



**UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE**  
**Faculté des Sciences et Techniques**  
**Béni-Mellal**



*Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques*  
*Formation Doctorale : Mathématiques & Physiques Appliquées*

# THÈSE

Présentée par

**Mustapha ATRAOU**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Spécialité : Mathématiques

---

## **Etude des équations différentielles à conditions non locales floues.**

---

Soutenue publiquement le **19 janvier 2018** devant la Commission d'Examen composée de:

<b>Mr Abdelkrim MERBOUHA</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Président</b>
<b>Mr Khalid HILAL</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr Mohamed OUKESSOU</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Examineur</b>
<b>Mme Lalla Saadia CHADLI</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Encadrant</b>
<b>Mr Said MELLIANI</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Co-encadrant</b>
<b>Mr Adil ABBASSI</b>	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal	<b>Invité</b>

# Table des matières

Remerciements . . . . .	4
Introduction . . . . .	5
<b>1 Théorie des ensembles flous</b>	<b>7</b>
1.1 Notions élémentaires . . . . .	7
1.1.1 Définitions et exemples . . . . .	7
1.2 Principe d'extension des ensembles flous . . . . .	9
1.2.1 Résolution de l'identité . . . . .	9
1.2.2 Principe d'extension . . . . .	11
1.2.3 Calcul avec des nombres flous . . . . .	18
<b>2 Équations différentielles floues</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Préliminaires . . . . .	24
2.3 Équation différentielle floue . . . . .	29
2.4 Existence de solutions globales . . . . .	32
<b>3 Équations différentielles floues à conditions non locales</b>	<b>38</b>
3.1 Introduction . . . . .	38
3.2 Condition non locale . . . . .	39
3.3 Étude du problème dans le cas classique . . . . .	40
3.3.1 Existence et unicité . . . . .	41
3.3.2 Dépendance continue de la solution . . . . .	45
3.4 Étude du problème dans le cas flou . . . . .	46
3.4.1 Existence et unicité de la solution . . . . .	46

3.4.2 Dépendance continue de la solution . . . . .	49
3.5 Application . . . . .	50
Bibliographie . . . . .	51

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de thèse le professeur Madame **Lalla Saadia CHADLI**, je la remercie de m'avoir encadré, orienté et conseillé.

Je remercie également et très chaleureusement le professeur **Said MELLIANI** qui m'a beaucoup aidé et encouragé, je le remercie d'avoir cru en mes capacités, pour le temps et la patience qu'il m'a accordé tout au long de ces années en me fournissant d'excellentes conditions de travail, je garderai dans mon cœur sa générosité, sa compréhension. Pour tout ce qu'il m'a donné, je le remercie très sincèrement.

Je remercie le professeur **Khalid HILAL** d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Ses remarques pertinentes et ses conseils précieux m'ont beaucoup aidé à améliorer la qualité de ce travail.

Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi au professeur **Abdelkarim MERBOUHA** d'avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury de soutenance. Merci également à Monsieur le professeur **Mohamed OUKESSOU** qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examineur. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

j' exprime ma reconnaissance au professeur **Adil ABBASSI** d'avoir accepté de se joindre aux membres de jury.

Mes remerciements vont aussi à toute l'équipe Du L.M.A.C.S et particulièrement au professeur **M'hamed ELOMARI** pour son soutien et sa qualité humaine.

Enfin, j'adresse un remerciement spécial et j'exprime ma profonde reconnaissance à ma famille.

# Introduction

Les travaux de recherche dans la théorie des ensembles flous qui suivent le célèbre article "Fuzzy Sets", publié par L. A. Zadeh (1965), ont révélé le pouvoir de cette théorie, comme un outil très important pour la modélisation incertaine et le processus vague et subjectif de l'information dans les modèles mathématiques. Cette théorie permet de modéliser le traitement de l'information.

Différentes tentatives ont été faites pour établir des théories mathématiques basées sur les ensembles flous au lieu d'ensembles ordinaires. Les moyens pour comprendre le comportement humain en termes de distribution dans l'espace métrique ont été fournis, et les applications aux différents domaines de traitement de l'information ont été discutées. Ainsi, cette théorie permet aussi d'évaluer l'influence des paramètres imprécis dans les modèles, que ce soit mathématiques, techniques ou physiques (analyse des données, intelligence artificielle, théorie de la décision, control, reconnaissance des formes, etc ...).

Les jugements humains subjectifs ou les expressions dans la langue naturelle, doivent être interprétés en terme de nombres dans un espace de mesures.

Les ensembles flous fournissent une structure convenable pour la modélisation mathématique de ces phénomènes.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des solutions floues pour des équations différentielles ordinaires qui contiennent des paramètres susceptibles d'être des quantités floues.

Dans le premier chapitre, on introduit les notions de base de la théorie des ensembles flous, on définit les notions fondamentales de ce nouveau concept suite aux différents travaux de L. A. Zadeh [39], H. Prade et D. Dubois [12], H. Bandemer

[3], S. Miyamoto [24], A. Kaufmann [16], H. Nguyen [27], M. Mizumoto et K. Tanaka [25],

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la notion de la solution floue pour les modèles qui sont constitués par des équations différentielles ordinaires. Pour cela on va étudier l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), & t \in T = [0, a], \\ u(0) = u_0 \in E^1, \end{cases}$$

où la fonction  $f$  satisfait la condition généralisée de Lipschitz.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une équation différentielle à condition non locale floue.

Nous allons établir l'existence, l'unicité et la dépendance continue à la donnée initiale de la solution intégrale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in T, x_0 \in E^1, \\ x(0) = x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)), \end{cases}$$

avec  $f : T \times E^1 \rightarrow E^1$  et  $g : T^p \times C \rightarrow E^1$  sont des fonctions données.

$C$  : l'espace des fonctions continues de  $T$  dans  $E^1$  muni de la métrique

$$H(y, x) = \sup_{t \in T} d(y(t), x(t)).$$

# Chapitre 1

## Théorie des ensembles flous

### 1.1 Notions élémentaires

#### 1.1.1 Définitions et exemples

Soit  $X$  un ensemble quelconque

**Définition 1.1.**

*Un ensemble flou  $A$  de  $X$  est caractérisé par la donnée d'une fonction caractéristique généralisée*

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

*appelée fonction d'appartenance de  $A$ .*

Pour tout  $x \in X$ , on désigne par la valeur  $\mu_A(x)$  le degré d'appartenance de l'élément  $x$  à l'ensemble  $A$ , on note par  $\mathbb{F}(X)$  la collection de tous les ensembles flous sur  $X$ .

Il est clair que pour chaque ensemble usuel ou classique  $M$ , sa fonction caractéristique usuelle est semblable à sa fonction d'appartenance

$$\mu_M = \chi_M, \text{ où } \chi \text{ est la fonction indicatrice.}$$

,

par conséquent, on considère les ensembles classiques comme un cas particulier

des ensembles flous avec seulement 0 et 1 comme degrés d'appartenance.

**Définition 1.2.**

Soit  $\alpha \in [0, 1]$  et  $A$  un ensemble flou, alors l'ensemble classique

$$A^{\alpha \geq} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

est appelé " $\alpha$ -coupe" ou "coupe de niveau  $\alpha$ " de l'ensemble flou  $A$ .

On désigne par la coupe

$$\text{supp}(A) = A^{0 >} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

le support de l'ensemble flou  $A$ .

**Exemple 1.1.**

Soit l'ensemble flou  $A$  décrit par sa fonction d'appartenance

$$\mu_A(a) = \begin{cases} a - 1 & \text{pour } a \in [1, 2] \\ -a + 3 & \text{pour } a \in [2, 3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$A$  est un ensemble flou de  $\mathbb{R}$  dont le support est  $\text{supp}(A) = ]1, 3[$  et  $A^{1 >} = \{2\}$

**Définition 1.3** (Produit cartésien flou).

Soit  $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$  pour tout  $i \in I = \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{F}(X_1) \times \dots \times \mathbb{F}(X_n) &\rightarrow \mathbb{F}(X_1 \times \dots \times X_n) \\ (\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_n}) &\mapsto \mu_{A_1} \otimes \dots \otimes \mu_{A_n} \end{aligned}$$

$$\mu_{A_1} \otimes \dots \otimes \mu_{A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$$

est le produit cartésien flou des ensembles flous  $A_1, \dots, A_n$ .

## 1.2 Principe d'extension des ensembles flous

Le principe d'extension décrit par L. A. Zadeh (voir[39][34][40]) , nous permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble  $X$  aux sous ensembles flous de  $X$ . On a montré dans dans l'analyse des nombres flous [25], la méthode ensembliste en effet l'utilisation des ensembles  $\alpha$ -coupes d'un ensemble flou est très simple que l'approche fonctionnelle (i.e. l'utilisation des fonctions d'appartenances).

L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être regardé comme une application de ce lui ci aux  $\alpha$ -coupes de l'ensemble flou en question.

En général si

$$f : X \times Y \rightarrow Z$$

et  $A, B$  sont des sous ensembles flous de  $X$  et  $Y$ , respectivement, on obtient

$$[f(A, B)]^{\alpha \geq} = f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) \quad (1.1)$$

où  $A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}$ , et  $[f(A, B)]^{\alpha \geq}$  sont respectivement les  $\alpha$ -coupes de  $A, B$  et  $f(A, B)$ . On veut donner une condition nécessaire et suffisante pour obtenir (1.1), et définir une classe de nombres flous où cette égalité est vérifiée pour toute fonction  $f$  continue.

### 1.2.1 Résolution de l'identité

Pour  $\alpha \in [0, 1]$ , rappelons que l'ensemble  $\alpha$ -coupe de  $A$  est définie par

$$A^{\alpha \geq} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Si  $A, B \in \mathbb{F}(X)$ , alors par définition,  $A = B$  si et seulement si

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Il est facile de vérifier que

$$A = B \Leftrightarrow A^{\alpha \geq} = B^{\alpha \geq} \quad \forall \alpha \in ]0, 1]$$

Il est aussi évident que  $S_A = \bigcup_{\alpha \in ]0, 1]} A^{\alpha \geq}$  où  $S_A$  est le support de l'ensemble flou  $A$ ,

$$S_A = \{x : \mu_A(x) > 0\}$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} (\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x)) \quad (1.2)$$

et ainsi  $A$  peut être représenté comme suit

$$A = \int_0^1 \alpha A^{\alpha \geq} \quad (1.3)$$

où  $\int_0^1$  représente l'union sur  $\alpha \in [0, 1]$ , et  $\alpha A^{\alpha \geq}$  est l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance est

$$\chi_{\alpha A^{\alpha \geq}}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in A^{\alpha \geq} \\ 0 & \text{si } x \notin A^{\alpha \geq} \end{cases}$$

**Proposition 1.1.**

Si  $\tilde{A}^\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , est une famille de sous ensembles de  $X$  tel que :

$$A = \int_0^1 \alpha \tilde{A}^{\alpha \geq}$$

alors

(i)  $\tilde{A}^\alpha \subseteq A^\alpha$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

(ii)  $\bigcup_{\alpha \in ]0, 1]} A^{\alpha \geq} = \bigcup_{\alpha \in ]0, 1]} \tilde{A}^{\alpha \geq}$

**Preuve :**

(i) soit  $x \in \tilde{A}^{\alpha_0 \geq}$ , alors  $\alpha_0 \chi_{\tilde{A}^{\alpha_0 \geq}}(x) = \alpha_0$ ,

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} (\alpha \chi_{\tilde{A}^{\alpha \geq}}(x)) \geq \alpha_0$$

donc  $x \in A^{\alpha \geq}$

( ii ) L'égalité de ( ii ) vient du fait que les deux membres décrivent le support  $S_A$  de  $A$ .

### 1.2.2 Principe d'extension

Rappelons que si  $f : X \rightarrow Y$ , et  $A \in \mathbb{F}(X)$ , alors l'ensemble flou  $f(A)$  est défini, via le principe d'extension, par

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \quad \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad (1.4)$$

#### Remarque 1.1.

Dans l'ordre d'appliquer ce principe aux applications floues, on réécrit (1.4) sous la forme équivalente suivante :

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \chi_{f(x)}(y)) \quad (1.5)$$

où  $\chi_{f(x)}(y) = 1$  ou  $0$  suivant que  $y = f(x)$  ou  $y \neq f(x)$ .

#### Proposition 1.2.

Soit  $A \in \mathbb{F}(X)$  et  $f : X \rightarrow Y$ , alors

$$f(A) = \int_0^1 \alpha f(A^{\alpha \geq}) \quad (1.6)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} \mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \\ &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \left[ \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x) \right] \\ &= \sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ \alpha \in [0,1]}} [\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

D'autre part, soit  $B = \int_0^1 \alpha f (A^{\alpha \geq})$ , alors

$$\begin{aligned}
\mu_B (y) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{f(A^{\alpha \geq})} (y) \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \alpha \sup_{x \in f^{-1}(y)} \chi_{A^{\alpha \geq}} (x) \right] \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \sup_{x \in f^{-1}(y)} \alpha \cdot \chi_{A^{\alpha \geq}} (x) \right] \\
&= \sup_{\substack{x \in f^{-1}(y) \\ \alpha \in [0,1]}} [\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}} (x)] = \mu_{f(A)} (y)
\end{aligned}$$

**Remarque 1.2.**

On a

$$f(A) = \int_0^1 \alpha [f(A)]^{\alpha \geq} = \int_0^1 \alpha f(A^{\alpha \geq})$$

avec  $f(A^{\alpha \geq}) \subseteq [f(A)]^{\alpha \geq}, \forall \alpha \in [0, 1]$ . Mais en général,

$$f(A^{\alpha \geq}) \neq [f(A)]^{\alpha \geq}$$

**Proposition 1.3.**

Soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , et  $A \in \mathbb{F}(X), B \in \mathbb{F}(Y)$ ; alors

$$f(A, B) = \int_0^1 \alpha f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) \tag{1.8}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
\mu_{f(A,B)} (z) &= \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\
&= \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min \left( \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{B^{\alpha \geq}}(y) \right)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Soit  $T = \int_0^1 \alpha f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq})$ , alors

$$\begin{aligned}
\mu_T(z) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq})}(z) \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[ \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \alpha \chi_{B^{\alpha \geq}}(y)) \right] \\
&= \sup_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ (x,y) \in f^{-1}(z)}} [\min(\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \alpha \chi_{B^{\alpha \geq}}(y))]
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Pour montrer  $\mu_T(z) = \mu_{f(A,B)}(z)$ , il suffit de montrer

$$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\min(\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \alpha \chi_{B^{\alpha \geq}}(y))] \tag{1.11}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x) \\
\beta_0 &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{B^{\alpha \geq}}(y)
\end{aligned}$$

Si  $\min(\alpha_0, \beta_0) = 0$ , sans perte de généralité on prend  $\alpha_0 = 0$

alors  $\alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x) = 0$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$

ainsi (1.11) est vérifiée.

Supposons maintenant que  $\min(\alpha_0, \beta_0) > 0$ , on a alors

$$\begin{aligned}
x &\in A^{\alpha \geq} \quad \text{pour tout } \alpha < \alpha_0 \\
\text{et } x &\notin A^{\alpha \geq} \quad \text{pour tout } \alpha > \alpha_0
\end{aligned}$$

. La première est évidente. Montrons que

– S' il existe  $\alpha'$  tel que

$$\alpha' < \alpha_0, \quad x \notin A^{\alpha \geq}$$

alors  $x \notin A^{\alpha \geq}$  pour tout  $\alpha < \alpha'$  (d'après le fait que  $\alpha \leq \beta \Rightarrow A^{\alpha \geq} \supseteq A^{\beta \geq}$ ), ainsi

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{A^{\alpha \geq}}(x) \leq \alpha' < \alpha_0$$

ce qui est absurde.

– S' il existe  $\alpha'$  telle que

$$\alpha' > \alpha_0, \quad \text{et} \quad x \in A^{\alpha' \geq}$$

alors  $\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A^{\alpha \geq}}(x) \geq \alpha_0$ , ce qui est aussi absurde.

De la même façon, on a

$$y \in B^{\alpha \geq} \quad \text{pour tout } \alpha < \beta_0$$

$$y \notin B^{\alpha \geq} \quad \text{pour tout } \alpha > \beta_0$$

ainsi

$$\min(\alpha \cdot \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \alpha \cdot \chi_{B^{\alpha \geq}}(y)) = \begin{cases} \alpha & \text{pour } \alpha < \min(\alpha_0, \beta_0) \\ 0 & \text{pour } \alpha > \min(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

et

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\min(\alpha \cdot \chi_{A^{\alpha \geq}}(x), \alpha \cdot \chi_{B^{\alpha \geq}}(y))] = \min(\alpha_0, \beta_0)$$

**Remarque 1.3.**

$f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) \subseteq [f(A, B)]^{\alpha \geq}, \forall \alpha \in [0, 1]$ , mais en général

$$f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) \neq [f(A, B)]^{\alpha \geq}.$$

**Proposition 1.4.**

Avec les notations de la proposition 1.3, une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité suivante :

$$f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) = [f(A, B)]^{\alpha \geq} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

est  $\forall z \in Z, \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$  est atteint

**Preuve :**

(i) Supposons que  $[f(A, B)]^{\alpha \geq} \subseteq f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq})$

Soit  $z \in Z$  tel que

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t, \quad t \in ]0, 1]$$

on a

$$\begin{aligned}\mu_{f(A,B)}(z) = t &\Rightarrow z \in [f(A, B)]^{t \geq} \\ &\Rightarrow z \in f(A^{t \geq}, B^{t \geq})\end{aligned}$$

ainsi,  $\exists \bar{x} \in A^{t \geq}$  et  $\bar{y} \in B^{t \geq}$  tels que  $f(\bar{x}, \bar{y}) = z$ .

Pour  $(\bar{x}, \bar{y}) \in f^{-1}(z)$  et  $\mu_A(\bar{x}) \geq t$ ,

$$\mu_B(\bar{y}) \geq t \Rightarrow \min(\mu_A(\bar{x}), \mu_B(\bar{y})) \geq t$$

mais

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \min(\mu_A(\bar{x}), \mu_B(\bar{y}))$$

et que

$$\min(\mu_A(\bar{x}), \mu_B(\bar{y})) = t$$

( ii ) D'après la proposition 1.1 et la proposition 1.3, on a

$$f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq}) \subseteq [f(A, B)]^{\alpha \geq} \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Maintenant supposons  $\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$  est atteint.

Soit  $z \in [f(A, B)]^{\alpha \geq}$ , c'est à dire :  $\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \alpha$

- Si  $\mu_{f(A,B)}(z) > \alpha$ , par définition du sup il existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in f^{-1}(z)$  tel que :

$$\alpha < \min(\mu_A(\bar{x}), \mu_B(\bar{y})) \leq \mu_{f(A,B)}(z) \Rightarrow \bar{x} \in A^{\alpha \geq} \text{ et } \bar{y} \in B^{\alpha \geq}$$

ainsi  $z = f(\bar{x}, \bar{y}) \in f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq})$ .

- Si  $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$  alors par hypothèse, il existe  $(x', y') \in f^{-1}(z)$  tel que :

$$\begin{aligned}\min(\mu_A(x'), \mu_B(y')) &= \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \alpha \\ &\Rightarrow x' \in A^{\alpha \geq} \text{ et } y' \in B^{\alpha \geq}\end{aligned}$$

ainsi  $z = f(x', y') \in f(A^{\alpha \geq}, B^{\alpha \geq})$ .

**Définition 1.4.**

Soit la fonction

$$\begin{aligned} g : X_1 \times \cdots \times X_n &\rightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto g(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

on lui associe la fonction floue  $\hat{g}$  définie par

$$\begin{aligned} \hat{g} : \mathbb{F}(X_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(X_n) &\rightarrow \mathbb{F}(Y) \\ (A_1, \dots, A_n) &\mapsto \hat{g}(A_1, \dots, A_n) \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\hat{g}(A_1, \dots, A_n)}(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n \\ g(x_1, \dots, x_n) = y}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$$

si pour tout  $y \in Y$ , il n'existe pas d'élément  $x_1, \dots, x_n$  tel que

$$g(x_1, \dots, x_n) = y$$

alors on pose par définition

$$\mu_{\hat{g}(A_1, \dots, A_n)}(y) = 0$$

**Remarque 1.4.**

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , alors de la définition (1.3) on a

$$\mu_{A_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$$

d'après le principe d'extension donné par la définition (1.4)

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{g}(A_1, \dots, A_n)}(y) &= \sup_{\substack{x \in X_1 \times \cdots \times X_n \\ g(x) = y}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \\ &= \sup_{\substack{x \in X_1 \times \cdots \times X_n \\ g(x) = y}} \mu_{A_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{A_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sup \mu_{A_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

**Remarque 1.5.**

Soit

$$\begin{aligned}\check{g} : \mathbb{F}(X_1) \times \cdots \times \mathbb{F}(X_n) &\rightarrow \mathbb{F}(Y) \\ A = (A_1, \dots, A_n) &\mapsto \check{g}(A)\end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\check{g}(A)}(y) = \sup \mu_A(g^{-1}(y))$$

La fonction  $\tau$  comme dans la définition (1.3) et  $\hat{g}$  comme dans la définition (1.4) nous permettent d'obtenir

$$\check{g} \circ \tau = \hat{g}$$

En effet

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{g}(A_1, \dots, A_n)}(y) &= \sup \mu_{A_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y)) \\ &= \sup \mu_{\tau(A_1, \dots, A_n)}(g^{-1}(y)) \\ &= \mu_{\check{g} \circ \tau}(y)\end{aligned}$$

**Théorème 1.1.**

Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  alors, d'après le principe d'extension on obtient

$$\hat{g} \circ \hat{f} = \widehat{g \circ f}$$

**Preuve :**

Soit  $A \in \mathbb{F}$  et  $z \in Z$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\mu_{\widehat{g \circ f}}(z) &= \sup \mu_A((g \circ f)^{-1}(z)) \\ &= \sup \mu_A(f^{-1}(g^{-1}(z))) \\ &= \sup \mu_A\left(\bigcup_{y \in g^{-1}(z)} f^{-1}(y)\right) \\ &= \sup \bigcup_{y \in g^{-1}(z)} \mu_A(f^{-1}(y)) \\ \mu_{\hat{g} \circ \hat{f}}(z) &= \sup \mu_{\hat{f}(A)}(g^{-1}(z)) \\ &= \sup \{\sup \mu_A(f^{-1}(y)) : y \in g^{-1}(z)\}\end{aligned}$$

### 1.2.3 Calcul avec des nombres flous

#### Définition 1.5.

Soit  $\mathbb{R}$  la droite réelle, un nombre réel flou est l'ensemble flou représenté par la fonction

$$\begin{aligned}\mu_A : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu_A(x)\end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- $A^{1\geq} \neq \emptyset$ .
- $\forall \alpha \in [0, 1]$  les  $A^{\alpha\geq}$  sont des intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ .

Pour un nombre réel flou, on note  $a$  (respectivement  $\mu_a$  et  $a^{\alpha\geq}$ ) au lieu de  $A$  (respectivement  $\mu_A$  et  $A^{\alpha\geq}$ ), ainsi que les intervalles compacts  $a^{\alpha\geq}$  par

$$a^{\alpha\geq} = [a_L^\alpha, a_R^\alpha]$$

L'ensemble flou donné par l'exemple 1.1 représente aussi un nombre réel flou qui est 2. Pour plus de détails sur le calcul avec des nombres flous ; nous référons aux travaux([11, 36, 20])

#### Définition 1.6 (Continuité supérieure).

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  est continue supérieurement sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour chaque suite de nombres réels  $(x_n)_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$  on a :

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

#### Proposition 1.5.

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors on a l'équivalence suivant

- (i)  $\forall \alpha \in [0, 1]$  l'ensemble  $\{x : f(x) \geq \alpha\}$  est fermé.
- (ii)  $f$  est continue supérieurement sur  $\mathbb{R}$

**Preuve :**

( i )  $\Rightarrow$  ( ii )

On suppose qu'il existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  et une suite réelle  $(x_n)_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \bar{x}$ , on a

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = r \\ \Rightarrow \exists \delta > 0, \quad f(\bar{x}) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - \delta = r - \delta \end{aligned}$$

alors  $r$  est un point d'accumulation, on peut extraire une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_k}) = r$ . En particulier  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\forall k \geq k_0 \quad f(x_{n_k}) \geq r - \frac{\delta}{2}$$

ainsi à partir du rang  $k_0$  tous les termes de la suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  sont dans l'ensemble  $\{x : f(x) \geq r - \frac{\delta}{2}\}$ , la suite  $(x_n)_n$  ainsi que sa sous-suite extraite admettent  $\bar{x}$  comme limite. D'autre part on a  $f(\bar{x}) < r - \delta$  or  $r - \delta < r - \frac{\delta}{2}$  ce qui implique que  $\bar{x} \notin \{x : f(x) \geq r - \frac{\delta}{2}\}$  ce qui est absurde.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Il existe une suite de réels  $(x_n)_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ , et  $f(x_n) \geq \alpha$  alors

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \alpha$$

### Remarque 1.6.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu_A(x) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes

- (a)  $A^{1 \geq} \neq \emptyset$ .
- (b)  $\mu_A$  est continue supérieurement sur  $\mathbb{R}$
- (c)  $\mu_A$  est croissante sur  $] -\infty, A_L^{1 \geq} ]$  et décroissante sur  $[ A_R^{1 \geq}, +\infty [$ .
- (d)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mu_A(x) = 0$ .

alors l'ensemble  $A$  définit un nombre flou.

## Théorème 1.2.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

et  $A_1, \dots, A_n$  des ensembles flous, alors pour tout  $\alpha \in [0, 1]$  on a

(i)  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha>} = f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$ .

(ii) en outre si  $f$  est continue, alors pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$  on a

$$\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha\geq} = f(A_1^{\alpha\geq}, \dots, A_n^{\alpha\geq})$$

**Preuve :**

Montrons (i)

1.)  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha>} \supseteq f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$

soit  $y \in f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  avec  $f(x_1, \dots, x_n) = y$  et  $\mu_{A_i}(x_i) > \alpha$ ,

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

d'où

$$\begin{aligned} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) &> \alpha \\ \Rightarrow \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \\ f(x_1, \dots, x_n) = y}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) &> \alpha \\ \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y) &> \alpha \end{aligned}$$

2.)  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha>} \subseteq f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$

montrons que  $y \in \mathbb{R}$ , alors que

$$\mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y) > \alpha \Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \text{ avec } f(x_1, \dots, x_n) = y$$

ainsi que

$$\mu_{A_i}(x_i) > \alpha, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

on a

$$\mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y) > \alpha \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y) > 0$$

d'après le principe d'extension, il existe au moins  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}$  tel que :

$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = y$ . D'autre part  $\mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y)$  réalise le supremum de la quantité

$\min (\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$  sur l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ , en particulier pour  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  donc

$$\min (\mu_{A_1}(\bar{x}_1), \dots, \mu_{A_n}(\bar{x}_n)) > \alpha \Rightarrow y \in f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$$

Montrons ( ii )

1.)  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha>} \supseteq f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$  ( de même que [ ( i ). 1.] )

2.)  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)^{\alpha>} \subseteq f(A_1^{\alpha>}, \dots, A_n^{\alpha>})$

Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que

$$\mu_{\hat{f}(A_1, \dots, A_n)}(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \\ f(x_1, \dots, x_n) = y}} \min (\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \geq \alpha$$

alors d'après ( i ), il existe  $(x_1^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}$  avec  $f(x_1^j, \dots, x_n^j) = y$ , tel que

$$\min (\mu_{A_1}(x_1^j), \dots, \mu_{A_n}(x_n^j)) \geq \alpha - \frac{1}{j}$$

on prend  $\beta \in ]0, \alpha[$ ,  $A_i$  est un nombre flou ce qui implique que  $A_i^{\beta \geq}$  est compact  $\forall i \in I$

$$\Rightarrow A_1^{\beta \geq} \times \dots \times A_n^{\beta \geq} \text{ est compact}$$

en particulier

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } (x_1^j, \dots, x_n^j) \in A_1^{\beta \geq} \times \dots \times A_n^{\beta \geq} \quad \forall j \geq j_0$$

d'après le théorème , il existe une suite convergente  $(x_1^{j_k}, \dots, x_n^{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  avec

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_1^{j_k}, \dots, x_n^{j_k}) = (x_1, \dots, x_n) \in A_1^{\beta \geq} \times \dots \times A_n^{\beta \geq}$$

d'après la continuité de  $f$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_1^{j_k}, \dots, x_n^{j_k}) = y$$

alors  $\forall i \in I : \mu_{A_i}(x_i^{j_k}) > \alpha - \frac{1}{j_k}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_{A_i}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{j_k}\right) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\mu_{A_i}(x_i^{j_k})) \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha - \frac{1}{j_k}\right) = \alpha \end{aligned}$$

**Remarque 1.7.**

- Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$  une fonction continue,  $A_1, \dots, A_n$  des nombres flous et  $\hat{f}$  l'extension de  $f$  alors  $\hat{f}(A_1, \dots, A_n)$  est aussi un nombre flou

**Remarque 1.8.**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction continue et  $a_1, \dots, a_n$  des nombres flous alors  $\forall \alpha \in ]0, 1]$  :

1. si  $f$  est monotone croissante par rapport à chaque variable alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(a_1, \dots, a_n)_L^\alpha &= f(a_{1L}^\alpha, \dots, a_{nL}^\alpha) \\ \hat{f}(a_1, \dots, a_n)_R^\alpha &= f(a_{1R}^\alpha, \dots, a_{nR}^\alpha) \end{aligned}$$

2. si  $f$  est monotone décroissante par rapport à chaque variable alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(a_1, \dots, a_n)_L^\alpha &= f(a_{1R}^\alpha, \dots, a_{nR}^\alpha) \\ \hat{f}(a_1, \dots, a_n)_R^\alpha &= f(a_{1L}^\alpha, \dots, a_{nL}^\alpha) \end{aligned}$$

3. si  $f$  est croissante (respectivement décroissante) par rapport à  $x_i$  pour tout  $i \neq j$  et  $f$  est décroissante (respectivement croissante) par rapport à  $x_j$  alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)_L^\alpha &= f(a_{1L}^\alpha, \dots, a_{j-1L}^\alpha, a_{jR}^\alpha, a_{j+1L}^\alpha, \dots, a_{nL}^\alpha) \\ \hat{f}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)_R^\alpha &= f(a_{1R}^\alpha, \dots, a_{j-1R}^\alpha, a_{jL}^\alpha, a_{j+1R}^\alpha, \dots, a_{nR}^\alpha) \end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Équations différentielles floues

### 2.1 Introduction

Seikkala [35] a défini la dérivée d'une fonction à valeur floue qui n'est qu'une généralisation de la dérivée de Hukuhara décrite dans [30], il a défini aussi l'intégrale floue qui est la même que celle de Dubois et Prade [12], et via le principe d'extension de Zadeh, il a montré que le problème flou à valeur initial

$$x'(t) = f(t, x(t)) , \quad x(0) = x_0$$

admet une solution floue unique quand  $f$  satisfait la condition généralisée de Lipschitz. Dans [15] Kaleva a étudié le problème de Cauchy floues. Ainsi, Park et al [28, 29] ont étudié l'existence des solutions pour des équations intégrales floues dans des espaces de Banach.

On considère le problème flou à valeur initiale

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) , \quad u(0) = u_0 \in E^1$$

où  $f$  est une application définie sur  $[0, +\infty[ \times E^1$  à valeurs dans  $E^1$ .

## 2.2 Préliminaires

$(P_K(\mathbb{R}), d)$  désigne la famille de tous les sous ensembles convexes, compacts et non vides de  $\mathbb{R}$ . Étant donné  $A$  et  $B$  deux sous ensembles bornés non vides de  $\mathbb{R}$ . La distance entre  $A$  et  $B$  est définie par la métrique de Hausdorff

$$d_h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme Euclidienne usuelle dans  $\mathbb{R}$ . Il est clair que  $(P_K(\mathbb{R}), d)$  a une structure d'espace métrique.

### Proposition 2.1. [31]

*L'espace métrique  $(P_K(\mathbb{R}^n), d_h)$  est un espace complet et séparable.*

- Soit  $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$  un intervalle et on note par

$$E^1 = \{u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] / u \text{ satisfait les propriétés (i) - (iv) suivantes}\}$$

- (i)  $u$  est normale, i.e., il existe un  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) = 1$ .
- (ii)  $u$  est convexe floue c'est à dire

$$\mu(tx + (1 - t)y) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1]$$

- (iii)  $u$  est semi continue supérieurement

- (iv)  $u^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$  est compact

alors d'après les propriétés ci dessus on a :

- 

$$[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R}) \text{ pour tout } 0 \leq \alpha \leq 1$$

- Soit une fonction  $g$  continue

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

on peut étendre la fonction  $g$  à

$$E^1 \times E^1 \rightarrow E^1$$

via le principe d'extension de Zadeh par l'équation

$$\mu_{g(u,v)}(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min(\mu_u(x), \mu(y))$$

où  $\mu_{g(u,v)}$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou  $g(u, v)$ . Ce qui nous permet d'avoir

$$[g(u, v)]^\alpha = g([u]^\alpha, [v]^\alpha) \quad \forall u, v \in E^1 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

En particulier pour l'addition et la multiplication par un scalaire,

$$\begin{aligned} [u + v]^\alpha &= [u]^\alpha + [v]^\alpha \\ [ku]^\alpha &= k [u]^\alpha \end{aligned}$$

où  $u, v \in E^1, k \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$ , donc  $E^1$  muni de ces deux lois a une structure d'espace vectoriel.

**Proposition 2.2.** [26]

Si  $u \in E^1$ , alors :

- ( 1 )  $[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R})$  pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$
- ( 2 )  $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$  pour  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$
- ( 3 ) Si  $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$  est une suite décroissante qui converge vers  $\alpha > 0$ , alors

$$[u]^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} [u]^{\alpha_k}$$

Inversement, si  $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$  est une famille de sous ensembles de  $\mathbb{R}$  qui satisfait

( 1 ) - ( 3 ), alors

$$[u]^\alpha = A^\alpha \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1$$

et

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha} \subset A^0.$$

On définit l'application suivante

$$d : E^1 \times E^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

par

$$d(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_h \left( [u]^\alpha, [v]^\alpha \right)$$

où  $d_h$  est la métrique de Hausdorff définie dans  $P_K(\mathbb{R})$ . Il est facile de vérifier que  $d$  est une métrique dans  $E^1$ .

**Remarque 2.1.** [32]

- $(E^1, d)$  est un espace métrique complet
- $d(u + w, v + w) = d(u, v)$  pour tout  $u, v, w \in E^1$ .
- $d(ku, kv) = |k| d(u, v)$  pour tout  $u, v \in E^1, k \in \mathbb{R}$ .

Donc  $E^1$  a une structure d'espace de Banach pour la norme

$$\|u\| = d(u, 0) \quad u \in E^1$$

**Définition 2.1.** [19]

On dit que l'application

$$F : T \rightarrow E^1$$

est fortement mesurable si pour tout  $\alpha \in [0, 1]$  l'application

$$[F]^\alpha : T \rightarrow P_K(\mathbb{R})$$

est définie par

$$[F]^\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$$

est Lebesgue mesurable, où  $P_K(\mathbb{R})$  est muni de la topologie induite par la métrique de Hausdorff  $d_h$ .

Une application  $F : T \rightarrow E^1$  est dite intégrable bornée si il existe une fonction

intégrable  $h$  telle que

$$\|x\| \leq h(t) \text{ pour tout } x \in [F]^0(t)$$

**Définition 2.2.**

Soit  $F : T \rightarrow E^1$

L'intégrale de  $F$  sur  $T$  notée par  $\int_T F(t) dt$  est définie par l'équation

$$\begin{aligned} \left[ \int_T F(t) dt \right]^\alpha &= \int_T [F]^\alpha(t) dt \\ &= \left\{ \int_T f(t) dt : f : T \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } f \in [F]^\alpha \right\} \end{aligned}$$

Pour tout  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Proposition 2.3.**

Si  $F : T \rightarrow E^1$  est fortement mesurable et intégrablement bornée, alors  $F$  est intégrable.

**Proposition 2.4.** ([19])

Soient  $F, G$  des fonctions définies de  $T$  à valeurs dans  $E^1$  intégrables,

et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors

- $\int_T (F(t) + G(t)) dt = \int_T F(t) dt + \int_T G(t) dt,$
- $\int_T \lambda F(t) dt = \lambda \int_T F(t) dt,$
- $d(F, G)$  est intégrable,
- $d\left(\int_T F(t) dt, \int_T G(t) dt\right) \leq \int_T d(F, G)(t) dt.$

**Définition 2.3.** ([37])

L'application

$$F : T \rightarrow E^1$$

est dite différentiable (ou  $H$ -différentiable) en  $t_0 \in T$ , si les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0) - F(t_0-h)}{h} \end{aligned}$$

existent et sont égales à  $F'(t_0) \in E^1$ , ( $F'(t_0)$  est appelé la dérivée de Hukuhara de  $F$  en  $t_0 \in T$ ).

Ces limites sont calculées dans l'espace métrique  $(E^1, d)$ .

**Définition 2.4.**

Si  $F$  définie par :  $F : T \rightarrow E^1$  est différentiable en  $t_1 \in T$ , alors on dit que  $F'(t_1)$  est la dérivée floue de  $F(t)$  au point  $t_1$ .

**Remarque 2.2.**

Soient  $F, G$  deux fonctions définies sur  $T$  à valeurs dans  $E^1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si  $F$  et  $G$  sont différentiables au sens floue alors on a :

$$(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t), \quad (\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$$

**Remarque 2.3.**

Soit  $F : T \rightarrow E^1$  une application continue; alors pour chaque  $t \in T$ , l'intégrale  $G(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$  est différentiable et  $G'(t) = F(t)$ .

**Remarque 2.4.**

Soit  $F : T \rightarrow E^1$  une application différentiable et supposons que la dérivée  $F'(t)$  est intégrable sur  $T$ . alors pour chaque  $s \in T$  on a

$$F(s) = F(0) + \int_0^s F'(t) dt$$

On note par  $C[T \times \Omega, E^1]$ , (où  $\Omega \subset E^1$  est un ensemble ouvert), l'ensemble des applications floues continues définies sur  $T \times \Omega$  à valeurs dans  $E^1$ .

**Définition 2.5.**

On dit que la fonction  $f : T \times \Omega \rightarrow E^1$  est lipschitzienne par rapport à  $x$  s'il existe un nombre réel positif  $K$  tel que

$$\forall t \in T \quad \text{et} \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad d(f(t, x_1), f(t, x_2)) \leq K d(x_1, x_2)$$

On dit que  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  si tout élément de  $T \times \Omega$  possède un voisinage dans  $T \times \Omega$  dans lequel  $f$  est lipschitzienne par rapport à  $x$ .

**Définition 2.6.**

Supposons que  $f \in C [T \times \Omega, E^1]$ , alors

L'application  $x : T \rightarrow \Omega$  est une solution du problème

$$x' = f (t, x), \quad x (0) = x_0$$

si et seulement si elle est continue et satisfait l'équation intégrale

$$x (t) = x_0 + \int_0^t f (s, x (s)) ds \text{ pour tout } t \in T$$

**Proposition 2.5** (Lakshmikantham ).

Soit  $G$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $g \in C [G, \mathbb{R}]$ , et  $(t_0, u_0) \in G$ .

On note par  $(r(t), [t_0, t_0 + a])$  la solution maximale du problème à valeur initiale

$$u' = g (t, u), \quad u (t_0) = u_0$$

Si  $m (t) \in C [(t_0, t_0 + a), \mathbb{R}]$  satisfait :

- $(t, m (t)) \in G$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + a)$ ,
- $m (t_0) \leq u_0$ ,
- $Dm (t) \leq g (t, m (t)), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a) \setminus \Gamma$ .

où  $D$  est une dérivée de Dini et  $\Gamma$  un ensemble dénombrable sur  $[t_0, t_0 + a)$ .

Alors

$$m (t) \leq r (t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a)$$

**2.3 Équation différentielle floue**

Soit  $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact, et supposons que

$$f : T \times E^1 \rightarrow E^1$$

est continue, on considère le problème à valeur initiale

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in T; \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

On utilise le concept de différentiabilité donné dans [14, 21]. Alors

$$x : T \rightarrow E^1$$

est solution de (2.1) si et seulement si elle est continue et vérifie l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad t \in T$$

Notons par  $C(T, E^1)$  l'ensemble de toutes les applications continues de  $T$  à valeurs dans  $E^1$ . Pour  $\xi, \varphi \in C(T, E^1)$ , on définit

$$H(\xi, \varphi) = \sup \{d(\xi(t), \varphi(t)) : t \in T\}$$

$H$  est une distance sur  $C(T, E^1)$  qui conserve toutes les propriétés de la distance  $d$  définie sur  $E^1$ .

Donc  $(C(T, E^1), H)$  est un espace métrique complet.

En outre, d'après la construction de la métrique  $H$ , pour tout  $\xi, \varphi, \psi \in C(T, E^1)$  et  $k \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} H(\xi + \psi, \varphi + \psi) &= H(\xi, \varphi) \\ H(k\xi, k\varphi) &= |k| H(\xi, \varphi) \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que  $C(T, E^1)$  a une structure d'espace de Banach.

Pour  $\xi \in C(T, E^1)$ , on définit l'opérateur  $G$  par

$$G\xi \in C(T, E^1) \quad [G\xi](t) = x_0 + \int_0^t f(s, \xi(s)) ds \quad t \in T \quad (2.2)$$

alors  $x \in C(T, E^1)$  est une solution de (2.1) si et seulement si  $Gx = x$ .

**Lemme 2.1.**

Supposons qu'il existe  $r \geq 0$  tel que

$$d(f(t, x), \hat{0}) \leq r \quad , t \in T \quad \text{et} \quad x \in E^1 \quad (2.3)$$

alors  $G$  est compact.

**Preuve :** Soit  $B$  un ensemble borné dans  $C(T, E^1)$ . L'ensemble

$$GB = \{Gx : x \in B\}$$

est equicontinu si et seulement si pour tout  $t \in T$ , l'ensemble

$$[GB](t) = \{[Gx](t) : x \in B\}$$

est un sous ensemble equicontinu de  $E^1$ . Or pour tout  $t_0, t_1 \in T$  avec  $t_0 \leq t_1$ , et  $x \in B$  on a

$$\begin{aligned} d([Gx](t_1), [Gx](t_0)) &\leq |t_1 - t_0| \cdot \sup \{d(f(t, x(t)), \hat{0}) : t \in T\} \\ &\leq |t_1 - t_0| \cdot r \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $GB$  est equicontinu,

Soit  $t \in T$  fixé, on a

$$d([Gx](t), [Gx](t')) \leq |t - t'| \cdot r \quad \text{pour tout } t' \in T, \quad x \in B$$

ce qui implique que l'ensemble

$$\{[Gx](t) : x \in B\}$$

est un précompact de  $E^1$  qui est complet. Donc d'après le théorème d'Ascoli, on a  $GB$  est relativement compact dans  $C(T, E^1)$ .  $\square$

### **Théorème 2.1.**

Supposons que

$$f : T \times E^1 \rightarrow E^1$$

est continue et bornée, i.e. satisfait (2.1), alors le problème à valeur initiale (2.1) possède au moins une solution sur l'intervalle  $T$ .

**Preuve :** Rappelons que  $x \in C(T, E^1)$  est une solution de (2.1) si et seulement si  $x$  est un point fixe de l'opérateur  $G$  définie par (2.2).

Considérons dans l'espace métrique  $(C(T, E^1), H)$ , la boule

$$B = \{\xi \in C(T, E^1) : H(\xi, \hat{0}) \leq m\} \quad m = (b - a) \cdot r$$

ainsi  $GB \subset B$ . en effet, pour  $x \in C(T, E^1)$ ,

$$\begin{aligned} d([Gx](t), [Gx](a)) &= d(f(t, x(t)), \hat{0}) \\ &\leq |t - a| \cdot r \leq |b - a| \cdot r \end{aligned}$$

par conséquent, on définit

$$\tilde{0} : T \rightarrow E^1, \quad \tilde{0}(t) = \hat{0}, \quad t \in T$$

on a

$$H(Gx, G\tilde{0}) = \sup \{D([Gx](t), [G\tilde{0}](t)) : t \in T\}$$

D'après le lemme 2.1,  $G$  est compact et, en conséquence, il admet un point fixe  $x \in B$ , solution du problème à valeur initiale (2.1).  $\square$

## **2.4 Existence de solutions globales**

On va donner différentes hypothèses qui garantissent l'existence globale de la solutions du problème du Cauchy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.4}$$

où  $f \in C [J \times E^1, E^1]$ ,  $J = [t_0, +\infty)$ ,  $x_0 \in E^1$ .

On suppose que  $f(t, x)$  est assez régulière pour supposer l'existence de solutions locales de  $x' = f(t, x)$ ,  $t \geq t_0$  à travers tout point dans  $J \times E^1$ .

### **Théorème 2.2.**

Supposons que

( i )  $f(t, x)$  est localement Lipschitzienne en  $x$  pour  $(t, x) \in J \times E^1$ ,

( ii ) il existe une fonction  $g \in C [J \times [0, +\infty), [0, +\infty)]$  tel que :

$$d(f(t, x), 0) \leq g(t, d(x, 0)), \quad \forall (t, x) \in J \times E^1,$$

( iii )  $g(t, u)$  est croissante en  $u \geq 0$  pour chaque  $t \in J$ , et la solution maximale  $r(t, t_0, u_0)$  du problème scalaire à valeur initiale

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \tag{2.5}$$

existe partout dans  $J$ .

Alors  $J$  est l'intervalle d'existence le plus large de toute solution  $r(t, t_0, u_0)$  de (2.4) avec  $D(x_0, 0) \leq u_0$ .

En plus, si  $r(t, t_0, u_0)$  est bornée sur  $J$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0)$  existe dans  $(E^1, d)$ .

**Preuve :** D'après l'hypothèse ( i ), il existe  $\delta > 0$  tel que la solution unique du problème (2.4) existe sur  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

Soit

$$V = \{x(t) : x(t) \text{ solution de (2.4) définie sur } [t_0, \beta_x) \}$$

Alors  $V \neq \emptyset$ . Prenons

$$\beta = \sup \{\beta_x : x(t) \in V\}$$

clairement, il existe une solution unique de (2.4) qui est définie sur  $[t_0, \beta)$  avec  $d(x_0, \hat{0}) \leq u_0$ .

Si  $\beta = +\infty$ , le théorème est démontré. Supposons maintenant  $\beta < +\infty$  et posons

$$m(t) = d(x(t, t_0, x_0), \hat{0}), \quad t_0 \leq t < \beta$$

alors D'après ( ii ) on a

$$\begin{aligned}
D_+m(t) &= \liminf_{h \rightarrow +0} \frac{d(x(t+h, t_0, x_0), \hat{0}) - d(x(t, t_0, x_0), \hat{0})}{h} \\
&\leq \liminf_{h \rightarrow +0} \frac{d(x(t+h, t_0, x_0), x(t, t_0, x_0))}{h} \\
&= \liminf_{h \rightarrow +0} d\left(\frac{x(t+h, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0)}{h}, \hat{0}\right) \\
&= d(x'(t, t_0, x_0), \hat{0}) \\
&= d(f(t, x(t, t_0, x_0)), \hat{0}) \\
&\leq g(t, m(t)), \quad t_0 \leq t < \beta
\end{aligned}$$

et  $m(t_0) = d(x_0, \hat{0}) \leq u_0$ . Ce qui implique d'après la Proposition 2.5 que

$$m(t) \leq r(t, t_0, u_0), \quad t_0 \leq t < \beta \quad (2.6)$$

ensuite on déduit que  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t, t_0, x_0)$  existe dans  $(E^1, d)$ . En fait, pour tout  $t_1, t_2$  tels que  $t_0 \leq t_1 < t_2 < \beta$ , posons  $x_1 = x(t_1, t_0, x_0)$  et  $x_2 = x(t_2, t_0, x_0)$ , alors on a

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds, x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s)) ds\right) \\
&= d\left(\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds, \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s)) ds\right) \\
&\leq d\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds, \hat{0}\right) \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} d(f(s, x(s)), \hat{0}) ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} g(s, r(s)) ds \\
&= r(t_2) - r(t_1)
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Lorsque  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} r(t)$  existe et finie, prenons les limites quand  $t_1, t_2 \rightarrow \beta-0$ , et utilisons la complétion de  $(E^1, D)$ , il résulte de ( 2.7 ) que  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t)$  existe dans  $(E^1, d)$ .

Maintenant on définit  $x(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t)$  et considérons le problème à valeur initiale

$$x' = f(t, x), \quad x(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t) \quad (2.8)$$

D'après ( i ),  $x(t)$  peut être prolongée au delà de  $\beta$ , ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. D'où, toute solution de ( 2.4 ) existe sur  $[t_0, +\infty)$ , et ainsi ( 2.6 ) et ( 2.4 ) ont lieu avec  $\beta = +\infty$ .

En plus lorsque  $r(t)$  est bornée et croissante sur  $J$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$  existe et finie. Ceci et les inégalités ( 2.6 ) , ( 2.7 ) et la complétion de  $(E^1, D)$  permettent d'avoir la dernière partie du théorème.  $\square$

### **Théorème 2.3.**

*Supposons que*

- ( i )  $f \in C[J \times E^1, E^1]$ ,  $f$  est bornée sur les ensembles bornés et pour tout point dans  $J \times E^1$ , il existe une solution locale pour le problème ( 2.4 )
- ( ii )  $V \in C[J \times E^1, [0, +\infty)]$ ,  $V$  est localement Lipschitzienne en  $x$ ,  
 $V(t, x) \rightarrow +\infty$  quand  $d(x, \hat{0}) \rightarrow +\infty$  uniformément pour  $t \in [t_0, t_0 + a]$ , pour chaque  $a > 0$  et pour  $(t, x) \in J \times E^1$ . On a

$$D_+V(t, x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)}{h} \leq g(t, V(t, x))$$

où  $g \in C[J \times [0, +\infty), \mathbb{R}]$

- ( iii ) La solution maximale  $r(t) = r(t, t_0, u_0)$  du problème ( 2.5 ) existe sur  $[t_0, +\infty)$  et est positive si  $u_0 > 0$ . Alors pour tout  $x_0 \in E^1$  tel que  $V(t_0, x_0) \leq u_0$ , le problème ( 2.4 ) admet une solution  $x(t)$  sur  $[t_0, +\infty)$  qui vérifiée

$$V(t, x(t)) \leq r(t), \quad t \geq t_0 \tag{2.9}$$

**Preuve :** Soit  $S$  désigne l'ensemble de toutes les fonctions  $x$  définies sur  $I_x = [t_0, c_x[$  à valeurs dans  $E^1$  tel que  $x(t)$  est une solution de ( 2.4 ) sur  $I_x$  et  $V(t, x(t)) \leq r(t)$ ,  $t \in I_x$ . On définit l'ordre partiel  $\leq$  sur  $S$  comme suit :

la relation  $x \leq y$  implique que  $I_x \subseteq I_y$  et  $y(t) \equiv x(t)$  sur  $I_x$

On va montrer d'abord que  $S$  est non vide. D'après l'hypothèse ( i ), il existe une solution  $x(t)$  de ( 2.4 ) définie sur  $I_x = [t_0, c_x[$ .

Posons  $m(t) = V(t, x(t))$  pour  $t \in I_x$  et suite à l'hypothèse ( ii ), on obtient

$$D_+m(t) \leq g(t, m(t)) \quad t \in I_x$$

D'après la Proposition 2.5, il suit que

$$V(t, x(t)) \leq r(t), \quad t \in I_x \quad (2.10)$$

où  $r(t)$  est la solution maximale de (2.5). Ceci montre que  $x \in S$  et ainsi  $S$  est non vide.

Si  $(x_\beta)_\beta$  est une suite de  $(S, \leq)$ , alors il y a une application unique  $y$  définie sur  $I_y = \left[ t_0, \sup_\beta c_{x_\beta} \right]$  qui coïncide avec  $x_\beta$  sur  $I_{x_\beta}$ .

Il est bien clair que  $y \in S$ , d'où  $y$  est la borne supérieure de  $(x_\beta)_\beta$  dans  $(S, \leq)$ .

Alors le lemme de Zorn assure l'existence d'un élément maximal  $z$  dans  $(S, \leq)$ .

La preuve du théorème est complète si on montre que  $c_z = +\infty$ .

Suppose que ce n'est pas vraie, c'est à dire  $c_z < +\infty$ . On suppose que  $r(t)$  existe sur  $[t_0, +\infty)$ ,  $r(t)$  et bornée sur  $I_z$ .

Lorsque  $v(t, n)$  tend vers  $+\infty$  uniformément sur  $[t_0, c_z]$  La relation

$$V(t, x) \leq r(t) \text{ sur } I_z$$

implique que  $d(z(t), \hat{0})$  est bornée sur  $I_z$ . D'après (i) il existe  $M > 0$  tel que

$$d(f(t, z(t)), \hat{0}) \leq M \quad t \in I_z$$

On obtient alors, pour tout  $t_1, t_2 \in I_z, t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} d(z(t_2), z(t_1)) &= d\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, z(s)) ds, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, z(s)) ds\right) \\ &= d\left(\int_{t_0}^{t_2} f(s, z(s)) ds, \int_{t_0}^{t_1} f(s, z(s)) ds\right) \\ &\leq d\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s, z(s)) ds, \hat{0}\right) \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} d(f(s, z(s)), \hat{0}) ds \\ &\leq M(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

qui montre que  $z$  est Lipschitzienne sur  $I_z$  et par conséquent admet un prolongement continu  $z_0$  sur  $[t_0, c_z]$ .

Suite à la continuité de  $z_0$ , on a

$$z_0(c_z) = x_0 + \int_{t_0}^{c_z} f(s, z_0(s)) ds$$

ce qui implique que  $z_0(t)$  est une solution de ( 2.4 ) sur  $[t_0, c_z]$ , et ,

$$V(t, z_0(t)) < r(t) \quad t \in [t_0, c_z]$$

Considérons le problème

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = z_0(c_z)$$

d'après l'hypothèse de l'existence locale il existe une solution  $x_0(t)$  sur  $[c_x, c_x + \delta]$ ,  $\delta > 0$ . On définit

$$z_1(t) = \begin{cases} z_0(t) & \text{pour } t_0 \leq t \leq c_x \\ x_0(t) & \text{pour } c_x \leq t \leq c_x + \delta \end{cases}$$

$z_1(t)$  est une solution de ( 2.4 ) sur  $[c_x, c_x + \delta]$ , et en répétant les arguments qui ont été utilisés pour obtenir ( 2.10 ), nous obtenons

$$V(t, z_1(t)) < r(t) \quad t \in [t_0, c_x + \delta[$$

Ceci est contradictoire avec le fait que  $z$  est maximal , d'où  $c_z = +\infty$ . □

# Chapitre 3

## Équations différentielles floues à conditions non locales

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre , nous allons discuter l'existence et l'unicité du problème de Cauchy de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in T = [0, a], \\ x(0) = x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)), \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $a > 0$ ,  $\mathcal{C}$  est l'espace des fonctions continue de  $T$  dans  $(E^1, d)$  muni de la métrique  $H(y, x) = \sup_{t \in T} d(y(t), x(t))$ ,  $x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) \in E^1$  est une condition initiale non locale floue,

$f : T \times E^1 \longrightarrow E^1$  et  $g : T^p \times \mathcal{C} \longrightarrow E^1$  sont des fonctions données.

Dans un premier temps, on va s'intéresser à l'étude du problème (3.1) dans le cas classique et dans ce cas on va faire apparaitre la notion de la condition non locale et son importance dans des phénomènes physiques.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de (3.1) dans le cas flou c'est à dire  $x(0) \in E^1$  et on termine par une application pour les résultats obtenus.

## 3.2 Condition non locale

Une forte motivation pour étudier les problèmes de Cauchy non-locaux, qui est une généralisation pour les problèmes classiques avec condition initiale, provient de problèmes physiques. C'est pour cette raison que Byszewski a introduit ce type de condition [9]. La condition non locale signifie que la condition initiale n'est pas donnée explicitement et la seule information que nous avons et qu'elle dépend des valeurs futurs du phénomène. L'effet et l'avantage de la condition non locale est discuté dans les travaux [4, 6]. La forme la plus utilisée de la condition non locale est donnée par [7] :

$$x(0) = x_0 + g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x(t_i), \quad (3.2)$$

où  $\alpha_i$  sont des constantes et  $t_i$  sont tels que  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_p < a$ .

La condition non locale de type (3.2) peut être appliquée en physique avec un meilleur effet que la condition initiale donnée par la formule(3.3)(voir[10])

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.3)$$

puisque la mesure donnée par (3.2) est généralement plus précise que la seule mesure donnée par (3.3). En fait, la condition (3.2) peut être utilisée pour mesurer les connexions entre les positions d'un point matériel à des moments  $t_0, t_1, \dots, t_p$ . Pour les applications des problèmes de conditions non locales nous nous referons aux travaux [2, 13, 33, 38, 23]. Par exemple dans [33] les auteurs ont utilisés les fonctions  $g_i (i = 1, \dots, n)$  définis par les formules suivantes :

$$g_i(t_1, \dots, t_p, x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^p c_{kj}^i x_k(t_j) \right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.4)$$

et

$$g_i(t_1, \dots, t_p, x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^q \frac{c_{kj}^i}{t_{2j} - t_{2j-1}} \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j}} x_k(\tau) d\tau \right) \quad (p = 2q, \quad i = 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

où  $c_{kj}^i$  sont des constantes données qui peuvent être interprétées comme les caractéristiques du milieu dans lequel le point matériel est en mouvement.

La formule (3.4) peut être appliquée à la description de phénomènes de mouvement dans lesquels on peut mesurer les sommes des positions d'un point matériel aux moments  $t_0, t_1, \dots, t_p$ .

En fin, la condition (3.5) peut être appliquée à la description de phénomènes de mouvement dans lesquels on peut mesurer les sommes des positions moyenne d'un point matériel.

### 3.3 Étude du problème dans le cas classique

Dans cette section nous allons nous baser sur le théorème du point fixe de Banach([1]) pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy non local suivant :

$$x'(t) = f(t, x), \quad t \in T = [0, a], \quad (3.6)$$

$$x(t_0) - g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) = x_0, \quad (3.7)$$

avec  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , où  $E_i (i = 1, \dots, n)$  est un espace de Banach munit de la norme  $\| \cdot \|$ ,

$$0 < t_1 < \dots < t_p < a \quad (p \in \mathbb{N}),$$

$$\Omega \subset E, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \Omega, \quad f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}(T \times \Omega, E),$$

$$g = (g_1, \dots, g_p) : T^p \times \Omega \rightarrow E, \quad g(t_1, \dots, t_p, \cdot) \in \mathcal{C}(\Omega, E).$$

Nous remarquons que le problème ((3.6)-(3.7)) est équivalent au système différentiel

ordinaire suivant :

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad t \in T \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.8)$$

avec la condition non locale

$$x_i(t_0) - g_i(t_1, \dots, t_p, x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) = x_{i0} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.9)$$

**Définition 3.1.**

la fonction  $x : T \rightarrow \Omega$  est dit solution du problème (3.6)- (3.7) sur  $T$  si  $x(t)$  est continue, différentiable et satisfait (3.6) et (3.7) sur  $T$ .

Tout au long de cette section, nous utilisons les notations suivantes :

1. pour une fonction arbitraire  $h = (h_1, \dots, h_n)$ , nous utilisons le symbole dans le sens suivant :

$$\| h \| = \| (h_1, \dots, h_n) \| = \left( \sum_{i=1}^n \| h_i \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{s \in T} \| h_i(s) \|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

2. pour la fonction  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}(T \times \Omega, E)$ , on définit  $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$  de la façon suivante :

$$\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = \left( \int_{t_0}^t f_1(s, y(s)) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_n(s, y(s)) ds \right). \quad (3.11)$$

**3.3.1 Existence et unicité**

Nous allons présenter les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.6) et (3.7) considéré dans [18] comme une généralisation des travaux [4, 5, 6, 7, 8, 17].

**Théorème 3.1.**

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

- (i)  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , où  $E_i (i = 1, \dots, n)$  est un espace de Banach muni de la norme  $\| \cdot \|$ .
- (ii)  $T = [0, a]$ ,  $0 < t_1 < \dots < a_p < a (p \in \mathbb{N})$  et

$$\Omega := \overline{B(x_0, r)} = \{y : \|y - x_0\| \leq r\} \subset E,$$

- (iii)  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}(T \times \Omega, E)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_n) : T^p \times \Omega \rightarrow E$  et

$$g(t_1, \dots, t_p, \cdot) \in \mathcal{C}(\Omega, E) (p \in \mathbb{N}),$$

- (iv) Il existe des constantes  $L_i > 0 (i = 1, \dots, n)$  telles que :

$$\|f_i(s, y) - f_i(s, \bar{y})\| \leq L_i \|y - \bar{y}\| \text{ avec } (s, y), (s, \bar{y}) \in T \times \Omega (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

- (v) Il existe des constantes  $K_i > 0 (i = 1, \dots, n)$  telles que :

$$\|g_i(t_1, \dots, t_p, z) - g_i(t_1, \dots, t_p, \bar{z})\| \leq K_i \|z - \bar{z}\| \text{ avec } z, \bar{z} \in \Omega (i = 1, \dots, n). \quad (3.13)$$

- (vi)

$$M_i = \sup_{(s, y) \in T \times \Omega} \|f_i(s, y)\|,$$

$$N_i = \sup_{z \in \Omega} \|g_i(t_1, \dots, t_p, z)\| (i = 1, \dots, n),$$

- (vii) Les constantes  $d, r, L, K, M, N$  avec

$$d := t - t_0 \quad (3.14)$$

et

$$L := \max_{i=1, \dots, n} L_i, K := \max_{i=1, \dots, n} K_i, M := \max_{i=1, \dots, n} M_i, N := \max_{i=1, \dots, n} N_i, \quad (3.15)$$

satisfait les inégalités suivantes :

$$(Md + N)\sqrt{n} \leq r \quad (3.16)$$

$$(Ld + K)\sqrt{n} < 1. \quad (3.17)$$

Alors il existe une unique solution du problème ((3.6) - (3.7)) sur  $T$ .

**Preuve 1.** le problème ((3.6)- (3.7)) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 - g(t_1; \dots; t_p, x(\cdot)) + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad t \in T \quad (3.18)$$

qui est également équivalent au système d'équation intégrale suivant :

$$x_i(t) = x_{i0} - g_i(t_1; \dots; t_p, x(\cdot)) + \int_{t_0}^t f_i(s, x(s))ds, \quad t \in T \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.19)$$

par conséquent, il suffit de trouver la solution de l'équation (3.19). Pour ce faire, on va utiliser l'opérateur  $\Gamma$  définie par la formule suivante :

$$(\Gamma y)(t) = ((\Gamma_1 y)(t), \dots, (\Gamma_n y)(t)), \quad t \in T, \quad (3.20)$$

où

$$(\Gamma_i y)(t) := x_{i0} - g_i(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) + \int_{t_0}^t f_i(s, y(s))ds, \quad t \in T \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.21)$$

est définie sur l'espace

$$X := \mathcal{C}(T, \Omega). \quad (3.22)$$

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur  $\Gamma$  est défini de  $X$  vers  $X$ . D'après (3.10), (3.20), (3.21), l'hypothèse (Vi) du théorème et les propriétés (3.14), (3.15) et (3.16),

pour  $y \in X$  on a :

$$\begin{aligned}
\| \Gamma y - x_0 \| &= \left( \sum_{i=1}^n \| \Gamma_i y - x_{i0} \|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \| (\Gamma_i y)(t) - x_{i0} \| \right]^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \left\| \int_{t_0}^t f_i(s, y(s)) ds - g_i(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) \right\| \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \left( \int_{t_0}^t \| f_i(s, y(s)) \| ds + \| g_i(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) \| \right) \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n (dM + N)^2 \right)^{1/2} \\
&= (Md + N) \sqrt{n} \leq r.
\end{aligned}$$

Donc  $\Gamma$  est définie de

$$X \rightarrow X. \quad (3.23)$$

Ensuite, nous allons montrer que  $\Gamma$  est une contraction sur  $X$ .

Pour tout  $y, x \in X$  et  $t \in T$  on va considérer la différence

$$(\Gamma y)(t) - (\Gamma x)(t) = \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds - [g(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) - g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot))] \quad (3.24)$$

Soient  $y, x \in X$  D'après (3.10), (3.24), (3.20), (3.21), (3.12), (3.13) et (3.15), on a :

$$\begin{aligned}
\| \Gamma y - \Gamma x \| &= \left( \sum_{i=1}^n \| \Gamma_i y - \Gamma_i x \|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \| (\Gamma_i y)(t) - (\Gamma_i x)(t) \| \right]^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \left\| \int_{t_0}^t [f_i(s, y(s)) - f_i(s, x(s))] ds \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - [g_i(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) - g_i(t_1, \dots, t_p, x(\cdot))] \right\| \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} \left( \int_{t_0}^t \| f_i(s, y(s)) - f_i(s, x(s)) \| ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \| g_i(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) - g_i(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) \| \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{t \in T} (|t - t_0| L_i \| y(s) - x(s) \| + k_i \| y(\cdot) - x(\cdot) \|) \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n (dL + K)^2 \right)^{1/2} \| y - x \| \\
&\leq (Ld + K) \sqrt{n} \| y - x \| .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

si nous définissons  $q = (Ld + K) \sqrt{n}$  alors, d'après (3.25) et (3.23) on a :

$$\| \Gamma y - \Gamma x \| \leq q \| y - x \| . \tag{3.26}$$

avec  $0 < q < 1$ . ce qui montre que  $\Gamma$  est une contraction.

Par conséquent  $\Gamma$  admet un point fixe dans  $X$  qui est la solution du problème (3.6) et (3.7) sur  $I$ . Ainsi, la preuve du théorème est complète.

### 3.3.2 Dépendance continue de la solution

#### Théorème 3.2.

On suppose les mêmes conditions du théorème (3.1) et considérons  $x_0$  et  $y_0$  éléments de  $\Omega$ . on note par  $x$  et  $y$  les deux solutions associés à  $x_0$  et  $y_0$  respectivement . Alors

$$\| y - x \| \leq \frac{1}{1 - (K + Ld)} \| y_0 - x_0 \| .$$

*Démonstration.* Soit  $t \in T$  et  $x, y \in \mathcal{C}(T, \Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &= \|y_0 - x_0 + g(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) - g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) + \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds\| \\ &\leq \|y_0 - x_0\| + K_i \|y - x\| + L_i \|y - x\| (a - t_0). \end{aligned}$$

et par suite

$$\|y - x\| \leq \|y_0 - x_0\| + K \|y - x\| + Ld \|y - x\|.$$

Donc

$$\|y - x\| (1 - (K + Ld)) \leq \|y_0 - x_0\|.$$

Finalement

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{1 - (K + Ld)} \|y_0 - x_0\|.$$

□

## 3.4 Étude du problème dans le cas flou

Dans cette section nous allons établir en utilisant le principe de contraction l'existence, l'unicité et la dépendance continue à la donnée initiale de la solution du problème de Cauchy flou (3.1).

### 3.4.1 Existence et unicité de la solution

#### Définition 1.

Une fonction  $x \in \mathcal{C}$  est dite solution intégrale de (3.1) si elle satisfait l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + g(t_1, t_2, \dots, t_p, x(\cdot)) + \int_0^t f(\theta, x(\theta)) d\theta, \quad \forall t \in T. \quad (3.27)$$

#### Théorème 2.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées

1.  $h_1 : f$  est continue.

2.  $h_2$  : il existe  $L > 0$  telle que  $d(f(t, x), f(t, y)) \leq Ld(x, y) \forall (t, x), (t, y) \in T \times E^1$ .

3.  $h_3$  : il existe  $K > 0$  telle que  $d(g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)), g(t_1, \dots, t_p, y(\cdot))) \leq Kd(x, y) \forall (t, x), (t, y) \in T^p \times \mathcal{C}$ .

et

$$K + \xi L < 1,$$

alors, le problème (3.1) admet une unique solution intégrale.

*Démonstration.* Notons

$$\xi = \min\{a, (b - N)/M, (1 - K)/L\}$$

$$M = d(f(t, x), \hat{0})$$

$$N = d(g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)), \hat{0}).$$

$$B = \{x \in \mathcal{C} / H_1(x, x_0) \leq b\}$$

et

$$H_1(x, y) = \sup_{t \in [0, \xi]} d(x(t), y(t)).$$

Soit l'opérateur  $\Gamma$  défini par :

$$\Gamma(x)(t) = x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) + \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in T.$$

Tout d'abord on va montrer que  $\Gamma$  est bien définie de :  $B \rightarrow B$ .

Soit  $\varphi \in B$  on a :

$$\begin{aligned} d(\Gamma\varphi(t+h), \Gamma\varphi(t)) &\leq d\left(\int_0^{t+h} f(s, \varphi(s)) ds, \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds\right) \\ &\leq \int_0^{t+h} d(f(s, \varphi(s)), \hat{0}) ds \\ &= hM \rightarrow 0 (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Autrement dit  $\Gamma$  est continu.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
d(\Gamma\varphi(t), x_0) &= d(x_0 + g(t_1, \dots, t_p, \varphi(\cdot)) + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds, x_0) \\
&\leq d(g(t_1, \dots, t_p, \varphi(\cdot), \hat{0}) + d(\int_0^t f(s, \varphi(s))ds, \hat{0}) \\
&\leq N + Mt.
\end{aligned}$$

Alors

$$H_1(\Gamma\varphi, x_0) = \sup_{0 \leq t \leq \xi} d(\Gamma\varphi(t), x_0) \leq N + M\xi \leq b$$

Ainsi  $\Gamma$  est une application de  $B \rightarrow B$ .

Comme  $(\mathcal{C}, H)$  est un espace métrique complet Voir [14], alors il suffit de montrer que  $B$  est un fermé de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $(\psi_n)$  une suite d'éléments de  $B$  tel que  $\psi_n \rightarrow \psi$  dans  $\mathcal{C}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$d(\psi(t), x_0) = d(\psi(t), \psi_n(t)) + d(\psi_n(t), x_0)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
H_1(\psi, x_0) &= \sup_{0 \leq t \leq \xi} d(\psi(t), x_0) \\
&\leq H_1(\psi, \psi_n) + H_1(\psi_n, x_0) \\
&\leq \varepsilon + b.
\end{aligned}$$

pour  $n$  suffisamment grand et  $\varepsilon > 0$  choisi arbitraire . Alors  $\psi \in B$  cela implique que  $B$  est un fermé de  $\mathcal{C}$ . Donc  $B$  est un espace métrique complet. Il reste donc à montrer que  $\Gamma$  est une contraction .

Pour tout  $\varphi$  et  $\psi$  de B, on a :

$$\begin{aligned}
d(\Gamma\varphi(t), \Gamma\psi(t)) &= d(x_0 + g(t_1, \dots, t_p, \varphi(\cdot)) + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds, x_0 + g(t_1, \dots, t_p, \psi(\cdot)) \\
&\quad + \int_0^t f(s, \psi(s))ds \\
&\leq d(g(t_1, \dots, t_p, \varphi(\cdot)), g(t_1, \dots, t_p, \psi(\cdot)) \\
&\quad + d\left(\int_0^t f(s, \varphi(s))ds, \int_0^t f(s, \psi(s))ds\right) \\
&\leq Kd(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)) + \int_0^t Ld(\varphi(s), \psi(s))ds.
\end{aligned}$$

Par suite on obtient :

$$\begin{aligned}
H_1(\Gamma\varphi, \Gamma\psi) &\leq \sup_{0 \leq t \leq \xi} \left\{ Kd(\varphi(\cdot), \psi(\cdot)) + \int_0^t Ld(\varphi(s), \psi(s))ds \right\} \\
&\leq (K + \xi L)H_1(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Puisque  $K + L\xi < 1$ , donc  $\Gamma$  est une contraction.

Donc  $\Gamma$  admet un point fixe unique  $x = \Gamma x$  dans B.

c'est à dire :

$$x(t) = x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

□

### 3.4.2 Dépendance continue de la solution

#### **Théorème 3.**

On suppose les même conditions de théorème (2) et considérons  $x_0, y_0 \in E^1$ . On note par  $x(t, x_0), y(t, y_0)$  les deux solutions associées à  $x_0$  et  $y_0$  respectivement. Alors on

a :

$$H_1(x(\cdot, x_0), y(\cdot, y_0)) \leq \frac{1}{1 - L\xi K} d(x_0, y_0).$$

*Démonstration.* Soient  $t \in T$  et  $x, y \in B$  on a,

$$\begin{aligned} d(x(t, x_0), y(t, y_0)) &= d(x_0 + g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)) + \int_0^t f(s, x(s))ds, y_0 + g(t_1, \dots, t_p, y(\cdot)) + \int_0^t f(s, y(s))ds) \\ &\leq d(x_0, y_0) + d(g(t_1, \dots, t_p, x(\cdot)), g(t_1, \dots, t_p, y(\cdot))) \\ &\quad + \left( \int_0^t d(f(s, x(s)), f(s, y(s)))ds \right) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} H_1(x(\cdot, x_0), y(\cdot, y_0)) &\leq d(x_0, y_0) + (L + \xi)H_1(x(\cdot, x_0), y(\cdot, y_0)) \\ &\leq \frac{1}{1 - (L + \xi K)}d(x_0, y_0). \end{aligned}$$

ainsi,

$$H_1(x(\cdot, x_0), y(\cdot, y_0)) \leq \frac{1}{1 - (L + \xi K)}d(x_0, y_0).$$

□

### 3.5 Application

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = atx(t) + 1, & 0 < t \leq 1, \\ x(0) = bx(\frac{1}{2}) + cx(\frac{1}{4}) + \tilde{0}, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec,  $a, b, c > 0$ . On a  $f(t, x(t)) = atx(t) + 1$  et  $g(x) = bx(\frac{1}{2}) + cx(\frac{1}{4})$ . D'après le théorème précédent le problème (3.28) admet une unique solution intégrale si,

$$a + b + c < 1.$$

# Conclusion et perspective

En conclusion, nous avons présenté quelques notions de base de la théorie des ensembles flous, puis, nous avons étudié l'existence, l'unicité et la dépendance continues de la solutions par rapport aux données initiales des équations différentielles à conditions non locales floues . Il convient de noter que les approches de la théorie floue permet de caractériser divers problèmes mathématique qui revêtent un certain degré d'incertitude et d'imprécision. Puisque dans la réalité, toute activité humaine comporte soit de l'incertitude soit de l'imprécision. Il s'avère donc important pour des recherches futures, de montrer comment la théorie des ensembles flous peut contribuer à mieux modéliser différents comportements observés dans le monde réel. Par ailleurs, la théorie des ensembles flous a également ouvert un vaste champ de recherche dans le domaine purement scientifique. Ainsi, on projette d'étendre cette étude à d'autre type d'équation différentielles à savoir :

- Les équations intégro-différentielles à condition non locale floue.
- Les équations différentielles de hybride à condition non locale floue.
- Les équations différentielles à retard avec condition non locale floue.

et nous montrerons que ces notions plus approfondies sont utiles dans la formulation de plusieurs problèmes, à savoir l'approximation numérique d'un problème de Cauchy qui contient des paramètres flous.

# Bibliographie

- [1] S.C. Arora and V. Sharma, Fixed point theorem for fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems 110(2000), 127-130.
- [2] J. M. Ball, Initial boundary value problems for an extensible beam, J. Math. Anal. Appl., 42(1973), 16-90.
- [3] H. Bandemer : Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications John Wiley, (1996).
- [4] L. Biszewski, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik 70.3, 202-206(1990).
- [5] L. Byszewski, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 3.3, 65-79(1990).
- [6] L. Biszewski, Strong maximum principes for parabolic nonlinear problems With nonlocal inequalities together with arbitrary functionals, journal of Mathematical Analysis and Applications, to appear(1990).
- [7] L. Biszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation  $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$ , journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, to appear(1990).
- [8] L. Biszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solution of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Applicable Analysis, to appear(1990).
- [9] L. Byszewski, V. Lakshmikantham, Theorems about the existence and uniqueness of a solutions of nonlocal Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal. 40 (1990) 11-19.

- [10] L. Byszewski and V. Lakshmikantham (1991) Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract cauchy problem in a Banach space. *International Journal*, 40 :1, 11-19.
- [11] D. Dubois, H. Prade . Operations on fuzzy numbers .*Int.J. systems sci.*, vol. 9, no. 6, pp 613 - 626, 1978.
- [12] D. Dubois and H. Prade , *Fuzzy sets and systems*, Academic Press, New York, (1980).
- [13] W. E. Fitzgibbon, Global existence and boundedness of solutions to the extensible beam equation, *SIAM J. Math. Anal.*, 13(1982), 739-745.
- [14] O. Kaleva, Fuzzy differential equations *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) 301-317
- [15] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **35** (1990), 389-396.
- [16] A. Kaufmann and Gupta M., *Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, (1985).
- [17] W. Kolodziej, *Mathematical Analysis*, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1978).
- [18] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt (1981).
- [19] V. lakshmikantham, R.N. Mohapatra, *Théorie of Fuzzy Differential Equations and Inclusion*, Taylor, London, 2003.
- [20] M. Mares, Weak arithmetics of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 91 (1997), 143-153.
- [21] S. Melliani et L. S. Chadli, Etude d'une équation différentielle floue, Proc. 3ème Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées aux Sciences de l'ingénieur CIMASI'2000, Casablanca, 23-25, Oct. 2000.
- [22] S. Melliani, L. S. Chadli, A. Atraoui and M. Bouaouid, Fuzzy Initial Value Problem, Volume 10 (2015), 149 - 157

- [23] S.Melliani, M.Elomari, M.Atraoui and L.S.Chadli, Intuitionistic fuzzy differential equation with nonlocal condition, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets Vol.21(4)(2015)58-68.
- [24] S. Miyamoto : Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis, Kluwer academic publishers, (1990).
- [25] M. Mizumoto and Tanaka K., Algebraic properties of fuzzy numbers, in Inter. Conference on Cybernetics and Society, Washington D.C., 1976.
- [26] C.V. Negoita, D.A. Ralescu, Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Wiley, New York, 1975.
- [27] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., **64** (1978), 369-380.
- [28] J. Y. Park, Kwen Y. C. and Jeoung J. U., Existence of solutions of fuzzy integral equations in Banach spaces, Fuzzy Sets and Systems, **72** (1995), 373-378.
- [29] J.Y.Park and H.K.Han, Fuzzy differential equation, Fuzzy sets and Systems 110(2000), 69-77
- [30] M. L. Puri, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., **91** (1983), 552-558.
- [31] M.L. Puri, D.A. Ralescu, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986) 409 - 422.
- [32] D. Ralescu and Adams G., The fuzzy intergral, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 562-570.
- [33] V. Romanovski, Y. H. Xia, X. Zhang, Varieties of local integrability of analytic differential systems, J. Differential Equations 257 (2014), 3079-3101.
- [34] H. Romn-Flores, L.C. Barros, R.C. Bassanezi, A note on Zadeh's extensions, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001), 327-331.
- [35] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems, **24** (1987), 319-330.

- [36] L. Stefanini, L.Sorini, M.L.Guerra, Parametric Representations of Fuzzy Numbers and Application to Fuzzy Calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (2006), 2423-2455.
- [37] L. Stefanini : A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy Sets Syst.* 161 (2010) 1564-1584.
- [38] Y. H. Xia, X. Chen, V. G. Romanovski, On the linearization theorem of fenner and pinto, *J. Math. Anal. Appl.*, 400(2013), 439-451.
- [39] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, **8**, (1965), 338-353.
- [40] L.A. ZADEH, The Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, *Information Sciences* 8 (1975), 199-249.

# Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles ordinaires, à conditions non locales, qui contiennent des paramètres susceptibles d'être des quantités floues.

Dans le premier chapitre, on introduit les notions de bases de la théories des ensembles flous, puis on définit les notions fondamentales de ce nouveau concept suite aux différents travaux de L. Zadeh, L. Byszewski, H. Bandemer et D. Ralescu and G. Adams.

Dans le second chapitre, on présente la notion de distance dans le cas flou en s'inspirant de la distance de Hausdorff définie dans le cas classique.

Ensuite on étudie l'existence des solutions globales d'un problème de Cauchy à valeur initiale floue.

Dans le troisième chapitre on établit via le principe de contraction l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données initiales de la solution du problème de Cauchy à condition non locale floue.

**Mots- clés :** Ensemble flou, espace métrique flou, continuité flou, dérivabilité flou et intégrabilité flou.