



N° d'ordre 32/2016

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr : Mostapha EL JAÏ

Option : Génie Industriel

Spécialité : Génie Mécanique

Sujet de la thèse :

Prise en compte de l'aspect holonique et multiobjectif dans la modélisation des systèmes industriels

Thèse présentée et soutenue le 29/10/2016 devant le jury composé de

Nom Prénom	Titre	Etablissement	
Mohammed EL HAMMOUMI	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Président
Badr BOUOULID IDRISSE	PES	ENSAM de Meknès	Rapporteur
Abdelali EN-NADI	PES	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Rapporteur
Patrick PUJO	HDR	Polytech' Marseille	Rapporteur
Khalid EL YASSINI	PH	Faculté des Sciences de Meknès	Examineur
Mohamed KAMOUNI	PH	Ecole Supérieure de Technologie de Fès	Examineur
Anas CHAFI	PH	Faculté des Sciences et Techniques de Fès	Examineur
Hussain BEN-AZZA	PH	ENSAM de Meknès	Co-Directeur de thèse
Brahim HERROU	PH	Ecole Supérieure de Technologie de Fès	Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : Techniques Industrielles

Etablissement : Faculté des Sciences et Techniques Fès

Dédicaces

A mes Parents, à ma sœur et à ma nièce Zineb,

A ma femme et mes enfants Youssef et Sara,

A mes beaux-parents,

A mes oncles et cousins,

A mes professeurs,

A Aziz et Mehdi,

A mes étudiants,

A mes amis...

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mes Directeurs de Thèse, le Pr. B. Herrou et le Pr. H. Ben-azza mon ancien professeur à l'ENSAM-Meknès. Je les remercie de ces heures d'encadrement et de discussion qui m'ont guidé jusqu'à l'aboutissement du présent travail.

Je remercie également le Pr. M. El Hammoumi, Directeur du Laboratoire techniques Industrielles, ainsi que le Pr. M. Ijaali, doyen de la Faculté de Sciences et Techniques de Fès, de m'avoir donné l'opportunité de m'inscrire au Centre d'Etudes Doctorales au sein de leurs prestigieux laboratoire et établissement.

Je tiens spécialement à remercier chaleureusement les membres du jury, un à un, d'avoir accepté de rapporter et d'examiner nos travaux et de s'être déplacé au Maroc ou à Fès, en souhaitant être à la hauteur de leurs attentes.

Je remercie tout particulièrement les Professeurs Patrick Pujo et Fouzia Ounnar, Professeurs à Polytech' Marseille pour leur soutien moral et leur suivi indirect de mes travaux de recherche.

Mes vifs remerciements vont aussi à l'imminent professeur M. Benhamou, professeur à la faculté des Sciences de Meknès et ancien Directeur de l'ENSAM-Meknès, de ses conseils et des heures de discussions qui m'ont permis à chaque fois de soulever certaines problématiques très pointues, que ce soit en génie des matériaux ou en analyse mathématique.

N'oublions pas de remercier aussi les administrateurs et responsables des différents services de la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, du travail très professionnel et de la qualité des services qu'ils procurent à l'ensemble des intervenants de la faculté et des différents laboratoires de recherche de l'établissement.

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ces travaux.

Liste des abréviations

ACE : Ambient/Autonomous Control Entity
AHP : Analytic Hierarchy Process
AMDEC : Analyse des Modes de Défaillances de leurs Effets et leurs Criticité
ANOVA : Analysis Of Variance
ANP : Analytic Network Process
AO : Appel d’Offre
AOL : Appel d’Offre Local
BD ou BDD : Base De Données
CCU : Unité de Contrôle et de Commande
CMMS : Computerized maintenance management system
CNOMO : Normes pour la construction des machines et installations industrielles des groupes PSA (Peugeot-Citroën) et Renault
DBPerf : Base de Données des Performances
ddl : degré de liberté
EPA : Entité de Pilotage Ambiant
EPAInit : EPA initiatrice
FIPA : Foundation for Intelligent Physical Agents
FMEA : Failure Mode and Effect Analysis
GestionAO : Module de Gestion des Appels d’Offre au sein d’un Holon Ressource
GMAO : Gestion de Maintenance Assistée par Ordinateur
HO : Holon Ordre
HOActionAmelioration : Holon Ordre d’Action d’Amélioration
HOPlanning : Holon Ordre Plan de Maintenance Systématique
HP : Holon Produit
HR : Holon Ressource
HRQ : Holon Ressource de contrôle Qualité
HMS : Holonic Manufacturing Systems
IEC : The International Electrotechnical Commission
IMS : Intelligent Manufacturing Systems
IRessource : Partie Informatrice d’un Holon Ressource
KKT : Karush – Kuhn – Tucker
MBF : Maintenance Basée sur la Fiabilité

MOCN : Machine Outil à Commande Numérique
MOP : Multiobjective Optimization Problem
MAS : MultiAgents Systmes
MOU : Model Optimization Unit
MRessource : Partie Matériel d'un Holon Ressource
MRP : Materials Resources Planning (MRP I), Manufacturing Resources Planning (MRP II)
MSP : Maîtrise Statistique des Procédés
MTBF : Mean Time Between Failure
MTTR : Mean Time To Repair
PE : Plans d'Expériences
POM : Problème d'Optimisation Multiobjectif
POO : Programmation Orientée Objet
RAO : Réponse à l'Appel d'Offre
RAOL : Réponse à l'Appel d'Offre Local
REX : Retour d'Expériences
SGBD : Système de Gestion de Bases de Données
SGBDR : Système de Gestion de Bases de Données Relationnelles
SMED : Single Minute Exchange of Dies
S/N : Signal/Noise Ratio
SOA : Service Oriented Architecture
SPC : Statistical Process Control
SysMl : System Modeling Language
TBF : Time Between Failure
TPM : Total Productive Maintenance
TRS : Taux de Rendement Synthétique
TTR : Time To Repair
UML : Unified Modeling Language
XML : Extensible Markup Link

Table des matières

Liste des abréviations.....	v
Table des matières	vii
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xix
Résumé	xxi
Abstract.....	xxiii
Introduction générale.....	1
Partie I : Adaptation de la maintenance industrielle, de la production et du contrôle des paramètres machines au paradigme holonique.....	7
Chapitre 1 : Place de l'Intelligence Artificielle dans la Gestion Industrielle	9
1.1. Introduction	9
1.2. Intelligence artificielle, continuité, absolu et incomplétude.....	9
1.2.1. Le sens du continu et lien avec l'intelligence.....	9
1.2.2. Incomplétude de Gödel, limitation de la description du continu et étincelle manquante (the ghost in the machine).....	11
1.2.3. Intelligence, épistémologie et étincelle manquante (<i>la conscience</i>).....	13
1.3. L'approche holonique : objets réels ou métaphysiques ?	14
1.3.1. Construction physique des objets, unification des contextes et nécessité des métalangages	15
1.3.2. Construction de l'information au sein des holons	18
1.3.3. Construction du nouveau paradigme et développements antérieurs (POO, MAS et HMS)	19
1.4. Aspect technique de l'approche holonique : nécessité et architectures associés.....	20
1.4.1. Besoin en « Holons » et contraintes fonctionnelles des systèmes de production	20
1.4.2. Organisation des holons : notion de holarchie et holons de base	23
1.4.3. Architecture préliminaire proposée dans nos travaux	26
1.4.3.1. La Base de données (BD) interne.....	27
1.4.3.2. Entité de Pilotage Ambiant (EPA) :	27
1.4.4. Discussion de l'architecture proposée dans nos travaux : Architecture hybride, notion d'Isoarchie et de Holarchie correspondante	28
1.4.5. Outil d'analyse et niveau de prise de décision sur l'organisation d'un système holonique	31
1.5. conclusion du chapitre.....	33
Chapitre 2 : Modélisation de l'analyse des défaillances industrielles par l'approche holonique	35

2.1.	Introduction	35
2.2.	Contexte de l'étude et problématique.....	36
2.2.1.	Contexte général.....	36
2.2.2.	Problématique.....	36
2.3.	Intégration de la méthode AMDEC (dynamique) au sein par l'approche holonique	38
2.3.1.	Analyse AMDEC machine et choix architecture de pilotage.....	38
2.3.2.	Démarche et cahier des charges adoptés	40
2.3.2.1.	Aspect statique	40
2.5.3.1.1.	Approche proposée.....	40
2.5.3.1.2.	Description fonctionnelle des entités	41
a)	Description des Holons Ressources.....	41
b)	Description d'une défaillance, d'un mécanisme et d'un mode de défaillance	42
2.3.2.2.	Aspect dynamique	43
2.5.3.1.3.	Accord ou refus d'intégrer l'analyse AMDEC « dynamique »	44
2.5.3.1.4.	Séquence d'AMDEC « Dynamique » pour les HR intéressés.....	45
2.5.3.1.5.	Choix d'une politique de Maintenance préventive.....	45
2.3.3.	Modélisation : diagrammes UML proposés	46
2.3.3.1.	Aspect statique : diagramme de classes	46
2.3.3.2.	Aspect dynamique : diagramme de séquence du scénario normal	47
2.3.3.3.	Table de correspondance : notations du cahier des charges et notatin des diagrammes UML.....	48
2.4.	Conclusion.....	53
Chapitre 3 : Le Contrôle qualité et l'optimisation intégrée des paramètres de la production par l'approche holonique		55
3.1.	Introduction et problématique	55
3.2.	Problématique et positionnement par rapport aux systèmes HMS	57
3.3.	Présentation des procédures de contrôle qualité et méthode des plans d'expériences	58
3.3.1.	Cartes de contrôle et détection de variation extraordinaire des caractéristiques mesurées	59
3.3.2.	Diagramme d'Ishikawa	61
3.3.3.	Plans d'expériences (PE) : outil de modélisation par l'expérience	61
3.3.3.1.	Choix des facteurs	62
3.3.3.2.	Choix des niveaux des facteurs et des interactions entre facteurs.....	62
3.3.3.2.1.	Degré de liberté (ddl) du modèle du processus étudié.....	63
3.3.3.2.2.	Condition d'orthogonalité	63
a)	Orthogonalité entre les facteurs eux-mêmes :	64

b) Orthogonalité du plan d'expériences	64
3.3.4. Analyse de la variance et approche TAGUCHI	65
3.3.4.1. Effets des facteurs	65
3.3.4.2. Approche de Taguchi, rapport Signal/Bruit(S/N) et observation de l'optimum (approche multiobjectif)	66
3.3.4.2.1. Approche de Taguchi et rapport Signal/Bruit(S/N).....	66
3.3.4.2.2. Observation de l'optimum et approche multiobjectif.....	67
3.4. Modélisation UML	69
3.4.1. Vue statique du système	70
3.4.2. Vue dynamique (Interactions entre objets).....	71
3.5. Conclusion.....	74
Chapitre 4 : Proposition d'une approche Multiobjectifs pour la correction du plan directeur de production en fonction des données de Fiabilité et de sûreté de fonctionnement.....	79
4.1. Introduction et problématique	79
4.2. Démarche proposée	80
4.2.1. Etapes de construction de la fonction P_2	80
4.2.2. Lien avec l'approche holonique et les machines intelligentes.....	81
4.3. Hypothèses	81
4.3.1. Cadence nominale ou maximale de production.....	81
4.3.2. Etat du matériel en phase de maturité.....	81
4.4. Espace des alternatives et contraintes liées au modèle proposé	82
4.4.1. Contraintes sur la capacité de production.....	82
4.4.1.1. Production moyenne calculé sur tout l'horizon de production $[t_0, t_0+T]$	82
4.4.1.2. Capacité de production sur l'intervalle $[t_i, t_i+MTTR+MTBF]$	83
4.4.1.3. Fréquence d'interventions et capacité maximale de production	84
4.5. Formulation du problème sous forme d'un Problème d'Optimisation Multiobjectifs (POM).....	87
4.6. Développement du problème.....	88
4.6.1. Egalité des moyennes de production sur l'horizon de production.....	88
4.6.1.1. Développement de l'équation caractéristique	88
4.6.1.2. Analyse de l'équation caractéristique.....	91
4.6.1.2.1. Effet de la période de remplacement systématique t_f (Temps de Bon Fonctionnement).....	92
4.6.1.2.2. Effet de la valeur des productions de départ b_0	92
4.6.1.2.3. Relation de la cadence de production avec la fiabilité des équipements.....	92
4.6.1.2.4. Récapitulation et espace des alternatives (valeurs permises de t_f).....	92

4.6.1.3.	Simulation de la première équation caractéristique (8) du problème	93
4.6.1.3.1.	Proposition de données numériques	93
4.6.1.3.2.	Simulation	93
a)	Cadence de production a en fonctions temps de remplacement t_f	93
b)	Cadence de Production en fonction de la Fiabilité R	94
4.6.1.4.	Conclusion de cette section	96
4.6.2.	Contraintes sur la cadence de production définie sur les intervalles $[t_{2k}, t_{2k+1}]$	97
4.6.2.1.	Développement de l'équation caractéristique relativement à la contrainte de capacité maximale de production	97
4.6.2.2.	Effet de la valeur de production de départ b_0 sur les fonctions objectifs (a, R)	99
4.7.	Développements futurs et équation de compensation de la production : troisième contrainte du modèle	101
4.8.	Définition de nouveaux Problèmes d'optimisation MultiObjectifs.....	102
4.8.1.	Définition d'un Problème ε -contrainte	102
4.8.2.	Définition du Problème d'Optimisation MultiObjectif général	103
4.9.	Conclusion.....	104
Partie II : Prise en compte de l'approche multiobjectif dans l'optimisation mathématique sous contraintes.....		107
Chapitre 5 : Formulation du problème d'optimisation du tournage monopasse et présentation des outils d'optimisation utilisés		109
5.1.	Introduction du problème d'optimisation et approche holonique.....	109
5.2.	Problème d'optimisation multiobjectif initial et simplifications adoptées	110
5.3.	Correspondance entre tournage monopasse et tournage multipasse.....	112
5.4.	Autres approches de choix des conditions de coupe	114
5.5.	Description des composantes du (POM) par l'architecture PROSA	116
5.6.	Normalisation des fonctions	119
5.6.1.	Normalisation des fonctions-objectifs	119
5.6.2.	Normalisation des fonctions-contraintes	121
5.7.	Discussion des critères et approches de résolution.....	122
5.7.1.	Notion de dominance et Pareto-optimalité dans le cas multiobjectifs.....	125
5.7.2.	Classification des problèmes d'optimisation multiobjectifs.....	128
5.7.3.	Méthode de la somme pondérée et formulation du problème mono-objectif équivalent	131
5.7.4.	Construction du Lagrangien du problème d'optimisation et lien avec la recherche d'optimum lié en analyse des fonctions à plusieurs variables.....	134
5.7.4.1.	Construction dans le cas d'une fonction à deux variables (extrait de (Krasnov et al., 1993), paragraphe 14.18 p. 485).....	134

5.7.4.2.	Conditions suffisantes d'optimalité : « Point-col » et Fonction de Lagrange	136
5.7.5.	Lien avec les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker dans le cas de fonctions convexes différentiables	139
5.8.	Conclusion.....	139
Chapitre 6 : Vers une résolution analytique du Problème d'Optimisation Multiobjectif du tournage monopasse.....		141
6.1.	Introduction	141
6.2.	Présentation des fonctions-objectifs	141
6.3.	Normalisation des fonctions-objectifs	142
6.4.	Définition de la fonction composite	143
6.5.	Normalisation des fonctions-contraintes	144
6.6.	Lagrangien et relaxation du problème de minimisation	145
6.7.	Les conditions d'optimalité KKT	146
6.7.1.	Optimalité du Lagrangien par rapport à λ	147
6.7.2.	Optimalité du Lagrangien par rapport aux μ_i	148
6.7.3.	Optimalité du Lagrangien par rapport à la variable V	148
6.7.4.	Optimalité du Lagrangien par rapport à la variable f	149
6.7.5.	Lien avec l'optimalité par rapport à λ	149
6.7.6.	Interprétation géométrique du système (28) et de l'équation (17)	151
6.7.6.1.	Définition d'une nappe géométrique.....	151
6.7.6.2.	Analyse de l'équation (17) : $\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{f}) = \mathbf{V}^p \mathbf{f}^q + \mathbf{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}^{-\alpha} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$	152
6.7.6.3.	Définition d'un arc paramétré	153
6.7.6.4.	Définition d'un arc tracé sur une nappe	153
6.7.6.5.	Interprétation	153
6.7.7.	Ecriture de la dernière condition KKT	155
6.7.8.	Première approche de normalisation (système (4') et équation (17'))	155
6.7.8.1.	Développement de l'équation à résoudre	155
6.7.8.2.	Calcul des constantes (x_i, y_i, z_i)	157
6.7.8.3.	Calcul des exposants de la variable V	157
6.7.8.4.	Calcul des coefficients α_i et α	157
6.7.8.5.	Calcul des coefficients χ_i	159
6.7.8.6.	Calcul des β_i	159
6.7.8.7.	Récapitulation et <i>problème équivalent</i> relatif à la première méthode de normalisation.....	161
6.7.9.	Deuxième approche de normalisation (système (4) et équation (17)).....	162
6.7.9.1.	Equation à résoudre	162

6.7.9.2.	Discussion sur la résolution analytique de l'équation (17).....	163
6.7.9.2.1.	Théorie de Galois	164
6.7.9.2.2.	Méthode de Sotta pour la factorisation de polynômes d'ordre quelconque	165
6.7.9.2.3.	La méthode de Bring-Jerrard.....	166
6.7.9.2.4.	Résolution Numérique, interpolation polynomiale, régression et retour vers l'approche analytique	167
6.7.9.3.	Résolution de l'équation (17).....	168
6.7.9.3.1.	Résolution Numérique de l'équation (17) par la méthode de Newton	168
6.7.9.3.2.	Interpolation polynomiale	170
6.7.9.3.3.	Reconstruction de la fonction $f = \psi(V)$ par régression linéaire simple avec changement de variable	172
6.7.9.4.	Développement de l'équation à résoudre	175
6.7.9.5.	Calcul des β_i	175
6.8.	Résultats numériques et discussion	180
6.8.1.	Résultats numérique de la 1 ^{ère} approche de normalisation	180
6.8.1.1.	Description de l'équation « $h(V) = 0$ ».....	181
6.8.1.2.	Variation du paramètre « $d^*(V)$ dans l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ ».....	181
6.8.2.	Tracé de la fonction « $h(V)$ sur l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ ».....	182
6.8.2.1.	Interprétation des résultats.....	183
6.8.2.1.1.	Valeurs prises par $h_\lambda(V)$ et solution approchée dans l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$...	183
6.8.2.1.2.	Effet du paramètre λ	184
6.8.2.1.3.	Valeurs des fonctions-objectifs résultants	186
6.8.2.1.4.	Interprétation des résultats de la première méthode de normalisation	187
6.8.3.	Résultats numériques de la 2 ^{ème} approche de normalisation.....	188
6.8.3.1.	Analyse de la fonction $h_\lambda(V)$ et existence de la solution du système (67)	188
6.8.3.2.	Estimation du paramètre d^*	190
6.8.3.3.	Résolution de l'équation « $h(V, \lambda) = 0$ ».....	191
6.8.3.4.	Solution approchée de l'équation « $h_{\lambda=0}(V = 0)$ »	193
6.9.	Récapitulation : Valeurs optimales des variables du problème et espace des fonctions .	197
6.9.1.	Valeurs optimales des variables du problème (V, f, d) et espace des fonctions pour V variant à l'intérieur de $[186.13 \text{ m/min}, 431.06 \text{ m/min}]$	198
6.9.2.	Prise en compte du poids λ et Valeurs optimales des variables du problème	200
6.9.3.	Validité des résultats et positivité des multiplicateurs de Lagrange	200
6.10.	Discussions et perspectives de la problématique.....	201
6.11.	Conclusion.....	204
Conclusion générale et perspectives		207

Bibliographie.....	215
Annexe « Code Newton »	225
Annexe « Définition d'un nouveau problème d'optimisation »	227

Liste des figures

Figure 1.1 : modèles primitifs d'un système, selon la théorie de la systémique (Pujo, 2009)(Pujo et Kieffer, 2002).....	24
Figure 1.2 : Architecture de communication interne dans un Holon Ressources (El Jai et al., 2013)	27
Figure 1.3 : Types de services ambiants fournis à un holon par une EPA (Pujo et al., 2009).....	28
Figure 1.4 : Différentes organisations d'un système holonique (Adam et al., 2001).....	31
Figure 1.5 : Distribution des tâches au sein d'un même holon et communication avec le milieu extérieur (Adam et al., 2001)	32
Figure 2.1 : Diagramme de classes organisé par Packages (El Jai et al., 2013).....	46
Figure 2.2 : Représentation FIPA du protocole d'interaction entre EPA (Pujo, 2009)...	47
Figure 2.3 : Fragment référencé « création du module GestionAO »	47
Figure 2.4 : Diagramme de classe préliminaire de l'AMDEC dynamique	49
Figure 2.5 : Diagramme de séquence pour le scénario normal d'une action AMDEC dynamique.....	51
Figure 3.1 : Diagramme simplifié du processus d'optimisation.....	59
Figure 3.2 : Diagramme simplifié du processus d'optimisation (Doumani et al., 2016) .	60
Figure 3.3 : Modélisation d'un processus ou d'un système (Montgomery, 2001)	61
Figure 3.4 : Catégories des variables considérées groupées par (Wahdame, 2006).....	67
Figure 3.5 : Fragment de Référence « Ref_Experience_plan_Screening ».....	72
Figure 3.6 : Diagramme de classe du système proposé d'optimisation des paramètres de fonctionnement d'un procédé.....	76
Figure 3.7 : Diagramme de séquence préliminaire du système d'optimisation proposé	77
Figure 4.1 : Construction de P_2 à partir de P_1	83
Figure 4.2 : Construction de la fonction P_2 entre $[t_{i-2}, t_{i-1}]$	84
Figure 4.3 : Risques liés à une fréquence élevée d'arrêts préventifs	87
Figure 4.4 : Représentation de la fonction P_2 sur $[t_{2k}, t_{2k+1}]$	89
Figure 4.5: Représentation des b_{2k} sur l'axe P_2	90
Figure 4.6 : Cadence de production a VS temps de remplacement systématique t_f	94
Figure 4.7 : Fréquence d'interventions n VS temps de remplacement systématique t_f ...	94
Figure 4.8 : Fiabilité R en fonction du temps de fonctionnement t_f	95
Figure 4.9 : Tracé du triplet (temps de fonctionnement t_f , cadence de production a , Fiabilité R)	96

Figure 4.10 : Courbe caractéristique de la contrainte (9) ($P_2(t) \leq c \times t_f$) paramétrée par ($b_0 = 500$)	98
Figure 4.11 : Valeurs permises (Feasible values) de la cadence de production a (courbe bleu) sous la contrainte $a \leq c - b_0/t_f$ (courbe rouge).....	99
Figure 4.12 : Fonction limitation " $L(t_f, b_0) = (c - b_0/t_f)$ " en fonction de t_f et de b_0	100
Figure 4.13 : Tracé de la limitation de la cadence de production (contrainte (9) du MOP) et de la fonction fiabilité en fonction des variables de décision t_f et b_0	100
Figure 5.1 : Représentation des paramètres d'usure (V, f, d).....	112
Figure 5.2 : Description PROSA des liens entre holons de base correspondant au problème de tournage étudié.....	118
Figure 5.3 : Représentation de la surface dominée par un ensemble par rapport à un point de référence calculé par l'hypervolume (Jozefowicz, 2013)	120
Figure 5.4 : Illustration de la méthode lexicographique dans le cas bi-objectif (Jozefowicz, 2013).....	124
Figure 5.5 : Population constituée de cinq différentes solutions (Deb, 2001)	127
Figure 5.6 : Illustration du front de Pareto (espace de décision à gauche, espace des fonctions-objectifs à droite de la figure) (Deb, 2001)	127
Figure 5.7 : Les solutions Pareto-optimales marquées en trait noir fort pour les quatre politiques d'optimisation (Deb, 2001).....	129
Figure 5.8 : Illustration d'ensembles localement Pareto-optimaux (Deb, 2001)	129
Figure 5.9 : Balayage des solutions Pareto-optimales en variant les λ_1 et λ_2 (Ehrgott, 2005).....	133
Figure 5.10 : Visualisation du point-col de la fonction $L(u, p) = u^2 - p^2$	138
Figure 6.1 : Nappe géométrique de paramétrisation (D, μ)	152
Figure 6.2 : Nappe géométrique Σ de paramétrisation (D, μ) et arc géométrique γ de paramétrisation (I, μ_{ow}) tracé sur la nappe	153
Figure 6.3 : a) Surfaces $Surf_1(V, f)$ et $Surf_2(V, f)$	164
Figure 6.3 : b) Vue de dessus des deux surfaces $Surf_1(V, f)$ et $Surf_2(V, f)$	164
Figure 6.4 : Algorithme adopté pour la résolution de l'équation (17).....	167
Figure 6.5 : Tracé des courbes " $P_{0.1}(V) = 0$ " et " $P_{0.9}(V) = 0$ " et des suites de Newton correspondantes.....	169
Figure 6.7 : Projection de la surface " $P_f(V) = 0$ " sur le plan ($V, P_f(V)$).....	170
Figure 6.7 (bis) : Représentation des couples $(f_b V_{Ni})$ correspondant à l'ensemble des solutions numériques de l'équation (17).....	172
Figure 6.8 : Allure de la fonction adoptée (relativement à l'équation (5)).....	173
Figure 6.9 : Adéquation statistique de la solution numérique de l'équation (17)	174

Figure 6.10 : Tracé de la fonction $c_{23}(V)$	178
Figure 6.11 : Tracé de la fonction $c_{13}'(V)$	179
Figure 6.12 : Tracé du paramètre d^* en fonction de la variable V	182
Figure 6.13 : Tracé de la fonction $h_\lambda(V)$ en fonction de V et de λ (Lambda).....	183
Figure 6.14 : Projection de la fonction $h_\lambda(V)$ sur le plan $(V, h_\lambda(V))$	184
Figure 6.15 : Variation du ratio « Ratio_λ »	185
Figure 6.16 : Variation du ratio « Ratio_λ » en fonction de la vitesse V	186
Figure 6.17 : Espace des fonctions (f_1, f_2) avec comme paramètre d^{**}	187
Figure 6.18-a) : Visualisation de la surface $(V, \lambda, h(V, \lambda))$, du plan $h(V, \lambda) = 0$ et de leur intersection	189
Figure 6.18-b) : Vue de droite	189
Figure 6.18-c) : Vue de dessus	190
Figure 6.19 : Paramètre optimal d^* en fonction de V	191
Figure 6.20 : Agrandissement de la zone d'intersection	192
Figure 6.21 : Solution numérique approchée de l'équation $h(V) = 0$	194
Figure 6.22 : tracé de la fonction $h_0(V)$	195
Figure 6.23 : Analyse de la fonction $h_\lambda(V)$	196
Figure 6.24 : Représentation de la tangente de la fonction $h_{\lambda=0}(V)$ au point $(V = 300)$.	197
Figure 6.25 : Tracé des fonctions-objectifs en fonction de la variable V et tracé de l'espace des objectifs	198
Figure 6.26 : Principe de la méthode Geoffrion (Colette et Siarra, 2002).....	204

Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Table de correspondance.....	48
Tableau 3.1 : Calcul du degré de liberté d'un modèle de sortie Y.....	63
Tableau 3.2 : exemple de facteurs orthogonaux (plan complet)	64
Tableau 3.3 : Détermination du nombre d'essais.....	65
Tableau 6.1 : Variation du paramètre d^* en fonction de la variable de décision V.....	161
Tableau 6.2 : Valeurs des suites de Newton relatives à la résolution de l'équation (17)	171
Tableau 6.3 : variation de d^* en fonction de la vitesse V.....	180

Résumé

Ce travail de thèse porte sur la prise en compte de l'aspect multiobjectif et multicritère dans le domaine de la gestion industrielle. Pour ce faire, les sous-domaines auxquels nous nous sommes intéressés sont la « gestion de la maintenance », la « gestion de la production » et le « contrôle qualité ». Pour ce faire, il était nécessaire, au départ, de fixer les niveaux d'analyse à adopter dans notre démarche de modélisation de certaines méthodes ou processus relatifs aux domaines étudiés. Cela dit, relativement à l'aspect organisationnel, nous avons adopté le paradigme holonique. Cette approche a permis la modélisation et la description formelle de quelques processus d'analyse connus ; nous citons en guise d'exemple la méthode AMDEC, la MSP (contrôle qualité) ainsi que l'optimisation des paramètres machine par la méthode des Plans d'expériences (méthode de Taguchi). Les résultats de cette démarche correspondent donc à l'établissement des diagrammes de classes et de séquences (UML 2.0) dans le but d'une future implémentation. Par la suite nous avons pu formuler la relation entre dégradation des machines de production (fiabilité) et cadence de production. En effet, nous avons proposé une démarche mathématique rigoureuse d'unification des variables de décision de ces deux caractéristiques très importantes (dégradation et cadence des machines).

Enfin, quant à l'aspect opérationnel, la prise en compte de l'aspect multicritère et multiobjectif a été appliquée rigoureusement en étudiant un Problème d'Optimisation Multiobjectif d'une opération de production élémentaire (tournage monopasse). L'analyse développée correspond à une étude des solutions optimales du problème initial par l'approche analytique. Vu que le problème d'optimisation adopté n'a jamais été étudié analytiquement, notre approche permet d'obtenir un optimum unique compétitif comparé aux résultats issus des métaheuristiques et des méthodes numériques associées.

Mots-clés : Paradigme holonique, Analyse des défaillances, Méthode AMDEC, Contrôle qualité, Optimisation des paramètres machines, Plans d'expériences, Méthode de Taguchi, Prise de décision dynamique, Optimisation convexe multiobjectif, problème du tournage monopasse.

Abstract

This work concerns the study of the multicriteria and multiobjective aspects related to the industrial management. This is why it was an obligation, at the first stage of the study, to define the sub-domains by which we are interested, the “maintenance management”, the “production management” and the “quality control”. For that, it was necessary to specify the level of analysis that will guide the corresponding developments. Hence, related to the organizational aspect, we have adopted the Holonic paradigm in order to model and describe formally some specific analysis procedures that are utilized in the studied domains. Briefly these procedures correspond to the FMEAC analysis, the SPC (quality control) and the machines parameters optimization, using the Design Of Experiments (by Taguchi method). The results of the developments correspond to the establishment of the UML 2.0 Class and Sequence diagrams of the described procedures. After that, we have formulated the relation between the degradation of the equipment of production and the production rate of this latter. Indeed, the method proposed is based on the unification of the decision variables of these two important characteristics of the production equipments (machine degradation and production rate).

Finally, related to the operational aspect, the multiobjective analysis was performed by its application on a large known production problem. So, we have adopted the analytical way to resolve the multiobjective optimization problem of the single-pass turning operation, in order to determine the feasible and optimal solutions of the problem according to the rigorous mathematical optimization tools. In consequence, the resolution approach permits to detect several feasible solutions, but finally, converge to a unique and global optima that is competitive according to the metaheuristics which are largely used in the bibliography.

Keywords : Holonic paradigm, Failure analysis, FMEAC Method, Quality Control, Input Optimization, Experiments Plans, Taguchi method, Dynamic decision, Multiobjective convex optimization, single-pass turning problem.

Introduction générale

La problématique traitée dans cette thèse concerne, d'une façon générale, la modélisation de certains processus d'analyse des systèmes industriels relatifs à la gestion de la maintenance, à l'exploitation du retour d'expériences de qualité dans l'optimisation des paramètres machines ainsi qu'à l'établissement de liens entre ces différents domaines et la gestion de production.

C'est dans ce but que nous avons adopté le paradigme holonique, par lequel nous cherchons à satisfaire certaines contraintes soulevées par les industriels et les chercheurs ces trois dernières décennies, relativement à l'autonomie des machines de production, l'intelligence artificielle, la flexibilité, etc.

Et c'est en février 1992 que le premier congrès relevant des systèmes IMS (*Intelligent Manufacturing Systems*) a été tenu, à l'échelle intercontinentale, dans le but de définir, d'unifier et de formaliser les besoins urgents des systèmes de production du 21^{ème} siècle.

Plusieurs directives ont été définies dans ce sens, relevant de la plupart des aspects de la productique et de la gestion industrielle (Christensen, 1994).

Deux grandes catégories de systèmes ont été dégagées, les systèmes multiagents et les systèmes holoniques ; le premier a été plus adopté aux systèmes d'informations et le deuxième commence de plus en plus à se propager, au moins au niveau académique et industriel. Nous allons nous intéresser à cette deuxième notion et nous allons essayer d'optimiser les paramètres de la gestion industrielle par une approche holonique jumelée avec une optimisation multiobjectif.

D'un point de vue technique, l'objectif de nos travaux s'étale sur deux grands axes, constituant les deux parties de ce mémoire de thèse :

- Le premier axe s'intéresse à l'unification du cadre de recherche, par l'approche holonique, relativement à la gestion de la maintenance, la gestion de la production, le contrôle qualité et des paramètres de fonctionnement des machines.

L'aspect traité ici relève du tactique et de l'organisationnel ; il ne relève ni du stratégique, ni de l'opérationnel.

- Le deuxième axe s'intéresse plutôt à l'aspect opérationnel, relativement à l'optimisation des paramètres opératoires d'une opération de production unitaire (élémentaire).

Cette opération de production peut être réalisée par un holon ressource (machine au sens holonique) qui assure, avant l'exécution des travaux, la possibilité d'optimisation de cette opération, conformément aux techniques de mise en œuvre du domaine traité.

LA PREMIERE PARTIE de ce manuscrit se compose de quatre chapitres :

Le PREMIER CHAPITRE s'intéresse au rôle de l'intelligence artificielle dans la flexibilité des systèmes de production. L'approche holonique à elle seule ne peut pas modéliser d'une manière exhaustive les systèmes industriels. L'incomplétude des formalismes mathématiques utilisés ne permet pas réellement d'obtenir une intelligence artificielle absolue. En conséquence, L'opérateur reste toujours le maître de la situation dans le pilotage et la conduite des systèmes industriels.

Enfin, ce chapitre constitue une étude critique de l'intelligence artificielle formalisée par l'approche holonique.

Le DEUXIEME CHAPITRE présente une bibliographie sur la notion de holons où nous y rapportons une discussion concernant les architectures des holons, adoptées dans l'application de l'approche holonique à quelques contextes industriels, surtout en productique, production et logistique *intelligente* (Christensen, 1994) (Daihani et al., 1993) (Van Brussel et al., 1998) (Adam et al., 2001) (Mekaouche et al., 2009) (Pujo, 2009) (Ounnar et Pujo, 2009).

Cette architecture concerne donc les deux parties d'un holon ; la partie matérielle (physique) et la partie immatérielle (l'information et sa gestion). Nous convergerons par la suite à l'architecture PROSA (Pujo, 2009) (Singgih, 2014), la plus couramment utilisée et qui présente une certaine simplicité dans sa mise en œuvre.

Nous continuons le développement de ce chapitre par l'adaptation de la méthode AMDEC au paradigme holonique, en proposant une modélisation formelle, utilisant le langage orienté objet, UML 2.0 (Roques, 2006), en vue d'automatiser cette technique d'analyse des risques classique, et de la doter d'une certaine flexibilité et du dynamisme nécessaire à une analyse générique et autonome des risques industriels.

Nous désignons donc cette méthode « méthode AMDEC dynamique », conformément aux descriptions formelles statique et dynamique adoptées.

Le descriptif textuel constitue ainsi le cahier des charges que nous avons explicité autant que possible, afin de vulgariser la lecture des diagrammes UML 2.0 développés.

Les modèles UML 2.0, ainsi développés, serviront à l'intégration de l'AMDEC *dynamique* au sein des *Holonic Manufacturing Systems* (HMS), et permettront la conception d'une nouvelle

génération de logiciels de Gestion de Maintenance Assistée par Ordinateur (GMAO) (Labib, 2004).

Le TROISIEME CHAPITRE se focalise sur le contrôle qualité et l'exploitation du retour d'expérience qui lui est relatif, dans le but de proposer une démarche intégrée de l'optimisation des paramètres de commande des holons ressources (machines de production).

Trois principales étapes sont traitées dans ce chapitre :

- La première étape consiste à expliciter l'aspect fonctionnel du contrôle qualité standard (Pillet, 2002), qui est effectué classiquement dans les entreprises. Cette description permettra de lister les agents et acteurs principaux responsables des actions à réaliser au niveau de ce processus.

Le contrôle qualité peut être fortement ou moyennement automatisé ; le cas contraire, les résultats du contrôle qualité, obtenus manuellement, sont enregistrés dans la base de données du processus, et exploités par la suite pour la mesure des indicateurs de performances adoptés (cartes de contrôle, capacités, etc.) (Pillet, 2002) ;

- Dans la deuxième étape, nous présenterons une brève explication de la méthode des plans d'expériences qui permet d'optimiser l'expérimentation et de construire des plans d'expériences fiables et robustes (Constant, 1989) (Pillet, 1997) (Wahdame, 2006). La méthode adoptée est celle du Dr. Taguchi (Constant, 1989) (Pillet, 1997) (Wahdame, 2006). Elle permet de construire, à part une expérimentation fiable et robuste, des indicateurs statistiques aussi robustes que les plans eux-mêmes (rapport signal/bruit).
- Dans la troisième partie du chapitre, nous essayerons de lier entre les différents aspects statiques et dynamiques relatifs aux processus décrits aux deux étapes précédentes. Les résultats de l'analyse correspondent à l'élaboration des modèles orientés objets, diagrammes de classes (statique) et de séquences (dynamique) en vue de la formalisation de la démarche proposée.

Les diagrammes UML 2.0 ainsi élaborés constituent le premier grand pas vers une exploitation dynamique, et presque en continu, des paramètres machines, entrée du système de production (holons ressources).

Il serait possible par la suite d'exploiter nos résultats pour l'optimisation de la qualité des produits de machines de production fortement automatisées. Malheureusement les arrêts des produits de non-qualité de ces machines s'avèrent très difficiles à gérer.

Par ces deux premiers chapitres, nous aurons complété la partie traitant explicitement la modélisation holonique des fonctions de l'entreprise adoptées, maintenance, qualité, production, et optimisation-process.

Comme récapitulatif, pour toutes les fonctions d'entreprises adoptées, la modélisation a été organisée suivant la logique présentée ci-dessous :

- Analyse qualitative et quantitative (indicateurs utilisés) des processus étudiés ;
- Fragmentations des fonctions en fonctions d'ordre inférieur (en cascade) et ainsi de suite jusqu'aux opérations les plus élémentaires (mesure, lancement de production, enregistrement des résultats, calcul des statistiques, etc.) ;
- Expression des objectifs des étapes de construction de la valeur conformément à chaque processus étudié par l'approche holonique ;
- Expression du cahier des charges *textuel* pour aboutir à la construction de la valeur, relativement à chaque processus ;
- Modélisation des processus étudiés : Transformation du cahier des charges en langage de modélisation (conceptuel) orienté objet UML 2.0 en vue d'une exploitation ultérieure ;

Au niveau du QUATRIEME CHAPITRE, nous nous consacrerons à un aspect aussi important que les premiers. Notre objectif ne sera plus de modéliser l'ensemble ou une partie d'autres processus ou fonctions d'entreprise, mais la mise en œuvre d'un nouvel algorithme de prise de décision multiobjectif en maintenance et production simultanément.

N'oublions pas que l'objectif de nos travaux est premièrement de proposer une modélisation nouvelle, par l'approche holonique, des différents processus qui nous intéressent, mais aussi de traiter, dans l'aspect le plus formel, l'approche multicritère ou multiobjectif qui permettrait de traiter un tel paradigme.

Dans ce chapitre, nous avons réfléchi à la problématique suivante :

« serait-il possible d'unifier les décisions au niveau de la maintenance systématique et gestion de la production (suivant l'un de ses aspects) par des variables de décision communes ? »

La réponse à cette question a été formulée dans ce chapitre, par des hypothèses préliminaires, associant différentes contraintes de production et de sûreté de fonctionnement.

L'introduction des variables de décision a été établie progressivement, en prenant le soin de détailler chaque étape du calcul pour une lecture vulgarisée.

A la fin du chapitre, aucune réponse explicitée n'est fournie, relativement à la question de départ qui a contribué, initialement, à la proposition de la problématique. Par ailleurs, les

résultats sont reformulés en termes d'un nouveau problème d'optimisation multiobjectif (POM) général.

En conséquence, c'est la résolution de ce problème d'optimisation multiobjectif qui permettra de répondre à la question, qui a permis d'initier ce chapitre de la thèse.

Dans ce cas, les résultats de l'optimisation :

- peuvent être intégrés au sein des holons ressources (machines de production intelligentes),
- peuvent se présenter comme des holons ordres (voir l'architecture PROSA au chapitre 2),
- peuvent se présenter sous forme de services d'optimisation annexés dans un holon staff ou dans une Entité de Pilotage Ambiant (EPA) ;

à chaque fois que le programme de production est modifiée, que les objectifs de fiabilité ou l'état de fiabilité des organes altérés, le programme développé est relancé, et les données de production sont mis à jour, conformément aux résultats des calculs au sein de la holarchie concernée.

A LA DEUXIEME PARTIE de la thèse, nous aborderons un aspect opérationnel, parmi d'autres, de la gestion de la production ; l'optimisation d'une opération de tournage monopasse.

L'optimisation étudiée concerne la minimisation de la fonction coût, d'une opération de tournage, ainsi que la minimisation de la dégradation de l'outil de coupe relativement à cette opération élémentaire.

Des contraintes techniques relatives à l'effort de coupe, à la puissance mécanique ultime développée, à la qualité de la pièce en termes de rugosité de la surface obtenue (contrainte de qualité) et de température maximale de coupe (contrainte de métallurgie), ont été intégrées, conformément aux objectifs et contraintes présentés dans plusieurs références.

En analysant ces travaux, nous avons vu qu'aucune référence n'a traité ce problème dans la rigueur mathématique, c'est-à-dire relativement aux outils d'optimisation mathématique qui existent ; telles les méthodes d'agrégation, qui transforment le POM proposé en un problème d'optimisation à un seul objectif, par les méthodes lexicographiques ou Pareto.

Les auteurs préfèrent traiter directement le sujet par des métaheuristiques (algorithmes génétiques, recuit simulé, etc.). Ces méthodes simplifient ainsi la résolution de ces problèmes d'optimisation et assurent la convergence de leurs résultats.

Des méthodes rigoureuses telles que le simplexe multiobjectif, la programmation linéaire standard, l'analyse et l'optimisation convexe, la programmation géométrique, etc., ont été évitées dans la littérature vu la complexité des calculs développés au cours des traitements par les approches analytiques du problème du tournage monopasse.

C'est la raison pour laquelle, nous avons consacré **LE CHAPITRE 5**, premier chapitre de la deuxième partie de la thèse, à une étude bibliographique du problème d'usinage adopté, et à l'étude des outils de l'optimisation, analytiques surtout, qui existent, et qui permettraient de résoudre le problème. Par ailleurs, il permet d'étudier les difficultés d'une recherche rigoureuse des solutions faisables et, par la suite, optimales de ce POM, dans le cas de leurs existences.

Dans la mesure du possible, nous présentons notre propre interprétation de quelques approches quant à leur aspect géométrique. Les résultats des développements antécédents, en termes de théorèmes, de lemmes ou de propositions auront une utilité absolue, dans la mesure où ils nous permettront d'aller directement vers des pistes spécifiques. Dans ce cas, nous éviterons ainsi la perte de temps due à des analyses marginales, ne faisant pas partie de notre domaine d'expertise.

Nous donnons en guise d'exemple :

- l'expression des critères d'optimalité par les multiplicateurs de Lagrange, transformés en critères nécessaires et suffisants de Karush-Kuhn-Tucker (notés KKT dans ce qui suit) généralisés pour l'optimisation mono-objectif surtout ;
- l'optimalité des solutions par la méthode de la somme pondérée dans le cas convexe ;
- la non-résolubilité (dans le cas général) des équations algébriques polynomiales d'ordre supérieur strictement à 4 ;
- etc.

Au **SIXIEME CHAPITRE**, nous allons appliquer l'arsenal analytique étudié au chapitre 5. La recherche de l'optimalité analytiquement, par l'adoption des critères d'optimalité KKT va déboucher sur un système d'équations complexes à résoudre.

Le recours aux notions de base de la géométrie différentielle (courbes et surfaces paramétriques) nous permettra de résoudre certaines équations complexes.

La résolution analytique sera assurée à presque 95% (qualitativement), en transformant quelques résultats numériques en des lois usuelles par interpolation ou par régression statistique, à des erreurs d'estimation très faibles (coefficient de corrélation linéaire, $R^2 = 95\%$).

**Partie I : Adaptation de la maintenance industrielle,
de la production et du contrôle des paramètres
machines au paradigme holonique**

Autonomie, aspect multicritère et multiobjectif

Chapitre 1 : Place de l'Intelligence Artificielle dans la Gestion Industrielle

1.1. Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons nous intéresser, dans un premier lieu, aux aspects relatif, absolu et incomplet de l'intelligence artificielle. Dans un deuxième lieu, nous allons décrire quelques notions épistémologiques nécessaires à la création de l'intelligence.

Par la suite, nous présenterons notre propre analyse des fondements du paradigme holonique. L'aspect philosophique de la problématique va être traité. Enfin, nous allons discuter les aspects les plus révolutionnaires de cette approche, relativement à la nouvelle conception des objets et du monde formulée par le Dr. Koestler (Koestler, 1969).

1.2. Intelligence artificielle, continuité, absolu et incomplétude

1.2.1. Le sens du continu et lien avec l'intelligence

Dans son roman « La formule de Dieu », Dos Santos présente certaines idées et théories qui ont marqué l'histoire moderne, en science et philosophie.

Au deuxième chapitre du roman, un mathématicien au nom de « Manuel Rohonha » entreprend un long dialogue avec son fils, expert en anthropologie, sur l'intelligence, au sens global ; intelligence des êtres naturels (créés par la nature, sans intervention humaine) et intelligence artificielle, relativement aux êtres artificiels, machines et calculateurs, créés par les humains (Dos Santos, 2012).

Dans cet échange entre les deux scientifiques, le mathématicien explique à son fils quelques termes d'ordre épistémologique, sans vraiment présenter des définitions formelles. En voici quelques exemples qui nous intéressent le plus :

- les émotions et la conscience résultent d'un certain niveau d'intelligence ;
- l'intelligence est la capacité de faire des raisonnements complexes ;
- autrement dit, l'intelligence est une forme élevée de complexité, et il n'est pas nécessaire d'atteindre le degré d'intelligence humaine pour qu'il existe une conscience ;
- par conséquent, les émotions et la conscience existent à partir d'un certain degré de complexité ;
- l'idée que les machines puissent avoir une conscience choque le commun des mortels (humains).

Il existe donc autant de notions indispensables au développement de l'intelligence artificielle, mais le prix de leurs développements en termes de modèles ou de langages associés, non encore développés par les humains, reste exorbitant. Dans ce contexte, il serait intéressant de trouver le cheminement ou la structure de la construction des idées générées par les êtres naturellement intelligents. Lalande cite, initialement, que la conscience peut être définie comme étant l'intuition qu'a l'esprit de ses états et de ses actes (reste alors de définir les composantes citées dans cette description !) (Lalande, 1985).

Cependant, à un niveau donné de conscience, il est possible que l'objet intelligent puisse se rendre compte de ses états et d'évoluer, par la suite, vers d'autres états non définis initialement chez cet être (objet physique).

D'autre part, nous pensons que l'intelligence des êtres créés par la nature émane d'une certaine continuité dans l'évolution de leurs caractéristiques, matérielles et immatérielles. Par continuité⁽¹⁾, nous faisons allusion à l'existence de ces caractéristiques à une infinité d'états, avec ou sans existence de bonds entre ces derniers.

D'un point de vue matériel/physique, nous pensons à la continuité de l'espace dans lequel existent ces êtres, la continuité du temps qui gère l'évolution, la maturation et le vieillissement de ces derniers, la décomposition des substances vitales pour l'évolution de ces êtres. La notion de décomposition et de fragmentation est toujours exploitée par les humains (scientifiques ou autre) afin de pouvoir définir des états discrets, dénombrables, qui permettraient la construction de machines, de calculateurs, d'algorithmes, etc. Cela dit, la subdivision que nous citons ici reprend la notion de fractales, où il n'est pas nécessaire de retrouver une limite à la fragmentation qui existe dans certains corps existant dans la nature (contrairement aux objets créés par l'Homme). Aussi, serait-ce une décomposition à états discrets indénombrables, donc définissant l'infini (∞) au sens des nombres entiers naturels.

D'un point de vue mathématique, la même remarque se fait pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, qui sont indénombrables, par construction de l'ensemble des nombres réels, qui vient, à notre avis, du fait de la densité de tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lui-même (voir densité de $\mathbb{R}$ (Monier, 1994)). C'est cet ensemble d'états qui sont en nombre infini, qui, à notre avis, permet d'assurer la continuité dans l'évolution des êtres de la nature. C'est une propriété qui peut être visible par les scientifiques, sans qu'ils puissent proposer un cadre formel fort et non faible, de cette notion. A ajouter à cela que c'est cette continuité des états, au nombre infini, qui assure la connexion⁽²⁾ dans le raisonnement « logique » lors de la création de la valeur, dans l'évolution des propriétés physique et/ou métaphysique.

(1) (2) : voir les définitions de ces notions dans (Lalande, 1985)

Ne pas assurer cette connexion impliquerait systématiquement la non reconnaissance de l'objet de ses états et de ses actes, donc le non développement de l'intuition chez ce dernier.

En ajoutant à cela l'impossibilité que l'humain puisse définir, au sens formel, la notion de continuité (voir paragraphe suivant), donc l'impossibilité d'exploiter les propriétés de cette notion. Il serait assez difficile alors que les humains puissent créer des machines et des calculateurs dotés d'« intuition »⁽¹⁾ ou de « créativité » en comparaison aux êtres créés par la nature.

De ce fait, même si l'Homme a pu concevoir des machines d'un niveau très remarquable, quant à leurs puissances de calcul, ces dernières ne constituent que des entités statiques de traitement de données, dépendant indéfiniment d'un amont, qui les alimente de données, d'algorithmes et de lois d'évolution. A notre avis, l'autonomie apparente dans certaines industries ou secteurs de service de pointe n'est autre que l'application d'algorithmes (très développés bien sûr) d'automatisme et de régulation, dépendant de capteurs du niveau bas, relativement à des architectures spécifiques (Djibril, 2000)(Sekkat et al., 2015).

1.2.2. Incomplétude de Gödel, limitation de la description du continu et étincelle manquante (the ghost in the machine)

D'un point de vue formel, les lois qui permettent la construction des êtres artificiels ont un caractère idéalement déterministe, formulées par l'être humain lui-même qui est doté d'un certain niveau d'intelligence, prenant en compte certaines hypothèses et axiomes sur lesquels se base la conception qu'il adopte. De ce fait, tous les êtres « artificiels » créés par l'Homme, même à la pointe de la technologie, auront une signature de l'« incomplétude » du cadre formel qui a permis leur construction.

L'Homme essaiera indéfiniment de créer l'intelligence artificielle absolue, auto-génératrice, dotée de l'auto-apprentissage issu de l'expérience cumulée (Tembine, 2012), en se basant toujours sur un cadre mathématique, désigné « incomplet » par le mathématicien autrichien Kurt Gödel. Ce système de conception, de modélisation ou d'abstraction mathématique, est donc relatif, strictement lié au contexte et contraint par la suite aux situations traitées par les algorithmes de calcul et lois d'évolution intégrées. Le problème ici est l'existence de situations à traiter et de données qui ne sont pas formalisées par les mathématiques et la physique. C'est le cas de plusieurs notions épistémologiques nécessaires à l'évolution des êtres existants, au moins, dans l'écosystème des humains, telles que les notions de vérité, d'existence, de liens de causalité, etc. (Arzeliès, 1958).

(1) Voir (Lalande, 1985) pour la définition de l'intuition

Aussi, pouvons-nous voir que, malgré les développements technologiques et l'avancée de la physique appliquée, il manque toujours une étincelle qui générerait le « Big Bang » de l'intelligence artificielle auto-génératrice ! C'est cette étincelle qu'a essayé d'exprimer le professeur Arthur Koestler par sa désignation « *the ghost in the machine* ».

Je pense que la modélisation du Dr. Koestler de l'étincelle, n'est pas loin de la réalité, car littéralement le fantôme ou spectre, « *the ghost* », n'est pas mesurable, n'est pas palpable par les outils dont dispose l'être humain, en tant qu'objet existant et défini dans un référentiel autre que celui des fantômes (*ghosts*).

Entre autre, Gödel a critiqué le système mathématique existant, en le désignant d'incomplet, car à la base ce sont des axiomes, adoptés et non démontrés, qui ont permis la construction des êtres mathématiques existant actuellement.

Nous donnons à titre d'exemple de cette incomplétude la définition de base de la convergence d'une suite numérique ou de la continuité d'une fonction en un point « *a* » de son domaine de définition. Je rappelle les deux définitions de base (Monier, 1999) :

- Définition (D1) : La convergence d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à une valeur l est défini par l'expression mathématique (E1) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \quad (|u_n - l| < \varepsilon) \quad (E1)$$

- Définition (D2) : La continuité d'une fonction f en un point « *a* » est défini par l'expression mathématique (E2) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \quad (|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \eta) \quad (E2)$$

où l est la valeur de la fonction f au point " a ", et est notée $f(a)$

X étant un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de X vers $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

Les deux expressions mathématiques (E1) et (E2), peuvent être perçues comme la projection de deux vérités, absolues, respectivement décrites par « convergence de la suite U_n » et « continuité de la fonction f au point a », sur l'espace des expressions mathématiques formulé par les humains ; donc relatif et incomplet d'une manière générale.

L'incomplétude ici, vient, à notre sens, du fait de l'impossibilité de la description du parcours ou de la circulation de la fonction f en toute valeur x de son espace de définition sans faire de rebonds, en démarrant bien sur à partir d'une position x_0 donnée. Donc mathématiquement, est-il possible de décrire la convergence de f (continuité de f) en toute valeur du domaine de définition ? Le symbole « $\forall$ » (pour tout) vient pour débloquer la situation, mais le problème réside encore dans le fait qu'il serait difficile que la variable x converge vers toutes les positions « a », du fait de la positivité stricte du « ε » ; il y aurait toujours un certain écart

entre un x et le a , et encore entre le $f(x)$ et la valeur l (définissant la valeur de la fonction f au point a) !

En conséquence et pour débloquer davantage, si l'on essaie de réduire la valeur de ε jusqu'à la valeur nulle, nous verrons ainsi la contradiction de la négativité de la valeur absolu $|\cdot|$.

Donc comme solution « axiomatique », nous admettons ces deux définitions, et nous travaillons avec cette définition pour la construction de la plupart des êtres mathématiques relatifs à l'analyse des fonctions. On admet donc l'existence de cet « ε » très petit, proche du zéro sans jamais l'égaliser !

Nous dirons alors que la continuité, au sens mathématique que l'on connaisse, n'est pas définie par une expression forte. Les expressions (E1) ou (E2) peuvent être perçues comme une modélisation « faible », relativement à l'« absolu lexical » qu'elles expriment (D1 et D2).

Par analogie, arriver ou converger vers l'intelligence absolue, nécessite la définition du « ε » presque nulle qui ne s'annule jamais, et dont la recherche permet de comprimer, à chaque étape, la distance « $|\varepsilon - 0|$ ». Donc nous pouvons voir ici qu'en étant similaire à la géométrie d'Euclide, l'analyse en mathématique correspond à un système axiomatique qui admet des vérités absolues notées par des expressions faibles, car non démontrables par les outils dont dispose l'humain, au moins jusqu'à présent.

Par ce constat, nous revenons au théorème de l'incomplétude de Gödel (Delahaye, 2009) qui permettra de ré-aiguiller, à notre sens, la quête vers l'intelligence absolue, auto-génératrice et peut être imaginaire, à une quête d'une intelligence artificielle, à chaque étape incomplète, mais plus réaliste.

1.2.3. Intelligence, épistémologie et étincelle manquante (la conscience)

A l'incomplétude du système axiomatique mathématique par lequel la création de valeur (intelligence, machines, etc.) peut avoir lieu, nous ajoutons une contrainte additionnelle : l'impossibilité de l'écriture d'un certain vocabulaire épistémologique complémentaire au déterminisme rigoureux (Arzeliès, 1958). S'il y a lieu de désigner la conscience, qui existe à partir d'un certain niveau de complexité de l'intelligence, comme étant l'« étincelle manquante », il y aura donc lieu de considérer toutes les composantes intégrées dans celle-ci (conscience). En revanche, il est plutôt difficile de définir la conscience, de la cadrer, de la conceptualiser et de l'encapsuler dans un cadre formel scientifique ou même, plus largement, philosophique.

D'après Lalande, la conscience peut être définie comme Intuition qu'a l'esprit de ses états et de ses actes (Lalande, 1985). Lalande rajoute que cette définition ne peut être qu'approximative, le fait de la conscience étant une des données fondamentales de la pensée, qu'on ne peut résoudre en éléments plus simples.

Nous présentons une brève description de la conscience :

« La conscience ne peut être définie ; nous pouvons bien nous-mêmes savoir ce qu'est la conscience, mais nous ne pouvons pas, sans confusion, communiquer aux autres une définition de ce que nous saisissons clairement nous-mêmes. La raison est simple : la conscience est à la racine de toutes les connaissances. » (Lalande, 1985)

Dès lors, il est impératif de considérer la composante épistémologique, dans notre quête de la recherche d'une formalisation du savoir à intégrer dans les nouveaux êtres intelligents que l'Homme espère créer. Cette composante définit donc un autre langage, autre que celui programmable actuellement. Ce langage est rattaché strictement à un contexte donné et définit en conséquence une logique (Bitbol, 1999) de raisonnement spécifique.

Le vocabulaire épistémologique dont nous faisons allusion peut être résumé en des termes tels que : vérité (vrai, exact, faux, etc.), existence (réalité, matière, annihilation, création ou matérialisation, subjectivité, objectivité, etc.), causalité, etc. Ici les auteurs des traités de la physique (modélisation, conceptualisation, ...) sont pratiquement muets (Arzeliès, 1958).

Arzeliès rajoute que l'étude du vocabulaire épistémologique est donc actuellement très importante pour le physicien, et doit faire partie de sa formation technique.

Nous ajoutons donc qu'il est nécessaire à notre ère de découvrir l'intérêt de l'ouverture aux domaines non techniques tels que la littérature, la philosophie, l'épistémologie,... sans pour autant tomber dans les discours fortement vocabularistes où il serait difficile d'en ressortir. L'ouverture à ces domaines permettrait de générer de nouvelles approches et paradigmes, qui pourraient réellement révolutionner notre vision du vivant ; c'est le cas du paradigme holonique.

1.3. L'approche holonique : objets réels ou métaphysiques ?

Les textes fondamentaux de ce paradigme rapportés ou repris dans des livres références (Koestler, 1969)(Mella, 2009), dans les rapports de thèses (Pujo, 2009)(Blanc, 2006) ou dans les articles scientifiques (Christensen, 1994)(Van Brussel et al., 1998)(Singgih, 2014)(Mella, 2007), nous informent que la formulation du paradigme holonique a été proposée,

philosophiquement, la première fois par le psychologue et philosophe Hongrois Arthur Koestler dans son ouvrage « The Ghost in the Machine » (Koestler, 1969).

En formulant les différentes définitions rapportées dans les références citées au paragraphe précédent, nous pourrions dire que le Pr. Koestler propose une nouvelle vision (ontologie) des objets comme étant des holons, où le holon correspond à une partie, à identité unique et identifiable d'un système et qui pourrait aussi être partitionnée en d'autres sous-groupes, holons de niveau plus bas.

A part leur partie identifiable physiquement, les holons sont dotés d'un « dual » immatériel qui permet la communication entre holons, le stockage de l'information, son traitement et la prise de décision au niveau de ce holon ou au sein de la holarchie. La holarchie est le groupement de holons, munie de lois d'évolution internes et de règles permettant la communication et l'échange de données par rapport aux holarchies extérieures.

Maintenant, nous pouvons introduire l'origine du mot « Holon », qui correspond tout à fait à la description textuelle présentée précédemment. Le mot holon provient du terme grec « Holos » qui définit le « Tout ». Le suffixe « on » définit l'unité élémentaire comme utilisée pour des termes tels qu'électron, proton, etc. (Lalande, 1985)(Robert, 1978).

De plus, une remarque très importante relativement à la construction des holons réside dans le fait que les adeptes d'un tel paradigme proposent une modélisation générale du monde. Le modèle proposé est générique, quant à la construction de leurs objets : « tout est composé de holons, et ce tout est lui-même constituant d'un autre holon de niveau supérieur » (Wilber, 1995)(Mella, 2007).

A partir de cette description, nous débouchons sur deux problématiques ou axes majeurs : d'une part, la construction physique ou matérielle de ces nouveaux modèles (holons) et d'autre part la structuration de l'immatériel (informations, communication, etc.).

1.3.1. Construction physique des objets, unification des contextes et nécessité des métalangages

Le premier axe traitant de la construction physique des holons, formulé par le Pr. Koestler, nous a fait penser immédiatement à la définition des objets d'un point de vue ontologique. C'est-à-dire comment pourrait-on modéliser ou conceptualiser l'objet ou la « chose » ?

En traitant la bibliographie qui s'intéresse à l'approche holonique, citée auparavant, nous avons trouvé que les auteurs ne font référence, initialement, qu'au Pr. Koestler et à son ouvrage de référence « The Ghost in the Machine ». Aucune référence antécédente n'est citée.

Effectivement, le Pr. Koestler n'est pas le premier à adopter la fragmentation matérielle de l'objet ou de la chose. Cela fait de plus de vingt trois siècles que les adeptes de l'école de l'atomisme grecque, ont été parmi les premiers à proposer cette théorie (Lalande, 1985)(Einstein et Infeld, 1983), sous un aspect purement substantialiste et conventionnel, sans prendre en considération la causalité des phénomènes observés. Cette école était représentée principalement par Démocrite, Epicure et Lucrèce qui considèrent l'univers comme formé d'atomes associés en combinaisons fortuites (matérialisme mécaniste) (Robert, 1978).

La version contemporaine de l'atomisme voit le jour, sous un aspect plus scientifique avec la théorie corpusculaire de Boyle et Dalton (Lalande, 1985), physiciens et chimistes du 17^{ème} et 18^{ème} siècle respectivement, relevant ainsi l'aspect suspect que présentent mythes et ontologies (Gosdorf, 1984) relativement à la vision mécaniste, en comparaison avec le raisonnement philosophique et scientifique.

En consultant (Bitbol, 1999) au chapitre 4, au paragraphe 4-1 (La « Chose » et sa constitution), l'auteur rapporte les interprétations de Heidegger de la chose ou de l'objet (Heidegger, 1949). Nous citons, ci-dessous, un extrait de son développement :

« La chose est d'abord un noyau invariant auquel des qualités parfois variables sont jointes ; elle est le support substantiel d'un ensemble de déterminations dont certaines lui sont essentielles et d'autres accidentelles. La chose est ensuite une matière informée, une puissance actualisée par une forme. La chose est enfin un faisceau de percepts liés ensemble ; des percepts qu'on appelle familièrement les aspects de la chose, parce qu'on suppose l'œuvre de liaison toujours-déjà achevée. »

Bitbol rajoute que ce sont donc trois interprétations de la chose que l'on peut détecter, *une interprétation substantialiste, hylémorphique, et phénoméniste* (Bitbol, 1999). Nous pouvons voir que cette description est clairement progressive, dans le sens où Heidegger commence à admettre l'existence de « la chose » d'un point de vue substantialiste pure, il la dote d'information pour l'identifier (identité de cette chose), et après il la lie, à notre sens, à la causalité (phénomène). Contrairement à la description des atomistes grecs, qui n'expliquent l'évolution des objets que par des faits existants, c'est-à-dire des combinaisons fortuites et mécanistes.

En conséquence, nous pensons que le Pr. Koestler, père fondateur du paradigme holonique serait entre autre influencé par la pensée de la renaissance et la modernité, qui est à la base de la pensée contemporaine. La modernité dans son approche unitaire essaie de concilier entre le savoir ancien et nouveau (aspect duel de la modernité) (El Jai, 1995). L'approche unitaire

considère donc que la modernité n'est pas liée au temps. C'est un processus itératif de recherche d'évolution et de nouveaux paradigmes associatifs du savoir contemporain, liant l'état passé à l'état actuel et à l'état futur.

Pr. Koestler serait aussi influencé par les avancées de la pensée en physique théorique et expérimentale de ses contemporains, où deux principales écoles étaient et sont toujours en concurrence :

- l'ancienne école relative à l'unification du cadre scientifique, nous en citons quelques philosophes anciens⁽¹⁾ tels Ibn Araby (12^{ème} siècle) et Friedrich Hegel (18^{ème} et 19^{ème} siècles), et contemporains tel Albert Einstein,
- et la nouvelle école (mécanique quantique) relativement à Bohr, Schrödinger, etc.

Chacune de ces deux écoles essaie de défendre son cadre formel, rigoureux, mais relativement incomplet (au sens de Gödel) et donc toujours sujets aux critiques des scientifiques et philosophes.

Nous pouvons ainsi voir, implicitement, dans l'approche de Koestler une sorte d'unification des deux pensées :

- d'un côté, un *même* tout est composé de holons, groupés sous forme de holarchies, donc au sein d'un même contexte. Nous voyons alors ici l'aspect « contextuel » des holons formant une même holarchie. Cet état définit une isoarchie (Pujo, 2009) ou, plus généralement, une hétérarchie (Lalande, 1985)(Doru & Pascal, 2010).
- D'un autre côté, rien ne spécifie dans l'approche de Koestler, que les holarchies soient du même type, donc la « non-localité » qui exprime la « décontextualisation », existe aussi, à un niveau plus élevé de la hiérarchie. Chaque contexte ou holarchie dispose de son propre langage, sa propre logique et ses propres lois d'évolution. Mais une fois ces holarchies constituant un tout, il existera nécessairement un métalangage associant toutes ces holarchies. La nécessité d'un métalangage a été bien explicitée (Bitbol, 1999), surtout en lien avec les avancées de la physique théorique et expérimentale.

Les holons sont donc porteurs d'une double identité :

- Contextualisation et langage unifié au niveau d'une même holarchie (conjonction) ;
- Décontextualisation et métalangage unissant les contextes séparément (disjonction des contextes). Le métalangage n'a pour objectif que la liaison entre les langages, liés chacun à un contexte donné. Par suite, ce métalangage ne peut, en aucun cas, faire objet d'un outil de communication interne au sein d'une même holarchie.

(1) Youssef Sami Youssef, « L'humanisme chez Ibn Araby », article en arabe, http://maaber-new.com/ibn_arabi/ibnarabi_3.htm, consultée le 22/04/2016

Nous voyons donc ici une première nouveauté introduite par la pensée du Pr. Koestler, sans qu'il y fasse allusion : l'unification des aspects conflictuels ou hétérogènes qui sont la « contextualisation » et la « décontextualisation », mais au « sens de la superposition » ou de complémentarité et non pas au sens de la fusion relative à la logique booléenne.

La deuxième nouveauté, citée dans plusieurs références, réside dans la généricité de son approche, où tout est composé de holons, et ce tout est lui-même constituant d'autre holon de niveau supérieur.

1.3.2. Construction de l'information au sein des holons

Outre les nouveautés présentées au niveau de l'aspect physique des objets, par l'approche holonique, citées aux paragraphes précédents, le Pr. Koestler présente sa perception du spectre (*ghost*) qu'est l'information, sa structuration au sein des holons et la communication des holarchies au sein de leurs écosystèmes (au pluriel s'il en existe plusieurs).

Nous pensons que cette perception a relation avec les interprétations de (Heidegger, 1949) où il interprète la « chose » comme étant une *substance* (approche substantialiste), *informée* (approche hylémorphique), *évoluant par causalité* (approche phénoméniste). La partie informative d'un holon (Pujo, 2009), peut donc être structurée et modélisée à partir des interprétations de (Heidegger, 1949). Nous avons pu voir aussi dans l'approche de Koestler une sorte d'encapsulation des holons, à quelque niveau soit-il. Cette entité est dotée, en interne, de règles de gestion et de lois d'évolution. La communication à l'extérieur de la holarchie est réalisée par des entités spécialisées, soit disant par des holons de communication. Nous pouvons affirmer qu'un holon peut prendre plusieurs formes et peut remplir plusieurs fonctions.

Une autre point aussi très intéressant réside dans le fait que (Koestler, 1969) propose une autre définition aux holons. Il perçoit cet esprit « Ghost » ou le holon comme étant la relation elle-même qui lie les objets (holons physique). Cela interpelle l'essai de Kant à expliciter la notion de phénomène, où il propose un modèle à cette notion comme étant elle-même un objet (Lalande, 1985). Autrement dit, Kant fait correspondre les objets physiques, comme étant des objets et les phénomènes régissant leur évolution comme étant aussi des objets.

A notre sens, Kant essaie ici de fragmenter la notion d'objet (aspect physique et informationnel), tout en unifiant les outils de description de cet objet, devenu universel (matériel et immatériel), pour en proposer une définition formelle. Il ne ferait donc plus distinction entre objet physique et objet d'ordre immatériel. C'est presque une sorte de

similitude dans la fragmentation du matériel et de l'immatériel effectué par Koestler au niveau des holons, dans sa définition des relations entres holons.

1.3.3. Construction du nouveau paradigme et développements antérieurs : Programmation Orientée Objet (POO), MultiAgent Systems (MAS) et Holonc Manufacturing Systems (HMS)

Nous rapportons à ce paragraphe un extrait de (Bitbol, 1999) qui exprime la signification de la construction ou du changement de paradigmes lorsque cela s'avère nécessaire, relativement aux explications de (Kuhn, 1972) :

« selon T. Kuhn, changer de paradigme scientifique, c'est changer de monde ; et changer de monde, dans l'acceptation la plus ambitieuse de cette expression, ce n'est pas seulement modifier l'emplacement, le rapport mutuel, et le cadre légal des objets qui le peuplent. C'est aussi et surtout refondre les objets eux-mêmes ; c'est aller jusqu'à altérer le découpage de ce qui arrive en une multiplicité d'entités stables, porteuses de détermination. C'est en somme changer d'ontologie. »

A partir de cette description plus ou moins grossière et de nos discussions précédentes (§ 1.1.4.1 et § 1.1.4.2), nous dirons que le paradigme holonique introduit une nouvelle ontologie, quant à la description des êtres, « holons », constituant un nouvel écosystème, généré par ces derniers et par leurs évolutions au sein de leurs holarchies. Cers dernières constituent en conséquence un niveau hiérarchique plus élevé de cet écosystème holonique.

La description de ces holons, naturels ou artificiels soient-ils, étant dotés d'attributs tels que la généricité, l'agrégation et la fragmentation, l'ensemble et la portion, le statisme et le dynamisme, l'intelligence et la complexité, l'encapsulation et l'ouverture, etc., a contribué d'une façon ou d'une autre aux développements antérieurs de nouvelles approches de modélisation ; la modélisation orientée objet et les systèmes multiagents en sont les exemples les plus concrets.

Cela dit, d'un point de vue technique, pour son adoption et adaptation à un domaine donné (surtout aux domaines techniques), tout paradigme nécessitera la construction d'un langage et logique adaptés aux nouveaux êtres nouvellement conçus par ce paradigme. Ces nouveaux êtres, seront construits, alimentés et vont évoluer dans ce nouvel écosystème relativement aux règles de gestion et lois d'évolution dont sera doté leur environnement. C'est l'objectif même de la définition de nouveaux systèmes de production HMS, *Holonc Manufacturing Systems*,

désignés ainsi à partir du mois de février 1992, date de lancement de projets de recherche de niveau intercontinental relatifs à la faisabilité des systèmes de production du 21^{ème} siècle.

Des consortiums de grande échelle, entre gouvernements, industriels, universitaires issus des Etats Unis d'Amérique, le Japon, l'Union Européenne, l'Australie et le Canada ont été créés à partir de Mars 1994 dans le seul but est de développer de nouveaux systèmes de production, basés sur le paradigme holonique (Christensen, 1994).

Ces développements ont abouti à la formalisation et donc à la création de nouveaux concepts, tel que les systèmes HMS inclus dans un contexte plus général désigné par les systèmes IMS, l'entreprise Agile (flexible), etc. C'est à partir de là que le *International Electrotechnical Comission* (IEC) et le *International Standard Organization* (ISO) sont entrées en ligne en proposant la formalisation et l'unification du langage de conception et de pilotage utilisé dans ce contexte (Christensen, 1994), pour une intégration assez fiable et maintenable en industrie. Nous voyons ainsi naitre les systèmes HMS (*Holonic Manufacturing Systems*), systèmes de production du 21^{ème} siècle.

1.4. Aspect technique de l'approche holonique : nécessité et architectures associés

La discussion précédente nous a permis d'affirmer que l'approche holonique peut être perçue dans sa globalité comme un paradigme indépendant, du fait qu'elle est fondée sur une profonde compréhension des objets physiques, matériels ou immatériels. Donc, en se basant sur les réflexions du Pr. Koestler, père fondateur de cette école, nous pouvons voir qu'une nouvelle perception des objets est créée, induisant en conséquence (plus techniquement) la naissance d'une nouvelle approche de conception et d'une nouvelle ontologie.

Nous rajoutons que les réflexions du Dr. Koestler sont d'autant plus importants qu'elles ont permis de créer un changement radical dans la perception du monde dans lequel nous vivons ou que nous concevons. C'est la raison pour laquelle son approche a pu être facilement appliquée à différents domaines techniques (systèmes manufacturiers (Christensen, 1994)(Singgih, 2014)(Doru & Pascal, 2010), négociations en logistiques (Adam et al., 2001)(Ounnar et Pujo, 2009)(Ounnar et al., 2009), robotique (Mella, 2009)(Schnell et al., 1999)(Candea et al., 2001), en biologie (Mella, 2009)(Mella, 2007), etc.).

Nous présentons aux paragraphes suivants quelques aspects techniques lié à la modélisation holonique.

1.4.1. Besoin en « Holons » et contraintes fonctionnelles des systèmes de production

L'idée développée dans ce manuscrit est la présentation de l'intérêt de l'introduction d'entités dynamiques, intelligentes, autonomes et collaboratrices, appelées holons. Ces derniers pourraient réaliser des analyses spécifiques relatifs à la fonction maintenance, production, qualité... en fonction du besoin de l'installation, ou si un changement dans le comportement du système de production ou dans la qualité des produits finis est noté. Ces entités peuvent être les machines elles-mêmes ou des agents/holons qui leur correspondent (entités informatiques par exemple).

Relativement au contexte industriel, nous rappelons les travaux de (Christensen, 1994) qui présentent le cadre général de cette approche, définissant ainsi les systèmes IMS, et spécialement les systèmes HMS qui en font partie. Il présente la idées maîtresses suivies, entre avril 1992 et mars 1994, afin de définir un cadre spécifique de développement des systèmes HMS au sein de diverses industries. Nous avons cité au § 1.3.3 la création, en 1994, de consortiums intercontinentaux composés de gouvernements, universitaires et industriels, ayant pour but de préparer le terrain aux nouveaux systèmes de production du 21^{ème} siècle. Ces consortiums ont aussi pour but de préparer les concepteurs à l'intégration d'une révolution conceptuelle des systèmes de production existant. (Christensen, 1994) reprend une série de contraintes techniques et de points clés architecturaux pour la mise en œuvre de ces nouveaux systèmes, dans le cadre le plus réaliste que possible.

Nous citons certaines de ces contraintes (tableau 1 de (Christensen, 1994)) :

- La prise en compte des perturbations (micro-arrêts, ralentissement de cadence, manque de pièces de rechange (PdR), etc.) ;
- L'intégration de contraintes avec les humains (interfaces H/M, assistance intelligente aux opérateurs...) ;
- La disponibilité des machines ;
- La flexibilité des ressources de production ;
- La robustesse (maîtrise de la qualité des produits)

A partir de ces directives, nous pouvons positionner nos contributions dans le domaine comme suit :

- Disponibilité des machines et prise en compte des perturbations : les articles (El Jai et al., 2013) et (El Jai et al., 2014) entrent dans le cadre de la maîtrise de la disponibilité des machines, surtout en terme de modélisation des interactions entre les services de la maintenance, l'environnement des machines, et les contraintes de la production.

- Robustesse et prise en compte des perturbations : l'article (El Jai et al., 2015) permet de schématiser l'interdépendance entre les résultats du contrôle qualité et la maîtrise statistique des processus. La modélisation de ces processus et de leurs interactions par l'approche holonique a permis la formalisation de ces dépendances, dans le but d'une éventuelle automatisation et pour une plus grande réactivité dans le paramétrage des machines (recherche de la robustesse).

Néanmoins, nos travaux doivent encore être développés davantage en vue d'une implémentation informatique fiable. Pour ce faire, il est nécessaire de passer de nos modèles, réalisés par des diagrammes de classes et de séquences d'UML 2.0, à des diagrammes objets, à d'autres de déploiement, voire à des diagrammes d'Etats (pour les objets nécessitant une analyse par état).

Christensen présente aussi quelques propositions d'architecture, à une échelle grossière, dans le but de migrer des organisations classiques de production vers les systèmes HMS révolutionnaires (Christensen, 1994). Dans le même contexte, (Ulieru et al., 2001) introduit des solutions plus pratiques dans ce sens, où elle présente les étapes de passage des structures ou architectures classiques, vers des architectures holoniques, basées sur les systèmes Multiagents (*MAS : MultiAgent Systems*). (Ulieru et al., 2001) traite encore un problème plus global qui est celui de la collaboration entre entreprises (Benchmarking) dans un écosystème intelligent, où l'information est disponible suivant une certaine architecture. Il est à noter que l'introduction d'une approche générique, qui traite en même temps les trois aspects de gestion, est fort intéressante :

- Le stratégique : *the Global Inter-Entreprise Collaborative Level*
- L'organisationnel : *Intra-Entreprise Level*
- L'opérationnel : *Machine (Physical Agent) Level*

Plus récemment, Pujo présente en détail l'approche holonique en différenciant (Pujo, 2009 et 2012) :

- les acteurs élémentaires/principaux : appelés holons de base,
- la modélisation de l'interaction entre holons : par le biais d'appels d'offres et de messages standardisés par *the International Electrotechnical Commission* (IEC) (Christensen, 1994) ou la *Foundation for Intelligent Physical Agents* (FIPA)⁽¹⁾ (Pujo, 2009 et 2012)

- plusieurs exemples de mise en œuvre et résultats appliqués aux domaines de la productique et de la logistique, etc.

(Pujo, 2009 et 2012) présentent aussi une comparaison détaillée entre les systèmes multiagents et les systèmes holoniques.

En résumé, les points forts apportés par la modélisation holonique se résument dans l'association de l'aspect dynamique à l'apprentissage et à l'intelligence artificielle, où les holons devraient évoluer constamment dans leur écosystème (holarchie).

1.4.2. Organisation des holons : notion de holarchie et holons de base

Dans ce domaine, la holarchie correspond à un groupement fonctionnel ou physique des holons. Ce groupement devrait ainsi respecter une certaine organisation physique et informationnelle, pour assurer les principes d'intégrité des données, de non-redondance, la cohérence fonctionnelle, ainsi que les autres contraintes issues du domaine des bases de données relationnelles (Brouard et Soutou, 2005)(Brouard, 2001).

D'autres architectures de l'information existent tel que les web Service⁽¹⁾, JAXB (*Java Architecture XML Binding*)⁽¹⁾, JEE (*Java Enterprise Edition*)⁽²⁾, etc. Le choix d'une architecture par rapport à d'autre peut se faire conformément aux natures des entreprises, aux types de données échangées et traitées, etc. Classiquement, les architectures utilisées sont du type centralisées, hiérarchiques, hétérarchiques et hybrides (Daihani et al., 1993). Le choix d'une structure quelconque repose bien avant sur le recensement et la nature des éléments qui constitueront les nœuds de celle-ci pouvant être considérés eux-mêmes des holons.

D'un point de vue systémique, ces architectures existent selon la décomposition fonctionnelle du système étudié. Par exemple, (Pujo, 2009)(Pujo et Kieffer, 2002) rapportent le modèle canonique d'un système complexe repris de (Lemoigne, 1977) et d'une entité-type, élémentaire ou complexe, d'un système (figures 1.1-a) et b)).

Dès lors, plusieurs autres architectures apparaissent (Djibril, 2000)(Sekkat et al., 2015), et sont dotées de protocoles de communication et de technologies spécifiques à chaque situation industrielle ou d'autres circonstances (secteur de services, coût de déploiement/maintenance, coût du matériel dédié (Hardware), sécurité, etc.).

Nous n'avons pas voulu rapporter plus de bibliographie relativement aux systèmes de pilotage des unités de production, car nos travaux sont complémentaires à ces systèmes (*HMS*) ; nous nous intéressons plus ici à la maintenance, au contrôle qualité et à la maîtrise des paramètres des machines de production. En effet, nous avons vu nécessaire de traiter plus ces métiers de la gestion industrielle car nous avons remarqué que les travaux de modélisation par l'approche

(1) <https://docs.oracle.com/> (consulté le 27/04/2016)

(2) <http://www.oracle.com/technetwork/java/javaee/overview/index.html> (consulté le 27/04/2016)

holonique qui s'y rattachent sont relativement rares, en comparaison au pilotage « nominal » des systèmes manufacturiers.

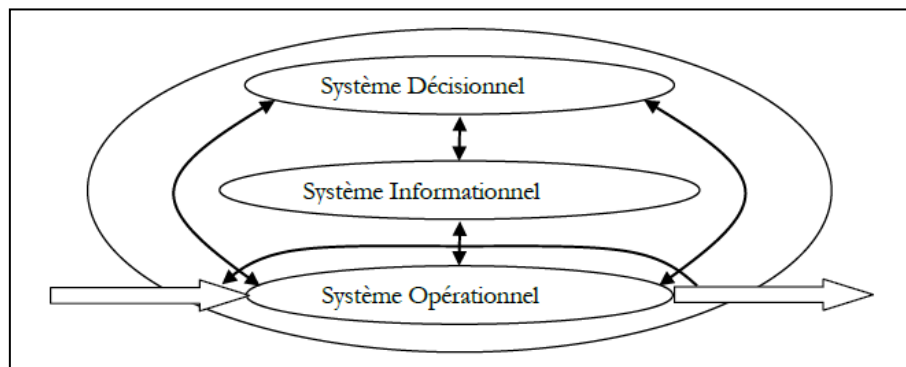


Figure 1.1-a : Modèle Canonique OID (Opérationnel, Informationnel, Décisionnel) d'un système complexe repris de (Lemoigne, 1977)

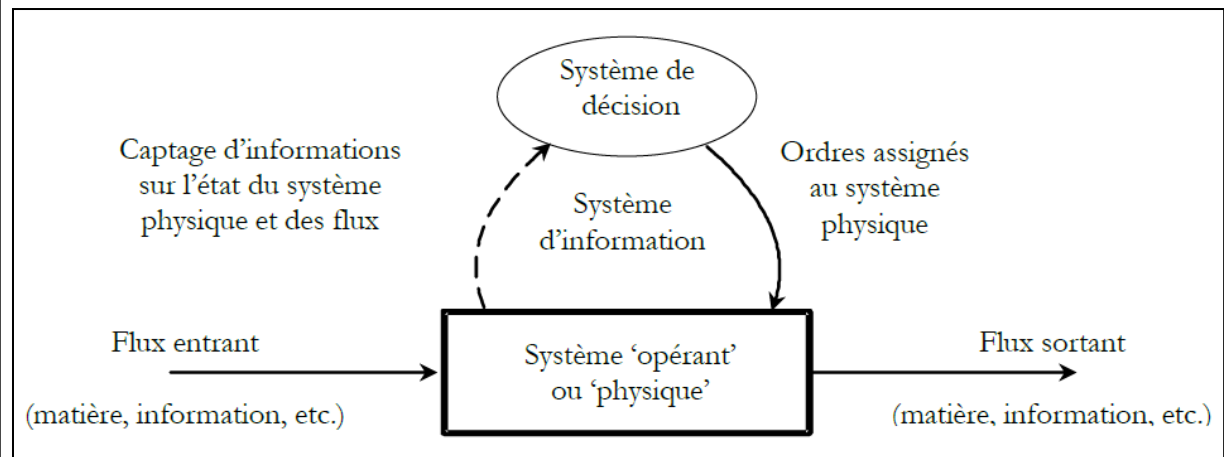


Figure 1.1-b : Entité-type selon la théorie des systèmes

Figure 1.1 : modèles primitifs d'un système, selon la théorie de la systémique (Pujo, 2009)(Pujo et Kieffer, 2002)

Une autre raison vient du fait que ces domaines font partie intégrante des directives des consortiums (IMS) (Christensen, 1994), sans que les chercheurs, du moins jusqu'à présent, ne s'y intéressent directement. Toutefois, certains travaux commencent à apparaître dans la communauté scientifique. Nous citons par exemple l'article (Doumani et al., 2016) qui s'intéresse à la Détection des micro-défauts process, situés à l'intérieur des limites de surveillance d'une carte de contrôle.

(De La Canal et Ferraris, 2013) propose l'intégration de nouveaux types de holons pour remédier à certaines contraintes en analyse des risques. Cependant, les mêmes auteurs traitent d'une manière superficielle l'aspect architectural, en proposant de nouveaux types de holons (loin de la structure PROSA) et ne détaille nullement les différents aspects dont nous avons parlés (généricité, dynamisme, intelligence, apprentissage...).

Relativement au détail présenté par (Pujo, 2009)(Pujo et al., 2009)(Pujo, 2012)(Doru & Pascal, 2010)(Singgih, 2014), nous avons choisi d'adopter l'architecture PROSA qui regroupe les holons de base, qui constituent les entités et les acteurs principaux sujets aux diverses organisations que nous avons mentionnées ci-haut.

L'architecture PROSA est constituée des holons suivants (Extraits de (Pujo, 2009 et 2012)) :

- **Holons Produits (HP)** : contient le modèle du produit, c'est-à-dire ses caractéristiques physiques, telles qu'elles sont issues de la CAO (conception assistée par ordinateur) ainsi que son processus de fabrication, issu de la phase d'industrialisation (fabrication assistée par ordinateur), c'est-à-dire la connaissance nécessaire pour assurer sa fabrication (description suffisante du processus d'obtention) assurant une qualité suffisante (relations conditionnelles entre les caractéristiques physiques (dimensions, tolérances, états de surface...) et le processus choisi (capabilité, rugosité...) en vue de la validation métrologique.

Le Holon Produit agit en tant que serveur de l'information pour les autres Holons du HMS, mais ne contient pas un modèle d'état du produit : il ne correspond pas à une instance donnée de produit, mais plutôt à une description de référence pour un type donné de produits.

- **Holons Ressources (HR)** : contient une partie physique, à savoir l'équipement de production, et une partie de traitement de l'information qui commande l'équipement et contient des méthodes de gestion de capacité et d'allocation des ressources qui permettent d'en assurer la conduite. Au niveau des données, un Holon Ressource maintient des informations statiques et dynamiques, sur ses possibilités (liste de produits), ses tâches courantes (état et mode de fonctionnement), ses ressources secondaires (outillage...), et un état de ses activités.

Quelques exemples de fonctions assumées par un Holon Ressource sont d'accepter ou de rejeter une tâche, de commander l'exécution du processus, de surveiller le processus...

- **Holons Ordres (HO)** : représente une tâche dans le système de production. Il est responsable de l'exécution du travail assigné dans les temps impartis. Il contrôle le produit physique, le modèle d'état de produit, et gère le traitement de l'information logistique lié au travail. Le Holon Ordre maintient donc les données relatives à l'état du produit physique, l'état d'avancement dans le processus de traitement de la tâche, et des données historiques concernant les tâches.

Il peut donner des instructions du type « suspendre », « commencer », « arrêter ».

- Holons Support (si nécessaire) : PROSA prévoit la possibilité d'utiliser des Holons Staff pour aider les Holons de base dans l'exécution de leurs tâches, pour résoudre des situations de blocage ou rechercher une optimisation. Les Holons Staff n'ont pas de pouvoir de décision, mais peuvent proposer une solution globale pour résoudre un problème en fonction des données qui leur sont transmises par les Holons de base, qui restent responsables de la prise de décision finale.

Remarque 1

Par cette description, nous pensons que sa désignation comme étant une architecture n'est pas rigoureuse. En effet, PROSA propose seulement les éléments de base (holons) permettant de construire une holarchie. C'est au sein de la holarchie qu'on spécifie la structure architecturale et l'organisation des holons.

L'architecture PROSA propose ainsi ces trois stéréotypes (voire quatre, si l'on compte le holon staff) qui devraient décrire tous les objets existant jusqu'à ce jour, au moins au niveau industriel.

Au paragraphe suivant, nous présentons une proposition d'architecture, grossière, constituée des holons de bases (Produit, Ressource et Ordre).

1.4.3. Architecture préliminaire proposée dans nos travaux

Afin de clarifier nos objectifs, nous proposons l'architecture composée de :

- une holarchie, ensemble de machines dites Holons-Ressource (HR) et correspondant à la partie matérielle du Holon notée MRessource. D'un point de vue architectural, une holarchie correspond à un groupement de holons du même niveau indépendamment de la hiérarchie.
- une partie informative du HR, notée IRessource, composée elle-même d'une Entité de Pilotage Ambient (EPA) et d'une base de données, incluant le descriptif des défaillances, leurs nombres, leurs modes, les statistiques correspondantes, etc. (figure 1.2).

Le calcul des performances se fait localement (architecture distribuée, hétérarchie, ou isoarchie). Une base de données globale peut être aussi mise en œuvre pour une éventuelle communication avec d'autres niveaux de la hiérarchie.

Nous présentons par la suite une brève description des rôles assurés par chacune des entités proposées à la figure 1.2.

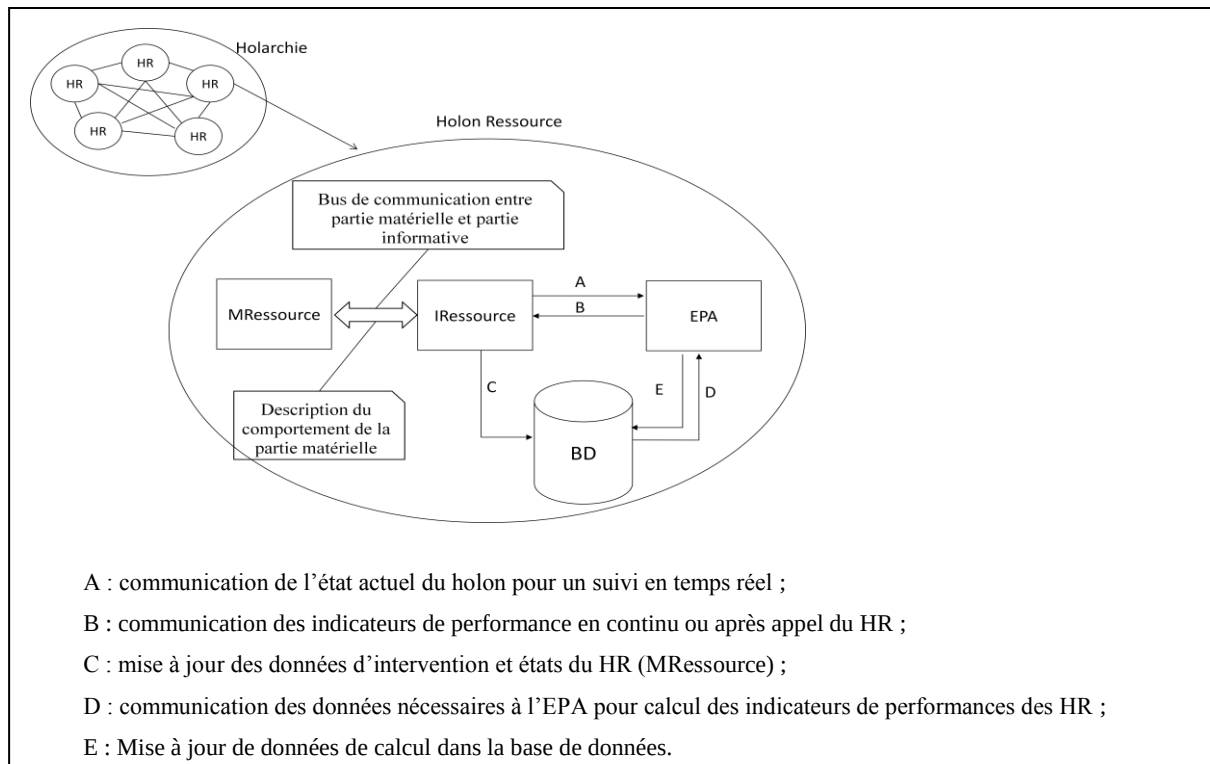


Figure 1.2 : Architecture de communication interne dans un Holon Ressources (El Jai et al., 2013)

1.4.3.1. La Base de données (BD) interne

Elle a comme rôle le stockage et la mise à jour des informations, en continu, issues des holons relativement aux données techniques et à l'état du matériel à un instant ou à une période donnée. Certaines informations stockées dans la BD émanent de l'EPA (Entité de Pilotage Ambiant). Celle-ci présente des services de calcul correspondant à chaque type de holon, à la holarchie elle-même et aux sous-holarchies qui la constituent (héritage et agrégation).

(Adam et al., 2001) considère que la communication dans une organisation holonique se fait par l'échange de messages et non pas via une base de données commune, ce qui donne plus d'autonomie et de temps de réponse au système. Cela se traduit par le fait que chaque HR puisse posséder sa propre BD.

Utilisant donc l'approche distribuée, cette architecture allégera le calcul et l'échange d'informations entre entités et permettra d'exploiter les ressources informatiques intégrées pour une prise de décision rapide, réactive et en temps réel.

1.4.3.2. Entité de Pilotage Ambiant (EPA) :

Constitué d'un système informatique qui vient au soutien des Holons. Elle permet la communication entre holons et détermine les règles de gestion et d'évolution de ces derniers.

Les EPA présentent en outre une description des états dans lesquels pourrait se trouver un holon afin d'effectuer une gestion plus efficace par état, relativement aux données stockées à

la base de données commune ou locale. A chaque HR peut correspondre une EPA ou dans le cas de holon d'un même type, il est possible qu'une seule EPA soutienne tous les holons.

D'un point de vue opérationnel, nous voyons qu'une EPA peut être perçue comme étant un fournisseur de services aux utilisateurs (holons). Sa technique d'implantation peut être faite en fonction de la technologie utilisée et de la complexité du système à piloter. Nous en citons quelques exemples :

- simples requêtes sous un Système de Gestion de Bases de Données Relationnelles (SGBDR) ;
- Architecture client/serveur ;
- Services Web ou Architecture Orientée Service (SOA), XML/AJAX, etc. ;
- etc.

La figure 1.3 présente différents types de services ambiants apportés par une EPA.

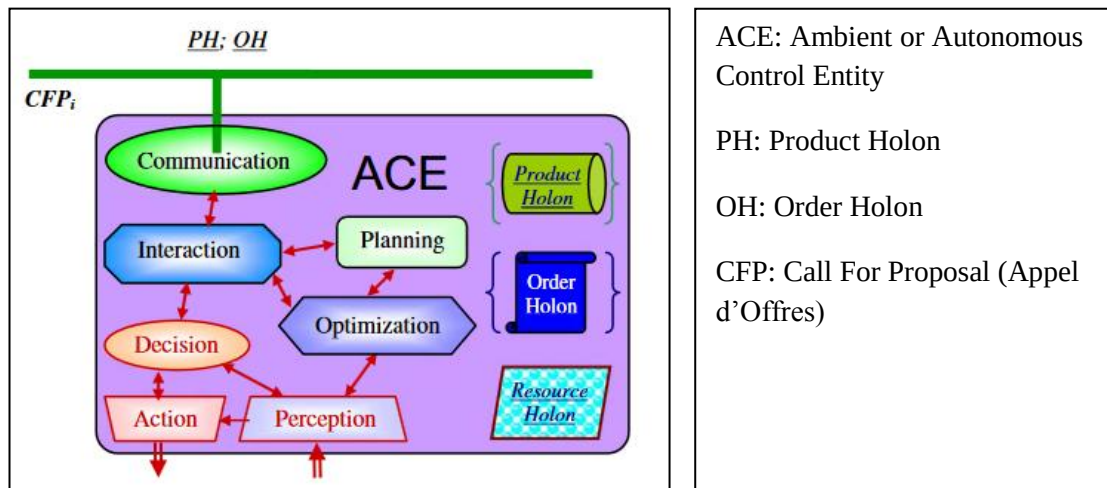


Figure 1.3 : Types de services ambiants fournis à un holon par une EPA (Pujo et al., 2009)

1.4.4. Discussion de l'architecture proposée dans nos travaux : Architecture hybride, notion d'Isoarchie et de Holarchie correspondante

L'approche holonique constitue une vue globale des intervenants d'un système, avec une description plus ou moins détaillée des caractéristiques des holons et de leurs relations et interactions. Cependant, pour une éventuelle analyse ou implantation informatique ou machine, il est judicieux de procéder à une modélisation, ou description du système holonique par un langage conceptuel adapté à une technologie cible, tel que la modélisation Orientée Objet (Christensen, 1994)(Djibril, 2000)(El Jai et al., 2013)(El Jai et al., 2015) ou multi-agents (Jennings et al., 1996)(Ulieru et al., 2001)(Doru & Pascal, 2010). En effet, les solutions basées sur les Systèmes Multiagents sont extrêmement prometteurs, puisqu'ils ont

l'avantage, en raison de leur architecture distribuée, d'offrir le partage des connaissances ainsi qu'un temps de réponse adéquat (Jennings et al., 1996).

En contre partie, l'utilisation d'une architecture centralisée présente plusieurs autres inconvénients, en y ajoutant aussi le temps de transfert et de réponse relativement long. Nous en citons ici quelques uns formulés par (Daihani et al., 1993) :

- L'utilisation d'une structure hiérarchique, au niveau du système de prise de décision, crée un nombre important de boucles (et de requêtes) lors de la transmission d'ordres entre les entités de niveaux supérieurs à ceux de niveaux plus bas. Vis-versa, un grand nombre de demandes/requêtes, partent des entités de niveau hiérarchique inférieur aux entités du niveau supérieur lorsqu'un problème opérationnel surgit.
- Le traitement efficace des données nécessite la duplication de ces données dans les différents modules et logiciels utilisés. En conséquence, le risque possible de générer des erreurs au niveau des fichiers de données est possible.

Dans le même contexte, (Adam et al., 2001) présente la mise en œuvre et l'évolution d'une structure hybride (HOLOMAS : HOLOnic Multi-Agent System). Cette même structure a été déjà proposée par d'autres auteurs, car une architecture fortement décentralisée entraîne plus de problèmes dans la gestion de la cohérence des données traitées.

Remarque 2 : Implantation de l'Architecture hybride

D'un point de vue opérationnel, sur les diagrammes UML que nous développons aux chapitres 2 et 3, l'architecture hybride n'est pas directement visible car il faut combiner la compréhension de ces diagrammes et, même plus, les combiner avec le modèle conceptuel des bases de données, à adopter par la suite, afin de mieux appréhender la nature de l'architecture proposée.

Remarque 3 : Isoarchie par niveau de décision ou par holarchie

Une prise de décision ou une organisation est considérée hiérarchique si les ordres sont fournis du haut vers le bas de l'organisation physique ou informative. Dans notre cas, il est intéressant de noter que la hiérarchisation se fera entre entités d'ordre supérieur vers une holarchie d'ordre inférieur.

Dans ce cas, la hiérarchie ne rentre pas dans la distribution des tâches à allouer à chaque composant de la holarchie. C'est donc une prise de décision locale qui se fera, relativement à des règles de prise de décision précises et selon le champ d'action de chaque entité. Quand la répartition des tâches et la prise de décision sont faites de manière transparente et au même

pied d'égalité (Pujo, 2009), conformément à des indicateurs bien choisis, on dit que la prise de décision est faite en Isoarchie (figure 1.4). Pujo introduit la notion d'Isoarchie afin de ne plus prendre en compte quelques aspects qu'ils soient de la hiérarchisation (Pujo, 2009). Pour ce faire, l'auteur présente le raisonnement intellectuel qu'il a suivi dans le but de proposer un nouveau cadre d'organisation, l'Isoarchie.

Pujo présente son analyse aux diverses contraintes fonctionnelles qui existent quant aux évolutions des holons, constituant les holarchies. L'auteur commence par désigner le concept d'organisation et d'auto-organisation, surtout en liaison avec l'industrie manufacturière. Il fait le lien aussi entre ce dernier et le concept d'émergence, défini par la systémique, relativement aux systèmes intelligents de production, débouchant sur des résultats déterministes.

Ensuite, il passe en relief les différents modes d'exercice de la gouvernance d'un point de vue historique. Il en déduit ceux qui apparaissent les plus proches du concept de pilotage en productique. Ce sont donc les concepts d'hétérarchie, de holarchie et d'apanarchie qui ont été déterminés (Koestler, 1969)(Pujo, 2009)(Doru & Pascal, 2010).

A la fin, Pujo rapporte sa critique de ces trois types d'organisations, relativement à laquelle il introduit la notion d'Isoarchie. Ces critiques sont les suivantes (Pujo, 2009 et 2012):

- Une hétérarchie ne permet pas d'associer facilement aux prises de décision une décomposition hiérarchique structurelle du système,
- Une holarchie laisse subsister éventuellement des mécanismes décisionnels de type hiérarchique,
- Une apanarchie nécessite la participation de toutes les entités à l'élaboration de la solution de pilotage, ce qui est extrêmement pénalisant et surtout inutile.

Donc, l'auteur présente sa propre perception de l'organisation des holarchies, où il énonce d'une manière générale que :

« ...seules les entités concernées par une décision à un niveau donnée puissent contribuer de manière égalitaire à l'élaboration de cette décision, et qu'elles le fassent avec un maximum d'expertise et de connaissances sur leur état.

Nous proposons d'appeler ce mode de gouvernance : isoarchie. »

Dans ces propos, nous avons souligné le terme « **maximum ... de connaissance sur leur état** », ce qui rejoint la notion de « **conscience** » dont nous avons parlé tout au début de ce chapitre.

En conséquence, les travaux que nous présentons seront établis dans un contexte d'isoarchie (voir remarque 3 plus haut).

1.4.5. Outil d'analyse et niveau de prise de décision sur l'organisation d'un système holonique

Dans le cas où l'on décide d'effectuer une analyse donnée spécifique par une autre méthode, qui tienne compte de l'organisation physique des holons ressources (machines de production), de l'organisation/interaction entre organes au niveau d'une seule machine, des priorités de production ou de sécurité, il est parfois **nécessaire** que l'outil d'analyse tienne compte de ces complexités.

Cela dit, la hiérarchie, l'hétérarchie, l'isoarchie, etc., ou l'architecture adoptée en général est très influencée par le niveau de prise de décision et par l'outil d'analyse choisi. En effet, dans le cas de nos travaux, développés aux chapitres 2 et 3 ainsi qu'aux articles correspondant (El Jai et al., 2013 et 2015), il était essentiel avant tout d'adopter une architecture Isoarchique, vu que les outils de « modélisation des risques (AMDEC) » et de modélisation des interactions entre « contrôle qualité et optimisation des processus » se font de manière équitable et transparente au sein de la holarchie. Aucun holon ressource ou produit n'est privilégié ! La figure 1.4 montre l'influence du niveau de décision sur l'organisation des holons :

- une hiérarchisation entre différents niveaux détermine les actions d'ordres ou d'importance à termes plus importants, décrites par des décisions stratégiques, financières ou techniques à moyens termes (fiabilité par exemple).
- une hétérarchie (voire isoarchie) entre composants d'un même niveau définit les holarchies et donne plus de liberté et de flexibilité à choisir la stratégie appropriée à leurs problèmes locaux à court terme (problèmes d'ordonnancement et de qualité par exemple).

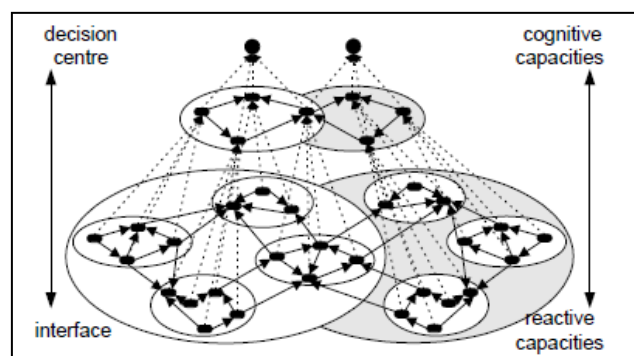


Figure 1.4 : Différentes organisations d'un système holonique (Adam et al., 2001)

La figure 1.5 présente le flux d'information entre la hiérarchie et la holarchie et entre une holarchie et le milieu extérieur en général. Nous en déduisons donc une certaine encapsulation des holarchies, qui correspond au même principe d'encapsulation dans la programmation orientée objet, où l'objet (agent ou holon) n'est visible qu'à partir de méthodes privées ou publiques qui lui permettent de communiquer avec l'extérieur (Roques, 2006). Donc une délimitation du domaine et champ d'action du holon est nécessaire avant de procéder à une proposition d'architecture statique et dynamique (messages échangés ou appels d'offres) des holons (récursivité).

Remarque 4

Chaque nœud de la figure 1.5 est décomposé en holon ou holarchie d'ordre inférieur schématisé par un cercle blanc délimitant le rayon d'action de chaque holarchie.

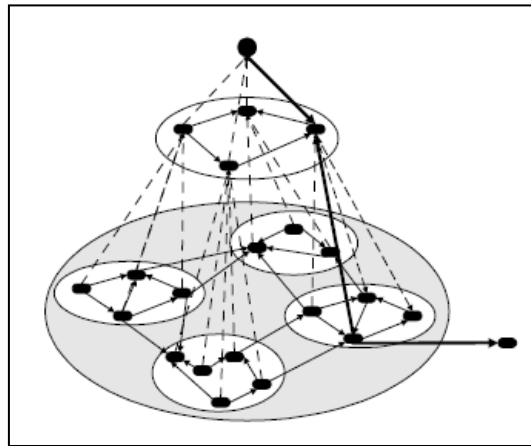


Figure 1.5-a : Message du haut de la hiérarchie vers le milieu extérieur en passant par la distribution des tâches aux holons d'ordre inférieur

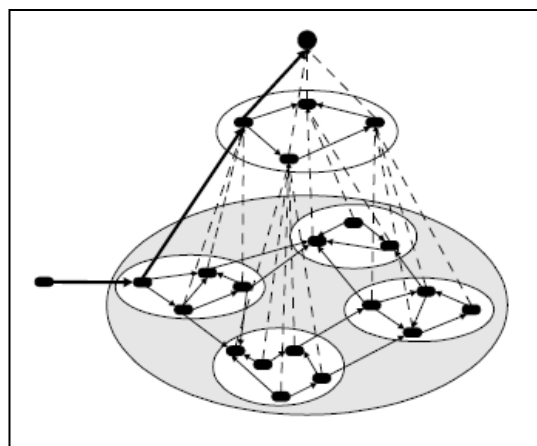


Figure 1.5-b : Message d'une entité extérieure vers le haut de la hiérarchie en passant par la la holarchie d'ordre inférieure

Figure 1.5 : Distribution des tâches au sein d'un même holon et communication avec le milieu extérieur (Adam et al., 2001)

1.5. conclusion du chapitre

Nous rappelons que ce chapitre introductif a été consacré, dans sa première moitié, à la discussion des principes sur lesquels se base l'approche holonique en tant que nouveau paradigme ou nouvelle ontologie proposée par le Dr. Arthur Koestler aux années 1960. Ces principes reposent sur la fragmentation en éléments, d'ordre plus bas, de l'information et de la ressource matériel. Chaque entité étant identifiée d'une identité (encapsulée au sens de l'orienté objet) et dotée d'intelligence et d'autonomie qui lui permet de coexister au sein de son écosystème, selon des règles de décision, de gestion et d'évolution bien définies.

A la deuxième moitié du chapitre, nous avons présenté quelques éléments techniques, les plus essentiels, qui permettent de décrire la mécanique de tout système de production, sur les deux volets physique et informatique. En effet, cette mécanique serait régie en premier lieu par une organisation émanant d'une profonde analyse conceptuelle de ce système. Actuellement PROSA constitue l'une des architectures les plus utilisées dans ce sens. C'est d'ailleurs l'architecture que nous adoptons dans nos analyses des défaillance, de l'optimisation des paramètres machine et du contrôle qualité, détaillées aux chapitres suivants.

Chapitre 2 : Modélisation de l'analyse des défaillances **industrielles par l'approche holonique**

2.1. Introduction

Dans ce second chapitre, nous présentons le détail de la modélisation de l'analyse des défaillances par la méthode AMDEC, décrite au sein d'une approche holonique. Nous nous positionnons, en effet, dans le cadre des systèmes *Holonic Manufacturing Systems* (HMS) qui présentent des exemples concrets du développement des approches de pilotages industriels basées sur l'approche holonique. L'intérêt majeur de l'approche est l'apport de la dynamique, de l'autonomie, de la flexibilité, de l'apprentissage, donc d'une sorte d'intelligence artificielle par laquelle de tels systèmes sont dotés (Mella, 2009).

Comme nous avons cité dans (El Jai et al., 2015), la plupart des développements récents des systèmes liés à la gestion industrielle, basés sur le paradigme holonique, se focalisent surtout sur des aspects liés à la productique, en termes d'autonomie, flexibilité, interactivité, etc. C'est la raison du développement des Systèmes Intelligents de Fabrication, en anglais « *Intelligent Manufacturing Systems* » (IMS). Ces derniers constituent le cadre général qui a réellement initié les travaux de recherche dans ce domaine (Christensen, 1994)(Van Brussel et al., 1998)(Pujo, 2009)).

Toutefois, à chaque entreprise correspondent plusieurs autres fonctions qui agissent en interagissant avec la fonction production. Ainsi, on retrouve la fonction maintenance, le management de la qualité, la gestion des stocks, la logistique, etc. (Javel, 2003). Partant de cette réalité, et prenant en compte l'importante contribution du paradigme holonique, comme base d'un renouveau d'une vision industrielle mieux organisée et bien fondée, il était essentiel à notre sens de contribuer à ce développement et d'essayer de trouver une modélisation holonique, adéquate et homogène avec les fonctions d'entreprise autres que la gestion de la production et des ateliers flexibles.

C'est donc l'objectif principal que nous nous sommes fixé dans ce chapitre. Nous essayerons d'élargir cette philosophie à d'autres fonctions d'entreprise à savoir la maintenance. Ce chapitre traite la modélisation de l'analyse des risques industriels, par la méthode AMDEC où l'on propose un modèle dynamique, par un langage connu et répandu qu'est UML (*Unified Modeling Language*). Cette modélisation permettra le choix et la modification en temps réel

de la politique de maintenance adéquate, par machine, par organes, etc. Cette politique va dépendre du niveau d'analyse fixé par l'entreprise.

2.2. Contexte de l'étude et problématique

2.2.1. Contexte général

L'analyse des risques industriels est une approche qui vise à prévoir la réalisation d'un événement indésirable déstabilisant ainsi le fonctionnement d'une unité donnée dans le futur. Plusieurs démarches tentent de modéliser l'occurrence des défaillances et des dégradations, en trouvant une logique d'analyse des risques, en proposant un cadre spécifique, dans un environnement donné, sous des conditions précises. Ces démarches essaient de formaliser les méthodes appliquées dans le domaine de la sécurité industrielle. Les démarches utilisées peuvent être issues de différentes approches :

- Approches probabilistes : essayant d'expliquer et de justifier les interventions préventives systématiques et conditionnelles, en utilisant des modèles statistiques fréquentiels ou bayésiens (Procaccia, 2009)(El Jai et al., 2013), graphes d'états markoviens, etc.
- Approches processus ou systémiques : permettant des analyses graphiques ou schématiques des dépendances et relations entre entités. Ces relations peuvent être de nature matérielle, organique et fonctionnelle sous un aspect mono-composant (Herrou et Elghorba, 2005)(Zille, 2009), multi-composant (Zille, 2009), etc.
- Approches combinées : comme la démarche de la Maintenance Basée sur la Fiabilité (MBF), les Arbres de défaillances pondérées par le taux de défaillance (Lyonnet, 2000), etc.

Ces méthodes combinées, donnent des résultats intéressants, étant donnés un Retour d'Expériences (REX) assez suffisant et une profonde implication des différents intervenants en entreprise qui doit être aussi profonde que possible. C'est le but même de la Maintenance Productive Totale (TPM) (Bufferne, 2011).

2.2.2. Problématique

Pratiquement, le problème qui se pose, au niveau de plusieurs de ces méthodes, est qu'elles sont mises en œuvre d'une manière statique, c'est-à-dire à un certain moment. Le responsable maintenance, à partir d'un indicateur qualitatif ou quantitatif, technique ou technico-financier (El Aoufir et Bouami, 2005), décide d'activer une analyse du management actuel de la maintenance et de l'état des installations. Dans ce cas, l'analyse ne tient pas compte de la

variation, au cours du temps, de la dégradation des installations, et ne donne qu'un aperçu, à une date donnée, de l'état du matériel. C'est la raison pour laquelle Labib, dans son article (Labib, 2004), a considéré que la plupart des logiciels GMAO ne fournissent pas un réel outil de prise de décision, et ne constituent que des plateformes de stockage d'informations statiques en termes de gestion des stocks, inventaires périodiques, natures et types des interventions en maintenance, calcul des coûts, etc.

La notion de « gestion de la connaissance » (Knowledge Management) ou le « *Learning* » est donc très présente à ce niveau. Considérée comme étant atout puissant de cumul du savoir et d'apprentissage, elle constituerait un puissant outil d'aide à la décision si elle est complétée par une méthode appropriée comme la méthode Analytic Hierarchy Process (AHP), Analytic Network Process (ANP), l'apprentissage stratégique au sein d'une approche théorie des jeux par exemple (Tembine, 2012). L'apprentissage et par la suite l'exploitation de la gestion de la connaissance offrent l'aspect dynamique et l'évolution que nous recherchons. Elles permettent la modification des données de calcul des performances à chaque fois que la base de données est mise à jour.

L'automatisation de l'analyse des risques nécessite fortement cet aspect de cumul d'expériences afin de les intégrer au sein de modèles dynamiques. Ces derniers permettent donc la prise en compte des nouvelles défaillances et dégradations, non incluses dans les paramètres de départ d'une installation donnée (en conception par exemple ou en exploitation).

Dans le même sens, (Claude, 2002) propose une plateforme de gestion de fiches d'anomalies permettant de structurer la connaissance sous la forme de groupes d'anomalies. D'une part, cette plateforme permet de guider la résolution d'une nouvelle anomalie en proposant automatiquement des solutions utilisées par le passé pour résoudre un problème similaire. D'autre part, il permet de comprendre les raisons de l'apparition d'anomalies récurrentes et d'en empêcher l'apparition future en modifiant le processus de production au niveau conceptuel (Claude, 2002).

Au niveau de nos travaux, nous n'avons pas pu prendre en compte l'aspect « prise de décision multicritère » avec rigueur ou même la proposition d'heuristiques pratiques, puisque le choix d'une méthode de décision est une problématique à part qui ne peut être traitée en totalité actuellement. Néanmoins, au chapitre 4 et à l'articles (El Jai et al., 2014), nous avons pu développer un calcul pratique permettant la prise en compte d'objectifs de fiabilité et de

productivité en même temps, en agissant seulement sur la périodicité de remplacement systématique des organes des machines. Le temps de remplacement est dans ce cas notre indicateurs de prise de décision tant sur la fiabilité-objectif que sur les contraintes de production (productivité, cadence, etc.).

2.3. Intégration de la méthode AMDEC (dynamique) au sein par l'approche holonique

La maintenance industrielle est d'une importance capitale surtout dans le cas des industries à hauts risques. Il est donc primordial de trouver de nouvelles techniques et méthodes pour l'analyse des défaillances et de sureté de fonctionnement. En effet, les méthodes classiques ne sont plus adaptées à la dynamique actuelle, n'offrent plus de visibilité en temps réel et sont appliquées suivant des approximations qui ne sont plus acceptables au niveau des systèmes complexes modernes (Faulin et al., 2010).

Mais l'étape qui précède le choix d'une politique de maintenance adéquate correspond à la phase d'analyse des dysfonctionnements et des interactions entre les différentes ressources de l'entreprise et de leur environnement. La méthode AMDEC machine (CNOMO, 2011) reste parmi les méthodes d'analyse des défaillances les plus pratiquées dans ce sens. Ce qui justifie notre choix de l'AMDEC machine comme candidate à l'automatisation par l'approche holonique pour effectuer une analyse des défaillances autonome et intelligente des ressources de production (holons ressources).

2.3.1. Analyse AMDEC machine et choix architecture de pilotage

L'Analyse des Modes de Défaillance de leurs Effets et de leurs Criticités est une méthode inductive d'analyse des défaillances, qui va des causes vers les effets et qui permet le passage du qualitatif/quantitatif (description de la défaillance, de ses effets, historique des interventions...) au quantitatif, **strictement**, exprimé en termes de criticité. A l'aide de la méthode AMDEC machine, et au sein d'une même holarchie, les holons seront plus autonomes dans la mesure où ils décideront eux-mêmes des périodes d'interventions. D'une part, il y aura des HR pour lesquelles les interventions préventives seront programmées. D'autre part nous aurons des machines sur lesquelles une maintenance corrective sera appliquée et d'autres holons qui bénéficieront d'actions d'amélioration afin de réduire leurs criticités.

La notion d'isoarchie ici est d'autant plus importante qu'elle permettra une analyse **commune, transparente et équitable** de l'état de dégradation du matériel. Cette réflexion nous a permis d'imaginer qu'une même holarchie *physique* (matérielle) pourrait être dotée de différents types d'organisation. Cela dépendra du type d'analyse ou de travaux que devront réaliser les holons (voir § 1.4.5 du chapitre 1).

A notre sens, une isoarchie devrait permettre la construction de divers autres types d'organisations suivant un contexte qui lui est spécifique. Par exemple, un holon Ressource de contrôle qualité (HRQ) devrait piloter des actions d'amélioration des paramètres de pilotage des machines de production (autre holons ressource), dans le but de rééquilibrer ses paramètres. Le HRQ sera à la tête du groupe, et l'on verra dans ce cas une sorte d'Oligarchie (Une oligarchie est une forme de gouvernement où le pouvoir est réservé à un petit groupe de personnes qui forment une classe dominante (Lalande, 1985)) reconstituée de la même isoarchie précédente. Cet exemple n'est pas absolu. Une réflexion à la problématique pourra proposer d'autre types d'organisation ou de conserver l'isoarchie selon une certaine technique de pilotage de la production !

En outre, en analysant le processus AMDEC machine (CNOMO, 2011), nous nous apercevons que l'analyse est faite à un seul niveau de prise de décision : au sein de la même holarchie, il n'y a pas de HR qui domine les autres. L'analyse AMDEC machine va encore plus loin :

- en négligeant, à une étape plus avancée, les liens entre les composants d'une même ressources : en tout cas, la politique de maintenance tient compte des statistiques d'arrêts et des intervention dans une approche monocomposant et pas multicomposant (Zille, 2009) ;
- Dans le cas d'un parc machine assez consistant, l'analyse organique qui suit l'analyse fonctionnelle néglige, dans un sens, l'appartenance des organes aux machines, et ne tient compte que de l'occurrence des pannes sur les organes eux-mêmes. La consistance du parc machine permet aussi d'obtenir une population importante d'organes, donc fiable d'un point de vue statistique.

En conséquence, nous remarquons que l'analyse se fait dans un environnement d'équivalence et de transparence entre machines. Le choix de l'isoarchie pour notre modélisation est donc justifié pour la méthode AMDEC machine **dynamique**.

2.3.2. Démarche et cahier des charges adoptés

Nous allons construire maintenant les modèles UML, préliminaires, nécessaires à la simulation sous ordinateur du comportement du matériel et de la performance de notre outil de prise de décision. Ces modèles serviront éventuellement à programmer les EPA intégrées dans la partie informative de chaque holon (notée IRessource), pour interagir et réaliser le choix des décisions autonomes. Dans le même sens, ils peuvent assurer la Sûreté de Fonctionnement de la partie Physique/matérielle du Holon Ressource (noté MRessource), au sein de la holarchie. L'avantage des diagrammes UML réside dans le fait qu'ils soient dédiés spécialement à la programmation, ce qui constituera la première étape vers la simulation et l'implantation des solutions proposées dans des travaux futurs (El Jai et al., 2013).

Remarque 1 : (analyse fonctionnelle de l'outil de production/System Modeling Language)

La première étape de l'analyse AMDEC est de procéder à une analyse fonctionnelle de l'outil de production étudié (CNOMO, 2011) ; ce qui fait que nous supposons que cette analyse est déjà faite à l'étape de conception de la MRessource (partie matériel ou physique de la machine). Donc, chaque HR doit être fourni avec une note technique détaillant ses parties fonctionnelles et les organes assurant ces fonctions. C'est l'objectif même de la création d'un nouveau langage de conception de tels systèmes. Le langage SysML (System Modeling Language) permet la modélisation des systèmes physiques, architecture statique et dynamisme ainsi que la partie informatique de ces systèmes (Roques, 2006). Nous pensons donc que SysML constituerait un langage de conception en adéquation avec l'approche holonique appliquée aux systèmes industriels.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de présenter le détail du cahier des charges que nous avons développé en vue de décrire au maximum le comportement du système et la démarche d'analyse des défaillances dynamique et autonome que nous proposons. Nous procéderons donc à une description textuelle de notre méthode, que nous avons désignée par Analyse « **AMDEC Dynamique** ».

2.3.2.1. Aspect statique

2.3.2.1.1. Approche proposée

Dans ce paragraphe, nous présentons l'architecture, ou autrement dit, la description statique adoptée du système étudié en incluant les acteurs qui intègrent l'analyse AMDEC dynamique :

- les composants (machines, organes, pièces, etc.) ;
- les dégradations, défaillances, apparition de modes de défaillance ;
- les politiques de maintenance correspondantes ;
- etc.

Nous avons utilisé le diagramme de classes afin d'illustrer l'arborescence et les relations entre les constituants du système (relations d'agrégation, de composition et de spécialisation).

Cette section est d'autant plus importante qu'elle permettra la compréhension de l'étape future, où l'on présentera la dynamique entre objets (envoi de messages, utilisation de méthodes et procédures stockées, envoie de requêtes aux Bases de Données, etc.).

Nous avons rapporté dans ce qui suit les principaux acteurs (classes), formulés sous formes de **Holons**, ainsi que les relations existant entre les instances (objets) de ces classes. Les relations sont exprimées en termes de messages échangés entre instances d'objets, décrits dans le diagramme de classes en termes de méthodes appartenant aux entités correspondantes.

2.3.2.1.2. Description fonctionnelle des entités

a) Description des Holons Ressources

Ce paragraphe présente le descriptif fonctionnel des modèles des machines étudiées :

- 1) Une holarchie est composée de plusieurs machines appelées HR (Holons Ressources) ;
- 2) Chaque HR est composé d'une partie informative désignée *IRessource* et d'une partie matérielle ou physique que nommée *MRessource* ;
- 3) C'est la *MRessource* (la machine) qui est affectée par la défaillance (au sens physique du terme) ;
- 4) La *IRessource* intègre la base de données, les modules et programmes de calcul, de gestion, d'interactions et les programmes responsables des lois d'évolution du HR ;
- 5) La partie informative intègre la base de données, les modules et programmes de calcul, de gestion, des interactions des HR par rapport aux acteurs extérieurs (défaillances, symptômes, son propre *MRessource* et des autres matériels, ...) ;
- 6) Physiquement, chaque HR est composé de plusieurs sous holons (sous-systèmes), qui sont eux-mêmes composés de modules. Chaque module est composés d'organes ou composants de niveau plus bas ;
- 7) Une *MRessource* est composée de sous-systèmes, constitués des sous sous-systèmes. Ces derniers sont formés par plusieurs modules. La décomposition de ces derniers évolue jusqu'au niveau élémentaire (organe ou composant élémentaire) ;
- 8) Chaque partie du HR est aussi un HR ;

- 9) Chaque module, organe ou composant assure principalement une ou plusieurs fonctions ;
- 10) Une *IRessource* comprend une seule EPA, qui est aussi composé de deux principaux modules (notation relative à (Pujo, 2009 et 2012)) ;
 - ✓ Module interaction : Réception et Gestion des Appels d'Offres (AO), des Réponses aux Appels d'Offres (RAO) et des messages émis par le HR lui-même (appelés dans ce cas AOL et RAOL, où la lettre L désigne Local) ou par un autre HR, traitement des AO et RAO, etc.
 - ✓ Module CalculAMDEC : calcule les indicateurs nécessaires pour la prise de décision lors d'une analyse AMDEC. Il n'est créé qu'après activation de l'analyse.
- 11) La *IRessource* intègre la base de données de performances (*DBPerf*) locale du holon correspondant.
- 12) La *DBPerf* possède des méthodes qui permettent le calcul d'indicateurs de performances.

b) Description d'une défaillance, d'un mécanisme et d'un mode de défaillance

Dans ce paragraphe, nous présentons la description de l'entité « défaillance » conformément aux travaux de (Zille, 2009). Cette description, très intéressante, nous permettra d'aller au niveau le plus bas d'une défaillance, afin de permettre de bien répertorier tous les points permettant l'automatisation de la recherche des causes des défaillances ou de bien classer le niveau de dégradation d'un matériel.

Les points ci-dessous présentent cette hiérarchisation :

- 13) Une défaillance est décrite par :
 - ✓ sa désignation,
 - ✓ un ou plusieurs modes d'apparition,
 - ✓ son effet sur la fonction correspondante,
 - ✓ une fréquence d'apparition estimée en fonction du MTBF ou d'un autre indicateur,
 - ✓ une détection estimée qui peut être soit visuelle, soit automatisée à l'aide de capteurs,
 - ✓ une gravité estimée en fonction de l'indisponibilité de l'outil de production, de la fabrication des produits non conformes (non qualité) et du niveau de sécurité visée.
- 14) Une fonction est dégradée par une ou plusieurs causes de défaillances affectant les modules et composants qui assurent cette fonction ;

- 15) Un mode de défaillance peut être mis en évidence par un ou plusieurs symptômes. Le mode de défaillance est défini comme étant la façon avec laquelle l'organe peut ne plus remplir sa fonction partiellement ou totalement ;
- 16) L'évolution d'un symptôme de dégradation sur un matériel donné (sous-système, module, équipement, organes, composant élémentaire...) donne naissance à des niveaux de dégradation ;
- 17) Un symptôme peut apparaître suite à un ou plusieurs mécanismes de dégradation ;
- 18) Un mécanisme de dégradation peut s'exprimer comme le passage d'un niveau de dégradation à un autre ;
- 19) Un mécanisme de dégradation, à un niveau donné, donnera lieu à l'apparition d'un ou de plusieurs modes de défaillance avec une occurrence donnée (taux de défaillance) ;
- 20) Deux ou plusieurs origines peuvent concourir à l'apparition d'un même mode de défaillance.

2.3.2.2. Aspect dynamique

Cette partie décrit le comportement et les interactions entre les machines d'une même holarchie, dans le but de choisir, en premier lieu, les plus défaillantes, pour intégrer ensuite l'analyse AMDEC. Les messages entre les EPA des holons machines (*MRessources*) sont échangés par le biais d'appels d'offres, comme nous avons vu dans la description de l'aspect statique.

Le lancement d'un AO, d'une réponse à un AO (notée *RAO*), d'une action AMDEC,... est effectué à partir d'indicateurs de qualité (comme le *Cpk*, *Cp*, taux de rebus...), de production (*TRS*, ...) ou de maintenance (taux de défaillances, fiabilité, *MTBF*...) qui expriment l'état machine à un niveau d'analyse donné. Autrement dit, en connaissant son état, d'un point de vue multicritère et multiobjectif, le HR décide d'intégrer ou non l'analyse AMDEC en cours, lancée par un autre HR qui se voit en dégradation. Cet indicateur multicritère, que nous avons noté dans le diagramme de séquence *calcperf()*, comparé à un seuil de performance limite, constitue l'évènement déclencheur de la séquence d'analyse AMDEC.

Ces indicateurs de performance sont calculés au niveau du HR lui-même à l'aide de son EPA. Cela implique que les données de production, de maintenance, de qualité, etc., constituant les données de base, doivent être retournées aux HR d'une manière systématique, et stockées par la suite dans la *DBPerf*. Cette organisation locale permettra une prise de décision autonome, rapide et transparente au niveau de la holarchie.

Et maintenant décrivons la séquence d'une action AMDEC dynamique :

2.3.2.2.1. Accord ou refus d'intégrer l'analyse AMDEC « dynamique »

Les points présentés ci-dessous (de 21 à 28) présentent la méthode par laquelle le HR accepte ou non d'intégrer l'analyse AMDEC dynamique, selon les performances mesurées localement par chaque HR.

21) Une action AMDEC est déclenchée suite à la demande d'un Holon Ressource qui exprime la nécessité d'activer l'action AMDEC, en se basant sur le calcul d'un indicateur donné qui est hors des limites acceptables ($calcperf() > \text{seuil critique}$) ;

22) Lorsqu'un appel d'offre (AO) est émis par un holon, les autres holons de la holarchie ne peuvent pas émettre un appel d'offre ;

Remarque 2 : s'il s'avère qu'un autre HR est intéressé par la méthode AMDEC et qu'il ne soit pas le premier à émettre l'AO, il répondra bien sur positivement à l'AO reçu, puisque ses indicateurs correspondent bien au besoin d'analyse exprimé.

23) Si plusieurs AO sont transmis simultanément, une méthode de choix aléatoire ($Random_choice()$) sera appliquée pour le choix du holon qui hébergera les calculs pour la méthode AMDEC. Ceci sera négligée pour simplification ;

24) Les indicateurs considérés par le HR peuvent appartenir à la maintenance et/ou à la production et/ou à la qualité ;

25) Un holon émet et reçoit plusieurs AO et RAO : Le lancement, la réception, le prétraitement et les traitements sont gérés par le module *Interaction* de l'EPA de la *IRessource* (Pujo, 2009).

26) Les informations stockées dans tous les types d'AO et de RAO reçus sont transmis, par le module *interaction* au module *calcul* pour une éventuelle exploitation et calcul des indicateurs.

27) Le module *CalculAMDEC* effectue la préparation des données (calcul, mise à jour, tri ou autres) pour la prise de décision : réponse à l'appel d'offre (RAO) pour intégrer ou non l'analyse AMDEC :

- ✓ Accepter d'intégrer l'analyse AMDEC veut dire que la machine n'est pas satisfaite de son état actuel, estimé par un indicateur monocritère ou multicritère calculé par le module calcul de l'EPA, et comparé à des seuils critiques (CNOMO, 2011) ;

- ✓ En intégrant l'analyse AMDEC, le holon estime qu'il est nécessaire de réduire sa criticité, traduite par le triplet (Fréquence, Gravité, Détection). Cela apparaîtra donc au niveau des Holons Ordres créés ou lancés par les Holon Ressources.
- ✓ Ne pas intégrer l'analyse veut dire qu'il n'y aura pas de modification dans la politique de maintenance.

28) Si un holon n'est pas intéressé par l'analyse, il ne répondra pas tout simplement à l'AO, et il détruira par la suite les objets qu'il a créés pour le calcul de sa prise de décision : modules *Interaction*, *GestionAO*, *CalculAMDEC*... ;

2.3.2.2.2. Séquence d'AMDEC « Dynamique » pour les HR intéressés

Les points ci-dessous présentent la mécanique de prise de décision après le calcul des criticités par organe, modules, etc. :

- 29) Si un holon est intéressé par l'analyse, il transmettra toutes les informations nécessaires par la grille AMDEC, générée et stockées ensuite dans la RAO.
- 30) Une fois les RAO (qui stockent les informations nécessaires) reçues par le holon émetteur (initiateur), celui-ci réalise les calculs nécessaires et trace (calcule), localement, la grille AMDEC globale.
- 31) Le seuil critique est fixé suivant la norme CNOMO E.41.50.530.N (CNOMO, 2011), dans le cas de systèmes mécaniques ou électromécaniques ;
- 32) Pour les autres composants dont la criticité est supérieure au seuil défini par la norme, il y aura envoi d'un holon ordre (HO) au service Maintenance pour procéder à des actions d'améliorations sur les holons concernés.
- 33) L'EPA du holon émetteur (*EPAInit*) génère un HO qui stocke le résultat de l'analyse AMDEC comme suit (Lyonnet, 2000) :
 - ✓ Ordre pour modification, redimensionnement ou reconception du matériel dont la « criticité > seuil critique » : noté HOActionAmelioration ;
 - ✓ Choix entre maintenance préventive ou corrective pour les holons dont la « criticité = seuil critique » : noté HOPlanning ;
 - ⇒ Le choix est fait dans ce cas en fonction du coût de la maintenance :
 - Coût préventif > coût correctif ➔ Adopter une maintenance corrective ;
 - Coût correctif > coût préventif ➔ Adopter une maintenance préventive ;

2.3.2.2.3. Choix d'une politique de Maintenance préventive

Ce paragraphe présente le détail de la prise de décision lorsqu'une maintenance préventive est sélectionnée par la machine :

- 34) Dans le cas où le résultat, pour une entité (sous-système, module, pièce élémentaire) d'un holon donné, est une maintenance préventive, un message est envoyé de l'*EPAInit* aux HR concernés par la maintenance préventive leur demandant de lui fournir la période de remplacement, par exemple le MTBF de l'organe correspondant ;
- 35) La MTBF de l'organe, qui doit subir un remplacement préventif, est calculée localement via l'EPA correspondante, à partir des procédures stockées dans la base de données locale *DBPerf* de chaque holon ;
- 36) La méthode de calcul sera choisie en fonction des métiers et des modèles de calcul (à intégrer après dans des méthodes de calcul (threads en anglais)) : Temps de remplacement en fonction de la loi statistique adoptée (exponentielle, normale, Weibull, moyenne des TBF, etc.) ;
- 37) Génération du plan de maintenance préventive et/ou modification du plan préventif existant.

2.3.3. Modélisation : diagrammes UML proposés

2.3.3.1. Aspect statique : diagramme de classes

A la figure 2.4 est présenté le diagramme de classes que nous avons divisé en trois principaux packages spécialisés, conformément à la figure 2.1.

La décomposition par package permet de spécialiser l'analyse par métiers, et par la suite étendre l'approche à d'autres domaines non pris en compte dans ces travaux. Par exemple, si l'on voudrait inclure d'autres variables issues de la production, de la qualité, du service approvisionnement..., nous pouvons donc créer d'autres packages issues de ces services et après les intégrer d'une manière fluide à nos modèles. D'où la généricité et l'ouverture des modèles proposés. Les packages peuvent être perçus comme étant des holons.

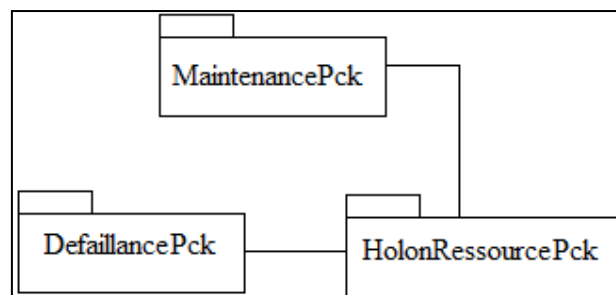


Figure 2.1 : Diagramme de classes organisé par Packages (El Jai et al., 2013)

2.3.3.2. Aspect dynamique : diagramme de séquence du scénario normal

La figure 2.5 présente le diagramme de séquences de réalisation d'une action AMDEC, automatisée, autonome au sein d'une isoarchie, sans élimination préalable d'une machine ou composant. C'est aux machines elles-mêmes de décider d'intégrer l'action AMDEC ou non. La transparence devrait régner, du fait que tous les holons possèdent les mêmes méthodes de calcul de performances, à condition qu'ils soient membres de la même holarchie.

Remarque 3

Nous avons utilisé la notation introduite par *Foundation of Intelligent Agents Physiques* (FIPA), présentée par (Pujo, 2009) pour l'envoi d'un appel d'offre AO d'un holon initiateur à une holarchie composée de « m » autres holons (figure 2.2).

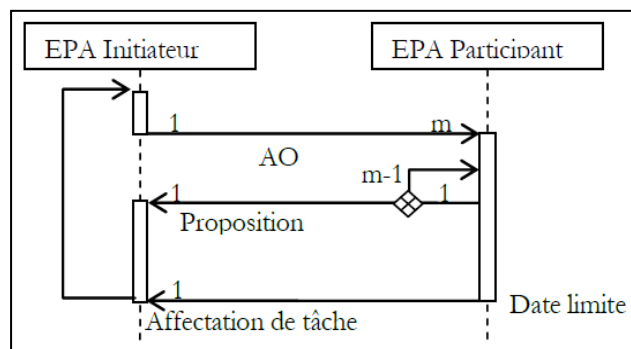


Figure 2.2 : Représentation FIPA du protocole d'interaction entre EPA (Pujo, 2009)

Remarque 4

Le fragment *ref* « référencé » 'Creation du module de GestionAO', présenté à la figure 2.3, permet à l'EPA de commander l'instanciation d'un objet de la classe *Interaction* et d'un objet de sa sous-classe *GestionAO* par la méthode `<<create>>`. Lorsque ces objets auront fait le travail demandé, ils seront détruits par le biais de la méthode `<<destroy>>`. Nous avons mis l'action de création de ces entités comme référence puisqu'elle va être utilisée à chaque fois par toutes les EPA.

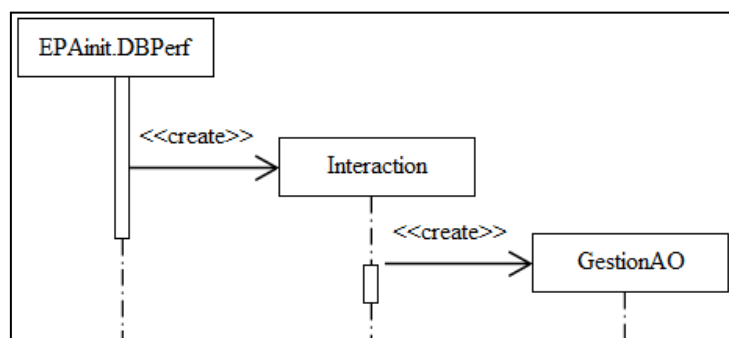


Figure 2.3 : Fragment référencé « création du module GestionAO »

2.3.3.3. Table de correspondance : termes utilisés au cahier des charges et termes utilisés par les diagrammes UML

D'une part, les diagrammes UML développés aux figures 2.4 et 2.5 ont été publiés au niveau de notre article (El Jai et al., 2013). C'est la raison pour laquelle ces derniers ont été rapportés en anglais. D'autre part, le descriptif textuel fourni aux paragraphes 2.3.2. est rédigé en français ; pour ce faire, nous avons vu nécessaire de mettre une table de correspondance pour lier les termes traduits d'une langue à l'autre pour la bonne lecture des diagrammes UML.

Tableau 2.1 : Table de correspondance

Anglais (UML)	Signification en anglais	Français (cahier des charges)	Signification en français
ACE	Ambient Control Entity	EPA	Entité de Control Ambient
BC	Bid Call	AO	Appel d'Offre
BDManagement	Bid Call Management	GestionAO	Gestion des Appels d'Offre
FMEA	Failure Mode Effet and Analysis	AMDE	Analyse des Modes de Défaillance et de leurs Effets
FMEACalculation		CalculAMDEC	
OH	Order Holon	HO	Holon Ordre
RBC	Response Bid Call	RAO	Réponse à l'Appel d'Offre
RH	Resource Holon	HR	Holon Ressource

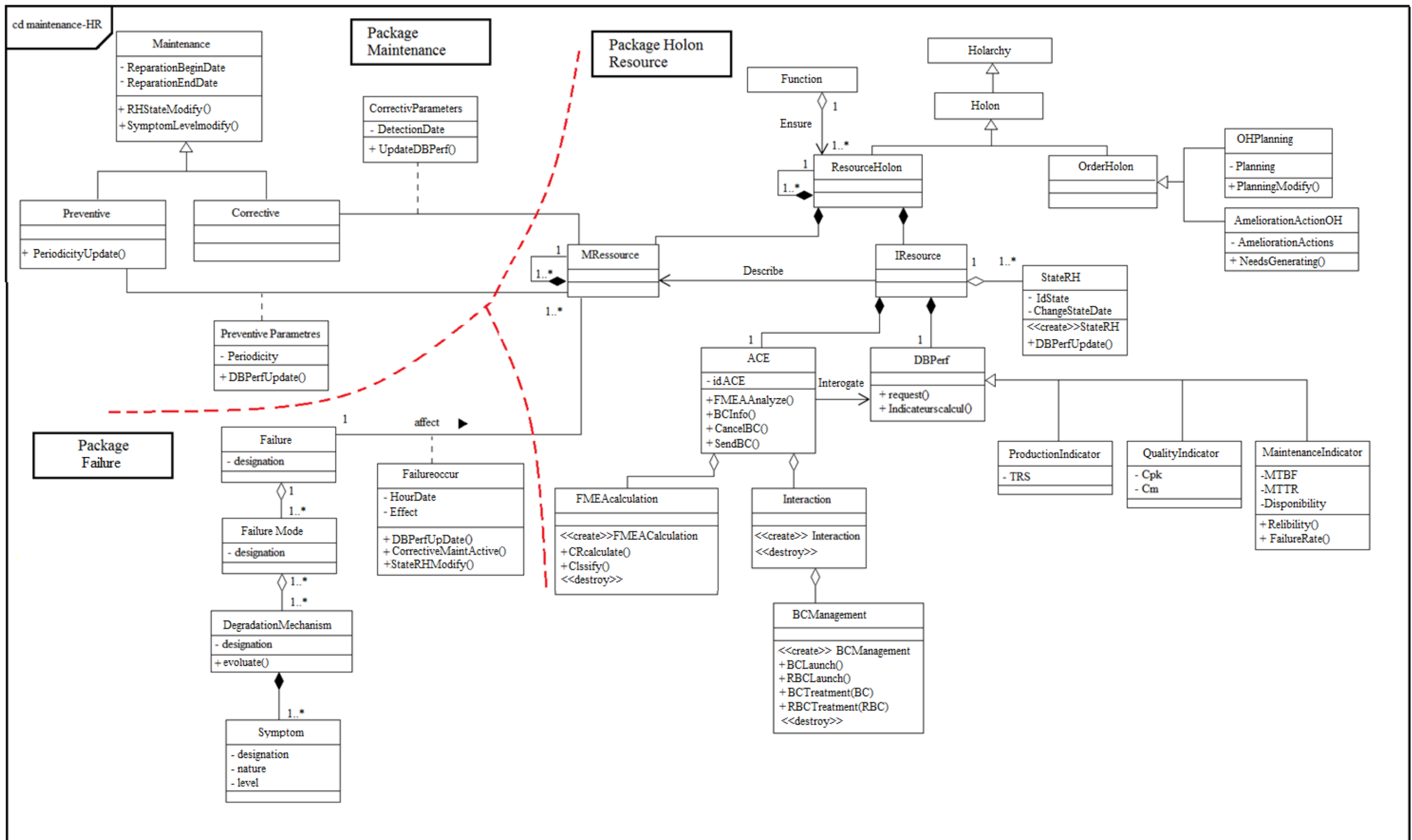


Figure 2.4 : Diagramme de classe préliminaire de l'AMDEC dynamique

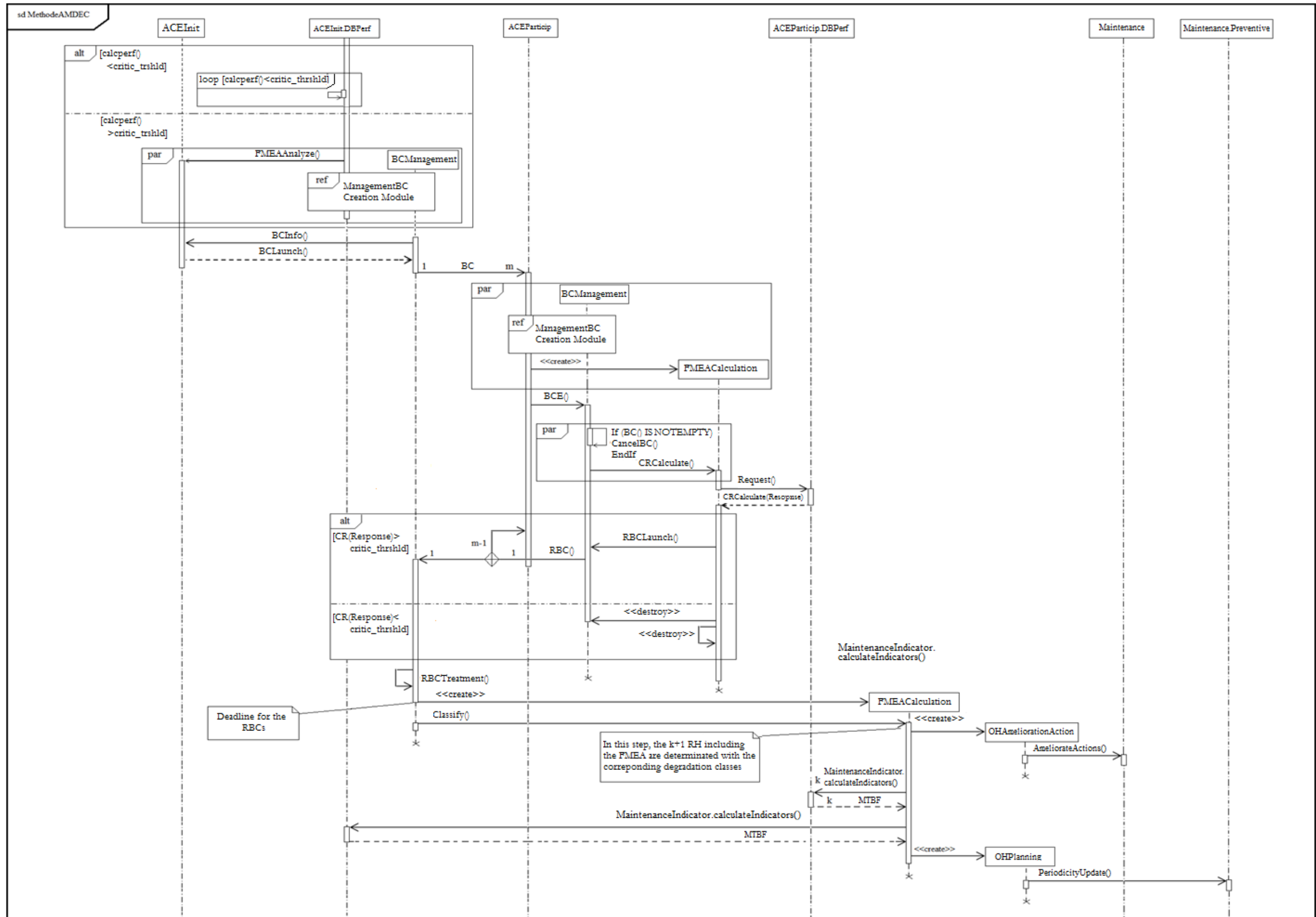


Figure 2.5 : Diagramme de séquence pour le scénario normal d'une action AMDEC dynamique

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une description détaillée de l'application de l'approche holonique à la description du processus de détermination des politiques de maintenance, corrective, préventive et actions d'amélioration au sein d'une holarchie.

Le processus ou méthode de choix de la politique de la maintenance est basé sur l'analyse AMDEC qui est un outil classique utilisé en analyse des défaillances.

La description détaillée de l'AMDEC par le paradigme holonique permettra pour la première fois d'automatiser cette méthode afin de l'intégrer dans des logiciels spécialisés en gestion de maintenance, ou encore dans des machines de production intelligentes. Cela a pour finalité la gestion des défaillances d'une manière autonome, dynamique et transparente, en fonction des indicateurs de performances choisis au départ à l'étape de modélisation.

Le fruit de ce chapitre étant les deux diagrammes de classes et de séquences relatifs aux figures 2.4 et 2.5. Ils constituent donc une première étape vers l'intégration de l'intelligence artificielle dans le domaine de la maintenance industrielle et de la sûreté de fonctionnement.

Dans le même sens, nous continuerons, au chapitre 3, notre approche par l'analyse du contrôle des paramètres-machines par le paradigme holonique et sa matérialisation par l'approche orientée objet, en vue d'une gestion de la qualité autonome, dynamique et intelligente.

Chapitre 3 : Le Contrôle qualité et l'optimisation intégrée des paramètres de la production par l'approche holonique

3.1. Introduction et problématique

Comme cela a été mentionné au chapitre précédent, la plupart des développements récents des systèmes HMS s'intéressent beaucoup aux aspects ou fonctions d'entreprise liées à la gestion de production (flexibilité des ateliers, interactivité des cellules de production, etc.), plus que cela ne l'est pour d'autres fonctions d'entreprise plus techniques, telles que la sûreté de fonctionnement, la gestion de la qualité, l'optimisation des processus, etc.

Ce chapitre va dans le même sens que le premier, où nous nous intéressons au contrôle qualité, et de sa relation très étroite à l'optimisation des paramètres de fonctionnement de processus industriels, en exploitant l'historique de la production et le retour d'informations issu des services responsables. Les processus à développer seront décrits par l'approche holonique, pour déboucher en définitive aux diagrammes UML 2.0 correspondant (figures 3.5 et 3.6 du présent chapitre). Le lien avec les diagrammes UML du chapitre précédent sera établi surtout au niveau de l'architecture statique (diagramme de classe de la figure 3.5).

Nous essaierons donc de proposer une modélisation bien fondée, concernant :

- Les procédures du contrôle qualité :
Ces procédures incluent le processus (système) de collecte et d'enregistrement des données, l'architecture physique et informatique de ce système ;
- La mesure des performances du processus d'optimisation :
Liée au choix optimal des paramètres contrôlables d'un système, la mesure des performances de ce dernier n'est pas indépendante de l'approche d'analyse et de la construction des indicateurs de performances.

Le domaine des statistiques descriptives s'avère ici d'une importance capitale, dans la mesure où les interactions entre les phénomènes physiques existant dans un processus donné, les différentes sources d'informations et de bruit ne permettent pas la construction d'indicateurs déterministes. Il est dans ce cas primordial de construire des indicateurs fiables dont les valeurs caractéristiques sont testées et validées statistiquement.

Nous pouvons rappeler, en guide d'exemple, que ces indicateurs peuvent se mettre sous différentes formes, en commençant par la moyenne, l'écart-type, le ratio Signal/Bruit, les

valeurs caractéristiques avec un pourcentage de dépassement (risque de 1^{ère} ou 2^{ème} espèce), etc.

L'idéal serait donc de pouvoir dégager ou d'estimer la loi d'une distribution de données relativement à elles-mêmes (lois statistiques usuelles) ou bien relativement aux variables du processus, comme le permettent les méthodes de la régression et d'interpolation mathématiques. Mais parfois la prise de décision doit se faire en un temps très réduit, ne permettant pas la réalisation d'études avancées des phénomènes considérés.

En conséquence, la mesure de la performance se fait sous les trois aspects, opérationnel, tactique et stratégique, chacun utilisant un bagage technique ou scientifique dédié.

Nous adopterons dans notre contexte l'approche TAGUCHI, définissant statistiquement le ratio Signal/Bruit comme indicateur.

- Les procédures d'optimisation des processus :

L'optimisation des processus industriels peut avoir différentes formes, selon le niveau d'analyse et les indicateurs de performances conçus. C'est la raison pour laquelle nous trouvons, pour un même processus, différentes méthodes ou procédures de modélisation et d'optimisation, relativement aux objectifs fixés par la hiérarchie.

Nous trouvons donc des méthodes relevant de l'aspect stratégique, comme par exemple les méthodes de conception des unités de production (méthode de King, gestion en îlots de production, conception des cellules flexibles, modélisation des flux de production, etc.). D'autres méthodes relèvent de l'aspect tactique comme par exemple la conception et optimisation des gammes de production, hiérarchisation de la fabrication (MRP I et MRP II), kanban, méthode des plans d'expériences, affectation des ressources, etc. En dernier lieu, quelques méthodes relevant de l'aspect opérationnel correspondent à l'optimisation des opérations de coupe, minimisation de la consommation de la dégradation de l'outillage, optimisation du temps de changement des outils SMED, etc. (Javel, 2003)(Pujo et Kieffer, 2002).

Dans cette partie, nous traitons plus l'aspect tactique que stratégique et opérationnels, dans la mesure où nous traitons l'optimisation des paramètres de production qui est à mi-chemin de la conception de l'outil de production lui-même (machines, holon ressources, etc.), donc de l'aspect stratégique (techniquement parlant), et de l'aspect opérationnel, correspondant aux réglages de ces outils de production en vue de l'obtention d'une production de qualité.

Une fois la modélisation effectuée à l'aide de UML 2.0, la transformation des diagrammes en un langage de programmation est une tâche plus ou moins à la portée des développeurs

(informaticiens ou industriels), tant qu'UML ne dépend d'aucune autre plateforme ou système d'exploitation.

3.2. Positionnement par rapport aux systèmes HMS

La nouveauté présentée dans ce travail est l'adoption de l'approche holonique en vue de créer une « **boucle intelligente d'optimisation intégrée** » dont les règles de décision correspondent à la méthodologie développée aux paragraphes qui suivent.

Les responsables qualité/process ne peuvent mener des études d'optimisation des paramètres de fonctionnement d'une manière approfondie. Cette situation est due au temps assez important nécessaire à l'expérimentation ainsi qu'au traitement des données. Les études d'optimisation se voient donc réalisées d'une manière statique (ponctuelle dans le temps), conditionnée par une certaine dérive des indicateurs de performances adoptés, indépendamment des évolutions continues du comportement des unités industrielles. C'est parfaitement la même remarque que nous avons introduite dans notre article concernant l'utilisation de l'analyse AMDEC (El Jai et al., 2014) et reprise au chapitre précédent.

A partir de ces remarques, nous pouvons affirmer, qu'actuellement, l'industrie a besoin de la dynamique et d'une certaine autonomie dans le traitement des données, du retour d'expériences et du contrôle qualité. Toutefois, cette démarche ne peut donner ses fruits sans être suivie d'une optimisation des paramètres-cibles de sortie. En général pour ce type de systèmes, les propriétés recherchées sont intégrées au sein de plateformes de pilotage d'unité de production (cellules flexibles de production, robot de soudage, MOCN, ...). Contrairement à l'analyse des défaillances, de la maintenance industrielle et du contrôle qualité qui ne sont pas dotés, au moins jusqu'à présent, de **propriétés d'intelligence artificielle** citées auparavant.

En d'autres termes, plusieurs méthodes d'optimisation très intéressantes et pratiquées, comme par exemple les plans d'expériences par l'approche de TAGUCHI, peuvent être incluses au sein d'entités de calcul des machines autonomes ou dans les modules de logiciels d'optimisation des paramètres machines (partie *IRessources d'un Holon Ressource*). C'est dans cette optique que le présent chapitre a été développé, traitant ainsi la partie du contrôle qualité et de l'optimisation intégrée des paramètres de fonctionnement des machines désignées par Holon Ressources ou HR.

3.3. Présentation des procédures de contrôle qualité et méthode des plans d'expériences

Le contrôle qualité peut être considéré comme étant la partie opérative dans la recherche de la qualité d'un produit. Il permet d'exploiter, statistiquement, le retour d'expériences en bas de l'échelle de la production, et de remonter vers le calcul des indicateurs de pilotage de diverses activités de l'entreprise (qualité des outils de production (capabilité), choix de fournisseurs, politiques de la maintenance, etc.).

Nous notons ici un point crucial qui est le choix de la taille des échantillons et le taux d'acceptation ou de refus, exprimés statistiquement par le risque de première espère α et le risque de deuxième espèce β (Réf. Dunod, 2000)(Rouzet, 1957). Ce qui fait que la lecture des indicateurs statistiques de production utilisés devrait tenir compte de ces risques lors d'une prise de décision donnée.

Dans ce travail, nous proposons d'intégrer la méthode des plans d'expériences au processus de contrôle qualité, partant de la logique « qu'une qualité estimée non satisfaisante doit, *systématiquement ou conditionnellement*, être corrigée avant de procéder à un autre lancement de la production », surtout dans les industries de fortes cadences de production (semi-conducteurs, industrie agroalimentaire, pharmaceutique, etc.). La figure 3.1 montre d'une manière simplifiée l'approche adoptée. Toutefois, notre approche propose une expérimentation en cours de production sans qu'aucun arrêt de cette dernière ne soit senti. Les paramètres d'entrée varieront en fonction des directives du service de l'EPA responsable de la génération des plans d'expériences de Taguchi.

Techniquement, nous n'allons pas intégrer les modèles que nous avons développés pour la simulation, car cela requerra un temps énorme afin de modifier les diagrammes UML 2.0 pour la préparation à l'implémentation (diagrammes UML de déploiement) ; à ajouter à cela le temps alloué à la programmation et à la boucle de maintenance des programmes.

Néanmoins, il serait indispensable de présenter, même brièvement, les notions de base utilisées aux étapes vulgarisées et simplifiées de l'algorithme de la figure 3.1. Ces mêmes étapes, ainsi que les acteurs responsables, seront développés au niveau des diagrammes UML 2.0, à la section 3.4 de ce chapitre.

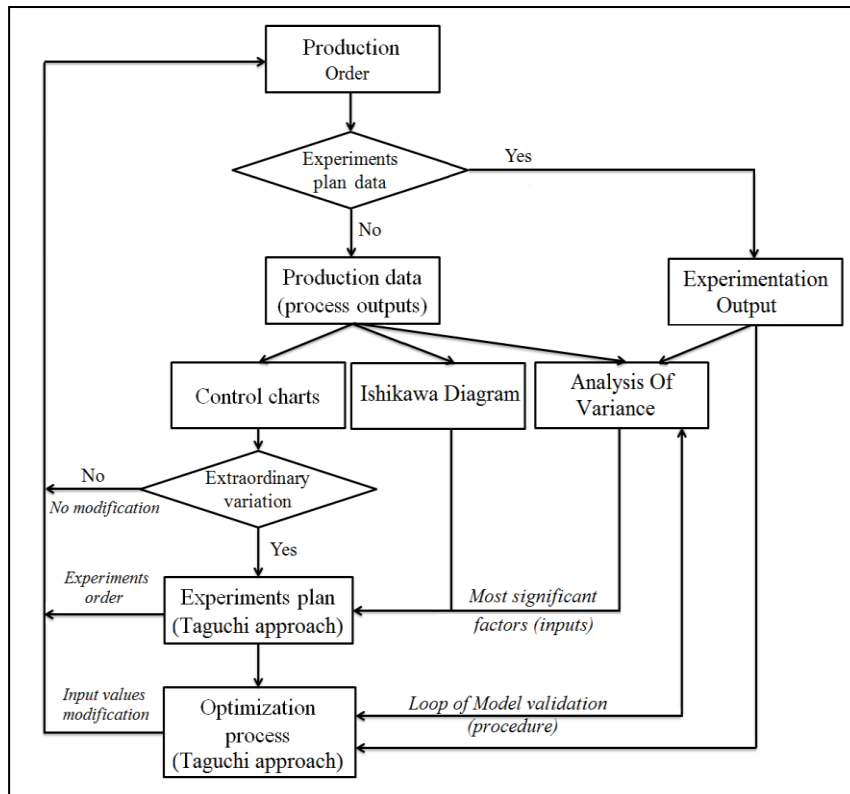


Figure 3.1 : Diagramme simplifié du processus d'optimisation

3.3.1. Cartes de contrôle et détection de variation extraordinaire des caractéristiques mesurées

Après la collecte des données de production, les cartes de contrôle permettent de déceler les éventuelles dérives dues aux causes assignables comme un excès de dégradation ou un mauvais choix des paramètres d'entrée du système. Dans ce cas, une procédure de lancement d'un plan d'expériences, permettant le retour au centrage et à une dispersion raisonnable, sera exécutée (Pillet, 1997). Si aucune exception n'est notée, la production continuera avec les mêmes valeurs des paramètres d'entrée.

La construction, l'utilisation et l'interprétation des cartes de contrôle ont été détaillés par plusieurs références (Pillet, 2002)(Javel, 2003)(Réf. Dunod, 2000)(Rouzet, 1957). Ces références présentent les critères de détection classiques des défauts et certaines bonnes pratiques qui permettent de les prévenir.

Plus récemment, (Doumani et al., 2016) présente une démarche très affinée qui consiste en la détection des microdéfauts, bruités ou fugitifs, avec la possibilité de programmation au sein des services EPA des holons ressources. Les données exploités par cette démarche proviennent de la carte de contrôle associée. En effet, l'algorithme proposé par (Dounami et

al., 2016) permet de bien prédire l'évolution de la sortie du système en utilisant un processus de détection composé (figure 3.2) :

- D'une phase de modélisation de la sortie (ou des sorties) et d'une phase d'estimation récurrente, disposées en série : après l'introduction des modèles prévisionnels les plus utilisés en automatique des systèmes (Basseville, 1988), Doumani adopte un modèle Autorégressif à Moyenne Ajustée (ARMA) pour l'extrapolation et l'estimation des données. Cette étape permet d'estimer la réponse du système ;
- D'un test (statistique) d'hypothèse (loi de χ^2 ou loi de Fisher) : qui permet de vérifier l'adéquation de du modèle d'erreur proposé aux données mesurées par la carte de contrôle. Les intervalles d'acceptation de l'erreur ou, symétriquement, de refus d'une population, désigné par Doumani par rupture sont basés sur le rapport de vraisemblance et/ou sur les intervalles de confiance.

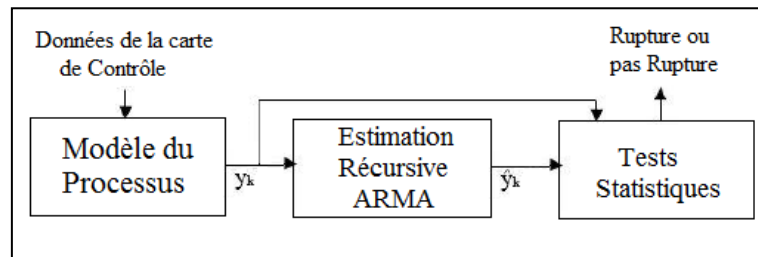


Figure 3.2 : Diagramme simplifié du processus d'optimisation (Doumani et al., 2016)

Effectivement, la méthode s'est révélée efficace en l'appliquant sur une série de données, issue de l'industrie des semiconducteurs. Nous voudrions souligner aussi que l'implantation de l'algorithme ainsi que les tests ont été réalisés sur matlab. Ce point est très intéressant sur fait qu'actuellement la plupart des ateliers et outils de matlab sont embarquable sur des plateformes physiques et à coût relativement bas telles Arduino®, LEGO® MINDSTORMS® NXT™ and EV3™, and Raspberry Pi®. Les applications de cette nouvelle technologie sont très diversifiées et vont du contrôle des systèmes, la robotique, etc⁽¹⁾. Il serait aisé dans ce cas d'embarquer l'algorithme de (Doumani et al., 2016) et de l'interfacer avec la base de données de stockage des données des cartes de contrôle.

Cela dit, les remarques citées ci-dessus correspondent à une description, plus ou moins qualitative, du test « Extraordinary variation » du logigramme de la figure 3.1.

(1) http://www.mathworks.com/discovery/simulink-embedded-hardware.html?s_tid=srchtitle, consulté le 10/09/2016

3.3.2. Diagramme d'Ishikawa

Suivant la logique des 5M, le diagramme d'Ishikawa permettra de formaliser le *brain storming* des facteurs permettant d'affecter la réponse d'un système (sorties).

C'est pour cela qu'il est très intéressant de mener cette analyse, surtout aux premières étapes de l'étude des paramètres ou lorsque la majorité des modifications des paramètres de fonctionnement du processus s'avèrent sans effet. Le recours au diagramme d'Ishikawa initial permettrait de bien visualiser, même d'une manière grossière, « ***quel facteur aurait été négligé dans l'analyse factorielle*** » et « ***quels niveaux de ces facteurs ont pu être négligés au niveau des plans fractionnaires*** » des plans d'expériences et de l'analyse des causes/effets.

3.3.3. Plans d'expériences (PE) : outil de modélisation par l'expérience

Les méthodes des plans d'expériences sont des méthodes structurées et organisées permettant de tracer, de la manière la plus simple que possible, les relations entre différents facteurs pouvant agir sur un système donné. En d'autres termes, ce sont des techniques de caractérisation de relation entre causes et effets d'un système (Fing, 2009).

Nous pouvons ainsi dire que l'application des plans d'expériences rentre dans le cadre des méthodes liées à l'approche systémique où le système est considéré comme étant une boîte noire où seul un comportement grossier est visible (figure 3.3).

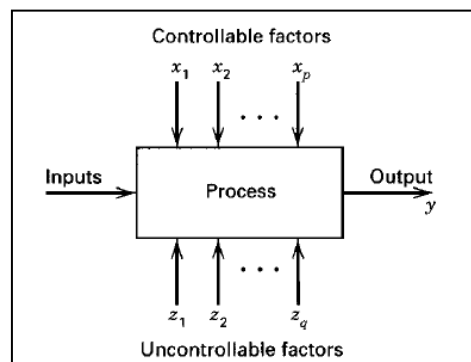


Figure 3.3 : Modélisation d'un processus ou d'un système (Montgomery, 2001)

Remarque 1 :

Nous rappelons encore que l'objectif principal de notre démarche correspond à effectuer des plans d'expériences en cours de production, si bien sur une dérive des paramètres de sortie est notée ; la production ne sera nullement suspendu et le

processus s'autorégulera après détection des paramètres optimaux par l'analyse du ratio Signal/Bruit (voir § 3.3.4).

3.3.3.1. Choix des facteurs

Le choix des facteurs et des valeurs permises de ces facteurs (appelés niveaux), est parmi les points fondamentaux de la méthode des PE. Le principe de base est la minimisation du nombre d'essais tout en maintenant le même niveau de précision. Le but étant de fournir une prise de décision rapide en se basant sur des modèles mathématiques linéaires très simples.

Lorsqu'il n'existe aucune autre contrainte supplémentaire sur les facteurs (input) ou sur les sorties du système (output), il est d'une grande utilité de travailler avec des PE classiques qui ont prouvé une grande efficacité sur le plan industriel et en recherche scientifique (Pillet, 1997)(Goupy, 2006). Lorsque des contraintes sur le choix du nombre de facteurs ou de leurs niveaux existent, il est possible dans ce cas d'utiliser les bases mathématiques qui permettent de construire des PE typiques à chaque situation.

Nous pourrions donner comme exemple de contrainte la non-linéarité des réponses (output) par rapport aux facteurs pris en compte. Une discrétisation plus importante pourra être adoptée, donnant un plus grand nombre de niveaux des facteurs. On ne pourra plus dans ce cas travailler avec des plans standards 2^n ou $2^n \times 3^m$ (tables et graphes de TAGUCHI correspondantes où n et m sont (resp.) le nombre de facteurs d'entrée à 2 et à 3 niveaux ou valeurs (resp.)).

Les interactions (à ne pas confondre avec corrélations) sont aussi considérées comme étant des facteurs, lors de la conception des expérimentations standardisées, tel que c'est le cas pour les tables orthogonales standards de Taguchi. Toutefois, il existe certaines techniques qui permettent de distinguer entre les effets d'un facteur et des interactions où ce facteur fait partie (voir notion de résolution des plans d'expériences (Pillet, 1997)).

3.3.3.2. Choix des niveaux des facteurs et des interactions entre facteurs

Les niveaux des facteurs, c'est-à-dire les valeurs prises par les variables d'entrée lors des expérimentations sont d'une importance capitale dans la conception des plans d'expériences. C'est la raison pour laquelle les mathématiciens ont tracé des règles de choix de ces niveaux afin d'obtenir des résultats fiables, bien interprétables et non biaisés (statistiquement) par l'effet d'un facteur plus qu'un autre. Sans trop détailler, nous reprenons ici ces règles afin de proposer un plan d'expérimentations et le nombre de niveaux des facteurs.

3.3.3.2.1. Degré de liberté (ddl) du modèle du processus étudié

Le ddl du modèle est déduit du degré de liberté de chaque facteur, y compris les interactions. En d'autres termes, c'est le nombre de niveaux que peut prendre chaque facteur (Constant, 1989) (Pillet, 1997) (Wahdame, 2006) (Réf. Dunod, 2000).

Un exemple de calcul du degré de liberté est donné dans ce qui suit :

Le modèle général d'une variable de sortie Y s'écrit :

$$Y = M + \sum_i X_i + \sum_{i,j} X_i X_j \quad (1)$$

Sachant que :

- ✓ M est la moyenne de Y (notée $\bar{Y}$),
- ✓ le degré de liberté (ddl) de chaque facteur X_i est égal au nombre de valeurs prise par ce facteur moins l'unité,
- ✓ le ddl d'une interaction correspond à la multiplication des ddl des facteurs constituant cette interaction.

Exemple :

Considérons un plan d'expériences à trois facteurs d'entrée ($X_i, i \in \{1,2,3\}$), notés A, B et C, et deux interactions significatives, AB et AC (exprimant les $X_i X_j$) ; nous pouvons calculer le degré de liberté (ddl) du modèle par le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Calcul du degré de liberté d'un modèle de sortie Y

	M	A	B	C	AB	AC
Nombre de Niveaux		2	3	2	6	4
ddl	1	1	2	1	2	1

Le degré de liberté du facteur de sortie ou du modèle Y correspond à la somme des ddl des facteurs simples et des interactions. Dans ce cas, le ddl du modèle étudié égal à 8.

Donc la première règle fixe le nombre d'essais minimal à réaliser, correspondant au degré de liberté du modèle.

3.3.3.2.2. Condition d'orthogonalité

La deuxième règle correspond au choix d'un plan orthogonal.

a) Orthogonalité entre les facteurs eux-mêmes :

Deux actions disjointes, c'est-à-dire ne comportant pas de facteurs en commun (interaction y compris), sont orthogonales si à chaque niveau de l'une, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois dans le plan d'expériences.

Prenons un exemple simple afin d'expliquer la notion d'orthogonalité entre deux facteurs A et B. Le facteur A se met à 3 différents états, et le facteur B à 2 différents états ; le plan complet correspond à un plan orthogonal, où les facteurs sont considérés orthogonaux (tableau 3.2).

Cette première contrainte permet de ne favoriser aucun des facteurs, ou autrement ne favoriser aucun niveau par rapport à un autre.

Tableau 3.2 : exemple de facteurs orthogonaux (plan complet)

N° de la combinaison	Niveau de A	Niveau de B
1	1	1
2	1	2
3	2	1
4	2	2
5	3	1
6	3	2

b) Orthogonalité du plan d'expériences

Un plan d'expériences est orthogonal vis-à-vis d'un modèle, si toutes les actions disjointes du modèle sont orthogonales dans le plan d'expériences. De cette règle découle la règle du ppcm (le plus petit commun multiple). Cette règle permet de finaliser le choix des niveaux en fixant le nombre minimal d'essais qui devront être réalisés. Si un autre plan doit être choisi, le nombre d'essais correspondant sera automatiquement un multiple du nombre d'essais du plan minimal.

Pour expliciter cette notion, nous donnons ici un exemple du modèle suivant (Pillet, 1997) :

$$Y = M + A + B + C + D + BC + CD$$

Niveaux 3 3 2 3 6 6

Les actions jointes sont : B et BC, C et BC, C et CD, D et CD, BC et CD

Traçons par la suite le tableau 3.3 qui permet de visualiser le nombre d'essais correspondant à ces actions jointes, et qui permet de déterminer le nombre minimal d'essais.

Nous en déduisons que le ppcm de ce modèle est égal à 18, qui s'avère supérieur au ddl du modèle ; donc le nombre d'essais à adopter est 18 ou ses multiples.

En conclusion, ces deux règles sont les règles de base de construction des plans d'expériences. Sauf qu'il existe encore d'autres règles qui permettent d'affiner plus l'analyse, comme par exemple la notion de résolution des plans, qui permet d'éviter certaines mésinterprétations des résultats obtenus, et permet de dissocier l'interprétation des effets des facteurs de celle des interactions (Pillet, 1997) (Wahdame, 2006).

Tableau 3.3 : Détermination du nombre d'essais

Conditions sur les actions disjointes	Conséquences
A ortho à B	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
A ortho à C	Le plan est un multiple de $3 \times 2 = 6$
A ortho à D	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
A ortho à BC	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
A ortho à CD	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
B ortho à C	Le plan est un multiple de $3 \times 2 = 6$
B ortho à D	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
B ortho à CD	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
C ortho à D	Le plan est un multiple de $3 \times 2 = 6$
D ortho à BC	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$

3.3.4. Analyse de la variance et approche TAGUCHI

3.3.4.1. Effets des facteurs

Analyse de la Variance (ANOVA) permet de mesurer l'effet de chaque facteur d'entrée sur les paramètres à contrôler (fonctions de sortie) relativement à l'évolution de ces derniers par rapport aux variations forcées des facteurs d'entrée (Constant, 1989).

A cette étape, les diagrammes de l'ANOVA et les indicateurs fournis sont utilisés pour évaluer les effets mentionnés plus haut. On en déduira par la suite les facteurs contrôlables du système (Malinvaud, 1981).

Comme cela est montré à la figure 3.1, les résultats de l'ANOVA sont utilisés non seulement aux étapes d'élaboration des PE, mais aussi à l'étape d'optimisation du processus (maximisation du ratio Signal/Bruit (Pillet, 1997)).

3.3.4.2. Approche de Taguchi, rapport Signal/Bruit(S/N) et observation de l'optimum (approche multiobjectif)

3.3.4.2.1. Approche de Taguchi et rapport Signal/Bruit(S/N)

Le rapport S/N (Signal/Noise ratio) est utilisé afin d'optimiser les caractéristiques ou les réponses du système, moyenne et écart-type en même temps, en vue d'augmenter la robustesse de celui-ci. Il est à noter que la moyenne et l'écart-type ne sont pas nécessairement les caractéristiques à optimiser. Le choix des indicateurs de pilotage, correspondant, à un niveau plus affiné à la construction d'indicateurs de performance du système. En effet, cela relève d'une analyse statistique très poussée :

- par exemple, si la population suit la loi normale, la recherche d'une valeur cible, exprimée par la moyenne s'avère raisonnable, vu que la population peut être plus ou moins centrée autour d'une certaine moyenne, qui se trouve donc sujette à l'amélioration continue. La limitation du pilotage par la moyenne est toutefois conditionnée par la dispersion des caractéristiques mesurables, qui ne doit pas dépasser des valeurs importantes ;
- si la population n'est pas centrée autour d'une moyenne ou si la dispersion est très importante, il n'est pas logique d'opter pour un pilotage par moyenne et écart-type. Il est obligatoire dans ce cas :
 - soit de normaliser les mesures par des changements de variables adéquats, permettant de construire, en conséquence, des indicateurs plus complexes, à partir des résultats des échantillonnages de base utilisés. Le pilotage de la production se fera après à partir de ces nouveaux indicateurs ;
 - soit d'essayer de retrouver la loi statistique que suivent les caractéristiques des produits et piloter conformément aux taux de rebus, sujets à la minimisation, par la recherche de la valeur caractéristique cible ;

Dr. Taguchi identifie le bruit du système par l'écart-type résiduel de la variable à contrôler Y par rapport à toutes les catégories de variables ou facteurs d'entrée (figure 3.4).

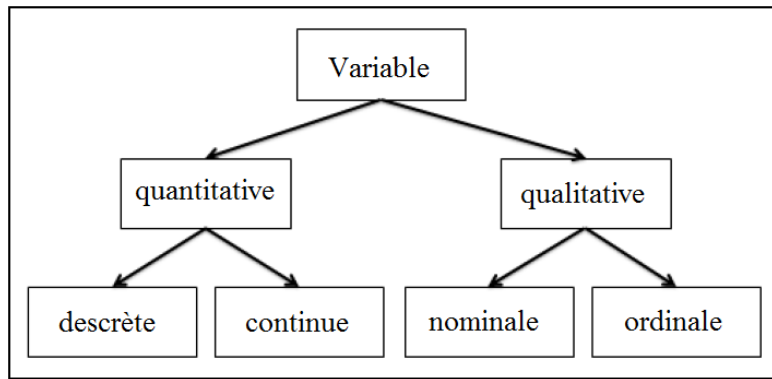


Figure 3.4 : Catégories des variables considérées groupées par (Wahdame, 2006)

Il désigne ce ratio en fonction des politiques d'optimisation à adopter :

- Si l'objectif est la fixation d'un nominal

$$S/N = 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2}{S^2} \right) \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

où S est l'estimation de l'écart-type résiduel de Y et n le nombre d'essais réalisés

- Si l'objectif est la minimisation de la réponse ($y \rightarrow 0$) (cible idéale où y est une variable de sortie centrée réduite)

$$S/N = -10 \log \frac{1}{n} \sum (y_i - 0)^2 \quad (3)$$

- Si l'objectif est la maximisation de la réponse ($1/y \rightarrow 0$) (cible idéale où y est une variable de sortie centrée réduite)

$$S/N = -10 \log \frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{y_i} - 0 \right)^2 \quad (4)$$

Dans toutes ces configurations, le ratio S/N est à maximiser.

3.3.4.2.2. Observation de l'optimum et approche multiobjectif

Nous rappelons que le Dr. Taguchi a développé plusieurs tables constituant une bibliothèque de données interprétables et programmables assez aisément. D'ailleurs, la plupart des logiciels d'analyse de données les contiennent, tels SPSS et STATISTICA, etc.

Après l'automatisation du choix des tables de Taguchi correspondant au choix des facteurs, de leurs interactions et de leurs niveaux, et après la réalisation des essais « ON LINE » par les Holons Ressources eux-mêmes, pilotés par leurs EPA, le calcul des indicateurs de performance (Signal/Bruit ou autre) est immédiat. Dans ce cas, il est possible de faire le tri

des combinaisons des niveaux des facteurs choisis et en déduire les combinaisons optimales (ce tri étant effectué sur le ratio Signal/Bruit). L'intégration de ces combinaisons au sein du processus sera effectuée par l'intermédiaire de Holon Ordre « de production ». Mais un problème opérationnel et un autre tactique subsistent ; ils résident dans la possibilité d'observation des valeurs optimales dans le cas de l'existence plusieurs caractéristiques à optimiser. La détection de l'optimum serait conditionnée par l'existence de plusieurs ratios Signal/Bruit, chacun, à maximiser, correspondant à une caractéristique du Holon Produit en cours de production.

A mon sens, les outils d'optimisation multiobjectifs peuvent nous aider à résoudre cette problématique, en considérant ce problème à partir de plusieurs angles de vue :

- Une première approche correspondrait par exemple à considérer l'optimisation combinatoire dans le cas multiobjectif. L'espace de recherche (espace des alternatives) correspondrait dans ce cas aux divers situations permises par les tables de Taguchi. Nous voyons donc dans cette modélisation, que les tables de Taguchi constituent des contraintes au problème d'optimisation ; les fonctions à maximiser étant les ratios Signal/Bruit.
- Une seconde approche considérera un problème d'optimisation multiobjectif linéaire. La linéarité du problème vient du fait que les trois variantes du ratio S/N correspondent à des fonctions logarithmique. Il est aisé dans ce cas de procéder à un changement de variables et de les linéariser, afin d'en faire ressortir la fonction de objectif (linéaire) à correspondre à chaque ratio S/N ; et par la formulation de la fonction vectorielle de sortie, nous obtiendrons des fonctions affines à optimiser. Il est à noter que même si le modèle de sortie (équation 1) contient des interactions doubles ou triple, ces dernières sont considérées comme facteurs à part entière ; les interactions n'ont aucun lien avec la multiplication au sens des réels. En finalité, il est possible de faire appel à l'algorithme du simplexe dans le cas multiobjectif (Ehrgott, 2005)(El Jai et al., 2016). Les fonctions contraintes correspondront encore ici aux combinaisons permises par les tables de Taguchi. Restera ensuite de régler le problème de passage du discret au continu. En effet, cet algorithme de recherche du simplexe fonctionne avec des variables continues et pas discrètes...
- Dans une troisième approche, nous pouvons adopter des heuristiques ou métaheuristique pour résoudre directement cette problématique. Les algorithmes

génétiques (AGs) constituent en effet un outil très puissant, mais il y aurait un problème au début de ces algorithmes, du fait du nombre très limité des essais (Deb, 2001), contraints par les tables de Taguchi. Le nombre limité d'essais, donc de résultats numériques à fournir comme paramètres d'entrée aux AGs en tant que génération 0, limitera l'espace de recherche de ces derniers et une convergence prématurée (Deb, 2001) pourrait avoir lieu dès les premières itérations de l'algorithme. Dans ce cas, des recommandations sont présentées par (Deb, 2001) pour remédier contre ces problèmes.

- Etc.

En tout cas, on convergera vers une analyse d'un front de Pareto, exprimant l'ensemble des situations optimales au sens multiobjectif. Ce point sera détaillé au chapitre 5.

Le cas où il n'y a qu'une seule fonction à optimiser à une seule variable de décision, correspond à un cas spécial, où toute la démarche sera simplifiée en une analyse de la fonction objectif en fonction de la variable considérée. Dans ce cas de figure, la technique d'observation et de détection de l'optimum changera relativement à la variation de la fonction objectif :

- Usage direct des cartes de contrôle ;
- Modélisation des tendances en fonction de la variables de décision ;
- etc.

En définitive, nous pouvons dire qu'il est possible de faire le lien entre, d'une part, notre vision organisationnelle par l'approche holonique du contrôle qualité et de l'optimisation des paramètres de production, et d'autre part de la détection des optimums d'une manière automatique, mais suivant un raisonnement bien basé sur les outils statistiques et les algorithmes d'optimisation mathématiques existant, relativement à chaque cas de figure (modes de variation des fonctions objectifs en fonction des variables de décision).

3.4. Modélisation UML

Par ses neuf diagrammes, UML 2.0 permet de modéliser la plupart des aspects d'un système. Mais l'utilisation d'un diagramme ou d'un autre dépend du niveau de précision que l'analyste est en mesure de construire (Roques, 2006).

Dans le présent travail, nous nous intéressons à l'architecture (aspect statique) du système proposé, ainsi aux principales interactions entre les différentes entités du système. Ces interactions expriment l'aspect dynamique et les séquences de communication entre instances d'objets, acteurs ou holons considérés.

3.4.1. Point de vue statique (architecture des holons)

La vue statique correspond au diagramme de classes par lequel nous décrivons l'architecture des objets de la méthode proposée (optimisation intelligente d'un processus de production par l'approche Taguchi). La figure 3.6 montre l'architecture (aspect statique) du système d'optimisation des paramètres de fonctionnement.

Nous présentons une brève description de quelques parties du diagramme dans ce qui suit :

- 1) Une EPA, désignant « Entité de Pilotage Ambiant », permet de fournir tous les services demandés par des HR de même type (messages/méthodes appartenant aux classes du diagramme).
- 2) Au sein d'un même HR, la relation qui lie l'EPA et une autre entité de calcul peut être perçue comme relation client/serveur, ou dans les désignations nouvelles comme étant un web service (utile à l'implémentation) ;
- 3) Le détail sur les classes Holon Ressource (machines intelligentes) et '*Process_DB*' (base de données du calcul des performance Processus) est bien expliqué à la figure 2.4 (El Jai et al., 2013) ;
- 4) Lorsqu'un ou plusieurs produits (Holon Produit selon l'architecture PROSA) est affecté par un défaut, la base de données Process est mise à jour en tenant compte de la description du défaut, de sa date, de son effet, de la technique de mesure utilisée et de sa qualité, etc.

Package Optimisation

- 5) Le package optimisation peut exister au sein d'un holon Staff (support) ou peut être inclus au sein des modules EPA des holons ressources (utile à l'implémentation) (Pujo, 2009) (El Jai et al., 2013) ;
- 6) La carte de contrôle de la variable mesurée est mise à jour, et les indicateurs de performances sont calculés par l'Unité de Calcul et de Contrôle (CCU : Calcul Control Unit) ;
- 7) S'il y a une dérive des indicateurs de qualité, un plan d'expériences est lancé afin de réaliser de nouvelles expérimentations ou d'exploiter un REX déjà existant (figure 3.1) ;
- 8) Dans le cas d'un premier jet d'expériences ou lorsque la dérive est très agressive, il est possible de lancer un plan de criblage avant le plan d'expériences de finition. Cela permettrait d'estimer à première vue les facteurs et interactions les plus influençants ;

- 9) L'entité '*Model_Optimization_unit*' (MOU) permet de générer les plans d'expérimentations suivant les tables orthogonales de Taguchi '*Taguchi_Table*' avec la fonction '*table_graph_generate()*' ;
- 10) L'unité de contrôle '*CCU*' communique les résultats du calcul en terme de niveaux de facteurs optimaux, selon la politique d'optimisation considérée (nominale, valeur cible, min-max).

3.4.2. Point de vue dynamique (Interactions entre objets)

Le diagramme de séquences permet d'exprimer les interactions entre entités, externes et/ou internes, par des messages, dont l'écriture est normalisée, donc compréhensible à une large communauté de chercheurs et de spécialistes. Avec le diagramme de séquences, tracé à la figure 3.7, nous décrivons la dynamique entre différents holons du système proposé. Cependant, cette modélisation ne constitue qu'une approche préliminaire, donc un début à une analyse plus poussée pour aller à l'avant vers l'implantation en machine.

Remarque 2

Quelques procédures sont répétées dans le diagramme, spécialement aux étapes de génération du plan de criblage ('*Screening Plan*' (Pillet, 1997)) et du PE ('*Experience Plan*'). Ces répétitions sont désignées par les fragments de références '*Ref_Experience_plan*'.

Remarque 3

A cause de la légère différence entre les deux étapes, recherche du plan de criblage ('*Screening plan*') et génération du plan d'expériences, nous utiliserons le fragment de référence de la figure 3.5 pour les deux étapes avec une modification d'un petit détail mentionné par une flèche noire à la même figure.

Donc deux fragments de référence seront utilisés au diagramme de séquence proposé à la figure 3.7 : '*Ref_Experience_plan_Screening*' de la figure 3.5 et '*Ref_Experience_plan_Modelization*' de même architecture utilisé directement à la figure 3.7.

La figure 3.7 présente le diagramme de séquences préliminaire pour formaliser l'optimisation dynamique des facteurs d'entrée du système, par rapport aux évolutions des paramètres de sortie. Chaque fragment de référence, procédure ou module est présenté de la manière la plus simple que possible afin d'appréhender la base de notre réflexion.

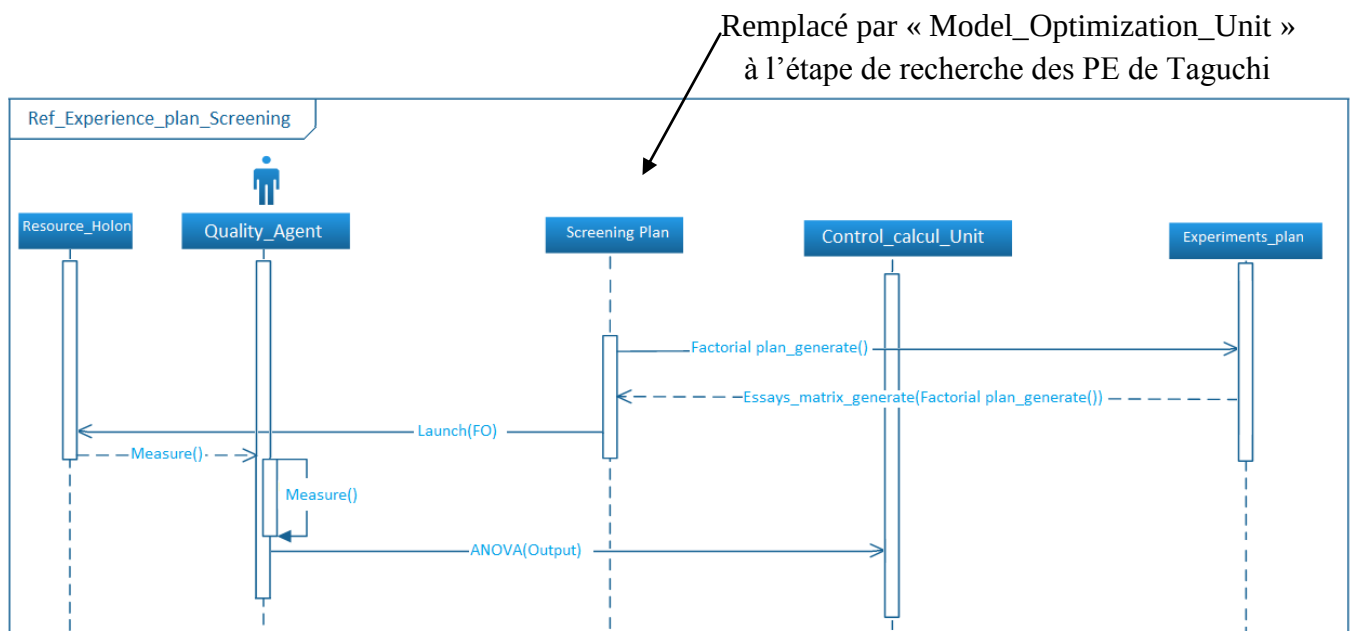


Figure 3.5 : Fragment de Référence « Ref_Experience_plan_Screening »

Les points suivants présentent le cahier des charges textuel des interactions entre holons et instances d'objets du diagramme de séquences :

- 11) L'agent de production lance la production conformément aux paramètres recommandés '*recommended_parameters(product_ID)*' stockés après calcul dans la '*Process_DB*' ;
- 12) L'ordre de production 'Holon Ordre' (HO) est lancé par la fonction '*Launch(FO)*' sur le HR à sa partie matériel '*MResource*' (n'est pas mentionné sur le diagramme) ;
- 13) Après la mesure de la variable considérée par le '*Quality_Agent*', une procédure de contrôle de la conformité ('*product.conformity(product_ID)*') est lancée ;
- 14) Si le Holon produit (HP) est conforme :
 - 14.1) la production continue (fonction '*continue()*') ;
 - 14.2) La '*Process_DB*' est mise à jour ;
 - 14.3) La carte de contrôle est mise à jour ;
 - 14.4) Les indicateurs de performances sont calculés, affichés et stockés dans la base de données ;
 - 14.5) A la deuxième alternative '*alt*' du diagramme de séquences, tout semble normal : '*QualityIndicator = OK*' ;
 - 14.6) la production continue : le message '*production.continue()*' est envoyé vers l'agent de production ('*Production_Agent*') par la '*Control_calcul_Unit*' ;

- 15) Si le produit (HP) n'est pas conforme :
- 15.1) la production s'arrête par la fonction 'production.stop()' déclenché sous forme de message par l'agent production vers le HR (machine de production) ;
 - 15.2) l'agent de la qualité ('Quality_Agent') est informé par un message 'Inform(Product.conformity)' qui stocke normalement la valeur '0 ou 1' ;
 - 15.3) La Base de données 'Process_DB' est mise à jour ;
 - 15.4) La carte de contrôle est mise à jour ;
 - 15.5) Les indicateurs de performances sont calculés, affichés et stockés dans la base de données ;
 - 15.6) La phase relative aux plans d'expériences est lancée ;
- 16) si la dérive est importante (non mentionné sur le diagramme), un plan de criblage ('Screening_plan') est lancé, sinon un plan d'expérimentations standard est lancé ;
- 17) Conformément au fragment de référence de la figure 3.5, une production exceptionnelle, mais non intempestive, est lancée ;
- 18) Dans le cas d'un HR fortement automatisé, la production est lancée automatiquement en variant les paramètres d'entrée ;
- 19) Dans le cas de facteurs d'entrée qui ne peuvent être variés automatiquement, la 'CCU' fournit sous forme d'un tableau les niveaux recommandés à l'expérimentateur (Agent Process) ;
- 20) La boucle de production 'Launch(FO)' suivie de la mesure des propriétés du produit par la fonction 'measure()' continue jusqu'à compléter le plan d'expériences ;
- 21) Cette mesure se déroule entre trois holons principaux :
- a) 'Screening_plan' ou 'Experimet_plan' fournit le plan d'expériences ('Production_Order_Holon') ;
 - b) La machine 'HR' exécute l'ordre de Fabrication du PE désigné par ('Production_Order_Holon') ;
 - c) L'agent qualité 'Quality_Agent' mesure en continue la qualité de la production du 'HR' ;
- 22) Les mesures sont automatiquement stockés dans la base de données ;
- 23) A la mesure manuelle finale, le holon 'Quality_Agent' libère la commande et envoie un message à la 'CCU' afin de générer les résultats de l'Analyse de la variance ('ANOVA(output)') ;

24) Dans le cas d'un système totalement automatisé, la mesure des propriétés des entités (attributs des instances d'objets) peut être effectuée par des dispositifs interactifs ;

25) Le '*Model_Optimization_Unit*' calcule le nouveau modèle linéaire entre la réponse (sortie du système) et facteurs (entrée du système). Il fournit, par la suite, à la base de données '*Process_DB*', les valeurs optimales (recommandées) des niveaux de facteurs '*Recommended_parameters_Update()*' ;

En conclusion, le diagramme de séquences de la figure 3.7 modélise la dynamique de l'échange des messages et instructions entre :

- Holons Ressources (humains ou automatisés) : agent de la qualité, agent process et production, machine de production, etc. ;
- Holon Produit ;
- Holon staff ou EPA (holon staff ou EPA) : '*CCU*', '*Model_Optimization_Unit*', '*Process_DB*', etc.

3.5. Conclusion

La nouveauté de cette étude réside dans le fait de proposer une méthode dynamique et intégrée, qui lie le contrôle qualité (Maîtrise Statistique des Processus) à l'optimisation des facteurs de contrôle d'un processus par l'approche de Taguchi. Certes, l'approche de Taguchi n'est pas visible dans la description textuelle ni au niveau des diagrammes UML proposés, mais nous avons introduit la démarche de modélisation et d'intégration de cette approche aux premières pages de ce chapitre.

Nous rappelons que le choix de l'approche Taguchi est justifié par le fait que c'est l'une des méthodes les plus décrites dans la bibliographie et la plus utilisée en industrie. Ajouter à cela que Dr. Taguchi a procédé à beaucoup de recherches et a produit des tables standards très efficaces pour la conception des plans d'expériences (Pillet, 1997). Ces tables constituent une bibliothèque de données interprétables et programmables assez aisément. D'ailleurs, la plupart des logiciels d'analyse de données les contiennent, tels SPSS et STATISTICA, etc.

D'un point de vue technique, il serait possible au programmeur d'accéder à ces bibliothèques et de créer une interface de manipulation des tables déjà construites sous format informatique par les constructeurs de ces logiciels. D'autre part, la modélisation UML proposée peut être programmée au sein de logiciels d'optimisation ou intégrée par le biais d'une interface électronique, avec des machines intelligentes de production, représentées dans la modélisation par les « Holons Ressources ».

En résumé, le paradigme holonique nous a donc permis d'élargir notre vision aux fonctions « contrôle qualité » et « optimisation du processus ». Il constitue une nouvelle approche (intégrée) qui pourraient vraiment créer un profond changement dans l'approche technique et organisationnelle du contrôle qualité et l'optimisation des paramètres de fonctionnement de l'industrie moderne.

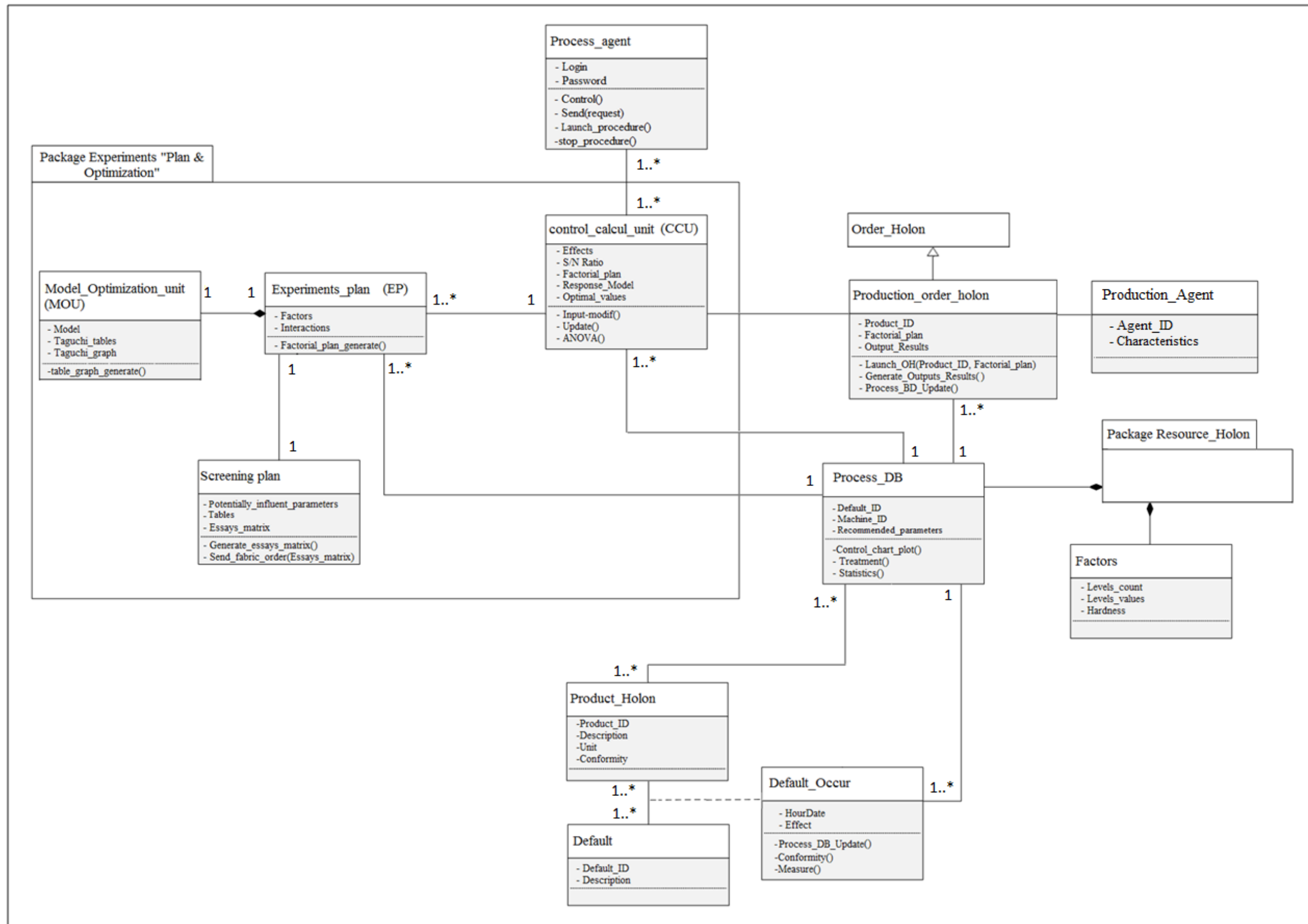


Figure 3.6 : Diagramme de classe du système proposé d'optimisation des paramètres de fonctionnement d'un procédé

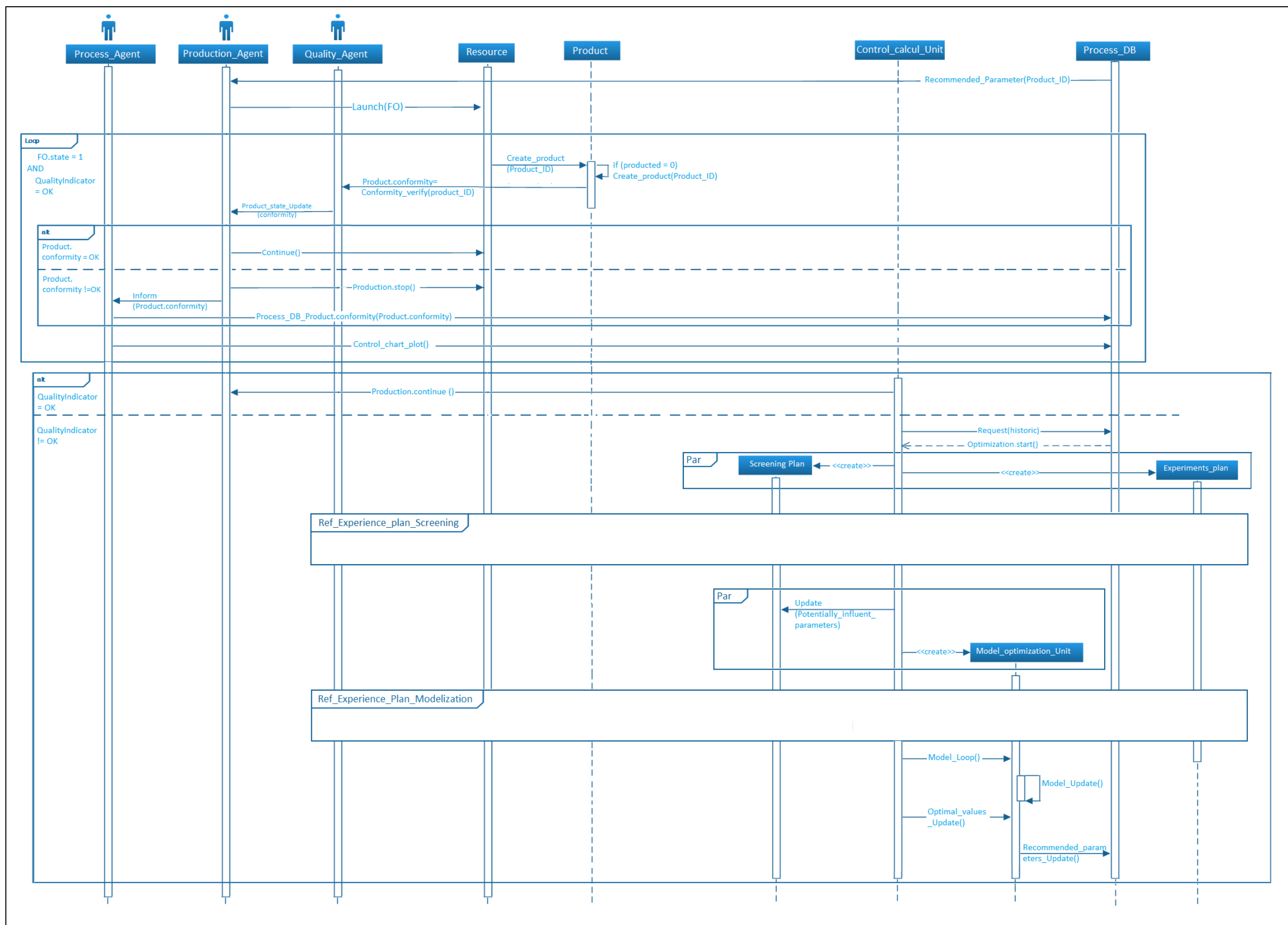


Figure 3.7 : Diagramme de séquence préliminaire du système d'optimisation proposé

Chapitre 4 : Proposition d'une approche Multiobjectifs pour la **correction du plan directeur de production en fonction des** **données de Fiabilité et de sûreté de fonctionnement**

4.1. Introduction et problématique

Dans la plupart des industries, la programmation des opérations de maintenance reste encore une problématique majeure qui continue à susciter l'intérêt des preneurs de décision dans l'industrie, mais aussi des chercheurs et universitaires. Le regroupement des tâches, l'optimisation des périodes d'intervention, la flexibilité de la production par rapport aux interventions préventives et correctives, etc., peuvent être considérés comme des variantes ou des parties de la problématique globale du choix de la politique de maintenance à adopter.

A l'article (El Jai et al., 2013) et au chapitre 2 de ce rapport, nous avons présenté la possibilité d'automatisation de la méthode AMDEC, utilisant l'approche holonique, en vue de fournir une certaine autonomie, intelligence et dynamisme aux entités (machines, HR, ...). La même approche peut aussi être appliquée à la conception d'une nouvelle génération de logiciel GMAO qui pourrait constituer réellement un outil intéressant de prise de décision relatif aux politiques de maintenance adéquates.

Dans cette partie de nos travaux, nous essaierons de développer plus l'aspect analytique du problème en étudiant l'optimisation des interventions en maintenance systématique et en agissant sur la fonction de production elle-même, tout en respectant la quantité de produit dans un horizon de production donné.

L'objectif est donc de construire une nouvelle fonction de production $P_2(t)$ à partir de la fonction $P_1(t)$ qui présente les prévisions de production dans un horizon $[t_0, t_0+T]$. Le nouveau programme de production $P_2(t)$ tient compte des interventions maintenance, des objectifs de fiabilité et de l'état de dégradation du matériel. Cette nouvelle fonction exprime le cumul de la production dans l'intervalle de production considéré $[t_i, t_{i+1}]$ (i étant pair).

Dans ce contexte, la démarche cherche à construire des indicateurs de performance multicritères rassemblant le niveau de production et le niveau de fiabilité souhaité par la société. Le but étant de limiter les degrés de liberté de l'entreprise en termes de choix, plus ou moins théoriques ou idéals, et de fournir des valeurs réalistes de la production et de fiabilité.

4.2. Démarche proposée

4.2.1. Etapes de construction de la fonction P_2

La construction de la nouvelle fonction de production $P_2(t)$ passe par trois étapes principales :

- La première étape consiste à modéliser la loi de fiabilité/dégradation de l'unité étudiée. Cette unité peut être un processus de fabrication relatif à un ensemble de machines, une seule machine ou un composant donné.

Nous adoptons dans ce qui suit la loi de Weibull, qui permet de modéliser le comportement des équipements mécaniques et électromécaniques réparables (Procaccia, 2009).

- La deuxième étape consiste à calculer les périodes d'interventions systématiques sur le processus de production, sur les machines ou les composants, à partir des modèles statistiques de défaillance (Lyonnet, 2000).

La période d'intervention est une fonction du niveau de fiabilité fixé par l'entreprise, et fonction de l'état de dégradation du matériel (exprimé par le coefficient β de la loi de Weibull par exemple (Procaccia, 2009) (Lyonnet, 2000)).

Dans le cas de l'étude d'une chaîne de production, c'est la production estimée qui sera corrigée directement, constituant la fonction corrigée P_2 qui intègre toutes les autres données de sûreté de fonctionnement et d'objectifs de fiabilité. Par la suite, à chaque machine ou composant i correspond une fonction de production P_1^i qui sera corrigée par une fonction P_2^i .

Remarque 1

Dans le cas de l'étude d'un processus de production, c'est le Plan Directeur de Production (PDP) qui doit être corrigé. Par contre, en cas d'étude d'une partie du processus de production, machine ou groupe de machines, il serait obligatoire de passer par une hiérarchisation de la production par machine et d'appliquer la démarche proposée sur chaque poste de travail.

- La troisième étape de notre démarche consiste à construire une nouvelle fonction de production $P_2(t)$ (qui tient compte de l'état de dégradation du matériel) à partir de la fonction $P_1(t)$, qui représente les prévisions de production sur un horizon $[t_0, t_0+T]$. La construction du nouveau programme de production P_2 doit se faire de la manière la plus simple possible, à cause des diverses contraintes techniques et organisationnelles qui vont s'ajouter,

spécialement au niveau des cadences nominales et capacités maximales de production.

4.2.2. Lien avec l'approche holonique et les machines intelligentes

Dans le cas de machines intelligentes de production, désignées dans ce qui a précédé par Holons Ressources, ces machines seront en mesure de proposer la nouvelle cadence de production à partir de la construction de la nouvelle 'fonction cumul' de production P_2 .

De ce fait, les responsables production informent la machine de leur souhait, en termes de production estimée P_1 , à l'horizon souhaité. Le holon Ressource distribue cette production P_1 conformément aux contraintes de sûreté de fonctionnement, de fiabilité et d'interventions systématiques, en créant le nouveau programme P_2 .

En cas de dépassement de la cadence nominale de production, le Holon Ressource s'auto-corrige en modifiant certains paramètres d'entrée, que nous allons voir un peu plus loin, telles que la périodicité d'intervention systématique, la production initiale (de la première journée, ou de la première semaine) notée b_0 dans les développements qui suivent. La possibilité de dépassement de la cadence nominale stipule que le HR considéré dispose d'une réserve de capacité, afin de ne pas causer arrêt immédiat de ce dernier (voir figure 4.3).

4.3. Hypothèses

4.3.1. Cadence nominale ou maximale de production

Jusqu'à présent, la démarche proposée est valable pour une production qui ne présente pas trop d'irrégularités, afin de pouvoir construire des fonctions $P_2(t)$ assez proches en allure, présentant la même cadence de production ($\frac{\Delta P_2}{\Delta t}$) en chaque période $[t_i, t_{i+1}]$ (où i est paire). Le cas du changement agressif de cadence de production peut aussi être envisagé, en travaillant toujours avec le même raisonnement. Dans la même optique, notre démarche permettra un lissage de la production par rapport aux interventions maintenance qui seront fixées au préalable au début de chaque terme $[t_0, t_0+T]$, en essayant de maintenir une cadence de production plus ou moins régulière.

4.3.2. Etat du matériel en phase de maturité

Nous considérons dans l'étude qui suivra que le matériel se trouve dans la phase de maturité, exprimé par la seconde période (période B) de la courbe en baignoire. La loi statistique suivie

par la fonction fiabilité dans ce cas correspondrait à la loi exponentielle ou à une loi de Weibull de constante ($\beta = 1$) pour les composants mécaniques et électromécaniques.

Autrement, la dégradation du matériel serait plus importante ($\beta > 1$), et les résultats d'une telle démarche ne donnerait pas ses fruits.

4.4. Espace des alternatives et contraintes liées au modèle proposé

L'objectif de la construction d'une nouvelle fonction $P_2(t)$ est de présenter un programme de production lissé, déterminé à l'avance afin d'éliminer les aléas de production causés par les interventions de maintenance correctives et préventives. La fonction $P_2(t)$ constitue donc une correction du programme de production $P_1(t)$ fourni par les prévisions statistiques (Procaccia, 2009), tout en maintenant, sur l'horizon fixé, les mêmes quantités produites (en termes de moyennes).

Nous présentons aux paragraphes suivants, les étapes de construction du modèle mathématique de cette nouvelle fonction P_2 .

4.4.1. Contraintes sur la capacité de production

4.4.1.1. Production moyenne calculé sur tout l'horizon de production $[t_0, t_0+T]$

Dans l'intervalle (horizon de production) $[t_0, t_0+T]$, la quantité de production fournie avec la fonction P_1 doit être égale à la quantité de production fournie par la nouvelle fonction P_2 . Cette donnée constitue la première contrainte ou information relative au domaine de validité du modèle, formulée en termes d'intégrales ou de sommation et fixée par le preneur de décision.

Comme mentionné auparavant, $P_2(t)$ correspond au cumul de la production, à l'instant t , relatif aux intervalles utiles de production $([t_i, t_{i+1}])$. La fonction P_2 étant, linéaire, commence par une valeur initiale b_0 et évolue linéairement suivant une vitesse ou cadence de production, notée a [*pièces produites/unité de temps*]. Cette expression correspond à la définition de la fonction P_2 . Formulée en termes d'intégrale, nous obtenons l'expression de la contrainte n° 1 :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t)dt = \sum_j P_2(t_j) \quad (1)$$

Remarque 2

Relativement à la faisabilité d'un programme de production avec dégradation du matériel connu, cette formulation peut être exploitée pour vérifier, tester et valider la

possibilité de produire avec une cadence ou vitesse de production maximale, c'est-à-dire lorsque la fonction P_1 prend sa valeur maximale en certains intervalles de production.

Remarque 3

Le test, dont on parle ici, vient du fait que la fonction P_2 intègre à la fois des paramètres de production (cadence ($\frac{\Delta P_2}{\Delta t}$)), temps d'interventions (TTR) ainsi que des données de fiabilité (niveau de dégradations et performances). Cela correspond donc à la correction ou à la vérification de la faisabilité d'un programme de production donné P_1 , en fonction de l'état de dégradation des équipements.

Remarque 4

Si par calcul, la fonction P_2 ne permet pas d'atteindre un certain niveau de production, physiquement réalisable, cela voudrait dire que, physiquement, les machines auraient du mal à supporter un certain niveau de production avec un état de dégradation courant.

La figure 4.1 présente la logique de construction de la nouvelle fonction P_2 , sous la contrainte d'équivalence des productions à l'horizon souhaité $[t_0, t_0+T]$.

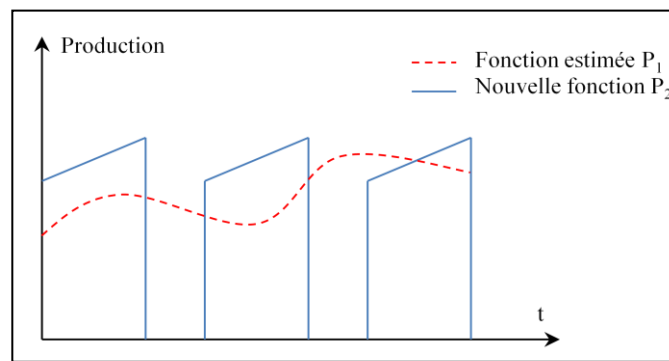


Figure 4.1 : Construction de P_2 à partir de P_1

4.4.1.2. Capacité de production sur l'intervalle $[t_i, t_i+MTTR+MTBF]$

Cette contrainte exprime l'égalité des moyennes de production par période et non pas sur tout l'horizon de production considéré. C'est une contrainte à ajouter afin de prendre en compte les variations de production P_1 par période mais aussi pour chercher à lisser et à réguler la production P_2 sur tout l'horizon $[t_0, t_0+T]$.

Pour toutes les périodes de production, on partage la production P_1 , étalée sur la longueur MTTR où P_2 est nulle, sur les deux côtés de droite et de gauche. On rajoute donc la moyenne

de production de P_1 aux moyennes de production P_2 correspondant à chaque périodes $[t_i, t_i+MTTR+MTBF]$. La figure 4.2 montre le mécanisme de construction de la fonction P_2 sur un intervalle $[t_{i-2}, t_{i-1}]$, de longueur égale à MTBF (ou équivalent) où l'on remarque l'ajout de la production P_1 à droite et à gauche de l'intervalle étudié.

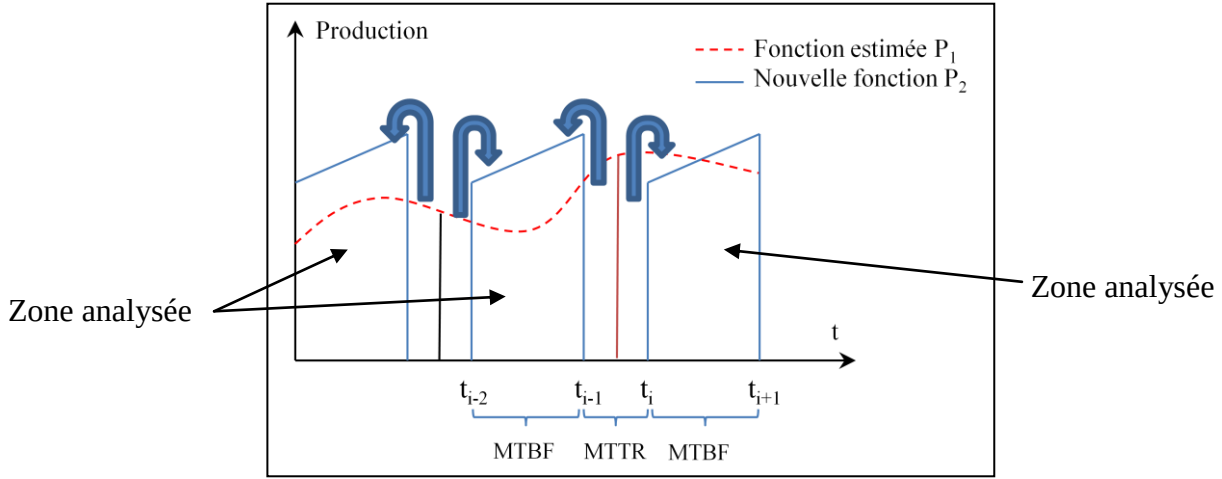


Figure 4.2 : Construction de la fonction P_2 entre $[t_{i-2}, t_{i-1}]$

La formulation mathématique de cette contrainte est écrite sous la forme suivante (2).

$$P_2(t_{i+1}) \geq \int_{t_i}^{t_i+MTBF} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+MTTR} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}+MTTR} P_1(t) dt \quad (2)$$

Dans notre cas, nous n'allons pas adopter le MTBF comme période systématique, mais nous notons un temps de remplacement en général désigné par t_f , dans le but de le varier et d'estimer son influence comme étant l'un des paramètres contrôlables du couple (production, maintenance).

Nous désignons aussi le temps de réparation par t_{rep} au lieu du MTTR.

L'équation (2) devient alors :

$$P_2(t_{i+1}) \geq \int_{t_i}^{t_i+t_f} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+t_{rep}} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}+t_{rep}} P_1(t) dt \quad (2\text{-bis})$$

4.4.1.3. Fréquence d'interventions et capacité maximale de production

La fréquence des interventions est parmi les paramètres qui influencent le plus la politique de maintenance et surtout de production. Les arrêts de production programmés induisent une perte de rendement considérable, et par la suite une cadence de production non lissée et parfois trop élevée après réalisation des interventions, dans le but de compenser les pertes d'arrêts de production.

Au niveau de notre approche, nous considérons que l'horizon de production étudié $[t_0, t_0+T]$ est composé de n périodes. Chaque période correspond à l'union d'un intervalle de *Bon Fonctionnement* (TBF)_i et d'un intervalle de *Réparation*.

Cette expression peut être formulée comme suit :

$$n = \left\lfloor \frac{T}{MTBF + MTTR} \right\rfloor \quad (3)$$

Le nombre d'interventions n correspond à la partie entière ($E(x)$) du rapport entre la longueur de l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ par la somme du {Temps Moyen de Bon Fonctionnement+Temps Moyen de Réparation}.

Etant donné un niveau de fiabilité R , la périodicité de remplacement (t_f) est donnée par la formule (4), tirée de la loi de Weibull (Procaccia, 2009) :

$$t_f = \eta \ln\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \gamma \quad (4)$$

Où β , η et γ sont les trois paramètres de la loi de Weibull.

En remplaçant MTBF par t_f et MTTR par t_{rep} dans l'expression (3), nous obtenons :

$$n = \left\lfloor \frac{T}{t_f + t_{rep}} \right\rfloor \quad (5)$$

Le nombre d'interventions n permet de jouer sur la cadence de production et sur la fiabilité des machine sur une période $[t_i, t_i+t_f+t_{rep}]$:

- En forçant les équipements ou le processus de production à travailler à une cadence donnée, sous des contraintes de fiabilité fixées par les responsables de l'entreprise.

Nous voudrions mentionner ici que le concept de niveau de fiabilité n'est pas réellement ou directement maîtrisable, car cela correspond à un modèle mathématique exprimant la fréquence d'occurrence de pannes sur chaque composant ou matériel. La loi de Weibull fait partie des lois de probabilités les plus utilisées pour modéliser la dégradation des systèmes **monocomposants** (Zille, 2009).

Le cas de l'analyse des dégradations multicomposants est encore en cours d'étude, même si l'analyse de la maintenance des systèmes complexes date des années 80.

La présente étude s'intéresse donc au cas monocomposant, mais le développement de la fonction P_2 proposée peut s'étaler après au cas multicomposants.

Dans sa thèse de doctorat, V. Zille présente une large bibliographie traitant l'analyse de la dégradation des systèmes sous l'aspect monocomposant et multicomposants (Zille, 2009). Cela pourrait donner naissance à un problème d'optimisation multiobjectifs regroupant des contraintes et des objectifs de production et de maintenance (Ehrgott, 2005).

- Un grand nombre d'interventions générera le risque que les machines doivent travailler à une cadence très élevée pour compenser la perte de rendement dues aux arrêts préventifs ; et il est clair que la cadence de production est limitée par la capacité nominale de production.
- Un grand nombre d'interventions préventives correspond à la réduction de la valeur de t_f et par la suite l'augmentation de la fiabilité R . Cela paraît clairement au niveau de l'expression (3).
- En contre partie, une faible fréquence d'interventions préventives permettrait d'avoir une quantité de production plus élevée, en réduisant la fiabilité, et par la suite générer des arrêts correctifs.

Nous pouvons voir clairement que nous obtenons deux objectifs conflictuels qui correspondent à la maximisation de la fiabilité et à la maximisation de la cadence de production en même temps. La figure 4.3 montre l'effet de l'accumulation de la production P_1 sur la construction de la fonction P_2 . L'augmentation de la fréquence des interventions fait gonfler le programme de production P_2 pour compenser les retards dus aux interventions de maintenance (MTTR ou t_{rep}).

Il est nécessaire dans ce cas de poser une contrainte sur la production (relative à la fonction P_2) sur chaque période $[t_i, t_i + t_f + t_{rep}]$, puisque la capacité de production du processus ou des machines est limitée par une cadence nominale, voire maximale.

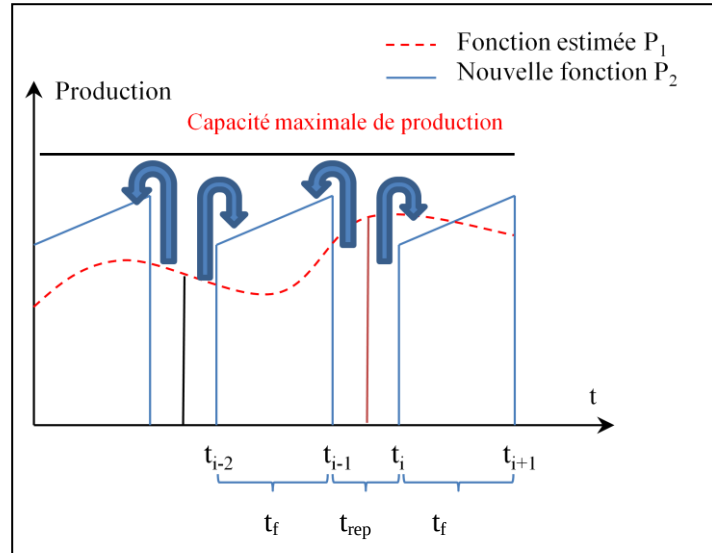


Figure 4.3 : Risques liés à une fréquence élevée d'arrêts préventifs

Cette contrainte est exprimée par l'inéquation (6) suivante :

$$P_2(t) \leq c \times t_f \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (6)$$

Où t_i : instant de démarrage du programme P_2 qui se déroulera entre les instants (t_i) et $(t_i + t_f + t_{rep})$;

i : entier pair

c : capacité nominale de production

4.5. Formulation du problème sous forme d'un Problème d'Optimisation Multiobjectifs (POM)

Après avoir détaillé la problématique de construction du nouveau programme de production P_2 à partir du programme initial P_1 , en tenant compte des contraintes de fiabilité des équipements et de cadence de production, nous introduisons ici une formulation mathématique simple du problème considéré.

La fonction P_2 est considérée linéaire par intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ avec i une variable entière paire.

Cette fonction s'écrit donc (voir la figure 4.3) :

$$\begin{cases} P_2(t) = \begin{cases} P_2^i = a_i t + b_i \text{ sur } [t_i, t_{i+1}] & \text{si } i \text{ est paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Avec } \begin{cases} a_i : \text{cadence de production} = \frac{dP_2^i(t)}{dt} \\ b_i = P_2^i(t_i) \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

Pour simplifier, au niveau de cette première étude, nous considérons la même cadence de production pour toutes les périodes $[t_i, t_{i+1}]$ avec i paire. Cette hypothèse permet d'avoir le même niveau de fiabilité durant toutes les périodes de production.

Nous écrivons donc $a_i = a \quad \forall i \text{ paire}$

Ainsi, le POM (Problème d'Optimisation Multiobjectif) s'écrit :

Maximiser (R, a)

Sous contraintes :

$$g_1(t_f, t_{rep}) = \int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt - \sum_1^n P_2(t_{2k-1}) = 0 \quad 1 \leq k \leq n \quad (8)$$

$$g_2(t_f, t_{rep}) = P_2(t) - c \times t_f \leq 0 \quad (9)$$

$$g_3(t_f, t_{rep}) = P_2(t) - \int_{t_i}^{t_i+t_f} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+t_{rep}} P_1(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}+t_{rep}} P_1(t) dt \geq 0 \quad (10)$$

$$t_f = \eta \ln\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \gamma \quad (4)$$

4.6. Développement du problème

Dans cette section, nous allons développer la formalisation présentée à la section précédente, en considérant que la fonction P_1 est déjà connue, du fait qu'elle est déterminée explicitement à partir des estimations statistiques de la production. La fonction P_2 est telle que présentée au système (7), linéaire par intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ avec i un entier pair.

4.6.1. Egalité des moyennes de production sur l'horizon de production

4.6.1.1. Développement de l'équation caractéristique de la contrainte n° 1

L'équation (8) s'écrit :

$$g_1(t_f, t_{rep}) = \int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt - \sum_1^n P_2(t_{2k-1}) = 0 \quad (8)$$

Comme déjà mentionné, la fonction P_1 est supposé connue, donc sa moyenne sur $[t_0, t_0+T]$ $\int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt$ le sera aussi, On la notera C_1 .

D'après l'écriture du système (7) :

- P_2 est linéaire par intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ à l'horizon $[t_0, t_0+T]$
- P_2 est non nulle sur $[t_i, t_{i+1}]$ si i est pair : $i = 2k$
- P_2 est nulle sur $[t_i, t_{i+1}]$ si i est impair : $i = 2k+1$ (à partir de la figure 4.3 : $t_{i+1} = t_i + t_{rep}$)
- P_2 désigne le cumul de la production et prenant en compte sa périodicité :

$$\sum_{k=1}^n P_2(t_{2k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} P_2(t_{2k+1}) \quad (11)$$

Ce qui donne :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt = c \times T = \sum_{k=0}^{n-1} P_2(t_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (at_{2k+1} + b_{2k+1}) \quad (12)$$

Pour tout intervalle $[t_{2k}, t_{2k+1}]$, et relativement à la figure 4.4, la sommation de l'équation (12) s'appliquera selon la rampe « $P_2^k(t) = a t + b_{2k}$ ». Ce qui donne :

$$b_{2k} = b_{2k+1} \quad (13)$$

$$\text{et} \quad t_{2k+1} = t_{2k} + t_f \quad (14)$$

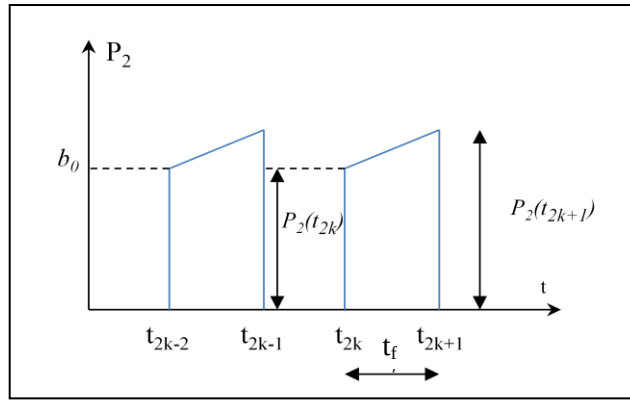


Figure 4.4 : Représentation de la fonction P2 sur $[t_{2k}, t_{2k+1}]$

L'équation 12 devient :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt = c \times T = \sum_{k=0}^{n-1} P_2(t_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (at_{2k+1} + b_{2k+1}) \quad (15)$$

Nous obtenons finalement :

$$c \times T = a \times \sum_{k=0}^{n-1} t_{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{2k} \quad (16)$$

Remarque 5

Le temps t_f exprime la période de remplacement systématique. Donc le choix de la politique de la maintenance dépend fortement des valeurs de cette variable de décision. Puisque, par hypothèse t_{rep} est choisi constant, t_f peut s'exprimer en termes de nombre d'interventions sur l'intervalle de production $[t_0, t_0+T]$.

Afin de développer plus l'expression (16), cherchons donc à exprimer les instants t_{2k} , t_{2k+1} et les b_{2k} en fonction de l'instant initial t_0 , de la variable de décision t_f , des données logistiques et organisationnelles t_{rep} et de la valeur de n , la fréquence d'interventions sur l'intervalle étudié.

Pour k variant de 1 à $n-1$, et à partir de la représentation de P_2 rapportée à la figure 4.3, par récurrence, il est clair que :

$$\begin{cases} t_{2*1} = t_0 + 1 \times (t_f + t_{rep}) \\ t_{2*2} = t_0 + 2 \times (t_f + t_{rep}) \\ \dots \quad t_{2*k} = t_0 + k \times (t_f + t_{rep}) \end{cases}$$

où t_0 représente l'instant de départ de l'analyse ou bien c'est l'instant initial du lancement de la production.

L'expression des instants t_{2k+1} est donnée par l'équation (17) :

$$t_{2k} = t_0 + k \times (t_f + t_{rep}) \quad (17)$$

$$t_{2k+1} = t_{2k} + t_f = t_0 + t_f (k + 1) + k t_{rep} \quad (18)$$

Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} (t_0 + k \times (t_f + t_{rep})) = n t_0 + \frac{n(n-1)}{2} (t_f + t_{rep}) \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (t_0 + t_f (k + 1) + k t_{rep}) = n t_0 + t_f \times \frac{n(n+1)}{2} + t_{rep} \frac{n(n-1)}{2} \quad (20)$$

Calculons maintenant la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n b_{2k}$ présentée à la formule (16).

Remarque et hypothèses additionnelles

- À partir de l'équation (13), sur l'intervalle $[t_{2k}, t_{2k+1}]$, nous avons montré que :

$$b_{2k} = b_{2k+1}$$

- Afin de fixer le même niveau de dégradation sur toutes les périodes de production, et afin d'avoir la régularité de la production, il est conseillé de forcer la même cadence de production sur tous les intervalles. A partir de la figure 4.5, nous notons :

$$P_{2min}^i = b_0 \text{ et } P_{2max}^i = P_2(t_{2k+1}) \text{ (figure 4.5)}$$

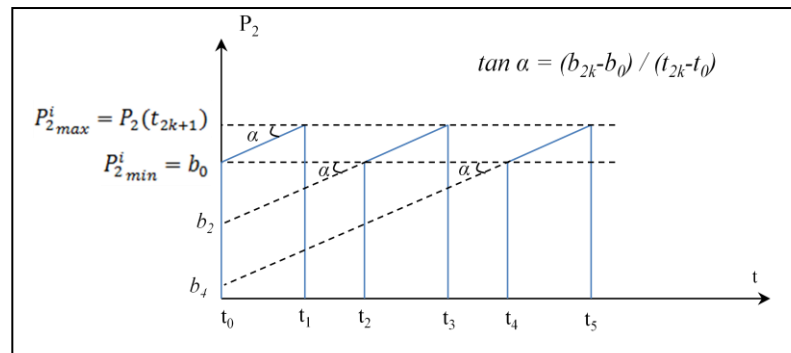


Figure 4.5: Représentation des b_{2k} sur l'axe P_2

- Il est possible d'étudier d'autres profils de la fonction P_2 si d'autres contraintes de production existent.

Donc, à partir de la figure 4.5, nous obtenons :

$$b_{2k} = (t_{2k} - t_0) \tan(\alpha) + b_0 = a (t_{2k} - t_0) + b_0 \quad (21)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k} = a \sum_{k=0}^{n-1} t_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (b_0 - at_0) = a \sum_{k=0}^{n-1} t_{2k} + n(b_0 - at_0) \quad (22)$$

Nous remplaçons dans l'équation (22) par l'expression de $\sum_{k=0}^{n-1} t_{2k}$; on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k} = a(n t_0 + \frac{n(n-1)}{2}(t_f + t_{rep})) + n(b_0 - at_0) \quad (23)$$

Remplaçons maintenant, dans l'équation (16), par les expressions des sommes des b_{2k} et t_{2k} relatifs aux équations (20) et (23) ; nous obtenons ainsi :

$$a n \left(t_0 + t_f \times \frac{(n+1)}{2} + t_{rep} \frac{(n-1)}{2} \right) + a n \left(t_0 + \frac{(n-1)}{2} \times (t_f + t_{rep}) \right) + (b_0 - at_0) = c \times T$$

$$a = \frac{c \times T - (b_0 - at_0)}{n (2t_0 + n t_f + (n-1)t_{rep})} \quad (24)$$

Si nous considérons de plus que l'instant initial t_0 est l'instant 0, nous obtenons ainsi l'équation caractéristique (25) :

$$a = \frac{c \times T - b_0}{n (n t_f + (n-1)t_{rep})} \quad (25)$$

$$\text{Où } n = \left\lfloor \frac{T}{t_f + t_{rep}} \right\rfloor \quad (5)$$

4.6.1.2. Analyse de l'équation caractéristique de la première contrainte

Nous pouvons voir que l'équation (22) correspond à la courbe caractéristique de l'égalité entre la moyenne de la production P_1 et la fonction cumul P_2 , définie par le système (7), sous hypothèse de l'égalité des a_i sur les intervalles $[t_{2k}, t_{2k+1}]$.

L'équation contient principalement les variables déjà discutées aux sections précédentes, à savoir la cadence de production a (exprimant le nombre de pièces produites par unité de temps), la production initiale b_0 , la fréquence d'interventions n , la longueur de l'horizon de production T , la période de remplacement systématique t_f et le temps de réparation t_{rep} .

Nous étudions par la suite l'effet de chaque paramètre sur la cadence de production « a ».

4.6.1.2.1. Effet de la période de remplacement systématique t_f (Temps de Bon Fonctionnement)

L'équation (25) permet d'ajuster la cadence de production proposée « a » seulement en ajustant la période de remplacement t_f . La fonction a n'est pas une fonction régulière. Nous ne pouvons l'analyser plus à cause de sa complexité. Cette complexité est exprimée par la présence de la fréquence n liée au temps de bon fonctionnement choisi t_f .

De ce fait, nous allons tracer la courbe caractéristique de la cadence de production a en fonction de t_f afin d'évaluer davantage son évolution.

4.6.1.2.2. Effet de la valeur des productions de départ b_0

A partir de l'équation (25), il est clair que la production de départ b_0 est un paramètre qui permet de réduire la cadence de production, et par la suite, jouer sur la fiabilité des équipements.

Nous considérons dans ce qui suit, une durée de remplacement t_{rep} constante afin de tracer l'évolution de la cadence de production et de la fiabilité en fonction de la production de départ b_0 .

4.6.1.2.3. Relation de la cadence de production avec la fiabilité des équipements

Conformément à l'équation (4) et étant donné un niveau de dégradation, exprimé par les constants de la loi de Weibull (γ , β , η), la fiabilité des systèmes décroît par rapport à la période de remplacement systématique, c'est-à-dire par rapport au Temps de Fonctionnement t_f . Donc le choix de la politique de production affecte directement la fiabilité de l'équipement considéré en passant par la variable de décision t_f .

Nous pouvons procéder d'une manière inverse, en fixant un niveau souhaité de fiabilité R , calculant la période de remplacement systématique et remontant vers le choix d'une cadence de production a .

4.6.1.2.4. Récapitulation et espace des alternatives (valeurs permises de t_f)

Après cette brève analyse de l'équation caractéristique (25), nous concluons que l'action sur la variable t_f permet d'ajuster en même temps la cadence de production proposée, relative au programme de production corrigé P_2 , ainsi que la fiabilité de l'équipement analysé.

Nous considérons donc initialement que l'espace des alternatives est constitué des différentes valeurs que peut prendre t_f . Seul son ajustement permettra au preneur de décision de trouver un compromis entre fiabilité du système et cadence de production, exprimant les fonctions-objectifs fixées au début de cette étude. Il n'y aurait donc pas une priorité entre production et maintenance mais c'est un compromis qui doit être instauré.

4.6.1.3. Simulation de la première équation caractéristique (8) du problème

Afin de visualiser l'évolution des différentes fonctions objectifs (a , R) relativement à la variable de décision t_f , nous avons eu recours à la proposition de données (situations) qui peuvent exister dans la réalité, surtout relativement à l'industrie des semi-conducteurs, en attendant de recevoir des données réelles afin de tester la méthode sur un cas pratique.

4.6.1.3.1. Proposition de données numériques

Nous rapportons ci-dessous un exemple de données pour réaliser le tracé et l'analyse de la courbe caractéristique :

- Temps de réparation : $t_{rep} = 24$ h, relative à une journée de travail ;
- La valeur de la production initiale : $b_0 = 500$ unités ;
- Longueur de l'intervalle de production : $T = 2160$ h, relatives à 3 mois de production en continu ;
- Cadence nominale relative au programme de production P_1 : $c = 15.000$ pièces/jour ;
- Nous posons un temps de remplacement systématique minimal t_f de 168 h (7 jours de production) que nous varions dans le sens croissant ;
- Une journée compte 24 h de travail ;

4.6.1.3.2. Simulation

a) Cadence de production a en fonction du temps de remplacement systématique t_f

Nous reprenons les équations (25) et (5) :

$$a = \frac{c \times T - b_0}{n (n t_f + (n - 1) t_{rep})} \quad (25)$$

Où $n = \left\lfloor \frac{T}{t_f + t_{rep}} \right\rfloor$ (5) avec $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt = c$

La figure 4.6 présente la courbe $a = f(t_f)$ tracée sur Matlab. La discontinuité de la courbe est causée par l'introduction de la fréquence de remplacement systématique n exprimée par

l'équation (5). Pour pousser l'analyse, nous avons tracé la courbe $n = f(t_f)$, représentée à la figure 4.7.

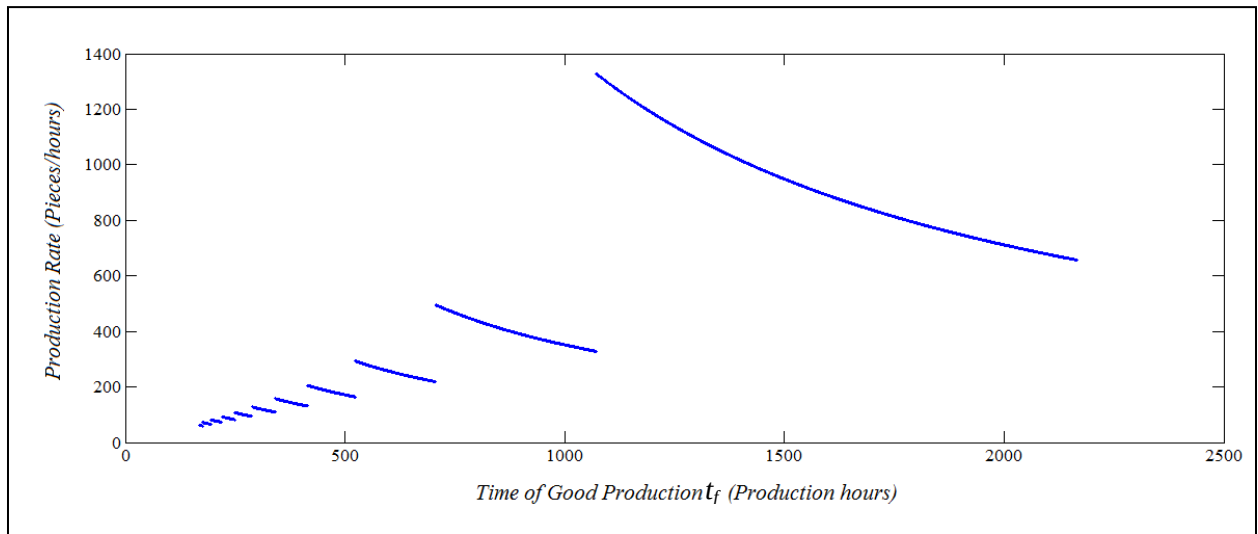


Figure 4.6 : Cadence de production a VS temps de remplacement systématique t_f

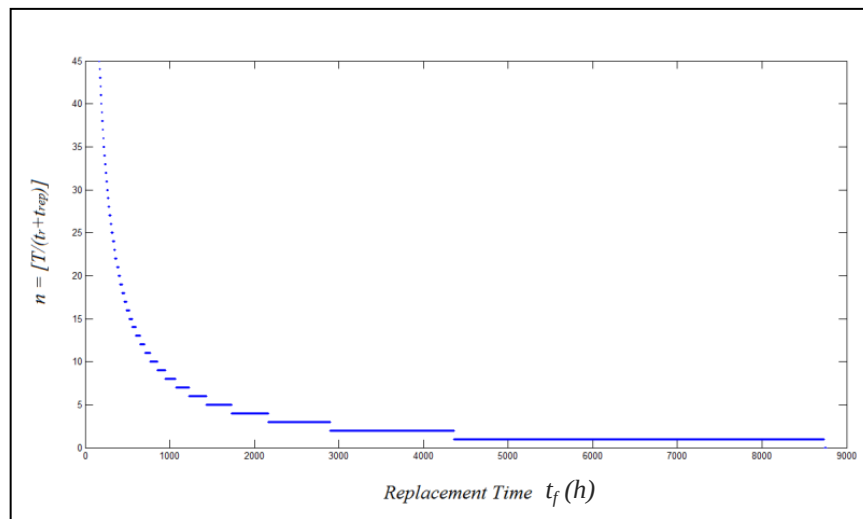


Figure 4.7 : Fréquence d'interventions n VS temps de remplacement systématique t_f

Nous pouvons voir que la courbe de la figure 4.7 correspond à une hyperbole **par période**. En conséquence, par ce tracé, nous avons obtenu les valeurs préliminaires que peut prendre la cadence de production a en variant le temps t_f .

b) Cadence de Production en fonction de la Fiabilité R (Espace des fonctions-objectifs)

Comme cela est mentionné au début du chapitre, à la section 4.2, dans le cas des systèmes réparables, les lois Gamma sont les plus utilisées. En effet, la loi de Weibull permet de modéliser l'occurrence des défaillances ou le temps de Bon Fonctionnement des unités

industrielles (mécaniques et électromécaniques). Mais on ne considère généralement que le cas monocomposant, où l'interaction entre dégradation des équipements est négligée.

Afin de compléter la simulation et de tracer l'espace des fonctions, nous utilisons l'expression de la fiabilité, de l'équation (26) tirée de l'équation (4):

$$R(t_f) = e^{-\left(\frac{t_f - \gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (26) \quad \Leftrightarrow \quad (4)$$

Nous prenons par exemple : $\beta = 0,8$ $\gamma = 0$ $\eta = 300$ h

La courbe de la figure (4.8) présente le comportement connu de la loi de fiabilité modélisée par la loi de Weibull à 3 paramètres. Cette loi correspond à la fiabilité de l'équipement de production.

A part les données présentées pour la simulation, nous avons augmenté l'horizon de production à une année, relative à $T = 365$ jours, afin de voir à plus long terme l'influence du choix du temps de production t_f .

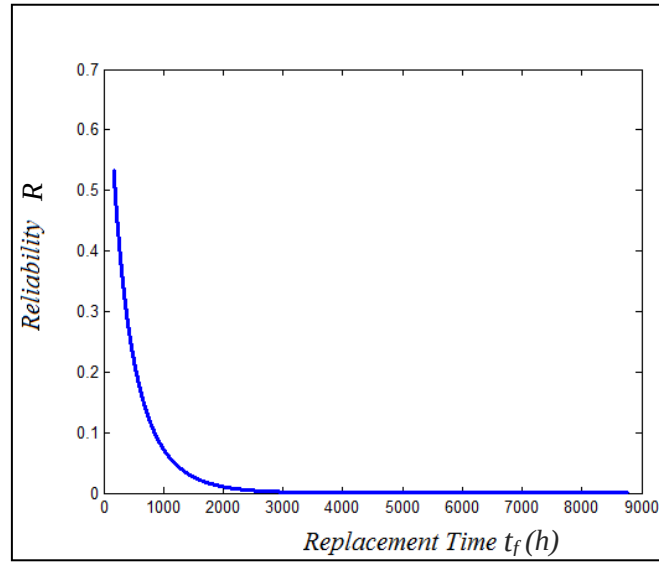


Figure 4.8 : Fiabilité R en fonction du temps de fonctionnement t_f

Nous rappelons que cette schématisation correspond à la première contrainte, exprimée par l'équation (8), où la durée de réparation t_{rep} est supposée constante.

$$g_1(t_f, t_{rep}) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_1(t) dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_2(t) dt = 0$$

La figure 4.9 permet de visualiser l'influence de la variable de décision t_f sur les deux fonctions objectifs à maximiser, la cadence a et la fiabilité R . Nous pouvons voir ainsi que la fiabilité caractérisant ce système possède une valeur maximale au voisinage de 55% à 168

heures de fonctionnement, qui est la durée minimal de fonctionnement pour cette simulation, avant d'effectuer une intervention systématique. La cadence de production « a » estimée correspond dans ce cas à 67 pièces produites par heure.

Si maintenant nous choisissons d'adopter une périodicité de la maintenance systématique de t_f égale à 600 heures, la fiabilité du système chute vers une valeur approximative de 20% et la cadence de production « a » est estimée dans ce cas à 600 pièces par heure.

Au bout de 2000 heures continues de fonctionnement, la fiabilité est nulle et le système n'est plus exploitable.

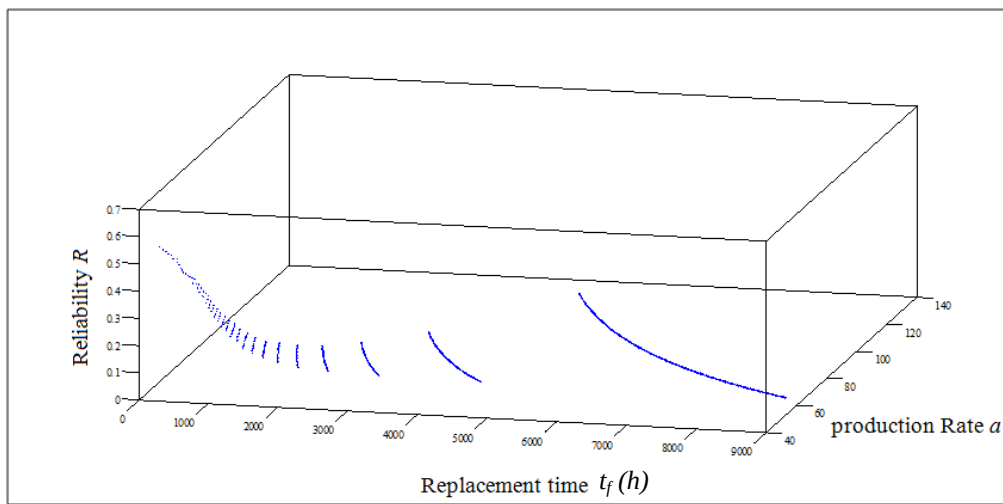


Figure 4.9 : Tracé du triplet (temps de fonctionnement t_f , cadence de production a , Fiabilité R)

4.6.1.4. Conclusion de cette section

Dans cette section, une analyse de l'équation caractéristique que nous avons développée a été effectuée. Nous allons procéder dans ce qui suit au développement des équations caractéristiques des contraintes (9) et (10) définies par le POM (section 4.5 de ce chapitre). Ces équations permettent de délimiter l'espace des alternatives (feasible set) relatif principalement à la cadence de production a . Mais il est encore possible de fixer un niveau de fiabilité donné et de considérer d'autres contraintes fonctionnelles de la forme :

$$R(t_f) \geq R_{min}$$

En prenant R_{min} comme étant un niveau de fiabilité minimal requis pour le bon fonctionnement de l'unité de production (productivité et qualité des produits finis) ou de l'équipement considéré. Dans ce cas, il serait possible de présenter un domaine de définition des solutions optimales, réalistes. Le choix d'une solution dépendra des priorités définies par le preneur de décision.

4.6.2. Contraintes sur la cadence de production définie sur les intervalles

$[t_{2k}, t_{2k+1}]$

4.6.2.1. Développement de l'équation caractéristique relativement à la contrainte de capacité maximale de production

A la figure 4.3, nous avons schématisé la capacité maximale de production par un trait horizontal en gras. Cette limite présente le risque d'excès d'un niveau maximal de la vitesse (cadence) de production, que les moyens de production correspondants ne peuvent pas dépasser. Techniquement, ce niveau de production peut être atteint si le nombre d'interventions systématiques dépasse aussi un certain niveau, de telle sorte que la cadence de production a doit être augmentée afin de compenser la perte de production due aux réparations programmées.

C'est pour cette raison que nous avons proposé l'intégration de la contrainte (6) en vue de limiter le choix (alternatives) des responsables maintenance et production en même temps, et de proposer un ensemble de solution réalisables (t_f, t_{rep}, b_0) pour maximiser les fonctions objectifs (a, R) .

La contrainte (6) s'écrit :

$$P_2(t) \leq c \times t_f \quad \text{pour } t \in [t_{2k}, t_{2k+1}] \quad (6)$$

Afin de simplifier l'analyse, et prenant en compte le comportement monotone de la fonction P_2 sur les intervalles $[t_{2k}, t_{2k+1}]$, nous avons décidé de caractériser ou de paramétrer la courbe caractéristique de cette contrainte non pas par une valeur quelconque de $P_2(t)$ mais par son maximum $P_2(t_{2k+1})$ sur le même intervalle, où P_2 atteint toujours son maximum en ces points là t_{2k+1} . Nous travaillerons donc par l'équation caractéristique de la contrainte (6) suivante, notée (27) dans ce qui suivra :

$$P_2(t_{2k+1}) \leq c \times t_f \quad (27)$$

Donc, en remplaçant t_f par l'expression des instants t_{2k} et de t_{2k+1} dans l'équation (25), nous obtenons :

$$a \leq \frac{c \times t_f - b_0}{t_f(2k + 1) + 2kt_{rep}} \quad (28)$$

Et prenant en compte la périodicité de P_2 , nous considérerons la première période, définie par $(k = 0)$, comme c'était le cas pour l'analyse de la première courbe caractéristique (25), où

$$P_2(t) = a t + b_0 \quad \text{où } t \in [t_0, t_1]$$

La contrainte (28) s'écrit donc :

$$a \leq \frac{c \times t_f - b_0}{t_f} = \left(c - \frac{b_0}{t_f} \right) \quad (29)$$

Le terme de droite de l'inéquation (29) correspond alors à la limitation de la cadence de production a . Cette limitation est fonction de la cadence maximale c , de la production initiale b_0 et de la variable de décision principale, étudié dans ce travail, exprimée par la période de fonctionnement t_f . Le tracé de cette limite en fonction de t_f est donné à la figure 4.10, fixant b_0 à la valeur de 500 pièces, comme cela est présenté aux données de la simulation au paragraphe 4.4.1.3.1.

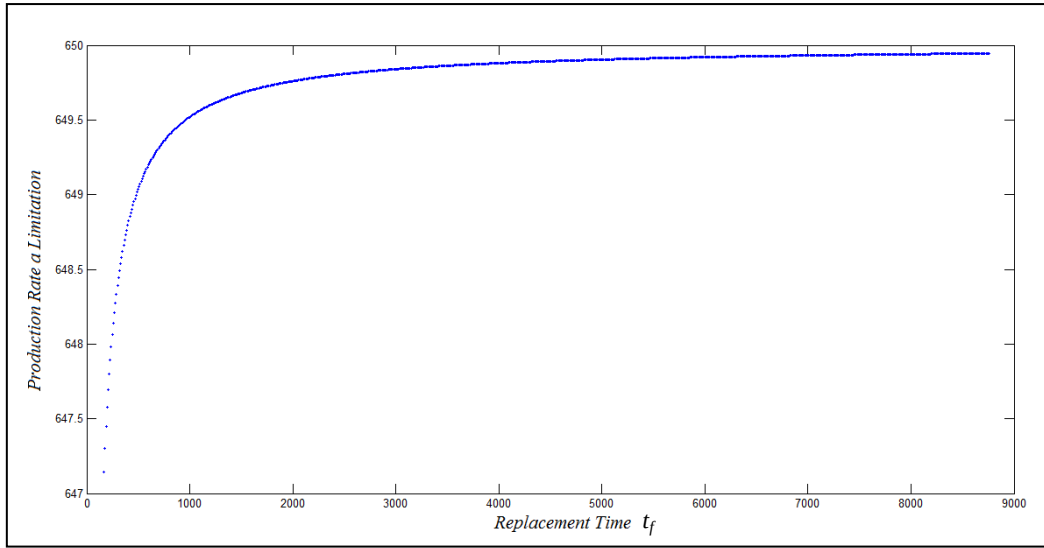


Figure 4.10 : Courbe caractéristique de la contrainte (9) ($P_2(t) \leq c \times t_f$) paramétrée par ($b_0 = 500$)

Nous remarquons que la limitation de la cadence de production atteint une asymptote horizontale relative à la cadence maximale de production. C'est une donnée qui apparaît aussi à partir de l'équation caractéristique (29). La figure 4.11 représente cette limitation sur la première contrainte (25). La courbe limite apparaît comme une constante, mais cela est dû à l'échelle du tracé où la courbe est très étalée relativement à l'axe t_f .

L'une des remarques que l'on peut faire sur la figure 4.11, c'est que la fonction limitation qui constitue la borne supérieure de la cadence de production « a » permet de limiter le temps de production t_f à 1083,33 heures de fonctionnement au maximum.

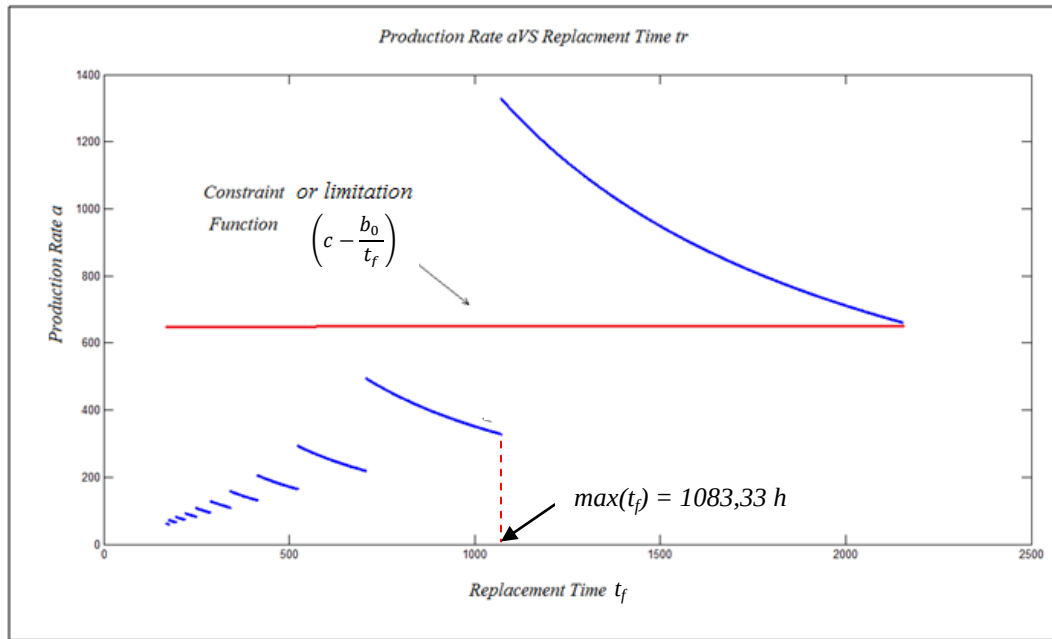


Figure 4.11 : Valeurs permises (Feasible values) de la cadence de production a (courbe bleu) sous la contrainte $a \leq c - \frac{b_0}{t_f}$ (courbe rouge)

4.6.2.2. Effet de la valeur de production de départ b_0 sur les fonctions objectifs (a , R)

La figure 4.12 présente le tracé de la fonction limitation $(c - \frac{b_0}{t_f})$ de la cadence de production a . les courbes présentées sont paramétrées par b_0 . Cette limitation sera désignée par la fonction :

$$L(t_f, b_0) = c - \frac{b_0}{t_f} \quad (30)$$

Remarque 6

- L'analyse développée ici fait l'hypothèse que la valeur de la production de départ b_0 n'affecte pas la fiabilité des équipements. Toutefois, physiquement, il est clair qu'il y a une certaine dépendance, car cette production doit se faire dans un intervalle de temps limité (Δt).
- Donc pour apprécier l'effet de cette production de départ sur la dégradation des équipements, il faut considérer aussi le ralentissement de cadence ($b_0/\Delta t$) effectué au début de chaque démarrage de production (après intervention de maintenance).
- Cela signifie qu'en augmentant la production de départ b_0 , la fiabilité de l'équipement diminuera à la période de production.

De ce fait, nous avons tracé l'évolution des fonctions objectifs « a » (cadence de production) et « R » (fiabilité) afin de tester les propos retenus à la remarque précédente.

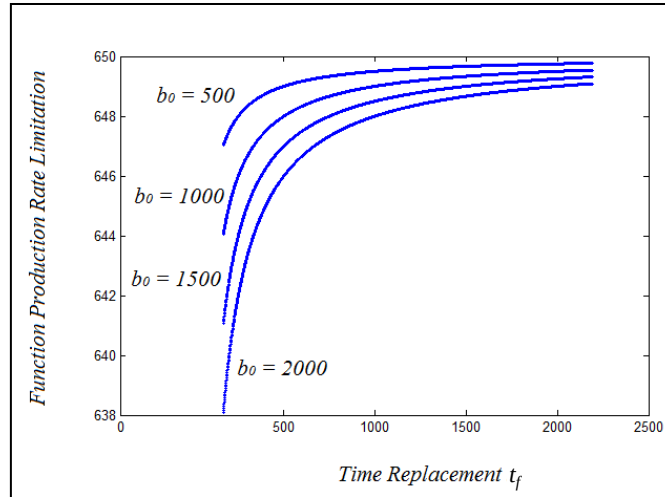


Figure 4.12 : Fonction limitation " $L(t_f, b_0) = (c - \frac{b_0}{t_f})$ " en fonction de t_f et de b_0

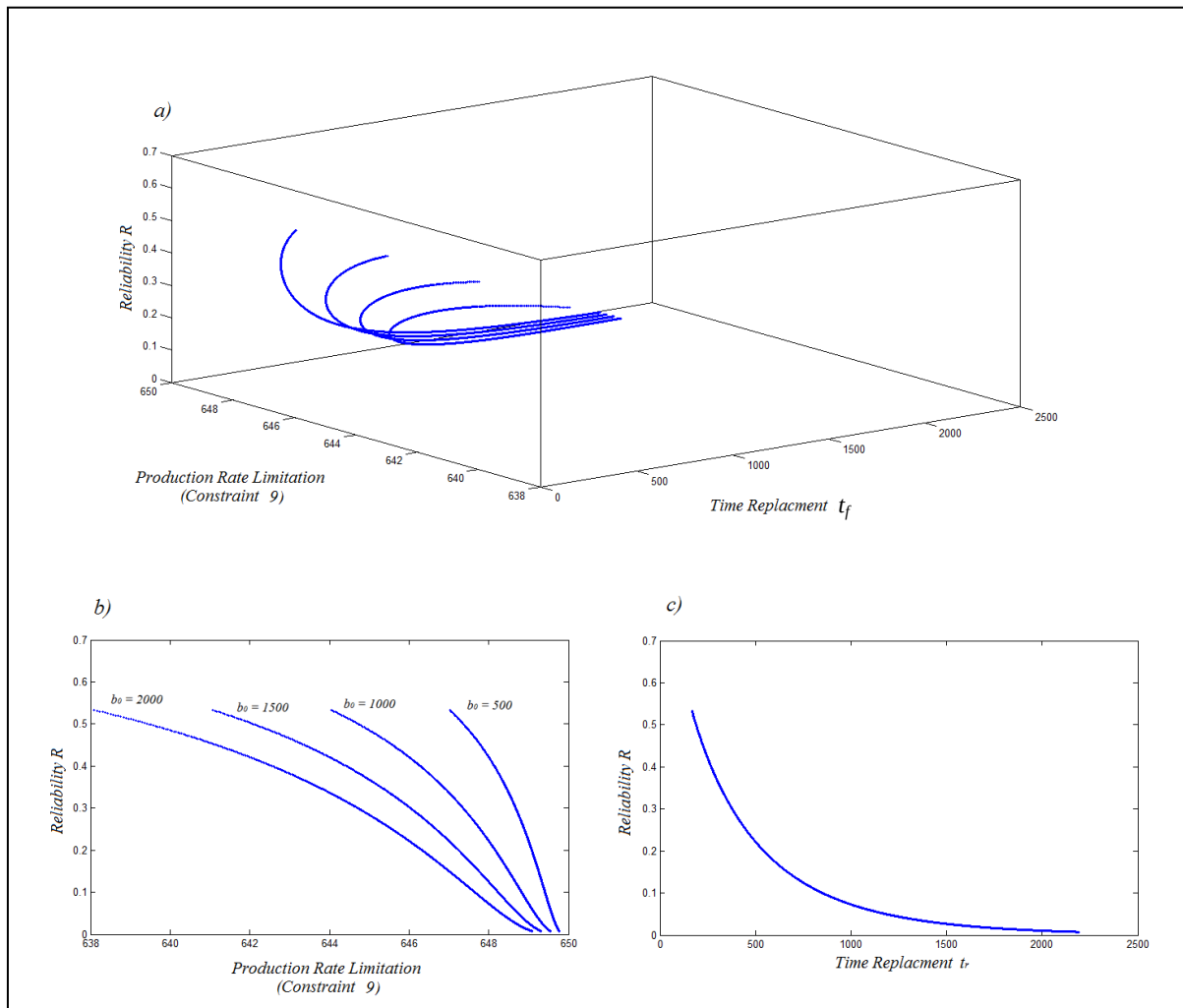


Figure 4.13 : Tracé de la limitation de la cadence de production (contrainte (9) du MOP) et de la fonction fiabilité en fonction des variables de décision t_f et b_0

La figure 4.13-b) prouve alors notre supposition :

Au moment où l'on choisit une valeur fixée de la cadence de production, lorsque la production initiale b_0 diminue, nous remarquons que la fiabilité de l'équipement considéré augmente.

Nous pouvons ainsi conclure que la production initiale est un point clé dans la prise de décision de la politique de production et de fiabilité (au moins pour notre cas). Il est donc judicieux de minimiser le temps de ralentissement de cadence pour gagner en fiabilité et en productivité.

4.7. Développements futurs et équation de compensation de la production : troisième contrainte du modèle

Nous avons défini aux sections précédentes l'espace de définition des fonctions objectifs adoptés, exprimé par deux principales contraintes respectivement (8) et (9) qui ont abouti aux deux équations caractéristiques (26) et (29). Dans les prochains paragraphes, nous allons analyser la dernière contrainte (10).

Remarque 7

L'analyse est toujours faite aux intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, avec i pair où P_2 est non nulle, selon la définition (7). La particularité de la contrainte (10) réside dans le fait qu'elle exprime une certaine compensation de la production non réalisée P_1 aux intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ à gauche de l'intervalle de production et à droite dans l'intervalle $[t_{i+1}, t_{i+2}]$.

Afin, de tenir compte de la symétrie de la dispersion de la production P_1 , nous divisons à chaque fois le cumul de la production non réalisée P_1 relative aux intervalles ci-haut (de droite et de gauche), sur l'intervalle considéré de production $[t_i, t_{i+1}]$. Ce calcul est valable sous l'hypothèse que la production estimée P_1 est fournie par des modèles prévisionnels fiables (non prise en compte dans la présente étude).

Nous définissons donc ces cumuls de production conformément à l'équation (10) :

$$P_2(t_{i+1}) \geq \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+t_{rep}} P_1(t) dt}_{C_l} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_i+t_f} P_1(t) dt}_{C_c} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1}+t_{rep}} P_1(t) dt}_{C_r} \quad (10)$$

i est un entier pair : $i = 2k$

Développons par la suite cette expression :

A partir du § 4.4.1.1 :

$$b_{2k} = b_{2k+1}$$

$$P_2(t_{i+1}) = at_{2k+1} + b_{2k}$$

et

$$t_{2k+1} = t_{2k} + t_f = t_0 + t_f (k + 1) + k t_{rep} \quad (18)$$

$$b_{2k} = \tan \alpha (t_{2k} - t_0) + b_0 = a (t_{2k} - t_0) + b_0 \quad (21)$$

Nous prenons toujours $t_0 = 0$;

Ce qui donne

$$P_2(t_{i+1}) = 2a t_f (k + 1) + 2a k t_{rep} + b_0 \geq C_l + C_c + C_r \quad (31)$$

Nous obtenons finalement l'équation caractéristique correspondant à la contrainte (10), exprimant la borne inférieure de la cadence de production, permettant la compensation au minimum de la production P_1 non réalisée à cause des arrêts préventifs systématiques programmés à l'aide des variables de décision t_f , t_{rep} et b_0 .

$$a \geq \frac{1}{2} \times \left(\frac{C_l + C_c + C_r - b_0}{t_f (k + 1) + k t_{rep}} \right) \quad (32)$$

A partir de cette étape, nous ne pouvons continuer la simulation, car il est nécessaire de calculer les cumuls de production (C_l, C_c, C_r) en traitant un cas réel ou en adoptant un benchmark donné.

4.8. Définition de nouveaux Problèmes d'optimisation MultiObjectifs

4.8.1. Définition d'un Problème ε -contrainte

Relativement au développement qui a précédé, nous définissons un nouveau problème d'optimisation multiobjectif (POM), sous contraintes, par le système (33) suivant :

$$\text{POM (33)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{max} \left\{ \begin{array}{l} f_1(t_f, t_{rep}, b_0) = a = \frac{c \times T - b_0}{n (n t_f + (n - 1) t_{rep})} \\ f_2(t_f, t_{rep}, b_0) = R = e^{-\left(\frac{t_f - \gamma}{\eta}\right)^\beta} \end{array} \right. \\ \mathbf{S/C} \left\{ \begin{array}{l} L_1(t_f, t_{rep}, b_0) = \frac{c \times t_f - b_0}{t_f(2k + 1) + 2k t_{rep}} \leq a_{max} \\ L_2(t_f, t_{rep}, b_0) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{C_l + C_c + C_r - b_0}{t_f (k + 1) + k t_{rep}} \right) \geq a_{min} \text{ s.t. } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ n = E\left(\frac{T}{t_f + t_{rep}}\right) \end{array} \right. \\ t_{technique} \leq t_f \\ b_{0min} \leq b_0 \leq b_{0max} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction L_1 correspond à la borne maximale de la cadence de production a . Idéalement, cette fonction ne doit pas dépasser une certaine valeur a_{max} . C'est la borne maximale forcée par les contraintes techniques, c'est-à-dire relativement à la technologie et à la robustesse des machines de production utilisées. Cette limitation correspond donc à une contrainte d'ordre technologique.

En ce qui concerne la fonction L_2 , elle correspond à la borne inférieure de la cadence de production a . Cette borne, étant une fonction des variables du système (33). Elle est limitée par une valeur minimale a_{min} . Cette valeur permet au moins de compenser la perte de

production causée par les arrêts programmés, relativement aux objectifs de fiabilité fixés par l'entreprise. En revanche, si cette borne minimale n'est pas respectée, les objectifs de production ne seront pas atteints et la compensation de la production ne sera donc pas assurée. C'est donc une contrainte d'ordre technico-économique.

En analysant ce système ainsi que les contraintes réelles qui peuvent exister en entreprise, nous avons remarqué, qu'idéalement, la fonction L_1 devrait être maximisée, dans le but de favoriser l'augmentation de la valeur de la cadence a , d'une manière générale.

Pour la fonction L_2 , elle devrait être minimisée, pour cause que la borne minimale de la cadence de production devrait reculer, afin que, si une production de faible quantité serait annoncée, le décideur choisirait une valeur de la période de fonctionnement t_f correspondante, de telle sorte qu'un compromis serait possible entre cette quantité, la maximisation de la cadence en général et la contrainte de fiabilité correspondante.

A cet effet, le système (33), qui fixe les bornes d'évolution des fonctions L_1 et L_2 , correspondrait à un problème d'optimisation multiobjectif de départ, qui est formulé par la méthode ε -contraintes, dans le but de préparer sa résolution.

Pour plus de détail, le chapitre suivant comprend une brève définition de la méthode ε -contrainte pour la résolution des (POM). Pour une plus ample description, on peut se référer à la bibliographie correspondante (Ehrgott, 2005) (Bazaraa et al., 2006) (Jozefowicz, 2013) (Deb, 2001).

4.8.2. Définition du Problème d'Optimisation MultiObjectif général

Puisque nous avons noté, au paragraphe précédent, que le système (33) est une formulation ε -contrainte d'un POM, il serait intéressant de donner le problème d'optimisation multiobjectif plus général. Ce (POM) correspond au système (34), décrit ci-dessous :

$$\text{POM (34)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{max} \left\{ \begin{array}{l} f_1(t_f, t_{rep}, b_0) \\ f_2(t_f, t_{rep}, b_0) \\ f_3(t_f, t_{rep}, b_0) \end{array} \right. \\ \mathbf{min} f_4(t_f, t_{rep}, b_0) \\ \mathbf{S/C} \left\{ \begin{array}{l} t_{rep} \\ t_{technique} \leq t_f \\ b_{0Low} \leq b_0 \leq b_{0Up} \\ 0 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ n = E\left(\frac{T}{t_f + t_{rep}}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Avec

$$\begin{cases} f_1(t_f, t_{rep}, b_0) = \frac{c \times T - b_0}{n(n t_f + (n-1)t_{rep})} \\ f_2(t_f, t_{rep}, b_0) = e^{-\left(\frac{t_f - \gamma}{\eta}\right)^\beta} \\ f_3(t_f, t_{rep}, b_0) = \frac{c \times t_f - b_0}{t_f(2k+1) + 2k t_{rep}} \\ f_4(t_f, t_{rep}, b_0) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{C_l + C_c + C_r - b_0}{t_f(k+1) + k t_{rep}} \right) \end{cases}$$

Il est clair que ce (POM) est non linéaire, globalement non convexe, discontinu et non dérivable globalement. Donc il ne peut être classé relativement à aucune classe de problème multiobjectif existant (Ehrgott, 2005). Il est dans ce cas utile de noter qu'il faut bien chercher une méthode adéquate pour sa résolution, par l'intermédiaire des multiples techniques d'optimisation qui existent.

Néanmoins, nous donnerons quelques pistes pour la résolution d'un tel système aux paragraphes dédiés aux perspectives de ce chapitre.

4.9. Conclusion

Au niveau de ce chapitre, nous avons développé une méthode nouvelle permettant la correction du plan de production prenant en compte d'autres aspects de la maintenance et de sûreté de fonctionnement des équipements de production. Le nouveau programme de production P_2 tient compte du programme de production estimé par le service concerné ainsi que le niveau actuel de dégradation. Ce dernier est exprimé par les constantes du modèle statistique de la fiabilité adopté, et pris en compte dans un contexte d'analyse monocomposant.

Notre modèle permet aussi d'estimer la possibilité de réaliser une production souhaitée étant donné un équipement ayant un certain niveau de dégradation. Il a aussi pour finalité la fixation de la cadence de production en vue d'obtenir un niveau de fiabilité fixé par les responsables d'entreprise.

Parmi les résultats de cette analyse, à partir de notre modélisation, il est possible de dégager un certain nombre de solutions dites optimales au sens multicritère, afin de répondre, en même temps, aux exigences de la production et de la sûreté de fonctionnement des équipements industriels.

L'espace des alternatives (feasible solutions) est décrit essentiellement par la variable de décision t_f , limitée par les contraintes que nous avons proposées (8), (9) et (10). Mais il est possible de paramétrer encore cet espace par la deuxième variable de décision, retrouvée au cours de l'étude, qui est la production initiale b_0 . Cette dernière est caractérisée par le ralentissement de cadence après chaque intervention sur la machine.

Le paramètre noté t_{rep} , qui symbolise la durée des réparations de l'équipement considéré, fait aussi partie des variables de décision. Normalement, ce paramètre doit être minimisé relativement aux contraintes techniques liées à l'équipement et à la logistique de réparation au sein de l'entreprise. De ce fait, au début des développements, nous avons fixé cette variable, dans le but de simuler les équations retrouvées, mais par la suite, nous l'avons intégrée aux systèmes (33) et (34), afin de proposer une modélisation plus générale du problème ainsi formulé.

Relativement à la résolution du (POM) (33) et (34), aucune classification ne peut être effectuée. Cela dit, nous serions très optimistes d'espérer une résolution analytique de tels systèmes. En conséquence, nous proposons quelques perspectives qui pourraient nous guider, ou guider d'autres chercheurs qui partagent le même intérêt.

- L'utilisation de Métaheuristiques ;
- La convexification des fonctions, par la recherche de la fonction-enveloppe convexe ou de l'épigraphe des fonctions présentées par les systèmes (33) et (34) ;
- La reformulation des fonctions-objectifs dans le contexte flou, en utilisant les outils de l'algèbre floue, dans le but d'éliminer les discontinuités générées par la présence du paramètre « n » considérée.

Enfin, la deuxième partie de ce mémoire va traiter la problématique d'optimisation multiobjectif.

**Partie II : Prise en compte de l'approche
multiobjectif dans l'optimisation mathématique sous
contraintes**

***Aspect opérationnel de la gestion industrielle,
application au tournage monopasse***

Chapitre 5 : Formulation du problème d'optimisation du tournage

monopasse et présentation des outils d'optimisation utilisés

5.1. Introduction du problème d'optimisation et approche holonique

Le problème d'optimisation multiobjectif étudié dans cette partie relève de l'aspect opérationnel de l'organisation industrielle. La problématique ne relève donc pas des aspects stratégique ou tactique, tel que cela est traité au niveau des chapitres précédents. Dans la littérature, différentes approches ont été adoptées pour la résolution d'un problème d'optimisation d'usinage. Dans certains travaux, les chercheurs essaient d'estimer les paramètres d'usinage, comme par exemple la force et la puissance d'usinage. D'autres recherchent l'effet de ces paramètres sur l'état de surface des pièces usinées, sur la productivité, etc. (Chen & Tsai, 1996)(Wang et al., 2013)(Jabri et al., 2013)(Sadilek et al., 2015)(Khoshdarregi & Altitas , 2015). Dans notre cas, nous avons choisi d'étudier l'aspect économique du problème d'usinage en tournage monopasse.

Il ne faut pas croire que l'aspect économique est indépendant des autres aspects plus techniques cités ci-haut. En effet, toutes les approches ont pour principal but la minimisation du coût des opérations d'usinage ou du coût global de produit, tout en maintenant des niveaux de qualité et de productivité compétitifs.

Cela dit, dans ce travail, nous allons adopter un problème classiquement traité par plusieurs chercheurs de part le monde, traitant directement la minimisation du coût d'une opération unitaire de tournage, ainsi que la minimisation du taux d'usure de l'outil de coupe adopté (Jabri et al., 2013) (Chen & Tsai, 1996)(Wang et al., 2013). Les expressions approchées de ces fonctions sont décrite par plusieurs références, nous en donnons la forme la plus utilisée au paragraphe de présentation du problème d'optimisation.

Afin d'aborder techniquement le sujet, et considérant ce problème comme étant multiobjectif et non linéaire, la plupart des travaux précédents l'ont traité par des métaheuristiques telles que les algorithmes génétiques (AG) (Jabri et al., 2013)(Kübler, 2015)(Helbling & Nuesch , 2001), recuit simulé/AG (Chen & Tsai, 1996)(Eglese, 1990)(Johnson, 1988). Peu d'approches analytiques ont essayé d'estimer l'optimum (quelque soit sa définition) des deux fonctions proposées. Nous n'en avons trouvé qu'une seule (Wang et al., 2013), traitant seulement le problème en surface, et n'utilisant pas vraiment d'outils mathématiques dédiés à l'optimisation multicritères proprement dite (notion de dominance, méthodes d'agrégation,

solution efficiente, front de Pareto, fonction de Lagrange, conditions d'optimalité Karush-Kuhn-Tucker, simplexe multiobjectif, etc.).

Cependant, Wang présente une série de tests sur les fonctions-objectifs et sur les variables du problème, afin d'en choisir la solution. L'avantage ici c'est que la technique développée est programmable aisément sur ordinateur, Automates Programmable Industriels, ou même en logiciel embarqué (robots, Machines à Commande Numérique, etc.) (Wang et al., 2013).

Dans le contexte holonique, au sein duquel nous nous positionnons, le (POM) considéré peut être décrit aisément suivant l'architecture PROSA. Nous pouvons dès lors distinguer les entrées du (POM) associées à chaque holon : HP, HR et HO. Cette description est discutée au paragraphe 5.4 en affectant chaque composantes du (POM) adopté au holon correspondant.

Cela dit, plus généralement, nous allons définir dans ce qui suit les outils d'optimisation mathématiques adoptés. Le chapitre d'après sera consacré dans son intégralité à l'application de l'approche analytique et à la discussion de son efficacité vis-à-vis de la qualité des solutions qu'elle fournit.

5.2. Problème d'optimisation multiobjectif initial et simplifications adoptées

La formulation du problème d'optimisation du tournage monopasse est donnée par le système d'équations suivant :

$$\text{minimiser} \begin{cases} f_1 = C_m = K_0 \times t_r = \left(\frac{K_0 \pi D L d_t}{1000 d} \right) \times \frac{1}{V f} & (1) \\ f_2 = \zeta = t_r / T_r = \left(\frac{\pi D L d_t}{1000 d C_0 d^{1-r}} \right) \times V^{p-1} f^{q-1} & (2) \end{cases}$$

$$tq : (3) \begin{cases} t_r = \pi D L \left(\frac{d_t}{d} \right) / (1000 \times V \times f) \\ T_r = C_0 / V^p f^q d^r \end{cases}$$

sous Contraintes

$$\begin{cases} F = K_1 f^\mu d^\nu \leq F_u & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = \frac{FV}{6120 \eta} \leq P_u & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q = K_2 V^r f^\phi d^\delta \leq Q_u & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = f^2 / 8 R_a \leq S R_u & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_L \leq V \leq V_U & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_L \leq f \leq f_U & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_L \leq d \leq d_U & (10) \end{cases}$$

$$tq : \left\{ \begin{array}{l} t_r(\text{min}): \text{temps d'usinage(une passe)} \\ T_r(\text{min}) : \text{Durée de vie estimé de l'outil de coupe} \\ K_0(\text{dh/min}) : \text{coût d'usinage par unité de temps} \\ L(\text{mm}) : \text{Longueur de chariotage} \\ D(\text{mm}) : \text{Diamètre de la pièce} \\ V(\text{m/min}) : \text{Vitesse de coupe} \\ f(\text{mm/tr}) : \text{avance par tour} \\ d(\text{mm}) : \text{profondeur de passe} \\ d_t(\text{mm}): \text{profondeur total à enlever} \\ F_u(\text{N}): \text{Force ultime d'usinage} \\ P_u(\text{W}): \text{Puissance ultime d'usinage} \\ Q_u(^{\circ}\text{C}) : \text{Température ultime de contact outil/pièce} \\ SR_u(\mu\text{m}): \text{Rugosité ultime} \\ R_a(\text{mm}): \text{Rayon de l'outil} \\ C_0, p, q, r, \mu, v, \tau, \phi, \delta : \text{constantes du modèle} \\ \eta : \text{rendement de la machine} \end{array} \right.$$

Les constantes du modèle sont fournies comme suit (Jabri et al., 2013) :

- **Outil de coupe :**

$p = 5, q = 1.75, r = 0.75, k_2 = 132, \phi = 0.2, \delta = 0.105, \tau = 0.4, Q_u = 1000^{\circ}\text{C}, C_0 = 6.10^{11}, R_a = 1.2 \text{ mm}.$

- **Machine de fabrication :**

$\eta = 0.85, P_u = 200 \text{ kW}, k_1 = 108, \mu = 0.75, v = 0.95, F_u = 5 \text{ kgf}, K_0 = 5 \text{ dh/min} (0.5 \text{ \$/min}).$

- **Pièce à fabriquer :**

$D = 25 \text{ mm}, L = 62 \text{ mm}, d_t = 5.5 \text{ mm}, SR_u = 10 \mu\text{m},$

- **Limitations de paramètres de coupe :**

$V_L = 50 \text{ m/min}, V_U = 500 \text{ m/min},$

$d_L = 1.0 \text{ mm}, d_U = 3.0 \text{ mm},$

$f_L = 0.1 \text{ mm/tr}, f_U = 0.9 \text{ mm/tr}$

La première fonction-objectif correspond au coût d'une opération de tournage ayant comme paramètres de pilotage la vitesse de coupe V , l'avance f et la profondeur de passe d . Les autres paramètres sont supposés constants. La figure 5.1 représente les paramètres de coupe (V, f, d), variables considérées du problème d'usinage analysé (Klocke, 2011).

La deuxième fonction-objectif correspond au taux d'usure de l'outil de coupe (Klocke, 2011). Nous notons la durée d'usinage par t_r (Shin & Joo, 1992) et la durée de vie de Taylor (Armarego & Brown, 1969) de l'outil est notée T_r . Les contraintes prises en considération correspondent à des contraintes de qualité de la pièce usinée (rugosité SR_u), à la force ultime (F_u), à la puissance ultime (P_u) de la machine utilisée et à la température d'interface maximale entre pièce et outil Q_u (Chen & Tsai, 1996)(Jabri et al., 2013)(Kübler, 2015).

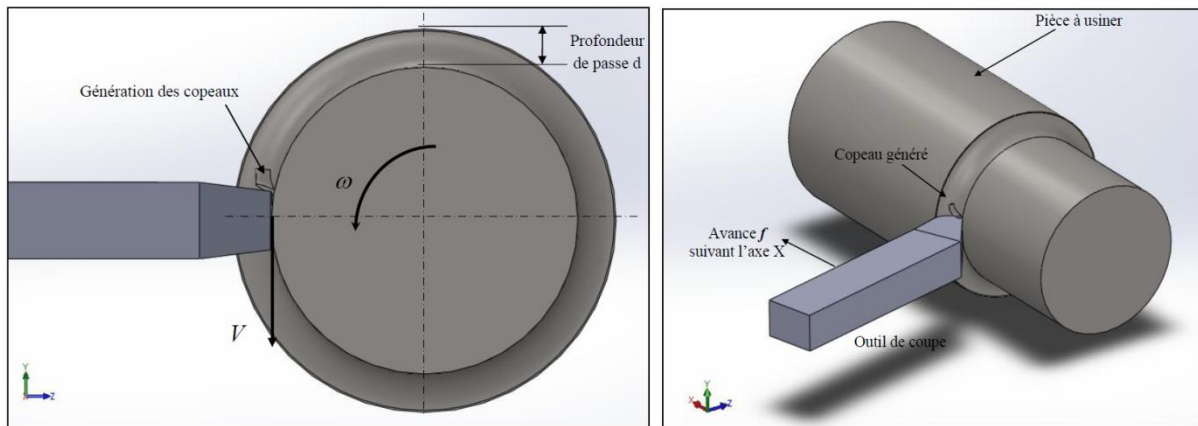


Figure 5.1 : Représentation des paramètres d'usinage (V , f , d)

Dans le but d'appliquer, pour la première fois, les outils de l'optimisation convexe (Ehrgott, 2005)(Bazaraa et al., 2006) (Culioli, 1994) à ce problème, il est impératif de simplifier davantage le problème. Nous éliminons par la suite la contrainte exprimée par l'inéquation (7). Sinon, il y aurait un risque de dégénérescence ou de cyclage, due au surplus de contraintes du problème. En optimisation mathématique, la notion de dégénérescence est surtout mentionnée dans le cadre des programmes linéaires (Bertsimas & Tsitsiklis, 1999). Mais cela n'empêche son extension aux problèmes non-linéaires, pour exprimer la divergence de la recherche des solutions ou pour exprimer la sélection d'une direction d'évolution non optimale (qui causerait le cyclage ou la dégénérescence) de l'algorithme de recherche.

Nous avons aussi un objectif d'éclaircissement des interprétations que nous donnerons, où nous avons considéré au chapitre 6 l'espace des contraintes de dimensions 3. En effet cet espace sera géométriquement interprétable plus que celui de dimensions 4. Même si nous avons la possibilité de procéder à plusieurs projections d'une forme géométriquement définie dans un espace de dimension 4 vers un espace de dimension 3, cela ferait intervenir plus de paramètres et compliquerait l'interprétation des résultats.

En conséquence, nous adopterons les deux fonctions-objectifs à minimiser ayant trois paramètres de contrôle (V , f , d) et trois principales contraintes, avec trois autres contraintes définissant les domaines de variation des paramètres de contrôle (V , f , d), définie par les valeurs maximales et minimales prises par ces variables.

5.3. Correspondance entre tournage monopasse et tournage multipasse

Le problème que nous avons adopté correspond à un problème d'usinage monopasse, traité ainsi par (Wang et al., 2013). Le problème le plus général est désigné par le problème d'optimisation de l'usinage multipasse. Ce dernier correspond à l'optimisation des fonctions

coût et usure de l'outil de coupe, en tenant compte de plusieurs passes de tournage en même temps : « n » passes d'ébauche et une seule passe de finition (Chen & Tsai, 1996)(Jabri et al., 2013)(Kübler, 2015).

D'un point de vue technique, la distinction entre tournage monopasse et multipasse ne doit pas être faite dans l'absolu, car en tout cas, le tournage multipasse est constitué d'un ensemble des « n » monopasses d'ébauche dont l'unique objectif est de « faire du copeau ». L'épaisseur à enlever, notée ici d_t , est équitablement répartie sur les n passes d'ébauche. La dernière passe de finition est nécessaire enfin à fournir une rugosité fonctionnelle à la pièce et à produire systématiquement un bel aspect de la pièce. Dans notre cas, la distinction est faite selon des considérations purement mathématiques : nous nous soucions de la résolubilité du (POM) du tournage multipasse, qui est tout naturellement plus difficile à résoudre.

Il est à noter aussi que l'on procède bien souvent au changement de l'outil de coupe lors de la passe de finition. Dans ce cas, nous estimons que les passes d'ébauche et celle de finition peuvent être traitées à part. Sans trop détailler, les formes des fonctions objectifs changeront, et l'on se retrouvera après avec des fonctions similaires au (POM) du tournage monopasse que l'on propose d'étudier.

En effet, Analytiquement, il est plus délicat de traiter le problème multipasse directement, car les deux fonctions considérées sont plus complexes. Le nombre de variables de décision s'élève à 6, relativement au système ci-dessous.

$$\begin{cases} f_1 = C_m = K_0 \times \left[\frac{\pi DL}{1000 V_r f_r} \left(\frac{d_t - d_f}{d_r} \right) + \frac{\pi DL}{1000 V_f f_f} \right] & (1') \\ f_2 = \zeta = \left(\frac{\frac{\pi DL d_t}{1000 V_r f_r} \left(\frac{d_t - d_f}{d_r} \right)}{\theta T_r} + \frac{\frac{\pi DL}{1000 V_f f_f}}{(1 - \theta) T_f} \right) \times 100\% & (2') \end{cases}$$

Avec

- Durée de vie résiduelle d'une passe d'ébauche :

$$T_r = \frac{C_0}{V_r^p f_r^q d_r^r}$$

- durée de vie résiduelle d'une passe de finition :

$$T_f = \frac{C_0}{V_f^p f_f^q d_f^r}$$

- V_r, f_r, d_r : variables pour les passe d'ébauche (*roughing*) ;
- V_f, f_f, d_f : variables pour la passe de finition (*finishing*) ;

- θ : poids appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ correspondant au partage de l'outil entre les passes d'ébauche et de finition ;

De ce fait, nous avons préféré de commencer une première analyse de cette problématique en adoptant le problème d'optimisation de l'usinage monopasse. Cependant, nous proposons de traiter le problème d'optimisation multipasse à l'aide de la programmation géométrique (Boyd et al., 2007) (Ojha & Biswa, 2010), qui traite les problèmes d'optimisation formulés par des posynômes avec quelques changements de variables qui ont pour but d'obtenir des variables de décision ayant des puissances réelles positives (Ojha & Biswa, 2010).

Une autre proposition est de considérer plusieurs opérations de tournage monopasse, en minimisant en même temps l'opération unitaire elle-même et ensuite l'ensemble des opérations. Ça correspondrait à un problème classique d'ordonnancement, en gestion de production.

5.4. Autres approches de choix des conditions de coupe

D'autres approches plus techniques pour analyser un problème d'optimisation des conditions de coupe. En effet, il est plus pratique de construire le diagramme brise copeau ou d'exploiter les résultats de diagrammes similaires pour des cas semblables d'usinage ; cela requiert un groupement de résultats d'expérimentation pour en tirer profit !

Toutefois, même si notre objectif n'est pas de discuter des autres approches adoptées pour le choix des conditions de coupe, nous mentionnerons quelques liens qui existent conformément à la vision monoobjectif ou multiobjectifs des problèmes d'optimisation correspondant.

(Broissin, 1999), en traitant la génération automatique des gammes d'usinage en tournage en couplage avec une Machine Outil à Commande Numérique (MOCN), l'analyse des approches du choix pratique des conditions de coupe s'avère alors une nécessité. Il mentionne que le choix des paramètres de coupe sont en général calculés à partir d'un algorithme visant à optimiser le coût de l'usinage ou la durée de l'usinage ou encore le nombre d'outils de coupe utilisés ; ce dernier critère étant en relation avec la durée de vie de l'outil de coupe selon la théorie de Taylor.

En effet, nous avons remarqué que le problème d'optimisation traité peut être formulé de deux façons, relativement aux différents coûts considéré :

- Un problème monoobjectif, lorsque le coût de l'opération et le coût d'usure sont additionnés l'un à l'autre (en considérant aussi d'autres coûts additionnels (Broissin,

1999), préparation de la machine, programmation, contrôle, etc.). En effet, ces coûts sont rapportés à la même échelle en vue de leur sommation (Anselmetti, 1985)(Broissin, 1999)(Onwubolu & Kumalo, 2001)(Wang et al., 2002)(Pujo et al., 2009). La fonction coût à minimiser est formulée alors comme étant la fonction objectif, et les contraintes sont formulées à partir des considérations techniques, technologiques et de qualité.

- Un problème multiobjectif, lorsque l'on sépare les deux fonctions objectifs, coût de l'opération et coût d'usure de l'outil de coupe (Jabri et al., 2013)(El Jai et al., 2016). Il est possible d'ajouter, dans une nouvelle formulation du (POM), le nombre d'outils à consommer comme fonctions objectif à minimiser (voir annexe « Définition d'un nouveau problème d'optimisation ») et (Broissin, 1999).

(Broissin, 1999) différencie aussi les stratégies ou scénarii de fabrication, en désignant :

- la première stratégie de fabrication économique (approche monoobjectif) : basée sur la minimisation de l'usure de l'outil de coupe (Holon Ressource HR_outil, voir § 5.5 de ce mémoire) ;
- la deuxième stratégie de fabrication rapide (approche monoobjectif) : basée sur la maximisation de l'utilisation de la machine (Holon Ressource HR_tour, voir § 5.5 de ce mémoire) selon les caractéristiques maximale de la machine (puissance, avance et profondeur de passe) ;
- la troisième stratégie de fabrication (approche multiobjectif) : compromis entre les deux premières stratégies. Dans cette dernière, (Anselmetti, 1985) propose un algorithme simplifié (voir annexe C de (Broissin, 1999)) de choix des paramètres de coupe en prenant en considération des objectifs en cascade et non en parallèle, même si, initialement l'approche propose la prise en compte simultanée du coût d'usure et de l'utilisation maximale de la machine.

Nous terminons cette section par noter que la formulation d'un tel ou tel problème d'optimisation de l'usinage peut prendre différentes formulations, selon l'importance relative des fonctions objectifs et contraintes considérées. La bibliographie relatives aux phénomènes multiphysiques qui existent en interaction au cours d'une opération de tournage est très large, et le niveau de détail qui y est présenté permet de déterminer la précision avec laquelle il est possible de formuler le problème d'optimisation à résoudre.

Par cette dernière remarque, nous affirmons que l'analyse des situations auxquelles l'ingénieur et le chercheur sont confrontés ne seront prédéterminées que dans le cas de pièces et de matériaux expérimentés plusieurs fois (considérés dans ce cas comme pièces et matériaux classiques ou conventionnels) ; cela laissera donc toujours le Challenge ouvert à ce niveau.

5.5. Description des composantes du (POM) par l'architecture PROSA

Dans ce paragraphe, nous décrivons le chariotage d'une seule pièce (Holon Produit), en tournage multipasse (cas général), relativement à l'adaptation du (POM) à l'approche holonique. Le tournage est multipasse correspond, en effet, à une généralisation du tournage monopasse. En utilisant l'architecture PROSA, il est possible de décrire le (POM) adopté au § 5.2 ou celui, plus général, décrit au § 5.6 (en y remplaçant les équations (1) et (2) par (1') et (2')), par les holons de base de l'architecture PROSA :

- Holon Produit : les caractéristiques du holon produit contiennent diamètres et longueurs initiaux (D_{init} , L_{init}) avant usinage et finaux (D , L) après usinage. L'opération d'usinage contient donc « n » passes d'ébauche et une dernière passe de finition. Les propriétés du matériau de la pièce doivent aussi figurer dans le fichier de description du HP, ainsi que la température ultime Q_u à atteindre, à l'interface pièce-outil, au cours du travail du métal. Le HP est alors décrit par :

$$HP (D_{init}, L_{init}, D, L, SR_u, \text{matériau}, Q_u)$$

Puisque l'opération de tournage correspond au chariotage, la caractéristique « longueur » du HP est invariante et « $L_{init} = L$ » ;

- Holon Ressource :

En analysant le problème d'un « *point de vue holonique* », nous remarquons qu'il est possible de considérer soit un seul type de HR, l'ensemble {tour, outil}, soit deux types de HR, l'outil de coupe (HR_outil) et le tour (HR_tour), chacun à part. Nous considérons cette deuxième situation comme suit :

$$HR_tour (P_u, \eta, K_0)$$

$$HR_outil (F_u, R_a, \text{matériau})$$

Nous avons remarqué aussi que d'autres paramètres du (POM) ne peuvent être définis qu'à partir de la connaissance du couple (HP, HR_outil). Ce sont surtout les exposants relatifs aux équations des contraintes du (POM), qui ne peuvent être définis qu'en fonction du couple des matériaux de l'outil (HR_outil.matériau) et la pièce à usiner (HP.matériau). Nous proposons donc :

- Les paramètres communs entre HR_outil et HP :

(HP.matériau, HR_outil.matériau) ($p, q, r, C_0, k_1, k_2, \mu, v, \varphi, \delta, \tau, V_L, V_U, f_L, f_U, d_L, d_U$)

Les six derniers paramètres ($V_L, V_U, f_L, f_U, d_L, d_U$) correspondant aux vitesses, avances et profondeurs limites. Ces constantes sont uniques dans le cas monopasse et doubles dans le cas multipasses. A Chaque phase (ébauche et finition) correspondent des constantes, pour les passes d'ébauche (*roughing*) ($V_L^r, V_U^r, f_L^r, f_U^r, d_L^r, d_U^r$) et pour la dernière passe de finition (*finishing*) ($V_L^f, V_U^f, f_L^f, f_U^f, d_L^f, d_U^f$) conformément à (Chen & Tsai, 1996)(Jabri et al., 2013)(Kübler, 2015).

- Holon Ordre :

Le HO regroupe les valeurs des vitesses V , des avances f et profondeurs de passe à intégrer au sein du HR pour le pilotage de l'opération de tournage. L'indice « r » correspond à l'ébauche (*roughing*) et l'indice « f » correspond à la finition (*finishing*), conformément à (Chen & Tsai, 1996)(Jabri et al., 2013)(Kübler, 2015) :

$$HO (d_t, V_r, f_r, d_r, V_f, f_f, d_f)$$

Comme cela est décrit dans l'introduction de ce chapitre ainsi que dans la description du (POM) au § 5.2, les paramètres décrivant le HO sont déterminés après calcul et procédure d'optimisation. Pour ce faire, nous proposons un schéma simplifié des liens entre flux d'informations issus des divers holons et l'EPA qui est théoriquement (jusqu'à présent) responsable du service optimisation et qui permet de générer les HO.

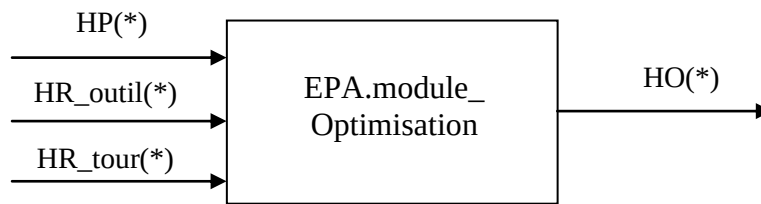
Pour une description plus détaillée du problème de tournage par l'approche holonique, nous proposons les diagrammes de classes des figures 5.2-a) et 5.2-b). ces diagrammes expriment les liens entre les holons de base adoptés. Il y aura, de ce fait, deux holons ressources. Le premier correspond au tour (noté HR_tour) et le deuxième à l'outil de coupe (noté HR_outil). D'un point de vue fonctionnel, le holon outil fait partie du holon tour, comme l'indique les figures 5.2-a) et 5.2-b).

En ce qui concerne l'EPA, elle peut intégrer le HR_tour directement, dans le cas d'une architecture distribuée (figure 5.2-a)), ou commune à plusieurs HR_tour dans le cas d'une structure « localement » centralisée (figure 5.2-b)).

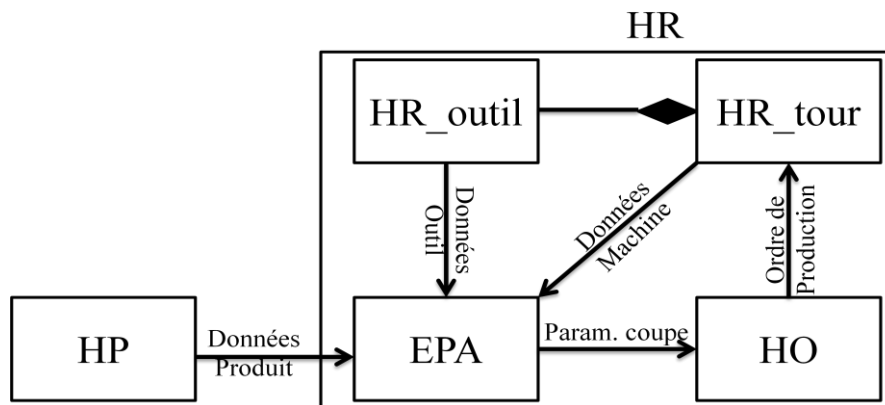
Le symbole (*) de la figure 5.2-c) signifie que tous les attributs ou caractéristiques du holon considéré sont inclus.

Bien entendu, ce schéma est présenté à titre explicatif. Aucune implantation pratique ne sera faite à ce niveau. Comme cela est décrit bien avant, les deux chapitres 5 et 6 traiteront la

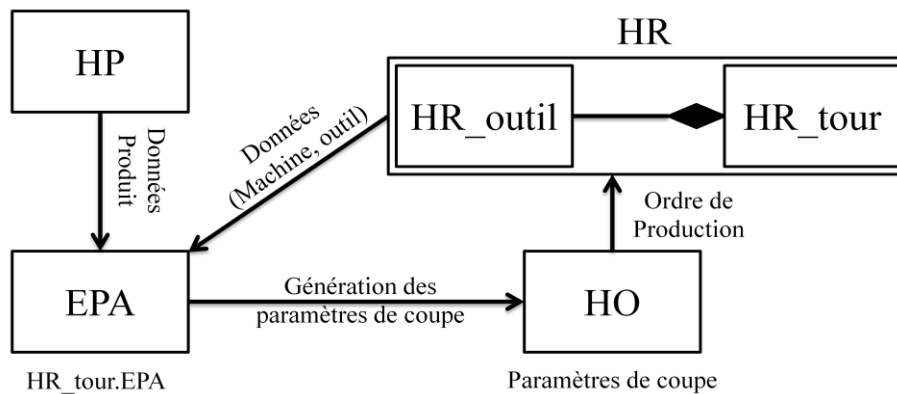
résolution du (POM) du tournage monopasse analytiquement ; procédure effectuée manuellement et qui n'est pas à intégrer dans un calculateur !



a) Vue systémique du problème de tournage décrit par PROSA



b) Lien entre holons de base du problème de tournage étudié



c) Liens entre holons de base du problème de tournage étudié (architecture localement centralisée)

Figure 5.2 : Description PROSA des liens entre holons de base correspondant au problème de tournage étudié

Nous présentons aux paragraphes suivants les étapes nécessaires à l'analyse du (POM) d'un point de vue mathématique, avant de passer à la résolution proprement dite au chapitre qui suit.

5.6. Normalisation des fonctions

Différentes techniques de normalisation peuvent être envisagées, mais les solutions au problème d'optimisation peuvent être différentes.

5.6.1. Normalisation des fonctions-objectifs

Afin de démarrer notre analyse du problème d'optimisation multiobjectif, il est nécessaire de déterminer la méthode par laquelle l'optimisation sera effectuée. Nous avons adopté la méthode de la somme pondérée, qui est connue comme étant l'une des méthodes classiques qui permet d'obtenir le front de Pareto en variant les poids des fonctions objectifs. Lorsque les fonctions-objectifs sont convexes, la fonction composite créée, étant aussi convexe, l'optimum existe sous conditions que les poids des fonctions soient positifs (théorème 3.1.2, (Deb, 2001)).

Mais avant de procéder à un quelconque calcul, il est essentiel de normaliser les fonctions-objectifs pour plusieurs raisons. Nous citons à titre d'exemple :

- Les fonctions à optimiser découlent de plusieurs domaines hétérogènes (approche multi-physique) ;
- Les unités des fonctions-objectifs ne sont pas les mêmes ;
- La nécessité de choisir des multiplicateurs complémentaires entre eux, dont la somme est égale à l'unité, etc.

Plusieurs techniques de normalisation peuvent être envisagées. (Helmut et al., 2006) regroupe certaines de ces techniques, appliquées précisément à la méthode de la somme pondérée. Par exemple, (Jozefowicz, 2013) rapporte que dans le cas où le nombre de fonctions croît considérablement, la mesure des points de références s'avère impraticable. C'est la raison pour laquelle il serait judicieux de calculer une approximation sur la mesure recommandant l'usage des hypervolumes (enveloppe de l'espace des fonctions). La figure 5.3 permet de visualiser un hypervolume, dans le cas biobjectif, en définissant un point référence, à partir duquel la mesure peut être définie.

La normalisation peut être effectuée aussi en utilisant les deux points Utopique (ou Idéal) et Nadir (Ehrgott, 2005)(Deb, 2001)(Helmut et al., 2006)(Datta & Deb, 2005).

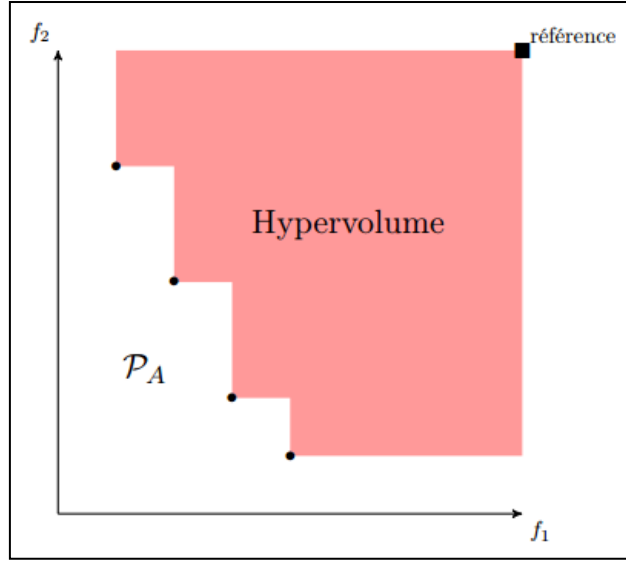


Figure 5.3 : Représentation de la surface dominée par un ensemble par rapport à un point de référence calculé par l'hypervolume (Jozefowicz, 2013)

Ces deux points sont définis dans l'espace des fonctions-objectifs $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ par :

Point utopique :

$$f^{Utopia} = [f_1(x^{1*}) f_2(x^{2*}) \dots f_m(x^{m*})] \quad (11)$$

Point pseudo-nadir :

$$f^{Nadir} = [f_1^{Nadir} f_2^{Nadir} \dots f_m^{Nadir}] \quad (12)$$

Avec x^{i*} étant le point donnant l'optimum de chaque fonction-objectif f_i pour le cas mono-objectif ;

m : étant le nombre de fonctions-objectifs, autrement dit, c'est la dimension de l'espace des fonctions

$$\text{pour chaque composante } f_i^{Nadir} = \max(f_i(x^{1*}) f_i(x^{2*}) \dots f_i(x^{m*})) \quad (13)$$

Nous définissons par la suite les deux fonctions-objectifs normalisées relativement aux points Nadir et Utopique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_1 := \frac{f_1 - f_1^U}{f_1^N - f_1^U} \quad (14) \\ \bar{f}_2 := \frac{f_2 - f_2^U}{f_2^N - f_2^U} \quad (15) \end{array} \right.$$

Une fois les deux fonctions-objectifs normalisées, nous pouvons définir la fonction composite qui permettra de procéder à l'optimisation du problème sous forme de problème d'optimisation mono-objectif paramétré par un paramètre λ , définit un peu plus loin. Cette technique sera désignée au chapitre suivant par la 2^{ème} méthode de normalisation (relativement aux équations (4') et (17') du chapitre 6).

La première méthode de normalisation adoptée au chapitre suivant correspond à une normalisation relativement au point Nadir (seul) donnée par les équations (4) et (17) du même chapitre. Les équations (14') et (15') ci-dessous présentent les transformations des fonctions f_1 et f_2 pour obtenir les fonctions-objectifs ainsi normalisées.

$$\begin{cases} f_1 := \frac{f_1}{\max(f_1)} & (14') \\ f_2 := \frac{f_2}{\max(f_2)} & (15') \end{cases}$$

5.6.2. Normalisation des fonctions-contraintes

Les contraintes sont généralement définies comme étant des contraintes d'inégalité (Nocedal, 1999), (Kim & De Weck, 2006), (Ehrgott, 2005). Cependant, les contraintes d'égalité peuvent aussi être transformées en deux inégalités, et la généralisation peut être faite en conséquence (Culioli, 1994). Dans le cas général, les contraintes existent sous différentes échelles et sous différentes unités. Cela dit, il s'avère crucial de procéder à la normalisation de ces fonctions dans le but d'assurer l'efficacité et la performance des algorithmes ou des méthodes de résolution utilisées (Datta & Deb, 2005). Donc, étant donnée une contrainte d'inégalité formalisée par l'équation (16), (Datta & Deb, 2005) propose une transformation simple permettant de normaliser chacune de ces fonctions contraintes relativement à sa borne maximale et/ou minimale.

$$h_j(\mathbf{x}) \geq c_j, j = 1, \dots, J \quad (16)$$

Où c_j étant la constante associée à la $j^{\text{ème}}$ contrainte représentée par l'inégalité (16) et $\mathbf{x}$ correspond au vecteur des variables de décision.

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{h_j(\mathbf{x})}{c_j} - 1 \geq 0 \quad (17)$$

Les fonctions $g_i(\mathbf{x})$, ainsi définies, permettront d'effectuer des sommes pondérées homogènes, relativement à la définition du Lagrangien, en utilisant des multiplicateurs de

Lagrange normalisés, positifs, dont la somme est égale à l'unité. Le cas contraire, les multiplicateurs de Lagrange doivent tenir compte des unités avec lesquelles sont définies ces fonctions, et le calcul peut être biaisé et imprécis.

5.7. Discussion des critères et approches de résolution

Différentes approches de résolution analytiques sont envisageables, chacune relevant d'une définition, de la notion d'optimalité et de la précision adoptée dans les calculs adoptés, etc. (Ehrgott, 2005) présente une panoplie d'approches essayant chacune d'appréhender et de donner un sens à l'optimum « multicritère » (ou multiobjectif). Il présente une certaine chronologie dans la construction des diverses notions d'optimalité au sens multicritère. C'est donc un ouvrage de référence en la matière.

Les méthodes construites par les différents mathématiciens, surtout au cours du 20^{ème} siècle, sont présentées par l'auteur suivant un certain cheminement logique assurant au lecteur spécialisé la compréhension des notions essentielles en matière de « relation d'ordre au sens vectoriel ou multicritère ». En passant par la notion de dominance, de front de Pareto, solutions efficientes, strictes et faibles, optimalité au sens de Borwin, de Benson, de Geoffrion et par la suite au sens de Kuhn-Tucker (voir la figure 2.17 de (Ehrgott, 2005)), l'auteur présente le passage entre ces notions et critères d'optimalité que doivent satisfaire, les variables de décision, les fonctions-objectifs et les fonctions contraintes d'un problème d'optimisation multiobjectif.

Dans notre cas, nous avons essayé de retrouver les optimums des fonctions-objectifs par les critères d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), décrite un peu plus loin. En effet cette démarche est applicable dans le cas de cônes convexes, sous contraintes d'inégalités où les fonctions-objectifs et contraintes sont continûment différentiables (au moins de classe C^2). Ce critère d'optimalité est surtout apprécié dans le cas de fonctions, objectifs et contraintes non linéaires.

Remarque 1

- 1) A noter que les critères d'optimalité (Borwin, Benson, Geoffrion, KKT) n'ont pas de relation directe avec les techniques d'optimisation comme par exemple la méthode de la somme pondérée, la méthode ε -contrainte, programmation par but, programmation géométrique, le simplexe multiobjectif, etc.

- 2) Les critères d'optimalité traitent l'existence d'un optimum et les conditions à satisfaire par les fonctions-objectifs et par le domaine de variation des variables de décision délimité par les fonctions contraintes.

Par cette remarque, nous pouvons affirmer que les conditions d'optimalité sont indépendantes des techniques ou approches de résolution. Par la suite, pour un problème donné, différentes techniques permettront de trouver les optimums locaux, approchés ou exacts, et dans le cas d'un problème convexe, retrouver l'optimum global correspondant.

Nous voudrions aussi mentionner les travaux de Nicolas Jozefowicz, annexés dans sa thèse d'Habilitation à Diriger les Recherche (Jozefowicz, 2013), dans lesquels il met en pratique différentes techniques d'optimisation. L'auteur traite l'optimisation combinatoire ainsi que des métaheuristiques classiques revues et modifiés.

Dans ce mémoire, Jozefowicz présente une vision pratique de l'analyse d'un problème d'optimisation multiobjectif en différenciant entre les « **stratégies de prise en compte des objectifs** » et les « **méthodes d'optimisation multiobjectif** ». Nous y ajoutons les critères ou « **conditions d'optimisation** » décrits aux paragraphes précédents, sachant que les critères d'optimalité permettraient de revenir en arrière afin d'estimer les relations entre les variables de décision ou entre les fonctions-objectifs elles-mêmes assurant l'optimum recherché. C'est donc une vérification et une recherche d'optimum qui se fait en même temps.

A partir des éclaircissements présentés par (Jozefowicz, 2013), nous pouvons dire que nos travaux ont exploité les stratégies de prise en compte des objectifs sur lesquels nous avons essayé de tester les outils d'optimisation convexe (géométrique). Dans le même sens, nous avons appliqué les critères d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker, afin d'étudier les liens que doivent satisfaire les variables de décision du problème.

C'est une approche inverse permettant d'aller de « **la supposition d'existence d'un optimum** » vers « **la construction des liens entre les variables** » du problème d'optimisation initial. Ainsi, à partir des contradictions, blocages, aberrations, retrouvées lors de la résolution du système d'équations KKT, nous pouvons « sur-contraindre » le problème initial ou bien « restreindre » la variation des variables de décision en des domaines, liés, en concordance avec les conditions d'optimalité adoptées, afin d'assurer l'existence de l'optimum.

Guillopé exprime cette construction comme étant une identification des points candidats à être un minimum ou maximum. Sinon, si les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants, ces derniers permettent d'affirmer soit la non-existence d'une solution, soit son existence avec un manque d'information supplémentaire pour y converger (Guillopé, 2016).

Les stratégies de prise en compte des objectifs sont classées par (Jozefowicz, 2013) de la manière suivante :

- Approches non scalaires : elles considèrent les objectifs individuellement et possèdent des mécanismes spécifiques pour lier les différentes solutions retrouvées à chaque période (itération) de calcul jusqu'à convergence vers un optimum (local ou global). L'auteur cite par exemple les méthodes suivantes :
 - ✓ La méthode lexicographique (Ehrgott, 2005), où la recherche des optimums se fait par fonction objectif en cascade. Chaque optimum local d'une fonction-objectif est considéré comme contrainte d'égalité pour la fonction-objectif suivante, et ainsi de suite (figure 5.4). L'espace de recherche de l'optimum est donc l'espace des fonctions-objectifs lui-même (voir classification des problèmes d'optimisation multiobjectifs au § 5.7.2 de ce chapitre) ;

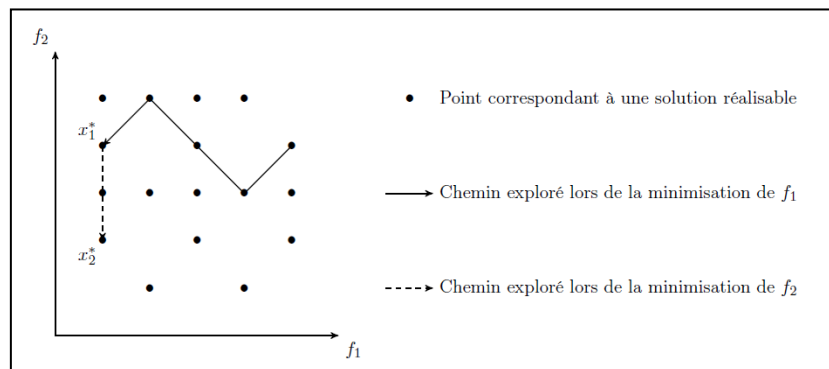


Figure 5.4 : Illustration de la méthode lexicographique dans le cas bi-objectif (Jozefowicz, 2013)

- ✓ Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA) (Deb, 2001) (Colette et Siarra, 2002), où la recherche des optimums se fait par fonction objectif en parallèle ;
- ✓ Méthode de la somme pondérée, utilisée géométriquement, dans ce cas, par la recherche de la solution par l'hyperplan défini par le produit scalaire des fonctions-objectifs et par les multiplicateurs λ_i (Jozefowicz, 2013). La méthode peut être liée aux algorithmes évolutionnistes comme cela est détaillé dans (Rotar, 2006) (Mitsuo & Ruwei, 2000) ;
- Approches scalaires : elles considèrent la transformation du problème multiobjectif en un problème mono-objectif selon un « mapping » donné (voir essentiellement les

définitions au § 5.7.2). Nous y trouvons un ensemble de méthodes (Ehrgott, 2005) (Jozefowicz, 2013) (Deb, 2001) (Kim & De Weck, 2006) (Colette et Siarra, 2002) (Gong, 1987) :

- ✓ Méthode de la Somme pondérée (utilisé algébriquement) ;
- ✓ ε -contrainte ;
- ✓ Méthode de Benson (Benson, 1978) (et non le critère d'optimalité de Benson) ;
- Approches Pareto (détaillée au § 5.7.1) : la notion d'optimum au sens de Pareto est présentée aux paragraphes suivants. Techniquement les approches qui adoptent cette notion sont désignées ainsi. Ce sont donc des approches non-scalaires utilisant la notion de Pareto-optimalité.

(Ehrgott, 2005) présente les mêmes outils structurés par (Jozefowicz, 2013) mais sans faire de distinction explicite entre « **stratégies de prise en compte des objectifs** » et « **méthodes d'optimisation multiobjectif** ».

Après cette introduction de l'approche d'optimisation multiobjectifs, les paragraphes suivants présentent les notions nouvelles qu'un non spécialiste est tenu à acquérir afin de bien s'initier au langage technique utilisé dans ce domaine.

5.7.1. Notion de dominance et Pareto-optimalité dans le cas multiobjectifs

Dans le cas de l'optimisation multiobjectifs, il est fréquent qu'on rencontre des fonctions-objectifs à optimiser qui évoluent dans des sens différents. C'est-à-dire que ces dernières présentent des aspects conflictuels. Dans ce cas, il est très délicat, même localement, de définir la notion d'optimalité. C'est la raison pour laquelle la notion de dominance a été intégrée. Elle permet, de ce fait, de construire presque la plupart des approches, d'agrégation ou vectorielle, qui permettraient d'appréhender ce type de problème.

Le mathématicien et économiste italien Pareto était le précurseur en matière d'analyse multicritère ou multiobjectif (Pareto, 1896 et 1987), adoptant une approche plus ou moins équilibrée dans la recherche de l'optimum de plusieurs fonctions conflictuelles. La notion de dominance est ainsi créée.

(Deb, 2001) utilise l'opérateur $\triangleleft$ entre deux solutions i et j où $i \triangleleft j$ signifie que la solution i est meilleure que la solution j pour un objectif particulier. Par similarité, si l'on note $i \triangleright j$, cela implique que la solution j est meilleure que la solution i pour une fonction-objectif donnée. Par exemple, pour une seule fonction-objectif qui doit être minimisée, l'opérateur $\triangleleft$ signifie

l'opérateur classique ' $<$ ', donc pour une fonction-objectif à maximiser l'opérateur ' $\triangleleft$ ' signifie ' $>$ '.

Nous rapportons ici la définition de la dominance citée dans (Deb, 2001) (définition 2.5, p.28). Cette définition couvre un problème mixte de minimisation de quelques fonctions-objectifs et de la maximisation d'autres fonctions :

Définition 1 (notion de dominance) : *dans le cas d'un problème de minimisation, une solution $x^{(1)}$ est dite dominante une autre solution $x^{(2)}$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- 1) *La solution $x^{(1)}$ n'est pas pire que $x^{(2)}$ pour toutes les fonctions-objectifs, ou bien on note $f_j(x^{(1)}) \not\geq f_j(x^{(2)})$ pour tout $j = 1, 2, \dots, M$.*
- 2) *La solution $x^{(1)}$ est strictement meilleure que $x^{(2)}$ pour au moins un objectif, ou on note $f_{\bar{j}}(x^{(1)}) < f_{\bar{j}}(x^{(2)})$ pour au moins $\bar{j} \in \{1, 2, \dots, M\}$.*

Si une de ces conditions n'est pas satisfaite, la solution $x^{(1)}$ ne domine pas la solution $x^{(2)}$.

Si la solution $x^{(1)}$ domine la solution $x^{(2)}$ (ou mathématiquement $x^{(1)} \leq x^{(2)}$), il est aussi répandu d'écrire l'une des expressions suivantes :

- *$x^{(2)}$ est dominée par $x^{(1)}$,*
- *$x^{(1)}$ n'est pas dominée par $x^{(2)}$,*
- *$x^{(1)}$ est inférieure à $x^{(2)}$.*

Pour illustrer la notion de dominance dans le cas d'un problème, (Deb, 2001) propose un exemple simplifié de valeurs de fonctions-objectifs, f_1 à maximiser et f_2 à minimiser, rapportées à la figure 5.5 (figure 14 de (Deb, 2001)). Dans la mesure où les deux fonctions considérées, à la figure 5.5, sont de même ordre d'importance, il serait délicat de favoriser une fonctions-objectif par rapport à une autre. De ce fait, nous allons utiliser la définition rapportée ci-haut pour déterminer la meilleure solution possible.

Après analyse nous pouvons estimer que :

- la solution 1 est meilleure que la solution 2 ;
- la solution 5 est meilleure que la solution 1 pour la fonction-objectif f_1 mais n'est pas pire que 1 relativement à la fonction f_2 ;

Cela implique, d'après la définition de la notion de dominance, que la solution 1 domine la solution 2, et la solution 5 domine la solution 1.

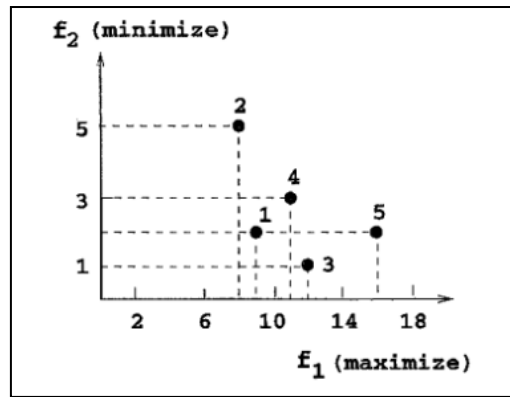


Figure 5.5 : Population constituée de cinq différentes solutions (Deb, 2001)

Cela dit, l'objectif des différentes techniques de recherche des optimums possibles, exprimés par l'ensemble des valeurs admissibles (*feasible solutions set* (Ehrgott, 2005)), utilisent généralement la notion de dominance, algébriquement ou géométriquement, afin de converger vers les meilleures solutions possibles, dites solutions non dominées ou ensemble des points dominants. L'ensemble de ces solutions, dites dominantes, est désigné par le front de Pareto.

La figure 5.6 présente la notion de front de Pareto comme étant la frontière (définie selon la politique d'optimisation) du domaine réalisable de l'espace des fonctions-objectifs. Il serait donc nécessaire de définir la notion de Pareto-optimalité ou optimalité au sens de Pareto.

Définition 2 (ensemble des solutions globalement Pareto-optimales) (Deb, 2001) :
l'ensemble des points non dominés de l'espace des solutions faisables (feasible space) est désigné par ensemble des solutions globalement Pareto-optimales.

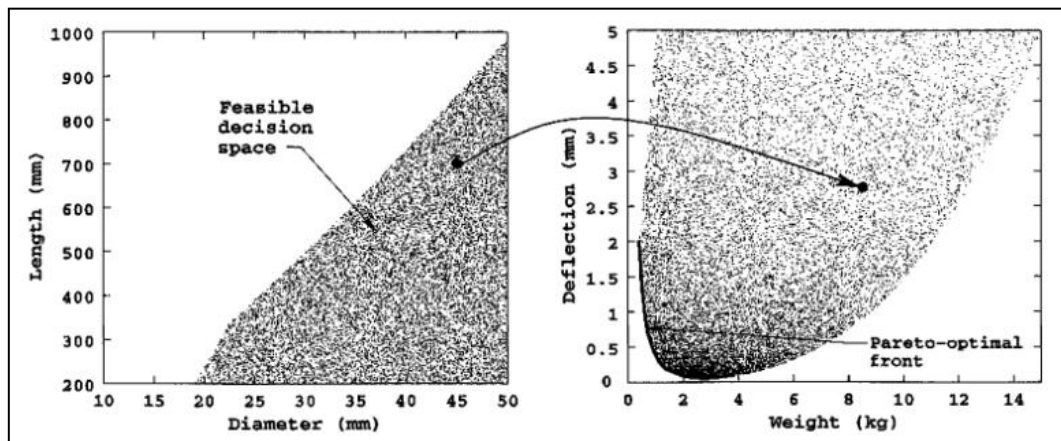


Figure 5.6 : Illustration du front de Pareto (espace de décision à gauche, espace des fonctions-objectifs à droite de la figure) (Deb, 2001)

La figure 5.7 permet de qualifier la notion de front de Pareto, en fonctions des différentes politiques d'optimisation, pour le cas biobjectif. Nous savons très bien que la notion

d'optimalité possède un caractère local et global. C'est pour cela que nous trouverons dans la littérature la notion d'ensemble de « solutions Pareto-optimales au sens global », mais aussi l'ensemble des « solutions Pareto-optimales au sens local ». C'est l'objet de la définition 3.

Définition 3 (ensemble des solutions Localement Pareto-optimales) (Deb, 2001) :

Si pour tout élément x , appartenant à un ensemble $\underline{P}$, il n'existe aucun membre y (au voisinage de x , s'écrivant $\|y - x\|_\infty \leq \varepsilon$, où ε est un nombre très petit et positif) dominant un autre élément de l'ensemble $\underline{P}$, donc la solution y , appartenant à l'ensemble $\underline{P}$, constitue localement un Pareto-optimum.

La figure 5.7 présente la notion de solutions localement Pareto-optimales, ne faisant pas partie du front de Pareto global (en pointillé). La notion de dominance forte et dominance faible sont aussi abordées dans ce domaine, relativement aux définitions fournies dans des livres de référence (Deb, 2001)(Ehrgott, 2005)(Bazaraa et al., 2006). Nous ne rapportons pas ici le détail de ces notions afin de ne pas alourdir ce manuscrit.

La notion d'optimum faible, est essentielle pour appréhender la plupart des techniques de détection du front de Pareto. Ces techniques ne permettent pas nécessairement l'obtention de solutions fortes, mais techniquement, nous recherchons un ensemble de solutions qui puisse satisfaire, même faiblement, les objectifs en termes de minimisation et/ou maximisation.

Nous mentionnons que, suite à la diversité des techniques ou approches de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif, il est essentiel de procéder à une classification présentant les informations nécessaires relativement à l'ordre au sens multicritère. Cette classification est détaillée dans (Ehrgott, 2005). Nous présentons ici l'essentiel de la logique de classification.

5.7.2. Classification des problèmes d'optimisation multiobjectifs

Dans l'espace des fonctions de dimension $\mathbb{R}^p$ ($p > 1$), la notion d'ordre au sens multicritère ne peut être explicitée sans passer par la construction d'un type d'ordre autre que celui existant entre les éléments de l'espace des réels $\mathbb{R}^1$. A notre sens, cette construction émane bien sûr philosophiquement, à partir d'un concept qui est mise en équation, dans le but de quantifier cet ordre et de le valider algébriquement.

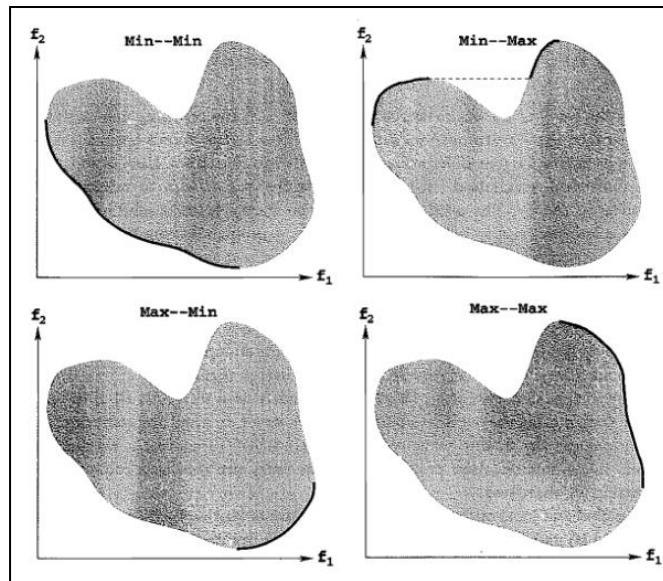


Figure 5.7 : Les solutions Pareto-optimales marquées en trait noir fort pour les quatre politiques d'optimisation (Deb, 2001)

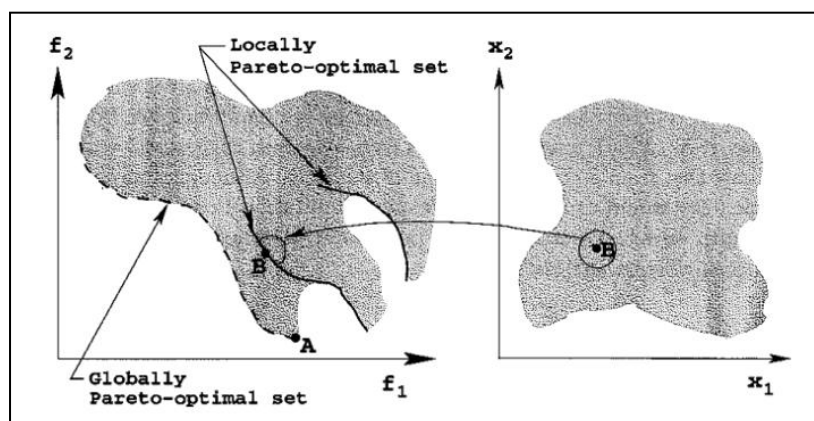


Figure 5.8 : Illustration d'ensembles localement Pareto-optimaux (Deb, 2001)

Cela dit, la classification des problèmes d'optimisation multiobjectifs permet de se situer au sein des différentes méthodes d'optimisation existantes. Cela correspond donc à une généralisation ou bien à un groupement de ces différentes approches d'optimisation sous un même contexte. L'usage d'une telle ou telle technique d'optimisation correspond ainsi au « mapping » du problème initial. En général, le « mapping » désigne une application mathématique dont les variables correspondent aux fonctions-objectifs. Cette application sera notée θ .

Par exemple, pour une approche de recherche d'optimum-Pareto, le « mapping » correspond à l'identité (Ehrgott, 2005), car toutes les fonctions sont prises en considération sans aucune transformation. La recherche de l'optimum se fait ainsi directement dans l'espace des fonctions de dimension p . Dans le cas biobjectif, par exemple, et pour la recherche de

l'optimum dans l'espace des fonctions-objectifs, le « mapping » peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} \theta : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (f_1, f_2) & \mapsto & (f_1, f_2) \end{array}$$

C'est-à-dire que :

$$(18') \quad \theta = \text{Id}$$

Dans le cas de la méthode de la somme pondérée, le « mapping » correspond au produit scalaire entre le vecteur des fonctions-objectif et le vecteur poids λ . Nous écrivons donc (Ehrgott, 2005) :

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} \theta : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{f} & \mapsto & \langle \vec{f}, \vec{\lambda} \rangle \end{array}$$

Cependant, dans le cas de l'utilisation de la méthode de la somme pondérée, la définition de l'hyperplan constitué de la droite « (D) : $\langle \vec{f}, \vec{\lambda} \rangle = c$ » permet, géométriquement, la recherche des points dominants dans l'espace des fonctions-objectifs, sous-espace de $\mathbb{R}^p$.

Cela dit, le « mapping » correspondant à la méthode de la somme pondérée n'est plus celui décrit par l'expression (19) mais ce seront les expressions (18) et (18') qui décriront l'approche de résolution, sous contrainte de la minimisation du paramètre c décrivant la variation de la position (en translation) de l'hyperplan (D).

En incluant aussi les fonctions contraintes, nous proposons de définir le « mapping » définissant le lagrangien par :

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} L : \mathbb{R}^{p+m} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{f}, \vec{g}) & \mapsto & \langle \vec{f}, \vec{\lambda} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{\mu} \rangle \end{array}$$

Donc, en considérant une technique d'optimisation donnée, la formulation générale d'un problème d'optimisation multiobjectif, peut se mettre sous la forme suivante (Ehrgott, 2005) :

$$(\chi, f, \mathbb{R}^p) / \theta / (\mathbb{R}^P, \preceq) \quad (21)$$

La logique étant que le vecteur fonctions-objectifs f soit cartographié (*mapped* en anglais) de l'espace d'origine $\mathbb{R}^p$ vers un espace ordonné $(\mathbb{R}^P, \preceq)$, tel que $p \neq P$. Dans cette situation, la comparaison entre les différentes solutions est effectuée par la relation $\preceq$ (meilleur que). Cette transformation (« mapping » θ) est désignée en anglais par « model map » (Ehrgott, 2005).

Donc, nous pouvons dès lors présenter les éléments qui décrivent complètement un problème d'Optimisation MultiObjectif (Ehrgott, 2005) :

- L'espace des solutions réalisables (*feasible set*) χ de dimension p ;
- Le vecteur des fonctions-objectifs $f = (f_1, \dots, f_p) : \chi \rightarrow \mathbb{R}^p$;
- L'espace des fonctions-objectifs $Y \subset \mathbb{R}^p$;
- L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}^p, \preceq)$ où les solutions appartiennent à un sous-ensemble Y de $\mathbb{R}^p$;
- Le modèle de cartographie ou en anglais « model map ».

Remarque 2

La notion de « mapping » est une notion topologique (Berger et Gostiaux, 1987), définie mathématiquement comme étant un couple d'un sous-ensemble U (de dimension fini) et d'une fonction φ de classe C^p ($p > 0$), où φ correspond à une bijection de l'ensemble U vers un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$.

L'ensemble de couples (U_i, φ_i) permet de définir la notion d'atlas d -dimensionnel de classe C^p , sur un ensemble $X = \cup U_i$ (axiome 1). Deux axiomes additionnels doivent être assurés aussi afin de compléter la définition d'un atlas :

- Chaque φ_i est une bijection de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et pour tout couple (i, j) , $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
- Pour tout couple (i, j) , l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un isomorphisme de classe C^p de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

5.7.3. Méthode de la somme pondérée et formulation du problème mono-objectif équivalent

La méthode de la somme pondérée sera directement présentée car c'est la méthode avec laquelle nous allons travailler lors de la résolution du problème d'usinage en tournage monopasse. Cette méthode est l'une des plus intuitives, faisant partie de la classe des méthodes d'agrégation. Elle permet donc de transformer un problème d'optimisation multiobjectif en un problème d'optimisation à une seule fonction objectif.

L'équivalence des solutions, entre le problème de départ et celui formulé par la somme pondérée, ou l'assurance de l'optimalité des points non-dominés par cette méthode ont été relevés par (Ehrgott, 2005), et justifiant que, dans le cas convexe, la technique permet de balayer nécessairement les points optimaux (Ehrgott, 2005). Dans le cas d'un problème d'optimisation à N variables, M fonctions-objectifs, J contraintes d'inégalité et K contraintes

d'égalités, la méthode de la somme pondérée décrit le nouveau problème mono-objectif équivalent, sous contraintes, comme suit :

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \text{minimiser } F(x) = \sum_{m=1}^M w_m f_m(x) \\
 & \text{S/C } g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\
 & h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\
 & x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, N;
 \end{aligned}$$

Si toutes les fonctions sont normalisées, les poids w_m appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$ et leur somme est égale à l'unité (Deb, 2001).

A partir de cette description, nous pouvons reprendre la classification de cette méthode par :

$$(\chi, f, \mathbb{R}^M) / < \vec{f}, \vec{\lambda} > / (\mathbb{R}, \leq) \quad (23)$$

Exemple :

Dans le cas biobjectif, la fonction composite est définie par la somme pondérée des deux fonctions-objectifs initiales :

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad (24)$$

Et en adoptant les fonctions normalisées définies au § 5.6, nous écrivons :

$$\bar{f} = \lambda \bar{f}_1 + (1 - \lambda) \bar{f}_2 \quad (25)$$

La figure 5.9 présente la logique avec laquelle la détection du front de Pareto est réalisée, géométriquement (l'ensemble étudié n'est pas nécessairement convexe). Pour chaque couple (λ_1, λ_2) , le balayage se fait en variant la constante c , en commençant par une valeur, assez grande, jusqu'à une valeur critique où l'on note la sortie de la droite d'équation « $(D_c) : \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = c$ » de l'espace des fonctions-objectifs décrit par l'ensemble Y (Figure 5.9).

Cette logique géométrique permet donc de détecter la plus petite valeur de la constante c , en maintenant toujours une intersection non vide entre la droite (D_c) et l'espace des fonctions, exprimé par l'ensemble des couples faisables (y_1, y_2) :

⇒ donc permet de minimiser la quantité $(\sum_{i=1}^2 \lambda_i y_i) = c$

⇒ L'ensemble des solutions (y_1^*, y_2^*) ainsi obtenu est optimal au sens de Pareto. Pour le cas convexe, les solutions obtenues sont connectées. L'ensemble de ces solutions est par la suite connexe (Ehrgott, 2005).

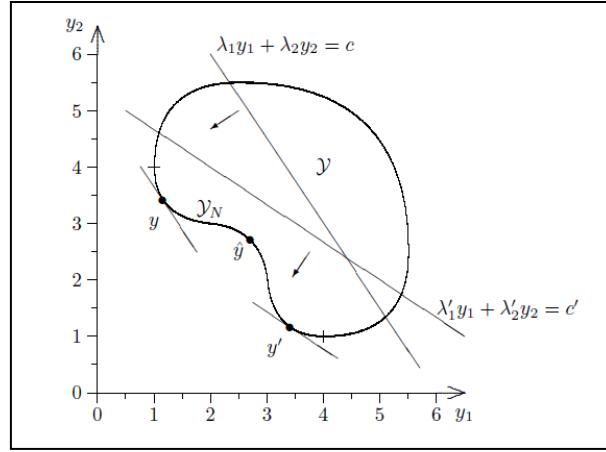


Figure 5.9 : Balayage des solutions Pareto-optimales en variant les λ_1 et λ_2 (Ehrgott, 2005)

Les théorèmes suivants permettent d'affirmer la Pareto-optimalité des solutions, dans le cas où les multiplicateurs des fonctions sont tous positifs (Deb, 2001).

Théorème 1 (Th. 3.1.1 (Deb, 2001))

La solution du problème représenté par l'équation (22) est Pareto-optimale si les poids des fonctions-objectifs sont tous positifs.

Théorème 2 (Th. 3.1.2 (Deb, 2001))

Si $\mathbf{x}^*$ est une solution Pareto-optimale d'un problème d'optimisation multiobjectif convexe, il existe donc un poids w positif non nul tel que $\mathbf{x}^*$ est solution de la formulation du problème de la somme pondérée (syst. (22)).

Rares sont les travaux qui utilisent l'application directe de la démarche « géométrique » en utilisant une collection d'hyperplans, décrits dans notre cas par la famille des droite (D_c). Par exemple, (Rotar, 2006)(Mitsuo & Ruwei, 2000) utilisent la notion d'hyperplan (dans l'espace des fonctions-objectifs), afin de guider, ou de sur-contraindre et forcer la génération des nouvelles populations évoluant par les algorithmes évolutionnistes adoptés. La sur-contrainte permet de chercher la direction d'évolution des générations G_{i+1} à partir de la génération G_i conformément à l'évolution de la famille de droite (D_c).

L'explication donnée ci-dessus permet de comprendre géométriquement l'approche d'optimisation. Mais dans le cas de fonctions-objectifs complexes, il n'est pas aisé de procéder à l'implantation de cette « méthode géométrique » analytiquement. On a tendance à exploiter des méthodes numériques plus aisées. Par exemple (Jabri et al., 2013) a utilisé la discrétisation de l'espace des fonctions (f_1, f_2), horizontalement et verticalement, utilisant un

pas de discrétisation variable dans les deux sens (axe f_1 et axe f_2). La détection du front de Pareto se voit facile en appliquant un tri simple sur les colonnes et les lignes ainsi déduites.

5.7.4. Construction du Lagrangien du problème d'optimisation et lien avec la recherche d'optimum lié en analyse des fonctions à plusieurs variables

L'écriture du Lagrangien est classiquement utilisée pour relaxer, donc transformer, les problèmes d'optimisation mono-objectif sous contraintes en des problèmes d'optimisation sans contraintes (Minoux, 1993). Au départ, le Lagrangien ou la fonction de Lagrange a été introduite dans le cadre de la recherche de l'optimum d'une fonction scalaire sous des contraintes d'égalité (Krasnov et al., 1993). Les contraintes d'égalité constituent donc le lien entre les différentes variables du problème. Cela correspond donc à des extremums liés et non pas à des extrémums libres. En analysant la construction du lagrangien d'un problème mono-objectif à 2 variables de décision (Krasnov et al., 1993), nous avons compris que le lagrangien n'a pas d'importance en lui-même. En effet, ce sont les conditions nécessaires d'existence de l'optimum qui sont importantes et qui sont, de ce fait, à la base de la définition du lagrangien.

Nous rapportons ici un exemple de construction du Lagrangien (méthode des multiplicateurs de Lagrange), en démarrant de la condition d'optimalité d'une fonction f , variable de x et de y , et en incluant aussi la fonction de liaison entre les variables x et y (« $\varphi(x,y) = 0$ », désignée comme fonction contrainte d'égalité). Les techniques que nous rapporterons au paragraphe suivant sont les précurseurs des conditions d'optimalité KKT.

5.7.4.1. Construction dans le cas d'une fonction à deux variables (extrait de (Krasnov et al., 1993), paragraphe 14.18 p. 485)

Soit donc $M_0(x_0, y_0)$ un extremum lié d'une fonction, décrite par l'équation cartésienne $z = f(x, y)$ avec la liaison $\varphi(x, y) = 0$. Supposons qu'on ait réussi à résoudre l'équation de liaison par rapport à y , i.e. $y = \psi(x)$. La dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x , ou, ce qui est équivalent, la différentielle de $f(x, y)$ doit être nulle en M_0 (pour les fonctions non monotones):

$$(df)_{|M_0} = (f'_x dx + f'_y dy)_{|M_0} = 0 \quad (26)$$

L'équation de liaison donne :

$$(d\varphi)_{|M_0} = (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy)_{|M_0} = 0 \quad (27)$$

En multipliant cette égalité par un nombre λ provisoirement inconnu et en ajoutant membre à membre à l'équation (26), on obtient :

$$(f'_x + \lambda \varphi'_x)|_{M_0} dx + (f'_y + \lambda \varphi'_y)|_{M_0} dy = 0$$

Supposons que λ est choisi tel que

$$(f'_y + \lambda \varphi'_y)|_{M_0} = 0 \quad (28)$$

(on admet que $\varphi'_y \neq 0$). Puisque dx est arbitraire, il vient

$$(f'_x + \lambda \varphi'_x)|_{M_0} = 0 \quad (29)$$

Les égalités (28) et (29) expriment des **conditions nécessaires d'extremum lié** en $M_0(x_0, y_0)$ de la **fonction de Lagrange** :

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Donc, si $\varphi(x, y) = 0$, l'extremum lié de la fonction $z = f(x, y)$ est nécessairement un point stationnaire de la fonction de Lagrange $F(x, y)$, où λ est un nombre.

La procédure à suivre pour déterminer les extremums liés est toute tracée. Pour trouver les points susceptibles d'être des extremums de la fonction $z = f(x, y)$ en présence de la liaison $\varphi(x, y) = 0$, il faut :

- 1) Composer la fonction de Lagrange :

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) ;$$

- 2) Annuler les dérivées F'_x et F'_y de cette fonction et leur adjoindre l'équation de liaison pour former le système de trois équations (système (30)) dont la résolution donnera les valeurs de λ et des coordonnées x et y des éventuels extremums.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

Entre autre, le problème d'existence de l'extremum lié se résout par l'étude du Hessien (ou matrice hessienne) de la fonction de Lagrange $F(x, y)$. La matrice hessienne est définie-positive dans le cas de l'existence d'un minimum (local ou global) et est définie-négative si l'optimum correspond à un maximum (local ou global) (Minoux, 1993) (Culioli, 1994).

Le Hessien d'une fonction à deux variables s'écrit (fonction F par exemple) :

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{xy}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Donc en général, pour une fonction f de n variables, de classe C^2 au moins, le Hessien est défini par (Guillopé, 2016) :

$$Hess_x f = \begin{vmatrix} \partial_{11}^2 f(x) & \dots & \partial_{1n}^2 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}^2 f(x) & \dots & \partial_{nn}^2 f(x) \end{vmatrix}$$

Si par contre la fonction n'admet pas d'extremums libres, cela ne signifie nullement que la fonction $f(x, y)$ ne présente pas d'extremum lié sous la condition $\varphi(x, y) = 0$ (Krasnov et al., 1993).

Nous rapportons donc le théorème de Lagrange appliqué localement à une fonction f , et globalement dans le cas d'une fonction globalement convexe ou concave (resp.) pour la recherche d'un minimum ou d'un maximum (resp.).

Théorème 4 (Mottelet, 1993)

Soit $x^* \in S = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\}$ un point régulier du problème de minimisation (mono-objectif) de la fonction f avec contraintes d'égalité « $h(x) = 0$ », vérifiant donc

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$$

Alors il existe nécessairement, un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla h(x^*) = 0,$$

Soit encore

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0,$$

Les composantes du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

La démonstration de ce théorème est détaillée dans (Mottelet, 1993). Dans le cas des contraintes d'inégalité, le Lagrangien est construit de façon similaire, et les conditions KKT (§ 5.7.5) permettent de généraliser l'approche décrite ci-dessus.

5.7.4.2. Conditions suffisantes d'optimalité : « Point-col » et Fonction de Lagrange

La notion de point-col est d'une importante capitale dans l'étude de l'existence de l'optimum dans le cas des problèmes convexes, mais aussi dans la recherche des solutions optimales dans le cas des problèmes non convexes (Minoux, 1993).

Nous rapportons dans ce paragraphe les résultats les plus importants relatifs à la définition du point-col. Ces résultats seront présentés sous forme de théorèmes-clés permettant l'analyse du problème d'optimisation mono-objectif sous contraintes d'inégalité.

La définition même du point-col permet aussi le passage du problème primal de minimisation sous contraintes vers un problème dual, avec ou sans contraintes, où la fonction étudiée sera le Lagrangien augmenté au lieu du Lagrangien classique. Cette technique permet donc d'élargir ou d'étendre les techniques de résolution à des problèmes non convexes (p.270 (Minoux, 1993)).

Mais définissons avant tout ce qu'est un point-col (Minoux, 1993), désigné aussi point selle dans certaines références (Culioli, 1994).

Remarque 3

Aux versions de la définition 4 et des théorèmes 4 et 5 cités dans (Culioli, 1994), l'espace de décision est noté U_{ad} , la variable x est désignée par u , la fonction f est notée J , le vecteur contrainte g est noté θ et le vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ est noté p .

Définition 4 (Culioli, 1994)

Soient U et P des ensembles quelconques et

$$L: U \times P \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction. On dit qu'un couple (u^*, p^*) est un point selle de L si u^* est un minimum de U pour la fonction partielle $L(\cdot, p^*)$ et p^* est un maximum sur P pour la fonction partielle $L(u^*, \cdot)$, ou si encore

$$\sup_{p \in P} L(u^*, p) = L(u^*, p^*) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(u, p^*)$$

La figure 4.9 permet de visualiser le point selle de la fonction $L(u, p) = u^2 - p^2$.

Le théorème 5, dont la preuve est détaillée à la page 113 de (Culioli, 1994), présente l'intérêt de la définition de la notion du point selle dans le cas de la minimisation sous contraintes.

En outre, le théorème 6 traite l'existence du point-col équivalent à l'optimum dans le cas des problèmes convexes.

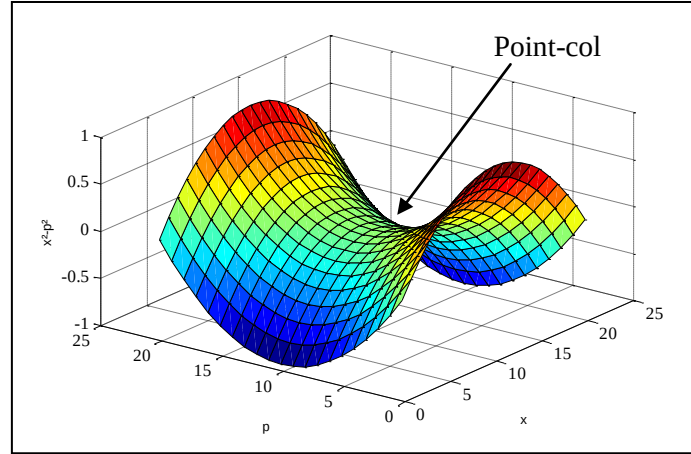


Figure 5.10 : Visualisation du point-col de la fonction $L(u, p) = u^2 - p^2$

Théorème 5 (Culioli, 1994) : Optimalité du point selle

Si (u^*, p^*) est un point selle de $L(u, p) = J(u) + p^T \theta(u)$ sur $U^{ad} \times \mathbb{R}_+^m$, alors u^* est solution de $\min_{u \in U^{ad}} J(u)$ sous $\theta(u) \leq 0$.

Théorème 6 (Minoux, 1993) :

Pour un problème de minimisation (P) suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} f \\ S/C \quad g_i(x) < 0 \quad (i \in I) \end{cases}$$

I étant l'ensemble des indexes relatifs aux inégalités actives

On suppose que les fonctions f et g_i sont convexes et que $S \in \mathbb{R}^n$ est convexe,

Alors si (P) a une solution optimale x^* , il existe un vecteur de multiplicateurs $\lambda^* \geq 0$ tel que (x^*, λ^*) soit un point-col de la fonction de Lagrange $L(x, \lambda)$.

Ces théorèmes expriment le fait que, pour les problèmes convexes, la recherche de l'optimum peut passer, indirectement, par la recherche du point-col. Donc au lieu de résoudre le problème (P), nous cherchons le couple (x^*, λ^*) vérifiant :

$$\begin{cases} L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) \\ g(x^*) \leq 0 \\ \lambda^* g(x^*) = 0 \end{cases}$$

Si l'ensemble d'appartenance S de la variable x est compacte, et les fonctions f et g_i sont continues, la recherche du point-col, s'il existe, peut se faire en résolvant le problème dual (P'), équivalent au problème primal (P), suivant (Minoux, 1993) :

$$\begin{cases} \max_{\lambda} w(\lambda) = \max_{\lambda} (\min_{x \in S} L(x, \lambda)) \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^m \end{cases}$$

La fonction w s'appelle la fonction duale, et elle est définie même si le point-col n'existe pas.

5.7.5. Lien avec les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker dans le cas de fonctions convexes différentiables

Dans le cas où les fonctions f et g_i sont convexes et différentiables, et où $S = \mathbb{R}^n$, le résultat précédent peut être lié aux conditions de Kuhn et Tucker de la façon suivante :

Théorème 7 (Minoux, 1993) (*caractère nécessaire et suffisant des conditions de Kuhn et Tucker dans le cas convexe*)

On se place ici dans le cas où $S = \mathbb{R}^n$. Si, en plus des conditions du théorème 6, les fonctions f et g_i sont différentiables, alors pour que x^* soit un optimum global du problème dual (P') il faut et il suffit que les conditions de Kuhn et Tucker soient vérifiées, c'est-à-dire :

Il existe un vecteur λ^* tel que :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ \lambda^* g(x^*) = 0 \end{cases}$$

Les multiplicateurs de Kuhn et Tucker s'identifient alors aux multiplicateurs de Lagrange au point-col.

Comme cela est mentionné précédemment, ces conditions d'optimalité permettront de chercher :

- les conditions sur les variables de décision, qui constituent les coordonnées du vecteur x : ces conditions peuvent avoir une interprétation géométrique (courbes et nappes paramétrées (Cairol, 1988)), données par des systèmes d'équations résolubles analytiquement ou numériquement ;
- les conditions sur les multiplicateurs de Lagrange assurant la linéarité entre le gradient de la fonction f et le gradient des fonctions contraintes.

5.8. Conclusion

A la fin de ce chapitre, nous voudrions insister sur le fait que les techniques que nous avons adoptées pour la résolution du problème d'optimisation de tournage monopasse peuvent être classées comme générales, et ne sont pas nécessairement dédiées à un problème type.

Nous ajoutons qu'il y a, bien sûr, plus de notions mathématiques qui doivent être présentées en bibliographie, relativement à l'optimisation mathématique monoobjectif et multiobjectif.

Cependant, nous avons décidé de ne pas alourdir davantage ce chapitre, et de ne détailler que les outils et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans la suite de nos travaux.

Généralement, les approches numériques fournissent pratiquement des résultats plus rapides mais qui restent de moindre qualité que l'approche analytique. Nous essayerons dans ce qui suivra de procéder à la résolution analytique du Problème d'Optimisation Multiobjectif du tournage monopasse.

Chapitre 6 : Vers une résolution analytique du Problème

d'Optimisation Multiobjectif du tournage monopasse

6.1. Introduction

Les développements traités dans ce chapitre correspondent à une analyse du problème d'optimisation multiobjectif de l'usinage monopasse en tournage. Cela nous permettra la minimisation du coût de l'opération d'usinage, d'une part et la durée de vie de l'outil de coupe d'autre part.

Il n'y a pas beaucoup de travaux qui traitent ce problème d'une manière rigoureuse. La bibliographie traite, surtout, l'aspect numérique ou statistique de ce problème d'optimisation. Nous proposons ici une étude assez poussée de ce problème d'optimisation multiobjectif, non linéaire, sous contraintes, utilisant deux approches de normalisation des fonctions-objectifs.

Puisque nous avons adopté une formalisation du problème par élaboration de la fonction composite $\bar{f}$, en utilisant la méthode de la somme pondérée, nous aurons à traiter une seule fonction scalaire $\bar{f}$. Chose qui nous a poussée, dans un second temps, à explorer les conditions d'optimalité de Karuch, Kuhn et Tucker qui assurent l'optimalité sous certaines conditions, explicitées au chapitre précédent.

Afin de bien formuler le problème, à chaque étape du développement, nous avons à chaque fois introduit plusieurs paramètres et constantes intermédiaires. Ces paramètres et constantes n'ont pas nécessairement de signification physique, et n'ont comme utilité que de nous faire éviter les erreurs de calcul pouvant être causées par des équations plus ou moins complexes. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas voulu alourdir la liste des notations avec la définition de ces derniers.

6.2. Présentation des fonctions-objectifs

Les deux fonctions-objectifs à minimiser, introduites au chapitre précédent, correspondent :

- Au coût d'usinage d'une opération de tournage (fonction f_1) ;
- Au taux d'usure de l'outil relatif à une opération de tournage (fonction f_2) ;

$$(1) \begin{cases} f_1(V, f, d) = \left(\frac{K_0 \pi D L d_t}{1000} \right) \frac{1}{V f d} \\ f_2(V, f, d) = \left(\frac{\pi D L d_t}{1000 C_0} \right) \frac{V^{p-1} f^{q-1}}{d^{1-r}} \end{cases}$$

Où les variables de contrôle correspondent :

- à la vitesse relative de coupe entre l'outil et la pièce à usiner, notée V (en m/min) ;
- à l'avance de l'outil par tour, notée f (en mm/tr) ;
- à la profondeur de passe d (en mm).

Posons par la suite les deux paramètres α_1 et α_2 :

$$(2) \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1(d) = \frac{K_0 \pi D L d_t}{1000 d} \\ \alpha_2 = \alpha_2(d) = \frac{\pi D L d_t}{1000 C_0 d^{1-r}} \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$(3) \begin{cases} f_1(V, f, d) = \frac{\alpha_1}{V f} \\ f_2(V, f, d) = \alpha_2 V^{p-1} f^{q-1} \end{cases}$$

avec :

$$(3') \begin{cases} f_1^U = \max \left(\frac{\alpha_1}{V f} \right) \\ f_1^L = \min \left(\frac{\alpha_1}{V f} \right) \\ f_2^U = \max (\alpha_2 V^{p-1} f^{q-1}) \\ f_2^L = \min (\alpha_2 V^{p-1} f^{q-1}) \end{cases}$$

6.3. Normalisation des fonctions-objectifs

Nous avons adopté les deux premières techniques de normalisation classiques, citées dans (Kim & De Weck, 2006), qui a regroupé l'essentiel des techniques de normalisation utilisées dans le domaine de l'optimisation multicritère (ou multiobjectif).

Les systèmes (4) et (4') rapportent ces deux techniques.

$$(4) \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{f_1 - f_1^L}{f_1^U - f_1^L} \\ \bar{f}_2 = \frac{f_2 - f_2^L}{f_2^U - f_2^L} \end{cases} \quad (4') \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{f_1}{f_1^U - f_1^L} \\ \bar{f}_2 = \frac{f_2}{f_2^U - f_2^L} \end{cases}$$

Nous adopterons plus loin comme première technique celle exprimée par le système (4'), permettant des calculs analytiques plus aisés.

La technique de normalisation exprimée par le système (4) donne des résultats plus complexes, mais plus réalistes, où le développement analytique devra être nécessairement suivi d'analyses algébriques issues de la théorie de Galois, des résolvantes de Sotta et du radical de Bring, pour la résolution d'équation polynomiale d'ordre 5 (équation (17)).

La résolution numérique s'avérera nécessaire par la suite, vu la difficulté d'une telle équation, mais l'interpolation polynomiale de Lagrange, ou l'estimation de la solution numérique par régression (§ 6.7.9.3.3), permettra de revenir au développement analytique afin de proposer une approche intéressante à ce problème d'optimisation.

En remplaçant avec (3) dans (4), nous obtenons :

$$(5) \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{1}{Vf} \left(\frac{\alpha_1}{f_1^U - f_1^L} \right) - \left(\frac{f_1^L}{f_1^U - f_1^L} \right) \\ \bar{f}_2 = V^{P-1} f^{q-1} \left(\frac{\alpha_2}{f_1^U - f_1^L} \right) - \left(\frac{f_2^L}{f_2^U - f_2^L} \right) \end{cases}$$

Posons maintenant les notations suivantes :

$$(6) \begin{cases} \alpha'_1 = \left(\frac{\alpha_1}{f_1^U - f_1^L} \right); c_1 = \left(\frac{f_1^L}{f_1^U - f_1^L} \right) \\ \alpha'_2 = \left(\frac{\alpha_2}{f_1^U - f_1^L} \right); c_2 = \left(\frac{f_2^L}{f_2^U - f_2^L} \right) \end{cases}$$

Nous obtenons le système (7), équivalente à (5) :

$$(7) \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{\alpha'_1}{Vf} - c_1 \\ \bar{f}_2 = \alpha'_2 V^{P-1} f^{q-1} - c_2 \end{cases}$$

Dans le cas de la technique de normalisation proposée par le système (4'), le système (7) donne :

$$(7') \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{\alpha'_1}{Vf} \\ \bar{f}_2 = \alpha'_2 V^{P-1} f^{q-1} \end{cases}$$

6.4. Définition de la fonction composite

Les deux fonctions-objectifs étant normalisées, nous considérons la fonction composite normalisée, somme pondérée des deux fonctions normalisées $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$. Cette fonction s'écrit :

$$\bar{f} = \lambda \bar{f}_1 + (1 - \lambda) \bar{f}_2 \quad (8)$$

L'utilisation des fonctions normalisées permet d'utiliser aussi des poids λ normalisés, de valeurs allant de 0 à 1 sans intégrer aucune unité physique relative aux fonctions-objectifs.

L'intérêt de cette méthode réside surtout dans le cas des problèmes convexes où la solution faible fournie par la méthode de la somme pondérée, devient une solution proprement efficace ou efficiente (*properly efficient*) (Ehrgott, 2005).

6.5. Normalisation des fonctions-contraintes

L'utilité de la normalisation des fonctions contraintes a été explicitée dans certains travaux de (Datta & Deb, 2005), où les résultats des calculs d'optimisation fournis s'avèrent plus intéressants. Certaines difficultés, relatives à l'homogénéisation des équations algébriques utilisées dans la modélisation mathématiques de certains problèmes d'optimisation, retrouvées lors de transformations de ces fonctions peuvent être évitées en normalisant les contraintes du problème. Des exemples concrets de ces derniers correspondent à la recherche des multiplicateurs de Lagrange, lors de la construction du Lagrangien. Il est nécessaire, dans ce cas, de procéder aux opérations algébriques (somme et produit), à des calculs de différentielles..., où les unités utilisées peuvent être mal interprétées, induisant ainsi des résultats aberrants.

Nous proposons donc ici la normalisation des fonctions contraintes, relativement à (Datta & Deb, 2005).

Les contraintes du problème s'écrivent :

$$(9) \begin{cases} F = k_1 f^\mu d^\nu \leq F_u & (a) \\ P = \frac{FV}{6120 \eta} \leq P_u & (b) \\ Q = k_2 V^\tau f^\varphi d^\delta \leq Q_u & (c) \end{cases}$$

Après normalisation, les fonctions contraintes peuvent être données sous la formulation standard comme (Datta & Deb, 2005) :

$$(10) \begin{cases} g_1(V, f, d) = \beta_1 f^\mu - 1 \leq 0 & (a) \\ g_2(V, f, d) = \beta_2 V f^\mu - 1 \leq 0 & (b) \\ g_3(V, f, d) = \beta_3 V^\tau f^\varphi - 1 \leq 0 & (c) \\ V \in [V_{min}, V_{max}] & (d) \\ f \in [f_{min}, f_{max}] & (e) \\ d \in [d_{min}, d_{max}] & (f) \end{cases}$$

Où l'espace des contraintes est défini par l'inégalité suivante (au sens vectoriel):

$$\vec{g}(V, f, d) = \begin{cases} g_1(V, f, d) \\ g_2(V, f, d) \\ g_3(V, f, d) \end{cases} \leq \vec{0} \quad (10')$$

Et les β_i sont des paramètres :

$$(11) \begin{cases} \beta_1 = \frac{k_1 d^v}{F_u} \\ \beta_2 = \frac{k_1 d^v}{P_u 6120 \eta} \\ \beta_3 = \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} \end{cases}$$

6.6. Lagrangien et relaxation du problème de minimisation

Dans le cas des problèmes d'optimisation d'une fonction à plusieurs variables sous contraintes, il est commun d'intégrer le lagrangien, permettant la présentation du problème d'optimisation initial sous contraintes, sous forme d'un problème d'optimisation sans contraintes. Il est possible dans ce cas d'utiliser tout le bagage mathématique correspondant.

La minimisation (ou maximisation) du lagrangien, au lieu de la fonction objectif de départ, permet donc la relaxation du problème et la généralisation des domaines de variation des variables considérées qui étaient contraintes au départ.

Cette relaxation présente un certain risque dans l'estimation de l'optimum. Sauf que c'est la définition des multiplicateurs de Lagrange qui permet de calibrer le choix des valeurs permises des variables du problème. Ce calibrage est effectué par le bon choix des multiplicateurs qui doivent satisfaire certaines conditions, présentées au chapitre précédent.

Par exemple, relativement aux contraintes d'inégalité, les multiplicateurs doivent être positifs et leur somme égale à l'unité (équation (14-e)), dans le cas où la normalisation des fonctions contraintes a été effectuée. Cette condition correspond donc à la recherche d'une combinaison convexe des contraintes du problème. Cela permettra d'assurer que toutes les contraintes adoptées seront actives aux points considérés (Bazaraa et al., 2006)(Culioli, 1994)(Bertsimas & Tsitsiklis, 1999).

Une seconde condition sur les multiplicateurs de Lagrange est donnée par le système d'équation (14-d) limitant le choix de ces derniers.

Dans le cas de l'optimisation mono-objectif, la convexité du problème permet d'assurer l'existence d'un point selle du Lagrangien, définissant donc l'optimum global du problème. Le théorème minimax, dû à John Von Neumann prouve ces propos (Culioli, 1994).

Le lagrangien s'écrit donc :

$$L(V, f, \lambda, \vec{\mu}) := \bar{f} + \vec{\mu} \cdot \vec{g}$$

$$L(V, f, \lambda, \vec{\mu}) := \lambda \bar{f}_1 + (1 - \lambda) \bar{f}_2 + \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot g_i \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L(V, f, \lambda, \vec{\mu}) = & \lambda \frac{\alpha'_1}{Vf} - \lambda c_1 + (1 - \lambda) \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} - (1 - \lambda) c_2 + \mu_1 (\beta_1 f^\mu - 1) \\ & + \mu_2 (\beta_2 V f^\mu - 1) + \mu_3 (\beta_3 V^\tau f^\varphi - 1) \quad (13) \end{aligned}$$

6.7. Les conditions d'optimalité KKT

Ces conditions permettent, localement, d'estimer les solutions possibles d'un ensemble de problèmes d'optimisation non linéaire. Dans le cas de problèmes convexes, on retrouve les optimums globaux. Comme cela est défini au chapitre précédent, les conditions de Karush-Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0 \quad \forall i = \{1..3\} \quad (a) \\ \frac{\partial L}{\partial V} = 0 \quad (b) \\ \frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad (c) \\ \vec{g} \cdot \vec{\mu} = \sum_{i=1}^3 g_i \cdot \mu_i = 0 \quad (d) \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i = 1 \quad \text{et} \quad \mu_i \geq 0 \quad (e) \end{array} \right.$$

Aux conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes de KKT, nous ajoutons une autre condition que nous proposons, relative à l'optimalité du Lagrangien par rapport au poids λ . Cette condition nous donnera un résultat intéressant, que nous présenterons à la fin de ce chapitre. Ce résultat correspond à la détection d'un premier point optimal du front de Pareto. Ce dernier pourra être reconstruit en utilisant le gradient des fonctions-objectifs. Nous

pouvons retrouver, dès lors, des points appartenant au front de Pareto qui, nécessairement, doivent être connectés (§ 5.7.3, chapitre 5).

Toutefois, nous n'avons pas pu procéder à la recherche de ces autres points du front de Pareto. C'est un travail qui est actuellement en cours de développement.

6.7.1. Optimalité du Lagrangien par rapport à λ

Comme cela a été cité au chapitre précédent, le lagrangien est défini essentiellement dans le cas de l'optimisation à une seule fonction-objectif. C'est pour cela que la fonction utilisée pour définir la lagrangien de notre problème correspond à la fonction composite $\bar{f}$.

Relativement à l'optimisation multiobjectif, l'introduction du paramètre λ permet de retrouver l'ensemble des points dominants de l'espace des fonctions. Cela dit, il n'est pas contradictoire de rechercher les valeurs du paramètre λ qui permettraient d'obtenir des valeurs des fonctions objectifs meilleures que d'autres.

C'est la raison pour laquelle nous proposons ici l'introduction de l'équation (15) qui permettrait de trouver des conditions sur les valeurs de λ et sur les autres variables du problème. C'est ce que nous allons discuter tout au long des sections qui suivent.

La première équation correspond à l'ensemble de valeurs de λ qui minimisent le Lagrangien :

$$(15) \quad : \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \bar{f}_1 - \bar{f}_2 = 0$$

Remarque 1

A partir de l'écriture du lagrangien relative à l'équation (12), à première vue le lagrangien est linéaire par rapport au poids λ . Cette supposition serait correcte dans le cas où ce poids et les variables du problème (V, f, d) seraient indépendants. Cela dit, rien ne prouve cette supposition. C'est la raison pour laquelle nous considérerons le cas général. C'est-à-dire la non-indépendance entre les variables où nous utiliserons donc les résultats de l'équation (15).

Par la première technique de normalisation (système (4))

L'équation (15) donne :

$$\Rightarrow \frac{\alpha'_1}{Vf} - c_1 - \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} + c_2 = 0$$

Nous obtenons :

$$V^p f^q + \left(\frac{c_1 - c_2}{\alpha'_2} \right) Vf - \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = 0$$

Posons :

$$(16) \begin{cases} \alpha := \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1} \\ c := \frac{c_1 - c_2}{\alpha'_2} \end{cases}$$

Donc :

$$V^p f^q + c Vf - \alpha^{-1} = 0 \quad (17)$$

Par la deuxième technique de normalisation (système (4'))

L'équation (17) donne : $V^p f^q - \alpha^{-1} = 0 \quad (17')$

6.7.2. Optimalité du Lagrangien par rapport aux μ_i

A partir du système d'équation (14), nous développons l'équation « $\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = 0 \quad (i \in \{1..3\})$ »

pour trouver l'ensemble des points (V, f) qui permettent d'optimiser les coefficients μ_i , relativement à la minimisation du Lagrangien.

Nous trouvons :

$$(18) \begin{cases} \beta_1 f^\mu = 1 \\ \beta_2 V f^\mu = 1 \\ \beta_3 V^\tau f^\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (19) \begin{cases} \beta_1 f^\mu = 1 \\ \beta_2 f^\mu = \frac{1}{V} \\ \beta_3 V^{\tau-1} f^\varphi = \frac{1}{V} \end{cases} \\ (20) \begin{cases} \beta_1 f^{\mu-1} = \frac{1}{f} \\ \beta_2 V f^{\mu-1} = \frac{1}{f} \\ \beta_3 V^\tau f^{\varphi-1} = \frac{1}{f} \end{cases} \end{cases}$$

6.7.3. Optimalité du Lagrangien par rapport à la variable V

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(V, f, \lambda, \vec{\mu}) = \lambda \frac{\alpha'_1}{Vf} - \lambda c_1 + (1 - \lambda) \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} - (1 - \lambda) c_2 + \mu_1 (\beta_1 f^\mu - 1) \\ + \mu_2 (\beta_2 V f^\mu - 1) + \mu_3 (\beta_3 V^\tau f^\varphi - 1)$$

Si la fonction n'est pas monotone, l'optimalité par rapport à la variable V est équivalente à trouver les couples (V, f) tel que :

$$\frac{\partial L}{\partial V} = 0$$

Nous trouvons donc :

$$\frac{\partial L}{\partial V} = -\lambda \frac{\alpha'_1}{V^2 f} + (1 - \lambda)(p - 1)\alpha'_2 V^{p-2} f^{q-1} + \mu_2 \beta_2 f^\mu + \mu_3 \tau \beta_3 V^{\tau-1} f^\varphi$$

A partir du système (19), nous trouvons :

$$\frac{\partial L}{\partial V} = -\lambda \frac{\alpha'_1}{V^2 f} + (1 - \lambda)(p - 1)\alpha'_2 V^{p-2} f^{q-1} + \frac{\mu_2}{V} + \frac{\mu_3 \tau}{V}$$

C'est équivalent à écrire :

$$\frac{\partial L}{\partial V} = -\lambda \frac{\alpha'_1}{V f} \left(\frac{1}{V} + \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) (p - 1) \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1} V^{p-1} f^q \right) + \frac{\mu_2}{V} + \frac{\mu_3 \tau}{V} = 0 \quad (21)$$

6.7.4. Optimalité du Lagrangien par rapport à la variable f

Si la fonction n'est pas monotone, l'optimalité par rapport à la variable f est équivalente à trouver les couples (V, f) tel que :

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

En dérivant le lagrangien par rapport à la variable f , nous trouvons :

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -\lambda \frac{\alpha'_1}{V f^2} + (1 - \lambda)(q - 1)\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-2} + \mu \mu_1 \beta_1 f^{\mu-1} + \mu \mu_2 \beta_2 V f^{\mu-1} + \varphi \mu_3 \beta_3 V^\tau f^{\varphi-1}$$

Cela est équivalent à (tenant en compte le système (20)) :

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -\lambda \frac{\alpha'_1}{V f} \left(\frac{1}{f} + \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) (q - 1) \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1} V^p f^{q-1} \right) + \frac{\mu \mu_1}{f} + \frac{\mu \mu_2}{f} + \frac{\varphi \mu_3}{f} \quad (22)$$

6.7.5. Lien avec l'optimalité par rapport à λ

Le développement qui suit est basé sur la première technique de normalisation, exprimée par le système (4). Pour la deuxième méthode de normalisation, exprimée par le système (4'), le passage sera direct en mettant les constantes c_1 et c_2 à zéro.

L'équation (17) est équivalente à :

$$\frac{\alpha'_1}{V f} = \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} + (c_1 - c_2)$$

L'équation (21) devient :

$$(-\lambda(c_1 - c_2) - \lambda \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda' \alpha(p - 1) V^p f^q) + \mu_2 + \tau \mu_3 = 0 \quad (23)$$

L'équation (22) devient :

$$(-\lambda(c_1 - c_2) - \lambda\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda'\alpha(q-1)V^p f^q) + \mu\mu_1 + \mu\mu_2 + \varphi\mu_3 = 0 \quad (24)$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont complémentaires par rapport à l'unité, c'est-à-dire qu'ils assurent l'équation :

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad (25)$$

Nous obtenons le système d'équations linéaire permettant d'estimer les μ_i en fonction des autres variables et constantes considérées :

$$\begin{cases} \mu_2 + \tau\mu_3 + C_1 = 0 & (23) \\ \mu\mu_1 + \mu\mu_2 + \varphi\mu_3 + C_2 = 0 & (24) \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 & (25) \end{cases}$$

Avec :

$$(26) \begin{cases} C_1 = (-\lambda(c_1 - c_2) - \lambda\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda'\alpha(p-1)V^p f^q) \\ C_2 = (-\lambda(c_1 - c_2) - \lambda\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda'\alpha(q-1)V^p f^q) \end{cases}$$

Avec la deuxième méthode de normalisation, exprimée par le système (4') le système (26) devient :

$$(26') \begin{cases} C_1 = (-\lambda\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda'\alpha(p-1)V^p f^q) \\ C_2 = (-\lambda\alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1})(1 + \lambda'\alpha(q-1)V^p f^q) \end{cases}$$

En résolvant manuellement ces systèmes d'équations, (26) et (26'), où les inconnus sont les μ_i , nous trouvons :

$$(27) \begin{cases} \mu_1 = \frac{(-\varphi + \tau\mu) + (\mu - \varphi)C_1 + C_2(\tau - 1)}{\mu - \varphi} \\ \mu_2 = \frac{-\tau(\mu + C_2) - (\mu - \varphi)C_1}{\mu - \varphi} \\ \mu_3 = \frac{\mu + C_2}{\mu - \varphi} \end{cases}$$

Nous obtenons donc les expressions des multiplicateurs de Lagrange, exprimés par le système (27), où C_1 et C_2 sont des fonctions de V et de f paramétrées par le paramètre d qui doit être maximisé afin de minimiser les deux fonctions-objectifs, notées dans le système d'équation (28) par C_{1d^*} et C_{2d^*} .

Si nous notons les constantes par :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\varphi + \tau\mu}{\mu - \varphi} \\ y_1 = 1 \\ z_1 = \frac{\tau - 1}{\mu - \varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-\tau\mu}{\mu - \varphi} \\ y_2 = \frac{-\tau}{\mu - \varphi} \\ z_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\mu}{\mu - \varphi} \\ y_3 = 0 \\ z_3 = \frac{1}{\mu - \varphi} \end{cases}$$

nous obtenons une écriture claire des multiplicateurs de Lagrange de la manière suivante :

$$(28) \quad \vec{\mu}(V, f) = \begin{cases} \mu_1(V, f) = x_1 + y_1 C_{1d^*}(V, f) + z_1 C_{2d^*}(V, f) & (a) \\ \mu_2(V, f) = x_2 + y_2 C_{1d^*}(V, f) + z_2 C_{2d^*}(V, f) & (b) \\ \mu_3(V, f) = x_3 + y_3 C_{1d^*}(V, f) + z_3 C_{2d^*}(V, f) & (c) \end{cases}$$

Avec :

$$d^* = \max(d : \vec{g}(V, f, d) \leq 0) \quad (29)$$

Remarque 2

En prenant en compte l'optimalité du Lagrangien par rapport à λ , exprimée par l'expression (17), nous pouvons dire que les couples (V, f) du système (28) satisfont en même temps la minimisation du Lagrangien relativement à λ et aux μ_i .

6.7.6. Interprétation géométrique du système (28) et de l'équation (17)

A première vue, nous remarquons que les multiplicateurs de Lagrange, étant écrits en fonction des deux variables (V, f) , définissent une nappe géométrique (Cairolì, 1988) ou une surface élémentaire (Krasnov et al., 1993), où les équations du système (28) correspondent à une paramétrisation de cette surface.

6.7.6.1. Définition d'une nappe géométrique

En général une nappe paramétrique correspond à un couple $(D, \vec{x})$ formé d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et d'une fonction vectorielle continue $\vec{x} : (u, v) \rightarrow \vec{x}(u, v)$ définie sur D .

En raison de l'identification de $\vec{x}(u, v)$ à un point $P(u, v)$, $\vec{x}$ symbolise en même temps une application de D dans E (où E est l'espace affine euclidien, dans notre cas de dimension 3).

L'image de D par $\vec{x}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{P \in E : P = \vec{x}(u, v), (u, v) \in D\}$, sera appelé support de la nappe paramétrée.

Nous désignons donc le domaine de définition D comme étant l'ensemble des couples (V, f) qui satisfont aux contraintes (système (10)) du problème d'optimisation initial. Nous le définissons comme suit :

$$D := \{(V, f) : \text{le système (10) est satisfait}\}$$

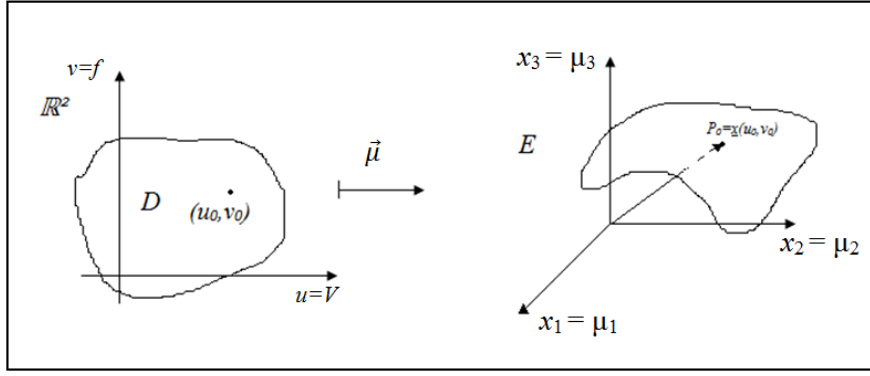


Figure 6.1 : Nappe géométrique de paramétrisation $(D, \vec{\mu})$

Et la nappe géométrique sera paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{\mu}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} : D &\rightarrow \vec{\mu}(D) \\ (V, f) &\rightarrow \vec{\mu}(V, f) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \end{aligned} \quad (30)$$

Et sera désignée par $\Sigma := (D, \vec{\mu})$.

6.7.6.2. Analyse de l'équation (17) : $\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{f}) = \mathbf{V}^p \mathbf{f}^q + \mathbf{c} \mathbf{V} \mathbf{f} - \alpha^{-1} = 0$

Cette équation permet de tracer la relation, entre les deux variables V et f , qui permet d'obtenir le minimum des fonctions-objectifs, de la fonction composite et du Lagrangien par rapport au poids λ , rapporté dans l'expression de la fonction composite normalisée $\bar{f}$.

Il est cependant délicat de trouver la relation permettant d'expliciter une variable en fonction de l'autre. Cela nous incitera un peu plus loin à rapporter les différentes approches algébriques et numériques permettant de remonter vers une relation analytique entre les deux variables. Mais à cette étape, nous nous limiterons à interpréter les équations d'un point de vue géométrique sans les résoudre.

L'équation (17) permet de voir qu'il est possible de limiter le choix des couples (V, f) dans l'espace de définition initial de ces variables, dénommé dans la définition qui précède par l'espace D .

L'équation (17) ainsi définie par « $F(V, f) = 0$ » correspond à la définition d'une fonction implicite (Krasnov et al., 1993) correspondant à courbe plane (Krasnov et al., 1993) (Cairolì, 1988) définie sur l'espace D . Cette relation nous donne la possibilité d'exprimer une variable en fonction d'une autre, par exemple « $f = \psi(V)$ », si bien sur l'écriture cartésienne est possible.

Transposée par la fonction vectorielle $\vec{x}$ exprimée dans notre cas par le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\vec{\mu}(V, f)$ décrit par le système (28), la courbe plane explicitée par l'équation (17) se transformera en un arc géométrique tracé sur la nappe Σ .

6.7.6.3. Définition d'un arc paramétré

On appelle arc paramétré tout couple $(I, \vec{x})$ formé d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle continue $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ définie sur I .

Commentaire : Le vecteur $\vec{x}(t)$ est défini donc sur un espace vectoriel de dimension n , dans notre cas de dimension 2 correspondant au plan (V, f) .

L'image de I par la fonction vectorielle $\vec{x}$, c'est-à-dire l'ensemble des points P de E qui satisfont à la relation $P = \vec{x}(t)$ (qui s'écrit aussi $\overrightarrow{OP} = \vec{x}(t)$) pour $t \in I$ sera appelé support de l'arc paramétré.

6.7.6.4. Définition d'un arc tracé sur une nappe

Nous considérons la nappe géométrique Σ défini plus haut ayant comme paramétrisation $(D, \vec{\mu})$.

Nous considérons en outre δ un arc géométrique dans $\mathbb{R}^2$, de classe ≥ 1 , défini par un de ses représentations paramétriques $(I, \vec{w})$ et dont le support est contenu dans D .

Commentaire : la fonction vectorielle $\vec{w}$ définissant l'arc paramétrique $(I, \vec{w})$ est représentée par la fonction implicite « $F(V, f) = 0$ » équivalente à l'équation (17).

Considérons maintenant l'arc géométrique δ défini par la paramétrisation $(I, \vec{\mu} \circ \vec{w})$. Il est clair que le support γ de l'arc géométrique δ est contenu dans le support de Σ . C'est pourquoi on dit que γ est un arc tracé sur la nappe Σ .

La figure 6.2, ci-dessous, schématise les notions ainsi définies.

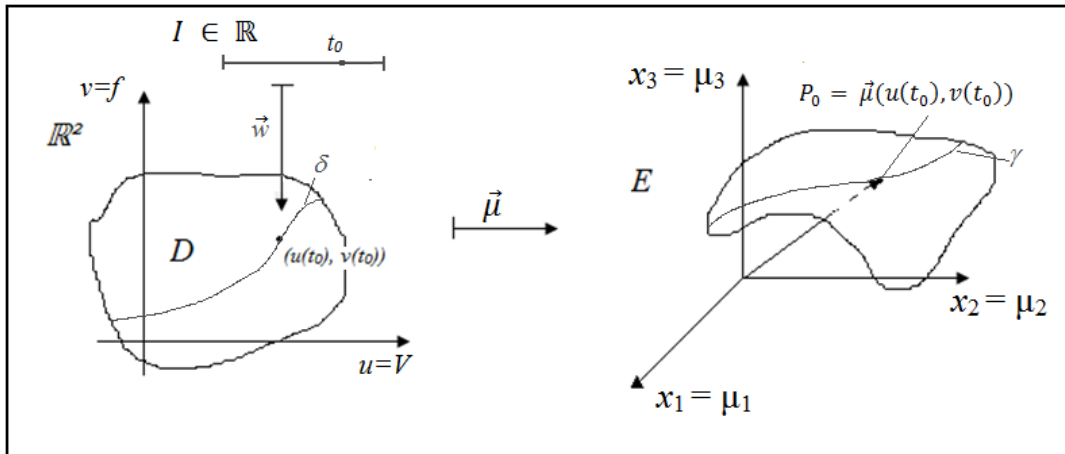


Figure 6.2 : Nappe géométrique Σ de paramétrisation $(D, \vec{\mu})$ et arc géométrique γ de paramétrisation $(I, \vec{\mu} \circ \vec{w})$ tracé sur la nappe

6.7.6.5. Interprétation

A partir de cette analyse et pour notre cas, nous concluons que les multiplicateurs de Lagrange peuvent être interprétés comme étant les coordonnées du support de la nappe

géométrique Σ de paramétrisation $(D, \vec{\mu})$. D est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ des couples (V, f) qui satisfont les contraintes exprimées par le système (10). Donc, le support de la nappe géométrique paramétrée constitue le domaine de choix des multiplicateurs de Lagrange μ_i , trouvés à partir des développements précédents (conditions KKT).

La condition d'optimalité (minimisation) du Lagrangien par rapport au poids λ de la fonction composite $\bar{f}$ a permis de construire au premier regard la fonction implicite « $F(V, f) = 0$ » relative à l'équation (17) et (17') qui décrivent géométriquement deux arcs plans δ_1 et δ_2 dans $D \subset \mathbb{R}^2$.

Les coordonnées de ces arcs plans δ étant inclus dans l'ensemble D , permettent de définir l'immersion totale (dans notre cas) (Berger et Gostiaux, 1987), par la fonction vectorielle $\vec{\mu}$, de ces arcs géométriques dans $\mathbb{R}^3$, tracés sur la nappe géométrique Σ . Ce qui définit une injection de l'arc plan δ dans le support de la nappe Σ , constituant donc le nouvel espace de recherche de l'optimum du problème. Ce dernier est exprimé par le support de l'arc géométrique γ décrit à la figure 6.2.

Nous pouvons ainsi dire que les équations (a), (b), (c) et (d) du système (14) définissent le support de l'arc géométrique γ de paramétrisation $(I, \vec{\mu} \circ \vec{w})$.

L'analyse qui suit permettra de retrouver les points de l'arc géométrique γ qui satisfont la dernière condition KKT exprimée par :

$$\sum_{i=1}^3 g_i \cdot \mu_i = 0$$

et en introduisant les variables V et f dans cette équation, nous écrivons :

$$\sum_{i=1}^3 g_i(V, f) \cdot \mu_i(V, f) = 0 \quad (31)$$

Il faut donc chercher, sur l'arc géométrique γ , l'ensemble des points (V, f) qui vérifient l'équation (31), où le Lagrangien et la fonction composite $\bar{f}$ seront minimisés. On pourrait ensuite remonter et recalculer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange optimaux et trouver, par la suite, les conditions sur les valeurs prises par le poids λ .

6.7.7. Ecriture de la dernière condition KKT

La dernière condition KKT exprimée par l'équation (31) correspond à l'orthogonalité entre les champs de vecteurs $\vec{\mu}(V, f)$ et $\vec{g}(V, f)$. En adoptant les notations (resp.) des vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{\mu}$ exprimées par les systèmes (10) et (28) (resp.), l'équation (31) est équivalente à :

$$G(V, f) = 0 \quad (32)$$

où $G(V, f) = (x_1 + y_1 C_1 + z_1 C_2)(\beta_1 f^\mu - 1) + (x_2 + y_2 C_1 + z_2 C_2)(\beta_2 V f^\mu - 1) + (x_3 + y_3 C_1 + z_3 C_2)(\beta_3 V^\tau f^\varphi - 1)$

Notre objectif maintenant est la recherche des valeurs de V et de f qui satisfont l'équation (32).

L'équation (32) étant à deux variables, elle est similaire donc à l'expression d'une fonction implicite « $G(V, f) = 0$ ». La solution de ce système étant donc un arc géométrique plan et non une valeur précise du couple (V, f) .

Les équations additionnelles (17) et (17'), exprimant aussi d'autres arcs géométriques, permettront de trouver les intersections respectives entre ces arcs géométriques et celui décrit par l'équation (32).

6.7.8. Première approche de normalisation (système (4') et équation (17'))

6.7.8.1. Développement de l'équation à résoudre

Nous considérons dans ce cas l'équation (17') liant entre la variable f et la variable V par :

$$V^p f^q - \alpha^{-1} = 0$$

Nous obtenons donc :

$$f = \alpha^{-\frac{1}{q}} V^{-\frac{p}{q}} \Rightarrow (33) \left\{ \begin{array}{l} f^q = \frac{1}{\alpha} V^{-p} \quad (a) \\ f^{q-1} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{1-\frac{1}{q}}}} V^{-p(1-\frac{1}{q})} \quad (b) \\ f^\mu = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} V^{-\frac{\mu p}{q}} \quad (c) \\ f^\varphi = \alpha^{-\frac{\varphi}{q}} V^{-\frac{\varphi p}{q}} \quad (d) \end{array} \right.$$

Remplaçons par les expressions (33-a) et (33-b) dans les expressions de C_1 et C_2 (système (26')) ; nous trouvons :

$$(26') \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \left(-\lambda \alpha'_2 V^{p-1} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{1-\frac{1}{q}}}} V^{-p(1-\frac{1}{q})} \right) \left(1 + \lambda' \alpha (p-1) V^p \frac{1}{\alpha} V^{-p} \right) \\ C_2 = \left(-\lambda \alpha'_2 V^{p-1} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{1-\frac{1}{q}}}} V^{-p(1-\frac{1}{q})} \right) \left(1 + \lambda' \alpha (q-1) V^p \frac{1}{\alpha} V^{-p} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \left(-\lambda V^{\frac{p}{q}-1} \frac{\alpha'_2}{\alpha^{1-\frac{1}{q}}} \right) (1 + \lambda'(p-1)) \\ C_2 = \left(-\lambda V^{\frac{p}{q}-1} \frac{\alpha'_2}{\alpha^{1-\frac{1}{q}}} \right) (1 + \lambda'(q-1)) \end{cases}$$

Posons :

$$(34) \begin{cases} \chi_1 = -\lambda \frac{\alpha'_2}{\alpha^{1-\frac{1}{q}}} (1 + \lambda'(p-1)) \\ \chi_2 = -\lambda \frac{\alpha'_2}{\alpha^{1-\frac{1}{q}}} (1 + \lambda'(q-1)) \end{cases}$$

Nous obtenons par cette notation :

$$(35) \begin{cases} C_1 = \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \\ C_2 = \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \end{cases}$$

et en remplaçant f^μ et f^φ par leurs expressions, relativement au système (33), l'équation (32) devient :

$$\begin{aligned} & \left(x_1 + y_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} - 1 \right) + \left(x_2 + y_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} - 1 \right) \\ & + \left(x_3 + y_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\alpha^{-\frac{\varphi}{q}} \beta_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} - 1 \right) = 0 \quad (36) \end{aligned}$$

Nous posons :

$$(37) \begin{cases} \gamma_1 = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_1 \\ \gamma_2 = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_2 \\ \gamma_3 = \alpha^{-\frac{\varphi}{q}} \beta_3 \end{cases}$$

L'équation (36) devient alors :

$$\begin{aligned} & \left(x_1 + y_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} - 1 \right) + \left(x_2 + y_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} - 1 \right) \\ & + \left(x_3 + y_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + z_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \left(\gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} - 1 \right) = 0 \quad (38) \end{aligned}$$

En développant, l'équation (37) devient :

$$\begin{aligned} & -(x_1 + x_2 + x_3) + \left(x_1 \gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} + x_2 \gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} + x_3 \gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} \right) - \left(y_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + y_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + y_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \\ & + \left(y_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} + y_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} + y_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} \right) - \left(z_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} + z_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} + z_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(z_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} + z_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} + z_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} \right) = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & -(x_1 + x_2 + x_3) + \left(x_1 \gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} + x_2 \gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} + x_3 \gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} \right) - \left(y_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + y_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} + y_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \\ & + \left(y_1 \gamma_1 \chi_1 V^{\frac{p}{q}(1-\mu)-1} + y_2 \gamma_2 \chi_1 V^{\frac{p}{q}(1-\mu)} + y_3 \gamma_3 \chi_1 V^{\frac{p}{q}(1-\varphi)+(\tau-1)} \right) - \left(z_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} + z_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} + z_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}-1} \right) \\ & + \left(z_1 \gamma_1 \chi_2 V^{\frac{p}{q}(1-\mu)-1} + z_2 \gamma_2 \chi_2 V^{\frac{p}{q}(1-\mu)} + z_3 \gamma_3 \chi_2 V^{\frac{p}{q}(1-\varphi)+(\tau-1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation (39) :

$$\begin{aligned} & -(x_1 + x_2 + x_3) + x_1 \gamma_1 V^{-\frac{\mu p}{q}} + x_2 \gamma_2 V^{1-\frac{\mu p}{q}} + x_3 \gamma_3 V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} - V^{\frac{p}{q}-1} (\chi_1 (y_1 + y_2 + y_3) + \chi_2 (z_1 + z_2 + z_3)) \\ & V^{\frac{p}{q}(1-\mu)-1} \gamma_1 (y_1 \chi_1 + z_1 \chi_2) + V^{\frac{p}{q}(1-\mu)} \gamma_2 (y_2 \chi_1 + z_2 \chi_2) + V^{\frac{p}{q}(1-\varphi)+(\tau-1)} \gamma_3 (y_3 \chi_1 + z_3 \chi_2) = 0 \quad (39) \end{aligned}$$

6.7.8.2. Calcul des constantes (x_i, y_i, z_i)

Le problème d'usinage traité prend comme coefficients :

$$p = 5, q = 1.75, \mu = 0.75, \tau = 0.4, \varphi = 0.2$$

Nous trouvons donc les valeurs des constantes pour le calcul des μ_i :

$$(40) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-\varphi + \tau\mu}{\mu - \varphi} = 0.18 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = \frac{\tau - 1}{\mu - \varphi} = -1.10 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-\tau\mu}{\mu - \varphi} = -0.54 \\ y_2 = \frac{-\tau}{\mu - \varphi} = -0.73 \\ z_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\mu}{\mu - \varphi} = 1.36 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = \frac{1}{\mu - \varphi} = 1.81 \end{cases}$$

6.7.8.3. Calcul des exposants de la variable V

Les exposants de la variable V présents dans l'équation (39) sont donnés par :

$$\left[\begin{array}{ccc} -\frac{\mu p}{q} = -2.14 & 1 - \frac{\mu p}{q} = -1.14 & \tau - \frac{\varphi p}{q} = -0.17 \\ \frac{p}{q} - 1 = 1.86 & \frac{p}{q}(1 - \mu) - 1 = -0.285 & \frac{p}{q}(1 - \mu) = 0.714 \\ \frac{p}{q}(1 - \varphi) + (\tau - 1) = 1.685 & & \end{array} \right]$$

6.7.8.4. Calcul des coefficients α_i et α

D'après ce qui a précédé, nous avons :

$$(2) \begin{cases} \alpha_1 := \frac{K_0 \pi D L d_t}{1000 d} \\ \alpha_2 := \frac{\pi D L d_t}{1000 d^{1-r}} \end{cases} ; (6) \begin{cases} \alpha'_1 := \left(\frac{\alpha_1}{f_1^U - f_1^L} \right) \\ \alpha'_2 := \left(\frac{\alpha_2}{f_1^U - f_1^L} \right) \end{cases} ; (16) \alpha := \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}$$

Avec :

$$(3) \begin{cases} f_1(V, f, d) = \frac{\alpha_1}{Vf} \\ f_2(V, f, d) = \alpha_2 V^{p-1} f^{q-1} \end{cases} ; (3') \begin{cases} f_1^U = \max \left(\frac{\alpha_1}{Vf} \right) \\ f_1^L = \min \left(\frac{\alpha_1}{Vf} \right) \\ f_2^U = \max (\alpha_2 V^{p-1} f^{q-1}) \\ f_2^L = \min (\alpha_2 V^{p-1} f^{q-1}) \end{cases} ; \begin{cases} V \in [50, 500] \\ f \in [0.1, 0.9] \end{cases}$$

Nous remplaçons avec (3') dans le système (6) et nous obtenons :

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \left(\frac{1}{\max \left(\frac{1}{Vf} \right) - \min \left(\frac{1}{Vf} \right)} \right) \\ \alpha'_2 = \left(\frac{1}{\max (V^{p-1} f^{q-1}) - \min (V^{p-1} f^{q-1})} \right) \end{cases}$$

En prenant en compte les premières contraintes définissant les intervalles de variation des variables V et f, nous calculons les paramètres α'_1 , α'_2 et α .

Ce qui donne :

$$(41) \begin{cases} \max \left(\frac{1}{Vf} \right) = \frac{1}{50 \times 0.1} = 0.2 \\ \min \left(\frac{1}{Vf} \right) = \frac{1}{500 \times 0.9} = 0.0022 \\ \max(V^{p-1} f^{q-1}) = (500^4 \times 0.9^{0.75}) = 57.75 \times 10^9 \\ \min(V^{p-1} f^{q-1}) = (50^4 \times 0.1^{0.75}) = 11.11 \times 10^6 \end{cases}$$

Donc :

$$(42) \begin{cases} \alpha'_1 = \left(\frac{1}{\max \left(\frac{1}{Vf} \right) - \min \left(\frac{1}{Vf} \right)} \right) = 5.05 \\ \alpha'_2 = \left(\frac{1}{\max(V^{p-1} f^{q-1}) - \min(V^{p-1} f^{q-1})} \right) = 1.73 \times 10^{-11} \\ \alpha = \frac{\alpha'_2}{\alpha'_1} = 3.43 \times 10^{-12} \end{cases}$$

6.7.8.5. Calcul des coefficients χ_i

D'après les calculs précédents, nous trouvons :

$$\frac{\alpha'_2}{\alpha^{1-\frac{1}{q}}} = 1.47 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

et d'après (34), nous obtenons :

$$\begin{cases} \chi_1 = -1.47 \times 10^{-6} \lambda (1 + 4 \lambda') \\ \chi_2 = -1.47 \times 10^{-6} \lambda (1 + 0.75 \lambda') \end{cases}$$

Maintenant, afin de résoudre l'équation (39), il est nécessaire de calculer les coefficients γ_i qui requiert le calcul des β_i .

6.7.8.6. Calcul des β_i

Ces coefficients s'expriment par :

$$(11) \quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{k_1 d^\nu}{F_u} \\ \beta_2 = \frac{k_1 d^\nu}{P_u 6120 \eta} \\ \beta_3 = \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} \end{cases}$$

Nous avons déjà mentionné au début de ce chapitre que la variable d doit être maximisée conformément aux objectifs de minimisation des deux fonctions objectifs f_1 et f_2 . Cependant, la maximisation de la variable d devra se faire en assurant les contraintes du problème, exprimées par le système d'équations (10).

Les contraintes s'écrivent :

$$(10) \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(V, f, d) = \frac{k_1 d^\nu}{F_u} f^\mu - 1 \leq 0 \\ g_2(V, f, d) = \frac{k_1 d^\nu}{P_u 6120 \eta} V f^\mu - 1 \leq 0 \\ g_3(V, f, d) = \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} V^\tau f^\varphi - 1 \leq 0 \\ d \in [d_{min}, d_{max}] \end{cases}$$

Et conformément au système (33) :

$$\begin{cases} f^\mu = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} V^{-\frac{\mu p}{q}} & (c) \\ f^\varphi = \alpha^{-\frac{\varphi}{q}} V^{-\frac{\varphi p}{q}} & (d) \end{cases}$$

Alors, le système (10) devient :

$$(10) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k_1 d^\nu}{F_u} \alpha^{-\frac{\mu}{q}} V^{-\frac{\mu p}{q}} - 1 \leq 0 \\ \frac{k_1 d^\nu}{P_u 6120 \eta} \alpha^{-\frac{\mu}{q}} V^{1-\frac{\mu p}{q}} - 1 \leq 0 \\ \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} \alpha^{-\frac{\varphi}{q}} V^{\tau-\frac{\varphi p}{q}} - 1 \leq 0 \\ d \in [d_{min}, d_{max}] \end{cases} \Leftrightarrow (43) \begin{cases} d \leq \left(\frac{F_u}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{\frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ d \leq \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{-1+\frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ d \leq \left(\frac{Q_u}{k_2} \alpha^{\frac{\varphi}{q}} V^{-\tau+\frac{\varphi p}{q}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ d \in [d_{min}, d_{max}] \end{cases}$$

La variable d devant être maximisée, nous choisissons par la suite la valeur minimale entre les limites supérieures de cette variable données par le système (43). Pour que toutes les contraintes soient actives (Bazaraa et al., 2006)(Culioli, 1994)(Bertsimas & Tsitsiklis, 1999) pour la valeur choisie de « d^* » et conformément à l'équation (29) :

$$d^* = \max(d : \vec{g}(V, f, d) \leq 0 ; d \in [d_{min}, d_{max}]) \quad (29)$$

nous écrivons donc :

$$d^* = \min(d_1(V); d_2(V); d_3(V)) \quad \text{avec } d \in [d_{min}, d_{max}]$$

Avec

$$(44) \begin{cases} d_1(V) = \left(\frac{F_u}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{\frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ d_2(V) = \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{-1+\frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ d_3(V) = \left(\frac{Q_u}{k_2} \alpha^{\frac{\varphi}{q}} V^{-\tau+\frac{\varphi p}{q}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \end{cases}$$

Remarque 3

Autrement dit, les d_i correspondent aux bornes supérieures du paramètre d , donc nous cherchons le minimum des bornes supérieures afin d'activer toutes les contraintes g_i (Bazaraa et al., 2006) (Culioli, 1994) (Bertsimas & Tsitsiklis, 1999).

Etudions maintenant l'ordre des $d_i(V)$ dans le but d'une éventuelle classification :

$$(45) \left\{ \begin{array}{l} d_{12}(V) = \frac{d_1(V)}{d_2(V)} \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{12} = \left(6120 \eta \frac{P_u}{F_u} \right) \\ d_{13}(V) = \frac{d_1(V)}{d_3(V)} \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{13} = \left(\alpha^{\frac{1}{q}(\frac{\mu}{v}-\frac{\varphi}{\delta})} \left(\frac{F_u}{k_1} \right)^{\frac{1}{v}} \left(\frac{k_2}{Q_u} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right)^{-\frac{1}{\frac{p\mu}{vq}-\frac{1}{\delta}(\frac{p\varphi}{q}-\tau)}} \\ d_{23}(V) = \frac{d_2(V)}{d_3(V)} \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{23} = \left(\alpha^{\frac{1}{q}(\frac{\mu}{v}-\frac{\varphi}{\delta})} \left(\frac{6120 \eta P_u}{k_1} \right)^{\frac{1}{v}} \left(\frac{k_2}{Q_u} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right)^{-\frac{1}{\frac{1}{v}(\frac{p\mu}{q}-1)-\frac{1}{\delta}(\frac{p\varphi}{q}-\tau)}} \end{array} \right.$$

L'application numérique donne. :

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} d_{12}(V) \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{12} = 208.08 \\ d_{13}(V) \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{13} = 172.95 \\ d_{23}(V) \leq 1 \Rightarrow V \leq h_{23} = 272.85 \end{array} \right.$$

Donc le choix de la variable $d = d^*$ se fera conformément au tableau 6.1 suivant :

Valeurs de V : $V_{\min} = 50$ $h_{13} = 172.95$ $h_{12} = 208.08$ $h_{23} = 272.85$ $V_{\max} = 500$				
$d^* =$	$d_1(V)$	$d_1(V)$	$d_2(V)$	$d_3(V)$
Avec comme condition : $d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max}$				
Sinon : $\begin{cases} d_i(V) = d_{\max} & \text{si } d_i(V) \geq d_{\max} \\ d_i(V) = d_{\min} & \text{si } d_i(V) \leq d_{\min} \end{cases}$				

Tableau 6.1 : Variation du paramètre d^* en fonction de la variable de décision V

Ainsi les β_i et γ_i s'écrivent :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \beta_1^* = \frac{k_1 d^{*v}}{F_u} \\ \beta_2^* = \frac{k_1 d^{*v}}{P_u 6120 \eta} \\ \beta_3^* = \frac{k_2 d^{*\delta}}{Q_u} \end{array} \right. \text{ et } (37) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_1^* \\ \gamma_2 = \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \beta_2^* \\ \gamma_3 = \alpha^{-\frac{\varphi}{q}} \beta_3^* \end{array} \right.$$

6.7.8.7. Récapitulation et problème équivalent relatif à la première méthode de normalisation

Suite au développement des conditions d'optimalité de KKT, nous présentons le programme mathématique qui en découle, dont la solution permettra de trouver la valeur des variables (V^*, f^*, d^*) solution du problème d'optimisation multiobjectif initial, reformulé par l'équation (39) et (47).

Donc, la résolution du système d'équations non-linéaires décrit par les conditions d'optimalité KKT se résume comme suit :

1° Trouver le zéro de la fonction h , décrite par l'équation (47), noté V^* ;

2° Calculer les Valeurs optimales des variables f et d correspondantes, notées f^* et d^* ;

3° si l'équation n'admet pas de zéro, cela veut dire que la dernière condition KKT exprimée par l'équation (14-d) n'est pas satisfaite. Si c'est le cas, des alternatives seront proposées et une discussion sur l'existence du zéro sera présentée.

L'équation (47) s'écrit donc :

$$h(V) = 0 \quad (47)$$

avec :

$$\begin{aligned} h(V) = & -1 + 0.18\alpha^{-\frac{\mu}{q}} \frac{k_1 d^{*\nu}}{F_u} V^{-\frac{\mu p}{q}} - 0.54\alpha^{-\frac{\mu}{q}} \frac{k_1 d^{*\nu}}{P_u 6120 \eta} V^{1-\frac{\mu p}{q}} + 1.36\alpha^{-\frac{q}{q}} \frac{k_2 d^{*\delta}}{Q_u} V^{\tau-\frac{q p}{q}} \\ & - 10^{-6} V^{\frac{p}{q}-1} \left(-0.40(\lambda + 4(1-\lambda)) + 0.43(\lambda + 0.75(1-\lambda)) \right) \\ & + V^{\frac{p}{q}(1-\mu)-1} \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \frac{k_1 d^{*\nu}}{F_u} \left(-1.47 \times 10^{-6}(\lambda + 4(1-\lambda)) + 1.62 \right. \\ & \times 10^{-6}(\lambda + 0.75(1-\lambda)) \left. \right) \\ & + V^{\frac{p}{q}(1-\mu)} \alpha^{-\frac{\mu}{q}} \frac{k_1 d^{*\nu}}{P_u 6120 \eta} \left(1.07 \times 10^{-6}(\lambda + 4(1-\lambda)) + 1.47 \right. \\ & \times 10^{-6}(\lambda + 0.75(1-\lambda)) \left. \right) \\ & + V^{\frac{p}{q}(1-\varphi)+(\tau-1)} \alpha^{-\frac{q}{q}} \frac{k_2 d^{*\delta}}{Q_u} \left(-2.66 \times 10^{-6}(\lambda + 0.75(1-\lambda)) \right) \end{aligned}$$

La résolution de cette équation se fera à la section 6.8, dédiée à la présentation des résultats numériques de l'ensemble des développements précédents.

6.7.9. Deuxième approche de normalisation (système (4) et équation (17))

6.7.9.1. Equation à résoudre

Nous considérons dans ce cas l'équation (17) liant entre la variable f et la variable V par :

$$V^p f^q + c V f - \alpha^{-1} = 0$$

Aux développements précédents, nous avons trouvé l'expression de la variable f en fonction de V , et nous l'avons injecté dans les expressions des contraintes g_i et des conditions de KKT. A cette étape, nous essayerons aussi de trouver un lien analytique entre ces deux variables, car

l'objectif principal est de continuer les développements analytiques et d'éviter au maximum les résolutions numériques ou approximations statistiques. Le cas contraire, nous passerons à la résolution numérique par des interpolations ou régressions, ensuite, afin de lier entre les points (V, f) trouvés numériquement, dans le but de continuer les développements analytiques.

6.7.9.2. Discussion sur la résolution analytique de l'équation (17)

L'équation (17) décrit un arc géométrique plan, conformément à la description de la figure 6.2. Nous avons remarqué que cette équation correspond à un polynôme d'ordre 5 de variable V . Cela nous incite à rechercher les racines de ce polynôme dont les coefficients sont des fonctions de f .

L'équation (17) s'écrit donc :

$$P_f(V) = a_f V^5 + b_f V + c_f = 0 \quad (48)$$

Avec

$$\begin{cases} a_f = f^{1.75} \\ b_f = c \times f \\ c_f = -\alpha^{-1} \end{cases}$$

Donc s'il est possible de trouver les racines de ce polynôme, ce seront des fonctions de la variable f . Dans ce cas, la relation directe, et non pas implicite, entre V et f sera définie explicitement. Afin d'avoir plus de visibilité et d'essayer de se rapprocher de la solution de cette équation, nous avons tracé les deux surfaces $surf_1(V, f)$ et $surf_2(V, f)$ définies par le système (49).

$$(49) \quad \begin{cases} Surf_1(V, f) = V^5 + b_f/a_f V \\ Surf_2(V, f) = \alpha^{-1}/a_f \end{cases}$$

La courbe caractérisant l'intersection de ces deux surfaces décrit l'équation (17).

La figure 6.3-a permet de visualiser en perspective les deux surfaces définies par le système (49).

La figure 6.4-b montre l'intersection entre ces deux surfaces, caractérisant la schématisation de la solution que nous écrivons par abstraction :

$$f = \psi(V)$$

Nous remarquons que la courbe relative à l'intersection des deux surfaces est, à première vue, régulière. Nous pouvons l'estimer après par une loi classique, un polynôme du second ordre par exemple ou d'ordre supérieur.

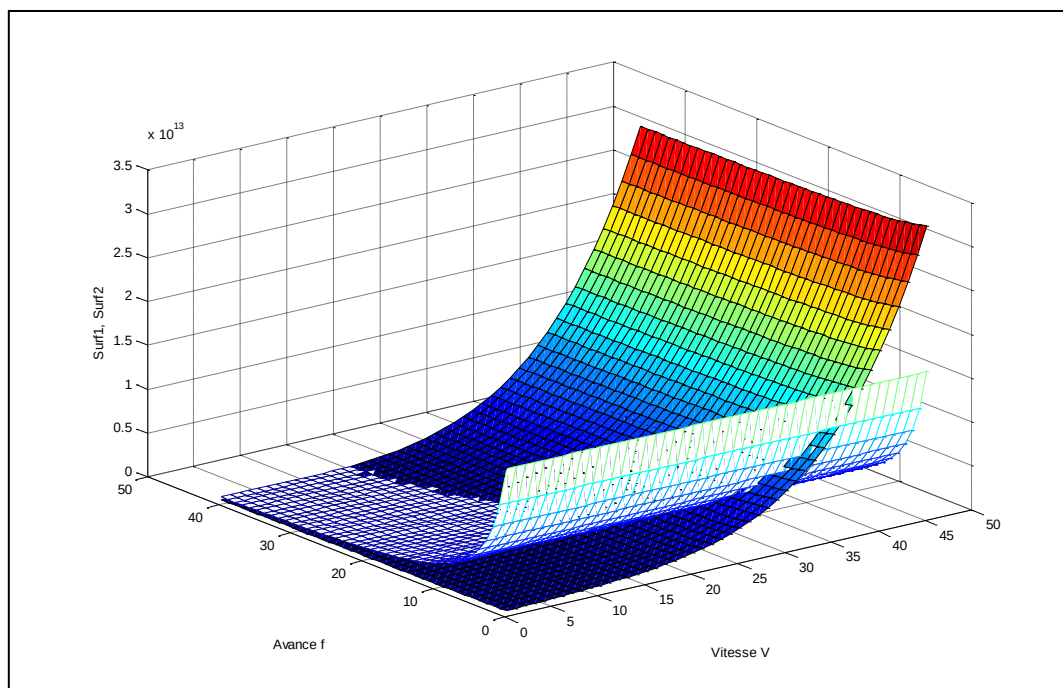


Figure 6.3 : a) Surfaces $Surf_1(V,f)$ et $Surf_2(V,f)$

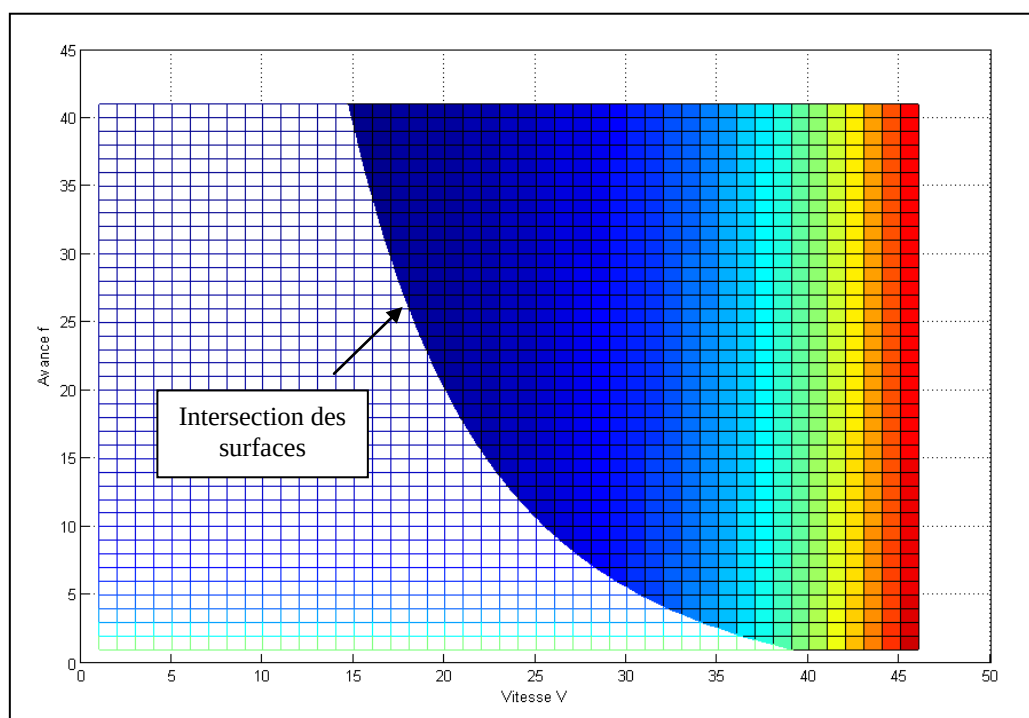


Figure 6.3 : b) Vue de dessus des deux surfaces $Surf_1(V,f)$ et $Surf_2(V,f)$

La question qui se pose toujours, est-il possible de trouver cette loi analytiquement et pas par approximation ? Autrement dit, est-il possible de trouver les racines du polynôme P_f ?

6.7.9.2.1. Théorie de Galois

Galois a démontré que, dans le cas général, il n'est pas possible de trouver les racines d'un polynôme d'ordre supérieur ou égal à cinq.

Nous rapportons ici un corollaire relatif à cette thèse.

Corollaire (corollaire XVI.2.2) (Guin, 2008)

L'équation générale polynomiale sur Q de degré n est résoluble par radicaux si et seulement si $n \leq 4$.

Sur le plan pratique, s'il est possible d'écrire le polynôme sous la forme de produits de polynômes d'ordre inférieur, et dans le cas de corps complets tel le corps des nombres complexes, des polynômes d'ordre 1, qui seront des fonctions de la variable f , nous pouvons écrire :

$$P(V) = \sum_{i=1}^5 a_i V^i = \prod_{i=1}^5 (V - r_i(f)) \quad (50)$$

et afin de trouver les racines $r_i(f)$, nous devons résoudre le système d'équations (51), chose qui ne peut être résolue analytiquement, selon Galois. Il est par la suite préférable de chercher une autre piste !

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} a_0 = (-1)^5 \prod_{i=1}^5 (r_i(f)) \\ a_1 = \sum_{i=1}^5 \left((-1)^4 \prod_{\substack{j \neq i \\ j \in \{1, \dots, 5\}}} r_j(f) \right) \\ a_2 = \sum_{i=1}^5 \left((-1)^3 \prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq k \\ k \neq i \\ j, k \in \{1, \dots, 5\}}} r_j(f) \right) \\ a_3 = \dots \\ a_4 = \dots \\ a_5 = 1 \end{array} \right.$$

6.7.9.2.2. Méthode de Sotta pour la factorisation de polynômes d'ordre quelconque

La méthode de Sotta permet de trouver les racines des polynômes d'ordre quelconque, pourvu que certaines conditions soient remplies par les coefficients des monômes du polynôme.

Nous écrivons donc l'expression général d'un polynôme d'ordre n ci-dessous ;

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$$

Avant d'introduire la méthode, deux conditions sont à assurer afin de pouvoir utiliser cette technique pour un degré de polynôme n quelconque :

$$\begin{cases} 2na_n a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2 \neq 0 \\ 2n^3(n-1)a_{n-1}a_{n-3} - 2(n-2)a_{n-2}^2 \neq 0 \end{cases}$$

Ces deux conditions permettent de garantir que l'équation résolvante existe et n'a pas de racines nulles.

Les équations résolvantes sont des équations qui découlent d'un certain raisonnement pour assurer l'existence de la solution de l'équation de départ. Les résultats de la résolution des équations résolvantes correspondent aux résultats de l'équation de départ.

Il n'y a pas de bibliographie qui traite cette méthode. Toutefois, nous avons trouvé une description assez complète de la méthode sur wikiversity⁽¹⁾, qui découle elle-même de certaines conditions qui permettent d'étendre la méthode de Tschirnhaus à la réduction de polynôme de degré quelconque (Beauville, 2012).

Appliquons maintenant la méthode ; à partir de l'écriture du polynôme obtenu à réduire, relativement à l'équation (48), nous essayons de vérifier les deux conditions de validité de la méthode de Sotta, relativement aux expressions ci-dessus. Nous retrouvons donc :

Pour $n = 5$,

$$\begin{cases} 2na_n a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2 = 2 \times 5 \times a_5 \times a_2 - (5-1) \times a_4^2 = 0 \\ 2n^3(n-1)a_{n-1}a_{n-3} - 2(n-2)a_{n-2}^2 = 2 \times 5^3 \times (5-1) \times a_4 \times a_2 - 2 \times (5-2) \times a_3^2 = 0 \end{cases}$$

Les conditions d'application de la méthode de Sotta ne sont pas vérifiées, il faut donc chercher une autre piste.

6.7.9.2.3. La méthode de Bring-Jerrard

Dans une édition de la revue La Gazette pour mathématiciens, l'article (Beauville, 2012) détaille diverses approches permettant de décrire algébriquement la résolution de telles équations ($P(x) = 0$, où le degré du polynôme étant supérieur strictement à 4).

Il rapporte que c'est le mathématicien suédois Erland Bring (1786) qui a pu résoudre pour la première fois l'équation du type $x^5 + px + q = 0$; et c'est le mathématicien anglais George Jerrard (1832), qui ignorait apparemment les travaux de Bring, qui a pu généraliser la

(1) https://fr.wikiversity.org/wiki/équation_de_degré_quelconque/méthode_de_Sotta_généralisée_à_toute_équation_polynomiale_de_degré_n ; consulté le 30/12/2015

réduction de cette équation. C'est la cause de la désignation de la méthode par « la méthode de Bring-Jerrard ».

Les développements sont d'autant plus complexes que cela ne parait. C'est plus un travail de mathématiciens spécialisés qu'un travail de techniciens et industriels.

Dans le but de contourner ce blocage, nous proposons donc une approche plus technique afin de trouver la solution de cette équation ardue !

6.7.9.2.4. Résolution Numérique, interpolation polynomiale, régression et retour vers l'approche analytique

Afin de résoudre notre problème, nous proposons la démarche suivante :

- L'objectif étant de détecter l'intersection entre les deux surfaces. Nous ne pouvons le faire globalement, il est donc nécessaire de procéder point par point ;
- La première remarque est que l'équation balaie toutes les valeurs de la variable f (figure 6.3-b) ;
- Contrairement à la variable V , dont la variation est limitée entre deux valeurs limites, V_1 et V_2 , qui constituent donc ses nouvelles limites de V .
- Nous proposons donc d'adopter l'algorithme simplifié ci-dessous :

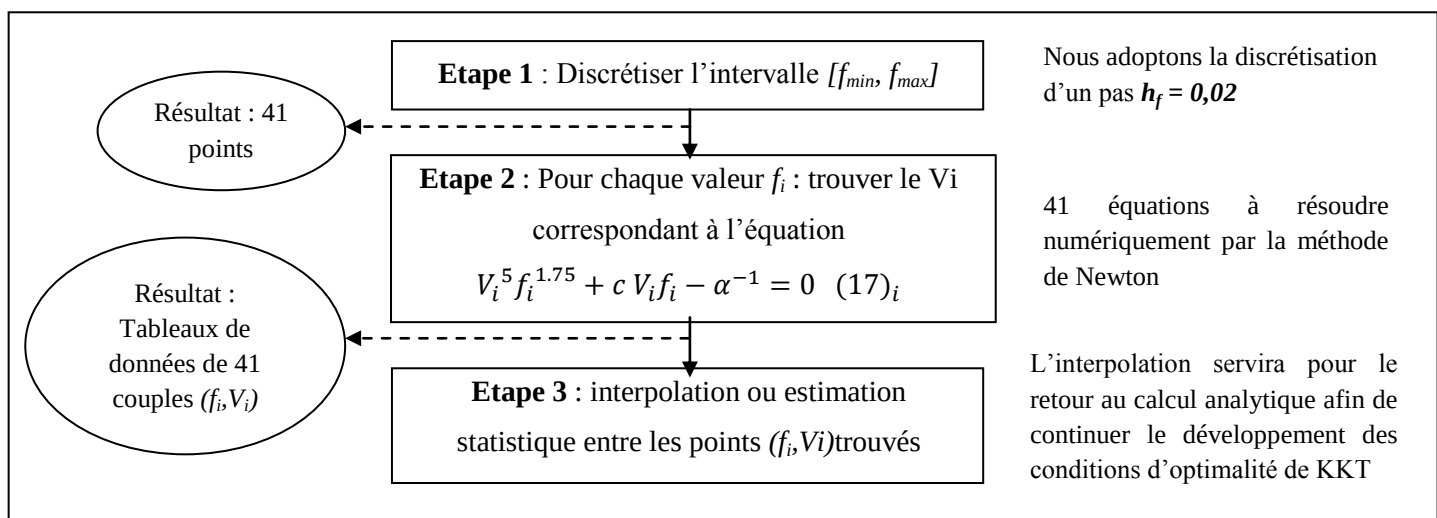


Figure 6.4 : Algorithme adopté pour la résolution de l'équation (17)

- Choix de la méthode de Newton :

A part les justifications mathématiques relatives à la convergence de la méthode, à sa complexité, etc., trois principales causes constituent les raisons de l'adoption de la résolution numérique par la méthode de Newton :

- Cette méthode est classée parmi les méthodes utilisant le gradient de la fonction dont nous cherchons les zéros : Puisque la fonction P_f est polynomiale, nous n'aurons donc aucun problème à calculer l'expression du

gradient. Il n'est donc pas à estimer, il peut être calculé en tout point de l'intervalle de variation avec exactitude (Minoux, 1993)(Bertsekas, 2004) ;

- Le calcul de la dérivée de $P_f(V)$ permet de prouver que cette fonction est monotone, donc son zéro sera unique s'il existe ;

La dérivée étant égale à $P'_{f_i}(V) = 5f_i^{1.75}V^4 + c f_i$, elle est positive pour toute valeur de V et de f_i .

- De plus, le tracé de l'équation « $P_f(V) = 0$ », pour chaque valeur de f_i , permet de montrer l'existence d'un seul zéro dans l'intervalle de variation $[V_2, V_1]$.

6.7.9.3. Résolution de l'équation (17)

6.7.9.3.1. Résolution Numérique de l'équation (17) par la méthode de Newton

L'algorithme général étant présenté à la figure 6.4, nous présentons à l'annexe « code Newton » l'algorithme de Newton utilisé à l'étape 3, sous Matlab.

La figure 6.5 présente un exemple de deux coupes de la surface $P_f(V)$ relatives aux valeurs extrêmes de la variable f :

- ✓ une coupe relative au plan vertical $f = 0.1$ (courbe en trait vert)
- ✓ une coupe relative au plan vertical $f = 0.9$ (courbe en trait rouge)

Les petits cercles correspondent à la suite de Newton (x_i, P_{f_i}) relativement à chaque coupe définie ci-dessus. La valeur de départ de la suite de Newton étant égale à 300 m/min (montré par une petite flèche rouge en bas de la figure 6.5, nous remarquons que la suite de Newton converge pour les deux courbes.

Relativement à la discrétisation adoptée, nous obtenons 41 courbes $P_{f_i}(V)$ et 41 couples (V_i, f_i) appartenant à la courbe décrite par l'équation (17) et la figure 6.3-b. Pour détailler davantage, la figure 6.6 présente toutes les courbes " $P_f(V) = 0$ " pour toute valeur de f et de V (projection orthogonale suivant l'axe f).

L'intersection de l'axe horizontal, dessiné en pointillé, avec la surface de la figure 6.6 permet de définir les valeurs limites $(x_{f_i})_{N_i}$ des suites de Newton pour chaque valeur f_i .

Les résultats du calcul des zéros V_i (désignés x_{f_i} ci-dessus) de la fonction $P_{f_i}(V)$ sont présentés au tableau 6.2, ainsi que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de ces suites. Les valeurs limites de la suite de Newton x_{N_i} correspondent aux solutions V_i , première coordonnée de la courbe-intersection des deux surfaces $Surf_1$ et $Surf_2$ précédemment définies par le

système (49). La figure 6.7 présente l'ensemble des points (V_i, f_i) détectés par l'algorithme défini à la figure 6.4.

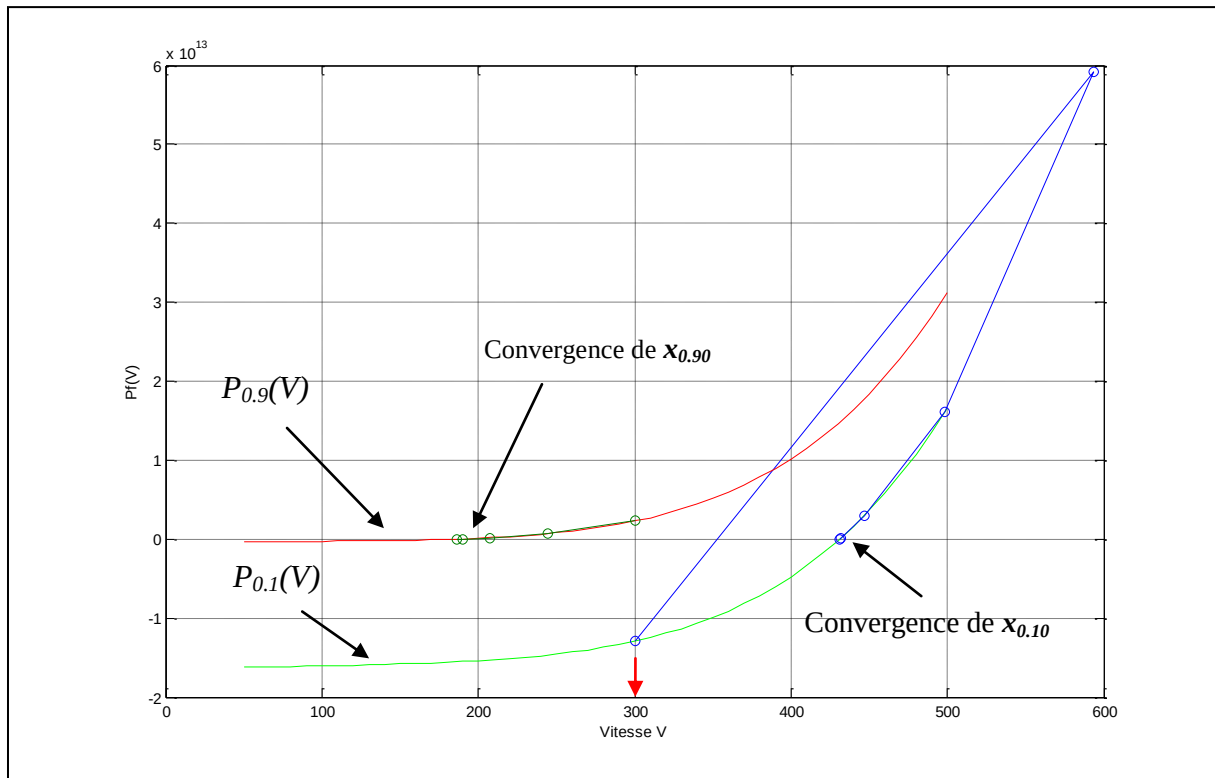


Figure 6.5 : Tracé des courbes " $P_{0.1}(V) = 0$ " et " $P_{0.9}(V) = 0$ " et des suites de Newton correspondantes

Le but étant de revenir à l'approche analytique et de retrouver le lien entre la variable V et f qui décrivent l'équation (17). Nous essayerons donc de trouver une fonction, la plus simple que possible, qui permettra de lier les deux variables V et f , par régression ou par interpolation polynomiale.

L'image inverse de cette fonction doit pouvoir être facile à estimer afin de pouvoir faciliter les calculs futurs, assurant en même temps l'unicité des solutions (V_i, f_i) . Ce dernier point correspond à ce que la fonction soit bijective et non pas injective dans un sens ou dans un autre ! Et il est clair de la figure 6.7 que la fonction proposée est bijective.

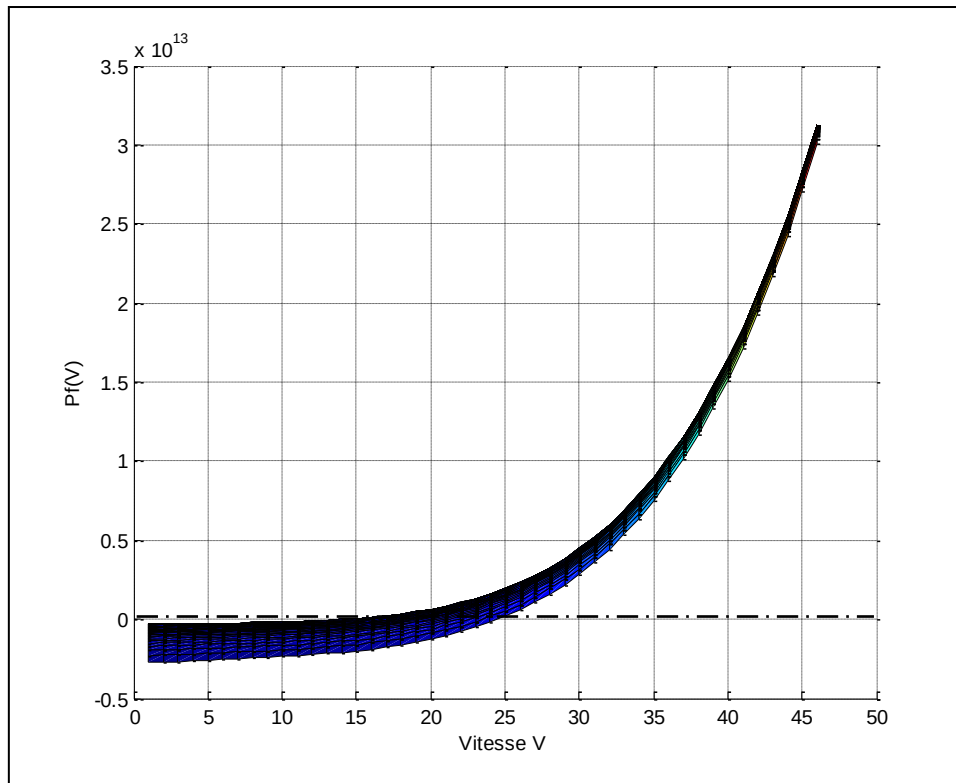


Figure 6. 7 : Projection de la surface " $P_f(V) = 0$ " sur le plan $(V, P_f(V))$

6.7.9.3.2. Interpolation polynomiale

La courbe représentée à la figure 6.7 regroupe un ensemble de $n = 41$ points. Nous pouvons donc adopter un grand ensemble de polynômes liant les f_i aux V_i :

- Un polynôme de Lagrange, d'ordre $(n-1 = 40)$, parfaitement en adéquation avec les résultats de du tableau 6.2 et de la figure 6.7. Pour ce polynôme, aucune erreur n'existe suite à la définition même de l'interpolation polynomiale de Lagrange (Fassi Fihri, 2014).
- Polynômes d'ordre inférieur strictement à 39 : correspondront donc à une régression non linéaire avec une certaine erreur d'estimation, entre les points réels et le modèle proposé (Malinvaud, 1981) ;

Cependant l'image inverse d'un polynôme de degré élevée (degré 4 et plus) s'avère difficile à calculer analytiquement. Ce qui nous a poussé à éliminer cette solution et de choisir un modèle plus simple utilisant la régression linéaire simple avec certains changements de variables.

Tableau 6.2 : Valeurs des suites de Newton relatives à la résolution de l'équation (17)

i	$f(i)$	Valeur limite de la Suite x_{Ni}	Valeur de P_{Ni}	Nombre d'itérations N_i	i	$f(i)$	Valeur limite de la Suite x_{Ni}	Valeur de P_{Ni}	Nombre d'itérations N_i
1	0,10	431,06	0,003432259	8	22	0,52	232,30	-0,000191679	7
2	0,12	403,38	0	8	23	0,54	228,88	0	7
3	0,14	381,27	0,001904829	8	24	0,56	225,61	0	7
4	0,16	363,02	- 0,001507891	8	25	0,58	222,49	0,000158337	7
5	0,18	347,58	0	6	26	0,60	219,52	0,000149216	7
6	0,20	334,27	0,001020417	6	27	0,62	216,66	-0,000140895	7
7	0,22	322,62	-0,00172731	6	28	0,64	213,93	0	7
8	0,24	312,30	- 0,000741669	5	29	0,66	211,30	-0,000126293	7
9	0,26	303,07	0,001289457	5	30	0,68	208,78	0	7
10	0,28	294,73	0	5	31	0,70	206,35	0	7
11	0,30	287,14	0,000501901	5	32	0,72	204,01	0,000108455	7
12	0,32	280,20	0,000896598	6	33	0,74	201,75	-0,000103377	7
13	0,34	273,81	0	6	34	0,76	199,57	0	8
14	0,36	267,89	0	6	35	0,78	197,46	0	8
15	0,38	262,40	0,000663726	6	36	0,80	195,42	0	8
16	0,4	257,27	0	6	37	0,82	193,45	8,64E-05	8
17	0,42	252,47	0	6	38	0,84	191,54	8,28E-05	8
18	0,44	247,96	0,000256766	6	39	0,86	189,68	7,95E-05	8
19	0,46	243,72	0	7	40	0,88	187,88	7,63E-05	8
20	0,48	239,70	0	7	41	0,90	186,13	7,34E-05	8
21	0,50	235,91	- 0,000205297	7					

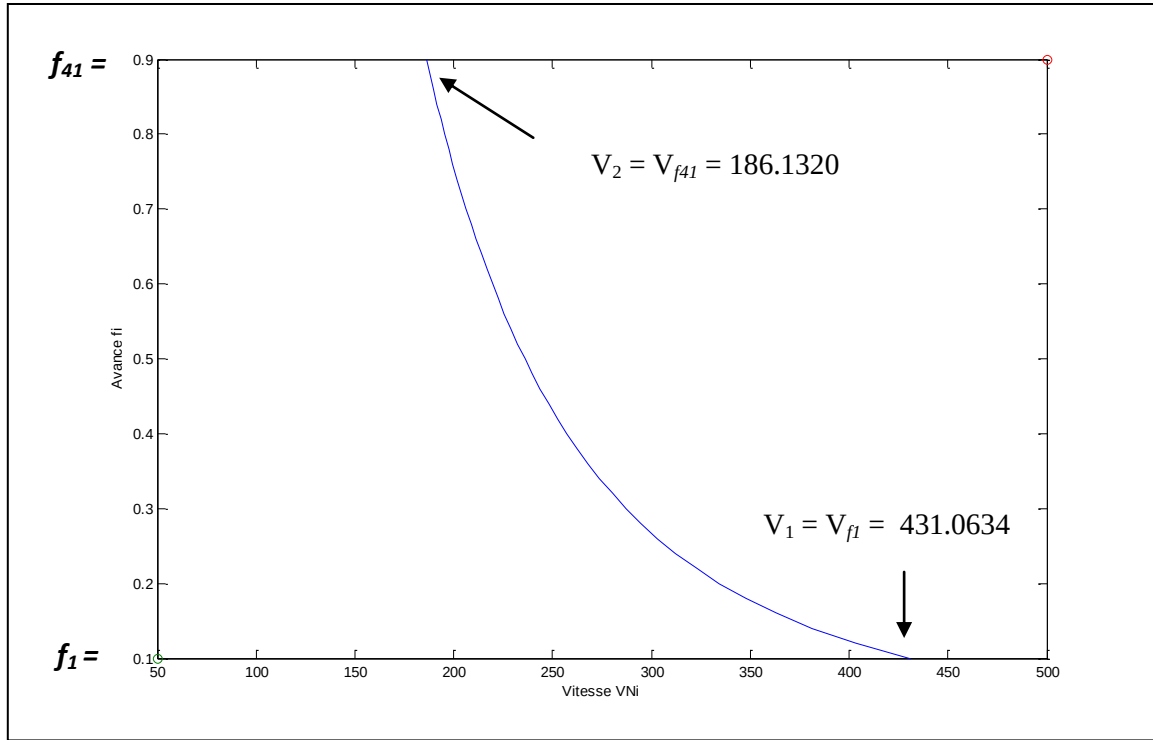


Figure 6.7 (bis) : Représentation des couples (f_i, V_{Ni}) correspondant à l'ensemble des solutions numériques de l'équation (17)

6.7.9.3.3. Reconstruction de la fonction $f = \psi(V)$ par régression linéaire simple avec changement de variable

Nous souhaiterions adopter un modèle, le plus simple que possible, permettant de décrire le comportement des points (V_i, f_i) . D'après l'allure de la courbe de la figure 6.7, nous avons remarqué que le comportement de cette courbe est proche d'un comportement exponentiel. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour un modèle exponentiel selon l'équation (52), avec le changement de variable présenté au système (53).

Note :

Les valeurs des axes X et Y de la figure 6.8 n'ont aucune signification physique. La courbe présentée correspond à un tracé que nous avons réalisé seulement dans le but de montrer l'allure de ce type de fonctions.

$$Y = Y_{\infty}(1 - e^{-aX}) \quad (52)$$

Le changement de variable adopté correspond au système (53).

$$(53) \quad \begin{cases} Y = V_1 - V \\ Y_{\infty} = V_1 - V_{\infty} \\ X = f - f_1 \\ (V_1, f_1) = (431.0634, 0.1) \end{cases}$$

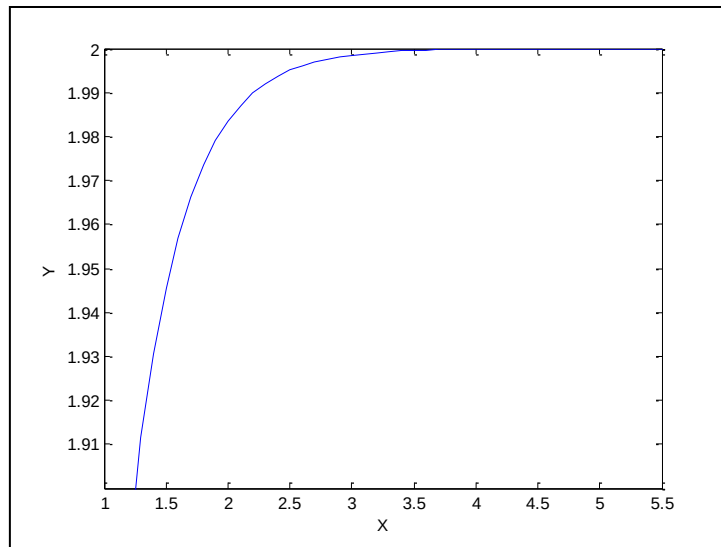


Figure 6.8 : Allure de la fonction adoptée (relativement à l'équation (5))

La valeur V_{∞} correspond à la valeur asymptotique adoptée pour notre modèle.

Ce changement de variable permet la linéarisation du problème d'adéquation statistique traité ici et permettra, ensuite, d'appliquer la régression linéaire simple aux données fournies.

Pour le choix de la valeur du V_{∞} nous avons utilisé la procédure suivante :

- Elargir l'intervalle de variation de la variable f de $[0.1, 0.9]$ à $[0.1, 1.8]$;
- Calculer les valeurs de la variable V correspondants à l'équation (17) en utilisant l'étape 2 de l'algorithme de la figure 6.4 ;
- Choisir une valeur de V_{∞} avec une certaine précision (convergence asymptotique). Nous avons choisi une précision de 5%, correspondant à la valeur $V_{\infty} = 137,1081 \text{ m/min}$;
- Linéariser l'équation (52) ;
- Estimer la constante du modèle « a », du modèle d'équation (52), en fonction des données numériques en utilisant la régression linéaire simple (Malinvaud, 1981) (Helbling & Nuesch , 2001).

La linéarisation de l'équation (52) nous donne :

$$(54) \quad \begin{cases} \tilde{Y} = -aX \\ \tilde{Y} = \ln\left(1 - \frac{Y}{Y_{\infty}}\right) \end{cases}$$

Nous chercherons donc un modèle linéaire régressif entre la variable $\tilde{Y}$ et la variable X . A première vue, relativement à cette transformation, la courbe $(X, \tilde{Y})$ passe par le point $(0,0)$.

Cependant le résultat de la régression peut donner naissance à une ordonnée à l'origine, notée « b », car nous ne sommes pas sûr que le modèle soit exactement de cette forme.

Effectivement, en appliquant la régression linéaire (Malinvaud, 1981)(Helbling & Nuesch , 2001) entre la variable X et $\tilde{Y}$, nous retrouvons :

$$(55) \begin{cases} a = 2.36 \\ b = -0.0036 \text{ (Ordonnée à l'origine)} \\ R^2 = 0.95 \end{cases}$$

D'après la valeur du coefficient de corrélation linéaire R^2 , le modèle linéaire relatif à l'équation (56) s'avère très significatif (Helbling & Nuesch , 2001).

Le modèle (54) devient :

$$(56) \begin{cases} \tilde{Y} = -2.36 X - 0.0036 \\ \tilde{Y} = \ln\left(1 - \frac{Y}{Y_\infty}\right) \end{cases}$$

Nous pouvons revenir maintenant aux variables du problème V et f exprimant la solution de l'équation (17), retrouvée par changement de variables et régression linéaire.

$$(57) \begin{cases} f = \psi(V) = f_1 + \frac{b}{a} + \ln\left(\left(\frac{V_1 - V_\infty}{V - V_\infty}\right)^{\frac{1}{a}}\right) \\ V = \psi^{-1}(f) = V_\infty + (V_1 - V_\infty)(e^{-a(f-f_1)+b}) \end{cases}$$

Par l'application numérique, nous pouvons exprimer le lien entre les deux variables V et f par les équations (58-a) et (58-b). Le tracé des couples $(V, \psi(V))$ est présenté à la figure 6.9.

$$(58) \begin{cases} f = \psi(V) \approx 0.1 + \ln\left(\frac{10.88}{(V - 137.11)^{0.42}}\right) \quad (a) \\ V = \psi^{-1}(f) \approx 137.11 + 293.96(e^{-2.36(f-0.1)-0.0036}) \quad (b) \end{cases}$$

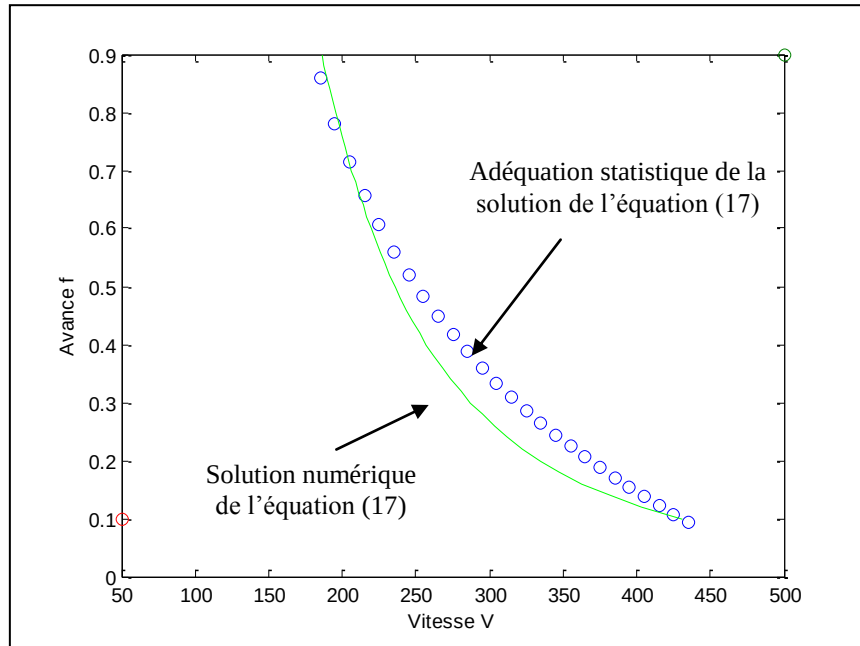


Figure 6.9 : Adéquation statistique de la solution numérique de l'équation (17)

6.7.9.4. Développement de l'équation à résoudre

Une fois la variable f écrite en fonction de la variable V , il est maintenant possible de résoudre la dernière l'équation (32) relative à la dernière condition KKT.

Le calcul des β_i nécessitera en outre l'expression de la variable (ou paramètre) d en fonction des contraintes du problème, exprimées par le système (10). Nous suivrons en conséquence le même raisonnement adopté pour la première méthode de normalisation.

Pour rappel, nous rapportons ci-dessous l'équation (32), les expressions des C_i et β_i ainsi que l'expression de la variable f en fonction de la variable V (équation (58)) ; le système à résoudre correspond donc au système (59) rapporté ci-dessous.

$$(59) \left\{ \begin{array}{l} G(V, f) = (x_1 + y_1 C_1 + z_1 C_2)(\beta_1 f^\mu - 1) + (x_2 + y_2 C_1 + z_2 C_2)(\beta_2 V f^\mu - 1) + (x_3 + y_3 C_1 + z_3 C_2)(\beta_3 V^\tau f^\varphi - 1) = 0 \\ (26) \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \left(-(c_1 - c_2) - \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} \right) (\lambda + (1 - \lambda) \alpha (p - 1) V^p f^q) \\ C_2 = \left(-(c_1 - c_2) - \lambda \alpha'_2 V^{p-1} f^{q-1} \right) (\lambda + (1 - \lambda) \alpha (q - 1) V^p f^q) \end{array} \right. \\ f = \psi(V) = 0.0985 + \ln \left(\frac{10.88}{(V - 137.1081)^{0.42}} \right) \approx \ln \left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V - 137.1081)^{0.42}} \right) \end{array} \right. \quad (58)$$

Les x_i , y_i et z_i sont des constantes calculées auparavant et fournies par le système (40).

La résolution se limite donc à la recherche de la valeur de la vitesse V à laquelle la fonction $G(V) = G(V, \varphi(V))$, exprimée par l'équation (32), s'annule.

6.7.9.5. Calcul des β_i

Les β_i s'expriment par :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{k_1 d^v}{F_u} \\ \beta_2 = \frac{k_1 d^v}{P_u 6120 \eta} \\ \beta_3 = \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} \end{array} \right.$$

Le paramètre d est à maximiser conformément aux contraintes du problème initial.

Les contraintes s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_1 d^v}{F_u} \psi(V)^\mu - 1 \leq 0 \\ \frac{k_1 d^v}{P_u 6120 \eta} V \psi(V)^\mu - 1 \leq 0 \\ \frac{k_2 d^\delta}{Q_u} V^\tau \psi(V)^\varphi - 1 \leq 0 \\ d \in [d_{min}, d_{max}] \end{array} \right.$$

$$\text{Equivalent à (60)} \left\{ \begin{array}{l} d \leq \left(\frac{F_u}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{\psi(V)^{\frac{\mu}{v}}} \\ d \leq \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{V^{\frac{1}{v}} \psi(V)^{\frac{\mu}{v}}} \\ d \leq \left(\frac{Q_u}{k_2}\right)^{\frac{1}{\delta}} \times \frac{1}{V^{\frac{\tau}{\delta}} \psi(V)^{\frac{\varphi}{\delta}}} \\ d \in [d_{min}, d_{max}] \end{array} \right.$$

Pour que toutes les contraintes soient actives ((Bazaraa et al., 2006) (Culioli, 1994) (Bertsimas & Tsitsiklis, 1999)) pour la valeur choisie de « d^* » et conformément à l'équation (29), nous écrivons :

$$d^* = \min(d_1(V); d_2(V); d_3(V)) \text{ avec } d \in [d_{min}, d_{max}]$$

Avec

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} d_1(V) = \left(\frac{F_u}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{\psi(V)^{\frac{\mu}{v}}} = \left(\frac{F_u}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V-137.11)^{0.42}}\right)\right)^{\frac{\mu}{v}}} \\ d_2(V) = \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{V^{\frac{1}{v}} \psi(V)^{\frac{\mu}{v}}} = \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}} \times \frac{1}{V^{\frac{1}{v}} \left(\ln\left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V-137.11)^{0.42}}\right)\right)^{\frac{\mu}{v}}} \\ d_3(V) = \left(\frac{Q_u}{k_2}\right)^{\frac{1}{\delta}} \times \frac{1}{V^{\frac{\tau}{\delta}} \psi(V)^{\frac{\varphi}{\delta}}} = \left(\frac{Q_u}{k_2}\right)^{\frac{1}{\delta}} \times \frac{1}{V^{\frac{\tau}{\delta}} \left(\ln\left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V-137.11)^{0.42}}\right)\right)^{\frac{\varphi}{\delta}}} \end{array} \right.$$

Pour la première approche de normalisation, nous avons comparé les $d_i(V)$ directement en comparant les ratios $\left(d_{ij}(V) = \frac{d_i(V)}{d_j(V)}\right)$ à l'unité et conclu l'ordre des $d_i(V)$ en fonction des valeurs prises par la variable V ; nous adopterons la même démarche.

- Comparaison entre d_1 et d_2

Nous avons calculé le rapport entre $d_1(V)$ et $d_2(V)$ et avons trouvé :

$$d_{12}(V) = \frac{d_1(V)}{d_2(V)} = \left(\frac{F_u}{6120 P_u \eta}\right)^{\frac{1}{v}} \times V^{\frac{1}{v}} \quad (62)$$

Par application numérique nous trouvons :

$$d_{12}(V) = 0.0363 \times V^{1.052}$$

L'intervalle de variation de la variable V permis étant [186.1320, 431.0634] (noté $[V_2, V_1]$), conformément à la résolution de l'équation (17), nous concluons que :

$$8.90 \leq d_{12}(V) \leq 21.53$$

Nous en concluons que :

$$d_2(V) \leq d_1(V) \quad \forall V \in [V_2, V_1]$$

- Comparaison entre d_2 et d_3

Nous avons calculé le rapport entre $d_1(V)$ et $d_3(V)$ et avons trouvé :

$$d_{23}(V) = \frac{d_2(V)}{d_3(V)} = \frac{\left(\frac{612 P_u \eta}{k_1}\right)^{\frac{1}{v}}}{\left(\frac{Q_u}{k_2}\right)^{\frac{1}{\delta}}} V^{\frac{\tau}{\delta} - \frac{1}{v}} \left[\ln \left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V - 137.11)^{0.42}} \right) \right]^{\frac{\varphi}{\delta} - \frac{\mu}{v}} \quad (63)$$

L'objectif étant de comparer ce rapport à l'unité et de détecter la valeur ou les valeurs de la variable V permettant de classer $d_2(V)$ et $d_3(V)$. Le rapport $d_{23}(V)$ étant fonction de V et correspond à une fonction plus ou moins complexe, nous détecterons la valeur (ou les valeurs) de la variable V relative à l'égalité entre ce rapport et l'unité par la méthode de Newton.

La fonction étudiée est donc :

$$c_{23}(V) = d_{23}(V) - 1$$

Le problème est donc équivalent à la recherche du zéro de la fonction c_{23} .

La figure 6.10 présente l'allure de la fonction $c_{23}(V)$ à l'intervalle $[V_2, V_1]$ considéré.

Comme nous pouvons remarquer sur la figure, au voisinage des zéros de la fonction c_{23} , cette dernière est presque linéaire. Autrement dit, la courbure de la fonction est presque négligeable, ce qui peut causer la divergence de l'algorithme de Newton directement à la deuxième itération. En effet, les intersections des tangentes de la courbe, aux points de départ avoisinant les zéros de la fonction, ont favorisé la sortie de la suite de Newton (modélisant la variable V) hors des limites permises, (relativement à l'intervalle $[V_2, V_1]$), engendrant ainsi des valeurs imaginaires de cette suite.

Une démarche d'autant plus simple consiste à estimer la fonction directement par sa tangente au voisinage de ses zéros. En plus, il est possible de justifier ce comportement linéaire local en calculant analytiquement la variation de la pente de la courbe au voisinage du zéro. C'est-à-dire en calculant les valeurs de la dérivée seconde de $c_{23}(V)$ par exemple au voisinage de $V = 250$ et $V = 385$.

L'analyse plus approfondie de la dérivée seconde $c_{23}''(V)$ au voisinage des zéros pourrait justifier encore plus la démarche.

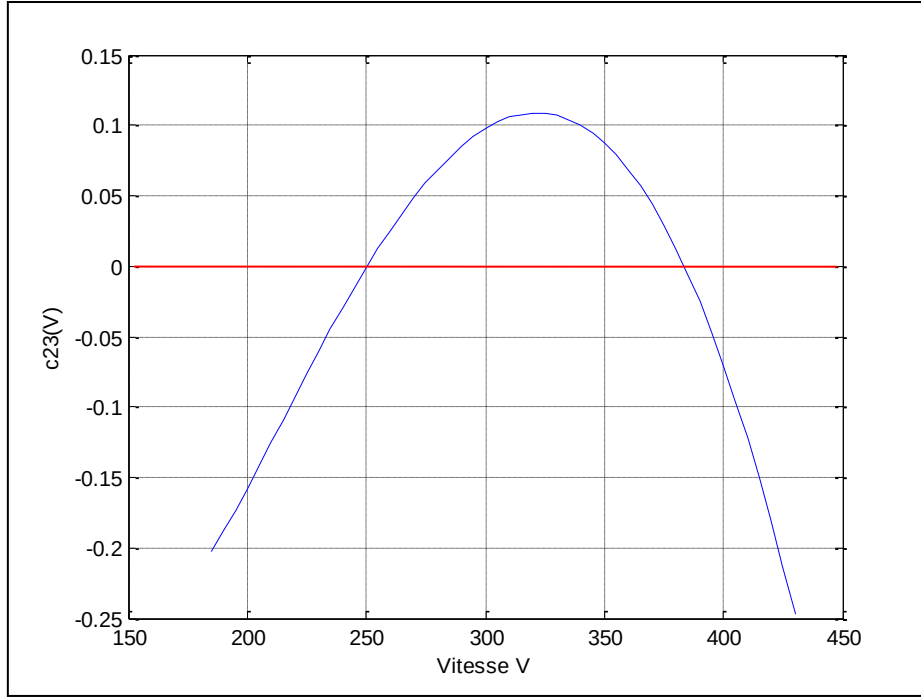


Figure 6.10 : Tracé de la fonction $c_{23}(V)$

Analytiquement, la dérivée première de la fonction $c_{23}(V)$ s'écrit :

$$c'_{23}(V) = \frac{d_{02}}{d_{03}} \left\{ \left[0.42 \times \left(\frac{\varphi}{\delta} - \frac{\mu}{\nu} \right) \times \frac{V^{\frac{\tau}{\delta} - \frac{1}{\nu}}}{V - 137.11} \times \left(\ln \left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V - 137.11)^{0.42}} \right) \right)^{\frac{\varphi}{\delta} - \frac{\mu}{\nu} - 1} \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\tau}{\delta} - \frac{1}{\nu} \right) \times V^{\frac{\tau}{\delta} - \frac{1}{\nu} - 1} \times \left(\ln \left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V - 137.11)^{0.42}} \right) \right)^{\frac{\varphi}{\delta} - \frac{\mu}{\nu}} \right] \right\} \quad (64)$$

$$\text{avec } d_{02}(V) = \left(6120 \eta \frac{P_u}{k_1} \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{et} \quad d_{03}(V) = \left(\frac{Q_u}{k_2} \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

La figure 6.11 présente le tracé de la dérivée première $c'_{23}(V)$ sur l'intervalle de variation $[V_2, V_1]$. Il paraît clairement sur la figure 6.11 que la pente $c'_{23}(V)$ se stabilise approximativement au voisinage de $V = 250$ et $V = 380$.

Nous écrivons donc le développement de Taylor de la fonction $c_{23}(V)$ approximativement au voisinage d'une abscisse $V_{\text{Voisinage}}$ quelconque.

$$c_{23}(V) = c_{23}(V_{\text{Voisinage}}) + (V - V_{\text{Voisinage}})c'_{23}(V_0) \quad (65)$$

Le zéro de la droite est atteint pour une valeur de :

$$V = -\frac{c_{23}(V_{\text{Voisinage}})}{c'_{23}(V_{\text{Voisinage}})} + V_{\text{Voisinage}} \quad (65')$$

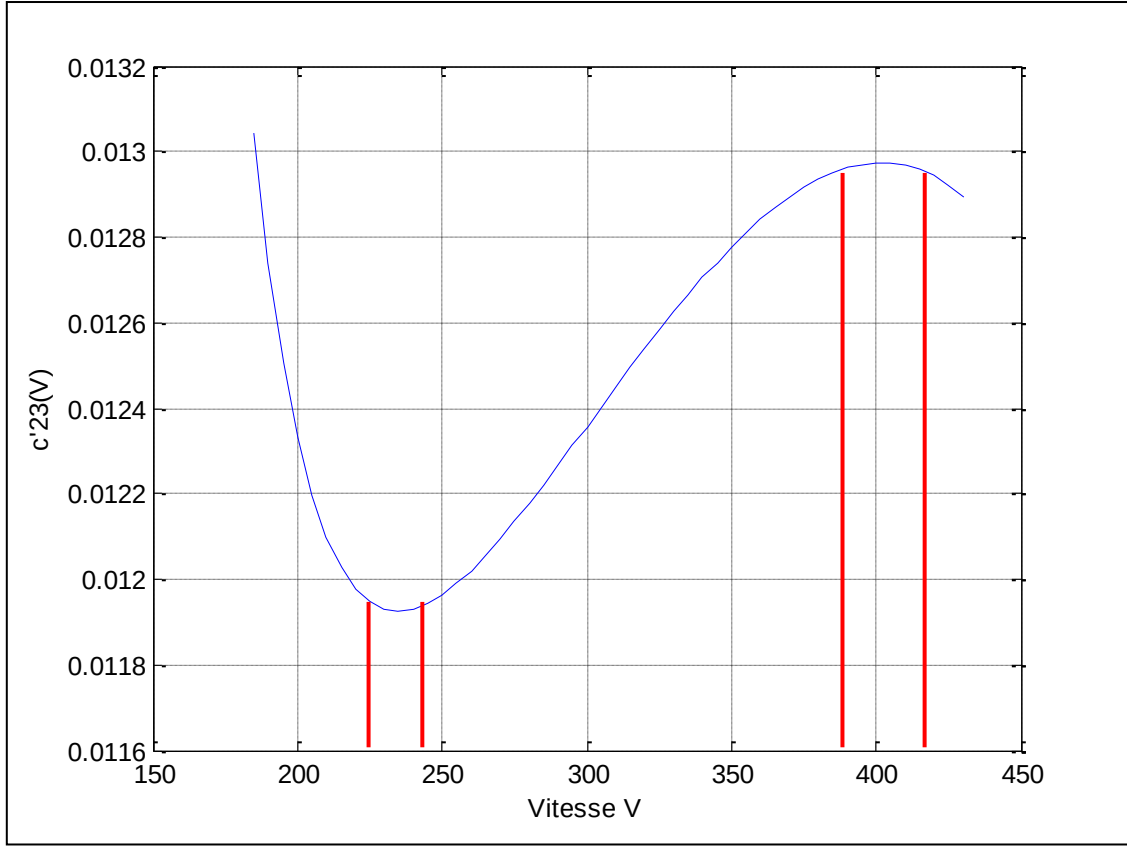


Figure 6.11 : Tracé de la fonction $c'_{13}(V)$

Cette estimation a permis de calculer les valeurs des variables V pour lesquelles la fonction c_{23} s'annule :

$$\begin{cases} V_G = 250.60 & \text{à gauche} \\ V_D = 383.34 & \text{à droite} \end{cases}$$

Les valeurs de la fonction c_{23} en ces points sont estimées respectivement à 0.003 et 0.007, avec des écarts respectifs de 0.84% et 1.97% du zéro, relativement à l'étendu de la fonction c_{23} .

Enfin, relativement à l'équation (63) et conformément à l'allure de la figure 6.10, le classement entre $d_2(V)$ et $d_3(V)$ se fera comme suit :

$$(66) \quad \begin{cases} d_2(V) \leq d_3(V) \text{ pour } V \leq V_G = 250.60 \text{ et } V \geq V_D = 383.34 \\ d_3(V) \leq d_2(V) \text{ pour } V_G \leq V \leq V_D \end{cases}$$

Nous pouvons dès lors ordonner les $d_i(V)$ et faire le choix du paramètre optimal d^* conformément au tableau suivant :

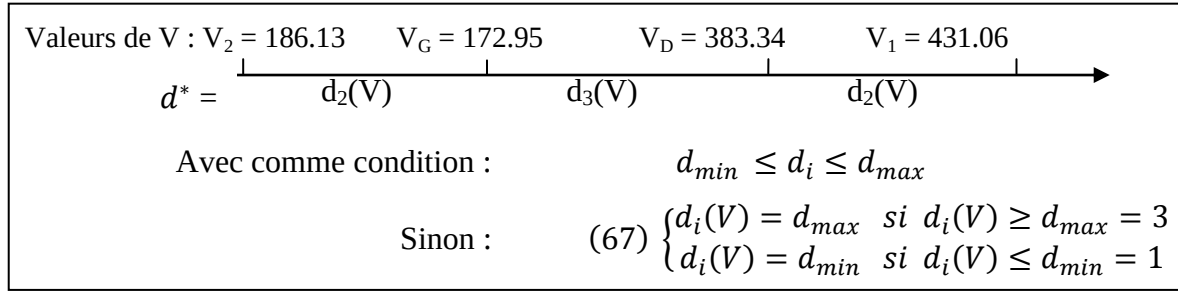


Tableau 6.3 : variation de d^* en fonction de la vitesse V

Récapitulation

Le paramètre d^* est ainsi obtenu. Il ne nous reste qu'à résoudre le système (59) sous sa nouvelle forme (67) :

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} h(V) = 0 \\ h(V) = (x_1 + y_1 C_1 + z_1 C_2)(\beta_1^* \psi(V)^\mu - 1) + (x_2 + y_2 C_1 + z_2 C_2)(\beta_2^* V \psi(V)^\mu - 1) + (x_3 + y_3 C_1 + z_3 C_2)(\beta_3^* V^\tau \psi(V)^\varphi - 1) \\ \text{où } V \in [186.13, 431.06] \\ \begin{cases} C_1 = -(c_1 - c_2) - \alpha'_2 V^{p-1} \psi(V)^{q-1} (\lambda + (1-\lambda)\alpha(p-1)V^p \psi(V)^q) \\ C_2 = -(c_1 - c_2) - \alpha'_2 V^{p-1} \psi(V)^{q-1} (\lambda + (1-\lambda)\alpha(q-1)V^p \psi(V)^q) \end{cases} \\ \psi(V) = \ln\left(\frac{e^{0.1} 10.88}{(V - 137.1081)^{0.42}}\right) \\ \begin{cases} \beta_1^* = \frac{k_1 d^{*\nu}}{F_u} \\ \beta_2^* = \frac{k_1 d^{*\nu}}{P_u 6120 \eta} \\ \beta_3^* = \frac{k_2 d^{*\delta}}{Q_u} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\min(\frac{1}{Vf})}{\max(\frac{1}{Vf}) - \min(\frac{1}{Vf})} \\ c_1 = \frac{\min(V^{p-1} f^{q-1})}{\max(V^{p-1} f^{q-1}) - \min(V^{p-1} f^{q-1})} \end{array} \right. \text{où } V \in [V_{min}, V_{max}] \\ \begin{cases} x_1 = 0.18 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = -1.10 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -0.54 \\ y_2 = -0.73 \\ z_2 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1.36 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = 1.81 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha'_2 = 1.73 \times 10^{-11} \\ \alpha = 3.43 \times 10^{-12} \end{cases} \end{array} \right.$$

Aussi, allons nous essayer de résoudre l'équation « $h(V) = 0$ » par une méthode d'approximation donnée car il n'est plus possible de procéder analytiquement !

6.8. Résultats numériques et discussion

6.8.1. Résultats numérique de la 1^{ère} approche de normalisation

La première méthode de normalisation, exprimée initialement par l'écriture des fonctions normalisées $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ (système 4') et après par l'équation (17'), en utilisant la notions de Lagrangien et les conditions d'optimalité KKT, nous a permis de construire une équation caractéristique « $h(V) = 0$ ». Sa résolution nous permettra, à première vue si la solution existe, de trouver la solution optimale (V^*, f^*, d^*) , valeurs minimisant le Lagrangien ainsi que la fonction composite proposée $\bar{f}$.

6.8.1.1. Description de l'équation « $h(V) = 0$ »

L'équation (45) est une équation non linéaire, paramétrée par le paramètre d^* qui est lui-même une fonction *discontinu et non linéaire* de la variable V , dont la variation est régie par le tableau 6.1. La résolution analytique s'avère délicate du fait que les puissances des monômes de l'équation correspondent à des valeurs non entières. En conséquence, l'estimation de la variation de cette fonction ne peut se faire de manière classique. De ce fait, la résolution numérique de cette équation s'avère une nécessité. Mais avant de se lancer dans la résolution numérique, il faut être sûr que la fonction s'annule en un point V^* pour que l'algorithme de résolution converge.

Dans le cas où la fonction ne s'annule en aucun point de l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$, il est certain que l'algorithme divergera. Nous passerons dans ce cas par une étape intermédiaire, correspondant au tracé de la fonction afin de voir s'il existe des valeurs positives et d'autres négatives assurant donc le passage par le zéro de la fonction. C'est le *théorème de Cauchy* (théorème des valeurs intermédiaires (Monier, 1994)) appliqué localement à la fonction étudiée, considérant un intervalle où la fonction est continue (Monier, 1994)(Krasnov et al., 1993), même localement.

Dans ce cas, nous pourrions estimer une abscisse à droite ou à gauche du zéro permettant de se rapprocher de la solution approchée V^* en un nombre assez limité d'itération.

6.8.1.2. Variation du paramètre « $d^*(V)$ dans l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ »

Afin de compléter la description de la fonction h , il est nécessaire de décrire la variation du paramètre $d^*(V)$. L'équation (68) présente l'application numérique du système (44) en y rapportant les conditions sur la variable V , relativement au tableau 6.1.

$$(68) \quad d^*(V) = \begin{cases} d_1(V) = \left(\frac{F_u}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{\frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} = 3 \times 10^{-6} V^{2.26} & (a) \\ d_2(V) = \left(\frac{P_u 6120 \eta}{k_1} \alpha^{\frac{\mu}{q}} V^{-1 + \frac{\mu p}{q}} \right)^{\frac{1}{\nu}} = 8.24 \times 10^{-4} V^{1.15} & (b) \\ d_3(V) = \left(\frac{Q_u}{k_2} \alpha^{\frac{q}{q}} V^{-\tau + \frac{q p}{q}} \right)^{\frac{1}{\delta}} = 7.87 \times 10^{-5} V^{1.63} & (c) \\ 1 \text{ si } d_i \leq 1 \quad \forall i = \{1..3\} & (d) \\ 3 \text{ si } d_i \geq 3 \quad \forall i = \{1..3\} & (e) \end{cases}$$

A la figure 6.12, le trait bleu (continu) présente le tracé du paramètre d^* en fonction de la variable V sans les contraintes (68-d) et (68-e). Cependant, il existe quelques valeurs de ce paramètre qui sont hors de l'intervalle de variation (intervalle $[d_{min}, d_{max}]$) fixé par le problème initial d'optimisation.

Nous avons donc ajouté les deux contraintes (d) et (e) au système (68), afin de prendre en considération des contraintes initiales exprimées par l'équation (10-f). Cette modification est représentée par le trait vert avec les petits cercles. Sur les valeurs du paramètres d^* non contraint, nous pouvons affirmer que les valeurs rencontrées, à partir des calculs s'avèrent raisonnables, entre la valeur minimale 0.0207 mm et la valeur maximale 1.9738 mm.

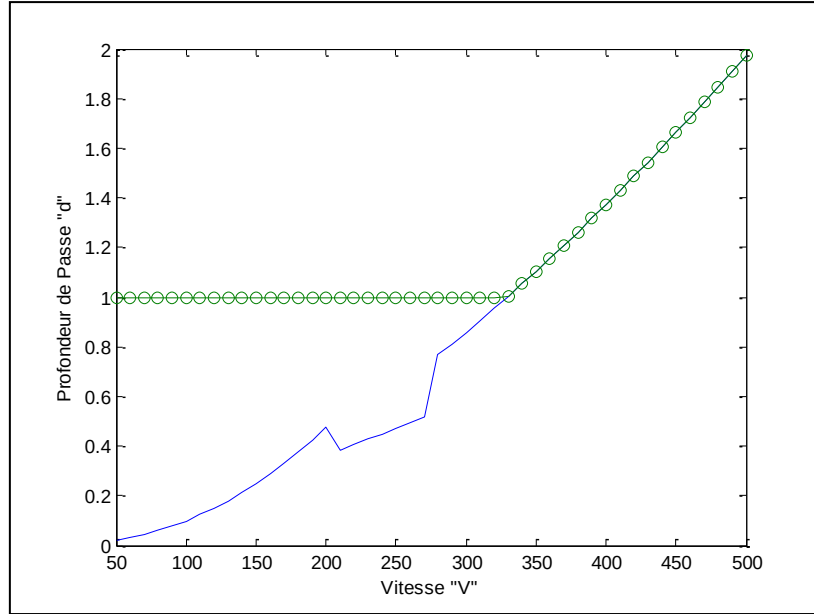


Figure 6.12 : Tracé du paramètre d^* en fonction de la variable V

Jusqu'à présent, cette remarque permet de nous rassurer que nous évoluons dans la bonne direction. Voyons maintenant le tracé (figure 6.13) de la fonction $h(V)$ et espérons qu'elle s'annulera en un point V^* optimal.

6.8.2. Tracé de la fonction « $h(V)$ sur l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ »

L'application numérique de l'équation (47) donne :

$$\begin{aligned}
 h(V) = & -1 + 3.1876 \times 10^4 d^{*0.95} V^{-2.1429} - 9,39 \times 10^3 d^{*0.95} V^{-1.1429} \\
 & + 3.6681 d^{*0.105} V^{-0.1714} - 10^{-6} V^{1.8571} (1.3075 \lambda + 0.03) + V^{-0.2857} \\
 & \times d^{*0.95} (0.84 \lambda - 0.83) + 851.05 \times 10^{-6} V^{0.7143} d^{*0.95} (-2.84 \lambda + 5.38) \\
 & - 10^{-6} V^{1.6857} d^{*0.105} (-1.79 \lambda + 5.38) \quad (69)
 \end{aligned}$$

Nous avons calculé les valeurs prises par la fonction en variant le V de ($V_{min} = 50$) à ($V_{max} = 500$) et en variant le poids λ de 0 à 1. Nous avons trouvé que toutes les valeurs de la fonction sont négatives. L'intersection avec l'axe ($h = 0$) n'existe donc pas, au moins sur l'intervalle considéré.

La figure 6.13 présente l'allure de la fonction $h_\lambda(V)$ en fonction de la vitesse V et du poids λ .

Nous en concluons que la fonction ne s'annule en aucun point. Donc nous ne pourrons en tirer la valeur V^* optimale dans ce cas.

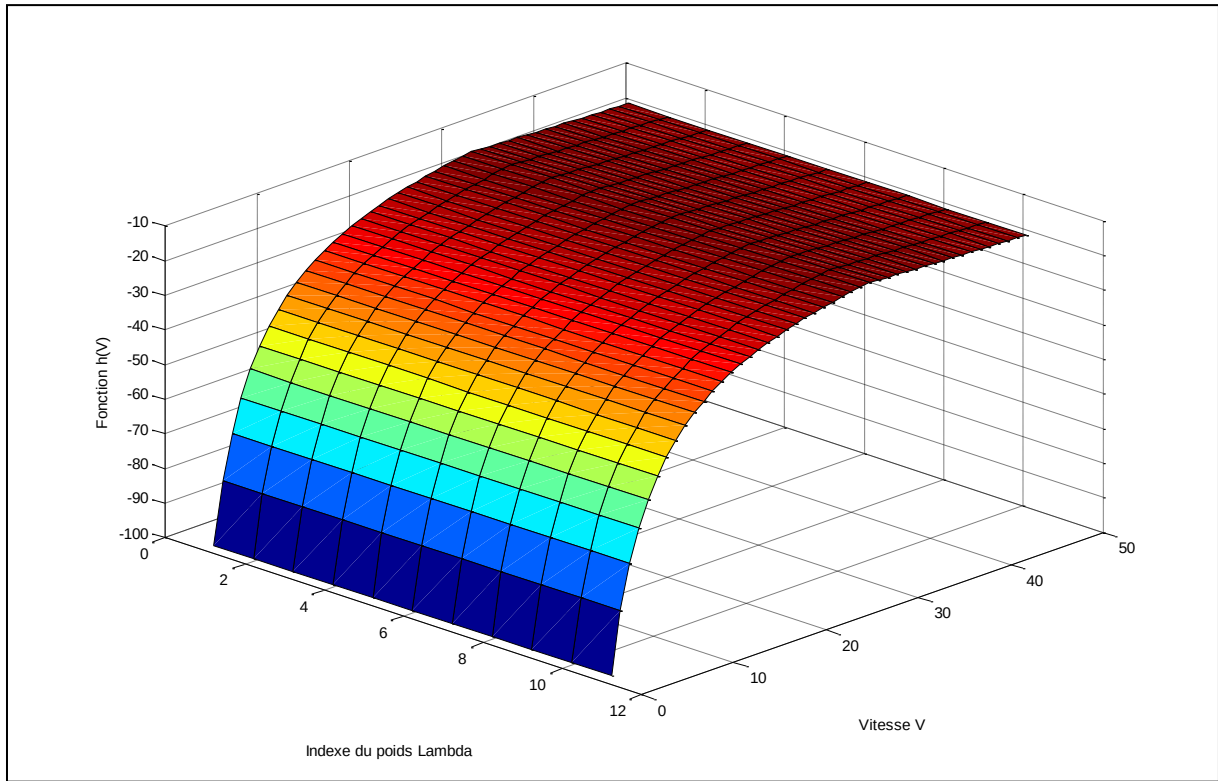


Figure 6.13 : Tracé de la fonction $h_\lambda(V)$ en fonction de V et de λ (Lambda)

6.8.2.1. Interprétation des résultats

6.8.2.1.1. Valeurs prises par $h_\lambda(V)$ et solution approchée dans l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$

Il n'existe aucun point (V^*, f^*, d^*) permettant d'obtenir la dernière condition KKT d'optimalité exprimée par l'équation (14-d).

$$h_\lambda(V) = \vec{g} \cdot \vec{\mu} = \sum_{i=1}^3 g_i \cdot \mu_i = 0$$

Puisque toutes les valeurs de $h_\lambda(V)$ sont négatives, la valeur la plus proche du zéro étant approximée à :

$$h_\lambda(V) = \vec{g} \cdot \vec{\mu} = -11.9350 \quad (70)$$

La figure 6.14 présente une projection $h_\lambda(V)$ sur plan $(h_\lambda(V), V)$, autrement dit selon la normale d'axe $\vec{\lambda}$. Nous pouvons estimer la valeur maximale de la fonction h , relative à l'index 29 de la fonction V , selon la discrétisation effectuée lors de l'implantation de l'algorithme de calcul de $h_\lambda(V)$. Cet index correspond à une valeur $V^{**} = 230$ m/min.

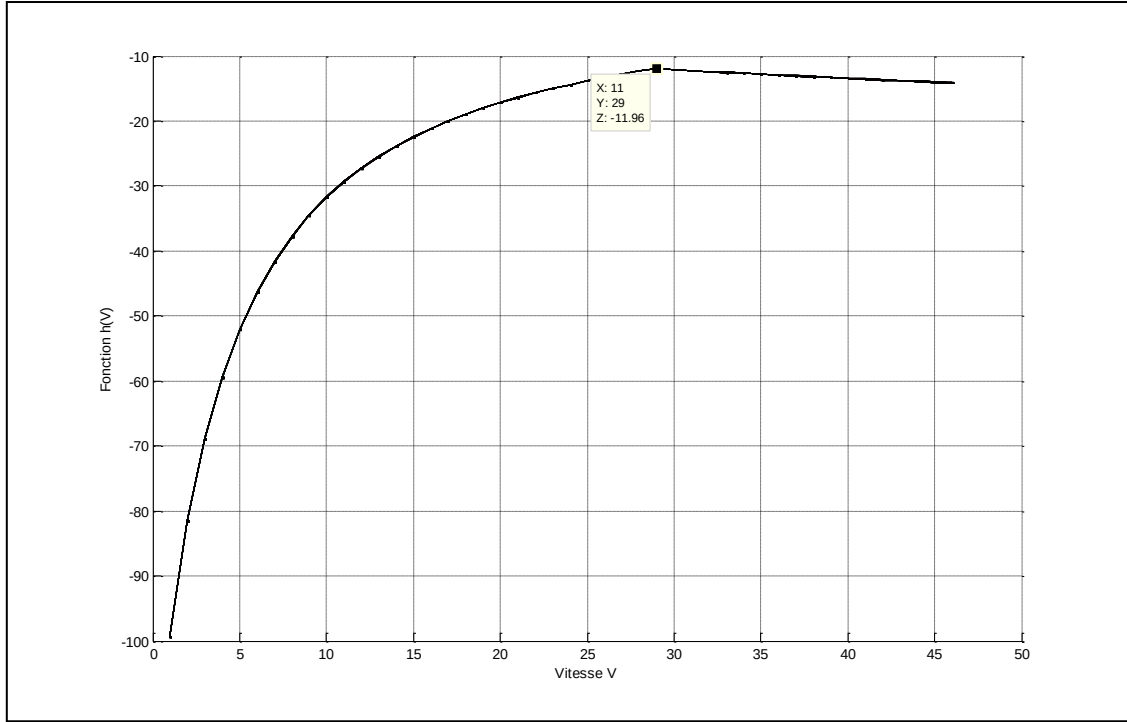


Figure 6.14 : Projection de la fonction $h_\lambda(V)$ sur le plan $(V, h_\lambda(V))$

Il est cependant possible d'adopter la valeur V^{**} comme valeur la plus proche de l'optimum et de calculer par la suite la valeur de l'avance f correspondante. Le calcul donne :

$$f^{**} = \alpha^{\frac{1}{q}} (V^{**})^{-\frac{p}{q}} = (3.43 \times 10^{-12})^{-\frac{1}{1.75}} \times 230^{-\frac{5}{1.75}} = 0.63 \text{ mm/tr}$$

La valeur de la passe correspondante est relative à l'index ($X = 11$) de la figure 6.14, relativement à la discrétisation que nous avons adoptée pour l'implantation de l'algorithme de calcul. La valeur de d^{**} est de 1 mm.

Nous adoptons donc la solution approchée :

$$(V^{**}; f^{**}; d^{**}) = (230 \text{ m/min} ; 0.63 \text{ mm/tr} ; 1 \text{ mm})$$

6.8.2.1.2. Effet du paramètre λ

Relativement au poids λ utilisé pour l'établissement de la fonction composite $\bar{f}$, nous pouvons voir, selon les figure 6.15 et 6.16, que l'influence de ce paramètre est presque négligeable. Cela est dû essentiellement aux multiplicateurs de λ dans la fonction h . La somme des multiplicateurs du paramètre λ s'écrit :

$$R_\lambda(V, d^*) = 1.3 \times 10^{-6} V^{1.8571} + 0.84 \times d^{*0.95} V^{-0.2857} - 0.0024 \times V^{0.7143} d^{*0.95} - 1.79 \times 10^{-6} d^{*0.105} V^{1.6857} \quad (71)$$

Relativement, les autres monômes de la fonction h_λ sont plus importants ; leur somme donne :

$$\begin{aligned}
R(V, d^*) = & -1 + 3.1876 \times 10^4 d^{*0.95} V^{-2.1429} - 9.39 \times 10^3 d^{*0.95} V^{-1.1429} \\
& + 3.6681 d^{*0.105} V^{-0.1714} - 0.03 \times 10^{-6} V^{1.8571} - 0.83 \times V^{-0.2857} \times d^{*0.95} \\
& + 0.0046 V^{0.7143} d^{*0.95} - 5.38 \times 10^{-6} V^{1.6857} d^{*0.105} \quad (72)
\end{aligned}$$

Afin de juger de l'importance du paramètre λ , nous calculons numériquement le rapport :

$$Ratio_{\lambda} = \frac{R_{\lambda}(V, d^*)}{R(V, d^*)} \quad (73)$$

pour V variant de 50 m/min à 500 m/min avec un pas de variation de 10 m/min.

La figure 6.15 présente la variation du ratio « $Ratio_{\lambda}$ » en fonction des variables V et d^* .

La figure 6.16 présente la variation du $Ratio_{\lambda}$ en fonction de V .

Après calcul, nous avons remarqué que ce ratio est de l'ordre de 10^{-3} , ce qui montre que l'effet du poids λ n'est pas significatif en comparaison aux autres monômes de la fonction $h_{\lambda}(V)$.

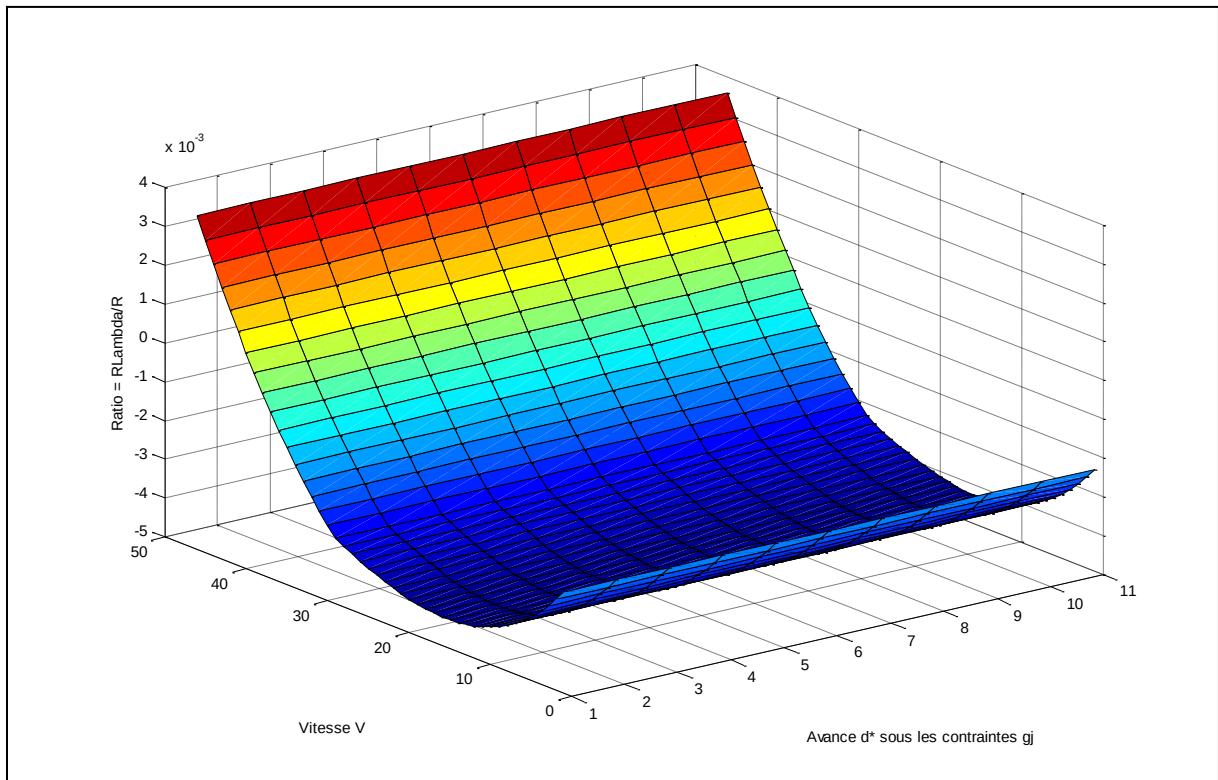


Figure 6.15 : Variation du ratio « $Ratio_{\lambda}$ »

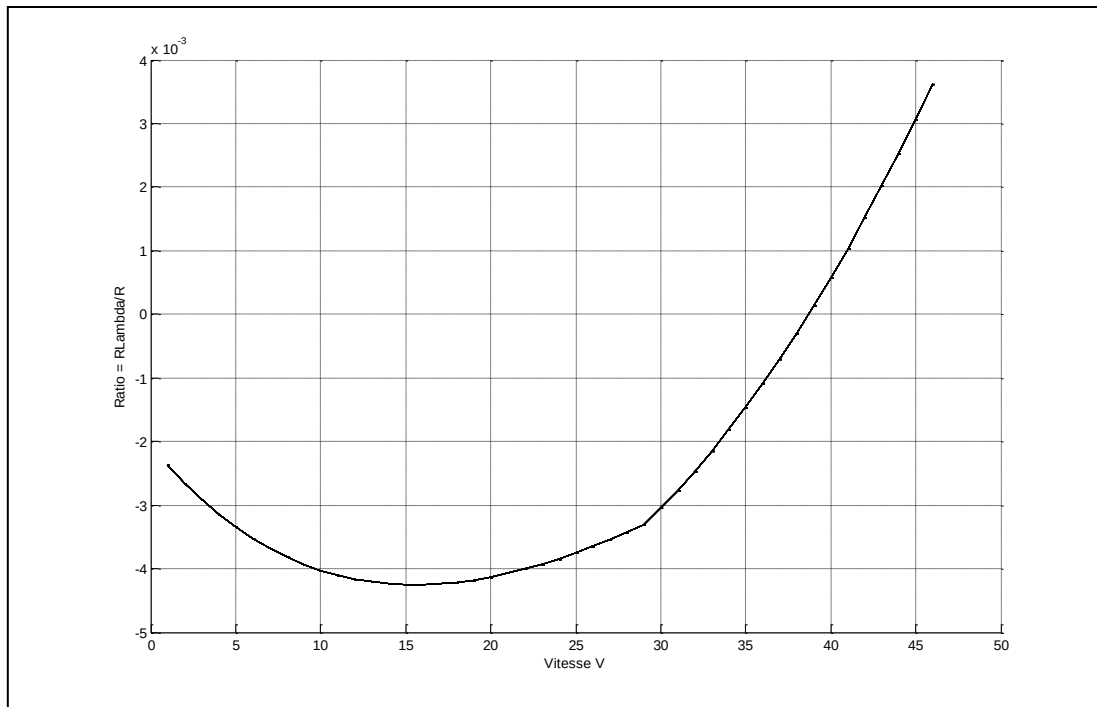


Figure 6.16 : Variation du ratio « Ratio_λ » en fonction de la vitesse V

6.8.2.1.3. Valeurs des fonctions-objectifs résultants

Si l'on considère maintenant la solution :

$$(V^{**}; f^{**}; d^{**}) = (230 \text{ m/min} ; 0.63 \text{ mm/tr} ; 1 \text{ mm})$$

Le calcul des fonctions-objectifs correspondant donne :

$$(f_1^{**}; f_2^{**}) = (9.756 \text{ dh} ; 93.25 \%)$$

Suivant certains travaux déjà réalisés relatifs à la même problématique (Chen & Tsai, 1996)(Jabri et al., 2013)(Cus & Zuperl, 2006) la valeur de la fonction f_1 , exprimant le coût d'une opération d'usinage, est raisonnable. Cependant, la valeur de la fonction f_2 , exprimant la dégradation de l'outil, est d'une valeur de 93.25%. Cette valeur est donc considéré non réaliste par rapport à la pratique de l'usinage.

En analysant les valeurs des paramètres V , f et d , nous concluons que c'est la valeur de l'avance par tour f qui est élevée et celle de la profondeur de passe d est petite. En comparant avec la bibliographie, nous trouvons :

- que les valeurs calculées ou estimées par les algorithmes génétiques donnent une variation entre 0.1mm/tr et 0.2 mm/tr ;
- que la profondeur de passe d est comprise entre 1.20 mm et 3 mm, alors que la notre est égale à 1 mm.

6.8.2.1.4. Interprétation des résultats de la première méthode de normalisation

L'avantage de la première méthode de normalisation est de pouvoir trouver facilement une relation analytique entre les deux variables V et f . Cela dit, l'optimisation simultanée des deux fonctions-objectifs n'a pas pu être assurée. Nous avons obtenu une bonne valeur du coût d'usinage (fonction f_1) contre une valeur médiocre du taux de dégradation de l'outil de coupe (fonction f_2).

Le poids λ utilisé pour construire la fonction composite n'a pas permis de construire le front de Pareto, car nous avons essayé de minimiser la fonction composite et le Lagrangien relativement à ce coefficient. De ce fait, l'équation (17') retrouvée exprime une courbe paramétrée indépendante du λ .

Lorsque nous avons cherché l'expression de cette courbe paramétrique sur la nappe géométrique définie par les μ_i , analytiquement, nous avons trouvé que la valeur de la vitesse optimale dépend du λ (bien présent dans l'expression de la fonction $h_\lambda(V)$). Ce résultat présente une contradiction avec le résultat de l'équation (17'). En revanche, en mesurant l'effet de λ sur la variation de cette fonction, définie plus haut, nous avons trouvé un effet médiocre de l'ordre de 10^{-3} ; chose qui nous a permis de lever la contradiction et d'affirmer que les valeurs trouvées, sont indépendantes du poids λ .

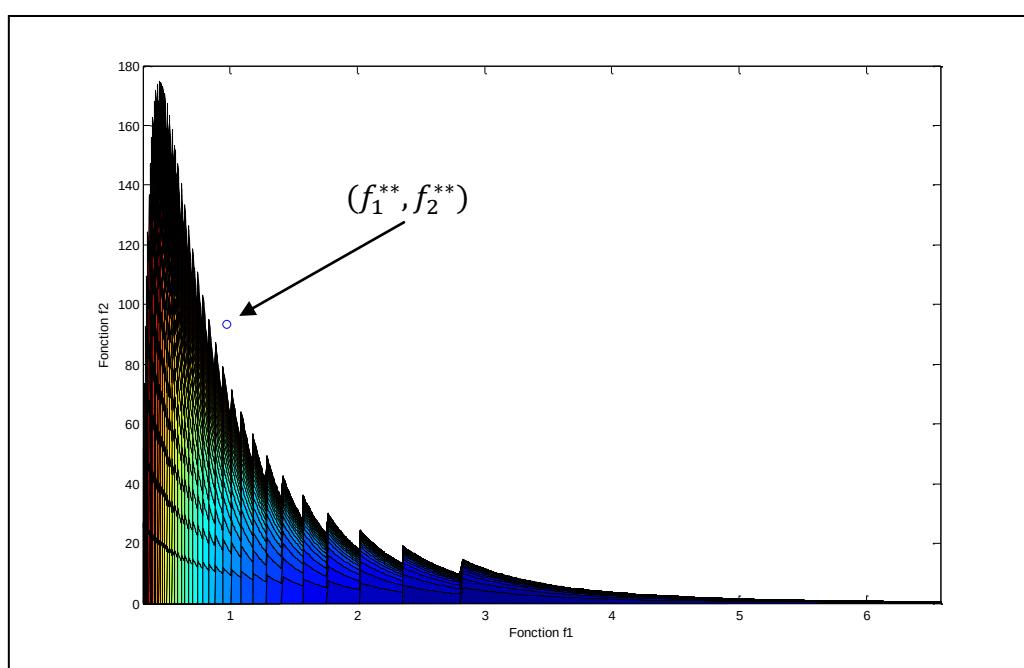


Figure 6.17 : Espace des fonctions (f_1, f_2) avec comme paramètre d^{**}

De ce fait, le front de Pareto sera réduit à un point de l'espace des fonctions, exprimé par (f_1^{**}, f_2^{**}) relatif aux coordonnées (V^{**}, f^{**}, d^{**}) . La figure 6.17 montre le positionnement du point (f_1^{**}, f_2^{**}) dans l'espace des fonctions $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Nous pouvons voir sur cette figure que le point estimé n'est pas inclus dans la surface balayée donc ne peut être optimal. Il est donc essentiel de modifier la méthode de normalisation afin d'obtenir des résultats satisfaisants et plus concrets.

6.8.3. Résultats numériques de la 2^{ème} approche de normalisation

La deuxième approche de normalisation nous a permis de développer l'équation caractéristique simplifiée avec laquelle il serait possible, à première vue de détecter les valeurs optimales de la variable V et du paramètre λ . L'équation à résoudre est décrite par le système (67).

6.8.3.1. Analyse de la fonction $h_\lambda(V)$ et existence de la solution du système (67)

Le système (67) possède au moins une solution réelle si la fonction à deux variables « $h(V, \lambda) = h_\lambda(V)$ » s'annule au moins en un point.

Si nous pouvons assimiler le triplet $(V, \lambda, h(V, \lambda))$ à une surface en $\mathbb{R}^3$, autrement dit à une nappe géométrique, la solution sera l'intersection entre la surface de coordonnées $(V, \lambda, h(V, \lambda))$ et le plan défini par « $h(V, \lambda) = 0$ ».

C'est la raison pour laquelle, à la figure 6.18, nous avons tracé les deux surfaces et nous avons, ensuite, effectué plusieurs vues afin de bien pouvoir visualiser la solution de l'équation caractéristique développée, exprimée dans ce cas par l'intersection susmentionnée.

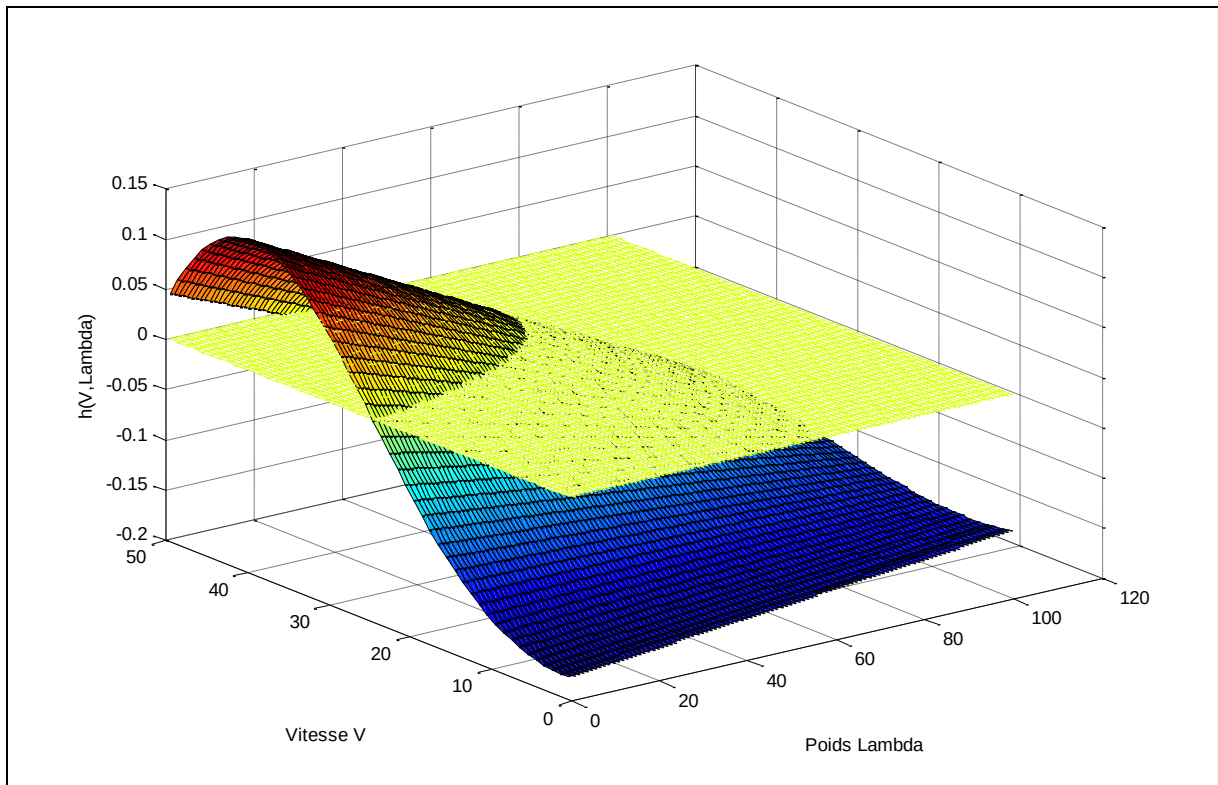


Figure 6.18-a) : Visualisation de la surface $(V, \lambda, h(V, \lambda))$, du plan $h(V, \lambda) = 0$ et de leur intersection

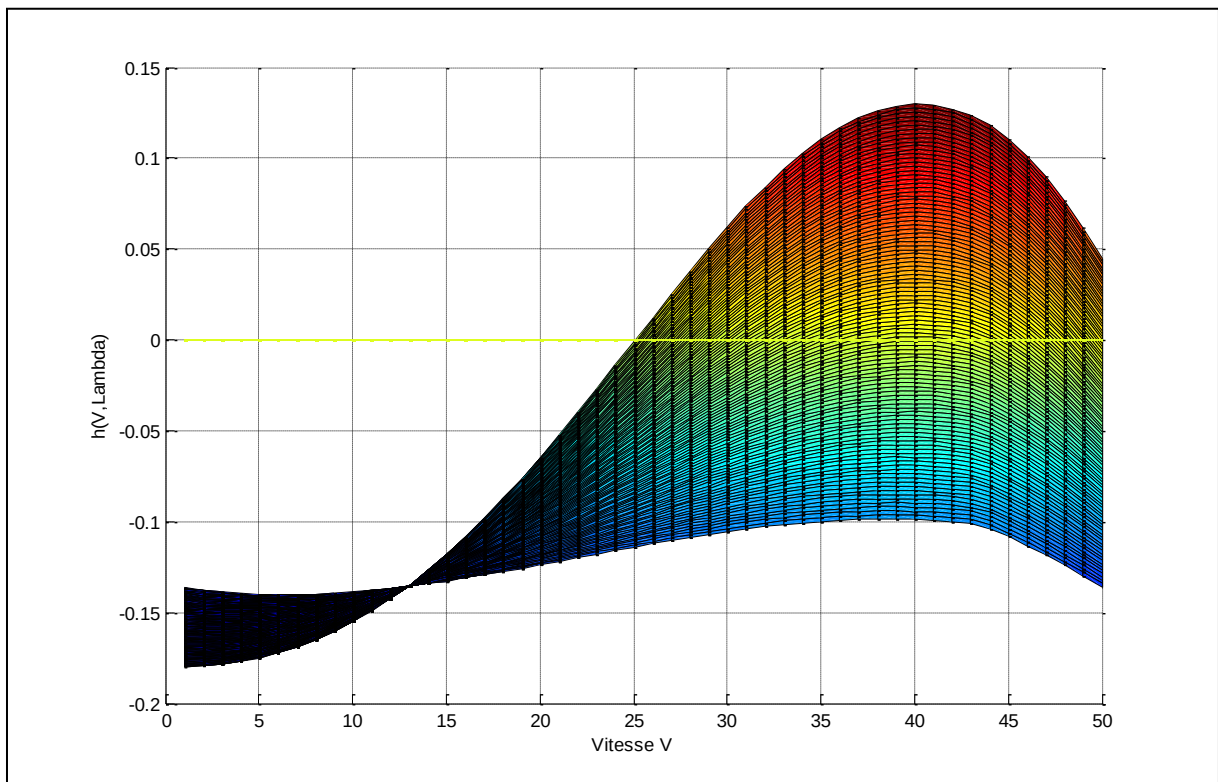


Figure 6.18-b) : Vue de droite

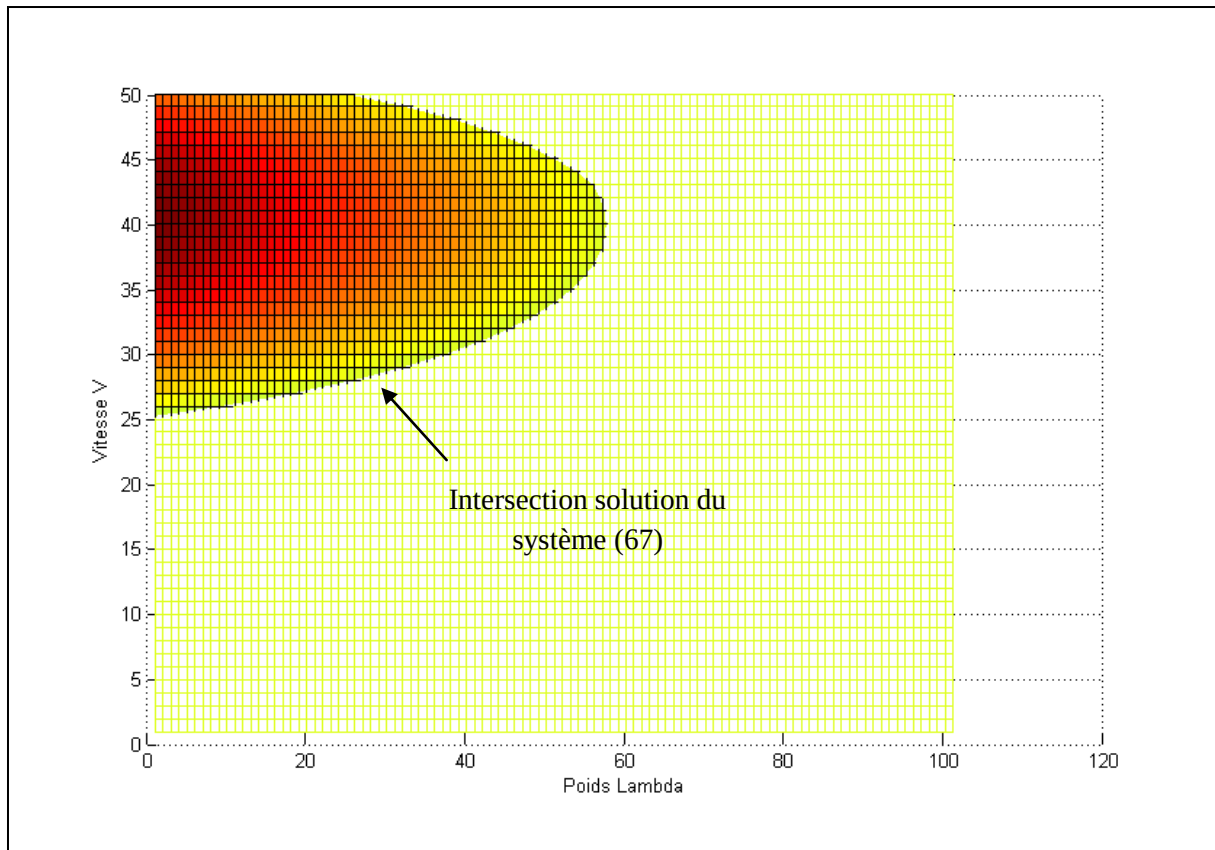


Figure 6.18-c) : Vue de dessus

La figure 6.18-c permet de juger clairement des valeurs des paramètres ou variables, en vue de restreindre encore plus notre champs de recherche des valeurs optimales V^* et λ^* .

Cette intersection correspond une courbe plane, donnée par l'équation « $h(V, \lambda) = 0$ » appartenant à la nappe géométrique et au plan d'équation « $h(V, \lambda) = 0$ ». La même figure nous a poussé à chercher le lien entre les deux variables qui permettrait d'obtenir la minimisation simultanée des fonctions objectifs f_1 et f_2 par l'application des conditions KKT, précédemment développées.

Les valeurs V^* prises par la variable V , qui seront ainsi désignées, permettront facilement de remonter vers les valeurs correspondantes des deux autres variable f^* et d^* , relativement aux développements précédents.

6.8.3.2. Estimation du paramètre d^*

Nous présentons à la figure 6.19 la variation du paramètre d^* en fonction de la variable V , dans l'intervalle $[V_2, V_1]$. Les valeurs prises par ce paramètre correspondent aux petits cercles verts, conformément au tableau 6.3.

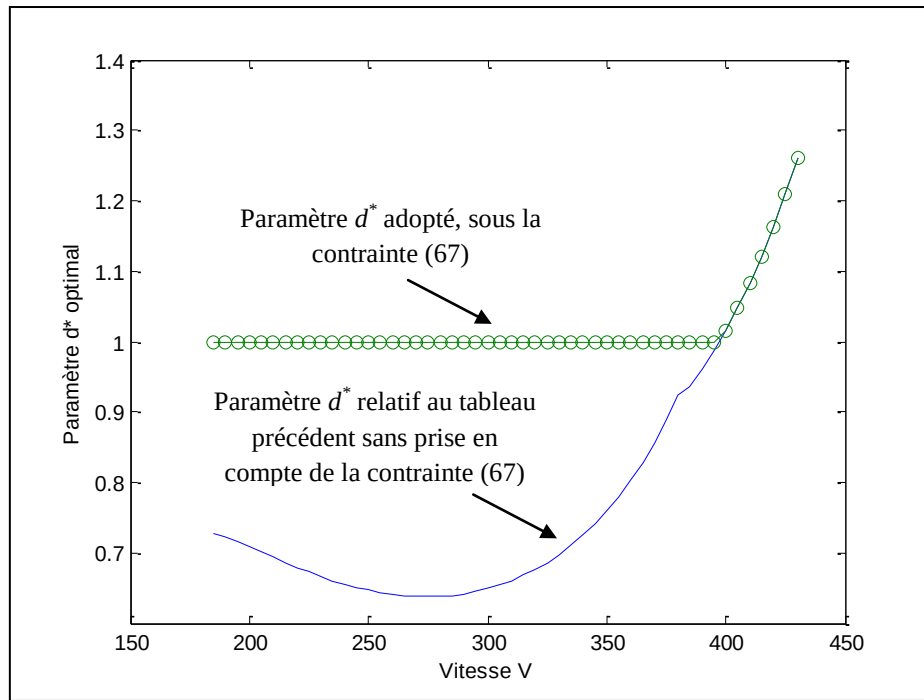


Figure 6.19 : Paramètre optimal d^* en fonction de V

6.8.3.3. Résolution de l'équation « $h(V, \lambda) = 0$ »

La résolution de cette équation correspond à une courbe plane appartenant au plan « $h(V, \lambda) = 0$ ». L'allure de cette courbe est représentée à la figure 6.18-c. Il est cependant difficile de résoudre analytiquement cette équation, nous sommes donc contraint de la résoudre numériquement, en fixant à chaque pas l'un des paramètres V ou λ , de le remplacer dans l'équation (67) et de résoudre cette dernière par une méthode numérique appropriée. L'ensemble des couples (V, λ) ainsi obtenus permettra d'obtenir un nuage de points qui sera par la suite interpolé ou estimé par régression statistique.

Passons maintenant à la résolution numérique en décrivant les variables considérées :

- Description de la variable V (selon la figure 6.18-c) :

Il est clair sur la figure 6.18-c que les valeurs prises par la variable V commencent à partir de l'indice 26, c'est-à-dire à partir de la valeur $V(26) = 310$ (conformément à la discrétisation adoptée), sans l'atteindre réellement, jusqu'à la dernière valeur adoptée dans ce cas, étant égale à 431.06 (conformément à la résolution de l'équation (17)).

- Description de la variable λ (selon la figure 6.18-c) :

A leurs tours, les valeurs prises par la variable λ commencent à partir de la valeur de départ égale à $\lambda(1) = 0$, jusqu'à l'indice 58 (conformément à la discrétisation adoptée) correspondant à la valeur $\lambda(58) = 0.57$ sans l'atteindre réellement.

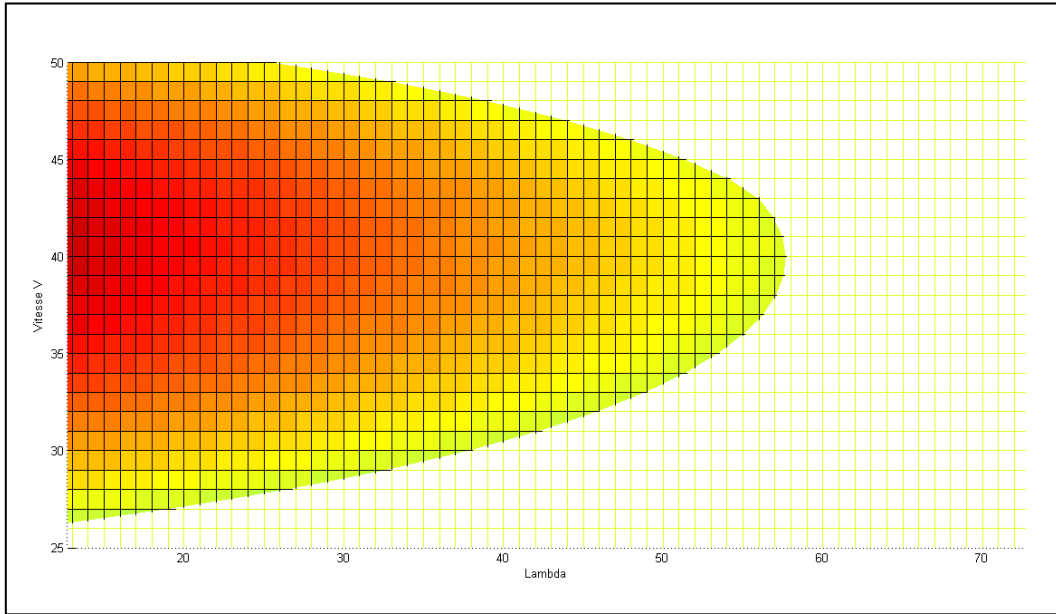


Figure 6.20 : Agrandissement de la zone d'intersection

Nous pouvons remarquer à partir de cette description plus ou moins qualitative l'existence de deux points présentant une certaine incertitude dans leurs déterminations :

- Le point correspondant à $\lambda = 0$: dont la valeur du λ est certaine, égale à 0, mais la valeur de la variable V ne l'est pas. Dans ce cas, il est possible de déterminer une approximation de la variable V numériquement en résolvant l'équation « $h_{(\lambda=0)}(V)=0$ ».
- Le point correspondant à $V = V(40) = 380$: où la valeur correspondante du λ est incertaine.

Une première approche consisterait en la recherche des autres points de la courbe en appliquant aussi la méthode de Newton appliquée à la variable λ où le calcul de la dérivée de $h_{V=cst}(\lambda)$ sera aisé. Sinon, si c'est la variable V qui est considérée, les calculs seront très complexes du fait de la complexité de la fonction $h_{\lambda=cst}(V)$.

Toutefois, nous avons pu observer qu'il est possible de trouver une paramétrisation cartésienne (équation (71)) de la courbe plane relative à la fonction implicite (Krasnov et al., 1993) exprimée par l'équation (67).

Puisque l'objectif est d'exprimer une variable par rapport à une autre, λ en fonction de V ou l'inverse, l'équation (67) permet de retrouver ce lien du fait de l'effet linéaire de la variable λ , n'intégrant ni exposants ni autre transformation non linéaire.

En posant :

$$(74) \quad \begin{cases} \chi_1(V) = \beta_1^* \psi(V)^\mu - 1 \\ \chi_2(V) = \beta_2^* V \psi(V)^\mu - 1 \\ \chi_3(V) = \beta_3^* V^\tau \psi(V)^\varphi - 1 \\ A_1(V) = A_2(V) = -(c_1 - c_2) - \alpha'_2 V^{p-1} \psi(V)^{q-1} \\ B_1(V) = \alpha(p-1) V^p \psi(V)^q \\ B_2(V) = \alpha(q-1) V^p \psi(V)^q \end{cases}$$

Après développement de l'expression de la fonction $h_V(\lambda)$, nous trouvons :

$$h_V(\lambda) = \lambda \left(A_1(V)(1 - B_1(V)) \sum_{i=1}^3 y_i \chi_i(V) + A_2(V)(1 - B_2(V)) \sum_{i=1}^3 z_i \chi_i(V) \right) + \sum_{i=1}^3 x_i \chi_i(V) \\ + A_1(V)B_1(V) \sum_{i=1}^3 y_i \chi_i(V) + A_2(V)B_2(V) \sum_{i=1}^3 z_i \chi_i(V) \quad (75)$$

Donc l'équation $h_V(\lambda) = 0$ permet de calculer la valeur de la variable λ relativement à l'ensemble des conditions de Karush-Kuhn-Tucker, exprimée par l'équation (76).

$$\lambda(V) = - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 x_i \chi_i(V) \right) + A_1(V)B_1(V) \left(\sum_{i=1}^3 y_i \chi_i(V) \right) + A_2(V)B_2(V) \left(\sum_{i=1}^3 z_i \chi_i(V) \right)}{A_1(V)(1 - B_1(V)) \left(\sum_{i=1}^3 y_i \chi_i(V) \right) + A_2(V)(1 - B_2(V)) \left(\sum_{i=1}^3 z_i \chi_i(V) \right)} \quad (76)$$

Le tracé de la fonction $\lambda(V)$, pour des valeurs de V allant de $(V(26) = 300)$ à la valeur $(V(50) = 430)$ est présenté à la figure 6.21. Nous pouvons remarquer que la courbe de la figure 6.21 représente bien l'intersection de la fonction « $h(V, \lambda)$ » avec le plan « $h(V, \lambda) = 0$ » qui est montrée aux figure 6.18-c et 6.21.

Calculons maintenant la valeur approchée de début de la variable V , correspondant à la résolution numérique de l'équation $h_{(\lambda=0)}(V)$.

6.8.3.4. Solution approchée de l'équation « $h_{(\lambda=0)}(V) = 0$ »

Conformément à l'équation (75), l'expression de la fonction $h_{(\lambda=0)}(V)$ est donnée par :

$$h_{(\lambda=0)}(V) = \sum_{i=1}^3 (x_i \chi_i(V)) + A_1(V)B_1(V) \sum_{i=1}^3 (y_i \chi_i(V)) + A_2(V)B_2(V) \sum_{i=1}^3 (z_i \chi_i(V)) \quad (77)$$

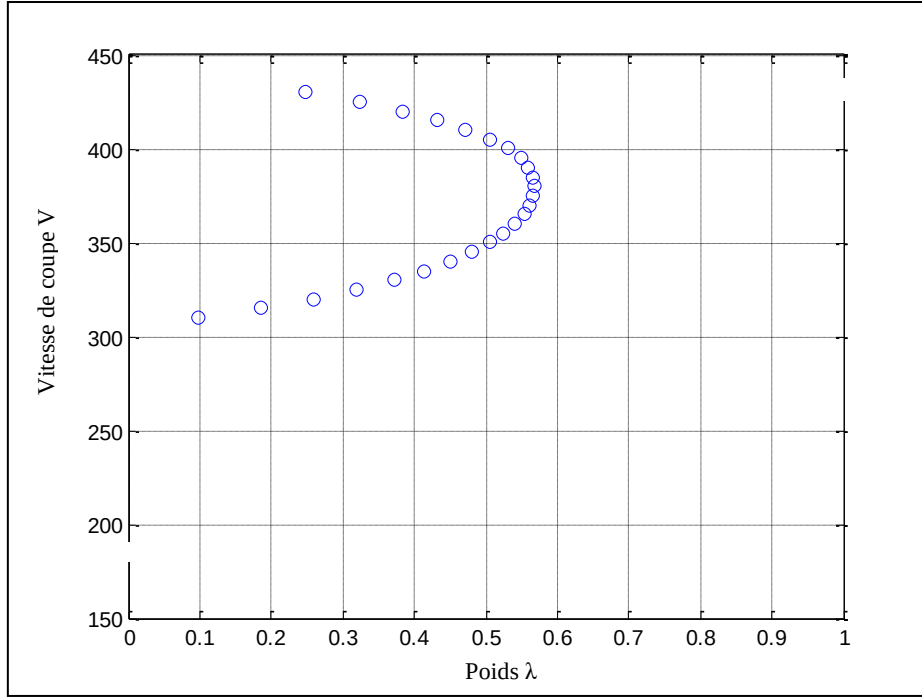


Figure 6.21 : Solution numérique approchée de l'équation $\mathbf{h}(V) = \mathbf{0}$ ($V \in [310, 430]$)

Sa dérivée s'écrit :

$$h'_{(\lambda=0)}(V) = \sum_{i=1}^3 (x_i \chi'_i(V)) + A_1(V)B_1(V) \sum_{i=1}^3 (y_i \chi'_i(V)) + (A'_1(V)B_1(V) + B'_1(V)A_1(V)) \sum_{i=1}^3 (y_i \chi_i(V)) \\ + A_2(V)B_2(V) \sum_{i=1}^3 (z_i \chi'_i(V)) + (A'_2(V)B_2(V) + B'_2(V)A_2(V)) \sum_{i=1}^3 (z_i \chi_i(V)) \quad (78)$$

Avec :

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} \chi_1(V) = \beta_1^* \psi(V)^\mu - 1 \\ \chi'_1(V) = \mu \beta_1^* \psi'(V) \psi(V)^{\mu-1} \\ \chi_2(V) = \beta_2^* V \psi(V)^\mu - 1 \\ \chi'_2(V) = \beta_2^* (\psi(V)^\mu + \mu V \psi'(V) \psi(V)^{\mu-1}) \\ \chi_3(V) = \beta_3^* V^\tau \psi(V)^\varphi - 1 \\ \chi'_3(V) = \beta_3^* (\tau V^{\tau-1} \psi(V)^\mu + \varphi V^\tau \psi'(V) \psi(V)^{\varphi-1}) \\ A_1(V) = A_2(V) = -(c_1 - c_2) - \alpha'_2 V^{p-1} \psi(V)^{q-1} \\ A'_1(V) = A'_2(V) = -\alpha'_2 ((p-1) V^{p-2} \psi(V)^{q-1} + (q-1) V^{p-1} \psi'(V) \psi(V)^{q-2}) \\ B_1(V) = \alpha(p-1) V^p \psi(V)^q \\ B'_1(V) = \alpha(p-1) (p V^{p-1} \psi(V)^q + q V^p \psi'(V) \psi(V)^{q-1}) \\ B_2(V) = \alpha(q-1) V^p \psi(V)^q \\ B'_2(V) = \alpha(q-1) (p V^{p-1} \psi(V)^q + q V^p \psi'(V) \psi(V)^{q-1}) \\ \psi(V) = 0.42 \ln \left(\frac{372.88}{V - 137.1081} \right) \\ \psi'(V) = \frac{-0.42}{V - 137.1081} \end{array} \right.$$

La figure 6.22 ci-dessous présente la fonction dont on recherche le zéro.

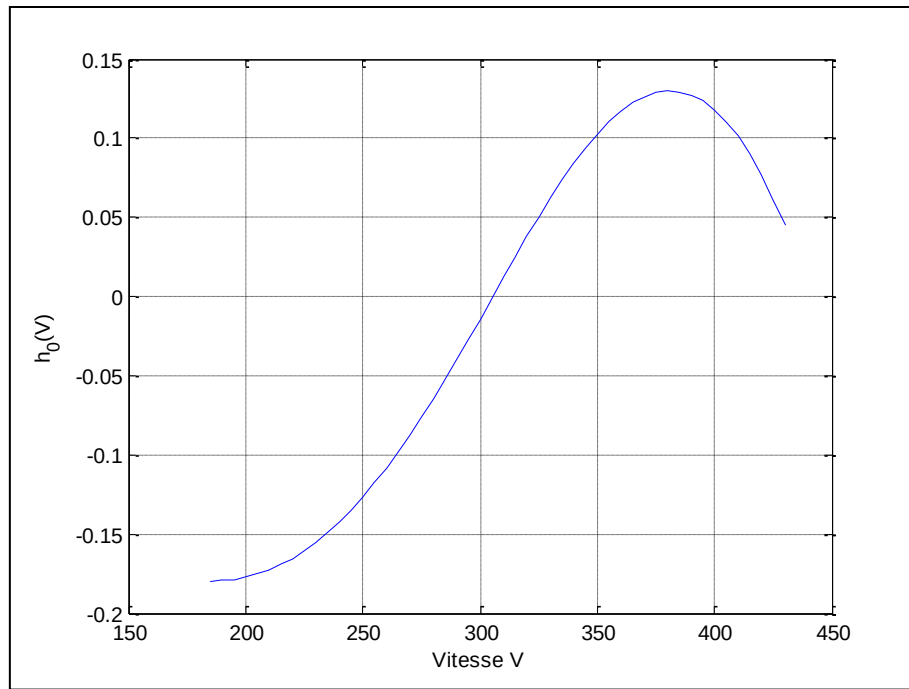


Figure 6.22 : tracé de la fonction $h_0(V)$

Le zéro de cette fonction correspond à une valeur avoisinant ($V = 300$).

Nous pouvons aussi observer l'allure presque linéaire de la fonction en ce voisinage. Cela nous incite à étudier la possibilité de la recherche du zéro de $h_0(V)$ en utilisation une linéarisation locale, au voisinage de ($V = 300$) ; autrement dit en adoptant le développement de Taylor du premier ordre.

Afin de nous assurer de cette supposition, nous avons estimé numériquement les valeurs de la pente de la fonction $h_0(V)$ en chaque pas de discrétisation adopté pour la variable V . Nous avons obtenu un tracé estimatif de la fonction dérivée $h'_{(\lambda=0)}(V)$, rapporté à la figure 6.23-a et 6.24-b.

Nous décidons donc d'approcher la fonction $h_0(V)$ en ce voisinage par sa dérivée première. Le développement de Taylor (Krasnov et al., 1993) du premier ordre nous donne l'équation de la droite tangente comme suit :

$$h_0(V) = h_0(V_0) + h'_0(V_0) (V - V_0) + \theta(V) \quad (80)$$

Où $\theta(V)$ correspond à l'erreur d'approximation du premier ordre.

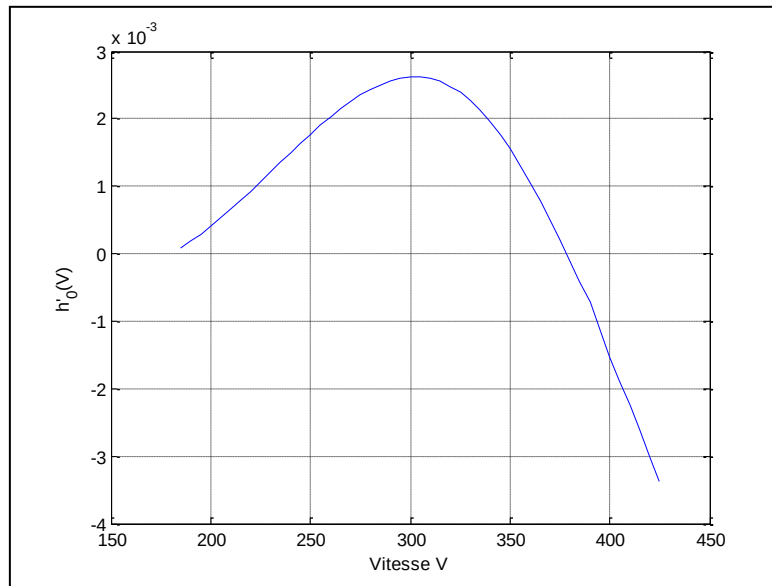
Par l'application numérique, nous trouvons :

$$h_0(V) = -0.0142 + 0.0026 (V - 300) + \theta(V) \quad (80')$$

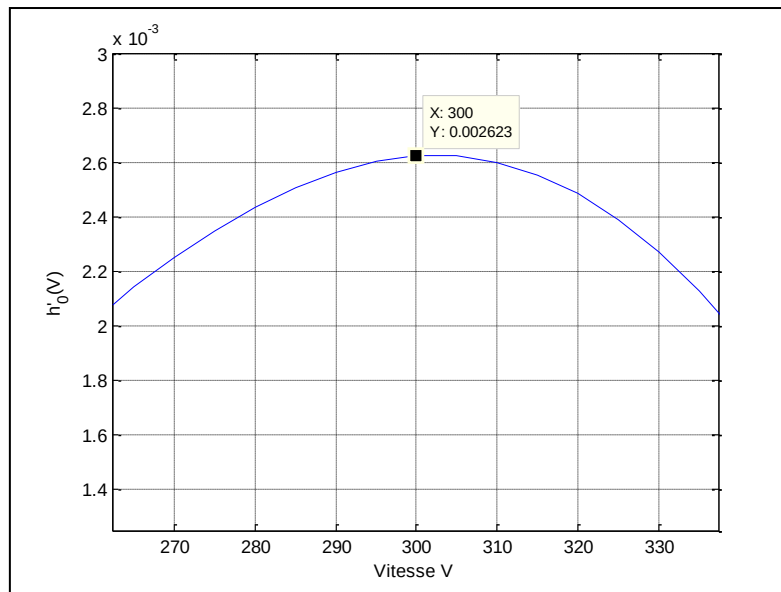
La figure 6.24 représente la tangente de la fonction $h_0(V)$ au point ($V = 300$).

En négligeant l'erreur d'estimation du premier ordre $\theta(V)$, le zéro de cette fonction correspond donc à la valeur de V correspondant à :

$$V = 305,46 \text{ m/min} \quad (81)$$



a) Tracé de la fonction $h'_{(\lambda=0)}(V)$



b) Agrandissement de la courbe $(V, h'_{(\lambda=0)}(V))$ au voisinage de $(V = 300)$

Figure 6.23 : Analyse de la fonction $h_\lambda(V)$

Nous concluons que le point (gauche-bas) de départ de la courbe, représentée à la figure 6.21 et relative à l'équation (76), correspond approximativement au point $(\lambda, V) = (0, 305.46)$.

Les values des couples (V, λ) ainsi obtenus correspondent aux solutions admissibles du problème initial, relativement à la 2^{ème} technique de normalisation.

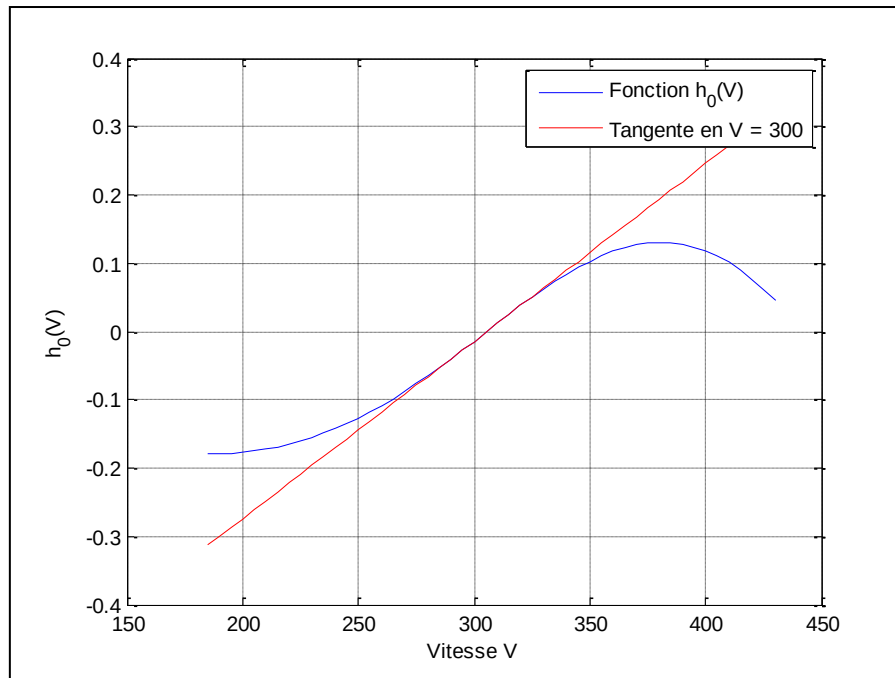


Figure 6.24 : Représentation de la tangente de la fonction $h_{\lambda=0}(V)$ au point ($V = 300$)

Il reste cependant à calculer les valeurs des variables f et d correspondant, et recalculer par la suite les valeurs des fonctions-objectifs f_1 et f_2 .

6.9. Récapitulation : Valeurs optimales des variables du problème et espace des fonctions

Nous rappelons ici que c'est la deuxième approche de normalisation, relative aux équations (4) et (17), qui a permis de détecter l'optimum du problème initial d'optimisation multiobjectif.

Les paragraphes qui suivent permettront de calculer les valeurs des fonctions-objectifs f_1 et f_2 et de tracer l'espace des fonctions-objectifs relatif aux valeurs des variables retrouvées précédemment, à la section 6.8 de ce chapitre.

Concernant la variable de décision, la vitesse de coupe V , nous présenterons dans ce qui suit deux analyses :

- La première correspond à la prise en compte du domaine de variation de la variable V issu des résultats numériques de l'équation (17'), présentés au tableau 6.2 et tracés à la figure 6.7. Dans cette analyse le domaine de variation de la variable V correspond à $[186.13 \text{ m/min}, 431.063 \text{ m/min}]$;

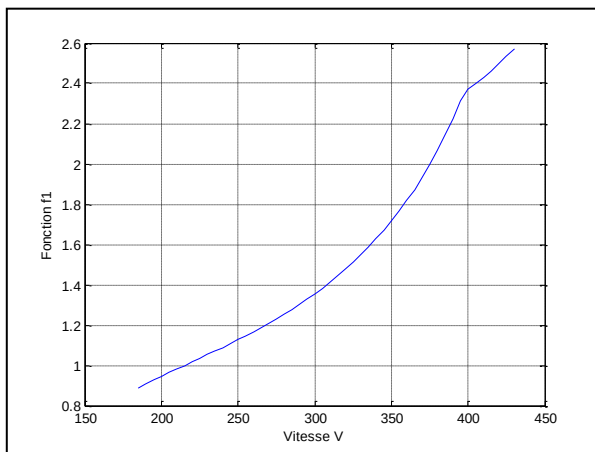
- La deuxième analyse correspond à la prise en compte de la définition d'un nouveau domaine de la variable V , plus restreint que le premier, c'est-à-dire plus restreint que l'intervalle $[186.13, 431.06]$.

Cette restriction est due au lien entre la variable V et le paramètre ou poids λ , qui apparait clairement aux figures 6.19-c, 6.21 et 6.22. Ce nouvel intervalle correspond à $[305.46, 431.06]$.

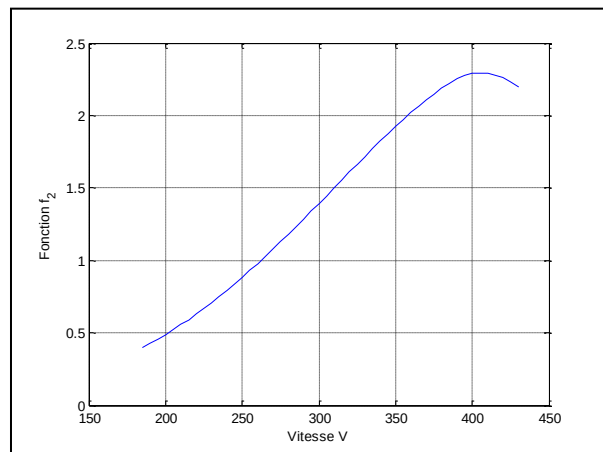
Les solutions optimales retrouvées par les deux analyses, correspondant à la minimisation des deux fonctions, feront objet de discussions, d'analyses et de critiques par la suite. Les perspectives complétant cette études seront fournies après, relativement aux meilleures valeurs des fonctions f_1 et f_2 trouvées.

6.9.1. Valeurs optimales des variables du problème (V , f , d) et espace des fonctions pour V variant à l'intérieur de $[186.13 \text{ m/min}, 431.06 \text{ m/min}]$

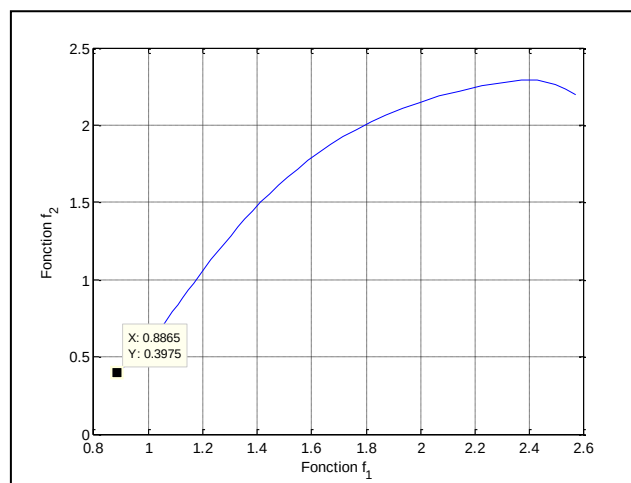
Nous avons tracé aux figure 6.25-a, b et c l'évolution des fonctions f_1 , f_2 et l'espace des fonctions-objectifs (f_1 , f_2).



a) Tracé de la fonction f_1 en fonction de V



b) Tracé de la fonction f_2 en fonction de V



c) Espace des fonction-objectifs (f_1 , f_2)

Figure 6.25 : Tracé des fonctions-objectifs en fonction de la variable V et tracé de l'espace des objectifs

A partir de la figure 6.25-c, nous remarquons que la méthode adoptée a pu déboucher sur un minimum commun des deux fonctions.

Contrairement à ce que nous avions projeté d'obtenir au départ, c'est-à-dire l'obtention d'un front de Pareto, nous avons dégagé un unique point *estimé* optimal, au premier regard, relativement aux conditions d'optimalité de KKT, en y ajoutant la condition d'optimalité du Lagrangien vis-à-vis du λ fournie par l'équation (15) et par la suite (17).

Nous trouvons donc la valeur optimale du couple des fonctions-objectifs par :

$$(f_1^*, f_2^*) = (8.8 \text{ dh}, 39.79\%) \quad (82)$$

Ces résultats correspondent aux valeurs des variables de décision suivantes :

$$(V^*, f^*, d^*) = \left(185 \frac{m}{min}, 0.86 \frac{mm}{tr}, 1mm\right) \quad (83)$$

Nous constatons que la valeur de la fonction coût retrouvée, désignée par f_1 est très intéressante, voire concurrentielle. Le coût calculé d'une opération de tournage ne dépasse pas 10 dh, en comparaison à (Chen & Tsai, 1996)(Cus & Zuperl, 2006) et aux résultats de (Jabri et al., 2013) qui ont trouvé une valeur optimale de 37.7 dh, dans le cas du tournage multipasse.

Cependant, la fonction f_2 , exprimant l'usure de l'outil s'avère médiocre, relativement aux besoins industriels réels, où il n'est pas tolérable de causer l'usure à 39.75% d'un outil de coupe seulement en une passe. Relativement aux résultats des références citées ci-dessus, le taux d'usure (fonction f_2) ne dépassera par les 5%.

Proposition 1 : Il faut donc chercher d'autres pistes dans le même sens ou en adoptant une autre démarche d'optimisation telle des métaheuristiques classiques qui permettraient de résoudre ce genre de problème d'optimisation.

Proposition 2 : La condition d'optimalité du Lagrangien relativement au paramètre λ pourrait être utilisée comme dernier recours. En effet, dans ce cas, nous obtiendrons des optimums relatifs à une courbe du type :

$$\varphi_\lambda(f, V) = 0$$

où et il serait fort probable d'obtenir un front de Pareto (f_1^*, f_2^*) .

6.9.2. Prise en compte du poids λ et Valeurs optimales des variables du problème

Relativement à la relation liant la variable V et le poids λ , exprimée par l'équation (76) et schématisée par les figures 6.19-c, 6.21 et 6.22, le premier intervalle de variation de la variable V , [186.13 m/min, 431.06 m/min], sera réduit à gauche à l'intervalle [305.46 m/min, 431.06 m/min]. En conséquence, nous devons recalculer les valeurs de fonctions-objectifs dans ce nouvel intervalle et prendre la valeur optimale.

Cependant, nous avons remarqué, sur les figures 6.26-a et 6.26-b, que les deux fonctions-objectifs sont croissantes par rapport à la variable V . Enfin, nous ne pouvons pas retrouver un optimal « meilleur » sur ce nouvel intervalle.

6.9.3. Validité des résultats et positivité des multiplicateurs de Lagrange

A cette étape, nous ne sommes pas encore sensé choisir la solution optimale, car il est nécessaire avant de vérifier la positivité des multiplicateurs de Lagrange estimés à partir du système (27).

Géométriquement, chaque composante du vecteur de Lagrange $\vec{\mu}$ correspond à une surface paramétrée, dépendant des variables V et f , et conformément à l'équation (17'), définissant une courbe plane, les résultats obtenus aux calculs correspondraient donc à l'injection de cette courbe plane sur la nappe ou surface paramétrée définie par chaque composante μ_i .

Le problème ici réside dans la somme des multiplicateurs qui doit être égale à l'unité. Cette contrainte peut être vérifiée à partir de la formulation donnée par le système (27). Une deuxième contrainte s'ajoute, liée à la positivité de chaque composante μ_i .

Analytiquement, cette deuxième contrainte est difficile à assurer, si l'on espère l'établir en trouvant la relation entre les différentes variables V , f et λ ; surtout lorsqu'on y ajoute l'équation de la courbe plane, exprimée par l'équation (17'), comme déjà mentionné. Cela dit, les résultats que nous avons obtenus ne permettent pas d'assurer cette deuxième contrainte, relativement à l'évolution des variables du problème V , f , d et λ . Nous avons obtenu des valeurs positives des μ_i et d'autres négatives. La distinction analytique se voit aussi ardue, conformément aux expressions de ces multiplicateurs (système (27)).

Il est donc nécessaire de procéder par l'approche numérique et de stocker les valeurs des variables qui assureraient la positivité des multiplicateurs de Lagrange, sans espérer trouver

un lien analytique pur entre ces différentes valeurs. Une interpolation ou régression statistique pourraient aussi lier ces différents points ; cela relèvera toujours de l'approche numérique.

6.10. Discussions et perspectives de la problématique

Même en adoptant de telles simplifications, notre problème présente toujours plusieurs autres aspects qui restent à traiter dans des travaux futurs. C'est pour cela que nous rapportons aux paragraphes suivants quelques perspectives et ouvertures essentielles pour compléter ou orienter ces travaux.

- Utilisation des heuristiques et métaheuristiques :

Nous pensons que le travail effectué, ainsi que les résultats et interprétations fournies, permettent de voir qu'il est légitime de recourir aux heuristiques ou métaheuristiques. Les explications données, quant à la positivité des multiplicateurs de Lagrange restent les plus solides ; on se retrouverait à la fin avec une infinité de problèmes mono-objectifs sous contraintes, générés du problème initial, tant qu'on n'a pas pu retrouver des expressions simples de ces multiplicateurs.

Il serait donc souhaitable d'appliquer une heuristique ou métaheuristique classique ; nous proposons les algorithmes génétiques (AG), classiquement utilisés pour ce genre de problème, vu leur facilité de mise en œuvre ainsi que leur convergence sûre à un certain nombre d'itérations (Deb, 2001). La raison principale du succès des AG est leur large application et l'aisance de leur application dans une perspective globale, pour presque n'importe quelle classe de problème (Deb, 2001). Les résultats numériques seront après comparés aux valeurs retrouvées par la démarche analytique.

- **Résolution par la programmation géométrique (Boyd et al., 2007)(Ojha & Biswa, 2010)(Reklaitis et al., 1983) :** cette technique est utilisée pour la résolution de problèmes d'optimisation formulés par des fonctions-objectifs et contraintes sous formes de posynômes.

C'est une piste très intéressante à découvrir vu que les fonctions-objectifs et contraintes de notre problème correspondent tous des posynômes.

Les posynômes sont définis comme étant des fonctions à plusieurs variables, semblables à des polynômes à plusieurs indéterminés, sauf que les puissances des variables sont des réels positifs. Dans le cas des fonctions-objectifs que nous avons traitées, vu que la variable d

appartient au dénominateur, elle serait directement à maximiser ; cela correspondrait directement à la démarche adoptée dans notre résolution.

Pour la fonction f_2 , les puissances des variables V et f correspondent à des réels positifs, contrairement à la fonction-objectif f_1 où les puissances de ces variables sont négatives. Ce problème peut être contourné en inversant cette fonction, pour construire une nouvelle fonction f_1 à maximiser, et qui sera écrite sous forme de posynômes. Ce nouveau programme, à résoudre par programmation géométrique, s'écrira donc :

$$\begin{cases} \max \left(\frac{1}{f_1(V, f, d)} \right) \\ \min(f_2(V, f, d)) \end{cases}$$

Sous contraintes

$$\begin{cases} g_1(V, f, d) \leq 0 & (a) \\ g_2(V, f, d) \leq 0 & (b) \\ g_3(V, f, d) \leq 0 & (c) \\ V \in [V_{min}, V_{max}] & (d) \\ f \in [f_{min}, f_{max}] & (e) \\ d \in [d_{min}, d_{max}] & (f) \end{cases}$$

Nous n'avons pas pu effectuer de calcul car, c'est une méthode que nous venons de découvrir, et qui fera donc objet de nos travaux dans un futur très proche.

- **Normalisation des fonctions-objectifs** : Il serait aussi intéressant d'appliquer d'autres méthodes de normalisation des fonctions-objectifs puisque nous avons pu mesurer l'effet de ces dernières sur la détection de l'optimum et sur les valeurs des optimums s'ils existent.

Dans le cas de la première technique de normalisation, relative à l'équation (17'), il est possible de procéder à la linéarisation du problème par la linéarisation à la fois des deux fonctions-objectifs normalisées ainsi que les équations exprimant les contraintes du problème.

Dans un tel cas, le problème à résoudre correspondra à la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif linéaire, qui pourrait être résolu facilement par l'algorithme du simplexe multiobjectif utilisé à l'article (El Jai et al., 2016), où nous avons rapporté l'intégralité de l'algorithme développé au chapitre 6 de (Ehrgott, 2005).

- **Fonctions-objectifs additionnelles** : D'autres fonctions-objectifs peuvent être intégrées, relativement à des objectifs issus d'autres fonctions de l'entreprise.

Par exemple, il est possible d'intégrer la maximisation de la fiabilité des outils de coupe relative à la minimisation de la consommation de ces derniers dans un intervalle de production significatif. La maximisation de la cadence de production peut aussi être incluse parmi les objectifs de production.

A l'annexe « Définition d'une nouvelle problématique », nous définissons en détail une nouvelle problématique relative aux fonctions citées au paragraphe précédent. Cette nouvelle problématique ne pourrait être résolue analytiquement, du fait de la présence de certaines fonctions-objectifs non convexes, discontinues, non différentiable globalement, etc. Néanmoins, nous proposerons dans ce qui suit quelques pistes aux chercheurs qui s'intéresseraient à cette nouvelle formulation (voir annexe « Définition d'une nouvelle problématique ») :

- ✓ *Piste N° 1* : Résolution directe par **heuristiques ou méthaeuristiques** ;
- ✓ *Piste N° 2* : il serait intéressant d'étudier la possibilité de la **convexification des fonctions-objectifs** non convexes et/ou discontinues (Hiriart-Urruty, 2013), en cherchant l'enveloppe ou l'épigraphe convexe de ces fonctions permettant donc l'application des techniques d'optimisation convexes, analytiques connus.
- ✓ *Piste N° 3* : Nous pourrions **adopter la logique floue** afin de **lier entre les points présentant la contrainte de discontinuité** relative aux nouvelles fonctions-objectifs introduites dans notre nouvelle problématique. Par cette technique, l'optimisation convexe ne sera pas possible mais l'optimisation analytique peut continuer quand même en évitant, au moins à cette étape là, les résolutions numériques et les heuristiques de résolution (Voir aussi le lagrangien généralisé et le problème dual (Minoux, 1993) (Culioli, 1994)).
- **Recherche du front de Pareto par la Méthode de Geoffrion** : le principe de la méthode est présenté à la figure 6.26.

Nous pouvons dire que l'équation additionnelle d'optimalité du Lagrangien par rapport au poids λ , exprimée par l'équation (15), nous a permis de retrouver, après tout ce calcul, un seul point optimal, correspondant au minimum des deux fonctions objectifs, conformément aux résultats de la figure 6.25-c).

En supposant la connexité du front de Pareto (§ 5.8.3, chapitre 5), il serait possible de chercher les autres points de ce front en appliquant l'opérateur du gradient à la fonction f ,

c'est-à-dire par approximation du front à un ensemble de segments de droite, relativement au développement de Taylor d'ordre 1.

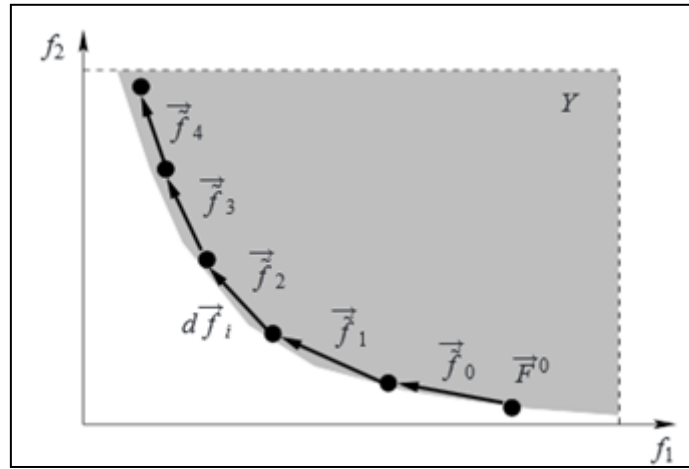


Figure 6.26 : Principe de la méthode Geoffrion (Colette et Siarra, 2002)

6.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué un « *arsenal analytique* » de l'optimisation convexe, au problème d'optimisation multiobjectif des paramètres de tournage monopasse.

Comme nous avons déjà cité au début du chapitre, la bibliographie ne présente pas une sérieuse approche analytique du problème ; nous avons donc essayé dans nos travaux de proposer une étude analytique de ce problème réduit (sans introduire la dernière contrainte, proposé dans (Chen & Tsai, 1996), (Jabri et al., 2013) et (Kübler, 2015)) afin d'estimer la possibilité de retrouver un optimum unique du problème ou bien un ensemble de solutions, exprimées par la notion de front de Pareto, et d'éviter le cyclage ou la dégénérescence lors de la résolution.

En ce qui concerne les outils de résolution, à part les développements analytiques, le calcul algébrique et numérique, nous avons fourni, presque à chaque étape, des interprétations géométriques des équations ou systèmes d'équations retrouvées. Ces interprétations, géométriques, ont beaucoup aidé à retrouver certaines solutions d'équations à deux variables telles que l'équation (17) et le système (67).

Dans quelques étapes du développement, nous avons eu recours à la résolution numérique des équations complexes (équation (17)) par la méthode de Newton ou, localement, via le développement de Taylor (Système (67)) ; mais afin de rester au sein de l'approche analytique, nous avons eu recours aussi à l'estimation des lois régissant ces résultats par des

outils statistiques, à savoir la régression linéaire avec de simples changements de variables classiques pour linéariser les variables d'adéquation (X et $\tilde{Y}$), lorsque cela s'est avéré nécessaire (équation (17)).

En ce qui concerne l'outil d'optimisation mathématique utilisé, les conditions d'optimalité de KKT ont été appliquées dès le départ, vu que le problème initial traité est un problème convexe ; les fonctions-objectifs et les fonctions contraintes sont convexes, donc l'existence d'une solution unique par la définition du Lagrangien et l'application des conditions de Kuhn-Karush et Tucker était souhaitable. L'existence du point selle du Lagrangien, dans le cas de problèmes convexes, avec des domaines de définition des fonctions compactes, était à l'origine de cette analyse, relativement au théorème minimax (Culioli, 1994) originellement dû à John Von Neumann.

Certes, l'optimum retrouvé (équation (76) et (77)) présente des valeurs raisonnables, physiquement réalisables, mais la valeur correspondant à la fonction usure (fonction f_2) est élevée, donc, économiquement, non souhaitable par les responsables d'entreprises.

Un point très important de notre développement correspond à l'effet de l'application des méthodes de normalisation, aux fonctions-objectifs et aux fonctions contraintes, sur les valeurs des optimums retrouvés ; Nous avons pu voir que la première méthode de normalisation n'a pas permis de parvenir à un optimum relatif à la dernière condition de KKT, exprimée par l'équation 14-d) ; Par contre, la deuxième méthode de normalisation a permis de retrouver un ensemble d'optimums qu'il était possible de classifier, et de déboucher sur un optimum global par la suite.

Le problème de la positivité des multiplicateurs de Lagrange reste délicat à traiter, et l'approche analytique ne permettrait pas de retrouver un lien fort, entre les variables de décision, qui permettrait de formaliser la variation de ces variables entre elles.

En outre, le calcul des multiplicateurs de Lagrange, aux différentes valeurs prises par les variables du problème, nous a permis d'estimer que les positions de ces variables, qui permettent d'obtenir des valeurs positives des μ_i sont dispersées (ensemble de valeurs des μ_i non nécessairement connexes). Par la suite, assurer leur connexion par une fonction mathématique (lien fort) ne serait pas très rigoureux.

Afin de détecter ces positions, il est souhaitable de modifier l'algorithme d'obtention de ces multiplicateurs et de faire un tri des variables V , f , d et λ , à l'intérieur de la boucle de calcul,

relativement au système d'équation (67). Le tracé de ces positions dans l'espace $(V, f, d)_\lambda$ paramétré par λ pourrait nous informer sur le comportement estimatif de ces variables et de sur-contraindre encore une fois le domaine de définition des variables de décision.

A partir de cette remarque, et s'il y a lieu d'expliciter les μ_i en fonction des variables de décision, nous nous retrouverons une fois encore avec un problème d'optimisation mono-objectif sous contrainte, du type :

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} \min L(\vec{X}) \\ S.C. \left\{ \begin{array}{l} \mu_i(\vec{X}) \geq 0 \text{ pour } i = \{1..n\} \\ \sum_{i=1}^n \mu_i(\vec{X}) = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Avec $\vec{X}$ étant le vecteur des variables de décision, dans notre étude de cas : $\vec{X} = (V, f, d, \lambda)$.

Implicitement, c'est l'une des difficultés rencontrée lors de la résolution du problème initial, car il faut une seconde fois calculer les variables de décision (V, f, d, λ) qui permettent d'obtenir la positivité des μ_i avant de se lancer dans le choix des valeurs optimales...

Quant au problème traité, si l'on décide encore une fois de résoudre le problème analytiquement, et puisque les expressions des μ_i sont assez complexes (système (27)), je pense que nous n'allons pas nous en sortir, et la définition d'un nouveau Lagrangien, relatif au nouveau problème (78) ne ferait que retarder le recours à l'approche numérique et à la résolution par métaheuristiques.

Toutefois, s'il y a une possibilité de retrouver des expressions simples des multiplicateurs de Lagrange, il serait possible d'estimer les variables de décision donnant la positivité des μ_i et travailler avec pour terminer l'étude d'optimisation ; pratiquement, ce serait de l'utopie !

A la fin de cette analyse, nous pouvons dire que l'obtention de l'optimum s'avère une tâche plus ou moins complexe, sachant que nous avons procédé à certaines simplifications, comme l'élimination de la quatrième contrainte du problème initial (chapitre précédent), ainsi que le recours aux méthodes numériques dans certaines étapes de la résolution, à l'interpolation ou à la régression linéaire afin de débloquer quelques situations plus ou moins délicates.

Conclusion générale et perspectives

Ce n'est plus de la fiction de parler des systèmes manufacturiers intelligents et autonomes. La plupart des industries de production de grande cadence utilisent plus ou moins des technologies avancées pour augmenter leurs profits (exemple de l'Allemagne, des Etats Unis d'Amérique, de la chine, du japon, des plusieurs pays sud-asiatiques, etc.).

L'industrie des semi-conducteurs et les industries du transport (aéronautique, automobile, etc.) en sont des exemples concrets. La concurrence, relativement à l'indicateur « Qualité/Prix », rend la marge des gains la plus serrée que possible. En conséquence, le recours à l'automatisation mais surtout à l'autonomie des machines vis-à-vis de l'être humain, tend à devenir un atout majeur de la maîtrise de la qualité.

L'Homme se focalisera donc plus sur les tâches intellectuelles, de niveau plus élevé, et laissera aux machines le soin de produire des biens et des services de haute qualité. Il pourra donc axer ses efforts sur l'amélioration continue de ses processus, afin de répondre aux nouveaux besoins indéfiniment générés par la société moderne.

La créativité, l'optimisation, la réactivité, l'environnement, le confort, etc., sont autant de besoins et de plaisirs généralisés à une plus grande tranche d'humains, grâce aux progrès scientifique et technique apportés par l'automatisme.

Cela dit, nous voyons bien maintenant que les normes touchent la plupart des produits. La normalisation se généralise plus dans les pays développés. Mais l'on voit aussi les efforts des pays émergents pour la maîtrise de la qualité des produits disponibles dans les différents marchés, en essayant de catégoriser et de régulariser ces derniers (produits) au sein des standards appliqués ou récemment créées au sein de ces pays.

La standardisation et la normalisation passe de l'étude des produits, en termes de conception, de calcul, de choix des matériaux, à la fabrication, relativement aux procédés et méthodes de mise en œuvre, à l'exploitation et recyclage, en passant par les aspects environnementaux et écologiques, relatifs à la totalité de la durée de vie du produit.

Conformément à cette approche intégrée et vu que les industries automatisées ont atteint une certaine maîtrise vers les années 1990, nous pensons que c'était la raison principale du déclenchement des consortiums relatifs aux systèmes IMS par les pays adhérents, comme cela a été introduit dans l'introduction générale.

Les objectifs étant la création d'un cadre unifié et standardisé, permettant la prolifération et l'aboutissement aux systèmes les plus intelligents qu'ils soient, surtout dans le domaine de la production. Les systèmes HMS en sont l'exemple idéal, dans le domaine de la productique, mais les MAS ont trouvé, bien avant, leur chemin de développement surtout au niveau des entreprises de service et de développement informatique.

Actuellement, on s'intéresse de plus en plus aux systèmes HMS, dans le domaine de la production fortement automatisée, mais recherchant une certaine autonomie et flexibilité dans la mise en œuvre. Un exemple de flexibilité est relatif à la recherche des gammes de fabrication de produits à faible production, lorsque l'organisation classique présente plus de rigidité dans l'organisation des ateliers, ne permettant donc pas l'adaptation aux nouveaux besoins, même à faible production, générés par la compétitivité et la créativité exprimée par une production de plus en plus diversifiée.

Cela dit, et de part notre expérience dans le domaine de la maintenance industrielle et la gestion de la qualité, nous nous sommes focalisés dans nos travaux sur ces deux aspects connexes à la gestion de production. L'intérêt majeur est de contribuer à ce mouvement scientifique et technique très important du début du 21^{ème} siècle.

D'après les divers travaux que nous avons étudiés, rapportés dans l'introduction générale et dans la première partie de ce mémoire, nous avons décelé un point important, relatif à la non-application de l'approche holonique au domaine du management de la maintenance et de la Sûreté de Fonctionnement (SdF) et au domaine de la gestion de la qualité.

Par conséquent, au deuxième chapitre, nous avons étudié l'un des aspects tactiques de la gestion de la maintenance et de la SdF, correspondant à la possibilité d'automatiser l'analyse AMDEC. Notre lecture de cette analyse (AMDEC) a permis de détecter une certaine généricité dans l'approche et d'en proposer, en conséquence, une description originale par l'approche holonique, en adoptant l'architecture PROSA. C'est avec le langage orienté objet, UML 2.0, que nous avons écrit la description fonctionnelle et organisationnelle de la méthode AMDEC par l'approche holonique.

Au troisième chapitre, nous avons appliqué la même démarche sur les procédures de contrôle qualité (Maîtrise Statique des Procédés), ainsi que sur la méthode des plans d'expériences. La liaison établie entre ces deux domaines permet d'apporter de la réactivité à l'amélioration de

la qualité des produits, conformément aux indicateurs issus de la MSP et de la méthode des plans d'expériences.

Nous avons mentionné au même chapitre que certaines étapes de l'optimisation de la qualité se font d'une manière statique. Chose qui a poussé à étudier la possibilité d'automatisation de cette méthode intégrée de l'*amélioration réactive* de la qualité, en proposant une modélisation de ces procédures par l'approche holonique. Le résultat obtenu est fourni sous forme de diagrammes de classes et de séquences, sous le langage UML 2.0.

Ces diagrammes doivent après être revus, modifiés et implantés au sein de Holons Ressources. Une nouvelle génération de logiciels informatiques de pilotage de la production par la qualité peut aussi être mise en œuvre à la base de ces développements.

Les simulations devraient permettre de corriger les modèles développées et de revoir l'architecture des holons proposés pour modéliser les êtres physiques et informatiques, acteurs majeurs des méthodes « AMDEC dynamique » et « contrôle des paramètres-machines », ainsi que leurs interactions.

Ces deux derniers points correspondent aux perspectives dédiées aux résultats des deux premiers chapitres de ce rapport.

Au quatrième chapitre, nous avons proposé une nouvelle démarche d'intégration de certaines contraintes issues des deux domaines de la production et de la maintenance.

Relativement à la gestion de la production, nous avons choisi la cadence de production, qui correspond au nombre de pièces produites par unité de temps. C'est une fonction qui doit être maximisée.

Les estimations statistiques de la production à venir est aussi l'un des paramètres important du modèle proposé. Le nouveau modèle permettra de corriger le Plan Directeur de Production dans le but de proposer un nouveau qui tiendrait aussi compte des contraintes de sûreté de fonctionnement des unités de production (HR).

En ce qui concerne la gestion de la maintenance et la sûreté de fonctionnement, les contraintes fonctionnelles prises en compte correspondent principalement au choix de la période de remplacement systématique des organes.

D'un point de vue systémique, les paramètres d'entrée de notre démarche peuvent être résumés aux points suivants :

- Estimations statistiques de la production initiales P_1 ;
- La loi de fiabilité de l'équipement considéré ;

La sortie (résultats exploitables) de la démarche correspond à :

- L'estimation de la nouvelle fonction ou programme de production P_2 ;

Les variables de décision considérées se résument en :

- La période de remplacement systématique, notée t_f ;
- La production de départ à la première heure, ou à la première journée, ..., notée b_0 ;
- La durée des réparations ou de remplacement de l'équipement considéré, notée t_{rep} .

L'aboutissement au modèle (résultat de la démarche de modélisation) a été établi conformément aux contraintes :

- d'équivalence de la production sur tout l'intervalle de production $[t_0, t_0+T]$ entre les deux programmes de production P_1 et P_2 ;
- de cadence nominale ou maximale de production, relativement aux contraintes techniques et technologiques des équipements ;
- de cadence maximale de production, relative à la compensation de la production manquante, aux intervalles de non-production (application de la maintenance systématique et arrêt de production).

Comme cela est mentionné à la fin du chapitre 4, nous ne présentons pas explicitement l'équation de la période de remplacement systématique t_r ou sa valeur optimale, mais les valeurs prises par cette variable de décision ainsi que les valeurs prises par les deux autres variables t_{rep} et b_0 , sont les solutions des deux problèmes d'optimisation multiobjectifs (POM 32 et 33) que nous avons définis à la fin du chapitre.

La première partie de cette thèse s'achève donc avec les résultats du quatrième chapitre. Nous rappelons donc que cette partie a été dédiée à l'aspect tactique de la gestion industrielle. En vulgarisant les approches développées, nous reprenons les principaux points traités, dans ce qui suit :

- la description de la méthode AMDEC-machine par l'approche holonique, permettant d'appliquer cette méthode sur des machines autonomes, ou de développer une nouvelle génération de logiciels de MAO plus réactifs que les logiciels actuels ;
- la description de l'optimisation des paramètres-machines par l'approche intégrée assemblant les techniques de contrôle qualité en l'occurrence la méthode des plans

d'expériences, conformément à l'adaptation de ces deux importants processus au paradigme holonique ;

- la prise en compte de la dépendance entre maintenance et production en ce qui concerne l'effet de la politique de la maintenance sur les arrêts de la production, et, dans le sens inverse, l'effet de la cadence ou le cumul de production sur la fiabilité des équipements considérés.

La deuxième partie de la thèse a été consacrée à un aspect plus affiné. Nous y avons traité le problème d'optimisation multiobjectif du tournage monopasse, relativement aux machines intelligentes de production, dont font partie les machines ou centres d'usinage à commande numérique.

Idéalement, les algorithmes d'optimisation des opérations d'usinage doivent être implémentés dans ce type de machines ou dans des entités de commande, par exemple les holons ordres, les holons staff ou les EPA, relativement à l'architecture PROSA.

Généralement ce sont des algorithmes heuristiques ou métaheuristiques qui sont le plus adaptés, vu le temps faible de calcul et la convergence des résultats, généralement assurés par des hypothèses et des simplifications d'ordre technique.

C'est dans ce contexte que nous avons voulu vérifier l'efficacité de ces algorithmes en comparaison à l'approche analytique, en traitant un problème classique d'optimisation d'une opération d'usinage.

Relativement à la bibliographie présentée aux chapitres 5 et 6, le problème analysé et d'autres problèmes connexes ont été largement traités par des métaheuristiques, nous avons proposé de procéder analytiquement en fixant deux objectifs majeurs :

- soit dégager des résultats plus performants en termes d'optimums,
- soit de prouver que le recours aux méthodes approchées devient nécessaire, dans le cas où les méthodes analytiques ne permettent pas d'obtenir des résultats d'optimisation plus efficaces, ou si les développements s'avèrent très complexes, relativement aux temps alloués à la résolution d'un problème d'optimisation dans un contexte industriel.

Cela dit, le problème adopté permettant d'appliquer cette démarche de vérification et de comparaison, correspond au problème d'optimisation multiobjectif du tournage monopasse. C'est un problème qui a été soulevé par plusieurs auteurs, soit dans sa version monopasse soit dans sa version multipasse. Le détail est mentionné au chapitre 5 et les modèles correspondant sont repris de la bibliographie de ce chapitre.

Au chapitre 5, nous avons présenté le POM adopté, relativement aux fonctions-objectifs et contraintes adoptées. Dans ce même chapitre, nous avons repris l'essentiel et la base des

outils d'optimisation analytiques, en ce qui concerne les approches de résolution, les méthodes de mise en œuvre, les conditions d'optimalité ; le tout étant regroupé sous forme de théorèmes de base et de propositions.

Nous rappelons que, suite à la convexité du problème (les fonctions-objectifs et contraintes sont convexes), nous avons eu recours à des résultats de l'optimisation convexe. C'est la raison pour laquelle, nous avons choisi de travailler par l'approche scalaire, et par la méthode de la somme pondérée, après normalisation des fonctions du problème.

Mais avant, nous avons adopté deux types de normalisation, dans le but de tester la dépendance des résultats vis-à-vis de ces techniques. Ce point a été vérifié dans les résultats de la démarche, développés au chapitre 6.

En ce qui concerne les critères d'optimalité, nous avons choisi d'appliquer les critères nécessaires et suffisants de Kuhn-Karush et Tucker, dans le cas de problèmes convexes. Ces derniers sont la forme la plus récente du groupement de plusieurs résultats de l'analyse convexe qui sont en général la relaxation des problèmes d'optimisation par l'optimisation du Lagrangien, le théorème du point-col ou théorème min-max de Von Neumann.

Le chapitre 6 présente le développement de la démarche de l'optimisation analytique. Cette démarche a été organisée de la manière suivante :

- présentation du POM considéré ;
- normalisation des fonctions-objectifs et des fonctions contraintes ;
- écriture de la fonction composite, somme pondérée des deux fonctions-objectifs. Cette étape permet le passage du cas multiobjectif au cas mono-objectif paramétré par le poids normalisé $\lambda \in [0,1]$;
- écriture du Lagrangien du problème mono-objectif sous contrainte pour une éventuelle relaxation et la préparation au calcul des équations fournies par les conditions d'optimalité KKT ;
- écriture des conditions d'optimalité KKT, sous forme de problème non linéaire à résoudre ;
- développement des équations du problème KKT, qui se résument dans ce qui suit :
 - optimalité (minimisation) du Lagrangien du problème relativement aux variables du problème (V, f) ; la troisième variable d a été considérée comme un paramètre qui doit être mis à sa valeur maximale, vu sa position au niveau du dénominateur des deux fonctions-objectifs en même temps ;
 - optimalité du Lagrangien relativement au poids λ ;

- calcul des expressions des multiplicateurs de Lagrange μ_i , composante du vecteur $\vec{\mu}$, relativement à l'orthogonalité entre ce vecteur et le vecteur des fonctions contraintes normalisées $\vec{g}(g_1, g_2, g_3)$.
- Conformément au problème initial, nous avons fourni les résultats numériques de ce développement, relativement à la première et à la deuxième technique de normalisation :
 - la première technique de normalisation n'a pas permis de détecter d'optimum ;
 - contrairement à la deuxième technique, qui a permis d'obtenir à la fin un point optimal.

Le premier point, qui minimise le lagrangien et les deux fonctions-objectifs, peut être qualifié de compétitif, relativement à la fonction-objectif f_1 , mais ne l'est nullement pour la fonction-objectif f_2 .

D'autres optimums, au sens de Pareto, peuvent ainsi être détectés en appliquant la méthode de Benson, utilisant le gradient des fonctions-objectifs (approche graphique appliquée dans l'espace des fonctions-objectifs).

En outre, d'un point de vue technique, le problème traité est un problème assez basique en comparaison avec le cas multipasse. Toutefois, nous avons noté plusieurs difficultés qui rendent la résolution très difficile à mettre en œuvre.

Cela dit, pour des problèmes plus complexes, nous ne pensons pas que la démarche analytique puisse présenter des résultats compétitifs, en termes de valeurs optimales retrouvées et en termes de temps d'analyse et de résolution. En effet, dans le contexte industriel, la rigueur mathématique passe en deuxième lieu. L'essentiel dans ce cas serait l'obtention des résultats le plus rapidement possible, à un certain niveau de fiabilité ; l'expérimentation permet par la suite de calibrer les paramètres de pilotage du processus.

Dans le cas du problème de tournage monopasse analysé, deux principales difficultés ont été rencontrées à plusieurs reprises :

- la résolution analytique des équations non linéaires et parfois non différentiable globalement ou continues par morceaux ;
- l'écriture cartésienne de quelques courbes ou surfaces qui n'est pas toujours possible, et le recours à l'expression de ces objets mathématiques par des fonctions implicites s'avère une nécessité et rend la résolution de ces équations encore plus délicate ;

Par ces remarques, nous pensons justifier le recours aux approches numériques et aux heuristiques et métaheuristiques pour la résolution de tels problèmes d'optimisation.

Les perspectives de cette partie de la thèse ont été détaillées à la fin du chapitre 6, mais nous les reprenons brièvement :

- Recherche du front de Pareto par la Méthode de Geoffrion en démarrant du point optimal retrouvé au chapitre 6 par la deuxième technique de normalisation ;
- Utilisation des heuristiques et métaheuristiques ;
- Résolution du problème monopasse et multipasse par la programmation géométrique ;
- Application de nouvelles techniques de normalisation des fonctions-objectifs ;
- Adoption de fonctions-objectifs additionnelles relativement aux contraintes de productivité et de fiabilité de l'outil de production (voir annexe « *Définition d'un nouveau problème d'optimisation* ») ;

Bibliographie

Adam Emmanuel, René Mandiau, Christophe Kolski, Application of a holonic Multi-Agent System for Cooperative Work to Administrative Processes, *Journal of Applied Systems Studies*, 2, pp. 100-115, 2001.

Anselmetti B., Automatisation du tournage en commande numérique, Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 6 juin 1985.

Armarego E. J. A. and Brown R. H., *The Machining of Metal*, Prentice Hall, Engelwood Cliffs, 1969.

Arzeliès Henri, *La dynamique Relativiste et ses Applications*, Fascicule II, Problème de mouvement en dynamique du point faiblement accéléré, Travaux de l'Institut Scientifique Chérifien, publié par la société des sciences naturelles et physiques du Maroc avec une subvention de la Mission universitaire et culturelle française au Maroc, Editions Gautier-Villars, Paris, 1958.

Basseville M., (1988). Detecting Changes in Signals and Systems-A survey. *Automatica*, vol. 24, n°3, p. 309-326.

Bazaraa Mokhtar S., Hanif D. Sherali, C. M. Shetty, *Non linear Programming – Theory and Algorithms*, 3rd Edition Wiley – Interscience, 2006, Hoboken, New Jersey, USA.

Beauville Arnaud, « De combien de paramètres dépend l'équation générale de degré n ? », *SMF – La Gazette*, 132, pp 5-15, avril 2012.

Benson, H. (1978). Existence of efficient solutions for vector maximization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 26(4), 569-580.

Berger Marcel et Gostiaux Bernard, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème édition corrigée, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.

Bertsekas Dimitri P., *Non Linear Programming*, 2nd Edition, Massachusetts Institute of Technology, Arthena Scientific, Belmont, Massachusetts, April 2004.

Bertsimas Dimitris and Tsitsiklis John N., *Introduction to Linear Optimization*, Massachusetts Institute of Technology, Arthena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.

Bitbol Michel, *Mécanique Quantique, Une Introduction philosophique*, Champs Flammarion, Edition revue et augmentée, Paris, 1999.

Blanc Pascal, *Pilotage par approche holonique d'un système de production de vitres de sécurité feuilletées*, thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006.

Boyd Stephen, Seung-Jean Kim, Lieven Vandenberghe and Arash Hassibi, A tutorial on geometric programming, *Optim. Eng.*, Springer (2007) 8: 67-127.

Broissin Nicolas, Contribution à l'amélioration de la réactivité des systèmes de production Automatisés et Flexibles grâce à un pilotage basé sur une Génération des Tâches Décentralisées, Thèse de Doctorat en Productique et Informatique, Université de Droit, d'Economie et des Sciences, Aix-Marseille III, 19 Juillet 1999.

Brouard Frédéric et Soutou Christian, SQL : Synthèse de cours et exercices corrigés, Edition Pearson Education, Collection Informatique, mai 2005.

Brouard Frédéric, SQL : Développement, Edition Campus Press, 2001.

Bufferne, Le guide de la TPM®, Editions d'Organisation, Paris, 2011.

Cairol R., Cours de Géométrie – courbes et surfaces, Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1988.

Candea Ciprian, Huosheng Hu, Luca Iocchi, Daniele Nardi, Maurizio Piaggio, Coordination in multi-agent RoboCup teams, Robotics and Autonomous Systems, 36 (2001) 67-86.

Chen M. –C. & Tsai D. –M. (1996), A simulated annealing approach for optimization of multi-pass turning operations, International journal of Production Research, 34:10, 2083-2825.

Christensen, J., 1994, Holonic Manufacturing Systems - Initial Architecture and Standards Directions. Hannover, Germany

Claude G., Modélisation de documents et recherche de points communs Proposition d'un Framework de gestion de fiches d'anomalie pour faciliter les maintenances corrective et préventive, Thèse de doctorat, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2012.

CNOMO : Comité de Normalisation des moyens de production, commission 41F, Ref. E.41.50.530.N, Moyen de Production-Méthode AMDEC, Avril 2011.

Colette Yann et Siarra Patrick (2002), Optimisation Multiobjectif, Edition Eyrolles, Paris.

Constant C., La méthodologie Taguchi: introduction à la recherche technologique – gestion fonctionnelle de la qualité ou gestion « off-line », revue de statistique appliquée, tome 37, n° 2, p. 47-77, 1989.

Culioli Jean-Christophe, Introduction à l'Optimisation, Editions Ellipses, 1994.

Cus Franci, Zuperl Uros, Approach to optimization of cutting conditions by using artificial neural networks, Journal of Materials Processing Technology, 173 (2006), pp 281-290.

Daihani D. U., J. P. Kieffer, P. Pujo, A conceptual approach of a new architecture of the computer aided quality management systems, toward their better integration with the other production management function , Quality and its Applications, University of Newcastle Upon Tyne, 1993.

Datta R. and Deb K., An adaptive Normalization based Constrained Handling Methodology with Hybrid Bi-Objective and Penalty Function Approach, KanGAL Report Number 2012005, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2005.

De La Canal M. et Ferraris I., 2013, Risk Analysis holistic approach as a base for decision making under uncertainties, Chemical Engineering Transactions, 33, 193-198, DOI: 10.3303/CET1333033

Deb Kalyanmoy, Multi-objective Optimization Evolutionary Algorithms, 1st Edition, John Wiley & Sons, 2001.

Delahaye Jean-Paul, Presque tout est indécidable, section Logique et Calcul, Magazine pour la Science, n° 375, janvier 2009.

Djibril Ndiaye (2000), Apport des technologies Orientées Objets dans l'étude de la mise en place d'un référentiel de conception pour les systèmes automatisés, de production, Thèse de doctorat, Université de Lille 1.

Doru Panescu and Pascal Carlos, On Resource Service Access in a Holonic Manufacturing System, Bulletinul Institutului Polytechnic Din Iasi, Universitatea Technica, Gheorghe Asachi din Iasi, Tomul LVI (LX), Fasc. 3, 2010.

Dos Santos José Rodrigues, La Formule de Dieu (Roman), Traduis du Portugais par Carlos Batista, Editions Hervé Chopin, 2012, Paris.

Doumani I., Pujo P. et M'Sirdi N. 2016. Détection de micro-défauts process, situés à l'intérieur des limites de surveillance d'une carte de contrôle. Application à la fabrication de wafer en microélectronique Journal Européen des Systèmes Automatisés, 49, 159-178

Eglese R. W., Simulated annealing: a tool for operational research, European journal of operational research 46.3 (1990): 271-281.

Ehrgott Mattias, Multicriteria optimization, 2nd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.

Einstein Albert et Infeld Léopold, L'Evolution des Idées en Physique, Traduit de l'anglais au français par Maurice Solovine, Champs Flammarion, Paris, 1983.

El Aoufir et Bouami, Les coûts directs de la maintenance : De la comptabilité analytique vers la gestion par les activités, CPI'2005 – Casablanca, Maroc, 2005.

El Jai A., Michel Butor et la modernité romanesque, Thèse de Doctorat Soutenue à la Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc, Mars 1995.

El Jai Mostapha, Brahim Herrou, Hussain Benazza, (2013-1), Integration of a Risk Analysis method with Holonic approach in an Isoarchic context, International Journal of Engineering and Technology, Vol 5 No 6 Dec 2013-Jan 2014, pp.5196-5206.

El Jai Mostapha, Brahim Herrou, Hussain Benazza, Applying parametric multiobjective simplex method to the multiobjective optimization of simple turning operation, Proceeding du Workshop Systèmes de Production Industriels, Laboratoire Techniques Industrielles, Faculté des Sciences et Techniques-Fès, 15 mai 2016.

El Jai Mostapha, Iatimad Akhrif, Brahim Herrou, Hussain Benazza, Correction of the Production Master Plan According to Preventive Maintenance Constraints and Equipments Degradation State, Engineering, 2014, 6, 274-291.

El Jai Mostapha, Iatimad Akhrif, Taoufik Abidine, Nassouradine Moussa Djouma, Brahim Herrou, Hussain Benazza, Mohammed El Hammoumi, Intelligent process Optimization into Holonic Manufacturing Systels using TAGUCHI approach and UML Modeling Language, International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 6, Issue 5, pp. 1099-1107, May-2015.

Fang Ming, Analysis of Variability and Injection Optimization of. a Compression Ignition Engine, Mémoire de Thèse, The Ohio State University, 2009.

Fassi Fihri A., Cours de Méthodes Numériques (2014/2015), pour les 2ème et 3ème année, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Université Moulay Ismail, Meknès, Maroc.

Faulin J., A. A. Juan, S. Martorell, J-E. Ramirez-Marquez, Simulation Methods for Reliability and Availability of Complex Systems, Edition Springer, 2010.

Gong Jinlin, Modélisation et conception optimale d'un Moteur Linéaire à Induction Pour Système de Traction Ferroviaire, Ecole Centrale de Lille, Université Lille Nord-de-France, Octobre 2011.

Gosdorf Georges, Mythe et Métaphysique, Champs Flammarion, 1984, Paris.

Goupy Jaques, Introduction aux Plans d'Expériences, Dunod/L'Usine Nouvelle, 3^{ème} édition, octobre 2006.

Guillopé Laurent, Optimisation sous contrainte (cours), Laboratoire de mathématiques Jean Leray, Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques, Université de Nantes, version Mars 2016.

Guin Daniel, Thomas Hausberger, Algèbre et théorie de Galois, Collection Enseignement Sup, Mathématiques, EDP Sciences 2008.

Heidegger M., (1949), Holzwege, Trad. Fr. Chemins qui ne mènent nulle part, Gallimard, 1962.

Helbling J.-M. et Nuesch P., Cours de Probabilités et Statistique, Ecole Polytechnique Fédérale de LAUSANNE, Octobre 2001.

Helmut Mausser, Oleg Grodzevich, Oleksandr Romanko, Normalisation and Other Topics in Multi-Objective Optimization, Proceeding of the Fields-MITACS Industrial Problems Workshop, 2006.

Herrou B. et M. Elghorba, L'AMDEC un outil puissant d'optimisation de la maintenance, application à un motocompresseur d'une PME marocaine, CPI'2005 – Casablanca, Maroc, 2005.

Hiriart-Urruty Jean-Baptiste, Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

Jabri Abdelouahhab, Abdellah El Barkany, Ahmed El Khalfi, Multi-Objective Optimization Using Genetic Algorithms of Multi-Pass Turning Process, Engineering, July 2013, 5, 601-610.

Javel G., Pratique de la Gestion Industrielle, Organisation, Méthodes et Outils, DUNOD, L'Usine Nouvelle, 2003.

Jennings N. R., P. Faratin, M. J. Johnson, T. J. Norman, P. O'Brien, M. E. Wiegand, Agent-based business process management, International Journal of Cooperative Information Systems, 105-130, 1996.

Johnson Mark E., Simulated annealing, American Journal of Mathematical and Management Sciences 8.3-4 (1988): 205-207.

Jozefowicz Nicolas, Optimisation Combinatoire multiobjectif : des méthodes aux problèmes, de la Terre à (presque) la Lune, Habilitation à Diriger les Recherches, Institut National Polytechnique de Toulouse, 03/12/2013.

Khoshdarregi Mohammad Rezayi and Altitas Yusuf, Generalized Modeling of Chip Geometry and Cutting Forces in Multi-point Thread Turning, International Journal of Machine Tool and Manufacture, Volume 98, November 2015, Pages 21–32.

Kim Il Yong & De Weck Olivier, Adaptive Weighted Sum Method for Multiobjective Optimization, Struct Multidisc Optim (2006) 31: 105–116.

Klocke Fritz, Manufacturing Process 1 – Cutting, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011, translated by Aaron Kuchle.

Koestler A., The gost in the machine, Arkana books, London, 1969.

Krasnov Mikhael, Alexander Kissélev, Grigory Makarenko, Evgeny Chikine, Traduit du russe par Djilali Embarek, Mathématique supérieures, Editions De Boeck Université – Wesmael, 1993, Bruxelles, Belgique.

Kübler Frank, Johannes Böhner, Rolf Steinhipler, Resource efficiency optimization of manufacturing processes using evolutionary computation: A turning case, The 22nd CIRP conference on Life Cycle Engineering, 29 (2015) 822-827.

Kuhn T., la structure des théories scientifiques, Flammarion, 1972.

Labib A. W., A decision analysis model for maintenance policy selection using a CMMS, Journal of Quality in Maintenance Engineering, Volume 10, Number 3, 2004, pp. 191–202.

Lalande André, Vocabulaire technique et critique de la philosophie, Presses Universitaires de France, 15ème édition, octobre 1985.

Lemoigne J.L., 1977. La Théorie du Système Général, théorie de la modélisation, Presses Universitaires de France

Lyonnet P., La maintenance (mathématiques et méthodes), Edition Lavoisier, Paris, 2000.

Malinvaud E., Méthodes statistiques de l'économétrie, Editions Dunod, 1981, Paris.

Mekaouche Lynda , Fouzia Ounnar, Patrick Pujo, Norbert Giambiasi (2009) Another way to manage a supply chain: holonic and multicriteria approach Int. J. Logistics Systems and Management 5: 3/4. 396-417.

Mella Piero, The Holonic Perspective in Organization and Management, Research Report, University of Pavia – Faculty of Economy – Italy, April 2007.

Mella Piero, The Holonic revolution: holons, holarchies and Holonic networks: The ghost in the production machine, Pavia University Press, 2009.

Minoux Michel, Programmation Mathématiques, tome 1, Collection Technique et Scientifique des Télécommunications, Août 1983, France.

Mitsuo Gen & Ruwei Cheng (2000), Genetic Algorithms and Engineering Optimization, John Wiley & Sons, USA.

Monier Jean-Marie, Cours de Mathématiques, Analyse 1 – maths sup, Dunod, Paris, 1994.

Montgomery D. C., Design and Analysis of Experiments, 5th Edition, John Willey and Sons, Inc., 2001.

Mottelet Stéphane, cours d'Optimisation non-linéaire, Université de Compiègne, Réf. RO01/TI07, Printemps 2003.

Nocedal, Numerical optimization, Springer Series in Operational Research, Springer-Verlag, New York, 1999.

Ojha A. K. and Biswa K.K., Posynomial Geometric Programming Problems with Multiple Parameters, Journal of computing, Volume 2, Issue 1, January 2010.

Onwubolu G.C. & Kumalo T. (2001): Optimization of multipasse turning operations with genetic algorithms, *International Journal of Production Research*, 39:16, 3727-3745.

Ounnar F. et Pujo P., Pull control for job shop: Holonic manufacturing system approach using multicriteria decision-making, *Journal of Intelligent Manufacturing*, July 2009.

Ounnar Fouzia , Patrick Pujo, Lynda Mekaouche, Norbert Giambiasi (2009) Integration of a Flat Holonic Form in an HLA Environment, *Journal of Intelligent Manufacturing* 70: 1. 91-111.

Pillet M., Appliquer la maîtrise statistique des procédés MSP/SPC, 3ème édition, Editions d'Organisation, 2002.

Pillet M., les plan d'expériences par la méthode de TAGUCHI, Les Editions d'Organisation, 1er mai 1997.

Procaccia H., Introduction à l'analyse probabiliste des risques industriels, Editions Techniques et Documentations, Lavoisier, Paris, 2009.

Pujo P. 2012. Pilotage isoarchique des systèmes de production Éditions universitaires européennes.

Pujo P., De l'Isoarchie pour le Pilotage des Systèmes de Production, Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III, 2009.

Pujo Patrick et Kieffer Jean-Paul, Fondements du pilotage des systèmes de Production, Traité IC², Hermes Sciences Publications – Editions Lavoisier, 2002, Paris.

Pujo Patrick, Nicolas Broissin, Fouzia Ounnar, PROSIS: An isoarchic structure for HMS control, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 22 (2009) 1034–1045.

Référentiels DUNOD, Pratique des plastiques et composites, les outils de la production (Partie 13), Maîtrise Statistique de la Production (Chapitre 10), Plans d'Expériences (sous-chapitre 12), Décembre 2000.

Reklaitis G., A. Ravindran and K. Ragsdell, *Engineering optimization: Methods and applications*. Wiley, 1983

Robert Paul, Le Petit Robert, Dictionnaire alphabétique et analogique de la Langue Française, Société du Nouveau Littré, Paris, 1978.

Roques Pascal, UML 2 par la pratique. Etudes de cas et exercices corrigés, 5^{ème} édition, Edition Eyrolles, Paris, Septembre 2006.

Rotar Corina, Dan Dumitrescu & Rodica Lung, Optimization using an evolutionary hyperplane guided approach, *Acta Universitatis Apulensis*, N° 12/2006, Romania.

Rouzet G., Courbes d'efficacité de la carte de contrôle par mesure en fonction du pourcentage des pièces défectueuses, *Revue de la statistique appliquée*, tome 5, n°2 1957, p. 19-32.

Sadilek M., J. Dubsky, Z. Sadilkiva, Z. Poruba, (2015) Cutting forces during turning with variable depth of cut, *Perspectives in science*, in press.

Schnell Jakob, Søren Andersen, Gilad Langer, Christian Sørensen, Development of a robot holon using an open modular controller, *Proceeding of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Kohala Coast-Island of Hawai'I, USA, August 22-27, 1999.

Sekkat Souhail, Asmae Abadi, El Moukhtar Zemmouri, Hussein Benazza. Utilisation des ontologies pour satisfaire les exigences d'interopérabilité des systèmes informatiques de Pilotage de production. *Xème Conférence Internationale : Conception et Production Intégrées*, Déc. 2015, Tanger, Maroc.

Shin Y. C. & Joo Y. S. (1992), Optimization of machining conditions with practical constraints, *International Journal of Production Research*, 30:12, 2907-2919.

Singgih Moses Laksono, Holonic Manufacturing System: Current Development and Feature Applications, *Proceeding of the 3rd International Conference on Engineering and Technology Development*, Faculty of Engineering and Faculty of Computer Science, Bandar Lampung University, 2014.

Tembine H., *Distributed Strategic Learning for Wireless Engineers*, CRC Press, Taylor and Francis group, 2012.

Ulieru Mihaela, Scott S. Walker, Robert W. Brennan, *The Holonic Enterprise as a Collaborative Information Ecosystem*, *Proceeding de la rencontre FIPA*, London, 2001.

Van Brussel H. et al., Reference Architecture for Holonic Manufacturing Systems: PROSA, *Computers In Industry*, special issue on intelligent manufacturing systems, Vol. 37, No. 3, pp. 255 - 276, 1998.

Wahdame B. (2006), Analyse et optimisation du fonctionnement de piles à combustible par la méthode des plans d'expériences, *Technological University of Belfort Montbéliard and Franch-Comté University*.

Wang J., T. Kuriyagawa, X. P. Wei and D. M. Guo, Optimization of Cutting Conditions for Single Pass Turning Operations Using a Deterministic Approach, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 42/9 (2002), pp. 1023-1033.

Wilber K., *Sex, Ecology, Spirituality: the spirit of evolution*, Shambhala Publications, 1995.

Zille V., Modélisation et évaluation des stratégies de maintenance complexes sur des systèmes multi-composants, *Thèse de doctorat, partenariat entre l'Université de Technologie*

de Troyes, Institut Charles Delaunay, le département Management de Risques Industriels de la division R&D d'EDF, 2009.

Annexe « Code Newton »

Cet algorithme est utilisé pour résoudre l'équation 17 du chapitre 6.

$f = 0.1:0.02:0.9$ %41 valeurs donc 41 équations à résoudre

for $i=1:41$ % i étant l'indice de la courbe i paramétrée par la variable f_i

$x(1,i)=300$ % valeur initiale de la suite de Newton $x(j,i)$. i étant l'indice de la variable f

% x exprimant la variable V et $x(.,i)$ exprimant la suite de Newton V_i

for $j=1:20$ % j étant l'indice pris par la suite de Newton caractérisant la variable V recherchée

% 20 étant le nombre d'itération maximal

$P(j,i) = x(j,i)^5 + 6.34 \cdot 10^8 \cdot x(j,i) \cdot f(i)^{-0.75} - 2.92 \cdot 10^{11} / f(i)$ % Normalisation des fonctions P

$P_prim(j,i) = 5 \cdot x(j,i)^4 + 6.34 \cdot 10^8 \cdot f(i)^{-0.75}$; % calcul du gradient de la fonction

$x(j+1,i) = x(j,i) - P(j,i) / P_prim(j,i)$;

if ($j > 2$) % $t(i)$: précision calculée pour l'estimation de la convergence de la suite

| $t(i) = (x(j,i) - x(j-1,i)) / (x(j-1,i) - x(j-2,i))$

end

if $t(i) < 0.1$

| break; % précision fixée à 0,1

end

end

$P(j+1,i) = x(j+1,i)^5 + 6.34 \cdot 10^8 \cdot x(j+1,i) \cdot f(i)^{-0.75} - 2.92 \cdot 10^{11} / f(i)^{1.75}$;

end

Annexe « Définition d'un nouveau problème d'optimisation »

Nous proposons dans ce qui suit, la mise en équation d'un nouveau problème d'optimisation-multiobjectif d'une opération de tournage monopasse.

1. Objectif du nouveau problème

L'objectif étant de lier entre deux modèles d'optimisation :

- Le premier proposé dans notre 2^{ème} article « *Correction of the production master plan according to preventive maintenance constraints and equipments degradation state* » (El Jai et al., 2014), où l'on a pu tracer les relations entre cadence de production, période de remplacement systématique et fiabilité des composants ou équipement.

Le modèle proposé dans cet article est général, et requiert par la suite des données initiales pour la mise en œuvre et la simulation relativement au problème d'optimisation en tournage.

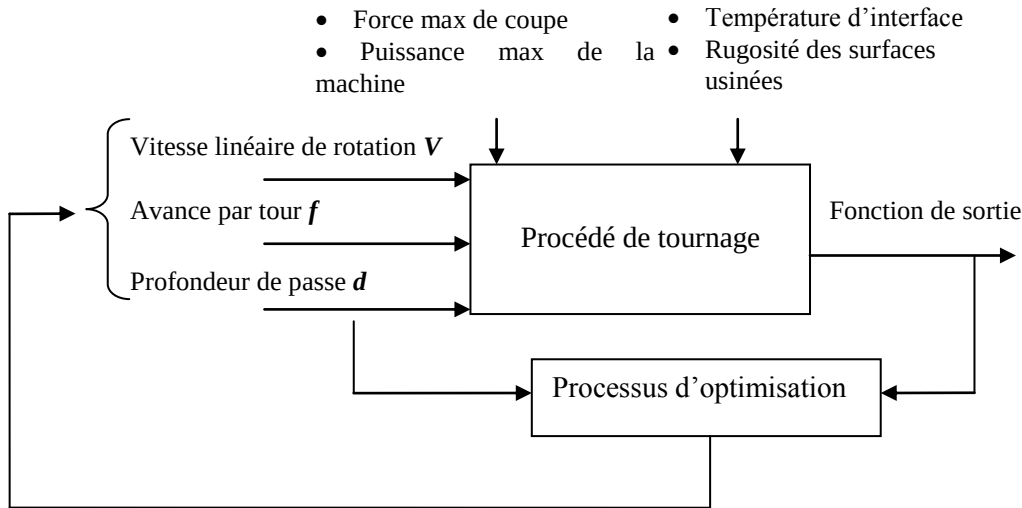
- Le deuxième modèle, traité au chapitre 5, et qui a été analysé par plusieurs travaux (Jabri et al. 2013), (Shin et al., 1992), etc. propose la mise en équation, du problème d'optimisation multiobjectif et multicritère des opérations d'usinage. Les deux articles mentionnés, (Jabri et al. 2013) et (Shin et al., 1992), traitent le cas d'une simple opération de chariotage, comme cela a été vu au chapitre 4 et 5 de ce rapport.

Note

Avant de détailler les équations, je voudrais mentionner que le travail proposé consiste à lier une fois de plus entre **production**, la **qualité** et la **fiabilité** de l'outil de production, en s'appuyant sur les développements mentionnés ci-haut.

2. Mise en équation (voir chapitre 4 pour le détail)

Nous commençons d'abord à définir les variables d'entrée et de sortie du système d'optimisation par des schémas-blocs.



2.1. Paramètres d'entrée

Constituent les paramètres variables à régler afin d'assurer la qualité (rugosité) des produits usinés, les fonctions à optimiser (techniques ou financières) ainsi que les toutes les autres contraintes définies plus haut.

Ces paramètres varient sont données initialement par les bornes supérieure et inférieure :

- Vitesse linéaire relative entre outil de coupe et pièce à usiner :
 $V_{inf} = 50 \text{ m/min}$, $V_{sup} = 500 \text{ m/min}$,
- Avance par tour : $f_{inf} = 0.1 \text{ mm/tr}$, $f_{sup} = 0.9 \text{ mm/tr}$,
- Profondeur de passe : $d_{inf} = 1.0 \text{ mm}$, $d_{sup} = 3.0 \text{ mm}$

2.2. Contraintes du problème

Des contraintes techniques sont prises en considération ; elles concernent :

- Force d'usinage $F(N)$ inférieure à la force ultime :

$$F = K_1 f^\mu d^v \leq F_u \quad (1)$$

- Puissance de la machine inférieure à la puissance ultime de la machine :

$$P = \frac{FV}{6120 \eta} \leq P_u \quad (2)$$

- Température d'interface entre outil et matériau inférieure à une température ultime de contact (contrainte limitant les effets indésirables relativement au domaine de la métallurgie) :

$$Q = K_2 V^\tau f^\phi d^\delta \leq Q_u \quad (3)$$

- Rugosité de la surface usinée (cintraient de qualité) :

$$R = f^2 / 8 R_a \leq SR_u \quad (4)$$

2.3. Fonctions-objectifs

Le problème traité est différent de celui proposé par la bibliographie, car la majorité des travaux proposent l'optimisation de l'opération de tournage sans tenir compte :

- des répercussions à moyen terme ou à long terme de la production en termes de productivité des ateliers (cadence de production en [pièce/unité de temps]) de la fiabilité donc du nombre d'outils dégradé par unité de temps
- et de la production maximale en un intervalle de production donné, noté ici par T.

Ce sont ces critères là que nous intégrons comme de nouvelles fonctions-objectifs à minimiser ou à maximiser.

a) Fonctions à minimiser

- ✓ Coût d'une opération de chariotage (proposée par la bibliographie) :

$$f_1 = C = K_0 \times t_r \quad (5)$$

t_r : étant la durée d'une opération de chariotage exprimée par

$$t_r = \frac{\pi D L (\frac{d_t}{d})}{(1000 \times V \times f)} \quad (6)$$

Avec d_t : profondeur ciblée à usiner

- ✓ Taux d'usage de l'outil de coupe par opération (proposée par la bibliographie) :

$$f_2 = \zeta = t_r / T_r \quad (7)$$

Où T_r : Durée de vie estimée de l'outil exprimée par $T_r = \frac{C_0}{V^p f^q d^r}$ (8)

Avec C_0 , p, q et r sont des constantes de l'équation de la durée de vie

- ✓ Nombre d'outils à utiliser pour un intervalle de production $[t_0, t_0 + T]$ (proposée dans nos travaux) :

$$m = E \left(T / T_r \right) = E \left(T \frac{(V^p f^q d^r)}{C_0} \right) \quad (9)$$

et T : échéancier (période totale) de production

- ✓ Fiabilité des outils de coupe (proposée dans nos travaux) :

Il est connu que la fiabilité est une loi décroissante par rapport au temps, que ce soit pour la loi de Weibull, la loi exponentielle, les lois Gamma en général, etc. De ce fait, maximiser la fiabilité de l'outil de production signifie qu'il faut minimiser les

d'intervention. C'est avec cette donnée que nous essayerons de maximiser la fiabilité $R(t)$.

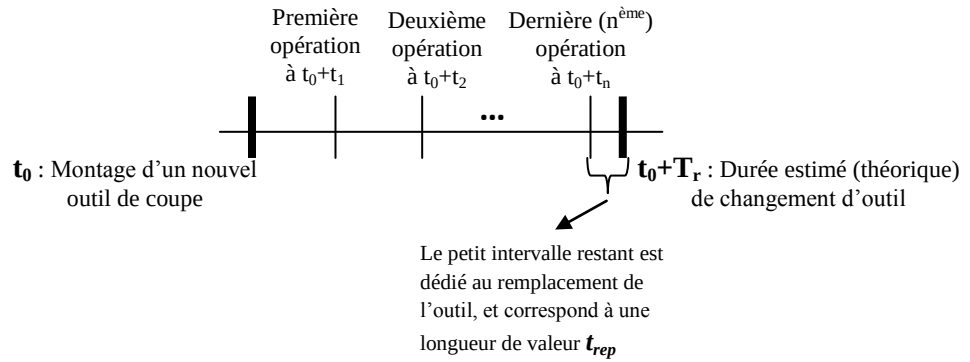
Le temps total (cumul) de production pour un outil de coupe peut être intuitivement exprimé par l'équation (10), et il correspond à la durée d'utilisation de l'outil avant sa dégradation.

$$t = T_r - t_{rep} \quad (10)$$

Où T_r : Durée de vie estimée de l'outil

et t_{rep} : étant la durée de remplacement de l'outil de coupe lorsqu'il est usé, ou durée d'affûtage... (Voir l'axe des temps ci-dessous).

Pour plus d'explication, nous présentons le schéma suivant montrant l'approche adoptée pour le calcul du temps de remplacement systématique en fonction des paramètres d'usinage et de remplacement (MTTR) d'un outil de coupe ; nous comptons donc n opérations d'usinage et après un remplacement de l'outil de coupe.



L'équation (10) s'écrit par la suite :

$$t = n \times t_r \quad (11)$$

Avec n : nombre d'opérations d'usinage effectué par le même outil, exprimé par

$$n = E\left(\frac{T_r - t_{rep}}{t_r}\right) = E\left(\frac{\frac{C_0}{\sqrt{p} f^q d^r} - t_{rep}}{\pi D L \left(\frac{d}{d_t}\right) / (1000 \times V \times f)}\right) \quad (10)$$

Alors l'équation (11) devient

$$t = t_r \times E\left(\frac{T_r - t_{rep}}{t_r}\right) \quad (12)$$

C'est donc ce temps « t » qui doit être minimisé.

b) Fonction à maximiser (proposée dans nos travaux)

Dans le même sens que notre article (El Jai et al., 2014), nous incluons la cadence de production, qui constitue aussi un indicateur de choix d'une politique de maintenance systématique multicritère en liant le temps de remplacement de l'outil de coupe à la cadence de production.

Si l'unité de mesure de la production considère le nombre de pièce à produire, nous pourrions alors écrire la moyenne de production sur un intervalle $[t_0, t_0+T]$ selon l'équation (13).

$$a \times T = m \times n \quad (13)$$

Où a : cadence de production en [pièces/unité de temps]

m : nombre d'outils de coupe consommés dans l'intervalle de production considéré, déjà exprimé par l'équation (9)

n : nombre de pièces produites par cet un outil de coupe

nous trouvons donc l'expression de la cadence de production **a sujette à la maximisation** :

$$a = \frac{1}{T} \times E\left(T \frac{(V^p f^q d^r)}{C_0}\right) \times E\left(\frac{\frac{C_0}{V^p f^q d^r} - t_{rep}}{\pi D L \left(\frac{d}{d_0}\right) / (1000 \cdot V \cdot f)}\right) \quad (14)$$

3. Récapitulations du nouveau problème d'optimisation multiobjectif du problème de tournage monopasse

Le nouveau problème d'optimisation de tournage monopasse prend en compte différentes fonctions-objectifs traitées aux chapitres 4 et 5 (f_1 et f_2), en y ajoutant les autres fonctions que nous proposons dans cette annexe (f_3 , f_4 et f_5).

$$\left\{ \begin{array}{l} Min \left\{ \begin{array}{l} f_1(V, f, d) = C \\ f_2(V, f, d) = \zeta \\ f_3(V, f, d) = m \\ f_4(V, f, d) = t \end{array} \right. \\ Max \left\{ \begin{array}{l} f_5(V, f, d) = a \end{array} \right. \\ S/C : \left\{ \begin{array}{l} F < F_U \\ P < P_U \\ Q < Q_U \\ R < SR_U \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Toutes les fonctions-objectifs sont non linéaires, les fonctions (f_3 , f_4 , f_5) non partout différentiables car discontinues en certains point, relativement aux variables de décision V , f et d , à cause de la présence de la fonction « valeur entière » au sein de ces fonctions.

En conséquence, la recherche de l'optimum devrait se faire par des méthodes non analytiques.