



**Université Sidi Mohammed Ben Abdellah**  
**Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès**  
**Centre d'Études Doctorales**  
**"Sciences et Technologies"**

**Formation Doctorale : STIC**

**Discipline : Physique**

**Spécialité : Génie Électrique**

**Laboratoire d'Électronique, Signaux-Systèmes et Informatique**

## **THÈSE DE DOCTORAT**

Présentée par

**Nabil EL FEZAZI**

# **Contrôle des systèmes à retards avec saturation d'entrée: théories et applications**

Soutenue le 14/12/2018 devant le jury composé de :

<i>Pr. Abdellah BENZAOUIA</i>	<i>Faculté des Sciences Semlalia - Marrakech</i>	<i>Président</i>
<i>Pr. Mohamed BENCHAYOUN</i>	<i>Faculté des Sciences Semlalia - Marrakech</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Pr. Mohamed SALHI</i>	<i>École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Meknès</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Pr. Mohammed ALFIDI</i>	<i>École Nationale des Sciences Appliquées - Fès</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Pr. Ahmed EL HAJJAJI</i>	<i>Université de Picardie Jules Verne Amiens - France</i>	<i>Membre</i>
<i>Pr. Jérôme BOSCHE</i>	<i>Université de Picardie Jules Verne Amiens - France</i>	<i>Membre</i>
<i>Pr. Abdelaziz HMAMED</i>	<i>Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès</i>	<i>Membre</i>
<i>Pr. Ismail BOUMHIDI</i>	<i>Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès</i>	<i>Membre</i>
<i>Pr. El Houssaine TISSIR</i>	<i>Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>Pr. Fatima EL HAOUSSI</i>	<i>Faculté Pluridisciplinaire - Nador</i>	<i>Codirectrice de thèse</i>

# Remerciements

---

Un moment émouvant pour le doctorant est le jour où il entreprend d'écrire ses remerciements. Tout d'abord, cela signifie que la fin est proche, ce qui est en soi une très bonne nouvelle. C'est également l'occasion de verser une ultime larme nostalgique au moment de quitter l'insouciance étudiante pour entrer de plain-pied dans la vraie vie. Mais trêve d'apitoiements, venons-en aux faits ! Ce manuscrit concrétise des années de travail au cours desquelles j'ai acquis de nombreuses connaissances scientifiques développées par des méthodes de travail rigoureuses. Cela peut paraître un peu prétentieux, mais il faut bien essayer parfois de se donner un air sérieux, et il n'est jamais désagréable de se faire mousser quelque peu ! Cependant, ma soudaine accession à la célébrité ne me fait pas oublier que de nombreuses personnes se sont impliquées d'une manière ou d'une autre dans la réalisation des travaux présentés ici et ne sont donc pas étrangères aux résultats obtenus. Des liens professionnels ou personnels forts se sont souvent tissés avec elles, et je tiens par ces quelques lignes à les remercier chaleureusement.

J'ai effectué ma thèse au Laboratoire d'Électronique, Signaux-Systèmes et Informatique (LESSI) au sein du département de physique à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz (FSDM) de Fès. Je remercie donc en premier lieu Monsieur Abdelaziz Hmamed, directeur du Laboratoire, pour son accueil et la confiance qu'il m'a accordée tout au long de la thèse. J'ai pu mesurer à quel point le fait de disposer du soutien de sa hiérarchie était important et sécurisant. Mes remerciements vont également à Monsieur Ismail Boumhidi, le directeur actuel, qui a suivi le processus en toute responsabilité.

Je tiens à remercier tout particulièrement les Professeurs El Houssaine Tissir et Fatima El Haoussi pour ses investissements personnels tout au long de ces années, ses compétences théoriques mais également pratiques, et surtout la confiance qu'ils m'ont accordées alors que je n'étais qu'un jeune étudiant en recherche d'avenir. Merci chers Professeurs pour votre encadrement irréprochable, votre constante disponibilité et votre grande gentillesse. Je remercie également le jury et je suis très honoré de soutenir mon travail devant ses membres.

Je remercie chaleureusement Monsieur Fernando Augusto Bender, Professeur à l'Université de Caxias do Sul au Brésil, Monsieur Fernando Tadeo, Professeur à l'Université de Valladolid en Espagne et Madame Teresa Alvarez, Professeure à l'Université de Valladolid en Espagne, pour ses aides et ses soutiens et ses collaborations inconditionnels.

Sur le plan personnel, je remercie ma mère, qui est la première responsable de ma réussite. Je souhaite lui exprimer ici toute ma gratitude et j'espère qu'il trouvera en ce manuscrit la concrétisation de longues années d'études pendant lesquelles il m'a toujours

## *Remerciements*

---

soutenu. Je remercie enfin l'ensemble de ma famille et mes amis thésards, ainsi que toutes les personnes que j'ai rencontrées au détour d'un chemin, d'un voyage, ou tout simplement au coin de la rue, et avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments.

# Avant-propos

---

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au LESSI à la FSDM de Fès, sous la direction des Professeurs El Houssaine Tissir et Fatima El Haoussi. Ce travail a donné lieu aux publications et communications suivantes :

## Dans les journaux :

1. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2015). Delay dependent anti-windup synthesis for time-varying delay systems with saturating actuators. *International Journal of Computer Applications*, **111**(1), 1–6.
2. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2017). Robust stabilization using LMI techniques of neutral time-delay systems subject to input saturation. *Journal of Physics : Conference Series*, **783**(1), 012031.
3. El Fezazi, N., Tissir, E. H., El Haoussi, F., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2017). Control based on saturated time-delay systems theory of Mach number in wind tunnels. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **37**(4), 1505–1522.
4. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2017). Design of robust  $H_\infty$  controllers for congestion control in data networks. *Journal of The Franklin Institute*, **354**(17), 7828–7845.
5. El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2018). Observer-based controller design for Mach number in wind tunnels. *International Journal of Ecology & Development*, **33**(1), 1–18.
6. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2018). Congestion control of data network by using anti-windup approach. *International Journal of Ecological Economics and Statistic*, **39**(1), 37–53.
7. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2018). Robust stabilization using a sampled-data strategy of uncertain neutral state-delayed systems subject to input limitations. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **28**(1), 111–122.
8. El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2018). Anti-windup design for state delayed discrete-time systems with input saturation. *International Journal of Ecology & Development*, **33**(2), 145–155.
9. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Bender, F. A., and Alvarez, T. (2018). Multi class AQM on a TCP/IP router : a control theory approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, accepté.

**Dans les conférences internationales :**

1. Zakaria, M. I., Husain, A. R., Mohamed, Z., El Fezazi, N., and Shah, M. B. N. (2015). Lyapunov-krasovskii stability condition for system with bounded delay-an application to steer-by-wire system. *In proceedings of the 5th IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, Penang, Malaysia*, 543–547.
2. El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2015). Delay-dependent anti-windup design to address challenges in AQM congestion control for TCP/IP networks. *In proceedings of the 1st International Conference Advanced Information Technology, Services and Systems, Settat, Morocco*, 309–313.
3. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Husain, A. R., and Zakaria, M. I. (2016). Delay-dependent robust anti-windup synthesis approach to AQM in TCP/IP networks. *In proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Electrical and Information Technologies, Tanger, Morocco*, 294–299.
4. El Fezazi, N., Lamrabet, O., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2016). Robust controller design for congestion control in TCP/IP routers. *In proceedings of the 5th IEEE International Conference on Systems and Control, Marrakesh, Morocco*, 243–249.
5. El Fezazi, N., Alaoui, B. S., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2016). A dynamic anti-windup AQM for congestion control in internet. *In proceedings of the 13th ACS/IEEE International Conference on Computer Systems and Applications, Agadir, Morocco*, 1–6.
6. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2016). Robust stabilization using LMI techniques of neutral time-delay systems subject to input saturation. *In proceedings of the 13th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Lille, France*, 1-6.
7. Lamrabet, O., El Fezazi, N., El Haoussi, F., and Tissir, E. H. (2017). Using input delay approach for synthesizing an anti-windup compensator to AQM in TCP/IP networks. *In proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing, Fez, Morocco*, 1–6.
8. El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2017). Observer-based control for quadruple tank process. *In proceedings of the 14th IEEE International Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Bucharest, Romania*, 1-6.
9. El Fezazi, N., Er Rachid, I., Tissir, E. H., El Haoussi, F., Alvarez, T., and Bender, F. A. (2018). Anti-windup compensation in TCP/IP routers : a multi-delay feedback systems approach. *In proceedings of the Springer International Conference on Big Data and Smart Digital Environment, Casablanca, Morocco*, 1-10.

# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
Réseaux TCP/IP . . . . .	3
Système QTP . . . . .	4
Technologie SbW . . . . .	4
Dynamique du MN . . . . .	5
<b>1 Introduction aux modèles et outils utilisés</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Modélisation des systèmes à retards . . . . .	9
1.2.1 Systèmes de type retardé . . . . .	9
1.2.2 Catégories de retards . . . . .	9
1.3 Stabilité . . . . .	10
1.3.1 Seconde méthode de Lyapunov . . . . .	11
1.3.2 Approche par fonctionnelles de Krasovskii . . . . .	11
1.4 Problèmes discutés et outils mathématiques . . . . .	12
1.4.1 Saturation d'entrée . . . . .	12
1.4.2 Stabilisation robuste . . . . .	14
1.4.3 Anti-windup . . . . .	14
1.4.4 Modèles pour la non-linéarité de saturation . . . . .	15
1.4.5 Outils mathématiques . . . . .	16
1.5 Conclusion . . . . .	18
<b>2 Description et modélisation</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Réseaux de communication . . . . .	19
2.2.1 Modèle TCP/IP . . . . .	19
2.2.2 Modèle dynamique . . . . .	20
2.2.3 Linéarisation et modélisation . . . . .	21
2.2.4 Trafic à multi-classes . . . . .	22
2.3 Système QTP . . . . .	23
2.3.1 Modèle dynamique . . . . .	23
2.3.2 Représentation d'état et discrétisation . . . . .	25

2.4	Technologie SbW . . . . .	27
2.4.1	Description détaillée . . . . .	27
2.4.2	Modèle dynamique . . . . .	28
2.4.3	Représentation d'état . . . . .	31
2.5	Dynamique du MN dans un WT . . . . .	32
2.5.1	Description détaillée . . . . .	32
2.5.2	Modèle dynamique . . . . .	33
2.5.3	Modélisation . . . . .	34
2.6	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Conception d'un contrôleur pour les réseaux TCP/IP</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Formulation du problème . . . . .	37
3.3	Résultats obtenus . . . . .	38
3.3.1	Trafic à multi-classes . . . . .	38
3.3.2	Contraintes d'implémentation . . . . .	39
3.3.3	Cas particulier . . . . .	40
3.3.4	Problème d'optimisation . . . . .	41
3.4	Exemples illustratifs . . . . .	42
3.5	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Conception d'un contrôleur basé sur un observateur pour le système QTP</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Formulation du problème . . . . .	47
4.3	Résultats obtenus . . . . .	48
4.3.1	Résultats de stabilité . . . . .	48
4.3.2	Cas simple . . . . .	50
4.3.3	Problème d'optimisation . . . . .	51
4.4	Exemples illustratifs . . . . .	52
4.5	Conclusion . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Conception d'un contrôleur pour la technologie SbW dans un véhicule</b>	<b>57</b>
5.1	Introduction . . . . .	57
5.2	Formulation du problème . . . . .	57
5.3	Résultats obtenus . . . . .	58
5.3.1	Résultats de stabilité . . . . .	58
5.3.2	Problème d'optimisation . . . . .	61
5.4	Exemples illustratifs . . . . .	62
5.5	Conclusion . . . . .	64

<b>6 Conception d'un contrôleur pour la dynamique du MN dans un WT</b>	<b>65</b>
6.1 Introduction . . . . .	65
6.2 Formulation du problème . . . . .	65
6.3 Résultats obtenus . . . . .	66
6.3.1 Résultats de stabilité . . . . .	66
6.3.2 Problème d'optimisation . . . . .	68
6.4 Exemples illustratifs . . . . .	69
6.5 Conclusion . . . . .	70
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>71</b>
<b>Annexe</b>	<b>75</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>87</b>
<b>Résumé</b>	<b>97</b>
<b>Abstract</b>	<b>99</b>



# Notations

---

## Notations principales :

$\mathfrak{R}$  : L'ensemble des nombres réels ;

$\mathfrak{R}_+$  : L'ensemble des nombres réels non-négatifs ;

$\mathfrak{R}^n$  : L'espace réel de dimension  $n$  ;

$\mathfrak{R}^{n \times m}$  : L'ensemble des matrices réelles de dimensions  $n \times m$  ;

$A^T$  : La matrice transposée de  $A$  ;

$A_{(i)}$  : La  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ ,  $i = 1, \dots, m$  ;

$A - B > 0$  : Signifie que la matrice  $A - B$  est définie positive ;

$A - B \geq 0$  : Signifie que la matrice  $A - B$  est semi définie positive ;

$\bar{\lambda}$  : La valeur propre maximale de la matrice  $A$  ;

$\text{diag}\{A_1, \dots, A_m\}$  : Désigne la matrice bloc-diagonale pour laquelle les matrices de blocs-diagonales sont les  $A_i$  ;

$*$  : Ce symbole représente des blocs symétriques dans l'expression d'une matrice ;

$\text{tr}(A)$  : La trace de la matrice  $A$  ;

$I$  : La matrice identité de dimension appropriée ;

$0$  : Indique le scalaire nul ou la matrice nulle de dimension appropriée ;

$x \geq y$  avec  $x, y \in \mathfrak{R}^n$  : signifie que  $x_{(i)} - y_{(i)} \geq 0$  ;

$\text{Co}\{x_1, \dots, x_n\}$  : L'enveloppe convexe définie par les sommets  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$  ;

$|x|$  : Le vecteur composé par les valeurs absolues des composantes de  $x$ . La même notation sera utilisée pour la matrice  $A$ , c'est à dire  $|A|$  ;

$\|x\|$  : La norme euclidienne du vecteur  $x$ , c'est à dire  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$  ;

$\|x\|_2$  : La norme  $\mathcal{L}_2$  du vecteur  $x$ , c'est à dire  $\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty x^T x dt}$  ;

$\text{sign}(u)$  : La fonction signe du vecteur  $u \in \mathfrak{R}^m$  ;

$\mathcal{C}$  : L'ensemble des fonctions continues de  $[-\tau(t), 0]$  dans  $\mathfrak{R}^n$  ;

$\phi$  : La fonction qui appartient à  $\mathcal{C}$  ;

$\delta = \{\max_{[-\tau(t), 0]} \|\phi\|, \max_{[-\tau(t), 0]} \|\dot{\phi}\|\}$ .

## Notations particulières :

Les vecteurs et les matrices sont définis avec des crochets comme suit :

Pour  $x \in \mathfrak{R}^n$  on obtient  $x = \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{bmatrix}$  ;

Pour  $A \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  on obtient  $A = \begin{bmatrix} A_{(1,1)} & \dots & A_{(1,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(n,1)} & \dots & A_{(n,m)} \end{bmatrix}$ .

**Acronymes :**

LMI : Linear Matrix Inequality (inégalité matricielle linéaire) ;

BMI : Bilinear Matrix Inequality (inégalité matricielle bilinéaire) ;

L-K : Lyapunov-Krasovskii ;

QoS : Quality of Service (qualité de service) ;

AQM : Active Queue Management (gestion active de la file d'attente) ;

TCP : Transmission Control Protocol (protocole de contrôle de transmission) ;

IP : Internet Protocol (protocole d'Internet) ;

QTP : Quadruple Tank Process (processus de quadruple réservoir) ;

SbW : Steer-by-Wire (direction par fil) ;

ECU : Electronic Control Unit (unité de contrôle électronique) ;

MN : Mach Number (nombre de Mach) ;

WT : Wind Tunnel (soufflerie) ;

# Introduction générale

---

Cette thèse s'inscrit dans une thématique pluridisciplinaire explorant les liens existants entre la théorie du contrôle et une classe de réseaux informatiques, de système QTP, de technologie SbW dans un véhicule et de dynamique de MN dans un WT. Comme le suggère le titre de ce mémoire, l'enjeu de ce travail de recherche est double. Il consiste d'une part à construire des critères à minimum de pessimisme pour l'analyse de stabilité des systèmes présentant des retards dans leur dynamique et soumis à la saturation d'entrée et à la perturbation. D'autre part, il propose d'employer les outils théoriques ainsi développés, dans le cadre de l'Automatique, pour le contrôle de congestion dans un routeur lors de communications TCP, de niveau d'eau dans des réservoirs, de dynamique d'un véhicule et de MN dans un WT. Notre thématique de recherche se compose donc à la fois d'un aspect fondamental, constitué par la recherche de conditions générales de stabilité pour la classe de systèmes considérés et d'un aspect applicatif. Nous avons choisi d'orienter cette introduction suivant le second aspect afin de motiver l'ensemble de notre étude et d'appréhender au mieux la problématique.

## Réseaux TCP/IP

Les exigences croissantes en matière de performance nécessitent une meilleure gestion des ressources réseau existantes pour satisfaire les nouveaux utilisateurs. En ce sens, un mécanisme d'AQM est apparu comme un moyen efficace d'ajuster le comportement TCP, en supprimant les paquets de trafic pour réguler en douceur le débit et la variation du délai qui menace aujourd'hui les services de réseau. Donc, des techniques de la théorie du contrôle, dont le plus retentissant jusqu'ici est le contrôleur PI<sup>1</sup>, sont introduites pour arriver à contrôler la congestion du trafic internet et répondre aux demandes de la QoS des utilisateurs et des applications et elles sont fondées sur un modèle fluide<sup>2</sup>. D'autre part, puisque l'action de contrôle dans un mécanisme d'AQM détermine la probabilité d'éjection, qui est clairement un nombre réel borné entre  $[0, 1]$ , on ne peut pas avoir un mécanisme réaliste qui ne tient pas en compte de la saturation d'entrée<sup>3</sup>. Aussi, les travaux de la littérature ne considèrent que le trafic homogène, c'est-à-dire qu'ils ne différencient pas un flux TCP d'un autre. Ainsi, le trafic hétérogène est traité dans le présent travail,

---

1. Hollot et al. (2001)

2. Misra et al. (2000)

3. Bender (2013), Bender (2014), Binotti and Bender (2014), Binotti and Bender (2016), Borsoi and Bender (2012), El Fezazi et al. (2015b), El Fezazi et al. (2016a), El Fezazi et al. (2016b), El Fezazi et al. (2016c), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2018b), El Fezazi et al. (2018c), Lamrabet et al. (2017)

en considérant plusieurs classes de trafic qui traversent le routeur où chaque classe avec sa propre politique d'éjection de paquets, sa longueur de la file d'attente, son partage de la bande passante et son temps d'aller-retour pour dépasser l'état antérieur de l'art dans ce domaine.

## **Système QTP**

Les systèmes technologiques d'aujourd'hui s'appuient sur des systèmes de contrôle pour atteindre des niveaux élevés de performance et de fiabilité. Dans certains modèles réels, le contrôle par rétroaction d'état pourrait échouer à garantir la stabilité lorsque certaines variables d'état du système ne sont pas mesurables. Pour faire face à de telles faiblesses dans ce système, un nouveau contrôleur basé sur un observateur a été développé pour stabiliser ce système et assurer un certain niveau de performance. D'autre part, le système QTP a attiré récemment l'attention car il présente des caractéristiques d'intérêt à la fois dans la recherche de contrôle et dans l'éducation<sup>4</sup>. Donc, il est important de concevoir un contrôleur qui répond aux objectifs de performance sans ignorer le retard inévitable dans les variables de processus. De plus, une entrée saturée existe généralement dans de nombreuses applications de contrôle pratiques et alors son effet doit également être pris en compte sinon il pourrait détériorer les performances du système de contrôle et entraîner fréquemment une perte de stabilité<sup>5</sup>. Pour cette raison, l'approche proposée est alors inspirée par les résultats précédents, mais la discrétisation du système inhérente à l'échantillonnage périodique du problème de contrôle pratique est explicitement prise en compte ici.

## **Technologie SbW**

Avec le développement continu de l'industrie automobile, SbW est une technologie qui a été introduite pour remplacer les systèmes mécaniques et hydrauliques traditionnels pour la conduite par des actionneurs, des contrôleurs et des capteurs. La technologie SbW offre de nombreux avantages par rapport au système de direction classique, à savoir la réduction du poids du véhicule, l'amélioration du rendement énergétique et de la stabilité du véhicule et la réduction de l'effet d'oscillation du système de conduite lorsque le véhicule traverse une route accidentée. L'objectif principal de l'étude de stratégie de contrôle basée sur cette technologie est de savoir comment maintenir la stabilité du véhicule dans les conditions compliquées du travail et de la route. Actuellement, il y a un grand nombre de stratégies

---

4. Azam (2017), El Haoussi et al. (2011), Ferrese et al. (2014), Johansson (2000), Kardos and Kutasi (2017), Prusty et al. (2015), Zhou et al. (2015)

5. Benzaouia et al. (2014), Benzaouia et al. (2015), El Fezazi et al. (2015a), El Fezazi et al. (2017a), El Fezazi et al. (2017b), El Fezazi et al. (2018a), El Fezazi et al. (2018d), Hmamed et al. (2016), Hu and Lin (2001), Hu et al. (2002), Lamrabet et al. (2018), Wei et al. (2015), Tissir (2014)

---

de contrôle utilisées dans La technologie SbW et plusieurs cas typiques acquièrent un bon effet<sup>6</sup>. D'autre part, malgré l'excellent travail réalisé pour développer cette technologie, il y a beaucoup de choses importantes à prendre en compte à cet égard comme l'insertion du circuit électrique dans la modélisation de la technologie SbW, la nature saturante, l'approche des retards inclus, etc.

## Dynamique du MN

La dynamique du MN dans un WT a été étudiée<sup>7</sup> et approximée avec une précision raisonnable par un certain ensemble d'équations différentielles qui incluent un retard dans l'une des variables d'état, représentant le temps de transport entre les ailettes directrices du ventilateur et la section d'essai du tunnel. Le contrôle de la dynamique du MN a été étudiée dans la littérature<sup>8</sup> : le tunnel est entraîné par un ventilateur en circuit fermé, dans lequel cette dynamique est contrôlée par une régulation de la vitesse du moteur du ventilateur et de petits changements dans l'angle de l'ailette directrice. Cependant, les approches citées précédemment n'ont pas pris en compte la saturation de l'entrée qui existe toujours dans ce problème de contrôle, du fait de l'existence de contraintes technologiques et de sécurité. Ensuite, comme le modèle de la dynamique du MN dans un WT correspond à un ensemble d'équations différentielles avec des retards et des entrées saturées, la conception du contrôleur peut être accomplie en se basant sur des techniques développées pour la stabilisation des systèmes retardés soumis à la saturation d'entrée. Plus précisément, un contrôleur pour la dynamique du MN est développé pour obtenir de bonnes réponses transitoires : Ceci permet de réduire le coût d'exploitation en réduisant les pertes d'azote liquide.

Le but principal de cette thèse est le *contrôle des systèmes à retards avec saturation d'entrée dont les résultats théoriques seront appliqués aux problèmes pratiques qu'on a discuté précédemment*. Elle se structure comme suit.

Le premier chapitre de ce mémoire présente un état de l'art sur les systèmes à retards soumis à la saturation d'entrée et à la perturbation. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la notion de stabilité et les différentes manières de l'aborder pour une telle classe de système. Pour cela, nous rappellerons quelques concepts théoriques, tels que la méthode de Lyapunov et les outils de l'analyse de stabilité, utiles pour la suite de ce mémoire. Ce chapitre nous permettra ainsi d'introduire les bases nécessaires à la bonne compréhension de nos travaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de nos applications, à savoir les réseaux de communication, le système QTP, la technologie SbW dans un véhicule et la

---

6. Chen et al. (2013), Mohamed and Albatlan (2014), Shah et al. (2013), Huang et al. (2015), Zakaria et al. (2015), Zakaria et al. (2017)

7. El Fezazi et al. (2017a), El Fezazi et al. (2018a), Manitius (1984), Manitius and Tran (1986)

8. Germani et al. (2000), Liu (2011), Loukianov et al. (2005), Sename (2007)

dynamique du MN dans un WT. Nous verrons tout d'abord comment il est possible de réguler le trafic TCP à l'aide du dispositif d'AQM, localisé au niveau du routeur, afin d'améliorer le contrôle de congestion. Le système de communication, alors modélisé comme un système à retards multiples (plusieurs classes de trafic), sera mis sous une forme appropriée afin d'établir un critère de stabilisation. D'autre part, nous nous concentrons dans ce chapitre de faire une description détaillée pour obtenir un modèle d'espace d'état à temps discret à partir d'un modèle mathématique du système QTP afin de garantir sa stabilité et d'assurer un certain niveau de performance. Ce modèle à temps discret prend en compte plusieurs paramètres tels que la période d'échantillonnage, les perturbations du flux et les retards de transport dans les circuits sans oublier les saturations de tension. D'autre côté, une description détaillée de la technologie SbW doit être faite pour la compréhension complète des spécifications de performance, des caractéristiques physiques et opérationnelles de chaque composant de ce système avant d'entamer la transformation de son modèle mathématique vers le modèle d'espace d'état en tenant compte des saturations de tension et des perturbations. Finalement, le travail considéré à la fin de ce chapitre a été apparu dans l'étude d'un contrôle de WT à haute vitesse en circuit fermé où le problème abordé ici ne concerne qu'un aspect de ce contrôle, à savoir le contrôle la dynamique du MN. Pour cette raison, un modèle mathématique est utilisé pour présenter la réalisation d'un modèle d'espace d'état afin de garantir la stabilité de cette dynamique où l'effet du retard dans les variables d'état et de la saturation de l'entrée sont explicitement pris en compte.

Les troisième, quatrième et cinquième chapitres entament la partie applicative de ce manuscrit, dans lesquels nous développerons les contributions de nos travaux de recherche. Nous y présentons un ensemble de méthodes pour garantir la stabilité des systèmes à retards avec une entrée saturante et soumis à la perturbation. Chacun des trois chapitres proposent un cadre théorique différent pour aborder chaque problématique décrit précédemment. Pour cette raison, le chapitre 3 contribue au problème d'AQM en autorisant explicitement des retards différents pour plusieurs classes de trafic où les variations brusques à court terme de la bande passante disponible du lien sont modélisées comme une perturbation, tout en assurant formellement la stabilité en boucle fermée et un niveau de performance. Alors, nous considérons la méthode très classique de L-K dans laquelle nous élaborons des fonctionnelles en adéquation avec de nouvelles modélisations du système. Au chapitre 4, nous essaierons de construire une fonctionnelle de L-K basée sur une modélisation dans laquelle nous augmenterons la taille du système qui prend en compte des informations supplémentaires sur la dynamique retardée et propose une solution au problème de contrôle du système QTP. Pour cette raison, une approche basée sur un observateur est utilisée pour stabiliser les systèmes à temps discret où les états du système ne sont pas mesurables. Puis, au chapitre 5, nous ferons appel au principe de la combinaison de la technique de décomposition des retards avec la fonctionnelle de L-K en utilisant

---

un contrôleur avec un compensateur d'anti-windup pour faire face à la nature saturante dans la technologie SbW, garantir la stabilité et atteindre les performances  $H_\infty$ . Finalement, dans le dernier chapitre nous avons la possibilité de considérer deux approches : l'une est une méthodologie pour stabiliser les systèmes à temps discret et l'autre pour la stabilisation de systèmes à temps continu de données échantillonnées. Ces méthodes de conception des contrôleurs sont proposées pour obtenir des améliorations du contrôle de la dynamique du MN dans un WT. La performance et l'efficacité des lois de contrôle proposées sont validées à la fin de chaque chapitre sur plusieurs exemples, y compris des simulations détaillées pour les réseaux TCP/IP, le système QTP, la technologie SbW et la dynamique du MN utilisés comme des références dans la littérature.

Enfin, nous résumerons les différents points abordés tout au long de cette thèse et tenterons de dégager quelques pistes ouvertes pour des travaux futurs.



# Introduction aux modèles et outils utilisés

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une synthèse bibliographique de quelques problèmes liés aux systèmes retardés, plus précisément ceux dédiés à l'étude des régions d'attraction des points d'équilibre stables, à l'obtention de lois de contrôle stabilisantes et à l'étude des entrées saturantes. Quelques concepts fondamentaux, nécessaires pour une bonne compréhension des outils présentés, sont rappelés sans donner les démonstrations. Celles-ci peuvent être trouvées dans les références citées tout au long du chapitre. Nous décrivons ainsi certaines propriétés des systèmes retardés pour mieux présenter les problèmes traités.

## 1.2 Modélisation des systèmes à retards

### 1.2.1 Systèmes de type retardé

Les systèmes retardés sont des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles fonctionnelles portant à la fois sur des valeurs présentes et passées du temps. Si nous supposons que la dérivée du vecteur d'état peut être explicitée à chaque instant  $t$ , de tels systèmes sont régis par des équations différentielles de la forme (1.1) où  $0 \leq \tau(t) \leq h_{\max}$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)), u(t)) & t > t_0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta) & \text{pour } \theta \in [-h_{\max}, 0] \end{cases} \quad (1.1)$$

Les fonctions  $x(t)$  et  $u(t)$  sont l'état et l'entrée du système, respectivement. La condition initiale  $\phi$  est une fonction de  $[-h_{\max}, 0]$  vers  $\mathfrak{R}^n$  et supposée continue par morceaux.

### 1.2.2 Catégories de retards

Dans cette partie, nous présenterons succinctement les différents modèles de retards que l'on rencontre dans la littérature.

- \* Retards inconnus : dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variable, il peut prendre toutes les valeurs dans  $\mathfrak{R}_+$ <sup>1</sup>.
- \* Retards constants : Les premières études sur la stabilité des systèmes à retards concernaient principalement des retards constants. On compte de nombreux travaux développés pour des retards constants<sup>2</sup>. Dans la plupart des cas réellement rencontrés, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système.
- \* Retards variables majorés : ce type de retard nécessite la connaissance d'une valeur maximale sur le retard comme il est indiqué dans (1.2). Ce cas a été très largement considéré dans la littérature<sup>3</sup>.

$$0 \leq \tau(t) \leq h_{\max} \quad (1.2)$$

- \* Retards variables bornés : moins abordé que le cas précédent, cette catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte (1.3). La littérature concernant ce type de modèle est moins vaste<sup>4</sup>.

$$h_{\min} \leq \tau(t) \leq h_{\max} \quad (1.3)$$

- \* Retards variables avec contrainte : De nombreux résultats nécessitent une condition sur la dérivée du retard comme elle est donnée dans (1.4)<sup>5</sup> où  $d$  est un réel.

$$0 \leq \dot{\tau}(t) \leq d < 1 \quad (1.4)$$

- \* Retards variables continus par morceaux : ces retards apparaissent notamment lors de l'échantillonnage d'un signal. Ce cas particulier autorise notamment la dérivée du retard à prendre la valeur 1<sup>6</sup> (voir (1.5)).

$$\dot{\tau}(t) = 1 \quad (1.5)$$

## 1.3 Stabilité

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de l'Automatique. L'étude de stabilité au sens de Lyapunov s'intéresse au comportement d'un système autour d'un

---

1. Gu et al. (2003)

2. Benzaouia and El Hajjaji (2018), El Haoussi and Tissir (2007), Tissir and Hmamed (1996), Zabari et al. (2017)

3. El Haoussi and Tissir (2009), El Haoussi and Tissir (2010), El Haoussi et al. (2012), Tissir (2007)

4. El Aiss et al. (2017), El Aiss et al. (2018), Gu et al. (2013), Hmamed et al. (2015), Hui et al. (2015), Selvi et al. (2016)

5. El Haoussi and Tissir (2009), El Haoussi and Tissir (2010), El Haoussi et al. (2012), Tissir (2007)

6. Lamrabet et al. (2017), Santra et al. (2016), Zhang et al. (2013), Zhang et al. (2014)

point d'équilibre<sup>7</sup>. Les trajectoires de son état sont dites stables si, pour une position initiale donnée assez proche du point d'équilibre, elles restent dans un certain voisinage appelé région de stabilité. Plus intéressante, la stabilité asymptotique assure que les trajectoires rejoignent l'état d'équilibre après un certain temps éventuellement infini. La propriété de convergence définie par la stabilité asymptotique en fait la qualité la plus populaire en pratique. Dans les chapitres suivants, nous nous préoccuperons seulement de la stabilité asymptotique et un système dit stable réfèrera à asymptotiquement stable.

### 1.3.1 Seconde méthode de Lyapunov

Considérons le système (1.1) que nous supposons qu'il admet une solution unique et un état d'équilibre  $x(t) = 0$  (si le système admet un autre point d'équilibre, nous pouvons nous y ramener par un changement de variables). La seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction  $V$  définie positive telle que le long des trajectoires du système (1.1), on ait  $\dot{V} < 0$ . Deux extensions à la seconde méthode de Lyapunov ont alors été développées par Razumikhin et Krasovskii dans le cadre des équations différentielles à retards.

**Remarque 1.1 :** Dans le cas de la méthode de Razumikhin, l'étude de la stabilité passe par la recherche d'une fonction de Lyapunov et non pas celle d'une fonctionnelle bornée, comme c'est le cas pour la méthode de stabilité de L-K présentée au paragraphe suivant. Cependant, dans la littérature, la stabilité des systèmes à retards fait plus généralement appel à des fonctionnelles de L-K.

### 1.3.2 Approche par fonctionnelles de Krasovskii

La méthode de L-K est une extension de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles. Elle consiste à rechercher des fonctionnelles  $V(t, x(t))$  qui décroissent le long des solutions du système (1.1).

**Théorème 1.1**<sup>8</sup> : Soient  $u, v$  et  $w : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$  des fonctions continues croissantes,  $u(\theta)$  et  $v(\theta)$  sont strictement positives pour  $\theta > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$ . S'il existe une fonctionnelle continue  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}_+$  telle que :

1.  $u(\|\phi\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$ ,
2.  $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi\|)$  pour tout  $t \in \mathfrak{R}$  le long des trajectoires du système (1.1),

alors la solution nulle de (1.1) est uniformément stable. Si de plus  $w(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$ , alors la solution nulle du système (1.1) est uniformément asymptotiquement stable.

**Remarque 1.2 :** L'idée principale du Théorème 1.1 est donc de déterminer une fonctionnelle  $V$  définie positive dont la dérivée le long des trajectoires du système (1.1) est définie négative.

7. Ariba (2009), El Haoussi (2008)

8. Kolmanovskii and Myshkis (1992)

## 1.4 Problèmes discutés et outils mathématiques

### 1.4.1 Saturation d'entrée

Tout d'abord, afin d'améliorer la réponse dynamique d'un système, d'atteindre des exigences de performances dans les sorties contrôlées (données par  $z(t) \in \mathbb{R}^{p_z}$ ) et de rendre l'opération robuste à l'action des perturbations (données par  $w(t) \in \mathbb{R}^{p_w}$ ), les signaux d'entrée à appliquer au système doivent être systématiquement calculés par un contrôleur (voir la Figure 1.1<sup>9</sup>).

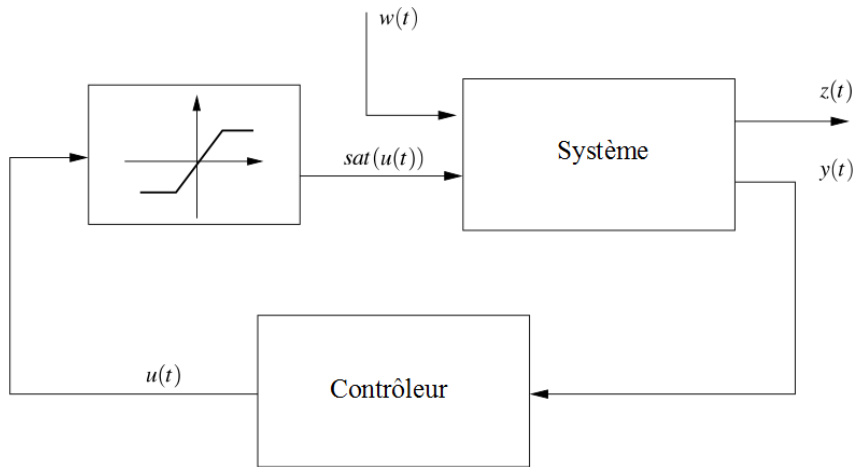


FIGURE 1.1 – Système en boucle fermée.

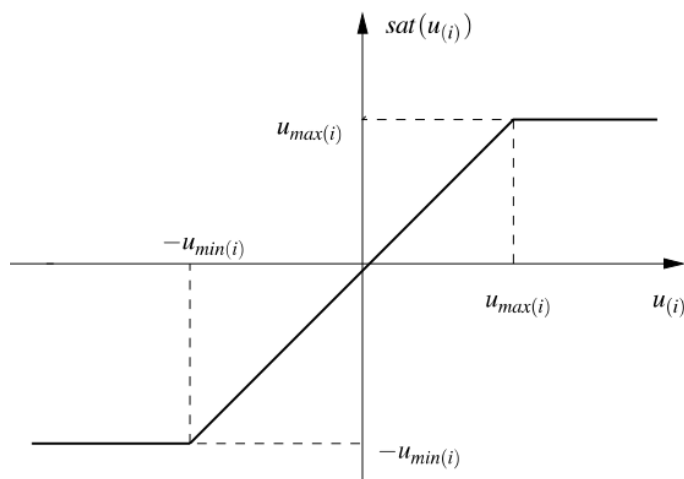


FIGURE 1.2 – Fonction de saturation.

Alors, le contrôleur a en entrée les sorties mesurées du système étudié (données par  $y(t) \in \mathbb{R}^{p_y}$ ) et fournit un signal  $u(t)$  en sortie. Ce signal est donc envoyé à un actionneur qui, en général, convertit le signal de faible puissance fourni par le contrôleur en un signal de haute puissance. Cependant, en raison des limites physiques  $-u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$ , le

9. Tarbouriech et al. (2011)

signal de contrôle effectif fourni par l'actionneur peut être modélisé par une fonction de saturation (voir la Figure 1.2<sup>9</sup>), c'est à dire  $sat(u(t))$  où  $sat(\cdot)$  représente une fonction vectorielle définie par :

$$sat(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{\max(i)} & \text{si } u_{(i)}(t) > u_{\max(i)} \\ u_{(i)}(t) & \text{si } -u_{\min(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{\max(i)} \\ -u_{\min(i)} & \text{si } u_{(i)}(t) < -u_{\min(i)} \end{cases} \quad (1.6)$$

**Définition 1.1 :** La région de linéarité du système étudié, notée  $R_L$ , est définie comme l'ensemble de tous les états  $x(t)$  tels que  $sat(u(t)) = u(t)$ . En d'autres termes, à partir de la définition de la fonction de saturation,  $R_L$  est défini comme l'ensemble polyédrique suivant dans l'espace d'état :

$$R_L = \left\{ u(t) \in \mathfrak{R}^m; -u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \right\}$$

**Remarque 1.3 :** L'ensemble  $R_L$  est symétrique si  $u_{\min} = -u_{\max}$  et asymétrique dans le cas contraire. Pour des raisons de simplicité, nous restreignons notre étude dans cette thèse au cas symétrique.

En raison de la saturation, le système en boucle fermée est non-linéaire. Donc, en supposant  $w(t) = 0$ , la convergence des trajectoires en boucle fermée vers l'origine dépend de l'état initial du système. En général, il existe des conditions initiales  $x(0)$  telles que les trajectoires convergent vers l'origine, soit  $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ , mais aussi des conditions initiales conduisant à des trajectoires divergentes, soit  $x(t) \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$ . La région d'attraction du système en boucle fermée est défini comme suit :

**Définition 1.2 :** La région d'attraction  $R_A$  de l'origine pour le système étudié est définie comme l'ensemble de tous les points  $x(t)$  de l'espace d'état pour lequel  $x(0) = x$  conduit à une trajectoire  $x(t, x(0))$  qui converge asymptotiquement vers l'origine pour  $w(t) = 0$ . En d'autres termes, si  $x(0) \in R_A$  alors  $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ .

Un objectif naturel est alors d'obtenir une bonne estimation de la région d'attraction au moyen de régions de stabilité. Dans ce cas, nous cherchons à trouver une région (ou une union de régions) de stabilité correspondant à  $R_A$ . Ce n'est en général pas une tâche facile, car la forme de la région d'attraction n'est pas connue. Dans la pratique, nous essayons de trouver des régions de stabilité analytiquement bien caractérisées et qui peuvent être maximisées en tenant compte de certains critères géométriques spécifiques. Comme on le verra plus loin, ce sera le cas des régions ellipsoïdales et polyédriques.

**Définition 1.3 :** Une région  $R_S$  est dite être une région de stabilité pour le système étudié si  $R_S \subset R_A$  et  $0 \in R_S$ .

### 1.4.2 Stabilisation robuste

Puisque le système étudié en boucle fermée est non-linéaire, l'action des perturbations peut produire des trajectoires convergeant vers d'autres points d'équilibre (différents de l'origine) ou pouvant même diverger, c'est-à-dire conduire à  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ .

Le problème de stabilisation robuste considère la synthèse de la loi de contrôle en prenant explicitement en compte la saturation d'entrée, afin d'assurer la limite des trajectoires d'états lorsque le système est soumis à des signaux  $w(t)$  bornés. Dans ce contexte, le problème de la maximisation du rejet de perturbation sera traité dans ce travail afin de minimiser le  $\mathcal{L}_2$ -gain (mesuré par rapport à une certaine norme) entre  $w(t)$  et  $z(t)$  considérant les perturbations  $\mathcal{L}_2$ -bornées qui sont données par  $\|w(t)\|_2^2 \leq \omega^{-1} < \infty$  où  $\omega$  est un scalaire. Pour cette raison, les conditions développées plus tard sont des LMIs non seulement sur les variables matricielles, mais aussi sur le scalaire  $\gamma$ , ce qui implique que  $\gamma$  peut être inclus comme une variable d'optimisation (performance  $H_\infty$ ). Par conséquent, l'équation suivante est donnée :

$$\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 \quad (1.7)$$

### 1.4.3 Anti-windup

Le terme windup est historiquement lié aux effets de saturation de l'entrée dans les boucles de contrôle contenant une action intégrale<sup>10</sup>. Dans ce cas, lorsque la saturation se produit, le terme intégral reste en charge inutilement. La sortie de l'intégrateur est appelée windup. Cette charge inutile produit des effets indésirables sur la réponse transitoire du système, comme les oscillations et la convergence lente vers le point d'équilibre. Afin d'éviter cette dégradation de la performance générée par la saturation, une boucle de contrôle supplémentaire, appelée compensation d'anti-windup, peut être ajoutée au système en boucle fermée.

Le principe de base des stratégies anti-windup consiste à déterminer la différence entre le signal calculé par le contrôleur ( $u(t)$ ) et le signal effectivement appliqué au système contrôlé ( $\text{sat}(u(t))$ ). Cette différence est ensuite renvoyée au contrôleur, via un système statique ou dynamique appelé compensateur d'anti-windup.

Généralement, le compensateur d'anti-windup peut être décrit par la représentation dans l'espace d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aw}(t) &= A_{aw}x_{aw}(t) + B_{aw}(\text{sat}(u(t)) - u(t)) \\ y_{aw}(t) &= C_{aw}x_{aw}(t) + D_{aw}(\text{sat}(u(t)) - u(t)) \end{aligned}$$

Si  $A_{aw} = 0$ ,  $B_{aw} = 0$  et  $C_{aw} = 0$ , on dit que le système anti-windup est statique. Le signal

<sup>10</sup>. Glattfelder and Schaufelberger (2003), Hippe (2006)

$y_{aw}(t)$  est donc injecté dans le contrôleur nominal :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) + y_{aw}(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t)\end{aligned}$$

**Remarque 1.4 :** Le signal d'anti-windup fonctionne dans le sens de la correction des états du contrôleur nominal afin de fournir un signal  $u(t)$  qui reste proche des limites de saturation. Il convient de noter qu'en l'absence de la saturation ( $sat(u(t)) - u(t) = 0$ ), la boucle anti-windup n'est pas active et le système en boucle fermée se comporte avec la performance déterminée par le contrôleur nominal pré-calculé. Le compensateur d'anti-windup peut alors être vu comme une boucle de contrôle extra qui est ajoutée à un contrôleur pré-calculé.

#### 1.4.4 Modèles pour la non-linéarité de saturation

Il apparaît à première vue que la saturation ressemble à une non-linéarité simple mais son traitement mathématique peut obtenir des conditions de stabilité et de stabilisation qui sont plutôt compliquées. Par conséquent, afin d'établir des conditions traitables pour fournir des solutions aux problèmes rencontrés, des représentations du terme de saturation sont nécessaires. À ces fins, nous présentons deux représentations utiles pour le système en présence de la saturation : modèle polytopique et modèle de non-linéarité sectorielle.

À propos du modèle polytopique, l'idée de base<sup>11</sup> consiste à utiliser un vecteur auxiliaire  $v(t)$  et à composer la sortie de la fonction de saturation en tant qu'une combinaison convexe des signaux de contrôle  $u(t)$  et  $v(t)$ . Alors, afin de présenter l'approche, considérons le boîtier mono-entrée, c'est-à-dire  $m = 1$ , dans ce cas,  $u(t)$  et  $v(t)$  sont des scalaires. Supposons maintenant que  $-u_{\max} \leq v(t) \leq u_{\max}$ , donc la fonction scalaire  $sat(u(t))$  peut être calculée comme une combinaison convexe de  $u(t)$  et  $v(t)$ , c'est-à-dire  $sat(u(t)) = \lambda u(t) + (1 - \lambda)v(t)$  avec  $0 \leq \lambda \leq 1$  ou de manière équivalente  $sat(u(t)) \in Co\{u(t), v(t)\}$ .

Maintenant, dans le modèle de non-linéarité sectorielle le terme de saturation peut être représenté comme  $\psi(u(t)) = sat(u(t)) - u(t)$ <sup>12</sup> où  $\psi(u(t))$  est une non-linéarité de la zone morte donnée sous la forme de (1.8). Dans le même sens, la condition de secteur généralisée (plus de détails se trouvent dans les chapitres 5 et 6) s'applique spécifiquement à la non-linéarité de la zone morte.

$$\psi(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{\max(i)} - u_{(i)}(t) & si \quad u_{(i)}(t) > u_{\max(i)} \\ 0 & si \quad -u_{\max(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{\max(i)} \\ -u_{\max(i)} - u_{(i)}(t) & si \quad u_{(i)}(t) < -u_{\max(i)} \end{cases} \quad (1.8)$$

11. Hu and Lin (2001), Hu et al. (2002)

12. Da Silva and Tarbouriech (2005), Tarbouriech et al. (2006)

### 1.4.5 Outils mathématiques

Dans cette thèse, nous allons utiliser les lemmes ci-dessous pour réaliser deux objectifs : séparer des produits entre les matrices du système et celles de la fonctionnelle de L-K d'une part, et introduire des nouvelles matrices additionnelles (slacks) d'une autre part.

**Lemme 1.1**<sup>13</sup> : Pour  $\Xi_{11} = \Xi_{11}^T$ ,  $\Xi_{22} = \Xi_{22}^T$  et  $\Xi_{12}$  la condition  $\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} \geq 0$  est équivalente à

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &> 0, \quad X = \Xi_{22} - \Xi_{12}^T \Xi_{11}^{-1} \Xi_{12} \geq 0 \\ \Xi_{22} &> 0, \quad Y = \Xi_{11} - \Xi_{12} \Xi_{22}^{-1} \Xi_{12}^T \geq 0 \end{aligned}$$

où la matrice X (resp. Y) est appelée le complément de Schur relatif à  $\Xi_{22}$  (resp.  $\Xi_{11}$ ) dans la matrice  $\Xi$ .

**Lemme 1.2** : Soit  $d(k)$  un retard variable, la transformation de Newton-Leibniz<sup>14</sup> est donnée par :

$$\sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y(l) = x(k) - x(k-d(k)), \quad y(l) = x(l+1) - x(l)$$

**Lemme 1.3**<sup>15</sup> : D'abord, définissons l'ensemble polyédrique suivant :

$$R_{L_1} = \{v(t) \in \mathfrak{R}^m; -u_{\max} \leq v(t) \leq u_{\max}\}$$

Alors, la relation suivante est vérifiée :

$$\text{sat}(u(t)) \in \text{Co}\{D_j u(t) + D_j^- v(t)\}$$

où  $D_j$  et  $D_j^-$  sont des matrices diagonales définies par :

- \* pour  $D_j$  les éléments diagonaux prennent la valeur 1 ou 0,  $j = 1, \dots, 2^m$  ;
- \*  $D_j^- = I_m - D_j$ .

**Remarque 1.5** : Concernant le Lemme 1.3,  $u$  et  $v$  deviennent  $u$  et  $v$ , respectivement, lorsqu'on travaille avec un système augmenté (voir le chapitre 4). D'autre part, ce Lemme est valable aussi pour le système discret<sup>9</sup>.

**Lemme 1.4**<sup>16</sup> : Maintenant, d'après la définition de l'ensemble polyédrique suivant :

$$R_{L_2} = \{v(t) \in \mathfrak{R}^m; f(t) \in \mathfrak{R}^m; -u_{\max} \leq v(t) + f(t) \leq u_{\max}\}$$

---

13. Boyd et al. (1994)

14. El Fezazi et al. (2016c), El Fezazi et al. (2017b), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2017d), El Fezazi et al. (2018b), El Fezazi et al. (2018c), Zabari and Tissir (2014)

15. Hu and Lin (2001), Hu et al. (2002)

16. Bender (2010)

Alors, la relation ci-dessous est vérifiée pour toute matrice diagonale positive  $T$  où  $g(t)$  est une fonction quelconque.

$$\psi^T(v(t) + g(t))T[\psi(v(t) + g(t)) - f(t) + g(t)] \leq 0$$

**Lemme 1.5**<sup>17</sup> : L'inégalité intégrale (1.9) existe pour toute matrice symétrique définie positive  $R$ , toutes matrices de taille appropriée  $N_1$ ,  $N_2$  et un retard variable  $\tau(t)$ .

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix}^T \left( 2 \begin{bmatrix} N_1 & -N_1 \\ N_2 & -N_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \tau(t) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \quad (1.9) \end{aligned}$$

**Lemme 1.6**<sup>18</sup> : Pour des matrices  $\Pi$ ,  $U$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  de dimensions appropriées et un scalaire  $\varepsilon$ . L'inégalité  $\Pi + \mathcal{M}\mathcal{N} + \mathcal{N}^T\mathcal{M}^T < 0$  est réalisée si la condition suivante existe :

$$\begin{bmatrix} \Pi & \varepsilon\mathcal{M} + \mathcal{N}^TU^T \\ * & -\varepsilon U - \varepsilon U^T \end{bmatrix} < 0$$

**Lemme 1.7**<sup>19</sup> : Lemme de Finsler : S'il existe une matrice  $\Psi$ , un vecteur  $\eta(t)$  et une matrice  $\mathcal{H}$  de telle sorte que  $\eta^T(t)\Psi\eta(t) < 0$  et l'équation  $\forall \eta(t) \neq 0 : \mathcal{H}\eta(t) = 0$  est vérifiée, alors il existe une matrice  $\mathcal{F}$  telle que :

$$\Psi + \mathcal{F}\mathcal{H} + \mathcal{H}^T\mathcal{F}^T < 0$$

**Lemme 1.8**<sup>1</sup> : Pour tout scalaire  $b > a$ , matrices  $Q_1 > 0$ ,  $Q_3 > 0$  et  $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0$  l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} - \int_a^b \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \leq & \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} x(b) \\ x(a) \\ \int_a^b x(s)ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q_3 & Q_3 & -Q_2^T \\ * & -Q_3 & Q_2^T \\ * & * & -Q_1 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} x(b) \\ x(a) \\ \int_a^b x(s)ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Lemme 1.9**<sup>1</sup> : L'inégalité ci-dessous existe pour toute matrice symétrique définie po-

17. El Haoussi et al. (2011)

18. Chang et al. (2015)

19. Boyd et al. (1994)

sitive  $R$  et un retard variable  $d(k)$ .

$$\sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y^T(l)Ry(l) \geq \left( \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y(l) \right)^T \frac{R}{d(k)} \left( \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y(l) \right)$$

**Remarque 1.6 :** Un ellipsoïde qui est caractérisé par l'ensemble ci-dessous sera utilisé tout au long de cette thèse où  $\mu$  est un scalaire positif et  $P$  est une matrice symétrique définie positive.

$$R_E(P, \mu) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; x^T(t)Px(t) \leq \mu^{-1}\}$$

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la problématique centrale de nos travaux : l'étude des systèmes à retards avec saturation d'entrée. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la notion de stabilité et à son étude pour une telle classe de systèmes.

Nous tenterons, aux chapitres suivants, de résoudre cette question et d'améliorer les résultats existants selon les approches suggérées. Premièrement, nous exploiterons le potentiel offert par la méthode de L-K pour développer des fonctionnelles appropriées. Puis, nous approfondirons les outils de l'analyse robuste afin d'établir une méthodologie adaptée à la modélisation et l'analyse des systèmes à retards avec saturation d'entrée et soumis à la perturbation.

Par ailleurs, ce premier chapitre a également permis de poser les bases d'une classe de systèmes naturellement rencontrée dans la modélisation de réseaux de communication, de système QTP, de la technologie SbW et de la dynamique du MN. Nous avons ainsi pu introduire les outils qui nous seront nécessaires pour mener à bien les objectifs de nos applications : le contrôle de la congestion dans un routeur, le contrôle du niveau d'eau dans des réservoirs et le contrôle de la dynamique d'un véhicule et du MN dans un WT. Le cadre de l'application ainsi que le problème théorique sous-jacent sont exposés aux chapitres suivants.

# Description et modélisation

## 2.1 Introduction

L'exigence la plus importante dans la modélisation d'un système étudié est la compréhension complète des spécifications de performance et des caractéristiques physiques et opérationnelles de chaque composant de ce système. Pour cette raison, des descriptions simplifiées et détaillées des réseaux TCP/IP, du système QTP, de la technologie SbW et de la dynamique du MN sont abordées dans ce chapitre afin d'obtenir un modèle linéaire dans l'espace d'état à partir de la linéarisation d'un modèle mathématique pour vérifier les exigences de contrôle. Dans un autre côté, des saturations des entrées qui apparaîtraient dans la pratique pourraient être incorporées suivant les idées présentées précédemment et les perturbations sont introduites pour modifier le processus original.

## 2.2 Réseaux de communication

### 2.2.1 Modèle TCP/IP

Le modèle TCP/IP représente aujourd'hui la norme de transfert de données sur internet où son architecture contient différentes couches (voir la Figure 2.1<sup>1</sup>).

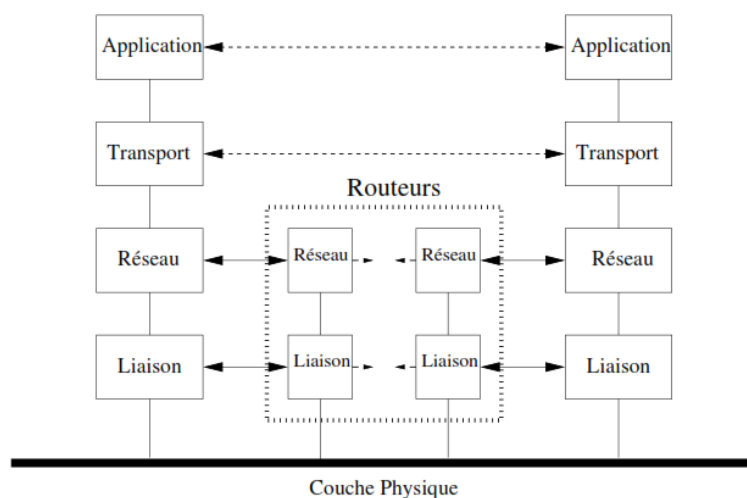


FIGURE 2.1 – Structure en couches de la pile de protocoles TCP/IP.

1. Ariba (2009)

Le rôle de chaque couche est d’offrir certains services aux couches supérieures, celles-ci étant ainsi affranchies de la mise en œuvre des tâches correspondantes. Dans ce travail on s’intéresse à la couche transport où sa première fonction est de segmenter les données transférées par la couche application afin de les adapter au format de paquets compréhensibles par la couche réseau. Réciproquement, elle est chargée d’assembler les paquets issus de la couche réseau afin de reconstituer l’ensemble des données destinées à la couche application. En effet, les données brutes à transmettre ne peuvent être directement envoyées sur le réseau, il est nécessaire de les structurer en unités (paquets puis trames et enfin signaux) manipulables par les différents protocoles. On s’intéresse aussi à la couche réseau qui s’emploie au routage des données vers le bon destinataire.

### 2.2.2 Modèle dynamique

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au contrôle de la congestion. Plus précisément, notre étude s’est focalisée sur le partage d’un lien de communication entre plusieurs émetteurs situés sur des sites distants (Figure 2.2).

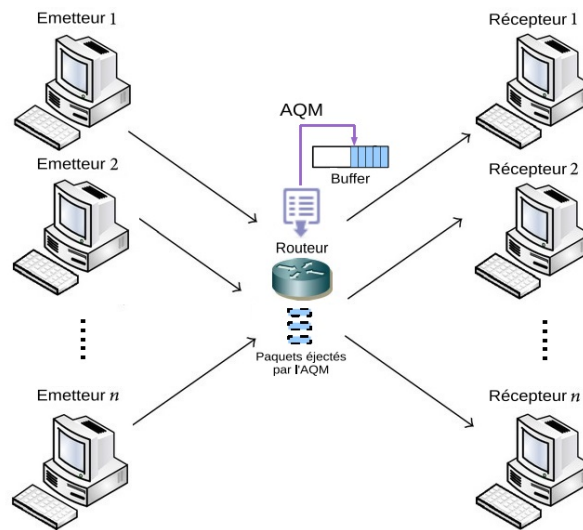


FIGURE 2.2 – Topologie étudiée.

Des travaux de modélisation fluide proposant une représentation mathématique du comportement du protocole TCP ont été développés dans le but d’effectuer une analyse quantitative du problème de la congestion<sup>2</sup>. La plupart des travaux ayant traité ce sujet dans le cadre de la théorie du contrôle ont considéré le modèle fluide suivant<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(t) &= \frac{1}{t_{ar1}(t)} - \frac{W_1(t)W_1(t - t_{ar1}(t))}{2t_{ar1}(t - t_{ar1}(t))} p_1(t - t_{ar1}(t)) \\ \dot{q}_1(t) &= -C_1(t) + \frac{N_1}{t_{ar1}} W_1(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. Srikant (2004), Tarbouriech et al. (2005)

3. Misra et al. (2000)

où

$W_1(t)$  est la largeur moyenne de la fenêtre de congestion (packets) ;

$p_1 \in [0 \ 1]$  est la probabilité de marquage/éjection d'un paquet ;

$q_1(t)$  est la longueur moyenne de la file d'attente (packets) ;

$t_{ar1}(t)$  est le temps d'aller-retour qui s'exprime en fonction de  $\frac{q_1(t)}{C_{10}} + T_{p1}$  (s) ;

$C_1$  est la capacité du lien (packets/s) ;

$N_1$  est le facteur de charge (nombre de sessions de TCP) ;

$T_{p1}$  est le temps de propagation (s).

**Remarque 2.1 :** La perte de paquets constitue une mesure de la congestion pour le protocole TCP dans un réseau. Pour pouvoir jouer sur le taux de cette perte, des mécanismes dit d'AQM<sup>4</sup> ont été mis au point afin de réguler, de façon implicite, le trafic TCP (Figure 2.2).

### 2.2.3 Linéarisation et modélisation

La linéarisation du modèle (2.1) résulte dans le modèle suivant<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{W}_1(t) &= -\frac{N_1}{t_{ar1}^2 C_{10}} \left( \delta W_1(t) + \delta W_1(t - t_{ar1}(t)) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{t_{ar1}^2 C_{10}} \left( \delta q_1(t) + \delta q_1(t - t_{ar1}(t)) \right) - \frac{t_{ar1} C_{10}^2}{2N_1^2} \delta p_1(t - t_{ar1}(t)) \\
 &\quad + \frac{t_{ar1} - T_{p1}}{t_{ar1}^2 C_{10}} \left( \delta C_1(t) + \delta C_1(t - t_{ar1}(t)) \right) \\
 \delta \dot{q}_1(t) &= \frac{N_1}{t_{ar1}} \delta W_1(t) - \frac{1}{t_{ar1}} \delta q_1(t) - \frac{T_{p1}}{t_{ar1}} \delta C_1(t) \\
 t_{ar1}(t) &= \frac{\delta q_1(t)}{C_{10}} + t_{ar1}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $\delta C_1(t) = C_1(t) - C_{10}$  dans lequel  $C = W, q, p, C$ . D'autre part, les valeurs nominales sont données par  $W_{10} = \frac{t_{ar1} C_{10}}{N_1}$ ,  $q_{10} = C_{10}(t_{ar1} - T_{p1})$  et  $p_{10} = \frac{2}{W_{10}^2}$ .

Les outils d'espace d'état seront utilisés pour développer le contrôleur, donc les équations (2.2) sont réécrites dans la forme d'espace d'état comme suit<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + A_{d1} x_1(t - \tau_1(t)) + B_1 u_1(t - \tau_1(t)) + D_{w1} w_1(t) \\
 y_1(t) &= C_{y1} x_1(t) \\
 z_1(t) &= C_{z1} x_1(t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

4. Le et al. (2003), Ryu et al. (2004)

5. El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2018b), Lamrabet et al. (2017)

6. El Fezazi et al. (2016a), El Fezazi et al. (2016c), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2018b)

dans lequel

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \begin{bmatrix} \delta W_1(t) \\ \delta q_1(t) \end{bmatrix}, \quad u_1(t) = \delta p_1(t), \quad w_1(t) = \begin{bmatrix} \delta C_1(t) \\ \delta C_1(t - t_{ar1}(t)) \end{bmatrix}, \\
 y_1(t) &= \delta q_1(t), \quad z_1(t) = t_{ar1}(t) - t_{ar1}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-N_1}{t_{ar1}^2 C_{10}} & \frac{-1}{t_{ar1}^2 C_{10}} \\ \frac{N_1}{t_{ar1}} & \frac{-1}{t_{ar1}} \end{bmatrix}, \\
 A_{d_1} &= \begin{bmatrix} \frac{-N_1}{t_{ar1}^2 C_{10}} & \frac{-1}{t_{ar1}^2 C_{10}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{w_1} = \begin{bmatrix} \frac{t_{ar1} - T_{p1}}{t_{ar1}^2 C_{10}} & \frac{t_{ar1} - T_{p1}}{t_{ar1}^2 C_{10}} \\ \frac{-T_{p1}}{t_{ar1}} & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{-t_{ar1} C_{10}^2}{2N_1^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{y_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{z_1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_{10}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dans (2.3), les variables d'état représentent les variables d'écart de la largeur moyenne de la fenêtre de congestion et de la longueur moyenne de la file d'attente, respectivement, l'entrée représente la variable d'écart de la probabilité de marquage/éjection, la sortie mesurée est la variable d'écart de la longueur moyenne de la file d'attente et la sortie contrôlée est la variation du temps d'aller-retour par rapport à la valeur souhaitée. D'autre part, puisque les variations de la bande passante disponible du lien provoquées par un flux brusque à court terme sont inévitables, il est plus pratique de considérer  $w_1(t)$  comme une perturbation. Par ailleurs, le retard  $\tau_1(t)$  satisfait  $0 \leq \tau_1(t) \leq h_{\max_1}$  et  $0 \leq \dot{\tau}_1(t) \leq d_1 < 1$ .

## 2.2.4 Trafic à multi-classes

Étant donné maintenant qu'il existe plusieurs classes des flux TCP traversant le routeur, chacune avec un retard spécifique, nous pouvons réécrire le système (2.3) dans le nouveau modèle général d'espace d'état suivant :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{d_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_1(t)) \\ \vdots \\ x_m(t - \tau_m(t)) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t - \tau_1(t)) \\ \vdots \\ u_m(t - \tau_m(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{w_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{w_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_m(t) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{y_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{z_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{z_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le système (2.4) peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^m \left( A_{d_{\tau_i}} x(t - \tau_i(t)) + B_{\tau_i} u(t - \tau_i(t)) \right) + D_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

où  $\mathcal{X}(t) = [\mathcal{X}_1^T(t) \dots \mathcal{X}_m^T(t)]^T$ ,  $\mathcal{X}(t) = x(t), u(t), w(t), y(t), z(t)$ ,  $F = \text{diag}\{F_1, \dots, F_m\}$ ,  $F = A, D_w, C_y, C_z$  et  $H_{\tau_1} = \text{diag}\{H_1, \dots, 0\}, \dots, H_{\tau_m} = \text{diag}\{0, \dots, H_m\}$ ,  $H = A_d, B$ .

Le signal de contrôle effectif qui peut être appliqué au système (2.5) est donné par  $u(t) = \text{sat}(u(t), u_{\max(i)})$ . Par conséquent, le système (2.5) devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^m \left( A_{d_{\tau_i}} x(t - \tau_i(t)) + B_{\tau_i} \text{sat}(u(t - \tau_i(t)), u_{\max(i)}) \right) + D_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

**Remarque 2.2 :** Afin de compléter les tâches précédentes<sup>7</sup> où des nouvelles idées ont été traitées, une nouvelle piste est ouverte dans ce travail. Alors, la nouveauté dans ce travail est que nous sommes en mesure de considérer le trafic hétérogène dans le réseau, c'est-à-dire le trafic à multi-classe où chaque classe peut avoir sa propre stratégie d'éjection de paquets, sa longueur de la file d'attente et son partage de la bande passante. Cette fonctionnalité rapproche l'état de l'art des demandes réelles de gestion de réseau.

## 2.3 Système QTP

### 2.3.1 Modèle dynamique

Le système à quatre réservoirs a été introduit<sup>8</sup> à des fins éducatives, spécifiquement pour visualiser différentes notions et phénomènes de la théorie du contrôle dans des conditions de laboratoire.

Les réseaux d'eau sont généralement composés d'un grand nombre de tuyaux interconnectés, de réservoirs, de pompes, de vannes et d'autres éléments hydrauliques pour acheminer l'eau à différents endroits. Pour cette raison, l'eau est pompée dans le système QTP vers les réservoirs par deux pompes indépendantes comme il est illustré sur la Figure 2.3<sup>9</sup>. Puis, les réservoirs situés en haut rejettent l'eau dans les réservoirs correspondants en bas. Il faut noter que le contrôle du niveau de liquide dans les réservoirs et le flux entre

7. El Fezazi et al. (2015b), El Fezazi et al. (2016a), El Fezazi et al. (2016b), El Fezazi et al. (2016c), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2018b), El Fezazi et al. (2018c)

8. Johansson (1997), Johansson et al. (1999), Johansson (2000)

9. El Haoussi et al. (2011)

les réservoirs est un problème fondamental dans les industries de processus<sup>10</sup>.

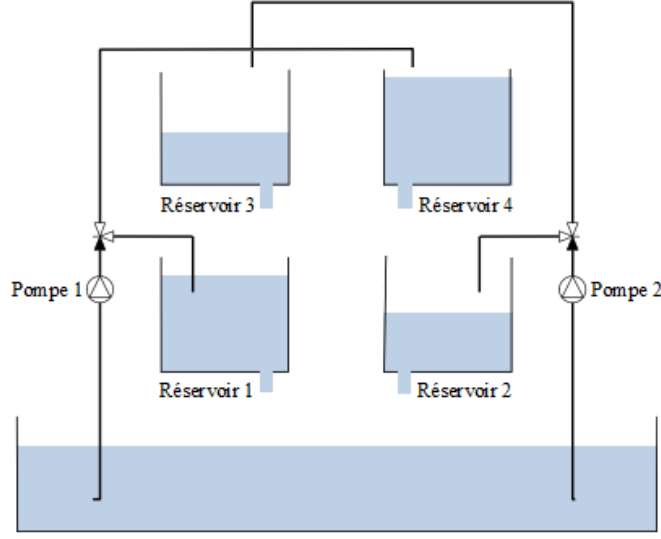


FIGURE 2.3 – Représentation schématique du système QTP.

En supposant qu'on a un flux parfait de l'eau et des réservoirs cylindriques, les équations différentielles qui présentent l'évolution dans le temps des niveaux d'eau dans chaque réservoir sont (Théorèmes de Bernoulli et Torricelli)<sup>11</sup> :

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1(t) &= -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{S_1} \sqrt{2gh_3(t - t_1(t))} + \frac{\gamma_1 k_1}{S_1} \nu_1(t - t_2(t)) \\
 \dot{h}_2(t) &= -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{2gh_2(t)} + \frac{a_4}{S_2} \sqrt{2gh_4(t - t_1(t))} + \frac{\gamma_2 k_2}{S_2} \nu_2(t - t_2(t)) \\
 \dot{h}_3(t) &= -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{S_3} \nu_2(t - t_3(t)) - \frac{k_{d1}}{S_3} d_1(t) \\
 \dot{h}_4(t) &= -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{2gh_4(t)} + \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{S_4} \nu_1(t - t_3(t)) - \frac{k_{d2}}{S_4} d_2(t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$h_q$  est le niveau d'eau dans le réservoir  $q$  ;

$a_q$  est la section transversale du trou de drainage ;

$S_q$  est la section transversale du réservoir  $q$  ;

$g$  est l'accélération due à la gravité ;

$\gamma_s$  est le réglage de la vanne ;

$k_s$  est le paramètre de la pompe ;

$\nu_s$  est la tension à la pompe  $s$  ;

$k_s \nu_s$  est le flux de la pompe  $s$  ;

10. Azam (2017), El Fezazi et al. (2017d), El Haoussi et al. (2011), Kardos and Kutasi (2017), Prusty et al. (2015), Zhou et al. (2015)

11. El Fezazi et al. (2017d), El Haoussi et al. (2011)

$\gamma_1 k_1 \nu_1$  est le flux vers le réservoir 1 ;

$\gamma_2 k_2 \nu_2$  est le flux vers le réservoir 2 ;

$(1 - \gamma_2) k_2 \nu_2$  est le flux vers le réservoir 3 ;

$(1 - \gamma_1) k_1 \nu_1$  est le flux vers le réservoir 4 ;

$d_s$  est la perturbation du flux du réservoir 3 et du réservoir 4 ;

$k_{d_s}$  est le gain correspondant.

**Remarque 2.3 :** Dans ce modèle nous avons considéré que le remplissage est parfaitement symétrique lorsque les retards de transport dans les circuits sont  $t_r$  où  $q = 1, 2, 3, 4$ ,  $r = 1, 2, 3$  et  $s = 1, 2$ .

**Remarque 2.4 :** Il y a deux vannes qui distribuent les flux aux réservoirs. Les paramètres des vannes  $\gamma_s$  sont des paramètres prédéfinis qui régulent le partage de l'eau dans les réservoirs correspondants. Alors, les positions des vannes peuvent être exprimées avec deux paramètres  $\gamma_s \in [0, 1]$ .

### 2.3.2 Représentation d'état et discrétisation

Après l'étape de linéarisation de (2.7), on obtient un modèle dynamique où les niveaux d'eau dans les quatre réservoirs sont les variables d'état, les tensions des deux pompes comme entrées du processus, le niveau d'eau dans le réservoir 1 en tant que la sortie mesurée et les niveaux d'eau dans les réservoirs 1 et 2 comme la sortie contrôlée. Alors, ce modèle est présenté dans les équations ci-dessous<sup>12</sup> avec la prise en compte de la perturbation des flux.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{0_c} x(t) + A_{1_c} x(t - \tau_1(t)) + B_{0_c} u(t - \tau_2(t)) + B_{1_c} u(t - \tau_3(t)) + D_{w_c} w(t) \\ y(t) &= C_{y_c} x(t) \\ z(t) &= C_{z_c} x(t) \end{aligned}$$

dans lequel  $\delta h_q = h_q - h_{q0}$ ,  $\delta \nu_s = \nu_s - \nu_{s0}$ ,  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_2$ ,  $t_3 = \tau_3$  et

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}, \quad A_{0_c} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \end{bmatrix}, \\ A_{1_c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a_3}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad B_{0_c} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{S_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

12. El Fezazi et al. (2017d), El Haoussi et al. (2011)

$$B_{1c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{S_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{S_4} & 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, D_{w_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{k_{d_1}}{S_3} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{d_2}}{S_4} \end{bmatrix},$$

$$y = h_1, C_{y_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, C_{z_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part, la conception du contrôleur pour le système QTP sera basée sur le système discret à retards (2.8) en utilisant une approche d'échantillonnage périodique<sup>13</sup>.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_0x(k) + A_1x(k - d_1(k)) + B_0u(k - d_2(k)) + B_1u(k - d_3(k)) + D_w w(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{A_{0c}T}, A_1 = \int_0^T e^{A_{0c}s} A_{1c} ds, B_0 = \int_0^T e^{A_{0c}s} B_{0c} ds, \\ B_1 &= \int_0^T e^{A_{0c}s} B_{1c} ds, D_w = \int_0^T e^{A_{0c}s} D_{w_c} ds, C_y = C_{y_c}, C_z = C_{z_c} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dans ce cas,  $d_{\min_r} \leq d_r(k) \leq d_{\max_r}$ <sup>14</sup> :  $d_r(k)$  sont des nombres entiers positifs représentant les retards, et  $d_{\min_r}$  et  $d_{\max_r}$  sont des nombres entiers positifs et connus.

Le signal de contrôle effectif qui peut être appliqué au système (2.8) est donné par  $u(k) = \text{sat}(u(k), u_{\max})$ . Par conséquent, le système (2.8) devient :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_0x(k) + A_1x(k - d_1(k)) + B_0\text{sat}(u(k - d_2(k)), u_{\max}) \\ &\quad + B_1\text{sat}(u(k - d_3(k)), u_{\max}) + D_w w(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Remarque 2.5 :** Le système QTP a suscité un grand intérêt ces dernières années<sup>15</sup>. Ensuite, il faut noter que la plupart de ces travaux consistent à donner un modèle non-linéaire du système QTP sans tenir compte des retards de transport entre les vannes et les réservoirs qui peuvent facilement être ajoutés en retardant l'entrée d'eau dans les réservoirs. D'autre part, malgré que certains chercheurs<sup>16</sup> ont pris en compte ces retards de

13. El Fezazi et al. (2017b), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2017d), El Fezazi et al. (2018b)

14. El Fezazi et al. (2016c), El Fezazi et al. (2017c), El Fezazi et al. (2017d), El Fezazi et al. (2018b), Zoulagh et al. (2017)

15. Azam (2017), Ferrese et al. (2014), Hajiani and Poshtan (2014), Kardos and Kutasi (2017), Prusty et al. (2015), Zhou et al. (2015)

16. El Haoussi et al. (2011)

transport mais d'un autre côté ils ont ignoré des choses importantes comme les perturbations du flux et les saturations de la tension<sup>17</sup>. Pour cette raison, nous avons introduit des retards dans le modèle et nous allons nous intéresser aux performances de  $H_\infty$ , en prenant en compte la sortie contrôlée et la perturbation des flux sans oublier les saturations de tension. Donc, la description du processus avec la modélisation proposée est plus réaliste et donne un problème de contrôle plus intéressant et alors elle peut représenter un aperçu de la recherche future sur le même sujet.

## 2.4 Technologie SbW

### 2.4.1 Description détaillée

La stratégie de la technologie SbW consiste à éliminer la liaison mécanique entre le volant et la roue avant comme il est indiqué sur la Figure 2.4<sup>18</sup>. Dans le système de direction classique, la rotation du volant donnée par un conducteur est transmise via un arbre intermédiaire qui est connecté via le couple crémaillère/pignon aux roues avant. Par conséquent, l'angle de braquage de la roue avant est proportionnel à la rotation du volant. Dans le système SbW, l'arbre intermédiaire est retiré et plusieurs capteurs et actionneurs sont attachés au volant et à la roue avant<sup>19</sup>. Le mouvement du volant est alors converti en signaux électriques et câblé à une ECU qui contrôle un actionneur de la roue avant pour faire le tourner de la même manière que les comportements du volant.

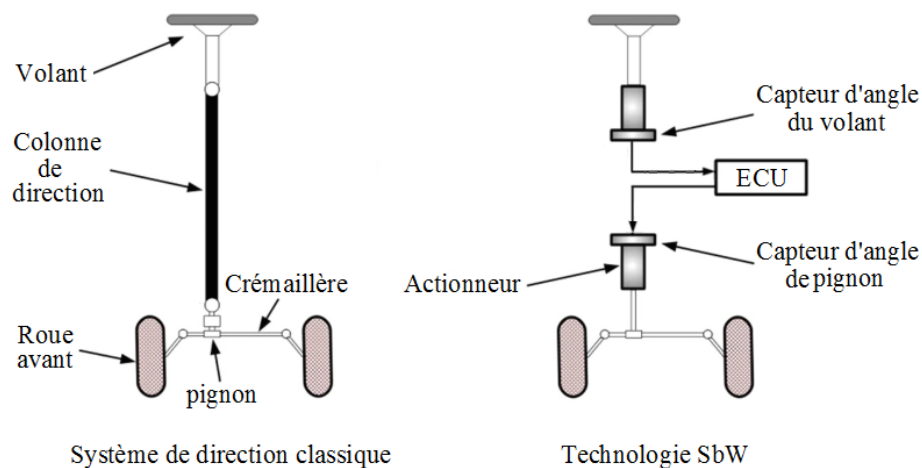


FIGURE 2.4 – Conversion du système de direction classique à la technologie SbW.

D'autre part, le modèle dynamique du système SbW établit une relation entre le mécanisme de direction, la dynamique électrique du moteur DC et le couple d'interaction

17. El Fezazi et al. (2017d)

18. Zakaria et al. (2017)

19. Yih et al. (2005)

crémaillère/pignon. La Figure 2.5 montre alors le modèle du mécanisme de direction équipé d'un moteur DC qui fait tourner le pignon et la crémaillère à l'angle désiré<sup>20</sup>.

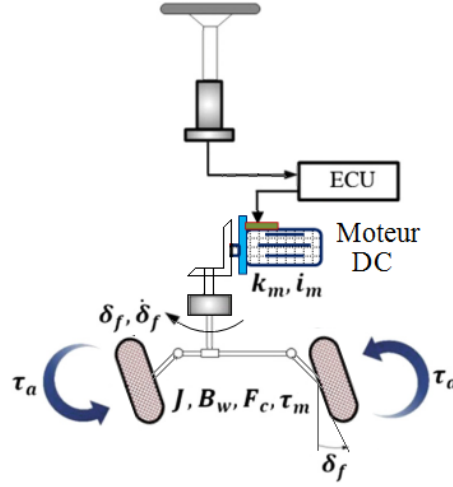


FIGURE 2.5 – Modèle schématique de SbW.

## 2.4.2 Modèle dynamique

Dans ce travail, la roue avant dirigée sur la Figure 2.5 peut être traitée comme la charge du moteur de direction et sa rotation satisfait l'équation dynamique suivante<sup>21</sup> :

$$\ddot{\delta}_f = -\frac{B_w}{J}\dot{\delta}_f + \frac{1}{J}\tau_m - \frac{1}{J}\tau_a - \frac{F_C}{J}\text{sign}(\dot{\delta}_f) \quad (2.11)$$

où

$J$  est le moment d'inertie du moteur DC ;

$B_w$  est la constante de frottement visqueux du moteur DC ;

$\delta_f$  est l'angle de braquage de la roue avant ;

$\tau_a$  est le couple d'auto-alignement ;

$\tau_m$  est le couple du moteur DC ;

$F_C$  est la constante de frottement de Coulomb ;

$F_C \text{sign}(\dot{\delta}_f)$  est le frottement de Coulomb dans le système de direction.

Basé sur la symétrie de la géométrie du véhicule (modèle bicyclette<sup>22</sup>), les forces agissant sur la roue avant et la roue arrière pilotées lors d'une manœuvre sont illustrées dans la Figure 2.6. De la même figure, la traînée pneumatique est la distance entre le centre du pneu et le point où la force latérale est appliquée, alors que la traînée mécanique est

20. Mohamed and Albatlan (2014), Virgala et al. (2013)

21. Anwar and Chen (2007)

22. Anwar (2005), Anwar and Chen (2007)

la distance entre le centre du pneu et le point sur le sol où le pneu pivote en raison de l'angle de chasse. D'autre part, le couple d'auto-alignement est dû aux forces de contact du pneu agissant sur le système de direction pour résister à la direction de s'éloigner de la position en ligne droite.

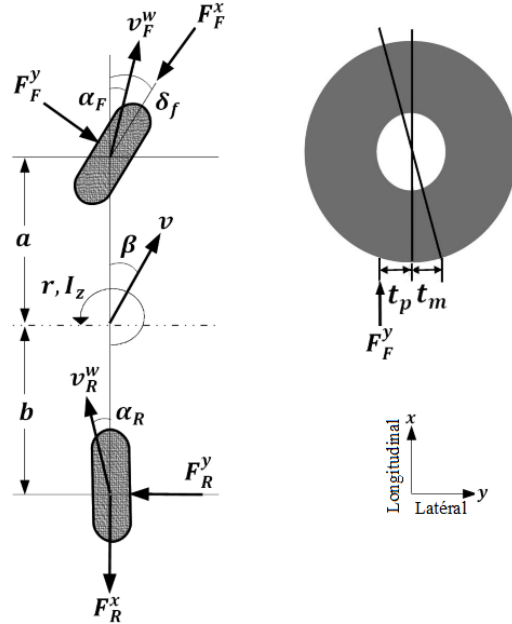


FIGURE 2.6 – modèle bicyclette.

Aux petits angles de dérive (environ moins de  $6^\circ$ ), les équations pour calculer les deux couples sont données comme suit :

$$\tau_a = F_F^y(t_p + t_m), \quad F_F^y = -C_F^\alpha \alpha_F, \quad F_R^y = -C_R^\alpha \alpha_R, \quad \tau_m = k_m \dot{i}_m \quad (2.12)$$

où

$F_F^y$  est la force latérale de la roue avant ;

$F_R^y$  est la force latérale de la roue arrière ;

$F_F^x$  est la force longitudinale de la roue avant ;

$F_R^x$  est la force longitudinale de la roue arrière ;

$v$  est la vitesse du véhicule au centre de gravité ;

$v_F^w$  est la vitesse de la roue avant ;

$v_R^w$  est la vitesse de la roue arrière ;

$C_F^\alpha$  est le coefficient de virage de la roue avant ;

$C_R^\alpha$  est le coefficient de virage de la roue arrière ;

$\alpha_F$  est l'angle de dérive de la roue avant ;

$\alpha_R$  est l'angle de dérive de la roue arrière ;

$t_p$  est la traînée pneumatique ;

$t_m$  est la traînée mécanique ;

$k_m$  est la constante du moteur DC ;

$i_m$  est le courant de l'induit.

En outre, les angles de dérive de la roue avant et la roue arrière peuvent être écrits sous la forme (2.13).

$$\alpha_F = -\delta_f + \beta + \frac{a}{v}r, \quad \alpha_R = \beta - \frac{b}{v}r \quad (2.13)$$

où

$\beta$  est l'angle de dérive du véhicule ;

$r$  est la vitesse de lacet au centre de gravité ;

$a$  est la distance entre la roue avant et le centre de gravité du véhicule ;

$b$  est la distance entre la roue arrière et le centre de gravité du véhicule ;

$m$  est la masse du véhicule.

D'autre part, la dynamique de la vitesse de lacet et la dynamique de l'angle de dérive du véhicule peuvent être décrites par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v(\dot{\beta} + r) &= \frac{1}{m}(F_F^y + F_R^y) \\ I_z \dot{r} &= aF_F^y - bF_R^y \end{aligned} \quad (2.14)$$

où

$I_z$  est le moment d'inertie du véhicule.

Puis, en substituant (2.12) et (2.13) dans (2.11) et (2.14), les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_f &= -\frac{B_w}{J}\dot{\delta}_f + \frac{k_m}{J}i_m - \frac{C_F^\alpha(t_p + t_m)}{J}\delta_f + \frac{C_F^\alpha(t_p + t_m)}{J}\beta + \frac{C_F^\alpha(t_p + t_m)a}{Jv}r \\ &\quad - \frac{F_C}{J}\text{sign}(\dot{\delta}_f) \\ \dot{\beta} &= \frac{C_F^\alpha}{mv}\delta_f - \frac{C_F^\alpha + C_R^\alpha}{mv}\beta + \left(-1 + \frac{C_R^\alpha b - C_F^\alpha a}{mv^2}\right)r \\ \dot{r} &= \frac{C_F^\alpha a}{I_z}\delta_f + \frac{C_R^\alpha b - C_F^\alpha a}{I_z}\beta - \frac{C_F^\alpha a^2 + C_R^\alpha b^2}{I_z v}r \end{aligned} \quad (2.15)$$

Un moteur DC se compose de deux sous-processus : électrique et mécanique<sup>23</sup>. La Figure 2.7 montre alors un circuit électrique simplifié du moteur DC et un modèle mécanique d'un rotor.

---

23. Virgala et al. (2013)

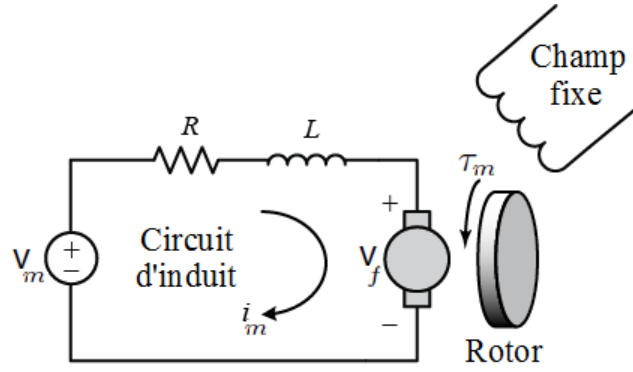


FIGURE 2.7 – Modèle de sous-système du moteur DC.

En utilisant  $V_f = K_f \dot{\delta}_f$ , le modèle mathématique du circuit électrique est exprimé par l'équation suivante :

$$\dot{i}_m = -\frac{K_f}{L} \dot{\delta}_f - \frac{R}{L} i_m + \frac{1}{L} V_m \quad (2.16)$$

où

$V_f$  est la force électromotrice ;

$K_f$  est la constante de la force électromotrice ;

$L$  est l'inductance de l'induit ;

$R$  est la résistance de l'induit ;

$V_m$  est la tension aux bornes de l'induit.

### 2.4.3 Représentation d'état

En combinant les équations (2.15) et (2.16) dans une forme d'espace d'état, le modèle de système dynamique de direction est complété maintenant où l'angle de braquage de la roue avant, la vitesse angulaire de la roue avant, le courant de l'induit, l'angle de dérive du véhicule et la vitesse de lacet sont les variables d'état. Le signal de contrôle est généralement limité par des contraintes physiques ou de sécurité, c'est pourquoi la tension aux bornes de l'induit est considérée comme une fonction saturée. D'autre part, l'angle de braquage de la roue avant peut être considéré comme la sortie mesurée, tandis que la vitesse angulaire de la roue avant et le courant de l'induit peuvent être considérés comme la sortie contrôlée. En tenant compte du terme de perturbation, le système est finalement obtenu et présenté dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B \text{sat}(u(t), u_{\max}) + D_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où

$$x = \begin{bmatrix} \delta_f \\ \dot{\delta}_f \\ i_m \\ \beta \\ r \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u, u_{\max}) = V_m, \quad w = \text{sign}(\dot{\delta}_f), \quad y = \delta_f, \quad z = \begin{bmatrix} \dot{\delta}_f \\ i_m \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_F^\alpha(t_p+t_m)}{J} & -\frac{B_w}{J} & \frac{k_m}{J} & -\frac{C_F^\alpha(t_p+t_m)}{J} & -\frac{C_F^\alpha(t_p+t_m)a}{Jv} \\ 0 & -\frac{K_f}{L} & -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ \frac{C_F^\alpha}{mv} & 0 & 0 & -\frac{C_F^\alpha+C_R^\alpha}{mv} & -1 + \frac{C_R^\alpha b - C_F^\alpha a}{mv^2} \\ \frac{C_F^\alpha a}{I_z} & 0 & 0 & \frac{C_R^\alpha b - C_F^\alpha a}{I_z} & -\frac{C_R^\alpha a^2 + C_F^\alpha b^2}{I_z v} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F_C}{J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

**Remarque 2.6 :** Plusieurs stratégies de contrôle ont été utilisées pour perfectionner les caractéristiques de conduite<sup>24</sup>. À cet égard, nous avons continué à travailler dans ce sens en introduisant de nombreuses choses importantes qui n'ont pas été discutées auparavant comme l'insertion du circuit électrique dans la modélisation de la technologie SbW, la nature saturante et l'approche des retards inclus (voir le chapitre 5).

## 2.5 Dynamique du MN dans un WT

### 2.5.1 Description détaillée

Les aérodynamiciens utilisent des WTs<sup>25</sup> pour tester des modèles d'avions proposés. Dans le tunnel, l'ingénieur contrôle soigneusement les conditions d'écoulement qui affectent les forces sur l'avion et par l'utilisation des techniques de diagnostic spéciales il peut améliorer ses performances.

Les WTs sont généralement conçues pour un usage et une plage de vitesse spécifiques, c'est pourquoi il y a différents types d'eux qui dépendent du MN qui est un rapport entre la vitesse de l'objet et la vitesse du son. Il existe des tunnels spéciaux pour le vol subsonique ( $MN < 1$ ), transsonique ( $MN \simeq 1$ ), supersonique ( $1 < MN < 5$ ) et hypersonique ( $MN > 5$ ) comme il est indiqué dans la Figure 2.8. Un WT peut être ouvert et aspirer

24. Zakaria et al. (2017), Anwar (2005), Anwar and Chen (2007), Yih et al. (2005)

25. Crozier et al. (2014), Kelley et al. (2012), Wang et al. (2015)

l'air de l'extérieur du tunnel dans la section d'essai puis évacuer vers l'extérieur, ou il peut être fermé avec l'air recirculant à l'intérieur du tunnel. Le tunnel de la Figure 2.9 est fermé que nous voyons d'en haut où l'air à l'intérieur de ce tunnel est amené à se déplacer autour du circuit par le ventilateur en passant par le modèle qui est monté dans la section d'essai. Ce modèle est instrumenté pour fournir des données de test et pour obtenir des données significatives, l'ingénieur doit s'assurer que les paramètres d'écoulement du MN correspondent aux conditions de vol souhaitées.

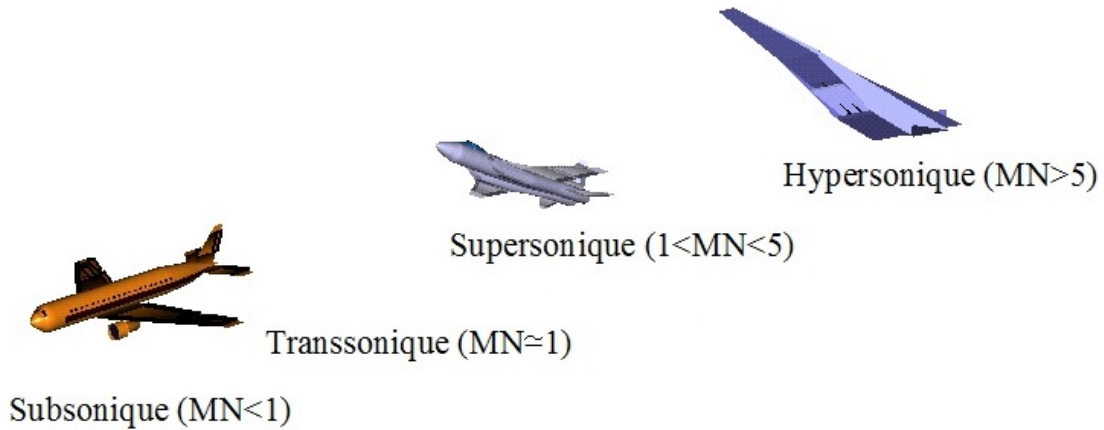


FIGURE 2.8 – Différents types de vol.

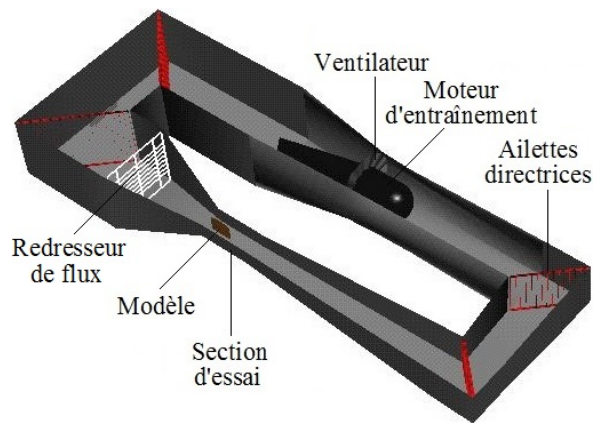


FIGURE 2.9 – Modèle de WT.

## 2.5.2 Modèle dynamique

La réponse dynamique des déviations du MN est décrite par les équations suivantes <sup>26</sup> :

$$\frac{1}{\zeta} \delta \dot{M}(t) + \delta M(t) = \varsigma \delta \theta(t - \tau(t))$$

$$\delta \ddot{\theta}(t) + 2\rho\varphi \delta \dot{\theta}(t) + \varphi^2 \delta \theta(t) = \varphi^2 \text{sat}(\delta \theta_a(t), u_{\max})$$

26. El Fezazi et al. (2017a), El Fezazi et al. (2018a), Manitius (1984), Manitius and Tran (1986)

où

$\delta M$  est les déviations du MN ;

$\delta\theta$  est l'angle de l'ailette directrice dans un ventilateur d'entraînement (position de l'actionneur) ;

$\delta\theta_a$  est l'entrée de l'actionneur ;

$\tau(t)$  est le temps nécessaire au mouvement de l'air entre les ailettes directrices du ventilateur et la section d'essai du tunnel.

D'autre part,  $\varphi$ ,  $\zeta$ ,  $\varsigma$  et  $\varrho$  sont des paramètres qui, à certain point de fonctionnement (la vitesse du ventilateur, le taux d'injection d'azote liquide, le taux d'évacuation d'azote gazeux et la densité de gaz), peuvent être supposés constants.

### 2.5.3 Modélisation

Un modèle linéarisé simplifié de la dynamique du MN est donné par<sup>27</sup> :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + A_{d_c} x(t - \tau_1(t)) + B_c \text{sat}(u(t), u_{\max}) + D_{w_c} w(t) \\ y(t) &= C_{y_c} x(t) \\ z(t) &= C_{z_c} x(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le retard  $\tau_1(t)$  satisfait  $0 \leq \tau_1(t) \leq h_{\max_1}$  et  $0 \leq \dot{\tau}_1(t) \leq d < 1$ . Par ailleurs, les variables d'écart de  $M$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  sont les variables d'état, la variable d'écart de  $\theta_a$  est l'entrée du processus, la variable d'écart de  $M$  est la sortie mesurée et les variables d'écart de  $M$  et  $\theta$  sont la sortie contrôlée avec l'inclusion du terme de perturbation, alors :

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varphi^2 & -2\varrho\varphi \end{bmatrix}, \quad A_{d_c} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi^2 \end{bmatrix}, \\ u &= \delta\theta_a, \quad D_{w_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad y = \delta M, \quad C_{y_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta\theta \end{bmatrix}, \quad C_{z_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'accent est mis sur le fait que le contrôleur utilisé est délivré par un échantillonneur à des instants  $t_{\kappa}$ , satisfaisant  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\kappa} < \dots$  avec  $t_{\kappa+1} - t_{\kappa} \leq h_{\max_2}$ , où  $h_{\max_2}$  indique la période d'échantillonnage maximale. Alors, le signal de contrôle est calculé sur la base d'une loi discrète. D'un autre côté, nous supposons que les signaux de contrôle sont mesurés et transmis rapidement et que le retard de communication est suffisamment faible pour être ignoré (le canal de communication est idéal) ; alors, la loi de contrôle est

---

27. El Fezazi et al. (2018a)

exprimée par  $u(t) = u(t_\kappa)$ ,  $t_\kappa < t < t_{\kappa+1}$ . Pour unifier la représentation d'état du système étudié, on introduit le retard  $\tau_2(t) = t - t_\kappa$  qui satisfait  $0 \leq \tau_2(t) \leq h_{\max_2}$  et  $\dot{\tau}_2(t) = 1$ .

Alors, le système (2.18) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + A_{d_c} x(t - \tau_1(t)) + B_c \text{sat}(u(t - \tau_2(t)), u_{\max}) + D_w w(t) \\ y(t) &= C_{y_c} x(t) \\ z(t) &= C_{z_c} x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Remarque 2.7 :** Le système discret à retards (2.20) est obtenu après l'utilisation de l'approche d'échantillonnage périodique (voir les équations (2.9)) où  $0 \leq d(k) \leq d_{\max}$ <sup>28</sup> avec  $d(k)$  est un nombre entier positif représentant le retard du système.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k - d(k)) + B \text{sat}(u(k), u_{\max}) + D_w w(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Remarque 2.8 :** Les travaux effectués précédemment<sup>29</sup> ont ignoré certains effets importants (nature saturante, perturbation) qui rendraient le système plus proche de la réalité. Ces effets pratiques sont très importants pour nous parce qu'ils nous ont permis de tester l'applicabilité de nos approches développées. D'autre part, les chercheurs peuvent faire un effort pour améliorer encore les résultats et ouvrir la voie vers de nouveaux axes de recherche dans ce domaine qui est un problème ouvert en perpétuel évolution.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé de présenter les applications qui ont motivé notre travail tout au long de cette thèse. Pour cette raison, des descriptions détaillées des réseaux TCP/IP, du système QTP, de la technologie SbW et de la dynamique du MN sont présentées ici et elles résultent de la réalisation d'un modèle d'espace d'état linéaire basé sur un modèle mathématique spécifique pour chaque application. D'autre part, nous avons ensuite évoqué l'émergence de nombreux travaux dédiés à l'utilisation du principe de rétroaction propre à l'Automatique pour la synthèse des contrôleurs efficaces assurant certaines performances. Alors, l'objectif de l'étude actuelle est de concevoir et présenter une analyse correspondante de contrôle  $H_\infty$  de la congestion dans un routeur, du niveau d'eau dans des réservoirs et de la dynamique d'un véhicule et du MN dans un WT en tenant compte des saturations des entrées et des perturbations. Des études détaillées et

28. El Fezazi et al. (2017b), El Fezazi et al. (2018c)

29. Germani et al. (2000), Liu (2011), Loukianov et al. (2005), Manitius (1984), Manitius and Tran (1986), Sename (2007)

des simulations seront effectuées en utilisant les modèles des espaces d'état obtenus dans les chapitres suivants.

# Conception d'un contrôleur pour les réseaux TCP/IP

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le problème d'AQM avec une approche basée sur la théorie du contrôle. Pour cette raison, un contrôleur est proposé pour assurer la stabilité et un certain niveau de performance des systèmes retardés avec des entrées saturantes et soumis à des perturbations. Des conditions suffisantes sous forme des LMIs ont été alors données pour garantir la stabilité basées sur la fonctionnelle de L-K où l'approche polytopique pour modéliser les effets de la saturation est utilisée et des matrices libres de pondération sont employées pour offrir plus de flexibilité afin de réduire le conservatisme des résultats. À partir des conditions obtenues, des algorithmes d'optimisation sont formulés pour trouver les gains du contrôleur et en même temps pour maximiser l'estimation de la région d'attraction.

## 3.2 Formulation du problème

Concernant l'étude et la formulation du problème, l'hypothèse ci-dessous liée au système (2.6) est faite.

**Hypothèse 3.1 :** Les paires  $(A + A_{d_{\tau_1}} + \dots + A_{d_{\tau_m}}, B_{\tau_1} + \dots + B_{\tau_m})$  et  $(A, C_y)$  sont contrôlables et observables, respectivement.

**Remarque 3.1 :** l'Hypothèse 3.1 est importante dans les problèmes de synthèse du contrôleur. Il peut en effet être étendu à  $(A + A_{d_{\tau_1}} + \dots + A_{d_{\tau_m}}, B_{\tau_1} + \dots + B_{\tau_m})$ -stabilisabilité et  $(A, C_y)$ -déteçtabilité.

En supposant que notre mécanisme d'AQM utilise un contrôleur de retour d'état du type suivant :

$$u(t) = Kx(t) = \begin{bmatrix} K_{11}\delta W_1(t) + K_{12}\delta q_1(t) \\ \vdots \\ K_{m1}\delta W_m(t) + K_{m2}\delta q_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Les signaux de contrôle appliqués à (2.6) sont donnés par  $u(t - \tau_i(t)) = K_i x(t - \tau_i(t))$ .

En utilisant le Lemme 1.3 ( $v(t - \tau_i(t)) = H_i x(t - \tau_i(t))$ ), le système (2.6) devient comme il est indiqué dans les équations (3.2) où  $A_{dK_{ij}} = A_{d\tau_i} + B_{\tau_i}(D_{ij}K_i + D_{ij}^-H_i)$ ,  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1$  et  $\lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^m \lambda_j A_{dK_{ij}} x(t - \tau_i(t)) + D_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3.3 Résultats obtenus

#### 3.3.1 Trafic à multi-classes

Nous allons d'abord établir les conditions qui satisfont le contrôle  $H_\infty$  en considérant  $m$  différentes classes de trafic traversant le routeur où chaque classe a ses spécificités.

**Théorème 3.1**<sup>1</sup> : Le système (3.2) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m$ ,  $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_m$ , des matrices de taille appropriée  $X$ ,  $\bar{N}_{11}, \dots, \bar{N}_{1m}$ ,  $\bar{N}_{21}, \dots, \bar{N}_{2m}$ ,  $U_1, \dots, U_m$ ,  $G_1, \dots, G_m$  et un scalaire réel  $\alpha$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \hat{\Sigma}_{11} & \dots & \hat{\Sigma}_{1m} & D_w & h_{\max_1} \bar{N}_{11} & \dots & h_{\max_m} \bar{N}_{1m} & X C_z^T \\ * & \Sigma_{22} & \hat{\Sigma}_{21} & \dots & \hat{\Sigma}_{2m} & \alpha D_w & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Sigma}_{11} & \dots & 0 & 0 & h_{\max_1} \bar{N}_{21} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & \tilde{\Sigma}_{mm} & 0 & 0 & \dots & h_{\max_m} \bar{N}_{2m} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & -h_{\max_1} \bar{R}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & -h_{\max_m} \bar{R}_m & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & G_{1(i)}^T & \dots & G_{m(i)}^T \\ * & \mu u_{1\max(i)}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \mu u_{m\max(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\mu - \omega \leq 0 \quad (3.5)$$

1. El Fezazi et al. (2018e)

où

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= AX^T + XA^T + \sum_{i=1}^m (\bar{N}_{1i} + \bar{N}_{1i}^T + \bar{Q}_i), \quad \Sigma_{12} = \bar{P} - X^T + \alpha XA^T, \\ \Sigma_{22} &= \sum_{i=1}^m h_{\max_i} \bar{R}_i - \alpha(X + X^T), \quad \hat{\Sigma}_{1i} = A_{d_{\tau_i}} X^T + B_{\tau_i} (D_{i_j} U_i + D_{i_j}^- G_i) - \bar{N}_{1i} + \bar{N}_{2i}^T, \\ \hat{\Sigma}_{2i} &= \alpha A_{d_{\tau_i}} X^T + \alpha B_{\tau_i} (D_{i_j} U_i + D_{i_j}^- G_i), \quad \tilde{\Sigma}_{ii} = -\bar{N}_{2i} - \bar{N}_{2i}^T - (1 - d_i) \bar{Q}_i.\end{aligned}$$

De plus, les gains du contrôleur sont  $K_1 = U_1 X^{-T}, \dots, K_m = U_m X^{-T}$  et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-\bar{h}_{\max}, 0], \quad \max_{[-\bar{h}_{\max}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_1}{\iota_1} \right\} \\ \bar{h}_{\max} &= \max\{h_{\max_1}, \dots, h_{\max_m}\}\end{aligned}\tag{3.6}$$

avec tout  $\varpi_1$  satisfaisant  $\varpi_1 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\iota_1 = \bar{\lambda}(X^{-1} \bar{P} X^{-T}) + \sum_{i=1}^m \left\{ h_{\max_i} \bar{\lambda}(X^{-1} \bar{Q}_i X^{-T}) + \frac{h_{\max_i}^2}{2} \bar{\lambda}(X^{-1} \bar{R}_i X^{-T}) \right\}$$

**Preuve 3.1 :** Voir l'Annexe.

**Remarque 3.2 :** Les slacks variables  $Y_1$  et  $Y_2$  sont introduites par l'équation (6.14) (voir l'Annexe) afin de réduire le conservatisme des conditions de stabilité<sup>2</sup>. On peut voir à partir de la preuve que  $\dot{V}(t)$  n'est pas affectée par  $Y_1$  et  $Y_2$ . Ces matrices conduisent donc à une condition (3.3) plus flexible et assurent plus de degré de liberté. Cet avantage sera apprécié dans les exemples numériques à la fin de ce chapitre.

**Remarque 3.3 :** De nouvelles conditions de stabilité pour les systèmes à retards ont été obtenues en utilisant l'inégalité étendue de Jensen<sup>3</sup> pour borner le terme quadratique  $\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$ . Alors, cette inégalité contient des matrices libres qui peuvent conduire à des résultats moins conservatifs que l'inégalité de Jensen<sup>4</sup> et montrer l'efficacité dans les simulations par la suite.

### 3.3.2 Contraintes d'implémentation

Puisque  $\delta W_1$  n'est pas disponible sur les routeurs, nous utilisons l'approximation suivante<sup>5</sup> :

$$\delta W_1 = \frac{t_{ar1}}{N_1} \left( \frac{N_1}{t_{ar1}} W_1 - C_1 \right) = \frac{t_{ar1}}{N_1} \times \dot{q}_1$$

2. El Fezazi et al. (2015a), El Fezazi et al. (2017a), El Fezazi et al. (2018a), El Fezazi et al. (2018d), Zakaria et al. (2015), Lamrabet et al. (2017)

3. El Haoussi et al. (2011)

4. Ji and Su (2015)

5. Sall et al. (2009), Zhang et al. (2007), Athuraliya et al. (2001)

Par conséquent, le signal de contrôle (3.1) devient le suivant :

$$\delta p = \begin{bmatrix} \left[ K_{11} \frac{t_{ar1}}{N_1} & K_{12} \right] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \left[ K_{m1} \frac{t_{arm}}{N_m} & K_{m2} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ q_1 - q_{10} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_m \\ q_m - q_{m0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 Cas particulier

Nous nous concentrons maintenant à garantir la stabilité des systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_{d_\tau}x(t - \tau(t)) + B_\tau \text{sat}(Kx(t), u_{\max}) + D_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Alors, le corollaire suivant donne une condition pour stabiliser le système (3.7).

**Corollaire 3.1 :** Le système (3.7) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$ , des matrices de taille appropriée  $X$ ,  $\bar{N}_{14}$ ,  $\bar{N}_{24}$ ,  $U$ ,  $G$  et un scalaire réel  $\alpha$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & D_w & h_{\max} \bar{N}_{14} & X C_z^T \\ * & \Upsilon_{22} & \Upsilon_{23} & \alpha D_w & 0 & 0 \\ * & * & \Upsilon_{33} & 0 & h_{\max} \bar{N}_{24} & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h_{\max} \bar{R} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & G_{(i)}^T \\ * & \mu u_{\max(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \mu - \omega \leq 0$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &= AX^T + B_\tau(D_j U + D_j^- G) + \bar{N}_{14} + \bar{Q} + XA^T + (D_j U + D_j^- G)^T B_\tau^T + \bar{N}_{14}^T, \\ \Upsilon_{12} &= \bar{P} - X^T + \alpha XA^T + \alpha(D_j U + D_j^- G)^T B_\tau^T, \quad \Upsilon_{22} = h_{\max} \bar{R} - \alpha(X + X^T), \\ \Upsilon_{13} &= A_{d_\tau} X^T - \bar{N}_{14} + \bar{N}_{24}^T, \quad \Upsilon_{23} = \alpha A_{d_\tau} X^T, \quad \Upsilon_{33} = -\bar{N}_{24} - \bar{N}_{24}^T - (1-d)\bar{Q}. \end{aligned}$$

De plus, le gain du contrôleur est  $K = UX^{-T}$  et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\mathcal{R}_{10} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-h_{\max}, 0], \max_{[-h_{\max}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_{10}}{\iota_{10}} \right\}$$

avec tout  $\varpi_{1_0}$  satisfaisant  $\varpi_{1_0} \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\iota_{1_0} = \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{P}X^{-T}) + h_{\max}\bar{\lambda}(X^{-1}\bar{Q}X^{-T}) + \frac{h_{\max}^2}{2}\bar{\lambda}(X^{-1}\bar{R}X^{-T})$$

**Remarque 3.4 :** Les inégalités obtenus (3.3) et (3.8) dans le Théorème 3.1 et le Corollaire 3.1, respectivement, sont des BMIs qui peuvent être transformées en LMIs en fixant le paramètre  $\alpha$ . D'autre part, pour trouver la valeur optimale de ce paramètre, on peut utiliser des procédures de recherche numérique, par exemple, le programme fminsearch de Matlab.

### 3.3.4 Problème d'optimisation

En considérant le cas de la perturbation libre ( $w(t) = 0$ ), nous développons une méthodologie à cette étape pour maximiser la région des conditions initiales. Cependant, un tel problème d'optimisation peut être difficile à résoudre en raison de la non-linéarité de la condition (3.6). Dans ce but, nous introduisons des nouvelles matrices telles que  $\bar{\mathcal{S}}^{-1} = \tilde{\mathcal{S}}$  avec  $\mathcal{S} = P, Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_m$  et  $X^{-1} = \tilde{X}$  et nous imposons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{P}} I & \tilde{X} \\ \tilde{X}^T & \tilde{P} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{Q}_1} I & \tilde{X} \\ \tilde{X}^T & \tilde{Q}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \dots, \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{Q}_m} I & \tilde{X} \\ \tilde{X}^T & \tilde{Q}_m \end{bmatrix} \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{R}_1} I & \tilde{X} \\ \tilde{X}^T & \tilde{R}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \dots, \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{R}_m} I & \tilde{X} \\ \tilde{X}^T & \tilde{R}_m \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Alors, d'après la condition (3.6) nous pouvons obtenir l'équation suivante :

$$\delta^2 \left\{ \sigma_{\tilde{P}} + \sum_{i=1}^m \left\{ h_{\max_i} \sigma_{\tilde{Q}_i} + \frac{h_{\max_i}^2}{2} \sigma_{\tilde{R}_i} \right\} \right\} \leq \mu^{-1} \quad (3.10)$$

Par conséquent, nous construisons un algorithme d'optimisation comme suit :

$$\begin{aligned} & \min \text{tr} (\bar{P}\tilde{P} + \bar{Q}_1\tilde{Q}_1 + \dots + \bar{Q}_m\tilde{Q}_m + \bar{R}_1\tilde{R}_1 + \dots + \bar{R}_m\tilde{R}_m + (X + X^T)(\tilde{X} + \tilde{X}^T)) \\ & \text{sous (3.3)-(3.4),(3.9),(3.10), } \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{S}} & * \\ I & \tilde{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} X + X^T & * \\ I & \tilde{X} + \tilde{X}^T \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sur la base des conditions ci-dessus, la conception du contrôleur proposée peut être accomplie en utilisant l'algorithme itératif suivant<sup>6</sup> pour maximiser  $\delta$  :

**Étape 3.1 :** Choisir une valeur minimale de  $\delta$  qui satisfait (3.11).

**Étape 3.2 :** Mettre  $(\bar{\mathcal{S}}, X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{X}, \sigma_{\tilde{P}}, \sigma_{\tilde{Q}_i}, \sigma_{\tilde{R}_i})_0 = (\bar{\mathcal{S}}, X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{X}, \sigma_{\tilde{P}}, \sigma_{\tilde{Q}_i}, \sigma_{\tilde{R}_i})$ . Puis, fixer  $\Delta$  où  $\delta = \delta + \Delta$ .

6. Lee et al. (2004)

**Étape 3.3 :** Résoudre le problème de minimisation ci-dessous en  $\bar{\mathcal{S}}$  et  $\tilde{\mathcal{S}}$ .

$$\begin{aligned} \min \operatorname{tr} & (\bar{P}\tilde{P}_0 + \bar{Q}_1\tilde{Q}_{1_0} + \dots + \bar{Q}_m\tilde{Q}_{m_0} + \bar{R}_1\tilde{R}_{1_0} + \dots + \bar{R}_m\tilde{R}_{m_0} + (X + X^T)(\tilde{X}_0 + \tilde{X}_0^T) \\ & + \bar{P}_0\tilde{P} + \bar{Q}_{1_0}\tilde{Q}_1 + \dots + \bar{Q}_{m_0}\tilde{Q}_m + \bar{R}_{1_0}\tilde{R}_1 + \dots + \bar{R}_{m_0}\tilde{R}_m + (X_0 + X_0^T)(\tilde{X} + \tilde{X}^T)) \\ \text{sous les LMIs} & \quad (3.11) \end{aligned}$$

**Étape 3.4 :** Substituer les nouvelles matrices dans la minimisation (3.11). Si le résultat est faisable, mettre  $\delta = \delta + \Delta$  et répéter l'Étape 3.3, sinon,  $\delta = \delta - \Delta$ , qui est l'estimation désirée : stop.

### 3.4 Exemples illustratifs

L'efficacité de l'approche proposée est illustrée par deux exemples. Le premier est fourni pour vérifier la validité des résultats dans le contexte de stabilité, tandis que le second démontre l'applicabilité de la technique à des problèmes pratiques.

**Exemple 3.1 :** Considérons le système à retard (3.7) pour lequel les valeurs de contrôle sont saturées à  $\pm 15$  où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{d\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\tau = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant  $\mu = 1$ ,  $d = 0$  et  $h_{\max} = 1$  et en se basant sur l'algorithme itératif précédent, le résultat obtenu par le Corollaire 3.1 assure la stabilité du système considéré pour  $\alpha = 94$ . D'autre part, la région d'attraction estimée et le gain du contrôleur sont obtenus comme il est indiqué dans le Tableau 3.1 afin de les comparer aux résultats de la littérature.

Il est clair que notre approche est moins conservative en stabilité du système avec une estimation plus large de la région d'attraction que celles obtenues dans la littérature.

Tableau 3.1 : Comparaison des rayons de stabilité et des gains obtenus.

Approche	$\delta$	$K$
Da Silva et al. (2011)	83.55	$\begin{bmatrix} -0.1950 & 0.0649 \end{bmatrix}$
El Haoussi et al. (2013)	96.16	$\begin{bmatrix} -10.2107 & 0.9563 \end{bmatrix}$
Dey et al. (2014)	106.29	$\begin{bmatrix} -0.6646 & -0.0239 \end{bmatrix}$
Chen et al. (2015)	84.61	$\begin{bmatrix} -0.2223 & -0.0246 \end{bmatrix}$
El Fezazi et al. (2017a)	404	$\begin{bmatrix} -0.1013 & -0.0495 \end{bmatrix}$
El Fezazi et al. (2018d)	115	$\begin{bmatrix} -0.2426 & -0.0829 \end{bmatrix}$
Corollaire 3.1	611	$\begin{bmatrix} -0.1013 & -0.0492 \end{bmatrix}$

**Exemple 3.2 :** Un exemple numérique est développé ici pour illustrer les résultats sur un modèle des réseaux TCP/IP donné sous la forme de (2.3), en considérant trois flux

TCP traversant le routeur où chaque flux a ses spécificités. Les valeurs numériques sont :

$$\begin{cases} t_{ar1} = 0.30, t_{ar2} = 0.25, t_{ar3} = 0.20 \\ C_{1_0} = 3500, C_{2_0} = 3600, C_{3_0} = 3700 \\ N_1 = 70, N_2 = 75, N_3 = 80 \\ q_{1_0} = 175, q_{2_0} = 165, q_{3_0} = 150 \end{cases}$$

À partir de ces paramètres, nous pouvons conclure les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{cases} W_{1_0} = 15, W_{2_0} = 12, W_{3_0} = 9.25 \\ T_{p1} = 0.25, T_{p2} = 0.2042, T_{p3} = 0.1595 \\ p_{1_0} = 0.0089, p_{2_0} = 0.0139, p_{3_0} = 0.0234 \end{cases}$$

Soit  $d_1 = d_2 = d_3 = 0.1$  et  $\mu = 1$ , pour des retards spécifiques donnés par  $h_{\max_1} = 0.30$ ,  $h_{\max_2} = 0.25$  et  $h_{\max_3} = 0.20$  les résultats de stabilité présentés dans le Théorème 3.1 permettent d'obtenir les gains de contrôleur suivants :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 2.3836 & -0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.7981 & -0.0089 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.5122 & -0.0478 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \end{aligned}$$

où le paramètre de réglage et le scalaire prescrit sont  $\alpha = 30$  et  $\sqrt{\gamma} = 10^{-4}$ , respectivement.

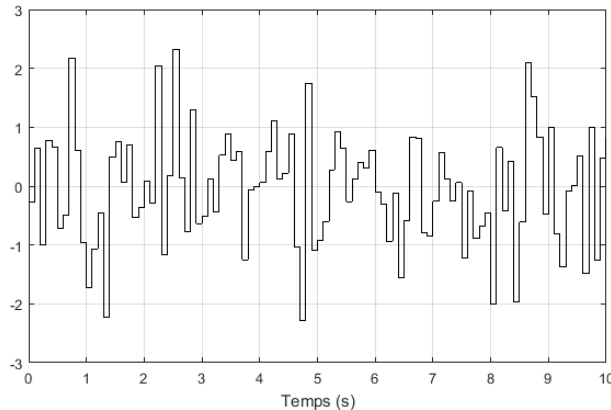


FIGURE 3.1 – Perturbation aléatoire.

L'objectif de cet exemple est de contrôler la longueur de la file d'attente à une valeur de consigne désirée tout en tenant compte des perturbations de la bande passante pour les réseaux TCP/IP. Pour cette raison, nous considérons un bruit Gaussien (pour un intervalle de temps limité) représenté sur la Figure 3.1 afin de vérifier l'effet des perturbations aléatoires. D'autre part, les simulations présentées dans la Figure 3.2 explorent la régulation de la file d'attente du routeur autour d'une longueur prédéterminée (175, 165 et 150, respectivement). Ces simulations ont été basées sur l'utilisation des écarts suivants sur les valeurs initiales des variables d'état :  $x(0) = [10 \quad -10 \quad 10 \quad -10 \quad 10 \quad -10]^T$ .

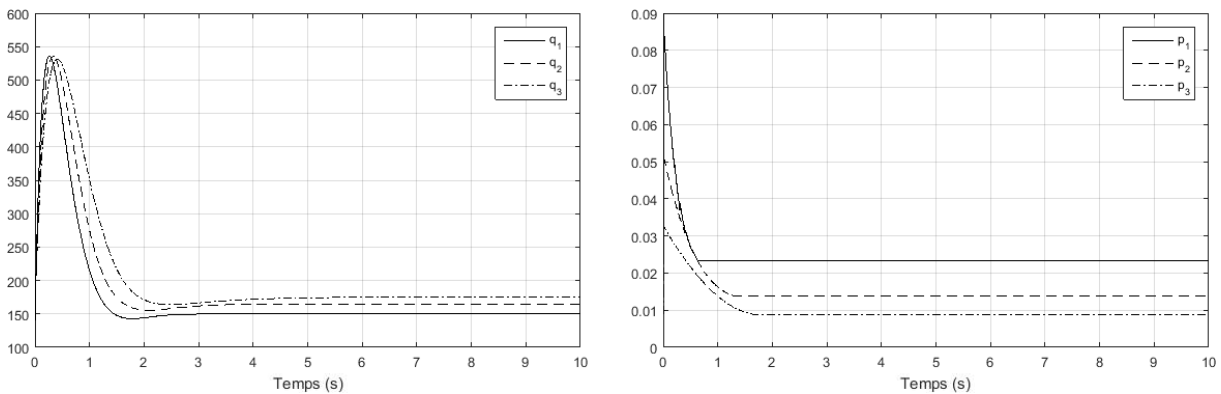


FIGURE 3.2 – Évolution de la file d'attente et de la probabilité d'éjection par rapport à la valeur souhaitée.

Finalement, basé sur les résultats de la simulation, nous pouvons conclure que les méthodes proposées résolvent le problème d'AQM sur les réseaux TCP/IP qui permet à trois classes de trafic différentes de traverser un routeur où les contrôleurs améliorent la performance de stabilité fournissant une convergence rapide. Ainsi, une condition de fonctionnement stable est atteinte et maintenue en utilisant le contrôleur proposé même dans les situations où le trafic est hétérogène (c'est-à-dire un trafic à multi-classes).

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre traitait les problèmes de contrôle de la congestion des réseaux TCP/IP en présence de plusieurs classes de trafic. Chaque classe avec sa propre politique d'éjection de paquets, sa longueur de la file d'attente, son partage de la bande passante et son temps d'aller-retour. De point de vue mathématique, le problème est énoncé en tant qu'une synthèse de contrôleurs pour des systèmes à multi-retards avec une entrée saturante et soumis à des perturbations. Afin d'illustrer l'efficacité de notre méthode, un exemple numérique a été présenté composé de trois classes de trafic différentes traversant un routeur où chaque classe a ses spécificités. Il est difficile de comparer les résultats obtenus avec les travaux précédents, car celui-ci est le seul qui traite le problème d'AQM en autorisant explicitement différents retards pour plusieurs classes de trafic avec saturation d'entrée,

ce qui n'était pas considéré auparavant. Nos résultats ont amélioré la convergence de la file d'attente du routeur et vont motiver les chercheurs à poursuivre les efforts vers une solution d'AQM plus réaliste, plus implémentable et plus rigoureuse pour les routeurs.



# Conception d'un contrôleur basé sur un observateur pour le système QTP

---

## 4.1 Introduction

Le système QTP est un système dont le fonctionnement présente des retards de transport de fluide, des saturations de tension et une perturbation des flux. Un contrôleur est alors conçu pour conduire le modèle linéarisé et discrétisé de ce système au point de fonctionnement souhaité. Dans ce contexte, des conditions basées sur l'utilisation d'une fonctionnelle de L-K en temps discret sont établies pour assurer la stabilité du système en boucle fermée et un niveau de performance où les non-linéarités de la saturation sont prises en compte par l'application de conditions de l'approche polytopique. Ainsi, ce chapitre traite le contrôle du niveau d'eau du système QTP avec une nouvelle méthode de conception d'un contrôleur basé sur un observateur qui conduit à une condition de LMI assez simple qui est traitable numériquement par n'importe quel algorithme d'optimisation convexe. Les conditions proposées sont ensuite illustrées par des exemples numériques qui montrent la faisabilité de l'approche proposée et le fait qu'elle est moins conservatrice que celles proposées dans la littérature.

## 4.2 Formulation du problème

Concernant l'étude et la formulation du problème, l'hypothèse ci-dessous liée au système (2.10) est faite.

**Hypothèse 4.1 :** Les paires  $(A_0 + A_1, B_0 + B_1)$  et  $(A_0, C_y)$  sont contrôlables et observables, respectivement.

Le contrôleur basé sur un observateur de type Luenberger (4.1) est proposé pour stabiliser le système (2.10).

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(k+1) &= A_0 \hat{x}(k) + A_1 \hat{x}(k - d_1(k)) + B_0 \text{sat}(u(k - d_2(k)), u_{\max}) \\
 &\quad + B_1 \text{sat}(u(k - d_3(k)), u_{\max}) - L(y(k) - \hat{y}(k)) \\
 \hat{y}(k) &= C_y \hat{x}(k) \\
 u(k) &= K \hat{x}(k)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $K$  est le gain du contrôleur et  $L$  est le gain de l'observateur à déterminer et  $\hat{x}$  est l'estimation de  $x$ .

De plus, nous définissons l'erreur de l'estimation  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ . Alors, le système en boucle fermée est écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= \mathcal{A}_L \xi(k) + \mathcal{A}_1 \xi(k - d_1(k)) + \mathcal{B}_0 \text{sat}(\mathcal{K} \xi(k - d_2(k)), u_{\max}) \\ &\quad + \mathcal{B}_1 \text{sat}(\mathcal{K} \xi(k - d_3(k)), u_{\max}) + \mathcal{D}_w w(k) \\ z(k) &= \mathcal{C}_z \xi(k)\end{aligned}\tag{4.2}$$

où

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \mathcal{A}_L = \mathcal{A}_0 + L\mathcal{C}_y, \mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix}, \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_w \\ D_w \end{bmatrix}, \mathcal{K} = K\mathcal{I}, \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}, \mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.3 ( $u(k) = \mathcal{K}\xi(k)$ ,  $v(k) = \mathcal{H}\xi(k)$ ), le système (4.2) devient sous la forme ci-dessous où  $\mathcal{B}_{0_j} = \mathcal{B}_0(D_j\mathcal{K} + D_j^-\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{B}_{1_j} = \mathcal{B}_1(D_j\mathcal{K} + D_j^-\mathcal{H})$ ,  $\lambda_j \geq 0$  et  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1$ .

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= \mathcal{A}_L \xi(k) + \mathcal{A}_1 \xi(k - d_1(k)) + \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j (\mathcal{B}_{0_j} \xi(k - d_2(k)) + \mathcal{B}_{1_j} \xi(k - d_3(k))) \\ &\quad + \mathcal{D}_w w(k) \\ z(k) &= \mathcal{C}_z \xi(k)\end{aligned}\tag{4.3}$$

**Remarque 4.1 :** Nous nous intéressons à la synthèse de l'observateur afin d'assurer la stabilité du système en boucle fermée sous un retour d'état estimé, tout en caractérisant la région de stabilité associée à l'état augmenté (composé par l'état du système étudié plus l'état de l'observateur) en tenant compte du fait que la dynamique de l'état du système étudié et celle de l'observateur sont couplées.

## 4.3 Résultats obtenus

### 4.3.1 Résultats de stabilité

Dans cette partie, nous allons présenter une technique numériquement efficace pour trouver les gains du contrôleur (4.1) de manière à stabiliser le système étudié. Nous résumons les conditions de conception de LMI qui en résultent dans le Théorème 4.1.

**Théorème 4.1**<sup>1</sup> : S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,

---

1. El Fezazi et al. (2018f)

$Q_3, R_1, R_2, R_3$ , des matrices de taille appropriée  $\hat{L}, U, M, N, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{32}, Y_{33}$  et des scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  réels satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \Pi_{17} & \Pi_{18} & \Pi_{19} & 0 & 0 \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \Pi_{25} & 0 & 0 & \Pi_{28} & \Pi_{29} & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & \Pi_{36} & 0 & \Pi_{38} & \Pi_{39} & \Pi_{310} & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 & \Pi_{47} & \Pi_{48} & \Pi_{49} & 0 & \Pi_{411} \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & \Pi_{58} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & \Pi_{68} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77} & \Pi_{78} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88} & \Pi_{89} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{99} & \Pi_{910} & \Pi_{911} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{1010} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{1111} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.4)$$

$$Q_1 < R_1, Q_2 < R_2, Q_3 < R_3, \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} P & \mathcal{I}^T N^T & -\mathcal{I}^T N^T \\ * & \mu u_{\max(i)}^2 & -\varepsilon_3 I + \varepsilon_3 U_{(i)} \\ * & * & -\varepsilon_3 U_{(i)} - \varepsilon_3 U_{(i)}^T \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.5)$$

$$\mu - \omega \leq 0 \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \sum_{r=1}^3 [Q_r - P + (d_{\max_r} - d_{\min_r})R_r] + \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z, \quad \Pi_{12} = -Y_{11}^T, \quad \Pi_{22} = Y_{11} + Y_{11}^T - Q_1, \\ \Pi_{13} &= -Y_{21}^T, \quad \Pi_{33} = Y_{21} + Y_{21}^T - Q_2, \quad \Pi_{14} = -Y_{31}^T, \quad \Pi_{44} = Y_{31} + Y_{31}^T - Q_3, \quad \Pi_{15} = -Y_{12}^T, \\ \Pi_{25} &= Y_{11} + Y_{12}^T, \quad \Pi_{55} = Y_{12} + Y_{12}^T, \quad \Pi_{16} = -Y_{22}^T, \quad \Pi_{36} = Y_{21} + Y_{22}^T, \quad \Pi_{66} = Y_{22} + Y_{22}^T, \\ \Pi_{17} &= -Y_{32}^T, \quad \Pi_{47} = Y_{31} + Y_{32}^T, \quad \Pi_{77} = Y_{32} + Y_{32}^T, \quad \Pi_{18} = -Y_{13}^T - Y_{23}^T - Y_{33}^T, \quad \Pi_{88} = -I, \\ \Pi_{28} &= \Pi_{58} = Y_{13}^T, \quad \Pi_{38} = \Pi_{68} = Y_{23}^T, \quad \Pi_{48} = \Pi_{78} = Y_{33}^T, \quad \Pi_{19} = \mathcal{A}_0^T P + \mathcal{C}_y^T \hat{L}^T, \quad \Pi_{29} = \mathcal{A}_1^T P, \\ \Pi_{39} &= (D_j M \mathcal{I} + D_j^- N \mathcal{I})^T \mathcal{B}_0^T, \quad \Pi_{49} = (D_j M \mathcal{I} + D_j^- N \mathcal{I})^T \mathcal{B}_1^T, \quad \Pi_{89} = \mathcal{D}_w^T P, \quad \Pi_{99} = -P, \\ \Pi_{310} &= -(D_j M \mathcal{I} + D_j^- N \mathcal{I})^T, \quad \Pi_{910} = (-P \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0 U) \varepsilon_1, \quad \Pi_{1010} = -\varepsilon_1 U - \varepsilon_1 U^T, \\ \Pi_{411} &= -(D_j M \mathcal{I} + D_j^- N \mathcal{I})^T, \quad \Pi_{911} = (-P \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1 U) \varepsilon_2, \quad \Pi_{1111} = -\varepsilon_2 U - \varepsilon_2 U^T, \end{aligned}$$

alors, le système en boucle fermée (4.3) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$ , et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-\bar{d}_{\max}, 0], \max_{[-\bar{d}_{\max}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_2}{\iota_2} \right\}, \quad \bar{d}_{\max} = \max\{d_{\max_1}, d_{\max_2}, d_{\max_3}\} \quad (4.7)$$

avec tout  $\varpi_2$  satisfaisant  $\varpi_2 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\iota_2 = \bar{\lambda}(P) + \sum_{r=1}^3 \left\{ (d_{\max_r} + d_{\min_r}) \bar{\lambda}(Q_r) + \frac{(d_{\max_r} - d_{\min_r} + 1)(d_{\max_r} + d_{\min_r})}{2} \bar{\lambda}(R_r) \right\}$$

De plus, les gains de contrôleur basé sur un observateur sont  $K = U^{-1}M$  et  $L = P^{-1}\hat{L}$ .

**Preuve 4.1 :** Voir l'Annexe.

**Remarque 4.2 :** Les conditions obtenues dans le Théorème 4.1 dépendent non seulement du retard mais aussi des matrices additionnelles  $Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{32}$  et  $Y_{33}$ . Nous pouvons voir alors que l'équation (6.22) de la preuve (voir l'Annexe) joue un rôle clé dans la réduction du conservatisme.

**Remarque 4.3 :** Certains chercheurs<sup>2</sup> ont travaillé avec ce type des systèmes où  $K$  et  $\hat{H}$  sont fixés à l'avance pour linéariser la BMI. D'autre part, pour linéariser la BMI une nouvelle matrice  $\hat{P}$  est introduite par d'autres chercheurs<sup>3</sup>. Ainsi, notre théorème est plus général que ces travaux puisqu'il fournit plus de degré de liberté et que les conditions sont exploitables numériquement par n'importe quel algorithme d'optimisation convexe. En fait, il améliore les résultats d'analyse et de synthèse d'après l'utilisation de l'idée de la Remarque 3.4 pour trouver les valeur optimales de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ .

### 4.3.2 Cas simple

Nous nous concentrons maintenant à stabiliser le système discret saturé à retard (4.8) où  $\mathcal{D}_z = D_z$ .

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \mathcal{A}_L \xi(k) + \mathcal{A}_1 \xi(k-d(k)) + \mathcal{B}_0 \text{sat}(\mathcal{K}\xi(k), u_{\max}) + \mathcal{D}_w w(k) \\ z(k) &= \mathcal{C}_z \xi(k) + \mathcal{D}_z w(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Alors, le corollaire ci-dessous donne une condition pour garantir la stabilité de (4.8).

**Corollaire 4.1 :** S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P, Q, R$ , des matrices de taille appropriée  $\hat{L}, U, M, N, Y_1, Y_2, Y_3$  et des scalaires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  réels satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} & \Psi_{16} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Psi_{25} & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & \Psi_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & \Psi_{45} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & \Psi_{56} \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & \mathcal{I}^T N^T & -\mathcal{I}^T N^T \\ * & \mu u_{\max}^2 & -\varepsilon_2 I + \varepsilon_2 U_{(i)} \\ * & * & -\varepsilon_2 U_{(i)} - \varepsilon_2 U_{(i)}^T \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$Q < R, \quad \mu - \omega \leq 0$$

---

2. Wei et al. (2015)

3. Lien (2004)

où

$$\begin{aligned}
 \Psi_{11} &= Q - P + (d_{\max} - d_{\min})R + \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z, \quad \Psi_{12} = -Y_1^T, \quad \Psi_{22} = Y_1 + Y_1^T - Q, \\
 \Psi_{13} &= -Y_2^T, \quad \Psi_{23} = Y_1 + Y_2^T, \quad \Psi_{33} = Y_2 + Y_2^T, \quad \Psi_{14} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_z^T \mathcal{D}_z - Y_3^T, \quad \Psi_{24} = Y_3^T, \\
 \Psi_{34} &= Y_3^T, \quad \Psi_{44} = -I + \frac{1}{\gamma} \mathcal{D}_z^T \mathcal{D}_z, \quad \Psi_{25} = \mathcal{A}_1^T P, \quad \Psi_{45} = \mathcal{D}_w^T P, \quad \Psi_{55} = -P, \\
 \Psi_{15} &= \mathcal{A}_0^T P + \mathcal{C}_y^T \hat{L}^T + (D_j M I + D_j^- N I)^T \mathcal{B}_0^T, \quad \Psi_{16} = -(D_j M I + D_j^- N I)^T, \\
 \Psi_{56} &= (-P \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0 U) \varepsilon_1, \quad \Psi_{66} = -\varepsilon_1 U - \varepsilon_1 U^T,
 \end{aligned}$$

alors, le système en boucle fermée (4.8) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$ , et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\mathcal{R}_{2_0} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-d_{\max}, 0], \quad \max_{[-d_{\max}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\overline{\varpi}_{2_0}}{\iota_{2_0}} \right\}$$

avec tout  $\varpi_{2_0}$  satisfaisant  $\varpi_{2_0} \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\iota_{2_0} = \bar{\lambda}(P) + (d_{\max} + d_{\min})\bar{\lambda}(Q) + \frac{(d_{\max} - d_{\min} + 1)(d_{\max} + d_{\min})}{2} \bar{\lambda}(R)$$

De plus, les gains de contrôleur basé sur un observateur sont  $K = U^{-1}M$  et  $L = P^{-1}\hat{L}$ .

### 4.3.3 Problème d'optimisation

Une procédure d'optimisation pour maximiser l'estimation de la région d'attraction est présentée à cette étape en considérant  $w(k) = 0$  du système en boucle fermée donné dans les équations (4.3).

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiser } \vartheta_1 &= \sigma_P + \sum_{r=1}^3 \left\{ (d_{\max_r} + d_{\min_r}) \sigma_{Q_r} + \frac{(d_{\max_r} - d_{\min_r} + 1)(d_{\max_r} + d_{\min_r})}{2} \sigma_{R_r} \right\} \\
 \text{sous (4.4)-(4.5), } &\sigma_P I - P \geq 0, \sigma_{Q_1} I - Q_1 \geq 0, \sigma_{Q_2} I - Q_2 \geq 0, \sigma_{Q_3} I - Q_3 \geq 0, \\
 &\sigma_{R_1} I - R_1 \geq 0, \sigma_{R_2} I - R_2 \geq 0, \sigma_{R_3} I - R_3 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

et sous les paramètres de pondération  $\sigma_P > 0$ ,  $\sigma_{Q_1} > 0$ ,  $\sigma_{Q_2} > 0$ ,  $\sigma_{Q_3} > 0$ ,  $\sigma_{R_1} > 0$ ,  $\sigma_{R_2} > 0$ ,  $\sigma_{R_3} > 0$ , les matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , les matrices de taille appropriée  $\hat{L}$ ,  $U$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Y_{11}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{13}$ ,  $Y_{21}$ ,  $Y_{22}$ ,  $Y_{23}$ ,  $Y_{31}$ ,  $Y_{32}$ ,  $Y_{33}$  et les scalaires réels  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

À partir de la condition (4.7) et la technique d'optimisation ci-dessus, l'estimation maximisée de la région d'attraction est donnée par  $\delta^2 \vartheta_1 \leq \mu^{-1}$ .

**Remarque 4.4 :** La satisfaction de (4.9) implique que  $\sigma_P I \geq \bar{\lambda}(P)$ ,  $\sigma_{Q_1} I \geq \bar{\lambda}(Q_1)$ ,  $\sigma_{Q_2} I \geq \bar{\lambda}(Q_2)$ ,  $\sigma_{Q_3} I \geq \bar{\lambda}(Q_3)$ ,  $\sigma_{R_1} I \geq \bar{\lambda}(R_1)$ ,  $\sigma_{R_2} I \geq \bar{\lambda}(R_2)$  et  $\sigma_{R_3} I \geq \bar{\lambda}(R_3)$ . Ainsi,

si nous minimisons  $\vartheta_1$ , l’estimation de la région est maximisée. En d’autres termes, la procédure d’optimisation ci-dessus oriente les solutions de (4.4)-(4.5) afin d’obtenir la région d’attraction la plus large possible.

## 4.4 Exemples illustratifs

Cette partie fournit trois exemples numériques qui démontrent l’efficacité de l’approche proposée.

**Exemple 4.1 :** Considérons le système retardé en temps discret (4.8) pour lequel les valeurs de contrôle sont saturées à  $\pm 10$  où :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.015 & -0.01 \\ 0 & -0.013 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$D_w = 0, \quad C_y = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0018 \end{bmatrix}, \quad C_z = 0, \quad D_z = 0$$

En utilisant l’algorithme proposé (4.9), les résultats obtenus au Corollaire 4.1 assurent la stabilité du système considéré pour  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.001$  et  $\varepsilon_2 = 0.01$  comme il est indiqué dans le Tableau 4.1, 4.2 et 4.3 afin de les comparer avec les résultats obtenus dans la littérature.

Tableau 4.1 : Valeurs obtenues de  $K$  pour plusieurs bornes du retard.

$d(k)$	Référence Pal et al. (2015)	Corollaire 4.1
$1 \leq d(k) \leq 5$	$\begin{bmatrix} 0.0661 & 0.0286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0009 \end{bmatrix}$
$1 \leq d(k) \leq 10$	$\begin{bmatrix} 0.0690 & 0.0321 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0011 & 0.0019 \end{bmatrix}$
$1 \leq d(k) \leq 15$	$\begin{bmatrix} 0.0795 & 0.0426 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0021 \end{bmatrix}$
$1 \leq d(k) \leq 21$	$\begin{bmatrix} 0.1277 & 0.0784 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0064 & 0.0131 \end{bmatrix}$

Tableau 4.2 : Valeurs obtenues de  $L$  pour plusieurs bornes du retard.

$d(k)$	Référence Pal et al. (2015)	Corollaire 4.1
$1 \leq d(k) \leq 5$	$\begin{bmatrix} -44.3869 & -100.2890 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -2.9837 & -2.9774 \end{bmatrix}^T$
$1 \leq d(k) \leq 10$	$\begin{bmatrix} -45.6324 & -107.3030 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -11.1520 & -4.8577 \end{bmatrix}^T$
$1 \leq d(k) \leq 15$	$\begin{bmatrix} -48.7253 & -116.1249 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -12.9077 & -13.5093 \end{bmatrix}^T$
$1 \leq d(k) \leq 21$	$\begin{bmatrix} -105.0112 & -123.6960 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -28.9561 & -33.1650 \end{bmatrix}^T$

Tableau 4.3 : Valeurs obtenues de  $\delta$  pour plusieurs bornes du retard.

$d(k)$	Référence Pal et al. (2015)	Corollaire 4.1
$1 \leq d(k) \leq 5$	0.0081	43
$1 \leq d(k) \leq 10$	0.0029	31
$1 \leq d(k) \leq 15$	0.0016	24
$1 \leq d(k) \leq 21$	0.0012	18

Comme on les voit dans les Tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, les valeurs obtenues de  $K$ ,  $L$  et  $\delta$  de notre méthode proposée pour le système étudié sont améliorées de façon significative. Alors, il est clair que les résultats de stabilité obtenus sont moins conservatifs que ceux obtenus dans la littérature.

**Exemple 4.2 :** Maintenant, afin de montrer l'efficacité du contrôleur proposé pour minimiser la borne supérieure du  $\mathcal{L}_2$ -gain entre  $w(k)$  et  $z(k)$ , nous considérons le même système (4.8) avec des valeurs de contrôle qui sont saturées au niveau  $\pm 10$  où :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.15 & -0.2109 \\ -0.45 & 0.09 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.007 & -0.0043 \\ 0.01 & 0.01506 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} -0.0021 & -0.0105 \\ -0.00104 & -0.001 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix}, C_y = [0.296 \quad 0.3050], C_z = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.05 \\ 0.06 & 0.15 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.02 \\ -0.06 & 0.13 \end{bmatrix}$$

En appliquant le Corollaire 4.1 pour  $\mu = 1$ , nous avons trouvé que le système susmentionné est stabilisable pour  $1 \leq d(k) \leq 23$  où  $\varepsilon_1 = 0.01$  et  $\varepsilon_2 = 0.1$ . Les résultats obtenus sont donnés alors dans le Tableau 4.4.

Tableau 4.4 : Résultats de calcul.

	Référence Pal et al. (2017)	Corollaire 4.1
$K$	$[0.3566 \quad 0.2018]$	$[-0.0024 \quad 0.0108]$
$L$	$[1.7198 \quad 1.9302]^T$	$[0.6061 \quad 0.5402]^T$
$\sqrt{\gamma}$	0.5	0.09

Il est clair que notre approche est moins conservative que celle donnée dans la littérature.

**Exemple 4.3 :** Pour montrer l'applicabilité de la technique à des problèmes réalistes, nous visons maintenant à contrôler le système (4.3). Les paramètres estimés du modèle QTP pour la configuration expérimentale sont donnés dans le Tableau 4.5.

Tableau 4.5 : Valeurs des paramètres du modèle QTP.

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$a_1, a_2, a_3, a_4$	$0.7 \text{ cm}^2$	$S_1, S_2, S_3, S_4$	$70 \text{ cm}^2$
$k_1, k_2$	$7.45 \text{ cm}^3/s$	$\gamma_1, \gamma_2$	0.3
$k_{d1}, k_{d2}$	0.049	$g$	$981 \text{ cm}/s^2$
$h_{10}, h_{20}, h_{30}, h_{40}$	$25 \text{ cm}$	$\nu_{10}, \nu_{20}$	60%

En appliquant notre approche pour concevoir un contrôleur basé sur un observateur, nous obtenons les gains suivants où le scalaire prescrit est  $\sqrt{\gamma} = 0.5115$  :

$$K = \begin{bmatrix} -0.0154 & -0.0002 & 0.0257 & -0.0107 \\ -0.1661 & -0.0051 & 0.8233 & -0.0001 \end{bmatrix}, L = [0.6061 \quad 0.5402 \quad 0.6061 \quad 0.5402]^T$$

avec  $\bar{T} = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.001$ ,  $\varepsilon_2 = 0.001$ ,  $\varepsilon_3 = 0.01$ ,  $1 \leq d_1(k) \leq 2$ ,  $1 \leq d_2(k) \leq 2$  et  $1 \leq d_3(k) \leq 4$ .

D'autre part, les Figures 4.2-4.4 montrent les trajectoires des variables d'état, d'entrée et d'erreur où les états initiaux sont donnés par  $x(0) = [6 \quad 8 \quad 10 \quad 12]^T$  et  $\hat{x}(0) = [4 \quad 6 \quad 8 \quad 10]^T$  et la perturbation est un bruit Gaussien représenté sur la Figure 4.1.

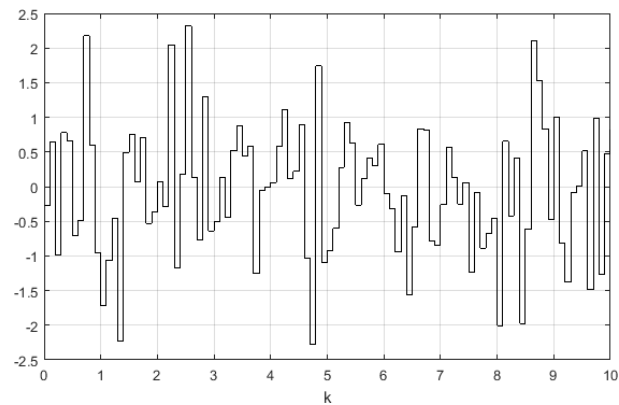


FIGURE 4.1 – Perturbation aléatoire.

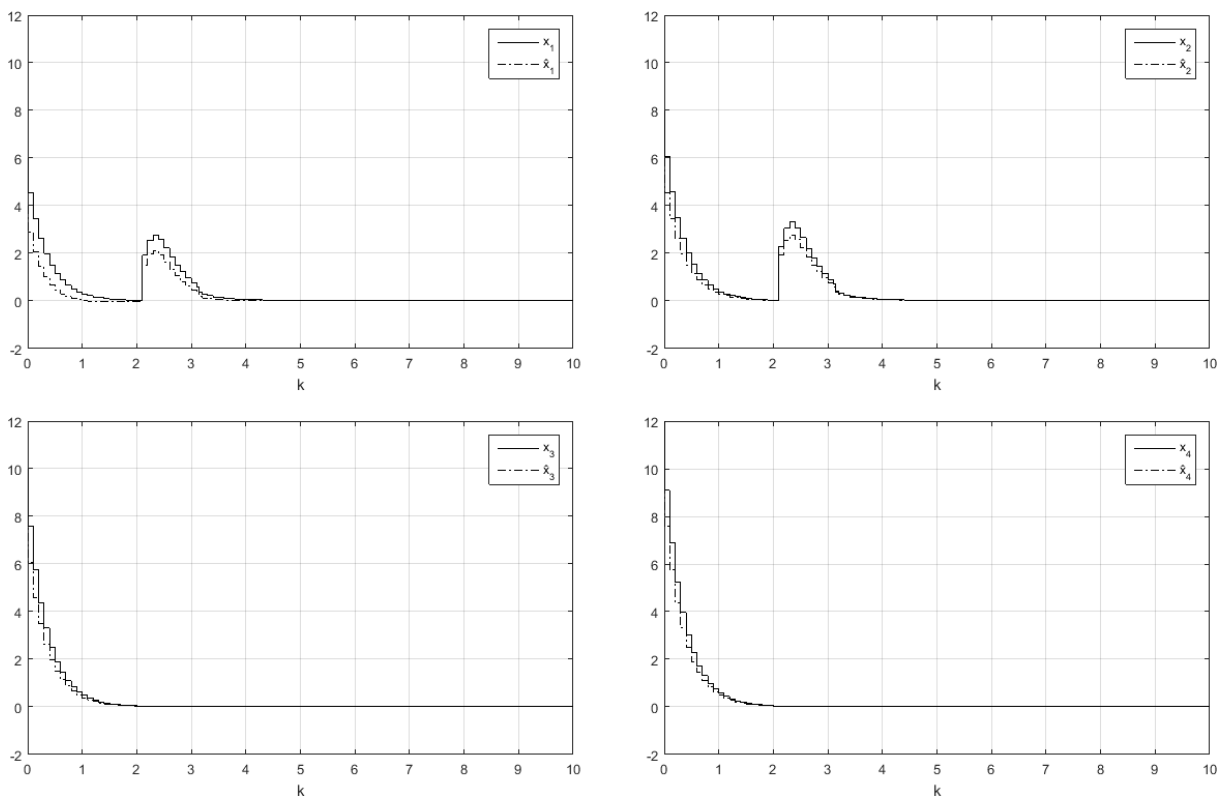


FIGURE 4.2 – Évolution des variables d'état.

Alors, les résultats de la simulation indiquent que notre contrôleur offre de meilleures performances en contrôle du niveau avec un temps de convergence plus court et rejette la perturbation à un rythme plus rapide. Ainsi, les résultats de la simulation démontrent l'efficacité du contrôleur proposé pour lequel le système en boucle fermée est stable.

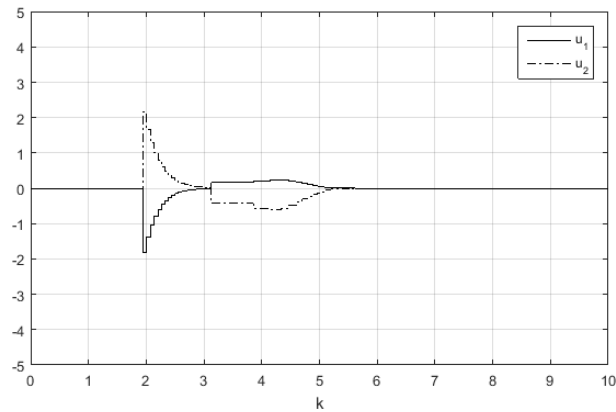
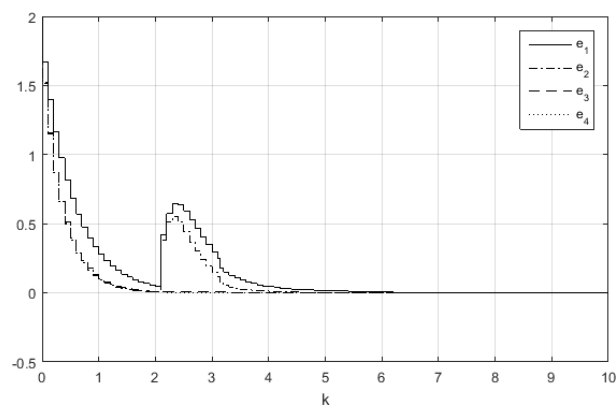
FIGURE 4.3 – Évolution des variables d'entrée compte tenu du retard  $d_2(k)$ .

FIGURE 4.4 – Évolution des variables d'erreur.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté une étude sur la stabilisation des systèmes QTP avec des retards dans les variables d'entrée et d'état où une nouvelle méthodologie de conception est proposée pour surmonter l'obstacle de la bilinéarité. Cela conduit à un formalisme de LMI assez simple qui peut être traité numériquement avec n'importe quel algorithme d'optimisation convexe. La représentation matricielle des conditions d'existence d'une loi de rétroaction est alors obtenue en utilisant l'approche polytopique pour modéliser les effets de saturation et par l'insertion de matrices de pondération libre. Les conditions LMIs permettent de garantir la stabilité du système en boucle fermée lorsque les états initiaux sont pris dans une région d'attraction calculée. L'efficacité du contrôle développé est illustrée par des simulations numériques qui montrent que le contrôleur est capable de maintenir le niveau d'eau désiré dans les quatre réservoirs.



# Conception d'un contrôleur pour la technologie SbW dans un véhicule

---

## 5.1 Introduction

Un contrôleur avec un compensateur d'anti-windup est proposé dans ce chapitre, pour faire face à la saturation où les retards sont inclus dans certaines parties de la représentation de l'espace d'état en présence de la perturbation qui doit être rejetée efficacement pour assurer la stabilité robuste de la technologie SbW. En incorporant alors la technique de décomposition des retards, la condition de secteur généralisée et le lemme de Finsler, des conditions suffisantes sous forme des LMIs ont été données pour garantir la stabilité basées sur la fonctionnelle de L-K. D'un autre côté, la région d'attraction a été estimée au maximum en résolvant un problème d'optimisation et les résultats de la simulation indiquent que des performances et une robustesse élevées sont atteintes.

## 5.2 Formulation du problème

L'hypothèse ci-dessous liée au système (2.17) est faite.

**Hypothèse 5.1 :** Les paires  $(A, B)$  et  $(A, C_y)$  sont contrôlables et observables, respectivement.

Alors, nous proposons le contrôleur suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Cependant, nous supposons l'existence des retards dans l'interconnexion entre le système (2.17) et le contrôleur (5.1) de telle sorte que :  $u(t) = y_c(t - \tau_2)$  et  $u_c(t) = y(t - \tau_1)$ .

D'autre part, d'après l'ajout de la compensation d'anti-windup dans (5.1), ce contrôleur devient sous la nouvelle forme (5.2) où  $\psi(y_c(t - \tau_2)) = \text{sat}(y_c(t - \tau_2), u_{\max}) - y_c(t - \tau_2)$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) + D_{aw} \psi(y_c(t - \tau_2)) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

D'après le vecteur  $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$ , le système en boucle fermée devient sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} BD_c C_y & 0 \\ B_c C_y & 0 \end{bmatrix} \xi(t - \tau_1) + \begin{bmatrix} B \\ D_{aw} \end{bmatrix} \psi(y_c(t - \tau_2)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} D_w \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \end{aligned}$$

où  $y_c(t - \tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & C_c \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} D_c C_y & 0 \end{bmatrix} \xi(t - \tau_1) = \mathcal{C}_c \xi(t) + \mathcal{D}_c \xi(t - \tau_1)$ , ou en bref, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathcal{A} \xi(t) + \mathcal{A}_\tau \xi(t - \tau_1) + \mathcal{B} \psi(y_c(t - \tau_2)) + \mathcal{D}_w w(t) \\ z(t) &= \mathcal{C}_z \xi(t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \mathcal{A}_\tau = \begin{bmatrix} BD_c C_y & 0 \\ B_c C_y & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ D_{aw} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix}$$

**Remarque 5.1 :** Nous nous intéressons à la synthèse d'un contrôleur avec un compensateur d'anti-windup qui assure la stabilité du système en boucle fermée sous un contrôle du retour d'état, tout en respectant la région de stabilité associée à l'état augmenté (composé par l'état du système étudié et l'état du contrôleur) en tenant compte du fait que la dynamique de l'état du système étudié et celle du contrôleur sont couplées.

## 5.3 Résultats obtenus

### 5.3.1 Résultats de stabilité

Cette partie fournit des résultats généraux basés sur les techniques d'LMI pour la stabilisation de tout système pouvant être décrit par l'équation (5.3). Comme cela a été mentionné auparavant, une approche de la théorie du contrôle est donnée pour assurer le contrôle de la technologie SbW.

**Théorème 5.1**<sup>1</sup> : S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_{11}, P_{22}, P_{33}, R_1, \dots, R_m, U_1, \dots, U_m, Q_{11}, \dots, Q_{1m}, Q_{31}, \dots, Q_{3m}, S_{11}, \dots, S_{1m}, S_{31}, \dots, S_{3m}$ , des matrices diagonales définies positives  $Y_1, \dots, Y_m$  et des matrices de taille appropriée  $P_{12}, P_{13}, P_{23}, Q_{21}, \dots, Q_{2m}, S_{21}, \dots, S_{2m}, G_1, \dots, G_m, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  satisfaisant les conditions

---

1. El Fezazi et al. (2018g)

suivantes où  $m$  est un entier positif,  $m \geq 1$  :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} + \Omega_{11} & \Psi_{12} + \Omega_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} + \Omega_{15} \\ * & \Psi_{22} + \Omega_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Omega_{25} \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} + \Omega_{55} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.4)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \mathcal{C}_{c(i)}^T + G_{1(i)}^T & \cdots & \mathcal{C}_{c(i)}^T + G_{m(i)}^T \\ * & \mu u_{\max(i)}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \mu u_{\max(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.5)$$

$$\mu - \omega \leq 0, \quad (5.6)$$

$$\bar{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \frac{m}{\tau_1} Q_{31} & 0 & \cdots & -P_{12} \\ * & \bar{\Psi}_{22} & \frac{m}{\tau_1} Q_{32} & \cdots & 0 \\ * & * & \bar{\Psi}_{33} & \cdots & \frac{m}{\tau_1} Q_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & -R_m - \frac{m}{\tau_1} Q_{3m} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{11} &= R_1 + U_1 + \frac{\tau_1}{m} \sum_{i=1}^m Q_{1i} + \frac{\tau_2}{m} \sum_{i=1}^m S_{1i} - \frac{m}{\tau_1} Q_{31} - \frac{m}{\tau_2} S_{31} \\ &\quad + P_{12} + P_{12}^T + P_{13} + P_{13}^T + \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_z^T \mathcal{C}_z, \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_{jj} = -R_{j-1} + R_j - \frac{m}{\tau_1} Q_{3(j-1)} - \frac{m}{\tau_1} Q_{3j}, \quad j = 2, \dots, m-1,$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\tau_2} S_{31} & 0 & \cdots & -P_{13} & \frac{\tau_1}{m} \sum_{i=1}^m Q_{2i} + \frac{\tau_2}{m} \sum_{i=1}^m S_{2i} + P_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{22} & \frac{m}{\tau_2} S_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ * & \tilde{\Psi}_{33} & \cdots & \frac{m}{\tau_2} S_{3m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & -U_m - \frac{m}{\tau_2} S_{3m} & 0 \\ * & * & \cdots & * & \frac{\tau_1}{m} \sum_{i=1}^m Q_{3i} + \frac{\tau_2}{m} \sum_{i=1}^m S_{3i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Psi}_{jj} = -U_{j-1} + U_j - \frac{m}{\tau_2} S_{3(j-1)} - \frac{m}{\tau_2} S_{3j}, \quad j = 2, \dots, m-1,$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{13} &= \begin{bmatrix} -\frac{m}{\tau_1}Q_{21}^T + P_{22}^T + P_{23}^T & P_{22}^T + P_{23}^T & \dots & P_{22}^T + P_{23}^T \\ \frac{m}{\tau_1}Q_{21}^T & -\frac{m}{\tau_1}Q_{22}^T & \dots & 0 \\ 0 & \frac{m}{\tau_1}Q_{22}^T & \dots & -\frac{m}{\tau_1}Q_{2m}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{22}^T & -P_{22}^T & \dots & \frac{m}{\tau_1}Q_{2m}^T - P_{22}^T \end{bmatrix}, \\
 \Psi_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{23}^T & -P_{23}^T & \dots & -P_{23}^T \\ P_{12} & P_{12} & \dots & P_{12} \end{bmatrix}, \quad \Psi_{24} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\tau_2}S_{21}^T & -\frac{m}{\tau_2}S_{22}^T & \dots & 0 \\ 0 & \frac{m}{\tau_2}S_{22}^T & \dots & -\frac{m}{\tau_2}S_{2m}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{33}^T & -P_{33}^T & \dots & \frac{m}{\tau_2}S_{2m}^T - P_{33}^T \\ P_{13} & P_{13} & \dots & P_{13} \end{bmatrix}, \\
 \Psi_{33} &= -diag\left\{\frac{m}{\tau_1}Q_{11}, \frac{m}{\tau_1}Q_{12}, \dots, \frac{m}{\tau_1}Q_{1m}\right\}, \quad \Psi_{44} = -diag\left\{\frac{m}{\tau_2}S_{11}, \frac{m}{\tau_2}S_{12}, \dots, \frac{m}{\tau_2}S_{1m}\right\}, \\
 \Psi_{14} &= \begin{bmatrix} -\frac{m}{\tau_2}S_{21}^T + P_{33}^T + P_{23} & P_{33}^T + P_{23} & \dots & P_{33}^T + P_{23} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -P_{23} & -P_{23} & \dots & -P_{23} \end{bmatrix}, \\
 \Psi_{15} &= \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T & \dots & G_m^T & 0 \\ -\mathcal{D}_c^T & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}_c^T & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\mathcal{D}_c^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{55} = -diag\{2Y_1, 2Y_2, \dots, 2Y_m, I\}, \\
 \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} F_1\mathcal{A} + \mathcal{A}^T F_1^T & 0 & 0 & \dots & F_1\mathcal{A}_\tau + \mathcal{A}^T F_2^T \\ * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & F_2\mathcal{A}_\tau + \mathcal{A}_\tau^T F_2^T \end{bmatrix}, \\
 \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -F_1 + \mathcal{A}^T F_3^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -F_2 + \mathcal{A}_\tau^T F_3^T \end{bmatrix}, \quad \Omega_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & * & -F_3 - F_3^T \end{bmatrix}, \\
 \Omega_{15} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & F_1\mathcal{B} + \mathcal{A}^T F_4^T & F_1\mathcal{D}_w + \mathcal{A}^T F_5^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_2\mathcal{B} + \mathcal{A}_\tau^T F_4^T & F_2\mathcal{D}_w + \mathcal{A}_\tau^T F_5^T \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\Omega_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & F_3\mathcal{B} - F_4^T & F_3\mathcal{D}_w - F_5^T \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{55} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & F_4\mathcal{B} + \mathcal{B}^T F_4^T & F_4\mathcal{D}_w + \mathcal{B}^T F_5^T \\ * & * & \dots & * & F_5\mathcal{D}_w + \mathcal{D}_w^T F_5^T \end{bmatrix},$$

alors, le système (5.3) est stable pour toute condition initiale dans la région (5.7) et vérifie les performances  $H_\infty$ .

$$\mathcal{R}_3 = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-\bar{\tau}, 0], \max_{[-\bar{\tau}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_3}{l_3} \right\}, \quad \bar{\tau} = \max\{\tau_1, \tau_2\} \quad (5.7)$$

D'autre part, il faut noter que  $\varpi_3$  satisfaisant  $\varpi_3 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$l_3 = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\tau_1}{m} \bar{\lambda}(R_i) + \frac{\tau_2}{m} \bar{\lambda}(U_i) + \frac{2i-1}{m^2} (\tau_1^2 \bar{\lambda}(Q_i) + \tau_2^2 \bar{\lambda}(S_i)) \right\} + (1 + \tau_1^2 + \tau_2^2) \bar{\lambda}(P)$$

$$\text{où } Q_i = \begin{bmatrix} Q_{1i} & Q_{2i} \\ * & Q_{3i} \end{bmatrix}, S_i = \begin{bmatrix} S_{1i} & S_{2i} \\ * & S_{3i} \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix}.$$

**Preuve 5.1 :** Voir l'Annexe.

**Remarque 5.2 :** La principale différence entre la fonctionnelle de L-K proposée dans ce travail et celle utilisée pour les systèmes retardés dans la littérature<sup>2</sup> réside dans la décomposition du retard en  $m$  segments ( $m$  est un entier positif) où la fonctionnelle de L-K dépend de chaque petit segment, alors que nos résultats est plus général. De plus, lorsque le nombre de partitions  $m$  du retard devient plus grand, le nombre de variables est agrandi ce qui donne moins de conservatisme comme on va voir dans les exemples numériques.

### 5.3.2 Problème d'optimisation

En considérant maintenant le cas sans perturbation, alors la région d'attraction maximisée peut être estimée à partir de l'algorithme d'optimisation convexe suivant :

$$\text{Minimiser } \vartheta_2 = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\tau_1}{m} \sigma_{R_i} + \frac{\tau_2}{m} \sigma_{U_i} + \frac{2i-1}{m^2} (\tau_1^2 \sigma_{Q_i} + \tau_2^2 \sigma_{S_i}) \right\} + (1 + \tau_1^2 + \tau_2^2) \sigma_P$$

2. Ahmida and Tissir (2013), Idrissi and Tissir (2012), Idrissi et al. (2013), Tissir (2011), Tissir (2012)

$$\begin{aligned}
 &\text{sous (5.4), (5.5), } \sigma_{R_1}I - R_1 \geq 0, \dots, \sigma_{R_m}I - R_m \geq 0, \sigma_{U_1}I - U_1 \geq 0, \dots, \\
 &\sigma_{U_m}I - U_m \geq 0, \sigma_{Q_1}I - Q_1 \geq 0, \dots, \sigma_{Q_m}I - Q_m \geq 0, \sigma_{S_1}I - S_1 \geq 0, \dots, \\
 &\sigma_{S_m}I - S_m \geq 0, \sigma_P I - P \geq 0, \sigma_{R_1} > 0, \dots, \sigma_{R_m} > 0, \sigma_{U_1} > 0, \dots, \sigma_{U_m} > 0, \\
 &\sigma_{Q_1} > 0, \dots, \sigma_{Q_m} > 0, \sigma_{S_1} > 0, \dots, \sigma_{S_m} > 0, \sigma_P > 0, P_{11}, P_{22}, P_{33}, R_1, \dots, R_m, \\
 &U_1, \dots, U_m, Q_{11}, \dots, Q_{1m}, Q_{31}, \dots, Q_{3m}, S_{11}, \dots, S_{1m}, S_{31}, \dots, S_{3m}, Y_1, \dots, Y_m, \\
 &P_{12}, P_{13}, P_{23}, Q_{21}, \dots, Q_{2m}, S_{21}, \dots, S_{2m}, G_1, \dots, G_m, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

À partir de la condition (5.7) et la technique d'optimisation ci-dessus, l'estimation maximisée de la région d'attraction est donnée par  $\delta^2 \vartheta_2 \leq \mu^{-1}$ .

**Remarque 5.3 :** Il est important de rechercher les solutions qui maximisent la région d'attraction, c'est pourquoi en utilisant une formulation sous forme d'une LMI basée sur les valeurs propres maximales de chaque terme de la condition (5.7) comme suit  $\sigma_{R_1}I \geq \bar{\lambda}(R_1), \dots, \sigma_{R_m}I \geq \bar{\lambda}(R_m), \sigma_{U_1}I \geq \bar{\lambda}(U_1), \dots, \sigma_{U_m}I \geq \bar{\lambda}(U_m), \sigma_{Q_1}I \geq \bar{\lambda}(Q_1), \dots, \sigma_{Q_m}I \geq \bar{\lambda}(Q_m), \sigma_{S_1}I \geq \bar{\lambda}(S_1), \dots, \sigma_{S_m}I \geq \bar{\lambda}(S_m)$  et  $\sigma_P I \geq \bar{\lambda}(P)$ .

## 5.4 Exemples illustratifs

Pour illustrer l'applicabilité des résultats présentés précédemment, nous considérons maintenant les exemples suivants :

**Exemple 5.1 :** Considérons le système retardé (5.3) où :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, \\
 B_c &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad D_{aw} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En utilisant l'algorithme (5.8), les conditions obtenues dans le Théorème 5.1 assurent la stabilité du système considéré dont ses résultats sont rassemblés dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1 : Valeurs obtenues de  $\delta$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

$m, \mu, u_{\max}$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\delta$
$m = 1, \mu = 1, u_{\max} = 10$	3	6	34
$m = 3, \mu = 1, u_{\max} = 10$	14	19	59
$m = 5, \mu = 1, u_{\max} = 10$	22	28	91

À partir du Tableau 5.1, on peut voir clairement que les résultats sont grandement améliorés lorsque le nombre de partitions  $m$  du retard devient plus grand. Cela démontre l'efficacité de l'approche proposée.

**Exemple 5.2 :** Maintenant, on peut appliquer notre approche à un problème réaliste et plus précisément à la technologie SbW en se basant sur le système (5.3). Donc, les

paramètres estimés du modèle de cette technologie sont donnés dans le Tableau 5.2 où  $u_{\max} = V_m = 12 V$ .

Tableau 5.2 : Valeurs des paramètres du modèle SbW.

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$J$	$0.0004 \text{ Kg.m}^2$	$a$	$0.85 \text{ m}$
$B_w$	$0.36 \text{ N.m.s/rad}$	$b$	$1.04 \text{ m}$
$k_m$	$0.052 \text{ N.m/A}$	$C_F^\alpha$	$10000 \text{ N/rad}$
$t_p$	$0.0381 \text{ m}$	$C_R^\alpha$	$10000 \text{ N/rad}$
$t_m$	$0.04572 \text{ m}$	$v$	$13.4 \text{ m/s}$
$F_C$	$2.68 \text{ N.m}$	$L$	$0.0019 \text{ H}$
$m$	$800 \text{ Kg}$	$K_f$	$0.0521 \text{ V.s/rad}$
$I_z$	$3136 \text{ Kg.m}^2$	$R$	$0.39 \Omega$

D'autre part, les matrices du contrôleur (5.1) sont données par  $A_c = 0$ ,  $B_c = 1$ ,  $C_c = 0.0117$  et  $D_c = 0.0557$  où  $D_{aw} = 0.7$ .

En appliquant alors les résultats obtenus dans ce chapitre où  $m = 5$  et  $\mu = 1$ , la stabilité du système étudié peut être garantie pour  $\tau_1 = 0.3$ ,  $\tau_2 = 0.4$  et  $\gamma = 0.0008$ . Ensuite, pour voir graphiquement l'efficacité de l'approche proposée, la Figure 5.2 présente les trajectoires des variables d'état et d'entrée obtenues pour des conditions initiales  $x(0) = [-0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$  et la perturbation utilisée dans les simulations est donnée dans la Figure 5.1.

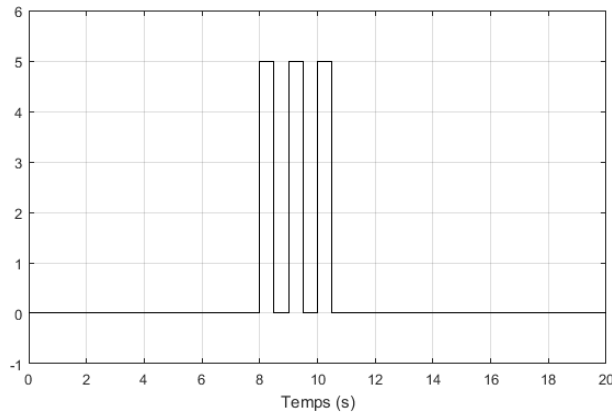


FIGURE 5.1 – Perturbation utilisée dans les simulations.

On peut dire que le contrôleur fonctionne correctement : même si l'entrée est saturée, les retards et la perturbation sont pris en compte, les variables d'état sont dirigés vers le point d'équilibre et la perturbation est adéquatement rejetée montrant la stabilité et les performances du contrôleur proposé. En fait, de très bonnes réponses transitoires sont obtenues grâce aux résultats de simulation présentés qui montrent que le contrôleur proposé stabilise le système étudié malgré qu'il y a des perturbations importantes.

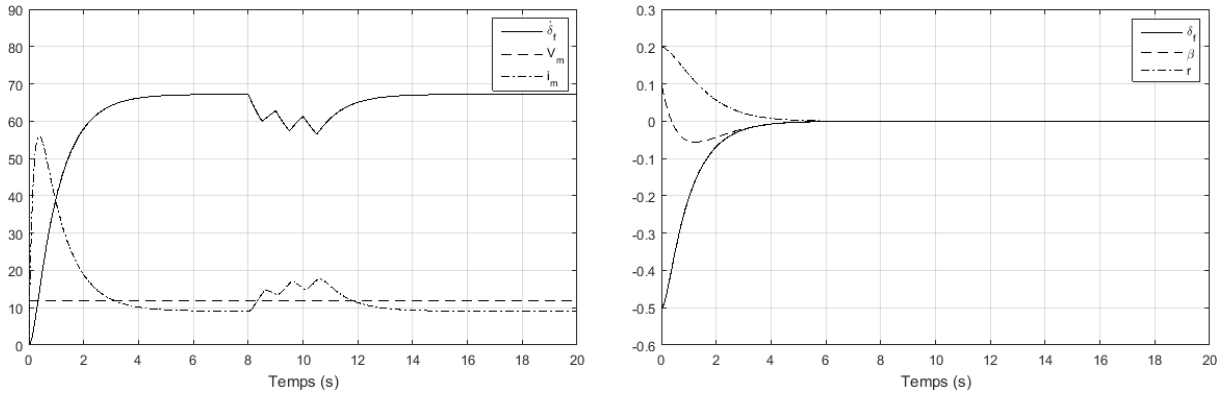


FIGURE 5.2 – Évolution des variables d'état et d'entrée.

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre traitait la conception d'un contrôleur avec un compensateur d'anti-windup où le système est soumis à des retards et une saturation d'entrée qui assure les performances et la robustesse de la technologie SbW. L'efficacité de notre approche proposée est vérifiée en appliquant des résultats basés sur la construction d'une fonctionnelle de L-K en divisant uniformément les intervalles des retards en  $m$  segment (avec  $m$  est un entier positif) et l'utilisation de la condition de secteur généralisée et le lemme de Finsler. Nous avons aussi développé une méthodologie permettant d'estimer la plus large région possible des conditions initiales combinée avec un algorithme d'optimisation itératif. Les résultats de la simulation effectués montrent finalement la capacité du contrôleur adopté à assurer la stabilisation du système SbW et sa réussite à avoir de bonnes performances.

# Conception d'un contrôleur pour la dynamique du MN dans un WT

---

## 6.1 Introduction

Ce travail apporte une solution au problème de la conception des contrôleurs pour les systèmes à retards avec entrée saturante, qui est ensuite appliquée afin de contrôler la dynamique du MN dans un WT. De plus, nous nous intéressons ici au premier cas des systèmes retardés à temps discret qu'il est toujours possible de l'obtenir par l'échantillonnage. Alors, le choix de travailler en temps discret ne complexifie pas la mise en œuvre physique de ce type des contrôleurs qui constituent une meilleure approximation du modèle à temps continu. Les résultats obtenus du premier cas alors sont basés sur l'utilisation d'une fonctionnelle de L-K et six matrices libres  $P_1, \dots, P_6$  qui assure plus degré de liberté. Dans le deuxième cas, nous allons étudier les systèmes retardés à temps continu de données échantillonnées avec des limitations de l'amplitude d'entrée où certaines idées sont utilisées comme la fonctionnelle de L-K, la technique des matrices de pondération libre et des algorithmes itératifs.

## 6.2 Formulation du problème

On fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.1 :** Les paires  $(A_c + A_{d_c}, B_c)$  et  $(A_c, C_{y_c})$  sont contrôlables et observables, respectivement.

Les signaux de contrôle qui peuvent être appliqués à (2.19) et (2.20) sont donnés par  $u(t - \tau_2(t)) = Kx(t - \tau_2(t))$  et  $u(k) = Kx(k)$ , respectivement. Alors :

\* En utilisant le Lemme 1.3 ( $v(k) = Hx(k)$ ), le système (2.20) devient comme il est indiqué dans (6.1) où  $A_j = A + B(D_j K + D_j^- H)$ ,  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1$  et  $\lambda_j \geq 0$ .

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j A_j x(k) + A_d x(k-d(k)) + D_w w(k) \\ y(k) &= C_y x(k) \\ z(k) &= C_z x(k) \end{aligned} \tag{6.1}$$

\* En utilisant  $\psi(Kx(t - \tau_2(t))) = \text{sat}(Kx(t - \tau_2(t)), u_{\max}) - Kx(t - \tau_2(t))$ , le système (2.19) devient comme il est indiqué dans (6.2).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A_c x(t) + A_{d_c} x(t - \tau_1(t)) + B_c K x(t - \tau_2(t)) + B_c \psi(Kx(t - \tau_2(t))) \\
 &\quad + D_{w_c} w(t) \\
 y(t) &= C_{y_c} x(t) \\
 z(t) &= C_{z_c} x(t)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

## 6.3 Résultats obtenus

### 6.3.1 Résultats de stabilité

Dans cette partie, quelques résultats sont obtenus en appliquant deux approches afin de stabiliser les systèmes qui peuvent être décrits par (6.1) et (6.2). Alors, des résultats moins conservatifs sont attendus en termes du retard maximal admissible par le système ou la contrainte minimale de la performance  $H_\infty$ .

**Théorème 6.1**<sup>1</sup> : Le système (6.1) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $X_1, \bar{Q}, \bar{R}$ , des matrices de taille appropriée  $U, G, X_2, X_3$  et des scalaires réels  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix}
 \Sigma_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\
 \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & * & * & * & * & * & * \\
 \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & * & * & * & * & * \\
 \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & 0 & \Sigma_{44} & * & * & * & * \\
 0 & \Sigma_{52} & 0 & 0 & \Sigma_{55} & * & * & * \\
 \Sigma_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{66} & * & * \\
 \Sigma_{71} & \Sigma_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{77} & * \\
 \Sigma_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{88}
 \end{bmatrix} < 0, \tag{6.3}$$

$$\begin{bmatrix}
 X_1 & * \\
 G^{(i)} & \mu u_{\max}^2(i)
 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6.4}$$

$$\mu - \omega \leq 0, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{11} &= X_2 + X_2^T + \varepsilon_1(A_d X_1 + X_1 A_d^T), \Sigma_{22} = -X_3 - X_3^T, \Sigma_{31} = -\varepsilon_1 \bar{Q} A_d^T, \Sigma_{88} = -\gamma I, \\
 \Sigma_{21} &= X_3^T - X_2 - X_1 + (A + \varepsilon_2 A_d) X_1 + B(D_j U + D_j^- G), \Sigma_{32} = (1 - \varepsilon_2) \bar{Q} A_d^T, \\
 \Sigma_{33} &= \Sigma_{66} = -\bar{Q}, \Sigma_{41} = -d_{\max} \varepsilon_1 \bar{R} A_d^T, \Sigma_{42} = -d_{\max} \varepsilon_2 \bar{R} A_d^T, \Sigma_{44} = \Sigma_{77} = -d_{\max} \bar{R},
 \end{aligned}$$

---

1. El Fezazi et al. (2017b)

$$\Sigma_{52} = D_w^T, \Sigma_{55} = -I, \Sigma_{61} = X_1, \Sigma_{71} = d_{\max}X_2, \Sigma_{72} = d_{\max}X_3, \Omega_{81} = C_zX_1.$$

De plus, le gain du contrôleur est  $K = UX_1^{-1}$  et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\mathcal{R}_4 = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-d_{\max}, 0], \max_{[-d_{\max}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_4}{\iota_4} \right\} \quad (6.6)$$

avec tout  $\varpi_4$  satisfaisant  $\varpi_4 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\iota_4 = \bar{\lambda}(X_1^{-1}) + d_{\max}\bar{\lambda}(\bar{Q}^{-1}) + 4\bar{\lambda}(\bar{R}^{-1})$$

**Preuve 6.1 :** Voir l'Annexe.

**Remarque 6.1 :** Il faut noter que lors de la création du Théorème 6.1, nous avons pris en compte que  $P_1$  contient des matrices libres  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  et  $P_6$ . Ainsi, nos résultats sont plus généraux que celui de la littérature<sup>2</sup> car ils offrent plus de liberté. D'autre part, on peut utiliser l'idée précédente (voir la Remarque 3.4) pour trouver les valeurs optimales de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

**Théorème 6.2**<sup>3</sup> : Le système (6.2) est stable et vérifie les performances  $H_\infty$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $\bar{P}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ , des matrices de taille appropriée  $X, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, M, U$ , une matrice diagonale définie positive  $S$  et un scalaire réel  $\alpha$  satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & * & * & * & * & * & * & * \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & * & * & * & * & * & * \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & 0 & \Omega_{44} & * & * & * & * & * \\ \Omega_{51} & \Omega_{52} & 0 & \Omega_{54} & \Omega_{55} & * & * & * & * \\ \Omega_{61} & \Omega_{62} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{66} & * & * & * \\ \Omega_{71} & 0 & \Omega_{73} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{77} & * & * \\ \Omega_{81} & 0 & 0 & \Omega_{84} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{88} & * \\ \Omega_{91} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{99} \end{bmatrix} < 0, \quad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & * \\ U^{(i)} + M^{(i)} & \mu u_{\max}^{(i)} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.8)$$

$$\mu - \omega \leq 0, \quad (6.9)$$

2. Da Silva et al. (2011)

3. El Fezazi et al. (2018d)

$$\begin{aligned}
 \Omega_{11} &= A_c X^T + X A_c^T + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^T + \bar{N}_3 + \bar{N}_3^T + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad \Omega_{21} = \bar{P} - X + \alpha A_c X^T, \\
 \Omega_{22} &= -\alpha X - \alpha X^T + h_{\max_1} \bar{R}_1 + h_{\max_2} \bar{R}_2, \quad \Omega_{31} = X A_{d_c}^T - \bar{N}_1^T + \bar{N}_2, \quad \Omega_{32} = \alpha X A_{d_c}^T, \\
 \Omega_{33} &= -\bar{N}_2 - \bar{N}_2^T - (1-d)\bar{Q}_1, \quad \Omega_{41} = U^T B_c^T - \bar{N}_3^T + \bar{N}_4, \quad \Omega_{42} = \alpha U^T B_c^T, \\
 \Omega_{44} &= -\bar{N}_4 - \bar{N}_4^T, \quad \Omega_{51} = S B_c^T, \quad \Omega_{52} = \alpha S B_c^T, \quad \Omega_{54} = M, \quad \Omega_{55} = -2S^T, \quad \Omega_{61} = D_{w_c}^T, \\
 \Omega_{62} &= \alpha D_{w_c}^T, \quad \Omega_{66} = -I, \quad \Omega_{71} = h_{\max_1} \bar{N}_1^T, \quad \Omega_{73} = h_{\max_1} \bar{N}_2^T, \quad \Omega_{77} = -h_{\max_1} \bar{R}_1, \\
 \Omega_{81} &= h_{\max_2} \bar{N}_3^T, \quad \Omega_{84} = h_{\max_2} \bar{N}_4^T, \quad \Omega_{88} = -h_{\max_2} \bar{R}_2, \quad \Omega_{91} = C_{z_c} X^T, \quad \Omega_{99} = -\gamma I.
 \end{aligned}$$

De plus, le gain du contrôleur est  $K = UX^{-T}$  et une estimation de la région d'attraction est donnée par :

$$\mathcal{R}_5 = \left\{ \phi \in \mathcal{C}[-h_{\max_1}, 0], \quad \max_{[-h_{\max_1}, 0]} \|\phi\| \leq \frac{\varpi_5}{\iota_5} \right\} \quad (6.10)$$

avec tout  $\varpi_5$  satisfaisant  $\varpi_5 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$  et

$$\begin{aligned}
 \iota_5 &= \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{P}X^{-T}) + h_{\max_1} \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{Q}_1X^{-T}) + h_{\max_2} \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{Q}_2X^{-T}) \\
 &\quad + \frac{h_{\max_1}^2}{2} \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{R}_1X^{-T}) + \frac{h_{\max_2}^2}{2} \bar{\lambda}(X^{-1}\bar{R}_2X^{-T})
 \end{aligned}$$

**Preuve 6.2 :** Voir l'Annexe.

**Remarque 6.2 :** La valeur optimale de  $\alpha$  peut être obtenue en utilisant l'idée discutée précédemment (voir la Remarque 3.4).

### 6.3.2 Problème d'optimisation

La région d'attraction maximisée peut être estimée à partir de l'algorithme d'optimisation convexe suivant ( $w(k) = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiser } \vartheta_3 = \sigma_X + d_{\max} \sigma_Q + 4\sigma_R \\
 &\text{sous (6.3), (6.4), } \begin{bmatrix} \sigma_X I & I \\ I & X_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \sigma_Q I & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \sigma_R I & I \\ I & \bar{R} \end{bmatrix} \geq 0, \\
 &\sigma_X > 0, \sigma_Q > 0, \sigma_R > 0, X_1, \bar{Q}, \bar{R}, U, G, X_2, X_3
 \end{aligned}$$

À partir de la condition (6.6) et la technique d'optimisation ci-dessus, l'estimation de la région d'attraction est donnée par  $\delta^2 \vartheta_3 \leq \mu^{-1}$ .

**Remarque 6.3 :** Pour évaluer les termes non-linéaires  $X_1^{-1}$ ,  $\bar{Q}^{-1}$  et  $\bar{R}^{-1}$  dans la condition (6.6), il faut ajouter des LMIs supplémentaires sur les valeurs propres  $\sigma_X I \geq \bar{\lambda}(X_1^{-1})$ ,  $\sigma_Q I \geq \bar{\lambda}(\bar{Q}^{-1})$  et  $\sigma_R I \geq \bar{\lambda}(\bar{R}^{-1})$  afin de maximiser la région d'attraction.

**Remarque 6.4 :** En utilisant maintenant le Théorème 6.2, la conception du contrôleur proposé peut être accomplie par l'exploitation du même algorithme itératif du chapitre 3.

Alors, d'après la condition (6.10) nous pouvons obtenir l'équation suivante :

$$\delta^2 \left\{ \sigma_{\tilde{P}} + h_{\max_1} \sigma_{\tilde{Q}_1} + h_{\max_2} \sigma_{\tilde{Q}_2} + \frac{h_{\max_1}^2}{2} \sigma_{\tilde{R}_1} + \frac{h_{\max_2}^2}{2} \sigma_{\tilde{R}_2} \right\} \leq \mu^{-1} \quad (6.11)$$

## 6.4 Exemples illustratifs

Nous considérons maintenant un modèle de WT distingué par les paramètres suivants :  $\varphi = 6 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta = 0.5092 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varsigma = -0.0117 \text{ deg}^{-1}$  et  $\varrho = 0.8$ . Les méthodologies de conception du contrôleur présentées précédemment peuvent facilement être appliquées à ce problème. Alors, le Tableau 6.1 donne les valeurs de  $\gamma$  et  $K$  selon les valeurs de  $d_M$  et  $h_{\max_1}$  où  $T = 1$ ,  $u_{\max} = 1$ ,  $d = 0$ ,  $h_{\max_2} = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$  et  $\alpha = 0.1$ .

Tableau 6.1 : Valeurs obtenues de  $\gamma$  et  $K$ .

	$\gamma$	$K$
Théorème 6.1 : $d_{\max} = 6$	$5.74 \times 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} -0.0933 & 3.5048 & -0.0010 \end{bmatrix}$
Théorème 6.2 : $h_{\max_1} = 7$	0.08	$\begin{bmatrix} -0.0147 & -0.0056 & -0.0003 \end{bmatrix}$

Certains résultats de simulation sont présentés dans les Figures 6.1-6.2 d'après les conditions initiales  $x(0) = [-5 \quad 5 \quad -5]^T$  et la perturbation  $w$  qui est sous la forme suivante :

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t \leq 10 \\ 0, & t \geq 10 \end{cases}$$

Comme il est montré dans les figures ci-dessous, une condition de fonctionnement stable est atteinte où les perturbations sont rejetées de manière adéquate. Les résultats de la simulation confirment la validité des approches proposées dans ce travail.

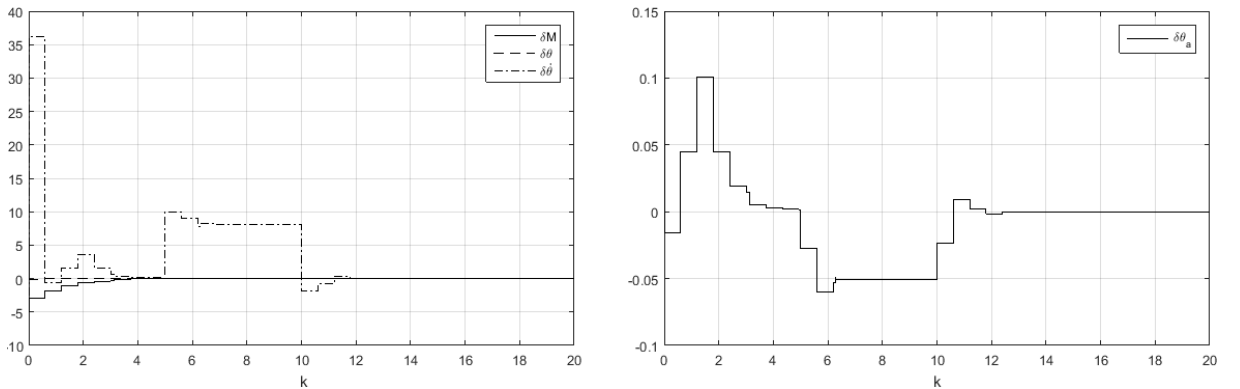


FIGURE 6.1 – Évolution des variables d'état et d'entrée (Théorème 6.1).

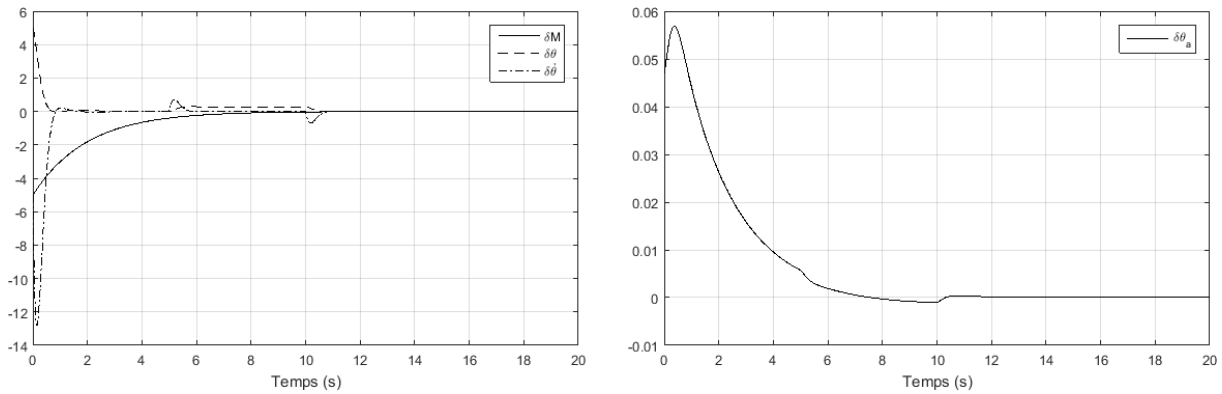


FIGURE 6.2 – Évolution des variables d'état et d'entrée (Théorème 6.2).

## 6.5 Conclusion

Les méthodes de la conception des contrôleurs présentée dans ce chapitre ont une large gamme d'applicabilité, car la classe de systèmes étudiés (systèmes retardés avec entrée saturante) apparaît dans de nombreuses applications de contrôle de processus : ceci a été illustré par l'application au contrôle de la dynamique du MN dans un WT. Tout d'abord, un contrôleur pour les systèmes à temps discret qui assure simultanément la stabilité et un niveau de performance prescrit est conçu. Ensuite, une approche pour la stabilisation de systèmes à temps continu est présentée où le contrôleur utilise des mesures échantillonnées. Les résultats de la simulation confirment les performances en termes de stabilité, de comportement de suivi et du rejet de perturbations. Enfin, le système qui a été étudié est stabilisé par les méthodes proposées et les contrôleurs permettent d'avoir de bonnes performances.

# Conclusion générale et perspectives

---

L'objectif général de ce mémoire est double. D'une part, nous proposons de multiples méthodes qui reposent sur les LMIs et les fonctionnelles de L-K pour assurer la stabilité des systèmes à retards avec saturation d'entrée et soumis à la perturbation. D'autre part, nous présentons une seconde thématique de recherche, appartenant aux domaines des réseaux informatiques, du système QTP, de la technologie SbW dans un véhicule et de la dynamique du MN dans un WT, dans laquelle certains aspects peuvent être interprétés comme un problème de contrôle. Ainsi, à partir des outils d'analyses développés au premier point, nous avons cherché à traiter les problèmes posés dans la partie applicative. Dans cette conclusion, nous revenons, chapitre par chapitre, sur les différents points abordés pour finalement dégager les futures pistes de recherches envisagées.

Dans un premier temps, nous avons présenté la classe des systèmes à retards et le formalisme qui s'y rapporte. Nous y rappelons quelques définitions concernant la stabilité ainsi que certains théorèmes usuels. Nous avons soulevé les points spécifiques qui nous sont utiles pour la suite du mémoire. Plus particulièrement, nous avons vu que la stabilité des systèmes à retards s'étudiait principalement suivant une approche qui repose sur la très populaire méthode de Lyapunov dans laquelle il s'agit de trouver une fonctionnelle de L-K qui dépend à la fois de l'état instantané et de son passé. Nous avons aussi exposé les techniques de contrôle saturant dans une partie théorique pour la modélisation de ce genre du système bouclé et la nécessaire intégration explicite des retards dans des descriptions mathématiques des systèmes à retards avec quelques techniques mathématiques. Enfin, nous avons présenté quelques lemmes qui sont utilisés dans ce travail.

Le chapitre 2 nous plonge dans le monde des réseaux informatiques, du système QTP, de la technologie SbW dans un véhicule et de la dynamique du MN dans un WT. Tout d'abord, nous avons démontré qu'il est possible de jouer sur le taux de perte par le mécanisme d'AQM des routeurs pour agir indirectement sur la taille des flux TCP. Ceci nous conduit naturellement à une étude importante qui consiste à formuler le problème du contrôle de la congestion et de la régulation du trafic en un problème de stabilité du point de vue de l'Automatique. Pour cette raison, nous proposons à la fin de ce chapitre un modèle fluide non-linéaire régissant l'évolution des débits d'émission de différentes sources TCP. Ce modèle est ensuite linéarisé autour d'un point d'équilibre pour obtenir un système linéaire à multiples retards où les variations brusques à court terme de la bande passante disponible du lien sont modélisées comme une perturbation. D'autre part, ce chapitre a analysé le système QTP à partir de la modélisation du mécanisme associée pour établir la conception mathématique non-linéaire de ce système. Pour cette raison,

une description du système QTP pour la linéarisation de son modèle mathématique et la réalisation du modèle d'espace d'état linéaire à temps discret sont présentées. Ensuite, la discrétisation du système obtenu due à l'échantillonnage périodique est explicitement prise en compte. L'objectif est de prendre en compte un maximum d'informations sur le système QTP afin de fournir des conditions de stabilité moins conservatives et un certain niveau de performance sous les stratégies d'échantillonnage périodiques. Le but de ce processus est de maintenir le niveau de liquide dans les réservoirs aux valeurs souhaitées. D'autre part, dans le but de développer un véhicule vert, sûr et confortable, la technologie SbW qui remplace le dispositif de conduite traditionnel du véhicule a bénéficié d'une attention méritée dans les dernières années et un effort très important de la part des chercheurs dans le domaine automobile. Alors, l'objectif de cette étude est la réalisation d'une méthode de contrôle efficace pour perfectionner les caractéristiques de la conduite. Pour cette raison, une description simplifiée et détaillée de la technologie SbW est discutée dans ce chapitre pour établir un modèle mathématique du véhicule. Ensuite, un modèle d'espace d'état linéarisé est utilisé pour chercher à assurer la stabilité du système SbW en présence de la saturation et la perturbation qui est obtenu à partir d'un modèle mathématique de ce système avec la prise en compte de plusieurs équations dynamiques. Finalement, l'application de certaines solutions au contrôle de la dynamique du MN dans un WT représenté par un modèle retardé avec une entrée saturante est étudiée à la fin de ce chapitre, illustrant les procédures de modélisation. Alors, le tunnel est entraîné par un ventilateur en circuit fermé, dans lequel de la dynamique du MN est contrôlée par une régulation de la vitesse du moteur du ventilateur et de petits changements dans l'angle de l'ailette directrice. Pour cette raison, un contrôleur pour cette dynamique doit être développé afin d'obtenir de bonnes réponses transitoires et par conséquent de réduire le coût d'exploitation en réduisant les pertes d'azote liquide.

Nous arrivons au troisième chapitre pour commencer la partie applicative qui fait également l'objet d'une part importante des travaux de cette thèse. Alors, sur les bases de la méthodologie développée au chapitre 2, nous avons adopté une approche afin d'assurer une stabilité en boucle fermée et un certain niveau de performance du système à retards avec des entrées saturantes et des perturbations. Le développement du calcul est alors basé sur la fonctionnelle de L-K, la modélisation de la saturation, les matrices de pondération libre et les conditions formulées en termes de LMI. Donc, à partir des conditions théoriques, des algorithmes d'optimisation sont donc proposés pour calculer les gains de retour d'état stabilisants et un ensemble large de conditions initiales admissibles. Des simulations sous Matlab/Simulink attestent de la validité de l'ensemble de la démarche et montrent que notre mécanisme de contrôle de la congestion est en mesure de réguler le trafic TCP et assurer la QoS prescrite.

À propos du chapitre 4, nous avons déjà discuté le modèle proposé dans le chapitre 2 du système QTP afin de concevoir un contrôleur basé sur un observateur pour stabiliser

---

le système en boucle fermée à temps discret et satisfaire l'indice de performance  $H_\infty$ . Les méthodes de calcul reposent sur l'utilisation d'une fonctionnelle appropriée de L-K et quelques lemmes importants pour développer des critères de stabilité où une nouvelle approche pour surmonter l'obstacle de la bilinéarité sans conditions restrictives supplémentaires est utilisée. Cette approche conduit à des conditions de LMI assez simples qui peuvent être traitées numériquement avec n'importe quel algorithme d'optimisation convexe. Donc, une méthode moins conservative basée sur l'approche polytopique pour représenter la non-linéarité de la saturation d'entrée et sur les matrices de pondération libre pour offrir plus de flexibilité à nos résultats est adoptée, ce qui peut conduire à des améliorations significatives. D'autre part, la région d'attraction a été estimée au maximum en résolvant un problème d'optimisation et le résultat de la simulation présenté à la fin de ce chapitre montre que le contrôleur adopté fournit de meilleures performances avec un temps de stabilisation raisonnable.

Le chapitre 5 porte sur la conception d'un contrôleur de stabilisation robuste efficace en se basant sur des informations liées aux perturbations dans le système afin d'obtenir les performances souhaitées de la technologie SbW. L'influence de l'approche des retards inclus et la nature saturante augmente aussi la complication de ce système, c'est pourquoi il est transformé en un modèle linéaire simplifié représentant sa dynamique. Ensuite, la représentation matricielle des conditions avec l'existence de la compensation d'anti-windup est obtenue en augmentant sa dimension par l'insertion d'une condition de secteur généralisée avec le lemme de Finsler qui est utilisée pour offrir plus de flexibilité à nos résultats où les intervalles des retards sont divisés uniformément en  $m$  segment (avec  $m$  est un entier positif). Les résultats de la simulation avec Matlab/Simulink du système SbW montrent que le contrôleur conçu par cette méthode est simple et efficace et il assure la stabilité avec une performance parfaite.

Enfin, une proposition de contrôle de la dynamique du MN dans les WTs en utilisant des contrôleurs stabilisants est présentée dans le chapitre 6. Alors, nous avons étudié ce problème avec des systèmes à temps discret et de données échantillonnées en tenant compte de la saturation d'entrée et des retards. Des conditions suffisantes de stabilité sont donc obtenues par l'utilisation de la fonctionnelle de L-K et de l'approche de modélisation des effets de la saturation et par l'inclusion des matrices de pondération libre pour améliorer la réponse dynamique d'un système étudié et atteindre les exigences de performance et dans le but de maximiser l'ensemble des conditions initiales admissibles. L'efficacité du contrôle développé est ensuite illustrée par des simulations numériques qui montrent l'amélioration apportée et les résultats déclarent que la conception des contrôleurs dans ce travail répond complètement aux exigences de contrôle.

En perspective, plusieurs points sont à approfondir et ouvrent la voie vers de nouveaux axes. On aborde parmi ces axes comme suit :

1. L'étude de stabilité des systèmes à retards avec saturation d'entrée est un problème

- ouvert en perpétuel évolution. Il s'agit donc de chercher de nouvelles approches pour caractériser au mieux la dynamique retardée et la nature saturante et augmenter la performance en utilisant différents types de systèmes (systèmes singuliers, systèmes flous de type T-S, ...).
2. Le développement de systèmes d'observation également un thème de recherche intéressant avec un fort intérêt pratique. Pour cette raison, ça sera quelque chose d'important de penser à la conception d'un observateur dynamique.
  3. Il est important en pratique de prendre en compte certains critères de performances. Il est donc nécessaire de déterminer au préalable, par une étude pratique, les sources d'incertitudes dans le modèle et par conséquent de travailler sur la robustesse de la stabilisation vis-à-vis ces incertitudes.
  4. Les simulations confirment le bon fonctionnement de la méthode. Pour cette raison, nous pouvons reprendre les résultats établis aux chapitres 3 et 5 pour les tester sur le simulateur de réseaux NS et sur le simulateur CALLAS, respectivement. Ces premiers résultats encourageants méritent d'être évalués finement à l'aide d'outils appropriés et constituent le premier pas vers un nouveau mode d'expérimentation, plus proche de la réalité.

Nous détaillons dans cette partie les preuves de quelques résultats qui ont été développés au cours de ce mémoire.

## A.1 Preuve du Théorème 3.1

Pour prouver ce Théorème, la fonctionnelle de L-K suivante sera utilisée :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \sum_{i=1}^m \left( \int_{t-\tau_i(t)}^t x^T(s)Q_i x(s)ds + \int_{-\tau_i(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta \right) \quad (\text{A.1})$$

où  $P = \text{diag}\{P_1, \dots, P_m\} = P^T > 0$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0, \dots, Q_m = Q_m^T > 0$  et  $R_1 = R_1^T > 0, \dots, R_m = R_m^T > 0$  doit être déterminé.

En prenant la dérivée de la fonctionnelle de L-K proposée dans (A.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^m \left( x^T(t)Q_i x(t) - x^T(t - \tau_i(t))Q_i x(t - \tau_i(t)) \right. \\ & \left. + \tau_i(t)\dot{x}^T(t)R_i \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)ds \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

À partir du système (3.2), pour toutes matrices  $Y_1$  et  $Y_2$  la relation suivante est vraie :

$$2[x^T(t)Y_1 + \dot{x}^T(t)Y_2] \left[ -\dot{x}(t) + Ax(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^m \lambda_j A_{dK_{ij}} x(t - \tau_i(t)) + D_w w(t) \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

En tenant compte de (A.2)-(A.3) et en appliquant le Lemme 1.5 au dernier terme de (A.2), nous pouvons alors écrire:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t)z(t) - w^T(t)w(t) & \leq \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \eta^T(t) \Psi \eta(t), \\ \Psi = & \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \widehat{\Psi}_{11} & \dots & \widehat{\Psi}_{1m} & Y_1 D_w \\ * & \Psi_{22} & \widehat{\Psi}_{21} & \dots & \widehat{\Psi}_{2m} & Y_2 D_w \\ * & * & \widetilde{\Psi}_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & \widetilde{\Psi}_{mm} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & -I \end{bmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau_1(t)) \\ \vdots \\ x(t - \tau_m(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= Y_1 A + A^T Y_1^T + \sum_{i=1}^m (N_{1i} + N_{1i}^T + h_{\max_i} N_{1i} R_i^{-1} N_{1i}^T + Q_i) + \frac{1}{\gamma} C_z^T C_z, \\ \Psi_{12} &= P - Y_1 + A^T Y_2^T, \widehat{\Psi}_{1i} = Y_1 A_{dK_{1j}} - N_{1i} + N_{2i}^T + h_{\max_i} N_{1i} R_i^{-1} N_{2i}^T, \widehat{\Psi}_{2i} = Y_2 A_{dK_{1j}}, \\ \Psi_{22} &= \sum_{i=1}^m h_{\max_i} R_i - Y_2 - Y_2^T, \widetilde{\Psi}_{ii} = -N_{2i} - N_{2i}^T - (1 - d_i) Q_i + h_{\max_i} N_{2i} R_i^{-1} N_{2i}^T\end{aligned}$$

Il est clair que si  $\Psi < 0$ , alors :

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - w^T(t) w(t) < 0 \quad (\text{A.4})$$

Ensuite, on peut mettre  $Y_2 = \alpha Y_1$  et en appliquant le Lemme 1.1 à  $\Psi$ , puis en multipliant le résultat par  $\text{diag}\{Y_1^{-1}, \dots, Y_1^{-1}, I, Y_1^{-1}, \dots, Y_1^{-1}, I\}$  et sa transposée respectivement à gauche et à droite, en introduisant ainsi  $Y_1^{-1} = X$  et  $X \Omega X^T = \bar{\Omega}$  avec  $\Omega = P, Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_m, N_{11}, \dots, N_{1m}, N_{21}, \dots, N_{2m}$  comme un changement de variables, en remplaçant alors  $A_{dK_{1j}}, \dots, A_{dK_{mj}}$  par  $A_{d\tau_1} + B_{\tau_1}(D_{1j} K_1 + D_{1j}^- H_1), \dots, A_{d\tau_m} + B_{\tau_m}(D_{mj} K_m + D_{mj}^- H_m)$ , respectivement, et en mettant  $U_1 = K_1 X^T, \dots, U_m = K_m X^T, G_1 = H_1 X^T, \dots, G_m = H_m X^T$ , la matrice (3.3) est vérifiée.

Puisque la condition (3.3) est vérifiée alors on a la condition (A.4). En intégrant les deux côtés de l'inégalité (A.4) de 0 à  $\infty$ , nous avons :

$$V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty \left( \frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - w^T(t) w(t) \right) dt < 0$$

Alors, puisque le système est stable ( $V(\infty) = 0$ ) et  $V(0) = 0$  (la condition initiale) on peut conclure que la condition (1.7) est vérifiée. D'autre part, la vérification de (3.4) garantit que  $|H_{(i)} x(t)| \leq u_{\max(i)}, \forall x(t) \in R_E(P, \mu)$ . De plus, la condition (3.6) garantit que  $\forall \phi \in \mathcal{R}_1, x(t)$  reste dans  $R_E(P, \mu)$  et  $\dot{V}(t) < 0$  implique que  $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . Finalement, l'inégalité (3.5) assure que  $\mu^{-1} - \omega^{-1} \geq 0$  et, par conséquent, vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned}V(0) &= x^T(0) P x(0) + \sum_{i=1}^m \left( \int_{-\tau_i(0)}^0 x^T(s) Q_i x(s) ds + \int_{-\tau_i(0)}^0 \int_\theta^0 \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds d\theta \right) \\ &\leq \bar{\lambda}(P) \|\phi\|^2 + \sum_{i=1}^m \left( h_{\max_i} \bar{\lambda}(Q_i) \|\phi\|^2 + \frac{h_{\max_i}^2}{2} \bar{\lambda}(R_i) \|\dot{\phi}\|^2 \right) \leq \varpi_1 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du Théorème 3.1.

## A.2 Preuve du Théorème 4.1

En appliquant le Lemme 1.6 à (4.4), nous obtenons :

$$\Pi + \mathcal{M}_1 \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1^T \mathcal{M}_1^T + \mathcal{M}_2 \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_2^T \mathcal{M}_2^T < 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \Pi_{17} & \Pi_{18} & \Pi_{19} \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \Pi_{25} & 0 & 0 & \Pi_{28} & \Pi_{29} \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & \Pi_{36} & 0 & \Pi_{38} & \Pi_{39} \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 & \Pi_{47} & \Pi_{48} & \Pi_{49} \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & \Pi_{58} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & \Pi_{68} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77} & \Pi_{78} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88} & \Pi_{89} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{99} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathcal{N}_1 = U^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_2 = U^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_j M \mathcal{I} - D_j^- N \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part, considérons la fonctionnelle de L-K suivante :

$$\begin{aligned} V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) + V_6(k) + V_7(k) \\ &= \xi^T(k) P \xi(k) + \sum_{l=k-d_1(k)}^{k-1} \xi^T(l) Q_1 \xi(l) + \sum_{l=k-d_2(k)}^{k-1} \xi^T(l) Q_2 \xi(l) \\ &\quad + \sum_{l=k-d_3(k)}^{k-1} \xi^T(l) Q_3 \xi(l) + \sum_{l=-d_{\max_1}+2}^{-d_{\min_1}+1} \sum_{\theta=k+l-1}^{k-1} \xi^T(\theta) R_1 \xi(\theta) \\ &\quad + \sum_{l=-d_{\max_2}+2}^{-d_{\min_2}+1} \sum_{\theta=k+l-1}^{k-1} \xi^T(\theta) R_2 \xi(\theta) + \sum_{l=-d_{\max_3}+2}^{-d_{\min_3}+1} \sum_{\theta=k+l-1}^{k-1} \xi^T(\theta) R_3 \xi(\theta) \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

La variation de l'équation (A.6) entre des échantillons consécutifs est donnée par :

$$\Delta V_1(k) = \xi^T(k+1) P \xi(k+1) - \xi^T(k) P \xi(k), \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= \sum_{l=k+1-d_1(k+1)}^k \xi^T(l) Q_1 \xi(l) - \sum_{l=k-d_1(k)}^{k-1} \xi^T(l) Q_1 \xi(l) \\ &= \xi^T(k) Q_1 \xi(k) - \xi^T(k-d_1(k)) Q_1 \xi(k-d_1(k)) + \sum_{l=k+1-d_{\min_1}}^{k-1} \xi^T(l) Q_1 \xi(l) \\ &\quad - \sum_{l=k+1-d_1(k)}^{k-1} \xi^T(l) Q_1 \xi(l) + \sum_{l=k+1-d_1(k+1)}^{k-d_{m_1}} \xi^T(l) Q_1 \xi(l), \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_5(k) &= \sum_{l=-d_{\max_1}+2}^{-d_{\min_1}+1} \left[ \sum_{\theta=k+l}^k \xi^T(\theta) R_1 \xi(\theta) - \sum_{\theta=k+l-1}^{k-1} \xi^T(\theta) R_1 \xi(\theta) \right] \\ &= (d_{\max_1} - d_{\min_1}) \xi^T(k) R_1 \xi(k) - \sum_{l=k+1-d_{\max_1}}^{k-d_{\min_1}} \xi^T(l) R_1 \xi(l) \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

À partir de  $Q_1 < R_1$ , il est possible de voir que :

$$\begin{aligned}
 - \sum_{l=k+1-d_1(k)}^{k-1} \xi^T(l)Q_1\xi(l) &\leq - \sum_{l=k+1-d_{\min_1}}^{k-1} \xi^T(l)Q_1\xi(l), \\
 \sum_{l=k+1-d_1(k+1)}^{k-d_{\min_1}} \xi^T(l)Q_1\xi(l) &\leq \sum_{l=k+1-d_{\max_1}}^{k-d_{\min_1}} \xi^T(l)R_1\xi(l)
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

De la même manière, nous pouvons calculer la variation de  $V_3(k)$ ,  $V_4(k)$ ,  $V_6(k)$  et  $V_7(k)$ .

D'après le système (4.3) et les équations (A.7)-(A.10), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 \Delta V(k) + \frac{1}{\gamma} z^T(k)z(k) - w^T(k)w(k) &\leq \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{r=1}^3 \lambda_j \left\{ \left[ \mathcal{A}_L \xi(k) + \mathcal{A}_1 \xi(k - d_1(k)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathcal{B}_{0_j} \xi(k - d_2(k)) + \mathcal{B}_{1_j} \xi(k - d_3(k)) + \mathcal{D}_w w(k) \right]^T P \left[ \mathcal{A}_L \xi(k) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathcal{A}_1 \xi(k - d_1(k)) + \mathcal{B}_{0_j} \xi(k - d_2(k)) + \mathcal{B}_{1_j} \xi(k - d_3(k)) + \mathcal{D}_w w(k) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \xi^T(k) \left[ Q_r - P + (d_{\max_r} - d_{\min_r}) R_r \right] \xi(k) - \xi^T(k - d_r(k)) Q_r \right. \\
 &\quad \left. \times \xi(k - d_r(k)) \right\} + \frac{1}{\gamma} z^T(k)z(k) - w^T(k)w(k)
 \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la formule de Newton-Leibniz, les relations suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}
 2 \left[ \xi^T(k - d_1(k)) Y_{11} + \sum_{l=k-d_1(k)}^{k-1} y^T(l) Y_{12} + w^T(k) Y_{13} \right] \\
 \times \left[ -\xi(k) + \xi(k - d_1(k)) + \sum_{l=k-d_1(k)}^{k-1} y(l) \right] &= 0, \\
 2 \left[ \xi^T(k - d_2(k)) Y_{21} + \sum_{l=k-d_2(k)}^{k-1} y^T(l) Y_{22} + w^T(k) Y_{23} \right] \\
 \times \left[ -\xi(k) + \xi(k - d_2(k)) + \sum_{l=k-d_2(k)}^{k-1} y(l) \right] &= 0, \\
 2 \left[ \xi^T(k - d_3(k)) Y_{31} + \sum_{l=k-d_3(k)}^{k-1} y^T(l) Y_{32} + w^T(k) Y_{33} \right] \\
 \times \left[ -\xi(k) + \xi(k - d_3(k)) + \sum_{l=k-d_3(k)}^{k-1} y(l) \right] &= 0 \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\Delta V(k) + \frac{1}{\gamma} z^T(k)z(k) - w^T(k)w(k) \leq \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \eta^T(k) (\Upsilon + L^T P^{-1} L) \eta(k),$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & \Pi_{17} & \Pi_{18} \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \Pi_{25} & 0 & 0 & \Pi_{28} \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & \Pi_{36} & 0 & \Pi_{38} \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 & \Pi_{47} & \Pi_{48} \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & \Pi_{58} \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & \Pi_{68} \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77} & \Pi_{78} \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88} \end{bmatrix}, L^T = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_L^T P \\ \mathcal{A}_1^T P \\ \mathcal{B}_{0_j}^T P \\ \mathcal{B}_{1_j}^T P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{D}_w^T P \end{bmatrix},$$

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} \xi^T(k) & \xi^T(k - d_1(k)) & \xi^T(k - d_2(k)) & \xi^T(k - d_3(k)) \\ \sum_{l=k-d_1(k)}^{k-1} y^T(l) & \sum_{l=k-d_2(k)}^{k-1} y^T(l) & \sum_{l=k-d_3(k)}^{k-1} y^T(l) & w^T(k) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.12})$$

Si  $\Upsilon + L^T P^{-1} L < 0$ , alors :

$$\Delta V(k) + \frac{1}{\gamma} z^T(k) z(k) - w^T(k) w(k) < 0 \quad (\text{A.13})$$

En appliquant le Lemme 1.1 à l'inégalité (A.12), puis, en remplaçant  $\mathcal{A}_L$ ,  $\mathcal{B}_{0_j}$  et  $\mathcal{B}_{1_j}$  par  $\mathcal{A}_0 + L\mathcal{C}_y$ ,  $\mathcal{B}_0(D_j\mathcal{K} + D_j^-\mathcal{H})$  et  $\mathcal{B}_1(D_j\mathcal{K} + D_j^-\mathcal{H})$ , respectivement, et en introduisant ensuite le changement de variables  $PL = \hat{L}$ ,  $\mathcal{K} = U^{-1}M\mathcal{I}$  et  $\mathcal{H} = U^{-1}N\mathcal{I}$ , et finalement, en appliquant le Lemme 1.6 nous obtenons l'équation (A.5). Ainsi, la matrice (4.4) est vérifiée. Dans un autre côté, la sommation de l'équation (A.13) de 0 à  $\infty$  est donnée par :

$$V(\infty) - V(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma} z^T(k) z(k) - w^T(k) w(k) \right) < 0$$

Puis, sous la condition initiale  $V(0) = 0$  et en notant que  $V(\infty) = 0$  (le système est stable), nous concluons que la condition (1.7) est vérifiée. D'autre part, la vérification de (4.5) garantit que  $|\mathcal{H}_{(i)}\xi(k)| \leq u_{\max(i)}$ ,  $\forall \xi(k) \in R_E(P, \mu)$ . De plus, la condition (4.7) garantit que  $\forall \phi \in \mathcal{R}_2$ ,  $\xi(k)$  reste dans  $R_E(P, \mu)$  et  $\Delta V(k) < 0$  implique que  $\xi(k) \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ . Finalement, l'inégalité (4.6) assure que  $\mu^{-1} - \omega^{-1} \geq 0$  ce qui vérifie l'équation ci-dessous et termine la preuve du Théorème 4.1.

$$V(0) \leq \left( \bar{\lambda}(P) + \sum_{r=1}^3 \left( (d_{\max_r} + d_{\min_r}) \bar{\lambda}(Q_r) + \frac{(d_{\max_r} - d_{\min_r} + 1)(d_{\max_r} + d_{\min_r})}{2} \right) \right) \|\phi\|^2 \leq \varpi_2 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$$

### A.3 Preuve du Théorème 5.1

Considérons la fonctionnelle de L-K suivante ( $\tau_1 = mh_1$ ,  $\tau_2 = mh_2$ ) :

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (\text{A.14})$$

où

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi^T(s) R_i \xi(s) ds + \int_{t-ih_2}^{t-(i-1)h_2} \xi^T(s) U_i \xi(s) ds \right\}, \\
 V_2(t) &= \sum_{i=1}^m \int_{-ih_1}^{-(i-1)h_1} \int_{t+\theta}^t \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix}^T Q_i \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix} ds d\theta, \\
 V_3(t) &= \sum_{i=1}^m \int_{-ih_2}^{-(i-1)h_2} \int_{t+\theta}^t \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix}^T S_i \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix} ds d\theta, \\
 V_4(t) &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_2}^{t-(i-1)h_2} \xi(s) ds \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_2}^{t-(i-1)h_2} \xi(s) ds \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

avec

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_{1i} & Q_{2i} \\ * & Q_{3i} \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} S_{1i} & S_{2i} \\ * & S_{3i} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix}$$

En prenant la dérivée de (A.14) et en utilisant le Lemme 1.8, nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \xi^T(t - (i-1)h_1) R_i \xi(t - (i-1)h_1) - \xi^T(t - ih_1) R_i \xi(t - ih_1) \right. \\
 &\quad \left. + \xi^T(t - (i-1)h_2) U_i \xi(t - (i-1)h_2) - \xi^T(t - ih_2) U_i \xi(t - ih_2) \right\}, \\
 \dot{V}_2(t) &= \sum_{i=1}^m \left\{ h_1 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}^T Q_i \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} - \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix}^T Q_i \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) \end{bmatrix} ds \right\} \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \left\{ h_1 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix}^T Q_i \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} \xi(t - (i-1)h_1) \\ \xi(t - ih_1) \\ \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \end{bmatrix}^T \right. \\
 &\quad \left. \times \begin{bmatrix} -Q_{3i} & Q_{3i} & -Q_{2i}^T \\ * & -Q_{3i} & Q_{2i}^T \\ * & * & -Q_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t - (i-1)h_1) \\ \xi(t - ih_1) \\ \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \end{bmatrix} \right\}, \\
 \dot{V}_4(t) &= 2 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_2}^{t-(i-1)h_2} \xi(s) ds \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \sum_{i=1}^m \xi(t - (i-1)h_1) - \xi(t - ih_1) \\ \sum_{i=1}^m \xi(t - (i-1)h_2) - \xi(t - ih_2) \end{bmatrix} \\
 &= 2 \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_1}^{t-(i-1)h_1} \xi(s) ds \\ \sum_{i=1}^m \int_{t-ih_2}^{t-(i-1)h_2} \xi(s) ds \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) - \xi(t - mh_1) \\ \xi(t) - \xi(t - mh_2) \end{bmatrix} \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

De la même manière que  $V_2(t)$ , nous pouvons calculer la dérivée de  $V_3(t)$ .



Puisque la matrice (5.4) est vérifiée, de la même manière de la partie A.1 de l'Annexe on peut conclure alors que la condition (1.7) est satisfaite. D'autre part, la vérification de (5.5) garantit que  $|(\mathcal{C}_{c(i)} + G_{(i)})\xi(t)| \leq u_{\max(i)}$ ,  $\forall \xi(t) \in R_E(P_{11}, \mu)$ . De plus, la condition (5.7) garantit que  $\forall \phi \in \mathcal{R}_3$ ,  $\xi(t)$  reste dans  $R_E(P_{11}, \mu)$  et  $\dot{V}(t) < 0$  implique que  $\xi(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . Finalement, la preuve du Théorème 5.1 est terminée par l'inégalité (5.6) qui assure que  $\mu^{-1} - \omega^{-1} \geq 0$ , c'est-à-dire il existe :

$$V(0) \leq \left( (1 + m^2(h_1^2 + h_2^2))\bar{\lambda}(P) + \sum_{i=1}^m (h_1\bar{\lambda}(R_i) + h_2\bar{\lambda}(U_i) + (2i-1)h_1^2\bar{\lambda}(Q_i) + (2i-1)h_2^2\bar{\lambda}(S_i)) \right) \|\phi\|^2 \leq \varpi_3 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$$

## A.4 Preuve du Théorème 6.1

Considérons la fonctionnelle de L-K suivante pour prouver ce Théorème :

$$\begin{aligned} V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) \\ &= x^T(k)P_1x(k) + \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} x^T(l)Qx(l) + \sum_{\theta=-d(k)}^{-1} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} y^T(l)Ry(l) \end{aligned}$$

et calculons la différence du premier terme de cette fonctionnelle, alors :

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= (x(k+1) - x(k))^T P_1 (x(k+1) - x(k)) + 2x^T(k)P_1(x(k+1) - x(k)) \\ &= y^T(k)P_1y(k) + 2x^T(k)P_1y(k) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2x^T(k)P_1y(k) &= 2 \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T & P_4^T \\ 0 & P_3^T & P_5^T \\ 0 & 0 & P_6^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T & P_4^T \\ 0 & P_3^T & P_5^T \\ 0 & 0 & P_6^T \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} y(k) \\ -y(k) + (A_j - I)x(k) + A_dx(k-d(k)) + D_w w(k) \\ x(k) - x(k-d(k)) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y(l) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j \eta^T(k) \left( \Xi_j \eta(k) + 2 \begin{bmatrix} -P_4^T \\ -P_5^T \\ -P_6^T \end{bmatrix} \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y(l) + 2 \begin{bmatrix} P_2^T D_w \\ P_3^T D_w \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \right) \end{aligned}$$



$P_6 = 0$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Omega_{11} & * & * & * & * \\ \Omega_{21} & \Sigma_{22} & * & * & * \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & * & * \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & 0 & \Omega_{44} & * \\ 0 & \Sigma_{52} & 0 & 0 & \Sigma_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overline{Q}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} X_2^T \\ X_3^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_{\max} \overline{R}^{-1} \begin{bmatrix} X_2 & X_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} X_1 C_z^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I \begin{bmatrix} C_z X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.19})
 \end{aligned}$$

où  $\Sigma_{22}$ ,  $\Sigma_{52}$ , et  $\Sigma_{55}$  sont définis précédemment et

$$\begin{aligned}
 \Omega_{11} &= X_2 + X_2^T + N_1 + N_1^T, \quad \Omega_{21} = X_3^T - X_2 + N_2 + (A_j - I)X_1, \quad \Omega_{31} = -X_1^{-1}N_1^T \\
 \Omega_{32} &= A_d^T - X_1^{-1}N_2^T, \quad \Omega_{33} = -\overline{Q}^{-1}, \quad \Omega_{41} = -X_1^{-1}N_1^T, \quad \Omega_{42} = -X_1^{-1}N_2^T, \quad \Omega_{44} = \frac{-\overline{R}^{-1}}{d_{\max}}
 \end{aligned}$$

La présence de certaines termes non-linéaires tels que  $X_1^{-1}$  avec  $N_1$  et  $N_2$  dans l'équation (A.19) ne permet pas de résoudre directement la condition. Pour cette raison, nous choisissons  $N_1 = \varepsilon_1 A_d X_1$  et  $N_2 = \varepsilon_2 A_d X_1$ . D'autre part, les résultats issus des techniques de L-K conduisent à des contraintes non-linéaires ce qui complique l'application de la technique d'optimisation numérique et la transformation en LMIs, c'est pourquoi l'utilisation du Lemme 1.1 facilite la conversion en terme LMI avec le remplacement de  $A_j$  par  $A + B(D_j K + D_j^- H)$ . Donc, nous obtenons la matrice (6.3) où  $U = KX_1$  et  $G = HX_1$ .

Puisque la matrice (6.3) est vérifiée, de la même manière de la partie A.2 de l'Annexe on peut conclure que la condition (1.7) est satisfaite. D'autre part, la vérification de (6.4) garantit que  $|H_{(i)}x(k)| \leq u_{\max(i)}$ ,  $\forall x(k) \in R_E(P_1, \mu)$ . De plus, la condition (6.6) garantit que  $\forall \phi \in \mathcal{R}_4$ ,  $x(k)$  reste dans  $R_E(P_1, \mu)$  et  $\Delta V(k) < 0$  implique que  $x(k) \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ . Finalement, l'inégalité (6.5) montre que  $\mu^{-1} - \omega^{-1} \geq 0$ , c'est-à-dire il existe :

$$V(0) \leq (\overline{\lambda}(P) + d_{\max} \overline{\lambda}(Q) + 4\overline{\lambda}(R)) \|\phi\|^2 \leq \varpi_4 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1}$$

Ceci conclut la preuve du Théorème 6.1.

## A.5 Preuve du Théorème 6.2

La fonctionnelle de L-K est sélectionnée pour être :

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s)Q_2x(s)ds \\ + \int_{-\tau_1(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta + \int_{-\tau_2(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta \quad (\text{A.20})$$

Le calcul de la dérivée de la fonctionnelle (A.20) donne :

$$\dot{V}(t) \leq 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)(Q_1 + Q_2)x(t) + \dot{x}^T(t)(h_{\max_1}R_1 + h_{\max_2}R_2)\dot{x}(t) \\ - (1-d)x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t)) - \int_{t-\tau_1(t)}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds \\ - \int_{t-\tau_2(t)}^t \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds$$

En utilisant l'approche de l'inclusion des matrices de pondération libre, nous avons :

$$2[x^T(t)Y_1 + \dot{x}^T(t)Y_2] \left[ -\dot{x}(t) + A_c x(t) + A_{d_c} x(t-\tau_1(t)) + B_c K x(t-\tau_2(t)) \right. \\ \left. + B_c \psi(Kx(t-\tau_2(t))) + D_{w_c} w(t) \right] = 0 \quad (\text{A.21})$$

Ensuite, en appliquant les Lemmes 1.4 et 1.5 ( $v(t) = Kx(t-\tau_2(t))$ ,  $g(t) = 0$ ,  $f(t) = Gx(t-\tau_2(t))$ ), et en tenant compte de l'équation (A.21), on obtient:

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t)z(t) - w^T(t)w(t) \leq \eta^T(t)\Psi\eta(t)$$

où

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * & * & * & * \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & * & * & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & 0 & \Psi_{44} & * & * \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & 0 & \Psi_{54} & \Psi_{55} & * \\ \Psi_{61} & \Psi_{62} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{66} \end{bmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau_1(t)) \\ x(t-\tau_2(t)) \\ \psi(Kx(t-\tau_2(t))) \\ w(t) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = Y_1 A_c + A_c^T Y_1^T + N_1 + N_1^T + N_3 + N_3^T + Q_1 + Q_2 + h_{\max_1} N_1 R_1^{-1} N_1^T \\ + h_{\max_2} N_3 R_2^{-1} N_3^T + \frac{1}{\gamma} C_{z_c}^T C_{z_c},$$

$$\Psi_{21} = -Y_1^T + Y_2 A_c + P, \quad \Psi_{22} = -Y_2 - Y_2^T + h_{\max_1} R_1 + h_{\max_2} R_2,$$

$$\Psi_{31} = A_{d_c}^T Y_1^T - N_1^T + N_2 + h_{\max_1} N_2 R_1^{-1} N_1^T, \quad \Psi_{32} = A_{d_c}^T Y_2^T,$$

$$\Psi_{33} = h_{\max_1} N_2 R_1^{-1} N_2^T - N_2 - N_2^T - (1-d)Q_1, \quad \Psi_{44} = h_{\max_2} N_4 R_2^{-1} N_4^T - N_4 - N_4^T,$$

$$\Psi_{41} = K^T B_c^T Y_1^T - N_3^T + N_4 + h_{\max_2} N_4 R_2^{-1} N_3^T, \quad \Psi_{42} = K^T B_c^T Y_2^T, \quad \Psi_{51} = B_c^T Y_1^T,$$

$$\Psi_{52} = B_c^T Y_2^T, \quad \Psi_{54} = TG, \quad \Psi_{55} = -2T, \quad \Psi_{61} = D_{w_c}^T Y_1^T, \quad \Psi_{62} = D_{w_c}^T Y_2^T, \quad \Psi_{66} = -I$$

Il est clair que si  $\Psi < 0$ , alors  $\dot{V}(t) + \frac{1}{\gamma} z^T(t)z(t) - w^T(t)w(t) < 0$ . Ensuite, on peut mettre  $Y_2 = \alpha Y_1$  et en appliquant le Lemme 1.1 à  $\Psi$ , puis en multipliant le résultat par  $\text{diag}\{Y_1^{-1}, Y_1^{-1}, Y_1^{-1}, Y_1^{-1}, T^{-1}, I, Y_1^{-1}, Y_1^{-1}, I\}$  et sa transposée respectivement à gauche et à droite, en introduisant ainsi  $X = Y_1^{-1}$ ,  $U = KX^T$ ,  $M = GX^T$ ,  $S = T^{-1}$ , et  $\bar{\Pi} = X\Pi X^T$  où  $\Pi = P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, N_1, N_2, N_3, N_4$ , la matrice (6.7) est vérifiée.

Puisque la matrice (6.7) est vérifiée, de la même manière de la partie A.1 de l'Annexe on peut conclure que la condition (1.7) est satisfaite. D'autre part, la vérification de (6.8) garantit que  $|(K_{(i)} + G_{(i)})x(t)| \leq u_{\max(i)}$ ,  $\forall x(t) \in R_E(P, \mu)$ . De plus, la condition (6.10) garantit que  $\forall \phi \in \mathcal{R}_5$ ,  $x(t)$  reste dans  $R_E(P, \mu)$  et  $\dot{V}(t) < 0$  implique que  $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . Enfin, on termine cette preuve par l'inégalité (6.9) qui vérifie que  $\mu^{-1} - \omega^{-1} \geq 0$ , c'est-à-dire il existe :

$$\begin{aligned} V(0) &\leq \left( \bar{\lambda}(P) + h_{\max_1} \bar{\lambda}(Q_1) + h_{\max_2} \bar{\lambda}(Q_2) + \frac{h_{\max_1}^2}{2} \bar{\lambda}(R_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_{\max_2}^2}{2} \bar{\lambda}(R_2) \right) \|\phi\|^2 \leq \varpi_5 \leq \mu^{-1} - \omega^{-1} \end{aligned}$$

# Références bibliographiques

---

Ahmida, F., and Tissir, E. H. (2013). Exponential stability of uncertain T-S fuzzy switched systems with time delay. *International Journal of Automation and Computing*, **10**(1), 32–38.

Anwar, S. (2005). Generalized predictive control of yaw dynamics of a hybrid brake-by-wire equipped vehicle. *Mechatronics*, **15**(9), 1089–1108.

Anwar, S., and Chen, L. (2007). An analytical redundancy-based fault detection and isolation algorithm for a road-wheel control subsystem in a steer-by-wire system. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **56**(5), 2859–2869.

Ariba, Y. (2009). Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur. *Thèse de doctorat, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, France*.

Athuraliya, S., Li, V., Low, S., and Yin, Q. (2001). REM : active queue management. *IEEE Network*, **15**(3), 48–53.

Azam, S. N. M. (2017). Linear discrete-time state space realization of a modified quadruple tank system with state estimation using Kalman filter. *Journal of Physics : Conference Series*, **783**(1), 012031.

Bender, F. A. (2010). Técnicas de síntese de compensadores antiwindup para sistemas com atraso. *Thèse de doctorat, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brésil*.

Bender, F. A. (2013). Delay dependent antiwindup synthesis for time delay systems. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, **18**(1), 1–9.

Bender, F. A. (2014). Delay dependent antiwindup for AQM in TCP/IP Routers. *Asian Journal of Control*, **16**(5), 1511–1514.

Benzaouia, A., Benhayoun, M., and Mesquine, F. (2014). Stabilization of systems with unsymmetrical saturated control : an LMI approach. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **33**(10), 3263–3275.

Benzaouia, A., El Hajjaji, A., Hmamed, A., and Oubah, R. (2015). Fault tolerant saturated control for T-S fuzzy discrete-time systems with delays. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, **18**, 60–71.

Benzaouia, A., and El Hajjaji, A. (2018). Conditions of stabilization of positive continuous Takagi-Sugeno fuzzy systems with delay. *International Journal of Fuzzy Systems*, **20**(3), 750–758.

Binotti, V., and Bender, F. A. (2014). Control theory based AQM for high speed networks. *International journal of innovative computing, information & control*, **10**(6),

2025–2033.

Binotti, V., and Bender, F. A. (2016). On The Timing of Antiwindup Compensation. *Asian Journal of Control*, **18**(1), 283–292.

Bolajraf, M., Tadeo, F., Alvarez, T., and Rami, M. A. (2010). State-feedback with memory for controlled positivity with application to congestion control. *IET Control Theory & Applications*, **4**(10), 2041–2048.

Borsoi, R. A., and Bender, F. A. (2012). Towards linear control approach to aqm in tcp/ip networks. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, **17**(2), 47–52.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory. *Livre, Studies in Applied Mathematics, SIAM*.

Chang, X.-H., Zhang, L., and Park, J. H. (2015). Robust static output feedback  $H_\infty$  control for uncertain fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, **273**, 87–104.

Chen, H., Zhu, L., Liu, X., Yu, S., and Zhao, D. (2013). Study on Steering by Wire Controller Based on Improved  $H_\infty$  Algorithm. *International Journal of Online Engineering*, **9**(S2), 35–40.

Chen, Y., Fei, S., and Li, Y. (2015). Stabilization of neutral time-delay systems with actuator saturation via auxiliary time-delay feedback. *Automatica*, **52**, 242–247.

Crozier, P., Chargy, C., and Pichon, R. (2014). Mach number control improvement in ONERA S1MA large transonic wind tunnel. *In proceedings of the 30th AIAA International Conference on Aerodynamic Measurement Technology and Ground Testing, Atlanta, USA*, 2108.

Da Silva, J. M. G., and Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability : an LMI-based approach. *IEEE transactions on Automatic Control*, **50**(1), 106–111.

Da Silva, J. M. G., Seuret, A., Fridman, E., and Richard, J. P. (2011). Stabilization of neutral systems with saturating control inputs. *International Journal of Systems Science*, **42**(7), 1093–1103.

Dey, R., Ghosh, S., Ray, G., and Rakshit, A. (2014). Improved delay-dependent stabilization of time-delay systems with actuator saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**(5), 902–917.

El Aiss, H., Hmamed, A., and El Hajjaji, A. (2017). Improved stability and  $H_\infty$  performance criteria for linear systems with interval time-varying delays via three terms approximation. *International Journal of Systems Science*, **48**(16), 3450–3458.

El Aiss, H., Zoulagh, T., Hmamed, A., and El Hajjaji, A. (2018). An input-output approach to  $H_\infty$  reduced filter design for polytopic time-varying delay systems. *International Journal of Systems Science*, **50**(1), 35–49.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2015a). Delay dependent anti-windup synthesis for time-varying delay systems with saturating actuators. *International Journal of Computer Applications*, **111**(1), 1–6.

---

El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2015b). Delay-dependent anti-windup design to address challenges in AQM congestion control for TCP/IP networks. *In proceedings of the 1st International Conference Advanced Information Technology, Services and Systems, Settat, Morocco*, 309–313.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Husain, A. R., and Zakaria, M. I. (2016a). Delay-dependent robust anti-windup synthesis approach to AQM in TCP/IP networks. *In proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Electrical and Information Technologies, Tanger, Morocco*, 294–299.

El Fezazi, N., Lamrabet, O., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2016b). Robust controller design for congestion control in TCP/IP routers. *In proceedings of the 5th IEEE International Conference on Systems and Control, Marrakesh, Morocco*, 243–249.

El Fezazi, N., Alaoui, B. S., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2016c). A dynamic anti-windup AQM for congestion control in internet. *In proceedings of the 13th ACS/IEEE International Conference on Computer Systems and Applications, Agadir, Morocco*, 1–6.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2017a). Robust stabilization using LMI techniques of neutral time-delay systems subject to input saturation. *Journal of Physics : Conference Series*, **783**(1), 012031.

El Fezazi, N., Tissir, E. H., El Haoussi, F., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2017b). Control based on saturated time-delay systems theory of Mach number in wind tunnels. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **37**(4), 1505–1522.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2017c). Design of robust  $H_\infty$  controllers for congestion control in data networks. *Journal of The Franklin Institute*, **354**(17), 7828–7845.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2017d). Observer-based control for quadruple tank process. *In proceedings of the 14th IEEE International Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Bucharest, Romania*, 1-6.

El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2018a). Observer-based controller design for Mach number in wind tunnels. *International Journal of Ecology & Development*, **33**(1), 1–18.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Alvarez, T. (2018b). Congestion control of data network by using anti-windup approach. *International Journal of Ecological Economics and Statistic*, **39**(1), 37–53.

El Fezazi, N., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2018c). Anti-windup design for state delayed discrete-time systems with input saturation. *International Journal of Ecology & Development*, **33**(2), 145–155.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Alvarez, T., and Tadeo, F. (2018d). Robust stabilization using a sampled-data strategy of uncertain neutral state-delayed systems

subject to input limitations. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **28**(1), 111–122.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Bender, F. A., and Alvarez, T. (2018e). Multi class AQM on a TCP/IP router : a control theory approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, accepté.

El Fezazi, N., El Haoussi, F., Tissir, E. H., Tadeo, F., and Alvarez, T. (2018f). An observer-based  $H_\infty$  controller for quadruple tank process, under review.

El Fezazi, N., Tissir, E. H., El Haoussi, F., Bender, F. A., and Husain, A. R. (2018g). Controller synthesis for steer-by-wire system performance in vehicle, under review.

El Haoussi, F., and Tissir, E. H. (2007). An LMI-based approach for robust stabilization of time delay systems containing saturating actuators. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **24**(3), 347–356.

El Haoussi, F. (2008). Commande des systèmes à retards variables avec ou sans saturation : algorithmes et applications. *Thèse de doctorat, Faculté Des Sciences Dhar El Mahraz de Fès, Maroc*.

El Haoussi, F., and Tissir, E. H. (2009). Robust  $H_\infty$  controller design for uncertain neutral systems via dynamic observer based output feedback. *International Journal of Automation and Computing*, **6**(2), 164–170.

El Haoussi, F., and Tissir, E. H. (2010). delay and its time-derivative dependent robust stability of uncertain neutral systems with saturating actuators. *International Journal of Automation and Computing*, **7**(4), 455–462.

El Haoussi, F., Tissir, E. H., Tadeo, F., and Hmamed A. (2011). Delay-dependent stabilisation of systems with time-delayed state and control : application to a quadruple-tank process. *International Journal of Systems Science*, **42**(1), 41–49.

El Haoussi, F., Tissir, E. H., Hmamed, A., and Tadeo, F. (2012). Stabilization of neutral systems with saturating actuators. *Journal of control science and engineering*, **2012**, 1–8.

El Haoussi, F., Tissir, E. H., Tadeo, F., and Hmamed A. (2013). Robust stabilization with saturating actuators of neutral and state delayed systems. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control & Computer Engineering*, **7**(1), 1878–1889.

El Haoussi, F., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2014). Advances in the robust stabilization of neutral systems with saturating actuators. *International Journal of Ecology & Development*, **28**(2), 49–62.

Ferrese, F., Dong, Q., Biswas, S., and Batcho, J. (2014). Decentralized control of coupled nonlinear dynamic systems with application to quadruple-tank process. *In proceedings of the 40th IEEE International Conference on Industrial Electronics Society, Dallas, USA*, 3657–3661.

Germani, A., Manes, C., and Pepe, P. (2000). A twofold spline approximation for finite horizon LQG control of hereditary systems. *Journal on Control and Optimization*, **39**(4),

---

1233–1295.

Glattfelder, A. H., and Schaufelberger, W. (2003). Control systems with input and output constraints. *Livre, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer*.

Gu, K., Kharitonov, V. L., and Chen, J. (2003). Stability of time-delay systems. *Livre, Control Engineering, Springer*.

Gu, Z., Yue, D., Peng, C., Liu, J., and Zhang, J. (2013). Fault tolerant control for systems with interval time-varying delay and actuator saturation. *Journal of the Franklin Institute*, **350**(2), 231–243.

Hajiani, P., and Poshtan, J. (2014). Abrupt and incipient fault detection and compensation for a 4-tank system benchmark. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, **22**(5), 1287–1297.

Hippe, P. (2006). Windup in Control, its effects and their prevention. *Livre, Advances in Industrial Control, Springer*.

Hmamed, A., El Aiss, H., and El Hajjaji, A. (2015). Stability analysis of linear systems with time varying delay : an input output approach. *In proceedings of the 54th IEEE International Conference on Decision and Control, Osaka, Japan*, 1756–1761.

Hmamed, A., Kririm, S., Benzaouia, A., and Tadeo, F. (2016). Delay-dependent stability and stabilisation of continuous 2D delayed systems with saturating control. *International Journal of Systems Science*, **47**(12), 3004–3015.

Holot, C. V., Misra, V., Towsley, D., and Gong, W.-B. (2001). A control theoretic analysis of RED. *In proceedings of the 20th IEEE International Conference on Computer and Communications Societies, Alaska, USA*, **3**, 1510–1519.

Huang, C., Du, H., Naghdy, F., and Li, W. (2015). Takagi-sugeno fuzzy  $H_\infty$  tracking control for steer-by-wire systems. *In proceedings of the 1st IEEE International Conference on Control Applications, Sydney, Australia*, 1716–1721.

Hu, T., and Lin, Z. (2001). Control systems with actuator saturation : analysis and design. *Livre, Control Engineering, Springer*.

Hu, T., Lin, Z., and Chen, B. M. (2002). Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. *Systems & Control Letters*, **45**(2), 97–112.

Hui, J.-J., Zhang, H.-X., and Kong, X.-Y. (2015). Delay-dependent non-fragile  $H_\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay. *International Journal of Automation and Computing*, **12**(1), 109–116.

Idrissi, S., and Tissir, E. H. (2012). Robust stability of T-S fuzzy systems with time-varying delay and polytopic-type uncertainty. *International Journal of Ecological Economics and Statistics*, **24**(1), 17–26.

Idrissi, S., Tissir, E. H., Boumhidi, I., and Chaibi, N. (2013). Delay-dependent robust stability of time delay systems with polytopic-type uncertainty. *International Journal of Ecology and Development*, **26**(3), 67–77.

Ji, X., and Su, H. (2015). A note on equivalence between two integral inequalities for

time-delay systems. *Automatica* **53**, 244–246.

Johansson, K. H. (1997). Relay feedback and multivariable control. PhD Theses. *PhD Theses, Lund Institute of Technology, Suede*.

Johansson, K. H., Horch, A., Wijk, O., and Hansson, A. (1999). Teaching multivariable control using the quadruple-tank process. *In proceedings of the 38th IEEE International Conference on Decision and Control, Phoenix, USA*, **1**, 807–812.

Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process : A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on control systems technology*, **8**(3), 456–465.

Kardos, T., and Kutasi, D. N. (2017). Hybrid modeling and model based control of the four tank process. *In proceedings of the 6th International Conference on Recent Achievements in Mechatronics, Automation, Computer Science and Robotics, Tîrgu Mureş, Romania*, **2**(1), 67–78.

Kelley, C., Bowles, P., Cooney, J., He, C., Corke, T., Osborne, B., Silkey, J., and Zehnle, J. (2012). High Mach number leading-edge flow separation control using AC DBD plasma actuators. *In proceedings of the 50th AIAA International Meeting on Aerospace Sciences including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Nashville, USA*, 906.

Kolmanovskii, V., and Myshkis, A. (1992). Applied Theory of Functional Differential Equations. *Livre, Mathematics and its Applications, Springer*.

Lamrabet, O., El Fezazi, N., El Haoussi, F., and Tissir, E. H. (2017). Using input delay approach for synthesizing an anti-windup compensator to AQM in TCP/IP networks. *In proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Advanced Technologies for Signal and Image Processing, Fez, Morocco*, 1–6.

Lamrabet, O., Tissir, E. H., and El Haoussi, F. (2018). Anti-windup compensator synthesis for sampled-data delay systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, <https://doi.org/10.1007/s00034-018-0971-9>.

Le, L., Aikat, J., Jeffay, K., and Smith, F. D. (2003). The effects of active queue management on web performance. *In proceedings of the ACM International Conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications, Karlsruhe, Germany*, 265–276.

Lee, Y. S., Moon, Y. S., Kwon, W. H., and Park, P. (2004). Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain systems with a state-delay. *Automatica*, **40**(1), 65–72.

Lien, C. H. (2004). Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**(8), 1365–1370.

Liu, P.-L. (2011). Delay-dependent stabilization for linear time-delay uncertain systems with saturating actuators. *International Journal of General Systems*, **40**(3), 301–312.

Loukianov, A. G., Espinosa-Guerra, O., and Castillo-Toledo, B. (2005). Deadtime block compensation sliding mode control of linear system with delay. *In proceedings of the 10th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*, **38**(1), 712–717.

---

Manitius, A. (1984). Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay : analytical design and numerical simulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **29**(12), 1058–1068.

Manitius, A., and Tran, H. (1986). Numerical simulation of a non-linear feedback controller for a wind tunnel model involving a time delay. *Optimal Control Applications and Methods*, **7**(1), 19–39.

Misra, V., Gong, W.-B., and Towsley, D. (2000). Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED. *In proceedings of the 31th ACM International Conference on Computer Communication Review, Stockholm, Sweden*, **30**(4), 151–160.

Mohamed, E. S., and Albatlan, S. A. (2014). Modeling and experimental design approach for integration of conventional power steering and a steer-by-wire system based on active steering angle control. *American Journal of Vehicle Design*, **2**(1), 32–42.

Pal, V. C., Negi, R., and Kumar, J. (2015). An observer based dynamic output feedback controller for discrete system with input saturation and time varying delay. *International Journal of Control Theory and Applications*, **8**(4), 1383–1394.

Pal, V. C., Kumar, J., Negi, R., and Pati, A. (2017).  $H_\infty$  control of discrete time delayed systems in presence of actuator saturation. *In proceedings of the 3rd IEEE International Indian Control Conference, Guwahati, India*, 295–302.

Prusty, S. B., Pati, U. C., and Mahapatra, K. K. (2015). A novel fuzzy based adaptive control of the four tank system. *In proceedings of the 3rd IEEE International on Computer, Communication, Control and Information Technology, Hooghly, India*, 1–6.

Ryu, S., Rump, C., and Qiao, C. (2004). Advances in active queue management (AQM) based TCP congestion control. *Telecommunication Systems*, **25**(3-4), 317–351.

Sall, C., El Alaoui, E. H. C., Doubabi, S., and El Warraki, E. M. (2009). Design of an AQM for routers supporting TCP flows by means of Lyapunov theory. *In proceedings of the 1st IEEE International Conference on Multimedia Computing and Systems, Ouarzazate, Morocco*, 466–471.

Santra, S., Sakthivel, R., Anthoni, S. M., Shi, Y., and Mathiyalagan, K. (2016). Robust sampled-data PI controller design for networked control systems. *Journal of the Franklin Institute*, **353**(4), 797–815.

Selvi, S., Sakthivel, R., and Mathiyalagan, K. (2016). Delay-dependent robust reliable control for uncertain switched neutral systems. *Complexity*, **21**(5), 224–237.

Shah, M. B. N., Husain, A. R., and Dahalan, A. S. A. (2013). An analysis of CAN-based steer-by-wire system performance in vehicle. *In proceedings of the 3th IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, Penang, Malaysia*, 350–355.

Sename, O. (2007). Is a mixed design of observer-controllers for time-delay systems interesting?. *Asian Journal of Control*, **9**(2), 180–189.

Srikant, R. (2004). The mathematics of internet congestion control. *Livre, Systems &*

*Control : Foundations & Applications, Springer.*

Tarbouriech, S., Abdallah, C. T., and Chiasson, J. (2005). Advances in communication control networks. *Livre, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer*

Tarbouriech, S., Prieur, C., and Da Silva, J. M. G. (2006). Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**(8), 1364–1371.

Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J. M. G., and Queinnec, I. (2011). Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators. *Livre, Control Engineering, Springer.*

Tissir, E. H., and Hmamed, A. (1996). Further results on stability of  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ . *Automatica*, **32**(12), 1723–1726.

Tissir, E. H. (2007). Delay-dependent robust stability of linear systems with non-commensurate time varying delays. *International Journal of Systems Science*, **38**(9), 749–757.

Tissir, E. H. (2011). Exponential stability of switched linear systems with time-varying delay. *Applied Mathematical Sciences*, **5**(8), 395–405.

Tissir, E. H. (2012). Robust exponential stability of switched linear systems with mixed time delays. *International Journal of Ecology & Development*, **22**(2), 1–11.

Tissir, E. H. (2014). Anti-windup design for singular systems with saturating actuators. *International Journal of Ecological Economics and Statistics*, **32**(1), 66–74.

Virgala, I., Frankovský, P., and Kenderová, M. (2013). Friction effect analysis of a DC motor. *American Journal of Mechanical Engineering*, **1**(1), 1–5.

Wang, X., Yuan, P., and Mao, Z. (2015). Ensemble fixed-size LS-SVMs applied for the Mach number prediction in transonic wind tunnel. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **51**(4), 3167–3181.

Wei, Y., Zheng, W. X., and Xu, S. (2015). Robust output feedback control of uncertain time-delay systems with actuator saturation and disturbances. *Journal of The Franklin Institute*, **352**(5), 2229–2248.

Yih, P., Ryu, J., and Gerdes, J. C. (2005). Modification of vehicle handling characteristics via steer-by-wire. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **13**(6), 965–976.

Zabari, A., and Tissir, E. H. (2014). Stability analysis of uncertain discrete systems with two additive time delays. *Applied Mathematical Sciences*, **8**(159), 7935–7949.

Zabari, A., Tissir, E. H., and Tadeo, F. (2017). Delay-dependent robust  $H_\infty$  filtering with lossy measurements for discrete-time systems. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **42**(12), 5263–5273.

Zakaria, M. I., Husain, A. R., Mohamed, Z., El Fezazi, N., and Shah, M. B. N. (2015). Lyapunov-krasovskii stability condition for system with bounded delay-an application to steer-by-wire system. *In proceedings of the 5th IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, Penang, Malaysia*, 543–547.

---

Zakaria, M. I., Husain, A. R., Mohamed, Z., Shah, M. B. N., and Bender, F. A. (2017). Stabilization of Nonlinear Steer-by-Wire System via LMI-Based State Feedback. *In proceedings of the 17th Springer International Asian Simulation Conference, Melaka, Malaysia*, 668–684.

Zhang, P., Ye, C.-Q., Ma, X.-Y., Chen, Y.-H., and Li, X. (2007). Using Lyapunov function to design optimal controller for AQM routers. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, **8**(1), 113–118.

Zhang, C.-K., Jiang, L., He, Y., Wu, H., and Wu, M. (2013). Stability analysis for control systems with aperiodically sampled data using an augmented Lyapunov functional method. *IET Control Theory & Applications*, **7**(9), 1219–1226.

Zhang, C.-K., He, Y., Jiang, L., Wu, M., and Wu, H. (2014). Stability analysis of sampled-data systems considering time delays and its application to electric power markets. *Journal of the Franklin Institute*, **351**(9), 4457–4478.

Zhou, X., Li, C., Huang, T., and Xiao, M. (2015). Fast gradient-based distributed optimisation approach for model predictive control and application in four-tank benchmark. *IET Control Theory & Applications*, **9**(10), 1579–1586.

Zoulagh, T., El Aiss, H., Hmamed, A., and El Hajjaji, A. (2017).  $H_\infty$  filter design for discrete time-varying delay systems : three-term approximation approach. *IET Control Theory & Applications*, **12**(2), 254–262.



# Résumé

---

Cette thèse s'inscrit dans une thématique pluridisciplinaire explorant les liens existants entre la théorie du contrôle et les réseaux informatiques, le système QTP, la technologie SbW dans un véhicule et la dynamique du MN dans un WT. L'idée consiste à appliquer les outils de l'Automatique pour la stabilisation de quelques problèmes considérés dans ces systèmes qui s'organise naturellement suivant deux axes de recherche principaux : la construction de conditions de stabilité pour les systèmes retardés avec saturation d'entrée et le contrôle de la congestion dans les réseaux TCP/IP, du niveau d'eau dans les réservoirs et de la dynamique du véhicule et du MN dans le WT.

Premièrement, nous nous sommes intéressés à assurer la stabilité des systèmes soumis aux retards et à la saturation d'entrée par l'utilisation de la méthode de L-K dans laquelle nous avons élaboré de fonctionnelles en adéquation avec de modélisations des systèmes. Pour cela, l'objectif est de prendre en compte un maximum d'informations sur les systèmes afin de fournir des conditions de stabilité sous forme des LMIs moins conservatives.

Deuxièmement, la méthodologie développée est ensuite utilisée pour le problème de contrôle de la congestion lors de communications TCP. Il s'agit alors de contrôler le taux de perte par l'intermédiaire d'un mécanisme d'AQM situé au niveau d'un routeur pour réguler le trafic. Pour cette raison, nous avons atteint une nouvelle politique d'AQM pour le trafic hétérogène dans le réseau. D'autre part, le processus appelé QTP qui démontre un problème de contrôle du niveau d'eau est alors présenté. L'objectif est de concevoir un contrôleur correspondant basé sur un observateur pour ce système en tenant compte des retards de transport dans les variables du processus, les saturations de la tension et la perturbation des flux. De même, en considérant une autre technologie qui élimine la liaison mécanique entre le volant et la roue avant, la spécification de la conception d'un contrôleur pour cette technologie appelée SbW est d'assurer la stabilité et un certain niveau de performance en utilisant l'approche des retards inclus et la nature saturante. Finalement, un tunnel est entraîné par un ventilateur en circuit fermé, dans lequel la dynamique du MN est contrôlée par une régulation de la vitesse du moteur du ventilateur et de petits changements dans l'angle de l'ailette directrice. Alors, un contrôleur pour cette dynamique est développé afin d'obtenir de bonnes réponses transitoires et par conséquent de réduire le coût d'exploitation en réduisant les pertes d'azote liquide où l'effet du retard dans les variables d'état et de la saturation sur l'entrée sont explicitement pris en compte.

**Mots clés :** Théorie du contrôle, réseaux TCP/IP, congestion, QTP, niveau d'eau, SbW, MN, WT, système retardé, saturation d'entrée, L-K, LMI, AQM, trafic hétérogène.



# Abstract

---

This thesis investigates the existing links between the control theory and the communication networks, the QTP system, the SbW technology in a vehicle, and the MN dynamics in a WT. The key idea consists in using the tools from control theory for the considered problems stabilization that has naturally been turned towards two research lines : the design of stability and stabilization conditions for delayed systems with input saturation and the control of the congestion issue in the TCP/IP network, the water level in the tanks, and the dynamics of the vehicle and of the MN in the WT.

First, we were interested in ensuring the stability of systems subject to delays and input saturation by using of the L-K method in which functionals are built according to modelings of the systems. For this reason, we aim at taking into account relevant informations on the systems to reduce the conservatism of the stability analysis where the conditions are given in the form of LMIs.

In a second part, the developed methodology is used to cope with the congestion phenomenon in a router supporting TCP communications. Based on the AQM principle, we design a controller embedded into the router that monitors the packet losses. For this reason, we have reached a novel AQM policy for heterogeneous traffic in the network. On other hand, the process called the QTP that demonstrates a water level control problem is then presented. the objective is to design a corresponding observer-based controller for this system taking into account the transport delays in the process variables, voltage saturations, and flow disturbances. Similarly, considering another technology that eliminates the mechanical linkage between the steering and the front wheels, the design specification of a controller for this technology called SbW is to ensure the stability and a certain level of performance using the included delay approach and the saturating nature. Finally, a tunnel is driven by a closed-circuit fan, in which the MN dynamics are controlled by a fan motor speed regulation and small changes in the guide vane angle. Then, a controller for these dynamics is developed to achieve good transient responses and consequently to reduce the operating cost by reducing liquid nitrogen losses where the effect of the delay in the state variables and the saturation on the input are explicitly taken into account.

**Keywords :** Control theory, TCP/IP network, congestion, QTP, water level, SbW, MN, WT, delayed system, input saturation, L-K, LMI, AQM, heterogeneous traffic.