent une valeur stable avec l'augmentation des moments de Charlier, ce qui prouve la robustesse de cette approche par rapport au bruit "Gaussien" et "Sel & Poivre". Notons que les mêmes résultats sont obtenus pour d'autres valeurs de densités de bruit.

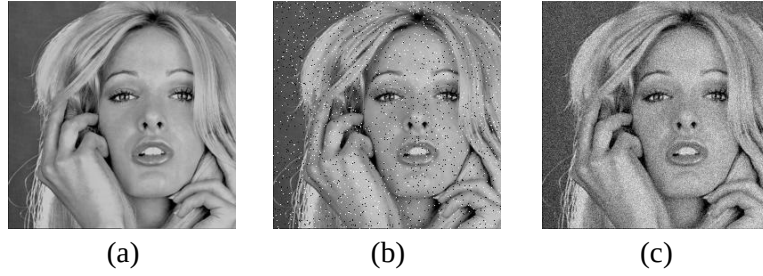


Figure III.18. (a) Image en niveaux de gris "Woman", (b) Image bruitée par "Sel & Poivre" et (c) Image bruitée par "Gaussien"

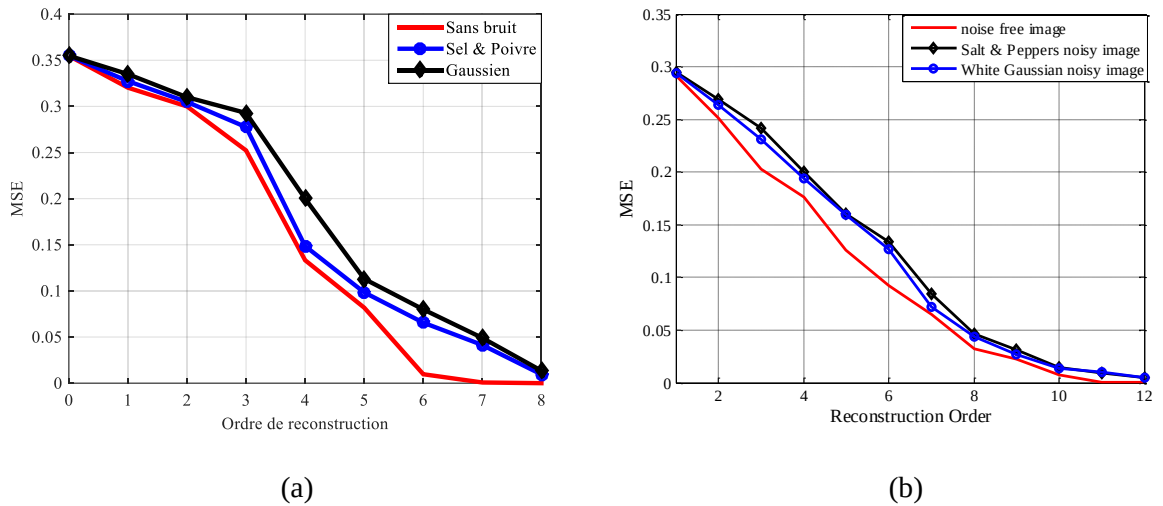


Figure III.19. Erreur de reconstruction de l'image bruitée " Women ", en utilisant les moments de Charlier calculés à partir des blocs de taille (a) $[4 \times 4]$ et (b) $[8 \times 8]$

4.3. Reconstruction d'image 3D via les moments de Charlier calculés par l'approche 2

Dans ce premier test, l'objectif est de déterminer la taille de cuboïde qui offre une meilleure qualité de représentation d'images 3D. Pour ceci, nous explorons les performances de l'approche proposée 2 pour des cuboïdes de tailles $[4 \times 4 \times 4]$, $[8 \times 8 \times 8]$ et $[16 \times 16 \times 16]$.

Nous avons utilisé comme image de test trois images 3D de taille $128 \times 128 \times 128$ voxels "Cup", "Dolphin" et "Bird" extraites de base d'image [McGill, 2017] sous forme des matrices tridimensionnelles, chaque image est décomposée en un ensemble de cuboïdes de taille fixe.

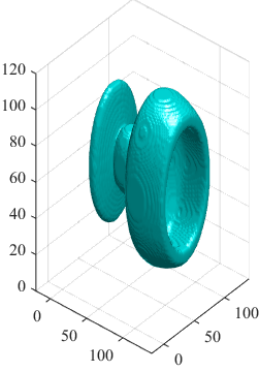
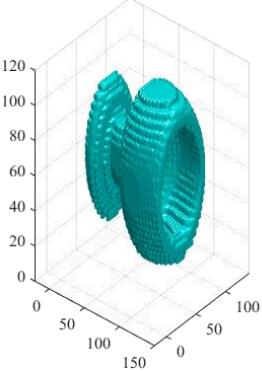
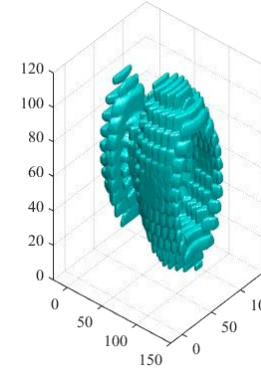
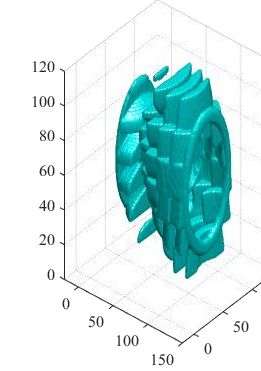
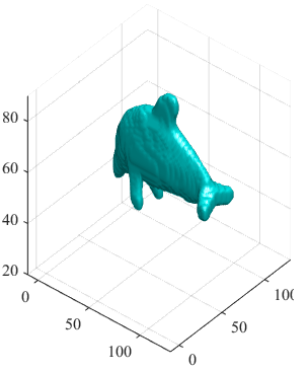
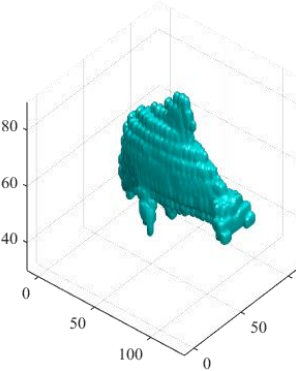
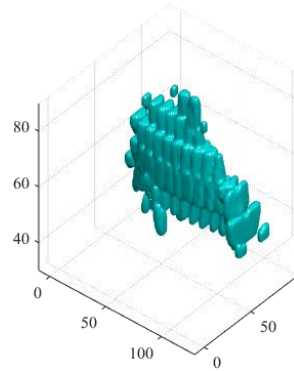
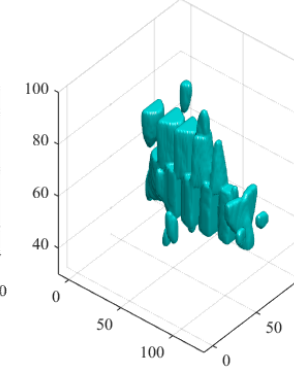
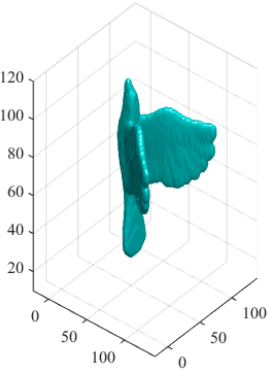
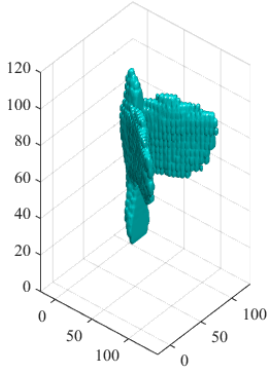
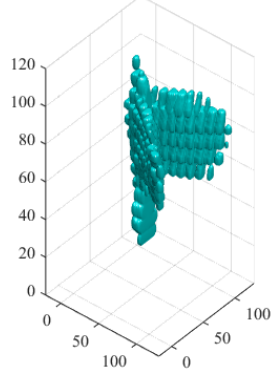
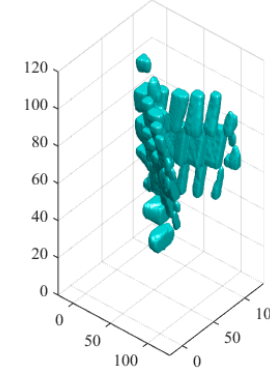
Méthode	Reconstruction par ICRF de taille $[4 \times 4 \times 4]$	Reconstruction par ICRF de taille $[8 \times 8 \times 8]$	Reconstruction par ICRF de taille $[16 \times 16 \times 16]$
 <p>Cup</p>	 <p>MSE=0.1794</p>	 <p>MSE=0.4007</p>	 <p>MSE=0.6192</p>
 <p>Dolphin</p>	 <p>MSE=0.1731</p>	 <p>MSE=0.4073</p>	 <p>MSE=0.6952</p>
 <p>Bird</p>	 <p>MSE=0.2439</p>	 <p>MSE=0.4949</p>	 <p>MSE=0.9931</p>

Figure III.20. Reconstruction d'images 3D par ICRF via les moments de Charlier 3D

Le test de reconstruction est effectué en utilisant les moments de Charlier calculés par l'approche proposée 2. L'erreur quadratique moyenne (*MSE*) [Karmouni et al, 2019a] entre l'image d'originale et l'image reconstruite est utilisée comme critère quantitatif de comparaison.

La figure III.20 montre une comparaison des MSE de la méthode proposée 2 basée sur l'algorithme ICRF pour des cuboïdes de différentes tailles.

L'ordre de reconstruction en fonction de la taille des cuboïdes est : 4 pour le cuboïde de taille $[4 \times 4 \times 4]$, 8 pour le cuboïde de taille $[8 \times 8 \times 8]$ et 16 pour le cuboïde de taille $[16 \times 16 \times 16]$.

La figure III.20 montre que les erreurs de reconstruction par la méthode proposée 2 pour les cuboïdes de taille $[4 \times 4 \times 4]$ sont plus petits par rapport à celles-ci des cuboïdes de taille $[8 \times 8 \times 8]$ et $[16 \times 16 \times 16]$. Ceci montre clairement que la méthode proposée 2 est efficace en termes de qualité de reconstruction pour les images 3D représentées par un cuboïde de taille $[4 \times 4 \times 4]$.

La figure III.21 présente la moyenne des erreurs quadratiques moyennes (MSE) de trois images 3D de la figure III.20, en utilisant les cuboïdes de taille $[4 \times 4 \times 4]$, $[8 \times 8 \times 8]$ et $[16 \times 16 \times 16]$.

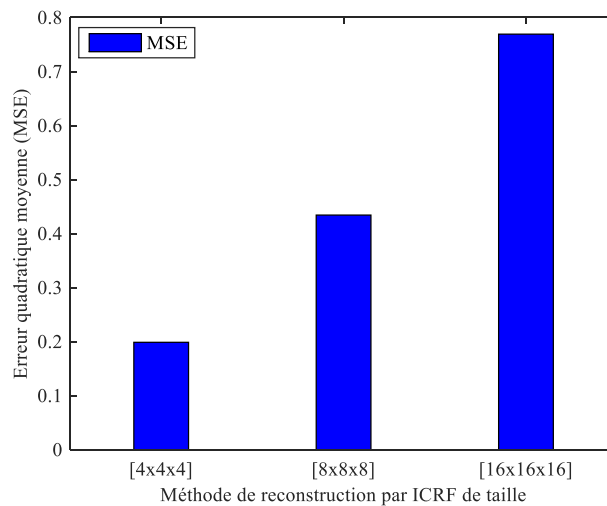


Figure III.21. La moyenne des erreurs quadratiques moyennes (MSE) des images reconstruites par des cuboïdes de différentes tailles

Dans le deuxième test, nous comparons la capacité de reconstruction d'image 3D de la méthode proposée 2 basée sur l'algorithme ICRF avec d'autres types de moments orthogonaux discrets 3D tels que les moments de Tchebichef [Benouini et al, 2018], Hahn [Hmimid et al, 2015], Meixner [Jahid et al, 2017b] et Krawtchouk [Hmimid et al, 2015]. Le test de reconstruction est effectué sur des trois images "Spectacle" et "Chair" de taille $128 \times 128 \times 128$ voxels, en utilisant les cinq moments calculés par la méthode proposée 2 en utilisant des cuboïdes de taille fixe $[4 \times 4 \times 4]$.

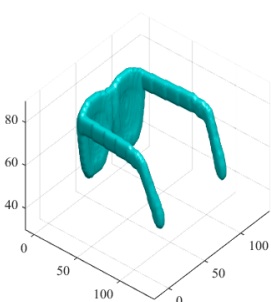
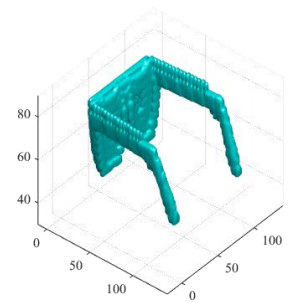
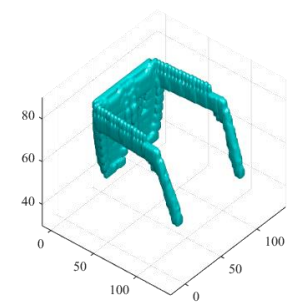
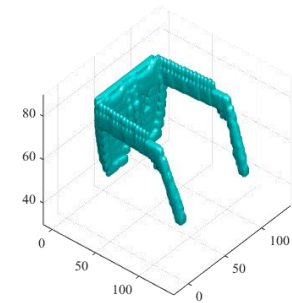
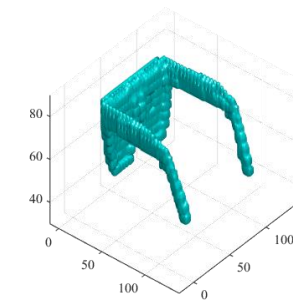
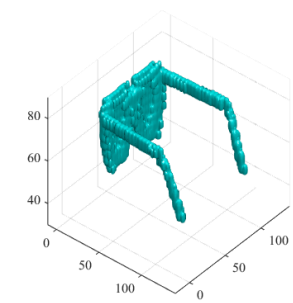
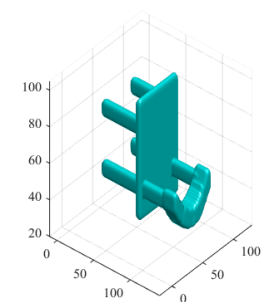
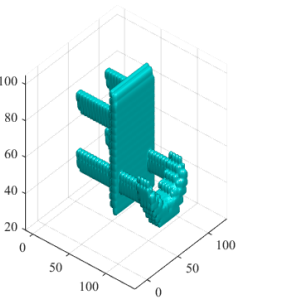
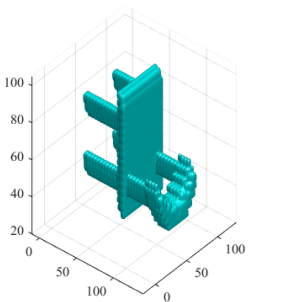
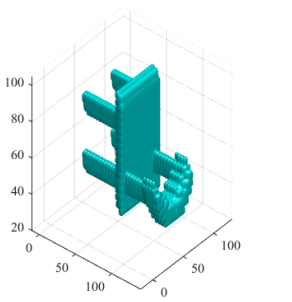
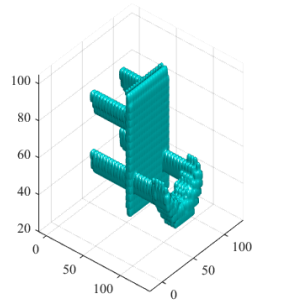
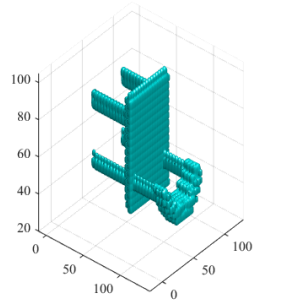
Images originales 3D de taille 128x128x128	Moments				
	Charlier	Tchebichef	Hahn	Meixner	Krawtchouk
					
	MSE=0.4482 & PSNR=3.4855	MSE=0.4986 & PSNR=3.0224	MSE=0.5476 & PSNR=2.6152	MSE=0.6701 & PSNR=1.7389	MSE=0.9864 & PSNR=0.0596
					
	MSE=0.4871 & PSNR=3.1241	MSE=0.4875 & PSNR=3.1206	MSE=0.5356 & PSNR=2.7119	MSE=0.5426 & PSNR=2.6554	MSE=0.9869 & PSNR=0.0573

Figure III.22. Reconstruction d'images par ICRF en utilisant des cuboïdes de taille fixe $[4 \times 4 \times 4]$ pour différents types des moments

Les résultats de la simulation (Figure III.22) montrent la capacité de différents types de moments pour la reconstruction des images 3D en utilisant l'approche proposée avec une légère efficacité pour les moments de Charlier et Tchebichef par rapport aux moments de Hahn, Meixner et Krawtchouk.

La figure III.23 montre la moyenne des erreurs de reconstruction de trois images 3D reconstruites par ICRF de taille $[4 \times 4 \times 4]$ présenté dans la figure III.22, en utilisant les moments de Charlier, Tchebichef, Hahn, Meixner et Krawtchouk.

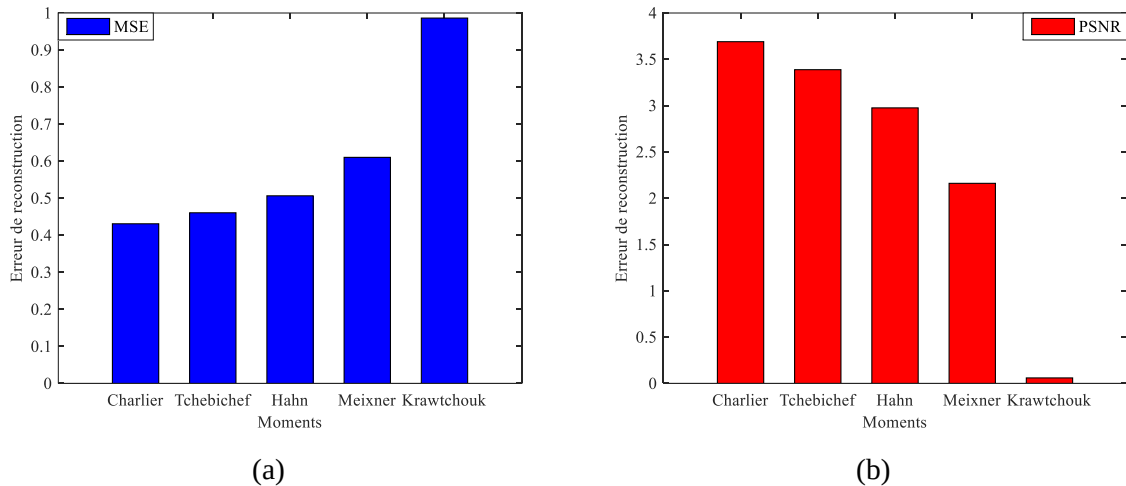


Figure III.23. Moyenne des erreurs de reconstruction d'image 3D pour les différents moments en utilisant l'approche proposée basée sur des cuboïdes de taille $[4 \times 4 \times 4]$, (a) MSE et (b) PSNR

5. Conclusion

Dans ce chapitre, deux approches ont été proposées pour calculer les moments de Charlier 2D/3D en se basant sur les filtres numériques 2D/3D et sur la représentation d'image 2D/3D par blocs/cuboïdes de taille fixe. Les résultats de simulations montrent l'efficacité des deux approches proposées en termes de temps de calcul des moments de Charlier 2D/3D et en termes de qualité de reconstruction des images 2D/3D. Ces résultats intéressants nous ont poussé à élaborer une nouvelle décomposition d'images 3D en se basant cette fois-ci sur les niveaux de gris au lieu de la taille. Cette nouvelle représentation fera l'objet du quatrième chapitre.

Chapitre IV

Reconstruction Rapide d'Images 3D via les Moments de Charlier 3D

1. Introduction

Le développement dynamique de la technologie d'imagerie 3D a incité les chercheurs à améliorer les méthodes d'analyse et de traitement des images 3D. Le problème majeur de l'utilisation des moments orthogonaux discrets 3D dans le cadre de l'analyse d'images 3D, surtout pour la reconstruction, toujours d'actualité à nos jours, consiste en un passage de l'espace des moments à l'espace image avec un maximum de fidélité à l'image originale avec une petite complexité du calcul des moments et le temps du calcul diminue avec la croissance des ordres des moments.

Pour résoudre ce problème, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche pour le calcul rapide des moments orthogonaux discrets de Charlier et ses inverses d'une image 3D. Cette approche est basée sur une nouvelle représentation d'images 3D appelée représentation d'image par cuboïdes (ICR). Par cette représentation, l'image 3D sera décomposée par un ensemble de cuboïdes de même niveau de gris au lieu des voxels, ce qui permet de réduire considérablement la quantité des éléments traités et par conséquent de réduire le temps du calcul des moments et le temps de reconstruction d'image 3D.

En plus, nous allons proposer trois méthodes de calcul des moments de Charlier pour l'image 3D : le calcul direct, le calcul récursif et le calcul matriciel afin de les comparer et de choisir la méthode la plus efficace pour la reconstruction d'images 3D.

Nous proposons également une nouvelle méthode pour la reconstruction d'images 3D en utilisant les moments de Charlier. En effet, cette méthode est basée sur la reconstruction partielle des images 3D à partir des cuboïdes au lieu de la reconstruction globale de l'image 3D. La méthode proposée présente deux avantages : l'accélération du temps et la qualité de la reconstruction.

Finalement, par des simulations, nous montrons les limites majeures de la méthode de reconstruction globale d'image 3D et les avantages de l'approche proposée en utilisant différents types des moments orthogonaux discrets.

2. Représentation d'image 3D par cuboïdes (ICR), [Karmouni et al, 2019b]

L'image 3D est une représentation tridimensionnelle d'un objet ou d'un ensemble d'objets dans le domaine réel ou numérique. Ainsi, dans le cas de la représentation discrète, l'image 3D est souvent projetée dans un espace tridimensionnel sur les trois axes x , y , et z . La notion de voxel dans les images 3D est l'équivalent du pixel dans les images 2D. Par conséquent, le voxel représente l'unité élémentaire d'un volume, qui est défini par sa position dans l'espace, ses dimensions et son intensité. De plus, les voxels sont souvent considérés comme des éléments ayant les mêmes dimensions, mais il peut arriver que les voxels de la même image aient des dimensions différentes, comme dans les images médicales IRM.

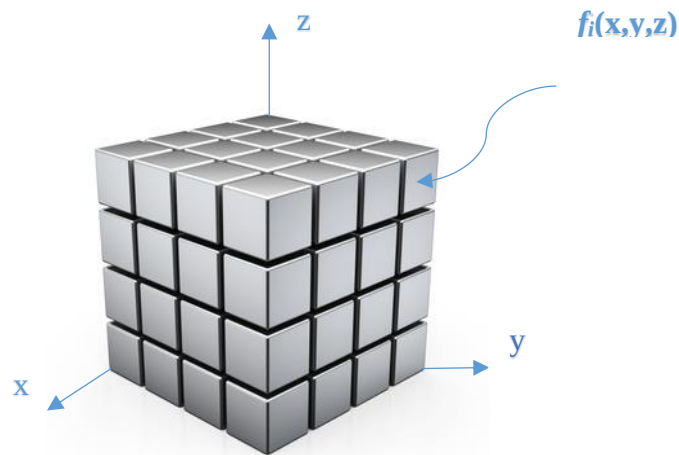


Figure IV.1. Représentation d'une image 3D

Ainsi, dans le cas de voxels de volume ayant les mêmes dimensions, on considère que le volume peut se représenter par une fonction discrète $f(x,y,z)$ où chaque voxel de coordonnées (x,y,z) est représenté par une intensité f_i , sinon on peut représenter cette fonction sous forme de matrice 3D (Figure IV.1).

En se basant sur les travaux de Spiliotis [Spiliotis & Mertzios, 1998] et Papakostas [Papakostas et al, 2009] sur la représentation des images 2D par un ensemble des slices et des blocs de pixels homogènes, nous proposons, dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour la représentation des images 3D par des cuboïdes contenant des voxels de même intensité (homogènes). Par cette représentation appelée représentation d'image par cuboïdes (Image Cuboid Representation ICR), l'image sera définie par un ensemble de cuboïdes où chaque cuboïde contient un seul niveau de gris. Ceci permet également de diviser l'image en éléments (cuboïdes) plus importants qu'un simple voxel et de réduire considérablement le nombre

d'éléments à traiter. Avec cette nouvelle représentation, on tient seulement les voxels de niveau 1 et on néglige les voxels de niveau 0 pour les images binaires 3D. Cependant, pour les images en niveaux de gris, l'intensité prend des valeurs comprises entre 0 et 255, cela signifie que nous aurons des cuboïdes représentés par des valeurs d'intensité n avec $(1 \leq n \leq 255)$; sachant que les cuboïdes d'intensité zéro seront négligés. Ainsi, pour représenter des images 3D de taille $N \times M \times K$ binaires ou en niveaux de gris, nous proposons l'algorithme IV.1 suivant appelé représentation d'image 3D par cuboïdes (ICR).

Algorithme IV.1. Représentation d'image par cuboïde ICR

Étape 1 : Diviser l'image 3D $f(x, y, z)$ avec $x \in [1, N]$, $y \in [1, M]$ et $z \in [1, K]$ en K matrice de taille $N \times M$.

Étape 2 : Considérez chaque ligne y de K_z avec $z = 0, \dots, K-1$ et rechercher les intervalles de niveau d'objet pour chaque valeur d'intensité existant dans la ligne y .

Étape 3 : Comparer les intervalles et les blocs qui ont la même ligne d'intensité $y-1$.

Étape 4 : Si un intervalle ne correspond à aucun bloc de même intensité, c'est le début d'un nouveau bloc. Si un bloc correspond à un intervalle de même intensité, la fin du bloc est dans la ligne y .

Étape 5 : Comparer les blocs ayant de même intensité dans la matrice K_{z-1} . Si un bloc ne correspond à aucun cuboïde de même intensité, c'est le début d'un nouveau cuboïde.

Étape 6 : En sortie, nous aurons L cuboïdes décrits par leurs intensités f_i et leurs positions $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$.

Afin expliquer d'avantage l'algorithme IV.1 proposé ICR, nous l'appliquons à une image 3D "Airplane" de taille $128 \times 128 \times 128$ (Figure IV.2) sélectionné de la base de données McGill [McGill, 2017]. Ainsi, nous obtenons les différents cuboïdes qui forment l'image, comme indiqué dans la (Figure IV.2).

Le nombre des cuboïdes dans cette image est 586 cuboïdes, nous allons traiter 586 éléments au lieu de $128 \times 128 \times 128 = 2\,097\,152$ pixels, ce qui montre l'importance de cette nouvelle représentation pour le traitement des images 3D. Par conséquent, nous proposons dans les sections suivantes une nouvelle méthode de calcul des moments orthogonaux discrets 3D de Charlier et de ses inverses basée sur la représentation d'image 3D par cuboïdes (ICR) pour réduire le temps de calcul et accélérer le processus d'analyse d'images 3D (reconstruction, reconnaissance de forme, classification, ...).

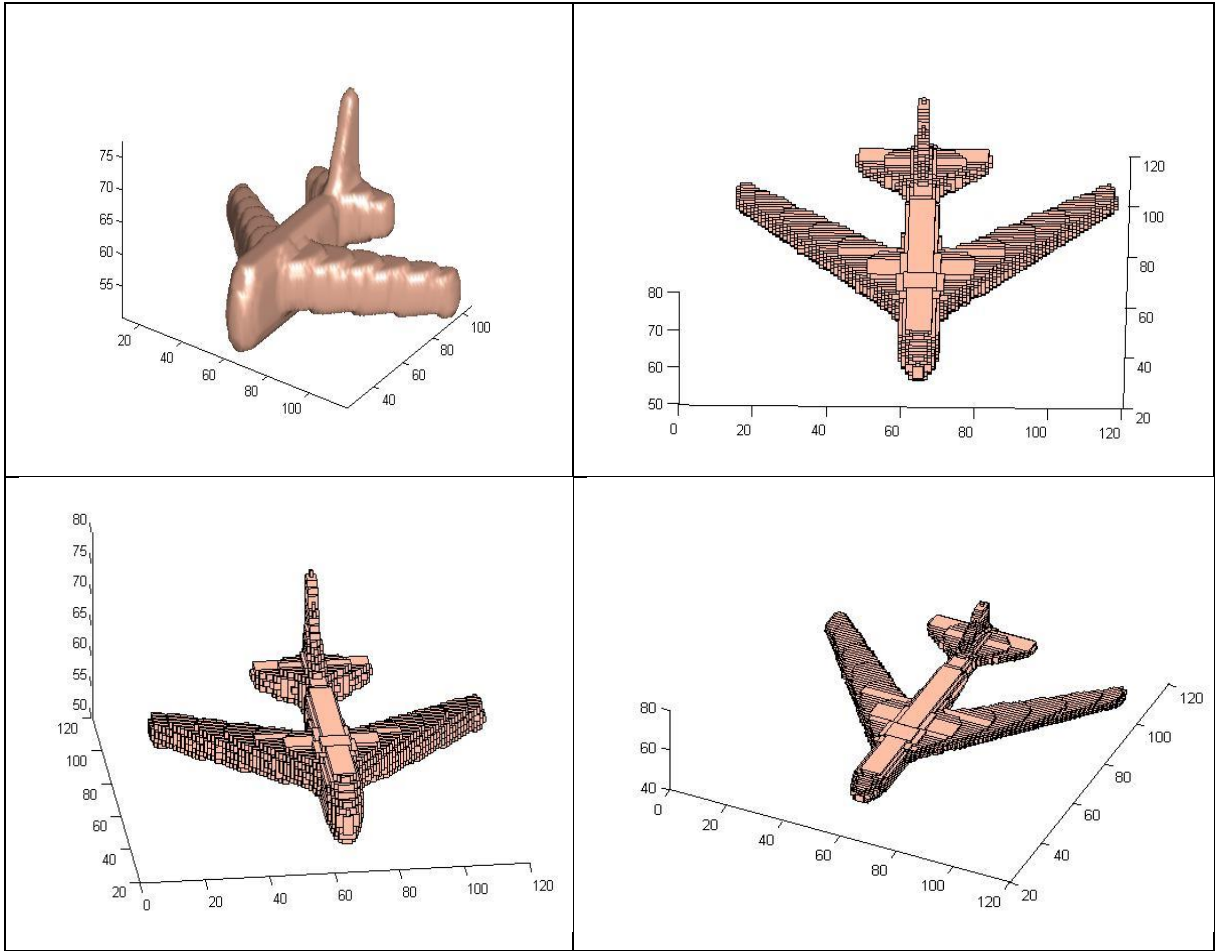


Figure IV.2. Plusieurs vues de la représentation d'image "Airplane" par cuboïdes

3. Calcul rapide des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D

Dans cette section, nous proposons une nouvelle méthode pour le calcul des moments de Charlier 3D basée sur la nouvelle représentation d'image 3D présentée dans la section précédente. Par conséquent, en appliquant l'algorithme de la représentation de l'image 3D par cuboïde, les moments de Charlier 3D sont calculés par deux méthodes :

- ✓ La première méthode consiste à calculer directement les moments de Charlier à partir des cuboïdes au lieu de les calculer à partir de l'image globale.
- ✓ Dans la deuxième méthode, les moments de Charlier sont calculés en tant que produit matriciel des matrices de chaque cuboïde.

3.1. Calcul direct des moments de Charlier 3D

Pour une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ contenant L cuboïdes extraits par l'algorithme ICR,

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{255} f_i(x, y, z) \quad (\text{IV.1})$$

avec $\{f_i, i=1, 2, \dots, 255\}$ est le i^{th} intensité i d'image 3D.

Chaque tranche (intensité) f_i est définie par un certain nombre de cuboïdes :

$$f_i(x, y, z) = \text{Cub}_j^{f_i} \quad (\text{IV.2})$$

où $\text{Cub}_j^{f_i}$ est le cuboïde j d'intensité f_i , $j = 1, \dots, L_i$ est le j^{th} cuboïde d'intensité f_i .

Le nombre total des cuboïdes $L = \sum_{i=1}^{255} L_i$, L_i le nombre des cuboïdes pour chaque intensité f_i .

En utilisant l'algorithme ICR, les moments de Charlier 3D d'ordre $(n+m+k)^{\text{th}}$ d'une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ dans l'équation Eq. (IV.1), se récrivent comme suit :

$$\begin{aligned} CM_{nmk} &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f(x, y, z) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \sum_{i=1}^{255} f_i(x, y, z) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f_1(x, y, z) + \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f_2(x, y, z) + \dots \\ &\quad + \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f_{255}(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Puisque les cuboïdes sont déterminés par leurs coordonnées $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$, la formule précédente dans Eq. (IV.3) est développée comme suit:

$$\begin{aligned} CM_{nmk} &= f_1 \sum_{x_1} \sum_{y_1} \sum_{z_1} \tilde{C}_n^{a_1}(x_1) \tilde{C}_m^{a_1}(y_1) \tilde{C}_k^{a_1}(z_1) + f_2 \sum_{x_2} \sum_{y_2} \sum_{z_2} \tilde{C}_n^{a_1}(x_2) \tilde{C}_m^{a_1}(y_2) \tilde{C}_k^{a_1}(z_2) \\ &\quad + \dots f_{255} \sum_{x_{255}} \sum_{y_{255}} \sum_{z_{255}} \tilde{C}_n^{a_1}(x_{255}) \tilde{C}_m^{a_1}(y_{255}) \tilde{C}_k^{a_1}(z_{255}) \\ &= f_1 CM_{nmk}^1 + f_2 CM_{nmk}^2 + \dots f_{255} CM_{nmk}^{255} \\ &= \sum_{i=1}^{255} f_i CM_{nmk}^i \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

avec CM_{nmk}^i est le les moments orthogonaux discrets de Charlier 3D d'ordre $(n+m+k)^{\text{th}}$ d'intensité f_i .

Les moments correspondant à une intensité f_i sont calculés à partir des cuboïdes de chaque intensité par la relation suivante :

$$CM_{nmk}^i = \sum_{j=1}^{L_i} f_i \sum_{x=x_{1,\text{Cub}_j^{f_i}}}^{x_{2,\text{Cub}_j^{f_i}}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \sum_{y=y_{1,\text{Cub}_j^{f_i}}}^{y_{2,\text{Cub}_j^{f_i}}} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \sum_{z=z_{1,\text{Cub}_j^{f_i}}}^{z_{2,\text{Cub}_j^{f_i}}} \tilde{C}_k^{a_1}(z) = \sum_{j=1}^{L_i} CM_{nmk}^{\text{Cub}_j^{f_i}} \quad (\text{IV.5})$$

où $CM_{nmk}^{\text{Cub}_j^{f_i}}$ sont les moments orthogonaux discrets de Charlier 3D à l'ordre $(n+m+k)^{\text{th}}$ de

l'intensité f_i pour chaque cuboïde.

Alors, les moments orthogonaux discrets de Charlier 3D sont déduits par la relation suivante :

$$CM_{nmk} = \sum_{i=1}^{255} \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f_i(x, y, z) = \sum_{i=1}^{255} \sum_{j=1}^{L_i} CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \quad (IV.6)$$

avec

$$CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} = \sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) f_i(x, y, z) \quad (IV.7)$$

3.2. Calcul matriciel des moments de Charlier 3D

Afin d'accélérer encore le calcul des moments de Charlier 3D, nous allons combiner l'algorithme ICR avec l'algorithme de multiplication matricielle des moments proposé par Wu [Wu et al, 2013].

En effet, après avoir extrait les cuboïdes d'une image 3D en utilisant l'algorithme ICR, nous allons appliquer l'algorithme de calcul matriciel des moments de Charlier comme suit : d'abord chaque cuboïde j est une matrice de taille $N_j \times M_j \times K_j$ avec $N_j = x_2 - x_1 + 1$, $M_j = y_2 - y_1 + 1$ et $K_j = z_2 - z_1 + 1$ et $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ sont les coordonnées qui décrit chaque cuboïde. Le cuboïde j dans la matrice K_j est représenté par des blocs b_{ij}^z avec $z_1 \leq z \leq z_2$ sachant que chaque bloc est déterminé par les coordonnées (x_1, x_2, y_1, y_2) .

L'expression des moments orthogonaux de Charlier 3D pour chaque cuboïde dans Eq. (IV.7) est reformulée comme suit :

$$CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} = \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_k^{a_1}(z) \left[\sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) f_i(x, y, z) \right] = \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_k^{a_1}(z) CM_{nm}^{b_{ij}^z} \quad (IV.8)$$

avec $CM_{nm}^{b_{ij}^z}$ sont les moments de Charlier dans chaque bloc du cuboïde j .

$$CM_{nm}^{b_{ij}^z} = \sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) f_i(x, y, z) \quad (IV.9)$$

Ces derniers sont exprimés en produit matriciel par la relation suivante :

$$CM_{nm}^{b_{ij}^z} = P_1 I P_2^T \quad (IV.10)$$

$$CM^{b_{ij}^z} = \left\{ CM_{nm}^{b_{ij}^z} \right\}_{n,m=0}^{n=M-1, m=N-1}, \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad 0 \leq m \leq N-1$$

$$P_1 = \left\{ \tilde{C}_n^{a_1}(x) \right\}_{n=0, x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{n=M-1, x=x_{2,Cub_j^{f_i}}}, \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}}$$

avec :

$$P_2 = \left\{ \tilde{C}_m^{a_1}(y) \right\}_{m=0, y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{m=N-1, y=y_{2,Cub_j^{f_i}}}, \quad 0 \leq m \leq N-1, \quad y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}}$$

$$I = \left\{ f_i(x, y, z) \right\}_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}, y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x=x_{2,Cub_j^{f_i}}, y=y_{2,Cub_j^{f_i}}}, \quad x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}}, \quad y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}}$$

Le calcul des moments de Charlier 3D pour chaque cuboïde passe par les deux étapes suivantes :

Étape 1. Calculons la matrice K_j le long de la direction z par l'Eq. (IV.10), on peut obtenir des matrices temporaires de moments de Charlier à chaque bloc de cuboïde j , où $CM_{nm}^{b_{ij}^z}$ désigne l'élément de n^{th} ligne et m^{th} colonne dans le plan k de la direction z .

$$CM_{nm}^{b_{ij}^z}(z), \quad z = z_{1,Cub_j^{f_i}}, z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1, \dots, z_{2,Cub_j^{f_i}} - 1, z_{2,Cub_j^{f_i}}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left[\begin{array}{cccc} CM_{00}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) \\ CM_{10}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{n0}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & CM_{n1}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{nm}^{b_{ij}^{z_2}}(z_{2,Cub_j^{f_i}}) \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{cccc} CM_{00}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) \\ CM_{10}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{n0}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & CM_{n1}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) & \cdots & CM_{nm}^{b_{ij}^{z_1+1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1) \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{cccc} CM_{00}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) \\ CM_{10}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{n0}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & CM_{n1}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) & \cdots & CM_{nm}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_j^{f_i}}) \end{array} \right] \end{array}$$

Étape 2. Dans la deuxième étape, nous réarrangeons les matrices obtenues dans la première "Étape" et les multiplions par les matrices polynomiales $P_3 = \left\{ \tilde{C}_k^{a_1}(z) \right\}_{k=0, z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{k=K-1, z=z_{2,Cub_j^{f_i}}}$, $0 \leq k \leq K-1$,

$z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}}$ nous aurons donc $(n+1)$ matrice de taille $(m+1) \times (k+1)$, qui nous permet d'obtenir les moments de Charlier 3D pour chaque cuboïde à l'ordre (n, m, k) .

- ✓ Pour l'ordre $n = 0$:

$$\begin{bmatrix} CM_{000}^{Cub_{f_i}} & CM_{001}^{Cub_{f_i}} & \cdots & CM_{00k}^{Cub_{f_i}} \\ CM_{010}^{Cub_{f_i}} & CM_{011}^{Cub_{f_i}} & \cdots & CM_{01k}^{Cub_{f_i}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{0m0}^{Cub_{f_i}} & CM_{0m1}^{Cub_{f_i}} & \cdots & CM_{0mk}^{Cub_{f_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) & \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) \\ \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) & \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) & \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CM_{00}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} \right) \\ CM_{00}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{1,Cub_{f_i}} + 1 \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{00}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) & CM_{01}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) & \cdots & CM_{0m}^{b_{ij}^{z_1}} \left(z_{2,Cub_{f_i}} \right) \end{bmatrix}$$

- ✓ Pour l'ordre $n=1$:

$$\begin{bmatrix} CM_{100}^{Cub_{j^{f_i}}} & CM_{101}^{Cub_{j^{f_i}}} & \cdots & CM_{10k}^{Cub_{j^{f_i}}} \\ CM_{110}^{Cub_{j^{f_i}}} & CM_{111}^{Cub_{j^{f_i}}} & \cdots & CM_{11k}^{Cub_{j^{f_i}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{1m0}^{Cub_{j^{f_i}}} & CM_{1m1}^{Cub_{j^{f_i}}} & \cdots & CM_{1mk}^{Cub_{j^{f_i}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_0^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) & \tilde{C}_0^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) & \cdots & \tilde{C}_0^{a_1}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) \\ \tilde{C}_1^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) & \tilde{C}_1^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) & \cdots & \tilde{C}_1^{a_1}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}_k^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) & \tilde{C}_k^{a_1}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) & \cdots & \tilde{C}_k^{a_1}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CM_{10}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}) \\ CM_{10}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{1,Cub_{j^{f_i}}}+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{10}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) & CM_{11}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) & \cdots & CM_{1m}^{b_{ij}^{z_1}}(z_{2,Cub_{j^{f_i}}}) \end{bmatrix}$$

- ✓ Pour l'ordre n :

$$\begin{bmatrix} CM_{n00}^{Cub_j^{f_i}} & CM_{n01}^{Cub_j^{f_i}} & \cdots & CM_{n0k}^{Cub_j^{f_i}} \\ CM_{n10}^{Cub_j^{f_i}} & CM_{n11}^{Cub_j^{f_i}} & \cdots & CM_{n1k}^{Cub_j^{f_i}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{nm0}^{Cub_j^{f_i}} & CM_{nm1}^{Cub_j^{f_i}} & \cdots & CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) & \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_0^{a_1} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) \\ \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) & \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_1^{a_1} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) & \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) & \cdots & \tilde{C}_k^{a_1} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CM_{n0}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) & CM_{n1}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) & \cdots & CM_{nm}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} \right) \\ CM_{n0}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) & CM_{n1}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) & \cdots & CM_{nm}^{b_j^{a_1}} \left(z_{1,Cub_j^{f_i}} + 1 \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CM_{n0}^{b_j^{a_1}} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) & CM_{n1}^{b_j^{a_1}} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) & \cdots & CM_{nm}^{b_j^{a_1}} \left(z_{2,Cub_j^{f_i}} \right) \end{bmatrix}$$

Ensuite, après avoir calculé les moments de Charlier 3D à partir des blocs de chaque cuboïde, nous allons sommer l'ensemble des matrices de moments de Charlier 3D de chaque cuboïde afin d'avoir le calcul final des moments de Charlier 3D via de Eq. (IV.6).

Par conséquent, le temps de calcul des moments de Charlier 3D est largement réduit par les deux méthodes basées sur la représentation d'image 3D par cuboïdes de et surtout par la deuxième méthode qui se base sur le calcul matriciel. Ainsi, la réduction significative du temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D nous incite à appliquer ces méthodes de calcul dans plusieurs domaines de traitement d'images, tels que la reconstruction et la classification d'images.

4. Reconstruction rapide d'images 3D par les moments de Charlier 3D

Dans cette section, nous présentons une approche rapide et précise pour la reconstruction d'images 3D par les moments orthogonaux discrets de Charlier. Cette approche est basée sur la nouvelle représentation d'image 3D par cuboïdes. Ainsi, l'accélération du processus de reconstruction de l'image 3D est due à deux facteurs :

- ✓ Le premier est le calcul rapide des moments de Charlier à partir des cuboïdes extraits de chaque image 3D.
- ✓ Le second est la reconstruction partielle de l'image à partir des cuboïdes au lieu de la reconstruction globale de l'image.

La méthode de reconstruction proposée sera présentée selon deux méthodes : La première est la reconstruction locale de l'image 3D en utilisant le calcul direct des moments de Charlier de chaque cuboïde. La seconde est basée sur le calcul matriciel des moments 3D de Charlier à partir des blocs de chaque cuboïde.

4.1. Reconstruction locale d'images 3D par le calcul direct des moments de Charlier 3D

La reconstruction d'une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ est obtenue à partir de la propriété d'orthogonalité des polynômes orthogonaux de Charlier en l'exprimant en termes des moments de Charlier 3D:

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} CM_{nmk} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad , \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq N-1 \\ 0 \leq y \leq M-1 \\ 0 \leq z \leq K-1 \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

La reconstruction locale d'une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ par le calcul direct s'obtient à partir de la représentation d'image par cuboïde 3D (ICR), en utilisant la définition

du moment de Charlier 3D dans Eq. (IV.7):

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{255} \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad , \quad \begin{cases} x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}} \\ y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}} \\ z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}} \end{cases} \quad (IV.12)$$

$$= \sum_{i=1}^{255} \sum_{j=1}^{L_i} f^{Cub_j^{f_i}}(x, y, z)$$

La reconstruction partielle de chaque cuboïde $f^{Cub_j^{f_i}}(x, y, z)$ est donnée par la formule suivante :

$$f^{Cub_j^{f_i}}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_m^{a_1}(y) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad , \quad \begin{cases} x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}} \\ y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}} \\ z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}} \end{cases} \quad (IV.13)$$

4.2. Reconstruction locale d'images 3D par le calcul matriciel des moments de Charlier 3D

Dans cette sous-section, nous présentons une nouvelle méthode pour la reconstruction d'image 3D. Cette méthode de reconstruction est purement locale, elle nous permet de reconstruire l'image 3D à partir des cuboïdes qui les forment en utilisant le calcul matriciel des moments de Charlier de chaque cuboïde. La reconstruction locale de chaque cuboïde à partir des moments 3D de Charlier est donnée par la formule suivante :

$$f^{Cub_j^{f_i}}(x, y, z) = \sum_{m=0}^{Max} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \times \left[\sum_{n=0}^{Max} \sum_{k=0}^{Max} CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \right] \quad , \quad \begin{cases} x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}} \\ y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}} \\ z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}} \end{cases} \quad (IV.14)$$

$$= \sum_{m=0}^{Max} \tilde{C}_m^{a_1}(y) \times F^{b_{ij}^z}(x, z)$$

avec $F^{b_{ij}^z}$ est la reconstruction partielle des bloc du cuboïde j par les moments de Charlier 2D, définie par la relation suivante :

$$F^{b_{ij}^z}(x, z) = \sum_{n=0}^{Max} \sum_{k=0}^{Max} CM_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \tilde{C}_n^{a_1}(x) \tilde{C}_k^{a_1}(z) \quad (IV.15)$$

En utilisant la forme matricielle, la fonction $F^{b_{ij}^z}$ est reformulée comme suit :

$$F^{b_{ij}^z} = Q_1^T CM^{b_{ij}^z} Q_2 \quad (IV.16)$$

avec $F^{b_{ij}^z}$, $CM^{b_{ij}^z}$, Q_1^T et Q_2 sont des matrices définies par les relation suivantes:

$$\begin{aligned}
 F^{b_{ij}^z} &= \left\{ F_{xz}^{b_{ij}^z} \right\}_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}, z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x=x_{2,Cub_j^{f_i}}, z=z_{2,Cub_j^{f_i}}}, & \begin{cases} x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}} \\ z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}} \end{cases} \\
 CM^{b_{ij}^z} &= \left\{ CM_{nk}^{b_{ij}^z} \right\}_{n,k=0}^{n,k=Max}, & 0 \leq n, k \leq Max, \quad \text{pour } 0 \leq m \leq Max \\
 Q_1 &= \left\{ \tilde{C}_n^{a_1}(x) \right\}_{n=0, x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{n=Max, x=x_{2,Cub_j^{f_i}}}, & \begin{cases} x_{1,Cub_j^{f_i}} \leq x \leq x_{2,Cub_j^{f_i}} \\ 0 \leq n \leq Max \end{cases} \\
 Q_2 &= \left\{ \tilde{C}_k^{a_1}(z) \right\}_{k=0, z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{k=Max, z=z_{2,Cub_j^{f_i}}}, & \begin{cases} z_{1,Cub_j^{f_i}} \leq z \leq z_{2,Cub_j^{f_i}} \\ 0 \leq k \leq Max \end{cases}
 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

La reconstruction locale d'une image 3D à partir d'un cuboïde en utilisant le calcul matriciel de moments 3D de Charlier passe par les trois étapes de l'algorithme IV.2 suivant :

Algorithme IV.2. Reconstruction locale d'image 3D par les moments de Charlier

Étape 1 : Calcul de la matrice K_j le long de la direction m par l'Eq. (IV.6), pour obtenir des matrices temporaires de la reconstruction partielle des moments de Charlier 2D dans chaque bloc du cuboïde j , où $F_{xz}^{b_{ij}^z}$ désigne l'élément de la ligne x^{th} et la colonne z^{th} dans le plan y^{th} de la direction m , $F_{xz}^{b_{ij}^z}(m)$, $m = 0, 1, \dots, Max$

Étape 2 : Dans la deuxième étape, nous réorganisons les matrices obtenues à l'étape 1 et les multiplions par les matrices des polynômes $Q_3 = \left\{ \tilde{C}_m^{a_1}(y) \right\}_{m=0, y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{m=Max, y=y_{2,Cub_j^{f_i}}}$, $y_{1,Cub_j^{f_i}} \leq y \leq y_{2,Cub_j^{f_i}}$, $0 \leq m \leq Max$ et nous obtenons N_j matrice de taille $M_j \times K_j$, pour avoir la reconstruction locale des moments de Charlier 3D pour chaque cuboïde $f^{Cub_j^{f_i}}$ de taille (N_j, M_j, K_j) .

Étape 3 : Nous fusionnons la reconstruction partielle des moments de Charlier 3D de chaque cuboïde pour trouver l'image reconstruite 3D avec la même taille que l'image originale 3D.

La figure IV.3 montre l'organigramme permettant de calculer les moments de Charlier 3D par la méthode matricielle via l'algorithme ICR. Nous commençons donc par la décomposition de l'image 3D pour extraire les cuboïdes en utilisant l'algorithme ICR¹. Après, nous allons utiliser les cuboïdes extraits pour calculer les moments de Charlier 3D en utilisant le calcul matriciel des moments de Charlier en sein de chaque cuboïde². Ensuite, nous reconstruisons chaque cuboïde en utilisant le calcul des moments de Charlier 3D de chaque cuboïde³. Enfin, nous fusionnons les matrices des cuboïdes reconstruits afin de trouver la reconstruction d'image 3D⁴.

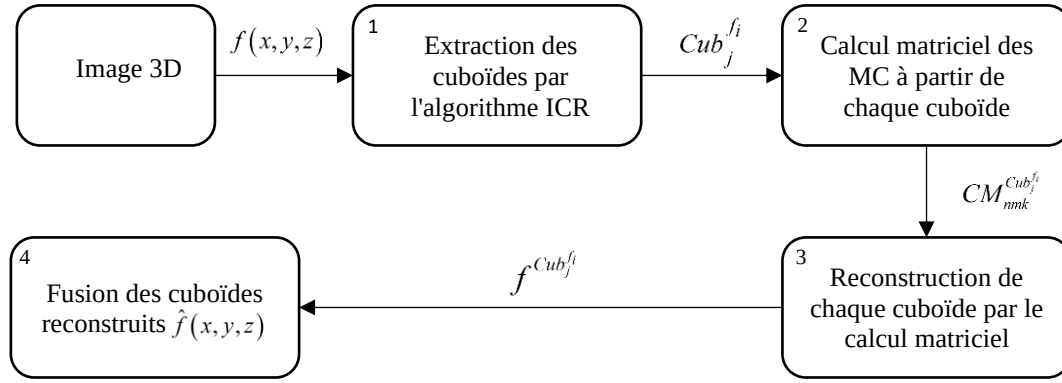


Figure IV.3. Organigramme de reconstruction d'image 3D

5. Résultats de simulations et discussion

Afin de valider les résultats théoriques développés dans les sections précédentes et de tester les performances de la méthode proposée en termes de temps de calcul et de qualité de reconstruction, plusieurs simulations ont été effectuées. Cette section est divisée en deux sous-sections : dans le premier test, nous comparerons le temps de calcul des moments de Charlier 3D par la méthode de récurrence par rapport à la variable x et la méthode proposée en deux versions : le calcul direct et le calcul matriciel. Dans le deuxième test, nous examinons la capacité des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D à reconstruire des images 3D par la méthode globale et la méthode locale proposée. Nous allons également tester notre méthode proposée par d'autres types des moments orthogonaux discrets tels les moments de Tchebichef, Krawtchouk et Hahn, et nous comparerons les quatre types de moments en termes de temps de calcul et termes de qualité de reconstruction des images 3D.

5.1. Temps de calcul des moments de Charlier 3D

Dans cette sous-section, nous comparons le temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier par la méthode récursive et la méthode proposée en deux versions. En particulier, la méthode proposée est basée sur la représentation d'image 3D par cuboïdes selon l'algorithme (ICR) présenté dans la section 3.

Dans le premier test, nous présentons les résultats de la simulation obtenus en termes de nombre de cuboïdes extraits de chaque image 3D.

Nous utilisons quatre images 3D choisies de la base de données des images "McGill" [McGill, 2017] de taille $128 \times 128 \times 128$ voxels (Figure IV.4), et trois images médicales IRM (Figure IV.5), en tant que matrice tridimensionnelle, chaque image est composée d'un nombre des cuboïdes.

Chapitre IV

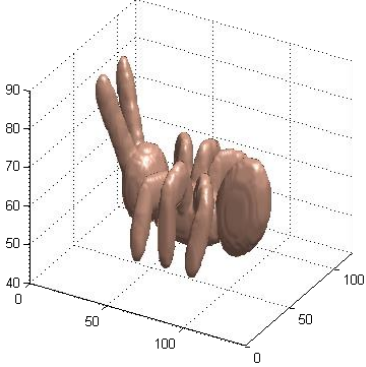
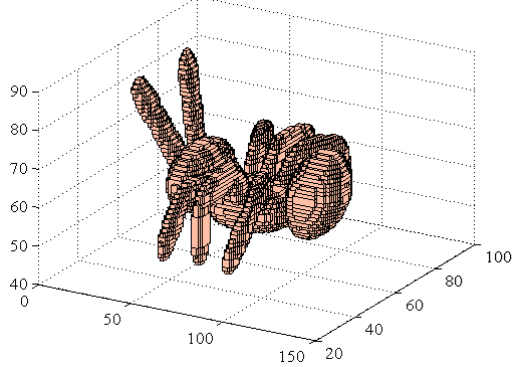
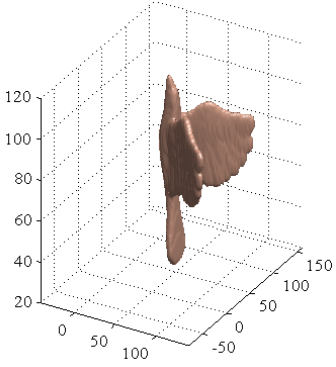
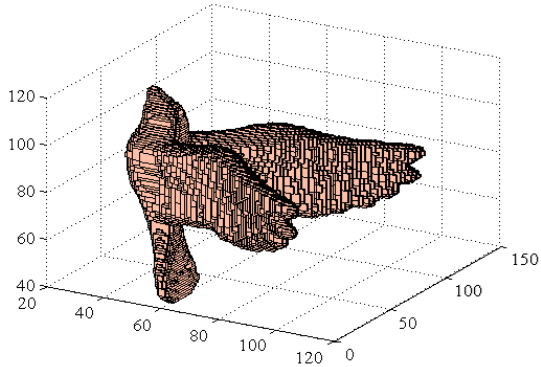
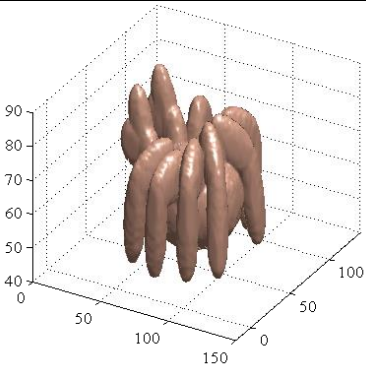
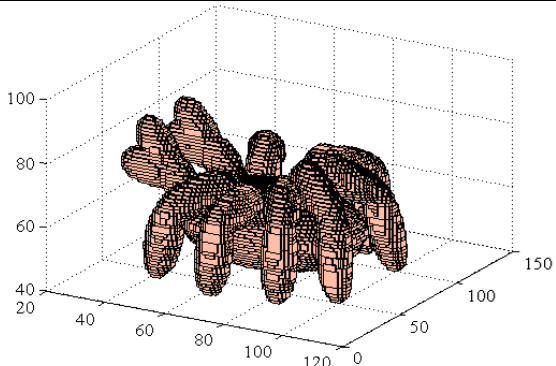
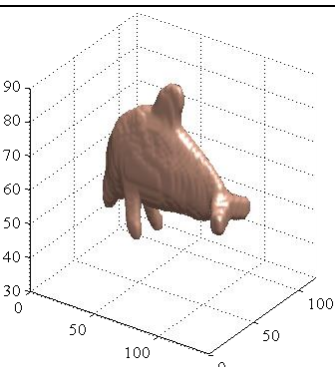
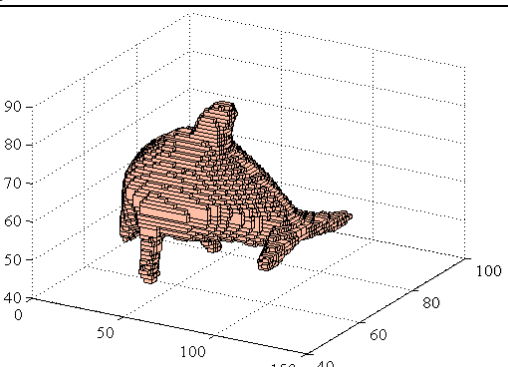
Images originales 3D de taille 128x128x128	Représentation d'image par cuboïde (ICR)	Nombre de cuboïdes
Ant		1436
		
Bird		1616
		
Crab		3133
		
Dolphin		616
		

Figure IV.4. Ensemble des images 3D et ses représentations par cuboïdes en utilisant l'algorithme (ICR)

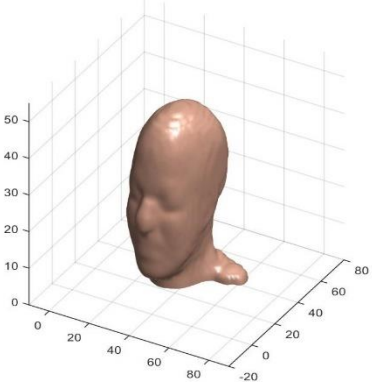
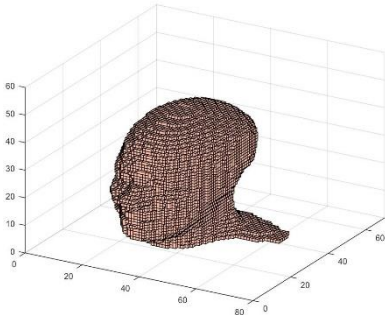
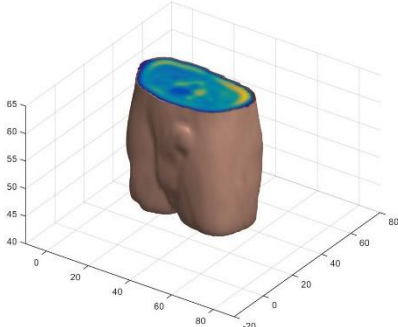
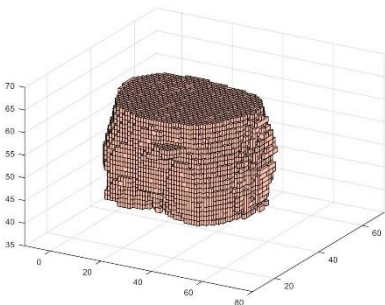
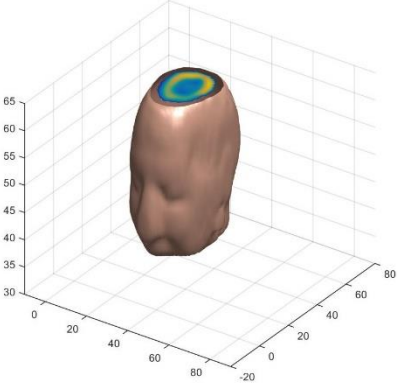
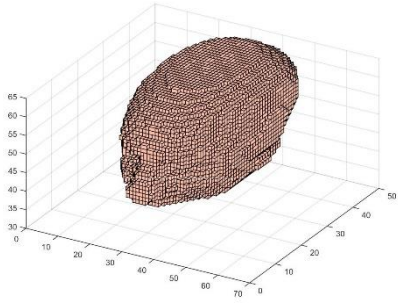
Images originales 3D de taille 128x128x128	Représentation d'image par cuboïde (ICR)	Nombre de cuboïdes
Image 1		37802
		
Image 2		24307
		
Image 3		26878
		

Figure IV.5. Ensemble des images 3D et ses représentations par cuboïdes en utilisant l'algorithme (ICR)

Après avoir extrait les cuboïdes de chaque image 3D en appliquant l'algorithme ICR, la représentation d'image 3D par cuboïdes et le nombre de cuboïdes de chaque image 3D sont donnés dans les figures (Figure IV.4 et Figure IV.5), cette nouvelle représentation de l'image 3D réduit efficacement et considérablement le nombre des éléments à traiter sachant que le nombre des cuboïdes dans une image 3D, est beaucoup plus petit que le nombre de voxels.

Dans le deuxième test, nous comparons le temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D à la fois par la méthode récursive et par la méthode proposée basée sur la représentation de l'image 3D par cuboïdes (ICR). Dans la méthode proposée, les moments de Charlier 3D (MC) sont calculés selon deux méthodes : le calcul direct et le calcul matriciel. Le

processus de calcul des moments de Charlier 3D est effectué pour des ordres allant de 0 à 90 pour les deux images 3D "Ant" et "Bird" de taille $128 \times 128 \times 128$ (Figure IV.6). La figure IV.6 représente respectivement le temps de calcul des moments de Charlier en utilisant les trois méthodes : la méthode récursive, la méthode directe et la méthode matricielle. On constate clairement que les deux méthodes proposées sont plus rapides que la méthode récursive, tandis que la méthode matricielle est plus rapide que la méthode directe. Ceci montre l'importance de la méthode proposée en termes de temps de calcul des moments de Charlier 3D par rapport à la méthode récursive. Notons que le temps d'extraction des cuboïdes pour chaque image 3D est d'environ 0,1 ms, ce temps est beaucoup plus petit que le temps de calcul requis pour calculer les moments 3D de Charlier par la méthode récursive.

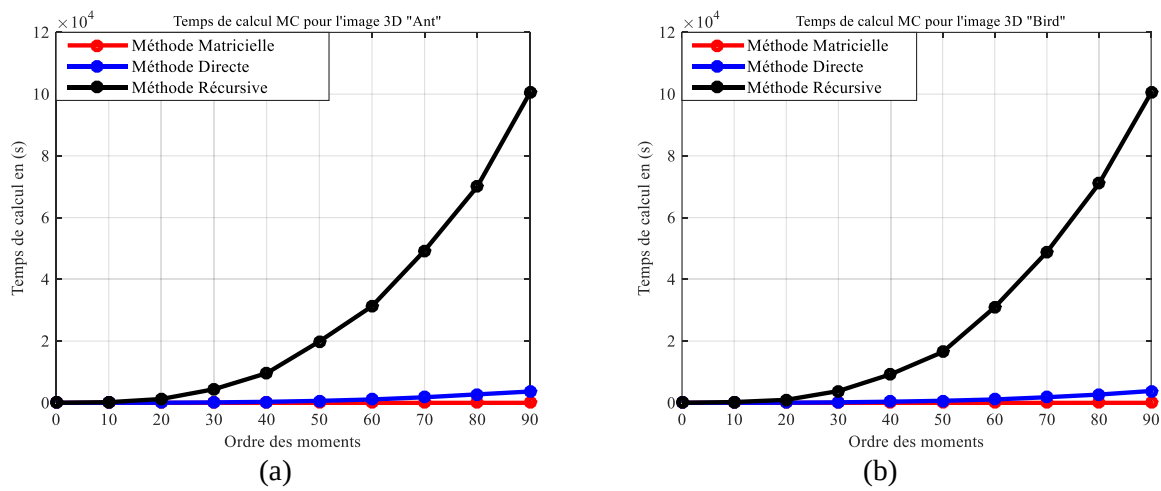
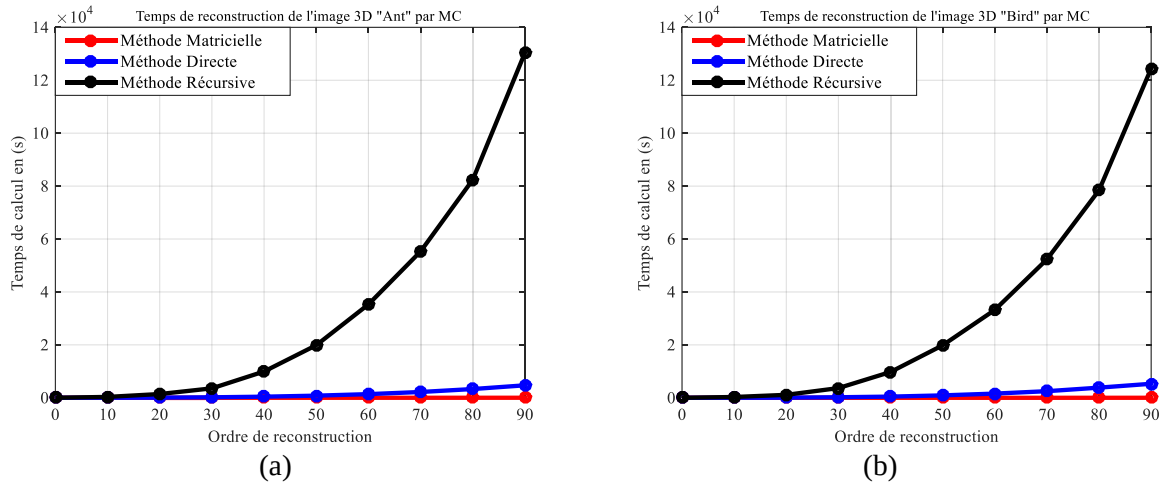


Figure IV.6. Temps de calcul des moments de Charlier 3D pour les images 3D "Ant" (a) et "Bird" (b) en utilisant la méthode récursive et les méthodes proposées : directe et matricielle

Dans le troisième test, nous allons comparer le temps de reconstruction d'image 3D en utilisant les moments de Charlier 3D calculés à l'aide des trois méthodes présentées précédemment. Le processus de reconstruction est effectué par les moments 3D Charlier pour des ordres allant de 0 à 90 pour les deux images 3D précédentes : "Ant" et "Bird" de taille $128 \times 128 \times 128$ (Figure IV.4). La figure IV.7 montre le temps de reconstruction des deux images en utilisant les moments de Charlier 3D calculés par les trois méthodes : la méthode récursive, directe et matricielle. On constate que le temps de reconstruction par les deux méthodes proposées est plus rapide que la méthode récursive et que la méthode matricielle proposée est plus rapide que la méthode directe proposée. Ceci montre l'importance des deux méthodes proposées pour la reconstruction des images 3D.



Dans le quatrième test, nous appliquons la méthode proposée pour d'autres types de moments orthogonaux discrets 3D tels les moments de Tchebichef (MT) [Wu et al, 2013], Krawtchouk (MK) [Honarvar et al, 2014a] et Hahn (MH) [Flusser et al, 2016]. Dans ce contexte, nous comparons le temps de calcul des moments de Tchebichef, Krawtchouk et Hahn pour l'image 3D "Bird" et le temps de reconstruction de cette image par les trois méthodes. Les processus de calcul et de reconstruction sont effectués par ces moments pour des ordres allant de 0 à 90. Comme critère de comparaison, nous utilisons cette fois ci le rapport d'amélioration du temps d'exécution (ETIR) [Honarvar et al, 2013], ce dernier est défini comme suit: $ETIR = (1 - Time1/Time2) \times 100$, où Time1 et Time2 sont les temps d'exécution des méthodes récursive et proposée. $ETIR = 0$ si les deux temps d'exécution sont identiques.

Les tableaux IV.1 et IV.2 présentent le temps de calcul moyen des moments 3D de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn et Charlier pour des ordres allant de 0 à 90 de l'image 3D "Bird" par les trois méthodes présentées précédemment. Notons que ETIR1 est calculé entre la méthode directe et la méthode récursive et ETIR2 est calculé entre la méthode matricielle et la méthode récursive.

Les moments 3D	Le temps moyen de calcul des moments par les trois méthodes			ETIR ₁ %	ETIR ₂ %
	Méthode récursive	Méthode Directe	Méthode matricielle		
Tchebichef	2.8117e+04	1.0612e+03	3.1579	96.2256	99.9888
Krawtchouk	2.8104e+04	1.0723e+03	3.0156	96.1844	99.9893
Hahn	3.0996e+04	1.0698e+03	2.7255	96.5486	99.9912
Charlier	2.8643e+04	1.0500e+03	2.6955	96.3343	99.9906

Tableau IV.1. Temps moyen de calcul et pourcentage de réduction des moments de l'image 3D "Bird" par les trois méthodes

Les moments 3D	Le temps moyen de reconstruction d'une image 3D en utilisant des moments 3D par les trois méthodes			ETIR ₁ %	ETIR ₂ %
	Méthode récursive	Méthode Directe	Méthode matricielle		
Tchebichef	3.108e+04	1.3125e+03	3.8166	95.7770	99.9877
Krawtchouk	3.5860e+04	1.5123e+03	5.9180	95.7828	99.9835
Hahn	3.3808e+04	1.9123e+03	4.6928	94.3436	99.9861
Charlier	3.3860e+04	1.3066e+03	4.2965	96.1412	99.9873

Tableau IV.2. Temps moyen de reconstruction de l'image 3D "Bird" en utilisant les moments 3D par les trois méthodes

Les résultats de la simulation (Tableau IV.1 et Tableau IV.2) montrent que le temps de calcul des moments et de reconstruction de l'image "Bird" par les deux méthodes : la méthode directe et la méthode matricielle est beaucoup plus petit que le temps de calcul des moments par la méthode récursive. Ceci montre la rapidité et la robustesse des deux méthodes proposées pour le calcul des moments 3D et pour la reconstruction d'images 3D par rapport à la méthode récursive. Le temps de calcul des moments 3D de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn et Charlier est considérablement accéléré et le gain de temps arrive jusqu'à 99%. Notons que les résultats des figures (IV.6 et IV.7) et des tableaux (IV.1 et IV.2) sont obtenus pour les valeurs des paramètres suivants : $a_1 = 80$ pour les polynômes de Charlier, $p = 0.5$ pour les polynômes de Krawtchouk et $a = 10$ et $b = 10$ pour les polynômes de Hahn.

5.2. Reconstruction d'images 3D par les méthodes globale et locale en utilisant les moments de Charlier 3D

Dans cette section, nous discutons la capacité des moments de Charlier 3D pour la reconstruction d'images 3D en utilisant les méthodes locale et globale proposées dans la section 4. Pour évaluer les performances de deux méthodes, nous calculons l'erreur quadratique moyenne (MSE) et le rapport signal / bruit (Peak Signal-To-Noise Ratio) PNSR entre l'image originale et celle reconstruite. Ces critères sont largement utilisés dans le domaine de l'analyse d'images en tant que mesures quantitatives de la précision de la reconstruction.

Pour illustrer les performances de la méthode locale proposée, notre algorithme est testé sur deux images 3D "Crab" et "Image1" de tailles $128 \times 128 \times 128$ voxels (Figure IV.4 et Figure IV.5). Le test de reconstruction est effectué sur les deux images 3D par les deux méthodes : la méthode locale proposée et la méthode globale en utilisant les moments orthogonaux discrets de Charlier pour des ordres allant de 0 à 90.

Les figures (Figure IV.8 et Figure IV.9) montrent les erreurs quadratiques moyennes (MSE) et les rapports signal / bruit pour l'image 3D "Crab" par les deux méthodes.

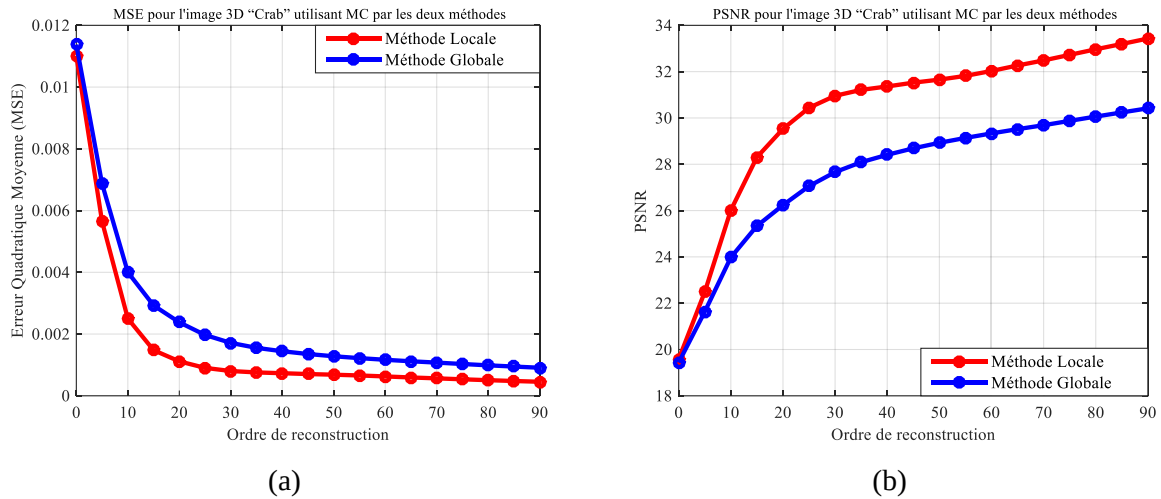


Figure IV.8. (a) " MSE " et (b): " PSNR " en utilisant les moments de Charlier 3D pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale

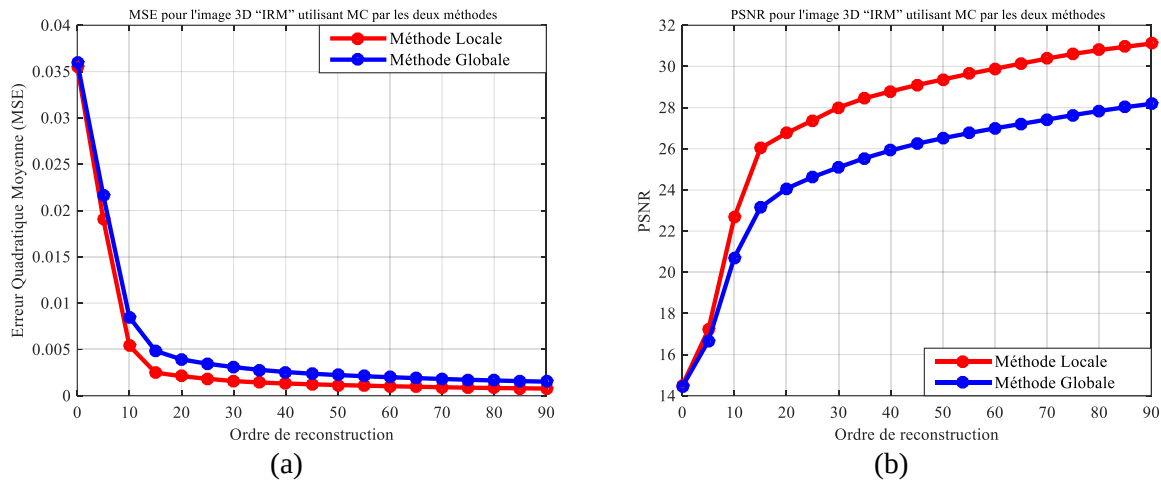


Figure IV.9. (a) " MSE " et (b) " PSNR " en utilisant les moments de Charlier 3D pour l'image 3D "IRM" par les méthodes globale et locale

Notons que l'erreur quadratique moyenne (MSE) décroît et s'approche de zéro avec l'augmentation des ordres des moments. Lorsque les moments atteignent un ordre optimal, l'image reconstruite sera très proche de l'image d'origine. De même, pour le rapport (PSNR) qui augmente avec l'augmentation des ordres des moments de Charlier, jusqu'il atteint une valeur stable, dans ce cas l'image reconstruite est très proche de l'image originale. De plus, les figures montrent également que la méthode locale proposée est plus efficace en termes de qualité de reconstruction d'image 3D que la méthode globale pour les deux images 3D.

Dans le deuxième test, nous testerons la capacité de reconstruction d'image 3D de la méthode proposée pour d'autres types de moments orthogonaux discrets 3D tels que les moments de Tchebichef, Krawtchouk et Hahn. Le test de reconstruction est effectué sur la même image 3D "Crab" en utilisant les trois moments par la méthode locale et la méthode globale.

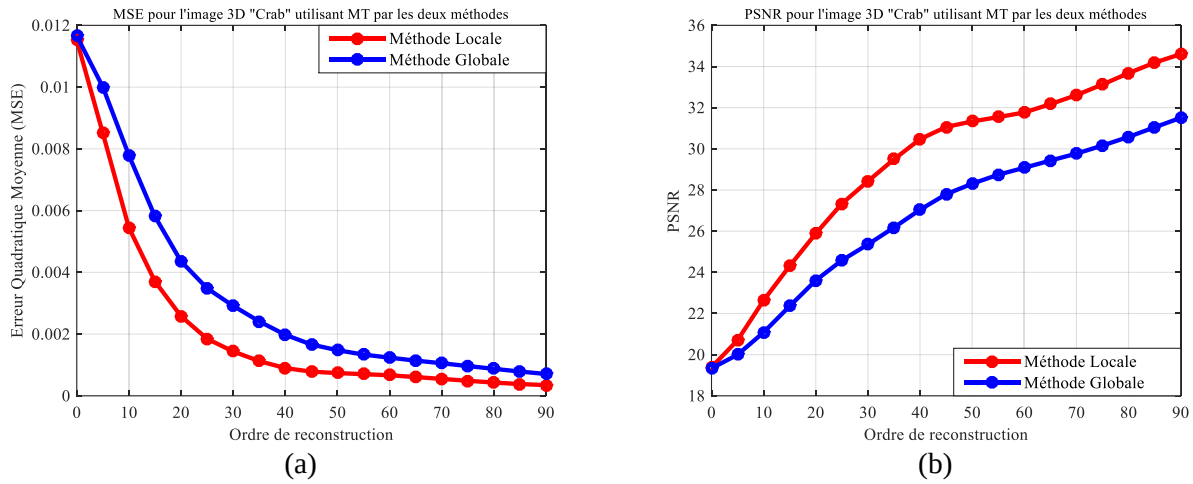


Figure IV.10. (a) " MSE " et (b) " PSNR " en utilisant les moments 3D de Tchebichef pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale

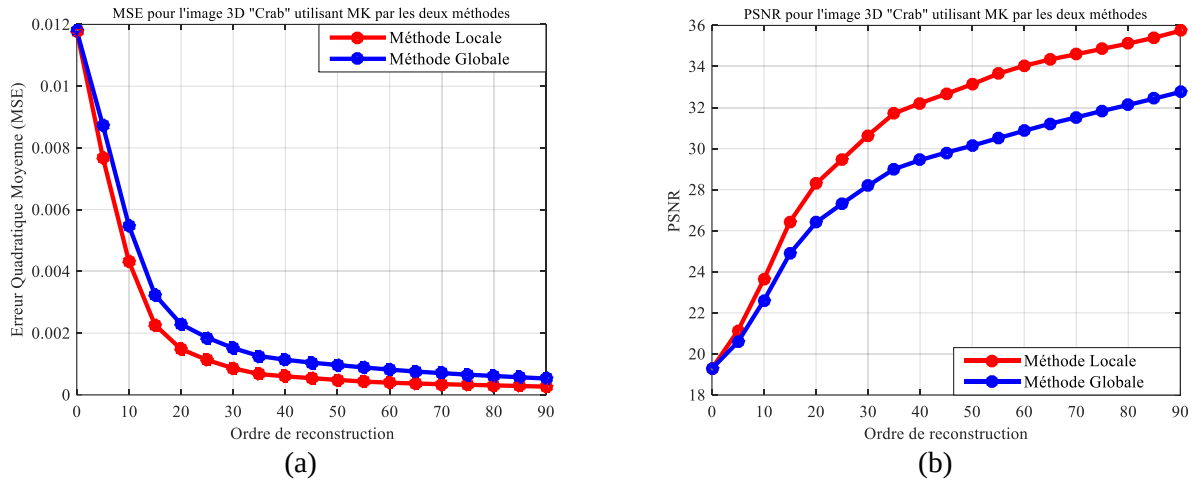


Figure IV.11. (a) " MSE " et (b) " PSNR " en utilisant les moments 3D de Krawtchouk pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale

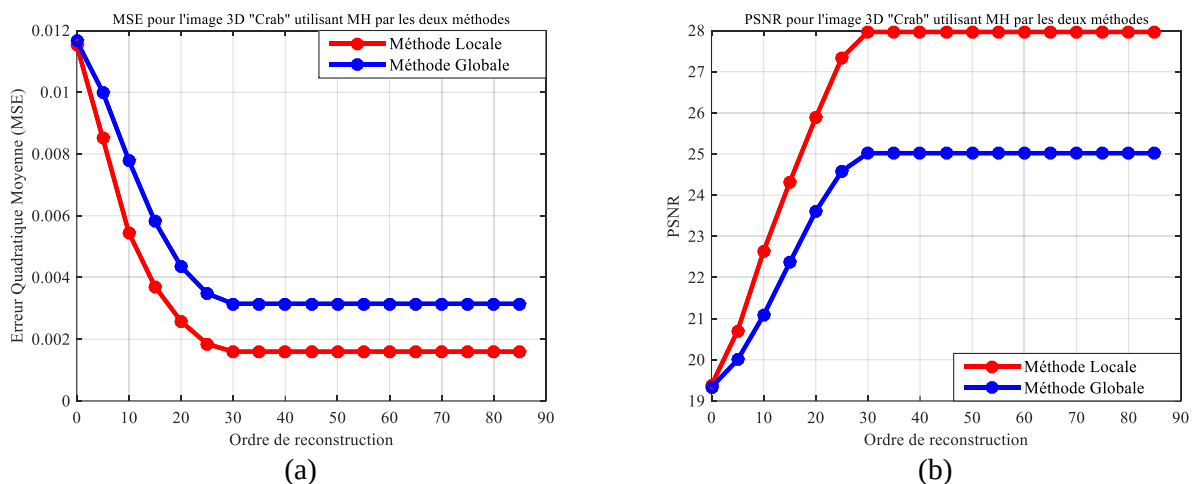


Figure IV.12 : (a) " MSE " et (b) " PSNR " en utilisant les moments 3D de Hahn pour l'image 3D "Crab" par les méthodes globale et locale.

Les résultats de simulation (Figure IV.10, Figure IV.11 et Figure IV.12) démontrent en outre l'efficacité de la méthode proposée pour la reconstruction d'images 3D par différents types des

moments orthogonaux discrets. Ainsi, après avoir montré la robustesse de la méthode locale pour la reconstruction d'images en 3D, nous comparerons la capacité de reconstruction d'images des moments de Charlier avec les moments de Tchebichef, Krawtchouk et Hahn.

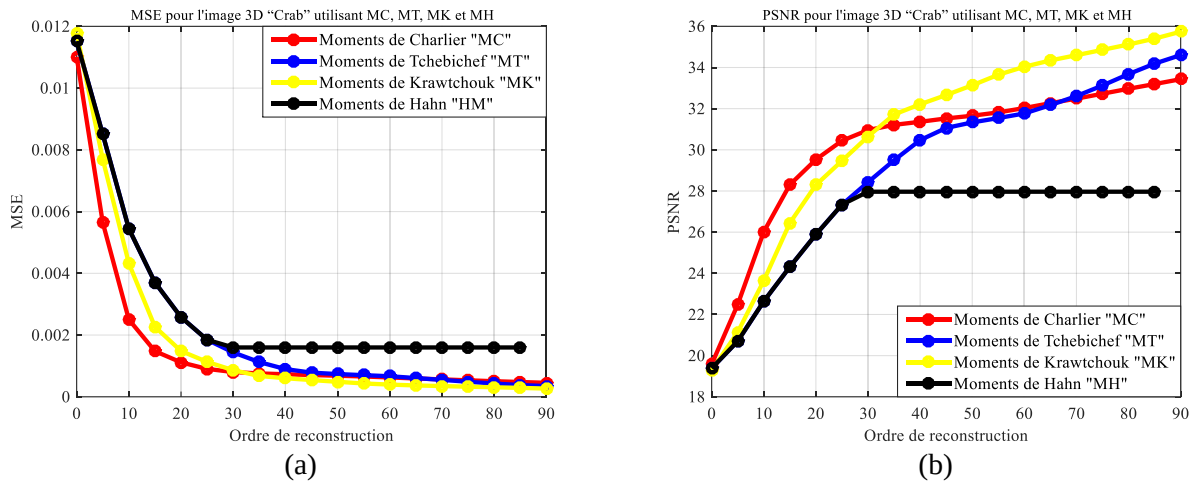


Figure IV.13. (a) " MSE " et (b) " PSNR " en utilisant les moments 3D de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn et Charlier pour l'image 3D "Crab" par la méthode locale

Les résultats de simulation (Figure IV.13) montrent la capacité des moments orthogonaux discrets de Tchebichef, Krawtchouk, Hahn et Charlier calculés par l'algorithme ICR pour la reconstruction des images 3D avec une légère efficacité pour les moments de Charlier et de Krawtchouk par rapport à ceux de Tchebichef et de Hahn.

Enfin, les figures (Figure IV.14, Figure IV.15, Figure IV.16 et Figure IV.17) montrent un ensemble d'images reconstruites des images "Airplane" et IRM "Image 2" en utilisant les moments de Charlier 3D par la méthode locale et la méthode globale pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80. On constate que la qualité de reconstruction augmente avec la croissance des ordres des moments de Charlier et que la méthode locale est efficace en termes de reconstruction par rapport à la méthode globale.

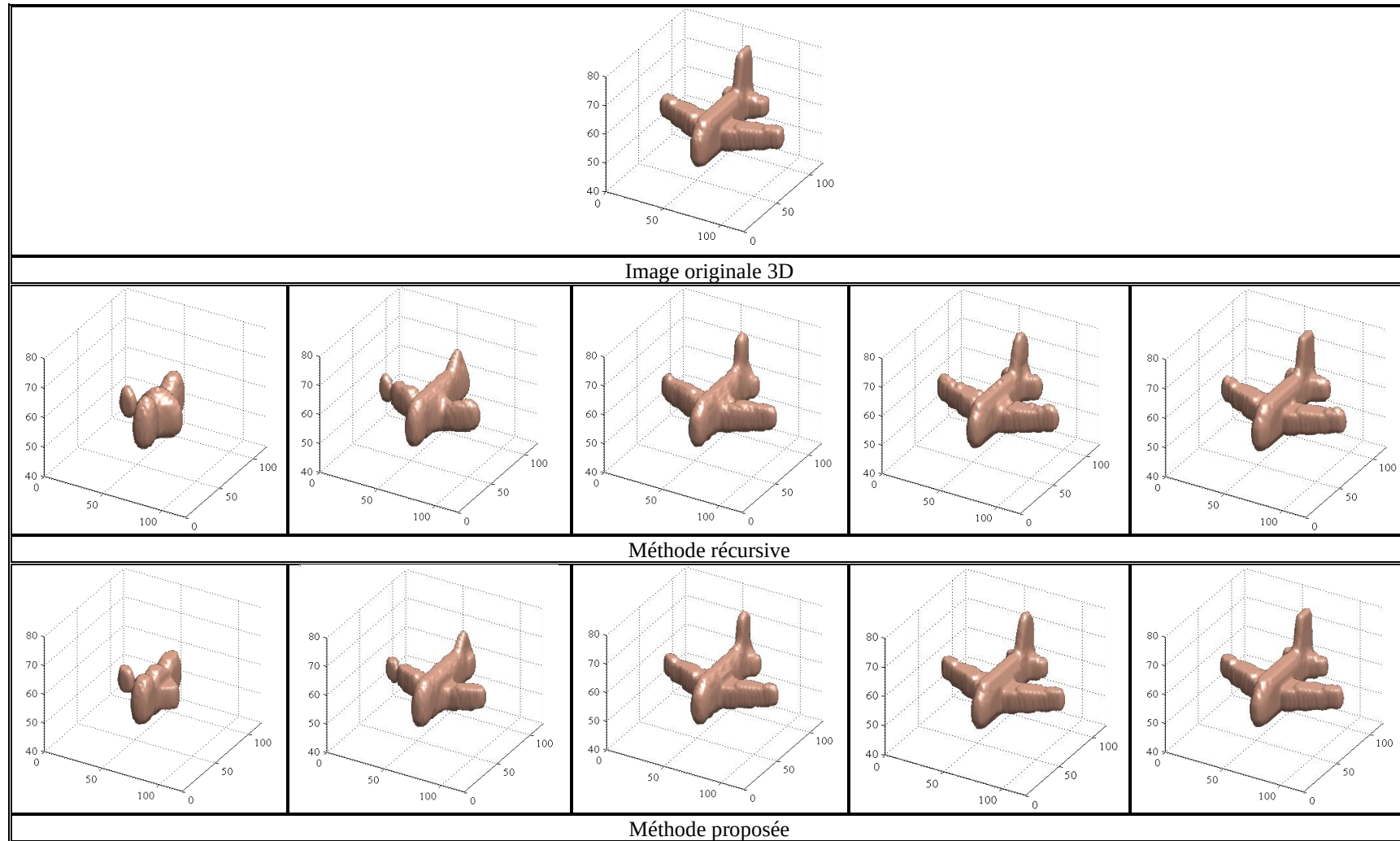


Figure IV.14. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Airplane" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement

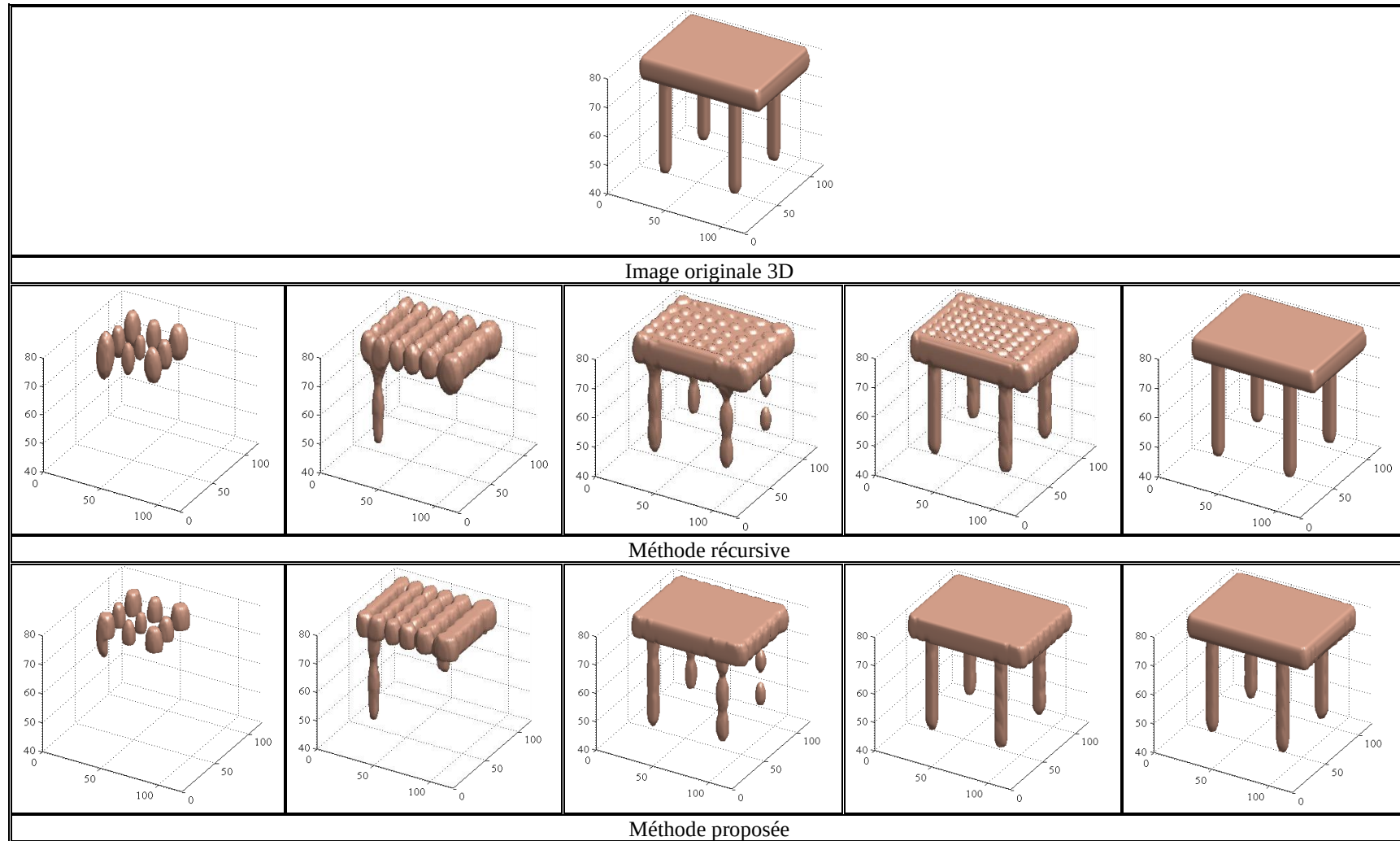


Figure IV.15. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Table" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement

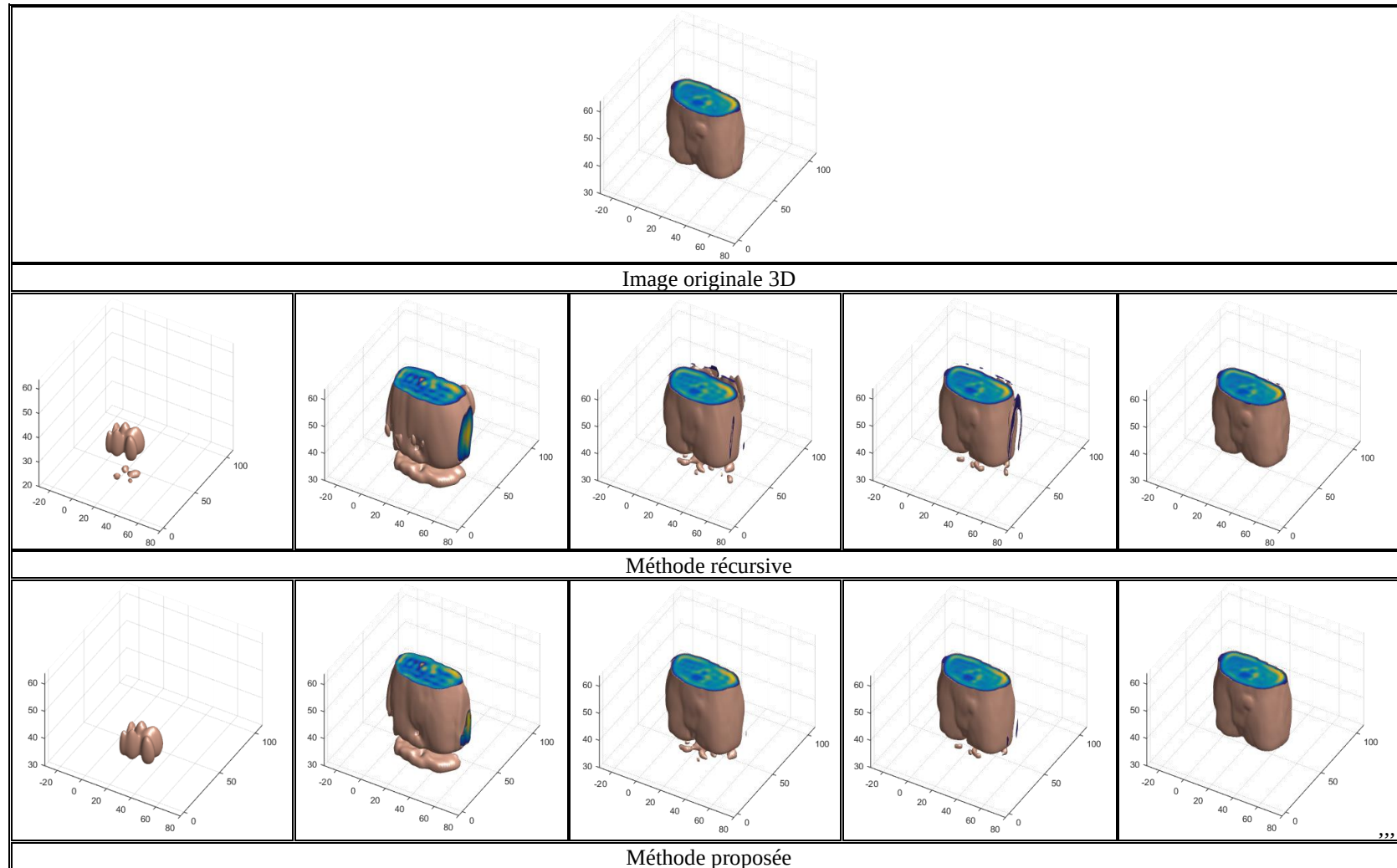


Figure IV.16. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Image 2" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement

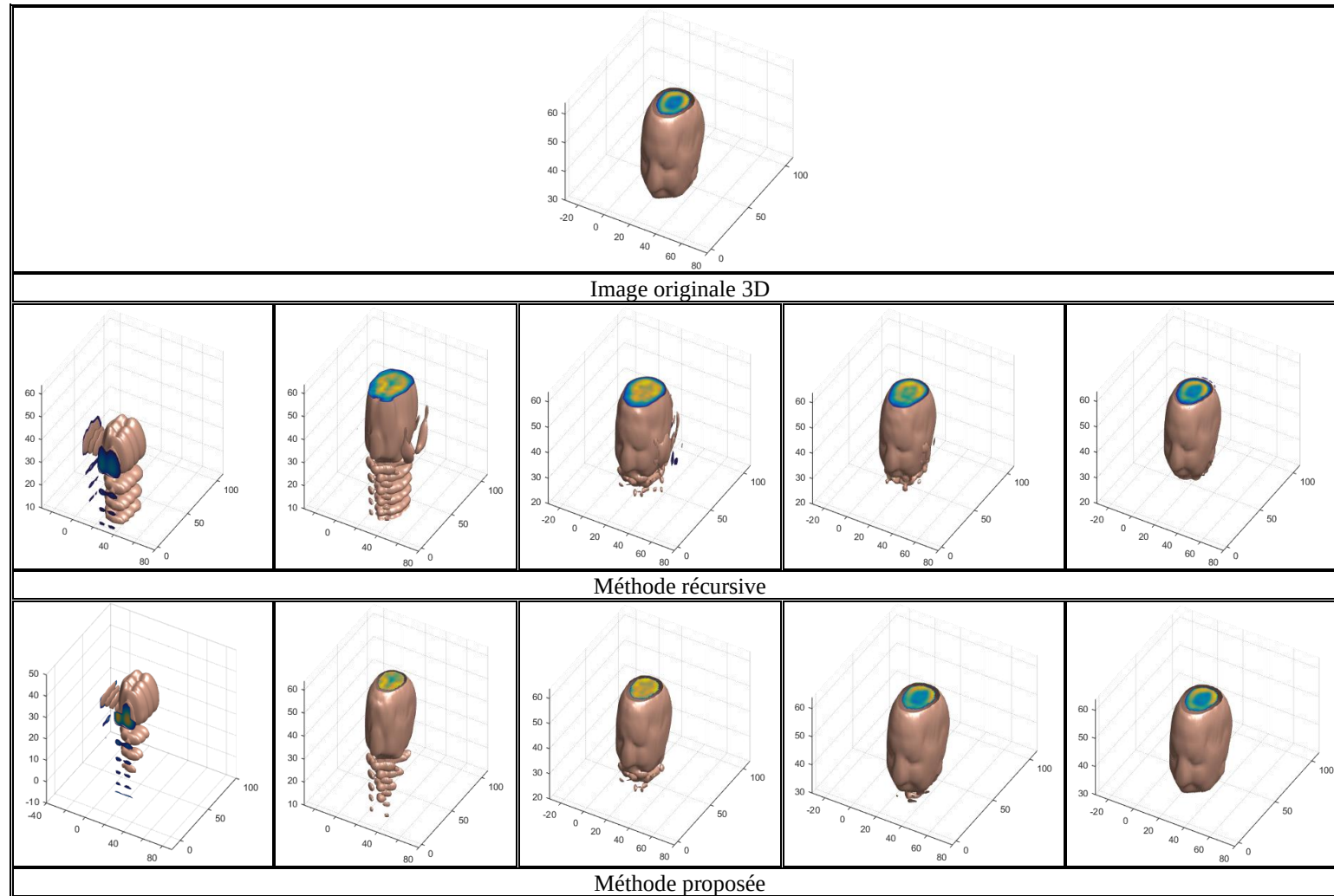


Figure IV.17. Ensemble des images reconstruites de l'image 3D "Image 3" par les moments de Charlier pour les ordres 10, 20, 30, 50 et 80 respectivement

6. Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode rapide et efficace a été proposée pour calculer les moments orthogonaux discrets de Charlier 3D pour l'image 3D. Cette méthode repose sur la nouvelle représentation de l'image 3D et sur le calcul matriciel des moments orthogonaux discrets de Charlier 3D à partir des cuboïdes de l'image 3D. D'autre part, cette méthode a été également appliquée à la reconstruction locale des images 3D à partir des moments de Charlier extraites des cuboïdes de l'image 3D. En conclusion, les résultats de la simulation ont montré la rapidité et la qualité de la reconstruction de l'image 3D par la méthode proposée. Ces résultats nous encouragent donc à appliquer cette méthode à la classification des images 3D en utilisant les moments invariants de Charlier 3D, comme étant des descripteurs dans le processus de classification d'images 3D. Cette méthode fera l'objet du prochain chapitre V.

Chapitre V

Extraction Rapide et Stable des Invariants des Moments de Charlier 3D pour la Classification des Images 3D

1. Introduction

Les moments d'image ont été utilisés avec succès dans les applications de classification et de reconnaissance pendant plusieurs années, en tant que descripteurs discriminants, non seulement pour leurs simplicités, mais aussi pour la variété des sujets et des applications où ils sont éclairés [Abdulhussain et al, 2017a], [Sayyouri et al, 2014a], [Sayyouri et al, 2014b], [Hmimid et al, 2014] et [Karmouni et al, 2017]. Parmi ces derniers, on trouve les moments orthogonaux discrets qu'ont des propriétés considérables, car ils se caractérisent avec une faible redondance d'informations et ils ont un pouvoir discriminant élevé. Ils éliminent également le besoin d'approximation numérique et satisfont précisément la propriété d'orthogonalité [Zhu et al, 2010], [Jahid et al, 2018b] et [Karmouni et al, 2019b].

Les moments sont appelés invariants, si leurs valeurs restent inchangées sous les transformations géométriques de l'image à savoir la translation, le changement d'échelle et la rotation, de sorte que l'image doit être correctement reconnue, quelle que soit sa position, sa taille et son orientation. L'invariance est donc un critère essentiel dans ces domaines, c'est pourquoi les moments invariants sont devenus des descripteurs de forme importants et fréquemment utilisés.

En général, les moments invariants sont extraits par deux méthodes : la méthode directe et la méthode indirecte. Dans la méthode directe, également appelée méthode de normalisation d'image, on peut transformer l'image en une image standard ayant les propriétés de translation, de changement d'échelle et de rotation par le changement des variables (x, y) de l'image 2D et (x, y, z) de l'image 3D. Dans la méthode indirecte, nous calculons les moments orthogonaux invariants comme une combinaison linéaire des moments géométriques invariants, cette méthode est limitée par la complexité d'extraction des invariants et par le coût de calcul élevé, en particulier pour les grandes images telles que les images médicales et les images 3D. Ces inconvénients limitent l'utilisation de ces moments dans les domaines de la reconnaissance et

de la classification des objets 3D, en particulier pour les grandes bases de données.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle approche stable et rapide pour extraire les invariants des moments de Charlier 3D sous les trois transformations géométriques (la translation, le changement d'échelle et la rotation) d'une image 3D. Cette approche repose sur deux notions fondamentales : la première est l'extraction des invariants des moments de Charlier 3D à partir des invariants des moments géométriques 3D. La seconde est l'utilisation de la représentation d'images par cuboïde 3D (ICR) présentée dans le chapitre précédent, dans cette représentation l'image 3D est décomposée en une série de cuboïdes de même intensité au lieu de voxels individuels. Le temps de calcul de ces invariants est considérablement réduit en raison du nombre de cuboïdes dans une image 3D beaucoup plus petit que le nombre de voxels.

2. Moments orthogonaux discrets invariants de Charlier 3D

Afin d'utiliser les moments de Charlier 3D pour la classification d'image, il est indispensable que ces derniers soient invariants par les transformations géométriques de rotation, de changement d'échelle et de translation de l'image.

Dans cette section, nous présentons les méthodes d'extraction des moments invariants de Charlier par rapport aux trois transformations géométriques à partir des moments géométriques invariants 3D, car les fonctions de base de ces moments sont des combinaisons linéaires de monômes (x^n, y^m, z^k) .

2.1. Moments géométriques invariants 3D

Dans cette sous-section, nous introduisons les moments géométriques invariants 3D par rapport aux transformations spatiales dans le plan les plus simples, à la translation, le changement d'échelle et à la rotation. L'invariance est largement utilisée dans toutes les applications pratiques, car l'objet doit être correctement reconnu, quelles que soient sa position, sa taille et son orientation.

Les moments géométriques 3D GM_{nmk} d'ordre $(n+m+k)^{th}$, d'une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$, sont définis en utilisant l'approximation discrète de la somme comme [Batioua et al, 2017], [Flusser et al, 2016] :

$$GM_{nmk} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} x^n y^m z^k f(x, y, z) \quad (V.1)$$

L'Eq. (V.1) a la forme d'une projection de la fonction $f(x, y, z)$ sur le monôme $x^n y^m z^k$. La base du monôme $x^n y^m z^k$ est complète, mais n'est pas orthogonale. Ces moments représentent

une mesure statistique de la distribution des voxels autour du centre de gravité de l'image et permettent de capturer également les informations globales de l'image.

Les moments géométriques centraux 3D μ_{nmk} sont calculés par rapport au centroïde de l'image 3D, ce qui les rend indépendants de la référentielle de l'image, peuvent être écrits comme suit [Batioua et al, 2017] :

$$\mu_{nmk} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} (x - \bar{x})^n (y - \bar{y})^m (z - \bar{z})^k f(x, y, z) \quad (V.2)$$

avec $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sont les coordonnées de centroïde de l'image 3D $f(x, y, z)$ sont définies par:

$$\bar{x} = \frac{GM_{100}}{GM_{000}}, \bar{y} = \frac{GM_{010}}{GM_{000}} \text{ et } \bar{z} = \frac{GM_{001}}{GM_{000}} \quad (V.3)$$

Concernant l'invariance à la rotation, elle est obtenue par une séquence de trois rotations autour de chaque axe principal à partir des conventions d'angle d'Euler par la multiplication de matrice [Flusser et al, 2016].

Une rotation de α radians autour de l'axe x est définie comme suit :

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (V.4)$$

De même, une rotation de β radians autour de l'axe y est définie par :

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (V.5)$$

Enfin, une rotation de γ radians autour de l'axe z est définie par :

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (V.6)$$

Sachant que α , β , et γ sont les angles d'Euler, elles sont définies comme suit :

$$\text{où } \alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mu_{011}}{\mu_{020} - \mu_{002}} \right), \beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mu_{101}}{\mu_{200} - \mu_{002}} \right) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mu_{110}}{\mu_{200} - \mu_{020}} \right),$$

Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, l'ordre des axes que l'on fait

pivoter affectera le résultat. Pour cette analyse, nous allons pivoter d'abord l'axe des x , puis l'axe des y et enfin l'axe des z . La séquence de rotation est représentée par le produit matriciel suivant [Batioua et al, 2017] :

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (V.7)$$

où

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (V.8)$$

donc, on obtient :

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (V.9)$$

Pour simplifier le développement mathématique, on note :

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (V.10)$$

De manière générale, la matrice de rotation 3D R_{xyz} peut être exprimée sous la forme d'une transformation linéaire des coordonnées de l'image 3D comme suit:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} \quad (V.11)$$

avec $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont les éléments de la matrice $R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma)$.

En fin, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x - \bar{x}) + a_{12}(y - \bar{y}) + a_{13}(z - \bar{z}) \\ a_{21}(x - \bar{x}) + a_{22}(y - \bar{y}) + a_{23}(z - \bar{z}) \\ a_{31}(x - \bar{x}) + a_{32}(y - \bar{y}) + a_{33}(z - \bar{z}) \end{pmatrix} \quad (V.12)$$

Ensuite, les moments géométriques invariants 3D d'ordre $(n+m+k)^{th}$ notés GMI_{nmk} , qui sont indépendants de la translation, de la mise à l'échelle et de la rotation, s'écrivent comme suit :

$$GMI_{nmk} = GM_{000}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \left\{ \begin{aligned} & \left(a_{11}(x-\bar{x}) + a_{12}(y-\bar{y}) + a_{13}(z-\bar{z}) \right)^n \\ & \times \left(a_{21}(x-\bar{x}) + a_{22}(y-\bar{y}) + a_{23}(z-\bar{z}) \right)^m \\ & \times \left(a_{31}(x-\bar{x}) + a_{32}(y-\bar{y}) + a_{33}(z-\bar{z}) \right)^k \end{aligned} \right\} f(x, y, z) \quad (V.13)$$

$$\text{avec: } \lambda = \frac{n+m+k}{3} + 1.$$

2.2. Moments discrète invariants de Charlier 3D

Les moments invariants de Charlier 3D de l'image normalisée $\tilde{f}(x, y, z) = (\omega_k(x)\omega_k(y)\omega_k(z))^{-1/2} f(x, y, z)$ d'ordre $(n+m+k)^{th}$ sont développés en termes des moments géométriques invariants 3D comme suit :

$$\begin{aligned} CM_{nmk} &= [\rho(n)\rho(m)\rho(k)]^{-1/2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} C_n^{a_1}(x) C_m^{a_1}(y) C_k^{a_1}(z) f(x, y, z) \\ &= [\rho(n)\rho(m)\rho(k)]^{-1/2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^k \alpha_{n,i}^{a_1} \alpha_{m,j}^{a_1} \alpha_{k,l}^{a_1} GMI_{ijl} \end{aligned} \quad (V.14)$$

où $\alpha_{n,i}^{a_1}$ est le coefficient des monômes des polynômes orthogonaux discrets de Charlier.

Les moments invariants de Charlier 3D sont obtenus en termes des moments invariants géométriques 3D. Par conséquent, nous pouvons obtenir les invariants de translation, de changement d'échelle et de rotation des moments de Charlier 3D d'ordre $(n+m+k)^{th}$, en remplaçant GM_{ijl} (moments géométriques 3D) dans Eq. (V.1) par GMI_{ijl} (moments géométriques invariants 3D) définis dans Eq. (V.13) :

$$CMI_{nmk} = [\rho(n)\rho(m)\rho(k)]^{-1/2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^k \alpha_{n,i}^{a_1} \alpha_{m,j}^{a_1} \alpha_{k,l}^{a_1} GMI_{ijl} \quad (V.15)$$

L'algorithme V.1 suivant résume les étapes de calcul des moments invariants de Charlier 3D à partir des moments géométriques invariants 3D :

Algorithme V.1. Calcul de CMI_{nmk} par la méthode classique

Entrée : Image 3D f ; des moments d'ordre $n, m, k \geq 0$; les paramètres de Charlier $a_1 \succ 0$;

Étape 1 : Calculer les GMI_{nmk} d'ordre $(n + m + k)^{th}$ en utilisant Eq. (V.13) ;

Étape 2 : Calculer les CMI_{nmk} d'ordre $(n + m + k)^{th}$ en utilisant Eqs. (V.13) et (V.15) ;

Sortie : Les CMI_{nmk} d'ordre $(n + m + k)^{th}$.

Cependant, l'application de l'algorithme présenté pour la classification des images 3D est limitée par deux inconvénients majeurs : les erreurs d'approximation numériques des moments géométriques 3D et le temps d'extraction des moments invariants de Charlier 3D.

Afin d'accélérer le processus de sélection des primitives pour les moments invariants de Charlier 3D, et le temps de classification des images 3D également, nous présentons dans la section suivante une nouvelle méthode rapide et stable permettant de déduire les moments discrets invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation, se basant sur une nouvelle représentation d'image 3D s'appelle représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR) [Jahid et al, 2018b], [Karmouni et al, 2019b].

3. Calcul rapide et stable des moments invariants de Charlier 3D

Dans la méthode proposée basée sur l'algorithme ICR, l'image 3D est décomposée en un ensemble de sous-images 3D d'une seule intensité et chaque intensité est représentée par un ensemble de cuboïde et chaque cuboïde correspondant à un objet. Ces cuboïdes sont définis comme un ensemble de voxels connectés. Cette méthode a l'avantage d'accélérer le processus d'extraction de leurs moments discrets invariants de Charlier 3D et nous permet d'améliorer le résultat de la classification sans affecter la propriété d'invariance par rapport à la méthode classique.

En appliquant la représentation ICR [Karmouni et al, 2019b] et [Jahid et al, 2018b], l'image 3D $f(x, y, z)$ contenant L cuboïdes s'expriment par la formule suivante :

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{255} f_i(x, y, z) \quad (V.16)$$

avec $\{f_i, i=1, 2, \dots, 255\}$ est le i^{th} d'intensité i de l'image 3D.

En utilisant l'algorithme ICR, les moments géométriques invariants 3D d'ordre $(n + m + k)^{th}$

d'une image 3D $f(x, y, z)$ de taille $N \times M \times K$ dans Eq. (V.16), se récrivent comme suit:

$$PGMI_{nmk} = GM_{000}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \left\{ \begin{aligned} & \left(a_{11}(x - \bar{x}) + a_{12}(y - \bar{y}) + a_{13}(z - \bar{z}) \right)^n \\ & \times \left(a_{21}(x - \bar{x}) + a_{22}(y - \bar{y}) + a_{23}(z - \bar{z}) \right)^m \\ & \times \left(a_{31}(x - \bar{x}) + a_{32}(y - \bar{y}) + a_{33}(z - \bar{z}) \right)^k \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^{n_f} f_i \quad (V.17)$$

Les moments géométriques invariants 3D dans Eq. (V.17), sont développés comme suit :

$$PGMI_{nmk} = \sum_{i=1}^{n_f} PGMI_{nmk}^i \quad (V.18)$$

où $PGMI_{nmk}^i$ sont les moments géométriques invariants 3D calculés en considérant une intensité f_i d'image 3D, sont déduits par la relation suivante :

$$PGMI_{nmk}^i = f_i \left[GM_{000}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \left\{ \begin{aligned} & \left(a_{11}(x - \bar{x}) + a_{12}(y - \bar{y}) + a_{13}(z - \bar{z}) \right)^n \\ & \times \left(a_{21}(x - \bar{x}) + a_{22}(y - \bar{y}) + a_{23}(z - \bar{z}) \right)^m \\ & \times \left(a_{31}(x - \bar{x}) + a_{32}(y - \bar{y}) + a_{33}(z - \bar{z}) \right)^k \end{aligned} \right\} \right] \quad (V.19)$$

Les moments géométriques invariants 3D $PGMI_{nmk}^i$ correspondant à une intensité f_i sont calculés à partir des cuboïdes de chaque intensité, d'ordre $(n + m + k)^{th}$ des L_i cuboïdes, ayant des coordonnées $(x_{1,Cub_j^{f_i}}, x_{2,Cub_j^{f_i}})$, $(y_{1,Cub_j^{f_i}}, y_{2,Cub_j^{f_i}})$ et $(z_{1,Cub_j^{f_i}}, z_{2,Cub_j^{f_i}})$, sont donnés par la formule suivante :

$$\begin{aligned} PGMI_{nmk}^i &= \sum_{j=1}^{L_i} f_i \left[GM_{000}^{-\lambda} \sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} \left\{ \begin{aligned} & \left(a_{11}(x - \bar{x}) + a_{12}(y - \bar{y}) + a_{13}(z - \bar{z}) \right)^n \\ & \times \left(a_{21}(x - \bar{x}) + a_{22}(y - \bar{y}) + a_{23}(z - \bar{z}) \right)^m \\ & \times \left(a_{31}(x - \bar{x}) + a_{32}(y - \bar{y}) + a_{33}(z - \bar{z}) \right)^k \end{aligned} \right\} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{L_i} PGMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \end{aligned} \quad (V.20)$$

où $Cub_j^{f_i}$ est le cuboïde j d'intensité f_i , avec $j = 1, \dots, L_i$ est le $j^{ème}$ cuboïde d'intensité f_i .

Le nombre total des cuboïdes $L = \sum_{i=1}^{255} L_i$ avec L_i le nombre des cuboïdes pour chaque intensité

f_i .

avec $GMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}}$ sont les moments géométriques invariants 3D pour chaque cuboïde $Cub_j^{f_i}$, d'ordre $(n+m+k)^{th}$, sont définis comme suit :

$$PGMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} = GMI_{000}^{-\lambda} \sum_{x=x_{1,Cub_j^{f_i}}}^{x_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{y=y_{1,Cub_j^{f_i}}}^{y_{2,Cub_j^{f_i}}} \sum_{z=z_{1,Cub_j^{f_i}}}^{z_{2,Cub_j^{f_i}}} f_i \times \left\{ \begin{aligned} & \left(a_{11}(x-\bar{x}) + a_{12}(y-\bar{y}) + a_{13}(z-\bar{z}) \right)^n \\ & \times \left(a_{21}(x-\bar{x}) + a_{22}(y-\bar{y}) + a_{23}(z-\bar{z}) \right)^m \\ & \times \left(a_{31}(x-\bar{x}) + a_{32}(y-\bar{y}) + a_{33}(z-\bar{z}) \right)^k \end{aligned} \right\} \quad (V.21)$$

Les moments géométriques invariants 3D en translation, changement d'échelle et en rotation d'image 3D peuvent être obtenus à partir de la somme des moments géométriques invariants 3D de chaque cuboïde $PGMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}}$ de chaque intensité f_i d'ordre $(n+m+k)^{th}$, sont donnés par la formule suivante:

$$PGMI_{nmk} = \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{L_i} PGMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}} \quad (V.22)$$

Par conséquent, les moments invariants de Charlier 3D s'obtiennent en remplaçant dans l'équation (V.15) les moments géométriques invariants 3D GMI_{nmk} de l'équation (V.13) par les moments géométriques invariants 3D proposées $PGMI_{nmk}$ de l'équation (V.22).

Après avoir calculé les invariants par translation, changement d'échelle et rotation des moments de Charlier 3D par la méthode ICR proposée, nous résumons les étapes de calcul de ces descripteurs dans l'algorithme V.2 suivant :

Algorithme V.2. Calcul rapide et stable de $PCMI_{nmk}$ par algorithme ICR

Entrée : Image 3D f ; des moments d'ordre $n, m, k \geq 0$; les paramètres de Charlier $a_i > 0$;

Étape 1 : Diviser l'image 3D $f(x, y, z)$ à L cuboïdes par algorithme ICR [Karmouni et al, 2019b];

Étape 2 : Générer les $PGMI_{nmk}^{Cub_j^{f_i}}$ pour chaque cuboïde $Cub_j^{f_i}$ de chaque intensité f_i en utilisant Eq. (V.21);

Étape 3 : Calculer les $PGMI_{nmk}$ d'ordre $(n+m+k)^{th}$ en utilisant Eq. (V.22);

Étape 4 : Calculer les $PCMI_{nmk}$ d'ordre $(n+m+k)^{th}$ en utilisant Eqs. (V.15) et (V.22);

Sortie : Les $PCMI_{nmk}$ d'ordre $(n+m+k)^{th}$

4. Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous présentons des résultats expérimentaux pour valider les performances des descripteurs proposés dans la section précédente. Cette section est divisée en trois sous-sections. Dans la première sous-section, nous comparons le temps de calcul des moments invariants de Charlier 3D de translation, de changement d'échelle et de rotation à celui des moments invariants de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk et Meixner en utilisant les deux méthodes : la méthode proposée ICR et la méthode classique. Dans la deuxième sous-section, nous testons et comparons l'invariance des moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation par la méthode proposée et la méthode classique. La dernière sous-section présente une étude expérimentale sur la précision de classification des images 3D par les moments invariants de Charlier 3D, est comparée par d'autres types des moments orthogonaux discrets tels les moments de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk et Meixner, sont testées dans des conditions sans et avec bruit.

4.1. Temps de calcul des invariants des moments de Charlier 3D

Dans cette sous-section, nous allons comparer le temps de calcul des moments orthogonaux discrets invariants 3D de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier par la méthode classique, calculée à partir des moments géométriques invariants 3D basé sur l'Eq. (V.13) et la méthode proposée ICR, calculée à partir des moments géométriques invariants 3D proposée basés sur l'utilisation de l'algorithme ICR dans l'Eq. (V.22).

D'abord, nous allons essayer d'extraire les cuboïdes d'une image 3D en utilisant l'algorithme ICR. Dans le premier exemple, trois images binaires 3D de taille $200 \times 200 \times 200$ voxels (Figure V.1) extrait de la base d'image 3D [McGill, 2017] sont utilisées comme images de test. Utilisant l'algorithme de la représentation d'image 3D par cuboïde (ICR), le nombre de cuboïdes de ces images, est $NC=1361$ pour Dog, $NC=2858$ pour Crabs et $NC=2171$ pour Teddy-bears (Figure V.1).

Dans le deuxième exemple, deux images en niveaux de gris 3D de taille de $128 \times 128 \times 128$ voxels, montré dans (Figure V.2), sont utilisées. Le nombre de cuboïdes de ces images est $NC=53701$ pour MRI 1 et $NC=55308$ pour MRI 2, (Figure V.2). Les figures V.1 et V.2 présentent le nombre de cuboïdes dans chaque image, on constate que le nombre de cuboïdes est beaucoup plus petit que la taille d'image $200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000$ pour une image binaire 3D et $128 \times 128 \times 128 = 2\,097\,152$ pour image en niveaux de gris 3D, ce qui réduit considérablement le nombre de voxels traités.

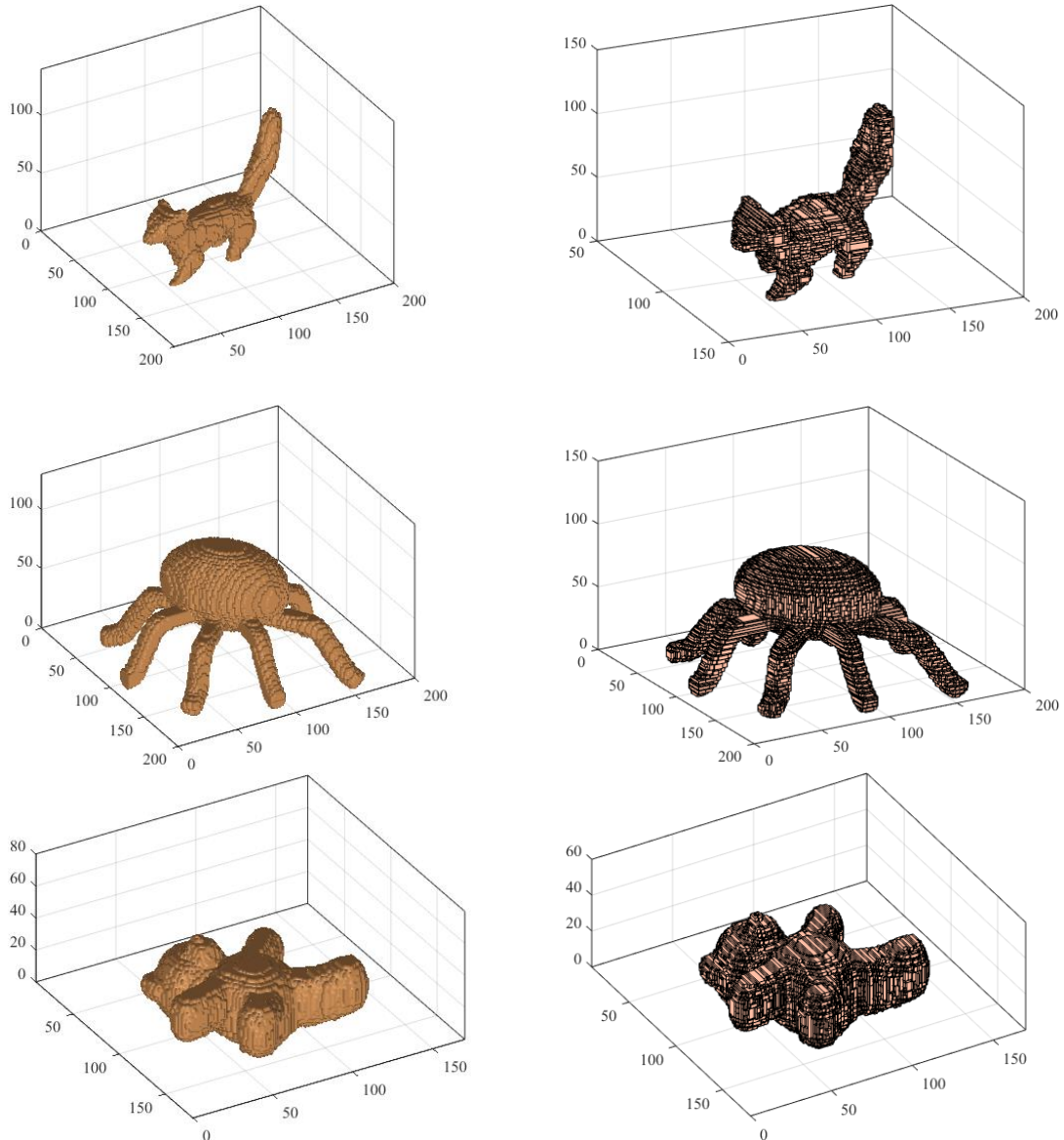
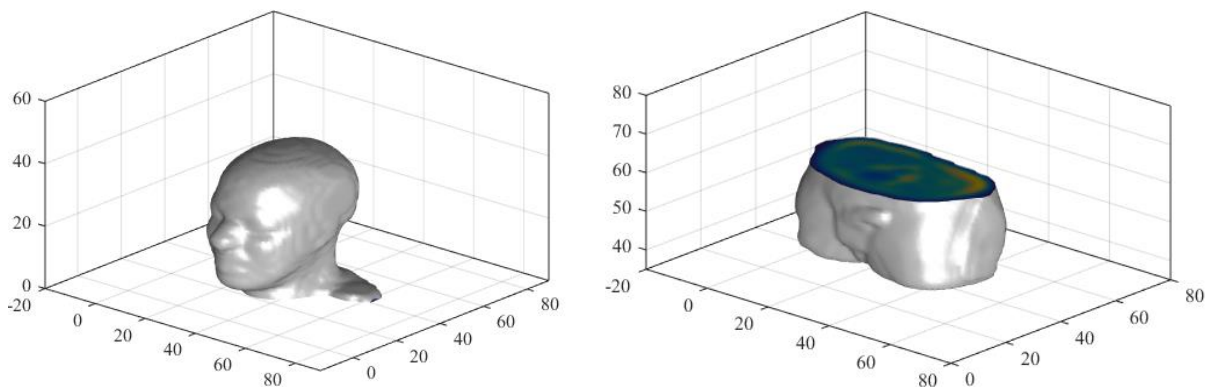


Figure V.1. La représentation d'image par Cuboïde en utilisant l'algorithme (ICR), pour les images binaires 3D de "Dog", "Crabs" et "Teddy-bears"

Cette réduction significative a un effet direct sur l'accélération du temps de calcul des moments orthogonaux discrets invariants, car ceux-ci dépendent du nombre de voxels dans les seins de chaque image ou cuboïdes.



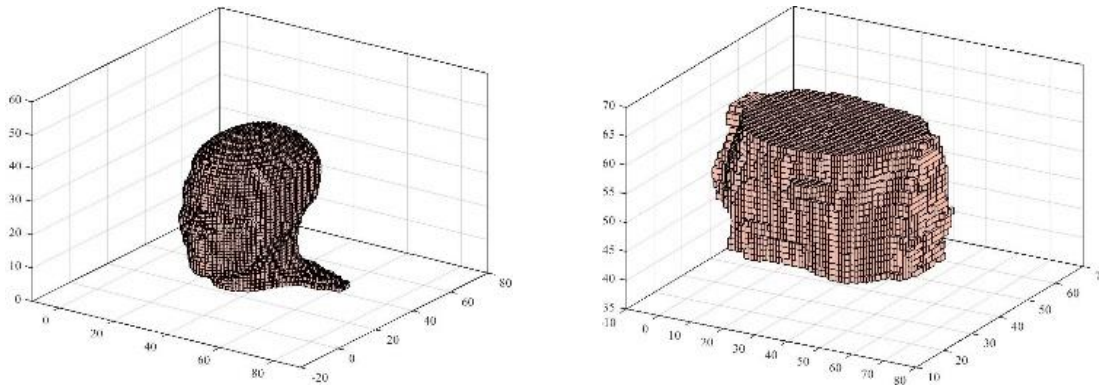


Figure V.2. La représentation d'image par Cuboïde en utilisant l'algorithme (ICR), pour les images en niveaux de gris 3D de MRI 1 et MRI 2

Les tableaux V.1 et V.2 présentent le temps de calcul moyen nécessaire pour calculer les moments orthogonaux discrets invariants 3D de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier pour l'ordre du moment 18 ($n, m, k=6$), en utilisant les deux méthodes pour les images binaires et en niveaux de gris, respectivement. On voit clairement à partir de ces tableaux que le calcul des moments orthogonaux discrets invariants 3D basé sur la méthode proposée ICR est beaucoup plus rapide que celui obtenu par la méthode classique pour tous les types des moments. Ces résultats montrent également que le calcul des moments invariants de Charlier 3D est plus rapide que le calcul des moments invariants de Hahn, de Tchebichef, de Krawtchouk et de Meixner. Notez que le pourcentage de réduction est proche de 97,161%, 97,1319%, 97,1085%, 97,1131% et 97,1151% pour les images binaires 3D, et un pourcentage de réduction proche de 95,6249%, 95,9906%, 95,8636%, 95,7922% et 96,0992% pour les images en niveaux de gris 3D. Ces résultats montrent que notre méthode réduit considérablement le temps de calcul des moments invariants, car le calcul des moments discrets invariants par la méthode proposée dépend uniquement du nombre de cuboïdes au lieu de la taille de l'image 3D. Par conséquent, les moments discrets invariants basés sur la méthode proposée ICR seront souhaitables dans le domaine de la classification d'images. Notez que l'algorithme a été implémenté sur un PC Dual Core 2.10 GHz, 2 Go de RAM.

Moments Invariants	Calcul du temps moyen par		
	Méthode proposée ICR	Méthode classique	ETIR(%)
Hahn	20.2616	713.7587	97.1610
Tchebichef	20.2512	706.0773	97.1319
Krawtchouk	20.2281	699.5809	97.1085
Meixner	20.1492	697.9422	97.1131
Charlier	20.0881	696.3092	97.1151

Tableau V.1. Temps moyens en secondes et pourcentages de réduction des moments discrets invariants pour l'ordre des moments 18, utilisant la méthode ICR proposée et la méthode classique, pour les images binaires de "Dog" et "Crabs"

Moments Invariants	Calcul du temps moyen par		
	Méthode proposée ICR	Méthode classique	ETIR(%)
Hahn	3.2261	73.7381	95.6249
Tchebichef	2.9226	72.8946	95.9906
Krawtchouk	2.9164	70.5063	95.8636
Meixner	2.8759	68.3472	95.7922
Charlier	2.6243	67.2764	96.0992

Tableau V.2. Temps moyens en secondes et pourcentages de réduction des moments invariants discrets pour l'ordre des moments 18, en utilisant la méthode ICR proposée et la méthode classique, pour les images multi-niveaux de "MRI 1" et "MRI 2"

4.2. Invariabilité

L'invariance des moments orthogonaux est très importante dans les applications de reconnaissance de formes. Dans cette sous-section, une série d'expériences numériques sont menées pour évaluer l'invariance des moments discrets de Charlier 3D en ce qui concerne la translation, le changement d'échelle et la rotation à partir l'image 3D. Notamment, l'effet de différentes densités de bruit sur leur précision numérique est étudié.

Dans le premier test, nous testons l'invariance des moments invariants discrets de Charlier 3D par la méthode proposée ICR dans les trois transformations translation, changement d'échelle et rotation. Afin de mesurer la capacité d'invariance des moments proposés de l'image 3D, nous utiliserons l'erreur relative $E(I, \hat{I})$ entre les deux ensembles des moments invariants correspondant à l'image d'origine $I(x, y)$ et l'image transformée $\hat{I}(x, y)$ définie par la relation suivante :

$$E(I, \hat{I}) = \frac{\|IM(I) - IM(\hat{I})\|}{\|IM(I)\|} \quad (V.23)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, $IM(I)$ et $IM(\hat{I})$ sont les moments invariants pour l'image originale $I(x, y)$ et l'image transformé $\hat{I}(x, y)$, respectivement.

Pour ceci, deux images 3D "Human" et "Spiders" de taille $200 \times 200 \times 200$ voxels (Figure V.3), extraites de la base de données 3D Shape Benchmark de McGill [McGill, 2017] sont utilisés comme des images de test. Ces images sont pivotées de 0 à 360 avec un pas de 10, mises à l'échelle par un facteur l'échelle variant de 0,6 à 1,3 avec un pas de 0.1 et translatées par un vecteur variant de TV(-10, -10, -10) à TV(+10, +10, +10) avec un pas de 1. Chaque vecteur de translation est constitué de trois éléments qui représentent un décalage d'image le long des axes x , y et z respectivement. Les moments invariants sont calculés jusqu'au le troisième ordre pour chaque transformation, et le paramètre a_1 dans les polynômes de Charlier est fixé à $N/2$, p dans les polynômes de Krawtchouk est fixé à 0.5, γ , μ dans les polynômes de Meixner sont fixés à

$\mu = 0.5$ et $\gamma = N / 2$; et les paramètres a et b dans les polynômes de Hahn sont fixés à 10.

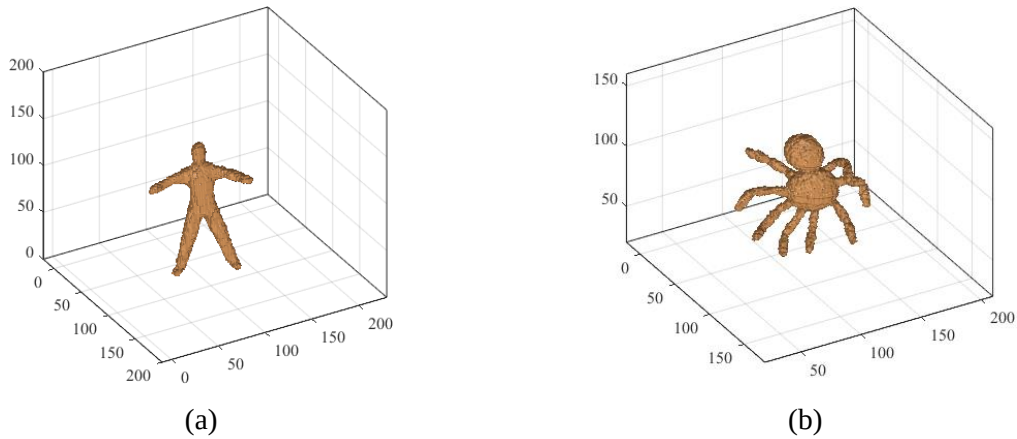


Figure V.3. Les images binaires 3D : (a). Human et (b). Spiders de taille, $200 \times 200 \times 200$ voxels

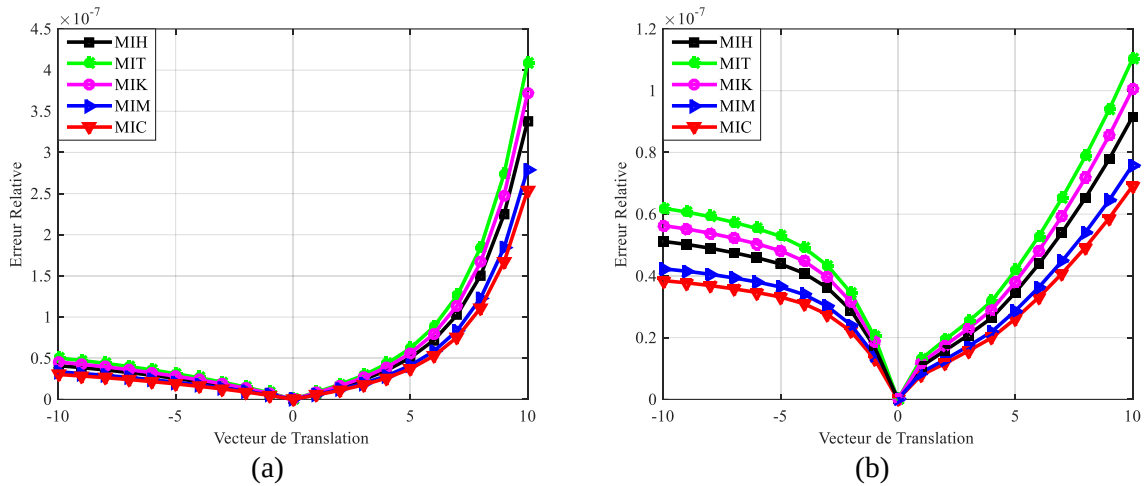


Figure V.4. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions traduites utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

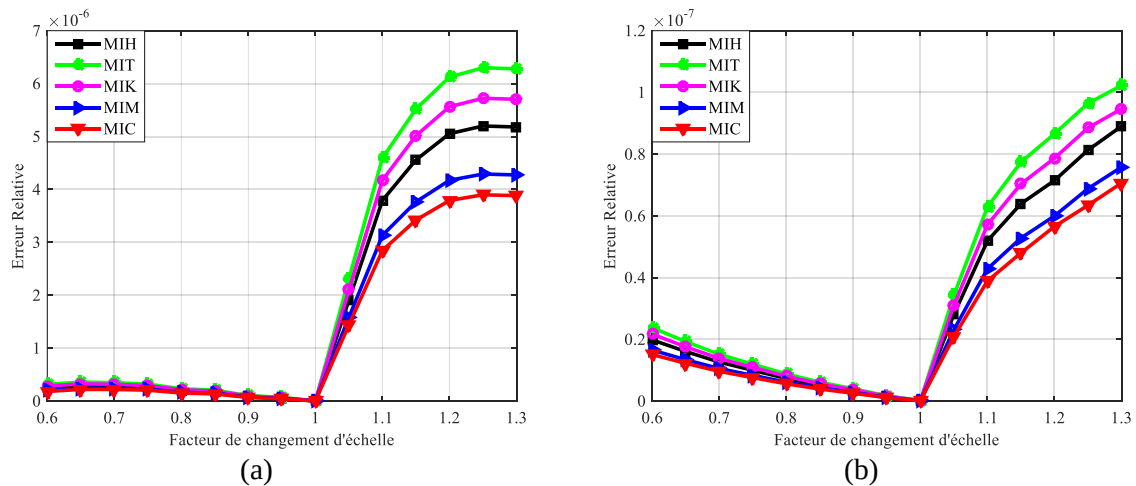


Figure V.5. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions mises à l'échelle utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

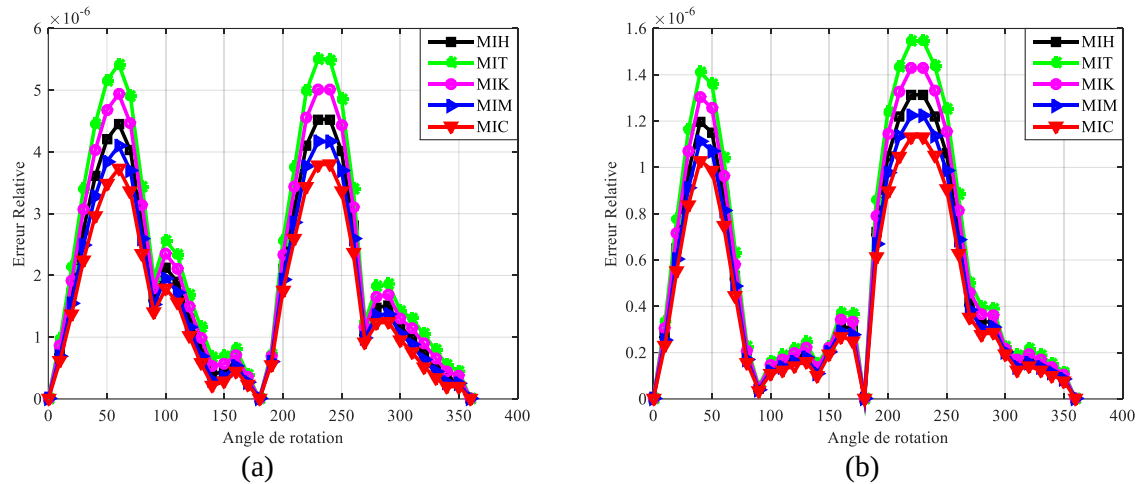


Figure V.6. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions pivotées utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

Les résultats obtenus par les deux méthodes pour les deux images “Human” et “Spiders” sont représentés aux figures V.4 à V.6. Finalement, afin de tester la robustesse de ces invariants vis-à-vis des images dégradées, nous ajoutons du bruit sel et poivre avec différentes densités de bruit de 0 à 0,5 avec un pas de 0,05. De manière similaire à l'expérience précédente, les résultats correspondants sont présentés à la figure V.7.

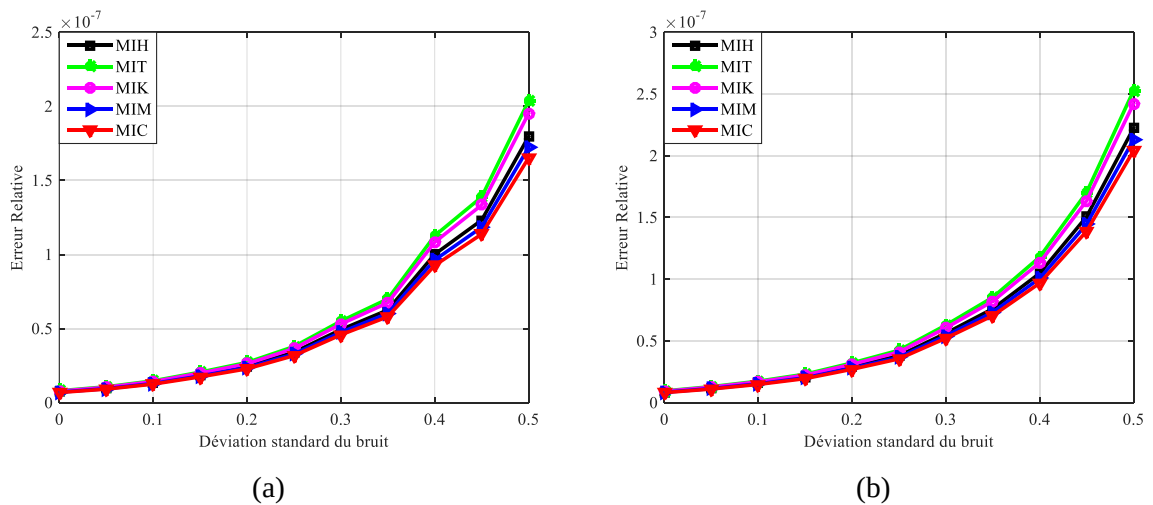


Figure V.7. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions bruitées utilisant les moments invariants de Hahn (MIH), Tchebichef (MIT), Krawtchouk (MIK), Meixner (MIM) et Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

L'examen des figures V.4-V.7, il est clair que les taux d'erreur relatifs sont très faibles, ce qui indique que les moments invariants basés sur la méthode proposée ICR présentent de bonnes performances et expriment une précision numérique élevée sous différentes transformations géométriques, ainsi que, en présence d'effets bruyants pour tous les types des moments. De plus, les descripteurs des moments invariants de Charlier 3D ont une erreur relative légèrement inférieure à celle des invariants de Hahn, de Tchebichef, de Krawtchouk et de Meixner. Par

conséquent, les moments invariants de Charlier basés sur la méthode ICR pourraient s'avérer un outil utile pour les tâches de classification d'objets 3D qui nécessitent l'invariance de translation, de changement d'échelle et de rotation.

Nous terminons cette sous-section en comparant l'invariance des moments invariants de Charlier 3D sous les trois transformations de translation, de changement d'échelle et de rotation par deux méthodes : la méthode ICR proposée et la méthode classique. Les erreurs relatives utilisant les moments invariants de Charlier 3D basées sur les deux sont tracées dans les mêmes figures. Les résultats sont représentés aux figures V.8-V.10.

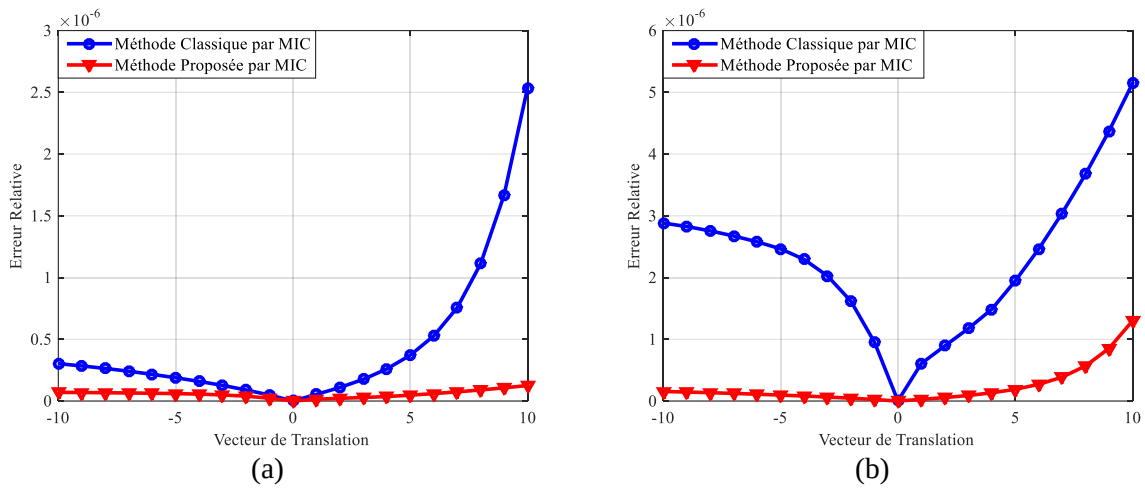


Figure V.8. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions traduites utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

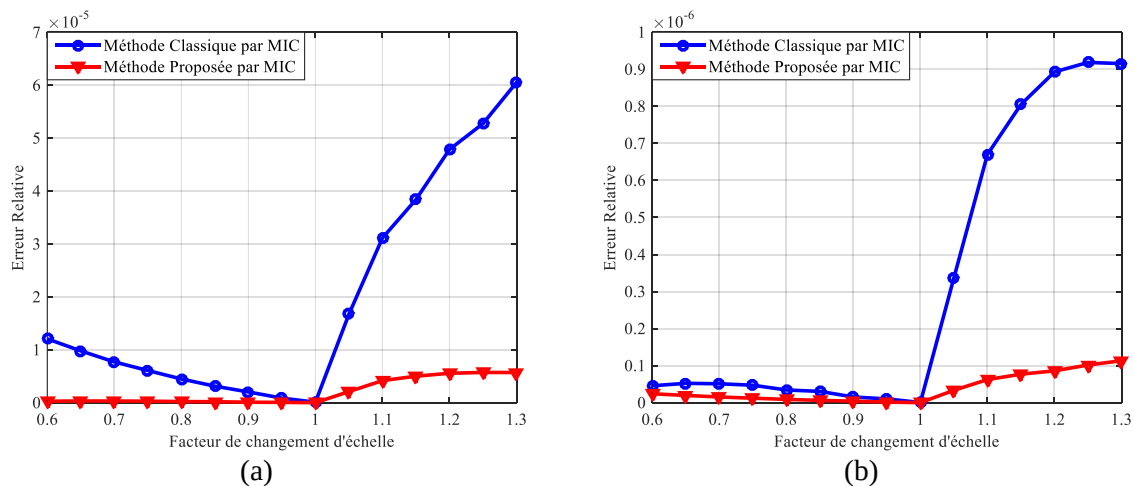


Figure V.9. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions mises à l'échelle utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

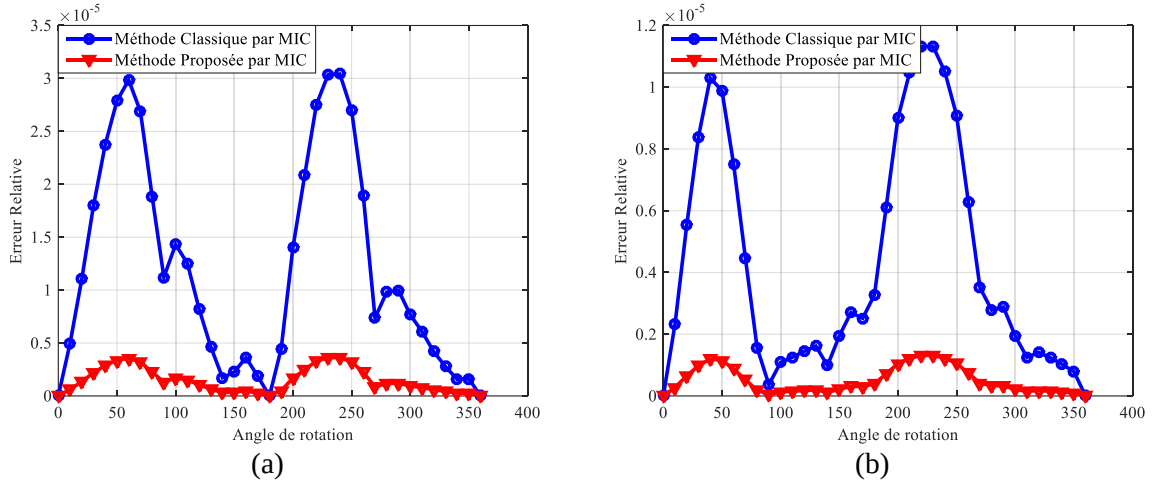


Figure V.10. Erreurs relatives pour (a). “Human” et (b). “Spiders” entre les images originales et les versions pivotées utilisant les moments invariants de Charlier (MIC) basés sur la méthode ICR proposée

On voit sur ces figures que la méthode proposée ICR donne les faibles taux d'erreur relatifs pour les deux images 3D, ce qui indique que les moments invariants de Charlier 3D basés sur cette méthode sont très stables sous différents types de transformations d'image et fonctionnent mieux que ceux obtenus par la méthode classique, ces résultats sont également obtenus pour les moments invariants de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk et Meixner. L'invariabilité et la vitesse de ces invariants sont les propriétés souhaitables dans le domaine de la classification des images 3D.

4.3. Classification d'image 3D

Dans cette sous-section, nous allons tester la classification des objets 3D en utilisant les moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation. Pour ceci, nous allons mettre en place le vecteur caractéristique défini par :

$$V = [CMI_{102} \ CMI_{210} \ CMI_{211} \ CMI_{300} \ CMI_{131} \ CMI_{311}] \quad (V.24)$$

où CMI sont les moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation.

Le processus de classification des objets est effectué en utilisant les distances euclidiennes d_1 (Eq. V.25), la distance de bloc de ville d_2 (Eq. V.26), et la distance de corrélation d_3 (Eq. V.27) sont utilisés comme classificateurs simples [Hmimid et al, 2015], elles sont définies comme suit :

$$d_1(x_s, y_t^{(k)}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{sj} - y_{tj})^2} \quad (V.25)$$

$$d_2(x_s, y_t^{(k)}) = \sum_{j=1}^n |x_{sj} - y_{tj}| \quad (V.26)$$

$$d_3(x_s, y_t^{(k)}) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n x_{sj} y_{tj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{sj})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n (y_{tj})^2}} \quad (V.27)$$

Nous définissons la précision de la reconnaissance par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\text{Nombre d'images correctement classées}}{\text{Le nombre total d'images utilisées dans le test}} \times 100 \% \quad (V.28)$$

En l'absence d'une base de données d'objets 3D permettant de valider la précision de la reconnaissance et la classification des objets 3D translatsés, mis à l'échelle et pivoté, nous utilisons dans ce test 10 objets 3D de taille 128×128×128 présentés dans la Figure V.11 comme images d'apprentissage, ces objets sont extraits de la base de données Princeton Shape Benchmark (PSB) [McGill, 2017].

Les images de test sont générées par des transformations de translation $\{T_x, T_y, T_z\} \in \{-10, \dots, +10\}$ et changement d'échelle $\{s\} \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, \dots, 1.3\}$ suivant les trois directions x, y et z , tourné d'un angle de rotation θ le long des axes x, y ou z , afin de générer une base de données de 1200 objets répartis en 120 objets pour chaque objet.

En outre, pour évaluer la robustesse des moments invariants 3D au bruit par translation, changement d'échelle et rotation, l'ensemble de test est dégradé par le bruit « sel et du poivre » avec des densités de bruits de 1%, 2%, 3%, 4% et 5%.

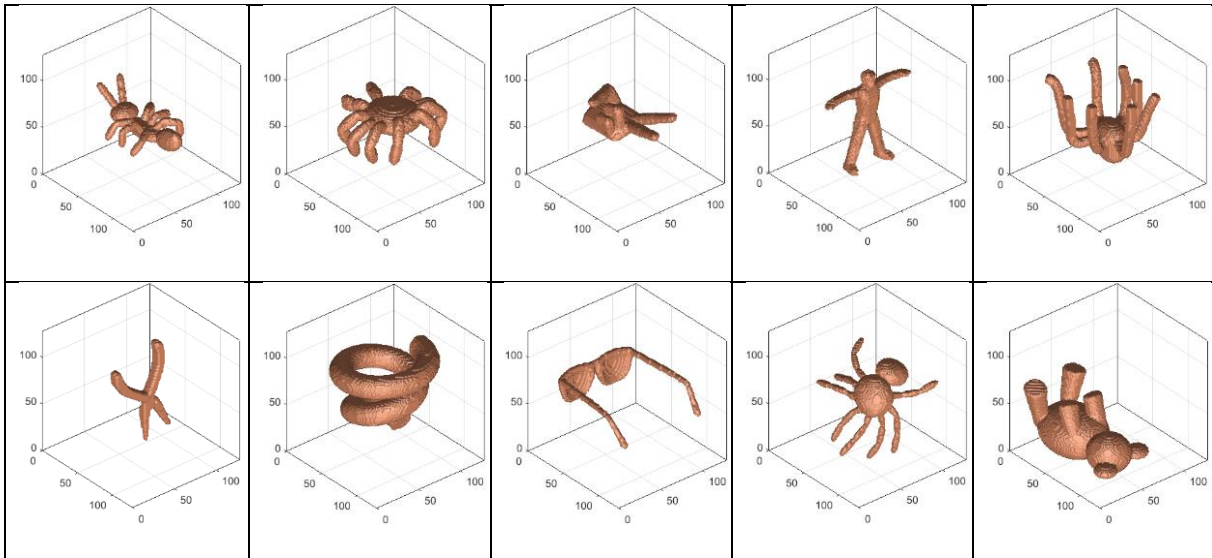


Figure V.11. Collection de 10 objets extraits de la base de données PSB utilisés comme ensemble d'apprentissage

Chapitre V

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	87.10	84.06	82.27	79.50	74.80	68.90	79.43
Tchebichef	88.66	85.67	84.02	81.36	75.43	69.71	80.80
Krawtchouk	89.78	87.21	85.00	81.63	75.72	70.34	81.61
Meixner	88.68	85.72	84.15	81.41	75.65	69.80	80.90
Charlier	89.36	87.48	85.42	81.90	76.07	70.56	81.79

Tableau V.3. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance euclidienne d_1

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	87.05	84.05	82.16	79.46	74.71	68.88	79.38
Tchebichef	88.64	85.66	84.00	81.35	75.37	69.66	80.78
Krawtchouk	89.76	87.17	84.98	81.57	75.65	70.29	81.57
Meixner	88.67	85.73	84.16	81.38	75.53	69.77	80.87
Charlier	89.35	87.47	85.41	81.85	75.89	70.54	81.75

Tableau V.4. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance du bloc de ville d_2

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	86.54	83.72	81.04	79.38	74.50	68.10	78.88
Tchebichef	88.00	84.58	83.24	81.18	74.87	69.64	80.25
Krawtchouk	88.13	86.57	84.32	81.30	75.03	69.83	80.86
Meixner	88.04	84.66	83.67	81.23	74.96	69.70	80.37
Charlier	88.42	86.75	84.87	81.42	75.33	70.11	81.15

Tableau V.5. Résultats de classification utilisant la méthode ICR basée sur la distance en corrélation d_3

Les performances de classification des moments invariants de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier sont obtenues par deux méthodes : la méthode ICR proposée et la méthode classique. Les résultats sont énumérés dans les tableaux 3-8.

Ces résultats montrent clairement l'efficacité des moments discrets invariants basés sur la méthode ICR proposée en termes de précision de reconnaissance des images 3D, par rapport à celles obtenues par la méthode classique, ces résultats confirment également que les moments invariants basés sur la méthode ICR proposée pourraient constituer un outil utile pour les tâches de classification d'objets 3D. Notez que la précision de la classification s'est améliorée pour les moments invariants de Hahn, Tchebichef, Krawtchouk, Meixner et Charlier avec une amélioration presque identique en utilisant le classificateur de distance du bloc de ville de 7,97%, 9,00%, 9,25%, 8,90% et 8,59%, et une amélioration de 8,10%, 8,84%, 8,84%, 8,56% et 8,52% en utilisant le classificateur de distance en corrélation, respectivement.

En termes de comparaison des moments, les moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation sont robustes, et leur précision de reconnaissance est meilleure que celle des moments invariants de Hahn, de Tchebichef, de Krawtchouk et de Meixner.

Chapitre V

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	80.47	77.65	74.57	70.20	65.88	60.00	71.46
Tchebichef	81.52	77.64	75.37	70.32	65.68	60.28	71.80
Krawtchouk	81.45	78.05	76.04	71.66	66.14	60.87	72.36
Meixner	81.34	77.51	76.00	70.86	65.74	60.56	72.00
Charlier	82.95	79.43	76.71	72.71	66.33	61.11	73.20

Tableau V.6. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance euclidienne d_1

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	80.46	77.66	74.44	70.18	65.84	60.09	71.44
Tchebichef	81.48	77.53	75.21	70.24	65.62	60.34	71.73
Krawtchouk	81.41	77.94	75.98	71.63	66.16	60.82	72.32
Meixner	81.32	77.53	75.94	70.80	65.62	60.55	71.96
Charlier	82.91	79.38	76.66	72.65	66.35	61.16	73.18

Tableau V.7. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance du bloc de ville d_2

Moments Invariants	Bruit sel et poivre						Moyenne %
	Sans bruit 0%	1%	2%	3%	4%	5%	
Hahn	79.95	77.48	74.12	69.40	64.10	59.67	70.78
Tchebichef	80.72	77.21	74.90	70.36	65.00	60.30	71.41
Krawtchouk	80.95	78.95	75.61	70.85	65.37	60.42	72.02
Meixner	80.85	78.98	75.40	70.35	65.05	60.25	71.81
Charlier	82.36	79.00	75.87	72.10	65.65	60.85	72.63

Tableau V.8. Résultats de la classification selon la méthode classique basée sur la distance en corrélation d_3

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode rapide et stable de calcul des moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation. Cette méthode consiste à extraire les invariants utilisant la représentation d'image 3D par cuboïde (ICR), où la complexité de calcul est réduite de 95%. Le calcul des moments invariants de Hahn, de Tchebichef, de Krawtchouk, de Meixner et de Charlier par cette méthode réduit considérablement le temps de calcul et augmente la précision de reconnaissance des objets 3D, avec une légère efficacité pour les moments de Charlier 3D. Ces descripteurs invariants sont utilisés avec succès pour le processus de classification d'objets 3D avec et sans bruits.

Conclusion générale

Le but essentiel de ce travail était de proposer des solutions aux problèmes qui limitent l'utilisation des moments orthogonaux discrets de Charlier pour l'analyse des images 2D/3D. On peut résumer les contributions comme suit :

- ✓ Proposition d'une méthode pour l'accélération du temps de calcul des moments orthogonaux discrets de Charlier en utilisant la formule de récurrence de Clenshaw.
- ✓ Proposition de deux algorithmes rapide et stable pour la reconstruction d'image 2D/3D en se basant sur les filtres numérique 2D/3D pour accélérer le temps de calcul des moments de Charlier et la représentation d'image 2D/3D par les blocs et les cuboïdes fixe pour assurer la stabilité numérique.
- ✓ Proposition d'une nouvelle approche pour la reconstruction rapide d'images 3D en utilisant les moments de Charlier 3D et la représentation d'images 3D par cuboïdes (ICR).
- ✓ Proposition d'une nouvelle méthode pour le calcul rapide et stable des moments invariants de Charlier 3D par translation, changement d'échelle et rotation à partir les moments invariants géométrique 3D.

Les perspectives ouvertes dans le cadre de ces travaux peuvent être résumées comme suit :

- ✓ Proposer une nouvelle approche pour le calcul rapide et stable des moments invariants de Charlier par rotation par la méthode directe pour la classification d'images 2D/3D.
- ✓ Sécurité des signaux et des images par combinaison des techniques de compression, cryptage et marquage basées sur les descripteurs moments.

Liste des publications

Articles dans des revues internationales avec comités de lecture (9)

1. **H. Karmouni**, A. Hmimid, T. Jahid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, & A. Rezzouk. (2018). Fast and Stable Computation of the Charlier Moments and Their Inverses Using Digital Filters and Image Block Representation. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 37(9), 4015–4033. *doi:10.1007/s00034-018-0755-2*
2. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, R. El Alami, H. Qjidaa, Fast 3D image reconstruction by cuboids and 3D Charlier's moments. *Journal of Real-Time Image Processing*, Springer, p. 1-17, 2019. *doi.org/10.1007/s11554-018-0846-0*
3. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa, Fast reconstruction of 3D images using the Charlier discrete orthogonal moments. *Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, Springer, p. 1-28, 2019. *doi.org/10.1007/s00034-019-01025-0*
4. **H. Karmouni**, T. Jahid, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, Fast computation of inverse Meixner moments transform using Clenshaw's formula. *Multimedia Tools and Applications*, p. 1-21, 2019. *doi.org/10.1007/s11042-019-07961-y*
5. T. Jahid, **H. Karmouni**, M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa, (2018). Fast Algorithm of 3D Discrete Image Orthogonal Moments Computation Based on 3D Cuboid. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. *doi:10.1007/s10851-018-0860-7*
6. T. Jahid, **H. Karmouni**, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, (2018). Fast computation of Charlier moments and its inverses using Clenshaw's recurrence formula for image analysis. *Multimedia Tools and Applications*. *doi:10.1007/s11042-018-6757-z*
7. T. Jahid, A. Hmimid, **H. Karmouni**, M. Sayyouri, H. Qjidaa, & A. Rezzouk, (2017). Image analysis by Meixner moments and a digital filter. *Multimedia Tools and Applications*, 77(15), 19811–19831. *doi:10.1007/s11042-017-5371-9*.
8. M. Yamni, A. Daoui, O. El ogri, **H. Karmouni**, M. Sayyouri, H. Qjidaa, "Influence of Krawtchouk and Charlier moment's parameters on image reconstruction and classification", *Procedia computer science*, vol. 148, p. 418-427, 2019. *doi:10.1016/j.procs.2019.01.054*

9. O. El ogri, A. Daoui, M. Yamni, **H. Karmouni**, M. Sayyouri, H. Qjidaa, “2D and 3D Medical Image Analysis by Discrete Orthogonal Moments”, *Procedia computer science*, 2019, vol. 148, p. 428-437., 2019. **doi:10.1016/j.procs.2019.01.055**

Papier soumis dans des revues internationales avec comités de lecture (2)

1. **H. Karmouni**, M. Yamni, O. El ogri, A. Daoui, M. Sayyouri, H. Qjidaa, Fast Computation of 3D Discrete Invariant Moments Based on 3D Cuboid for 3D Image Classification. *Soumis à Circuits, Systems and Signal Processing*.
2. **H. Karmouni**, M. Yamni, O. El ogri, A. Daoui, M. Sayyouri, H. Qjidaa, Fast Computation of 3D Meixner's Invariant Moments Using 3D Image Cuboid Representation for 3D Image Classification. *Soumis à Journal of Mathematical Imaging and Vision*.

Chapitre de livre (4)

1. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid, A. El affar & H. Qjidaa, “Image analysis by Hahn moments and a digital filter”, *International Conference on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development (AI2SD'2018)*, July 12-14 2018, Tanger – Morocco, **Multimedia processing and Mathematical modelling, Springer**, p. 707-718, 2018. **doi: 10.1007/978-3-030-11928-7_64**
2. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid, A. El affar & H. Qjidaa, “Fast and Stable Computation of the Tchebichef's Moments Using Image Block Representation and Clenshaw's Formula”, *International Conference on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development (AI2SD'2018)*, July 12-14 2018, Tanger – Morocco, **Multimedia processing and Mathematical modelling, Springer**, p. 261-273, 2018. **doi: 10.1007/978-3-030-11928-7_23**
3. O. El Ogri, **H. Karmouni**, M. Yamni, A. Daoui, M. Sayyouri, H. Qjidaa, “Fast and Stable Computation of Charlier-Meixner's Bivariable Moments”, *1st International Conference on Embedded Systems and Artificial Intelligence (ESAI'19)* May 02-03, 2019, Fez, Morocco, **Advances in Intelligent Systems and Computing (AISC), Springer, en cours de publication**.

4. A. Daoui, M. Yamni, **H. Karmouni**, O. El Ogri, M. Sayyouri, H. Qjidaa, , ‘‘Fast and Stable Bio-Signals Reconstruction Using Krawtchouk Moments’’, 1st International Conference on Embedded Systems and Artificial Intelligence (**ESAI'19**) May 02-03, 2019, Fez, Morocco, **Advances in Intelligent Systems and Computing (AISC)**, Springer, *en cours de publication*.

Communications internationales avec actes (11)

1. **H. Karmouni**, T. Jahid, Z. Lakhili, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa & A. Rezzouk, ‘‘Image Reconstruction by Krawtchouk Moments via Digital Filter’’, International Conference on Intelligent Systems and Computer Vision, ISCV'2017, April 17-18-19-20 2017, Fez – Morocco, **doi: 10.1109/ISACV.2017.8054958**.
2. **H. Karmouni**, T. Jahid, I. El affar, M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa & A. Rezzouk, ‘‘Image Analysis Using Separable Krawtchouk-Tchebichef's moments’’, International Conference On Advanced Technologies for Signal & Image Processing (Atsip'2017), May 22-24 2017, Fez – Morocco, **doi: 10.1109/ATSIP.2017.807558**.
3. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid, A. El affar & H. Qjidaa, ‘‘Image analysis by Hahn moments and a digital filter’’, International Conference on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development (AI2SD'2018), July 12-14 2018, Tanger – Morocco. **doi: 10.1007/978-3-030-11928-7_64**
4. **H. Karmouni**, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid, A. El affar & H. Qjidaa, ‘‘Fast and Stable Computation of the Tchebichef's Moments Using Image Block Representation and Clenshaw's Formula’’, International Conference on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development (AI2SD'2018), July 12-14 2018, Tanger – Morocco. **doi: 10.1007/978-3-030-11928-7_23**
5. T. Jahid, **H. Karmouni**, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, ‘‘Image moments and reconstruction by Krawtchouk via Clenshaw's recurrence formula’’, 3rd International Conference on Electrical and Information Technologies November 15-18 2017, Rabat – Morocco, **doi: 10.1109/EITech.2017.8255265**.
6. M. Sayyouri, A. Hmimid, **H. Karmouni**, H. Qjidaa & A. Rezzouk, ‘‘Image classification using separable invariant moments of Krawtchouk-Tchebichef’’, 12th International

- Conference of Computer Systems and Applications (AICCSA), November 17-20, 2015 Marrakech, Morocco, **doi: 10.1109/AICCSA.2015.7507142.**
7. M. Yamni, A. Daoui, O. El ogri, **H. Karmouni**, M. Sayyourib H. Qjidaa, “Influence of Krawtchouk and Charlier moment's parameters on image reconstruction and classification”, Second International Conference on Intelligent Computing in Data Sciences (ICDS 2018), October 03-04-05 2018, Fez-Morocco. **doi:10.1016/j.procs.2019.01.054**
 8. O. El ogri, A. Daoui, M. Yamni, **H. Karmouni**, M. Sayyourib H. Qjidaa, “2D and 3D Medical Image Analysis by Discrete Orthogonal Moments”, Second International Conference on Intelligent Computing in Data Sciences (ICDS 2018), October 03-04-05 2018, Fez-Morocco. **doi:10.1016/j.procs.2019.01.055**
 9. M. El Mallahi , H. Qjidaa, A. Berrahou, A. Mesbah ,**H. Karmouni**, A. Affar and A. Tahiri, “Radial Charlier Moment Invariants for 2D Object/Image Recognition”, 5th International Conference on Multimedia Computing and Systems (ICMCS'16), IEEE Conference, 29 September to 1 October 2016, Marrakech - Morocco, **doi: 10.1109/ICMCS.2016.7905531.**
 10. O. El Ogri, **H. Karmouni**, M. Yamni, A. Daoui, M. Sayyouri, H. Qjidaa, “Fast and Stable Computation of Charlier-Meixner's Bivariable Moments”, 1st International Conference on Embedded Systems and Artificial Intelligence (**ESAI'19**) May 02-03, 2019, Fez, Morocco, Springer, **en cours de publication.**
 11. A. Daoui, M. Yamni, **H. Karmouni**, O. El Ogri, M. Sayyouri, H. Qjidaa, , ‘‘Fast and Stable Bio-Signals Reconstruction Using Krawtchouk Moments’’, 1st International Conference on Embedded Systems and Artificial Intelligence (**ESAI'19**) May 02-03, 2019, Fez, Morocco, Springer **en cours de publication.**

Références

- [Abdulhussain et al, 2017a] S. H. Abdulhussain, A. R. Ramli, B. M. Mahmmud, S. A. R. Al-Haddad & W. A. Jassim, "Image edge detection operators based on orthogonal polynomials". *International Journal of Image and Data Fusion*, 8(3), 293-308, 2017.
- [Abdulhussain et al, 2017b] S.H. Abdulhussain, A.R. Ramli, S.A.R. Al-Haddad, B.M. Mahmmud, W.A Jassim, "On computational aspects of Tchebichef polynomials for higher polynomial order". *IEEE Access* 5, 2470–2478, 2017.
- [Abdulhussain et al, 2018] S. H. Abdulhussain, A. R. Ramli, S. A. R. Al-Haddad, B. M. Mahmmud & W. A. Jassim, "Fast Recursive Computation of Krawtchouk Polynomials". *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 60(3), 285-303, 2018.
- [Batioua et al, 2017] I. Batioua, R. Benouini, K. Zenkour et al, "3D image analysis by separable discrete orthogonal moments based on Krawtchouk and Tchebichef polynomials". *Pattern Recognition*, 2017, vol. 71, p. 264-277.
- [Benouini et al, 2018] R. Benouini, I. Batioua, K. Zenkour, S. Najah & H. Qjidaa, "Efficient 3D object classification by using direct Krawtchouk moment invariants". *Multimed Tools Appl*, 1–26, 2018.
- [Bronstein et al, 2005] A.M. Bronstein, M.M. Bronstein, R. Kimmel, "Three -Dimensional Face Recognition". *International Journal of Computer Vision*. vol 64(1), 1, pp. 5-30, 2005.
- [Flusser & Suk, 1993] J. Flusser, T. Suk, "Pattern recognition by affine moment invariants". *Pattern Recognition* 26, 1, pp. 167-174, 1993.
- [Flusser et al, 2016] J. Flusser, T. Suk, B. Zitova, "2D and 3D Image Analysis by Moments. Wiley, in press, 2016.
- [Guo-bao Wang et al, 2006] G. Wang, and S. Wang, "Recursive computation of Tchebichef moment and its inverse transform". *Pattern Recognition* 39.1 (2006): 47-56.
- [Hatamian, 1986] M. Hatamian, "A real-time two-dimensional moment generating algorithm and its single chip implementation". *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.* 34 (3) (1986) 546–553.
- [Hmimid et al, 2014] A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, "Image classification using a new set of separable two-dimensional discrete orthogonal invariant moments". *J. Electron. Imag.* 23(1), 013026 (2014).

[Hmimid et al, 2015] A. Hmimid, M. Sayyouri and H. Qjidaa, "Fast computation of separable two-dimensional discrete invariant moments for image classification". *Pattern Recognition*. 48(2), Pages 509–521, February 2015.

[Honarvar et al, 2013] B. Honarvar, R. Paramesran, C.-L. Lim, "The fast recursive computation of Tchebichef moment and its inverse transform based on Z-transform". *Digit. Signal Process.* **23**(5), 1738–1746 (2013).

[Honarvar et al, 2014a] B. Honarvar, J. Flusser, "Fast computation of Krawtchouk moments". *Inf. Sci.* **288**(20), 73–86 (2014).

[Hosny, 2007a] K. M. Hosny, "Exact & fast computation of geometric moments for gray level images". *Appl. Math. Comput.* 189, 1214–1222 (2007).

[Hosny, 2007b] M.K. Hosny, "Exact Legendre moment computation for gray level images". *Pattern Recognition* 40, 12, pp. 3597-3605, 2007.

[Hosny, 2011a] M.K. Hosny, "Image representation using accurate orthogonal Gegenbauer moments". *Pattern Recognition Letters*, Volume 32, Issue 6, 15 April 2011, Pages 795-804.

[Hosny et al, 2012] M.K. Hosny, M. Hafez, "An algorithm for fast computation of 3D zernike moments for volumetric images". *Math. Probl. Eng.*, Volume 2012: 17, (Article ID 353406).

[Hosny et al, 2017] M.K. Hosny, A. Salah, H.I. Saleh, M. Sayed, "Fast computation of 2D and 3D legendre moments using multi-core CPUs and GPU parallel architectures". *J. Real Time Image Process* (2017). [https:// doi.org/10.1007/s11554-017-0708-1](https://doi.org/10.1007/s11554-017-0708-1).

[Hu, 1962] M.K. Hu, "Visual pattern recognition by moment invariants," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-8, pp. 179-187, Feb.1962.

[Jahid et al., 2017a] T. Jahid, H. Karmouni, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, "Image moments and reconstruction by Krawtchouk via Clenshaw's recurrence formula", In *Electrical and Information Technologies (ICEIT)*, 2017 International Conference on (pp. 1-7), IEEE, 2017, November.

[Jahid et al, 2017b] T. Jahid, A. Hmimid, H. Karmouni, M. Sayyouri, H. Qjidaa and A. Rezzouk, "Image analysis by Meixner moments and a digital filter". *Multimed. Tools Appl.* 77(15), 19811–19831 (2018).

[Jahid et al, 2018a] T. Jahid, H. Karmouni, A. Hmimid, M. Sayyouri, H. Qjidaa, "Fast computation of Charlier moments and its inverses using Clenshaw's recurrence formula for image analysis". *Multimedia Tools and Applications* 78.9: 12183-12201, 2019.

[Jahid et al, 2018b] T. Jahid, H. Karmouni, M. Sayyouri et al, "Fast Algorithm of 3D Discrete Image Orthogonal Moments Computation Based on 3D Cuboid". *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2018, p. 1-21.

[Jerome, 2009] R. Jerome, “Improving Zernike Moments Comparison for Optimal Similarity & Rotation Angle Retrieval”. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence 31, pp. 627-636, 2009.

[Karakasis et al, 2013] E.G. Karakasis, G.A. Papakostas, D.E. Koulouriotis & V.D. Tourassis, “Generalized Dual Hahn Moment Invariants”. Pattern Recognition, vol. 46, no. 7, pp. 1998-2014, 2013.

[Karmouni et al, 2017] H. Karmouni, T. Jahid, I. El affar, M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa & A. Rezzouk, “Image Analysis Using Separable Krawtchouk-Tchebichef’s moments”. International Conference On Advanced Technologies for Signal & Image Processing, Fez – Morocco, 2017.

[Karmouni et al, 2018] H. Karmouni, A. Hmimid, T. Jahid, M. Sayyouri, H. Qjidaa and A. Rezzouk, “Fast and stable computation of the Charlier moments and their inverses using digital filters and image block representation”. Circuits Syst. Signal Process : 1–19. (2018).

[Karmouni et al, 2019a] H. Karmouni, T. Jahid, M. Sayyouri et al, "Fast 3D image reconstruction by cuboids and 3D Charlier’s moments". Journal of Real-Time Image Processing: 1-17, 2019.

[Karmouni et al, 2019b] H. Karmouni, T. Jahid, M. Sayyouri, A. Hmimid and H. Qjidaa, “Fast Reconstruction of 3D Images Using Charlier Discrete Orthogonal Moments”. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, p. 1-28.

[Koekoek et al, 2010] R. Koekoek, P. A. Lesky, & R. F. Swarttouw, “Hypergeometric Orthogonal Polynomials & Their q-Analogues”. Springer Monographs in Mathematics, Library of Congress Control Number: 2010923797 (Springer-Verlag, 2010).

[Kotoulas & Andreadis, 2006] L. Kotoulas and I. Andreadis, “Fast computation of Chebyshev moments”. IEEE Trans- action on Circuits and System for Video Technology 16: 2006, 884–888.

[Li et al, 2011] Li, G.-X., Yang, B., Dai, M, ”Multi-scale image description with rotation invariants of Gaussian-Hermite moments”. International Conference on Wavelet Analysis & Pattern Recognition (ICWAPR 2011) Guilin, China, 10 - 13 July 2011, pp. 12-17.

[Liao & Pawlak, 1996] Liao, S.X., Pawlak, M, “On image analysis by moments”. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence 18, 3, pp. 254-266, 1996.

[Luo et al., 1993] L.M. Luo, C. Hamitouche, J.L. Dillenseger, J.L. Coatrieux. "A moment-based three-dimensional edge operator". IEEE Trans. on Biomedical Engineering 40, 7, pp. 693-703, 1993.

[McGill, 2017] <http://www.cim.mcgill.ca/~shape/benchMark/airplane.html>. (2017). Accessed 31 July 2017.

[MPEG-7, 2014] MPEG-7 DATA SET, <http://www.dabi.temple.edu/shape/MPEG7/dataset.html>.

[Mukundan & Ramakrishnan, 1998] R. Mukundan, K.R. Ramakrishnan, "Moment functions in image analysis Theory & applications". World scientific publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998.

[Mukundan et al., 2001] R. Mukundan, S. H. Ong, & P. A. Lee, "Image analysis by Tchebichef moments". IEEE Trans. Image Processing, vol. 10, no. 9, pp. 1357-1364, 2001.

[Nikiforov & Uvarov, 1988] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, "Special functions of Mathematical Physics". Birkhauser, Basel, Boston, 1988.

[Nikiforov et al, 1991] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, & V. B. "Uvarov, Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable". Springer, 1991.

[Papakostas et al, 2009] G.A. Papakostas, D.E. Koulouriotis & E.G. Karakasis, "A Unified Methodology for Efficient Computation of Discrete Orthogonal Image Moments". Information Sciences, vol. 179, no. 20, pp. 3619-3633, 2009.

[Papakostas et al, 2010] G. A. Papakostas, E. G. Karakasis, & D. E. Koulouriotis, "Accurate and speedy computation of image Legendre moments for computer vision applications". Image and Vision Computing, 28(3), 414-423, 2010.

[Raj et al, 2007] P. Raj, A. Venkataramana, "Fast computation of inverse Krawtchouk moment transform using Clenshaw's recurrence formula." In 2007 IEEE International Conference on Image Processing, vol. 4, pp. IV-37. IEEE, 2007.

[Sadjadi & Hall, 1978] F.A. Sadjadi, E.L. Hall, "Numerical computation of moment invariants for scene analysis". Proc. IEEE Conf. on Pattern Recognition & Image Processing, Chicago, pp. 181-187, 1978.

[Sadjadi & Hall, 1980] F.A. Sadjadi, E.L. Hall, "Three-Dimensional Moment Invariants". IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence PAMI-2(2), 2, pp. 127-136, 1980.

[Sayyouri et al, 2012] M. Sayyouri, A. Hmimd, & H. Qjidaa, "A fast computation of Hahn moments for binary & gray-scale images". In IEEE International Conference on Complex Systems (ICCS'12), Agadir, Morocco, November 5–6, 2012.

[Sayyouri et al, 2013] M. Sayyouri, A. Hmimid, & H. Qjidaa, "Improving the performance of image classification by Hahn moment invariants". J. Opt. Soc. Am. A (JOSA A) 30, 2381-2394 (2013).

[Sayyouri et al, 2014a] M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa, “A Fast Computation of Novel Set of Meixner Invariant Moments for Image Analysis”. *Circuits Syst Signal Process*, Springer 2014, p. 1-26. DOI 10.1007/s00034-014-9881-7, 2014.

[Sayyouri et al, 2014b] M. Sayyouri, A. Hmimid, H. Qjidaa, “Image analysis using separable discrete moments of Charlier-Hahn”. *Multimedia tools and applications*, Volume 75, Issue 1, pp 547–571, 2014.

[Shu et al, 2010] HZ. Shu, H. Zhang, BJ. Chen, P. Haigron, LM. Luo, “Fast computation of Tchebichef moments for binary and gray-scale images”. *IEEE Trans Image Process* 19(12):3171–3180, 2010.

[Spiliotis & Mertzios, 1998] I. M. Spiliotis & B. G. Mertzios, “Real-time computation of two-dimensional moments on binary images using image bloc representation”. *IEEE Trans. Image Process.* 7, pp. 1609–1615, 1998.

[Teague, 1980] M.R. Teague, "Image analysis via the general theory of moments". *Journal of Optical Society America* 70, pp. 920-930, 1980.

[Teh & Chin, 1988] C.H. Teh, R.T. Chin, "On Image Analysis by the Methods of Moments". *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence* 10, 4, pp. 496-513, 1988.

[Teukolsky et al, 1992] S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et al, *Numerical Recipes in C: “The Art of Scientific Computing”*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.

[Tuceryan, 1994] M. Tuceryan, "Moment based texture segmentation". *pattern Recognition Letters* 15, 7, pp. 659-668, 1994.

[Tuceryan & Jain, 1998] M. Tuceryan, A.K. Jain, “Texture Analysis”. *The Handbook of Pattern Recognition & Computer Vision* (2nd Edition), pp. 235-276, 1998.

[Wu et al, 2013] H. Wu, J. L. Coatrieux, and H. Shu, “New algorithm for constructing and computing scale invariants of 3D Tchebichef moments”. *Math. Probl. Eng.* 2013, 813606, 2013.

[Yang et al., 2011] B. Yang, G. Li, H. Zhang, M. Dai, "Rotation & translation invariants of Gaussian-Hermite moments". *Pattern Recognition Letters* 32, 9, pp. 1283-1298, 2011.

[Yang & Dai, 2011] B. Yang, M. Dai, "Image analysis by Gaussian–Hermite moments". *Signal Processing* 91, 10, pp. 2290-2303, 2011.

[Yang & Dai, 2012] B. Yang, M. Dai, "Image reconstruction from continuous Gaussian–Hermite moments implemented by discrete algorithm". *Pattern Recognition* 45, 4, pp. 1602-1616, 2012.

[Yap et al, 2003] P.T. Yap, R. Paramesran, S.H. Ong, "Image analysis by Krawtchouk moments". *IEEE Trans Image Processing* 12 (2003) 1367–1377.

[Yap et al., 2007] P. T. Yap, P. Raveendran, & S. H. Ong, "Image analysis using Hahn moments". IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 29, 2057–2062, (2007).

[Yokoya & Levine, 1989] N. Yokoya, M.D. Levine, "Range image segmentation based on differential geometry: a hybrid approach". IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence 11, 6, pp. 643-649, 1989.

[Zhi et al, 2018] R. ZHI, L. CAO and G. CAO, "Translation and scale invariants of Krawtchouk moments". Information Processing Letters, vol. 130, p. 30-35, 2018.

[Zhu et al, 2007a] H. Zhu, H. Shu, J. Liang, L.M. Luo, J.L. Coatrieux, "Image analysis by discrete orthogonal Racah moments". Signal Processing 87, 4, pp. 687-708, 2007.

[Zhu et al, 2007b] H. Zhu, H. Shu, J. Zhou, L. Luo, & J. L. Coatrieux, "Image analysis by discrete orthogonal dual Hahn moments". Pattern Recogn. Lett. 28, 1688–1704, (2007).

[Zhu et al, 2010] H. Zhu, M. Liu, H. Shu, H. Zhang, L. Luo, "General form for obtaining discrete orthogonal moments". Image Processing, IET, vol.4, no.5, pp.335,352, October 2010.