

N° d'ordre : 3941

THÈSE

en vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de Recherche : C.R.M.A.R
Structure de Recherche : A.F.T.O
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse fonctionnelle

Présentée et Soutenue le : 10 /07 / 2024

par :

Abderrahim OUHMIDOU

Caractérisation des algèbres spectralement étoilées

Devant le JURY :

Chafik NACIR,	PES	Ecole Nationale des Arts et Métiers, Université Mohammed V Rabat	Président
Aziz IFZARNE,	PH	École Nationale des Sciences Appliqués Khouribga, Université Sultan Moulay Slimane Benimellal	Rapporteur/Examineur
Lahcen BOUCHIKHI,	PH	École Normale Supérieure Rabat, Université Mohammed V Rabat	Rapporteur/Examineur
Abdelghani SALHI,	PH	École Normale Supérieure Rabat, Université Mohammed V Rabat	Rapporteur/Examineur
Kaissar IDRISSE,		Faculté des Sciences, Université Mohammed V Rabat	Examineur
Abdellah EL KINANI,	PES	École Normale Supérieure Rabat, Université Mohammed V Rabat	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2023 - 24

I

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212 (05) 37 77 18 76 ☎ 00212(05) 37 77 42 61; <http://www.fsr.um5.ac.ma>

Dédicaces :

Merci à Dieu de m'avoir donné le pouvoir d'achever ce travail. Je dedie de tout mon cœur ce travail.

A ma famille qui était toujours présente pour croire en moi, pour m'avoir permis de mener à bien ce rêve et qui à chaque fois m'a fait confiance quand il m'est arrivé de douter.

A ma femme et mes enfants qui m'ont supporté tout au long de la préparation de ce travail.

A mes amis et à mes collègues qui m'ont encouragé pour mener à bien ce travail.

Remerciements :

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été réalisé au sein de l'équipe de l'analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs A.F.T.O de l'école normale supérieure, Université Mohammed V de Rabat, dirigé par le Pr. Abdellah El Kinani. J'adresse ici tous mes remerciements à tous les membres de l'équipe dirigeante.

Mes remerciements sincères et toute ma gratitude vont au Professeur **Abdellah El KINANI**, mon directeur de thèse. Je porte à son égard le plus grand estime pour ce qu'il a toujours été ingénieux et rigoureux à toute épreuve, dans l'humilité spontanée et la bienveillance perspicace. Veuillez trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance et mon grand estime.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur **Chafik NACIR** Professeur de l'Enseignement Supérieur dans l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Rabat, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur **Aziz IFZARNE** Professeur Habilité à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de khourigba, d'avoir accepté d'être membre de jury, et d'être rapporteur de ma thèse.

Mr **Lahcen BOUCHIKHI** Professeur Habilité à l'Ecole Normale Supérieure de Rabat m'honore en acceptant d'être rapporteur et de participer au jury de thèse. Qu'il me permette de lui exprimer mes vifs remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Ma reconnaissance s'adresse à Monsieur **Abdelghani SALHI**, Professeur Habilité à l'Ecole Normale Supérieure de Rabat, en acceptant d'être rapporteur et membre de jury de cette thèse.

Ma reconnaissance et mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur **Kaissar IDRISSE**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'examiner mon travail de thèse.

Résumé

S. Bhatt (1979) a montré que si une algèbre de Banach complexe E , est spectralement convexe (c' est à dire que le spectre de tout élément de l'algèbre est convexe, alors E est presque isomorphe à C , c' est à dire que $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à C , où $\text{Rad}(E)$ désigne le radical de Jacobson de E . Dans le cas involutif, il a obtenu la même conclusion, en supposant que le spectre de tout élément normal de l'algèbre est convexe. Si de plus, l'algèbre est hermitienne et le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors il obtient également que l'algèbre E est presque isomorphe à C . Dans ce travail, nous montrons que plusieurs algèbres ordinaires spectralement convexes sont presque isomorphes à C , c' est le cas, par exemple, pour les algèbres spectralement bornées, les Q -a.l.m.c., les a.l.A.c. advertiblement complètes ordinaires. Nous produisons une étude approfondie des algèbres spectralement convexes à involution généralisée. Plusieurs résultats importants sont également obtenus pour le cas d'une involution anti-morphisme. Nous produisons également une étude approfondie des algèbres spectralement étoilées et ceci dans le cadre tout à fait général des algèbres pseudo-convexes.

Mots-clefs (5) : spectralement convexe, spectralement étoilé, algèbre ordinaire, algèbres advertiblement complète, involution anti-morphisme

Abstract :

S. Bhatt (1979) showed that if a complex Banach algebra E is spectrally convex (i.e. the spectrum of any element of the algebra is convex), then E is almost isomorphic to $\mathbb{C}$, i.e. that is, $E/\text{Rad}(E)$ is isomorphic to $\mathbb{C}$, where $\text{Rad}(E)$ denotes the Jacobson radical of E . In the involutive case, he obtained the same conclusion, assuming that the spectrum of any normal element of the algebra is convex. If furthermore, the algebra is Hermitian and the spectrum of any unitary element is convex, then it also obtains that the algebra E is almost isomorphic to $\mathbb{C}$. In this work, we show that several ordinary spectrally convex algebras are almost isomorphic to $\mathbb{C}$, this is the case, for example, for spectrally bounded algebras, Q-a.l.m.c., ordinary advertibly complete a.l.A.c. We produce an in-depth study of spectrally convex algebras with generalized involution. the case of an anti-morphism involution. We also produce an in-depth study of spectrally star algebras within the very general framework of pseudo-convex algebras.

Keywords (5) : Spectrally convex, Spectrally starred, ordinary algebras, advertibly complete algebras, anti-morphism involution.

Liste des publications :

1. A.ouhmidou et A.El kinani, On spectrally convex ordinary algebras, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Springer, Volume 53(2), 349-354, 2021.
2. A.ouhmidou et A.El kinani, Spectrally starred advertibly complete A-p-normed algebras, Revista Colombiana de matematicas, Volume 57 (1) , 115-122, 2023.
3. A.ouhmidou et A.El kinani, A note on the Gelfand-Mazur theorem, Bollettino dell Unione Matematica Italiana Mars 2024

Liste des Communications :

1. Communication dans the second Meeting of Chafchaouen on Algebras, Functional analysis and Applications les 18 et 19 juin 2021 en présentiel sur : On spectrally starred Q -Normed Algebras.
2. Communication dans les journées scientifiques du LAMA tenues les 20 et 21 mai 2022 à la faculté des sciences université Mohammed V de Rabat, intitulée : On spectrally convex ordinary algebras
3. Communication dans la conférence nationale de mathématiques et applications organisée à la faculté des sciences de Kenitra le 28 mai 2022, intitulée : spectrally starred advertibly complete A_p -normed algebras.
4. Communication dans les journées doctoriales du Cedoc de la faculté des sciences de Rabat tenues du 20 au 25 juillet 2022 intitulée spectrally convex A_p normed algebras
5. Communication intitulée spectrally convex advertibly complete A_p -normed algebras dans la conference nationale de mathematiques et applications organisée à Kenitra le 28/05/2022.
6. Communication intitulée On spectrally stareed ordinary locally p -convex algebras organisée dans les 1er journées nationales de l'analyse complexe et fonctionnelles de la theorie spectrale organisées du 24 au 26 decembre 2022 dans la faculté des sciences d'Eljadida
7. Communication intitulée Spectrally starred locally p -convex algebras dans Fronco-Morocoo mathematic Days organisées du 13 au 16 Mars 2023 dans la faculté des sciences de Tetouan

TABLE DES MATIÈRES

Dédicaces :	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
.	iv
Liste des publications	v
Liste des communications :	vi
Introduction générale :	1
1 Chapitre 1 : Préliminaires	5
1.1 Propriétés algébriques.	6
1.2 Propriétés topologiques	7
1.3 Algèbres de Banach spectralement convexes	9
1.3.1 Cas des algèbres de Banach involutives	12
1.4 Exemples	14
2 Chapitre 2 : Algèbres localement multiplicativement convexes spectralement convexes	21
2.1 Algèbres localement m -convexes, ordinaires et spectralement convexes	24
2.2 Algèbres localement A -convexes ordinaires spectralement convexes .	30
2.2.1 Cas des algèbres localement A -convexes.	30
2.2.2 Cas des algèbres localement uniformément A -convexes . . .	31
2.3 Algèbres ordinaires spectralement convexes à involution généralisée	33
2.3.1 Cas d'une involution d'algèbre	33
2.3.2 Cas d'une involution anti-morphisme	37
3 Chapitre 3 : Algèbres localement multiplicativement p-convexes, avec $(0 < p \leq 1)$, spectralement étoilées	45
3.0.1 Algèbres localement m - p -convexes, ordinaires et spectralement étoilées	46

3.0.2	Algèbres localement A - p -convexes, ($0 < p \leq 1$), ordinaires et spectralement étoilées	48
3.1	Algèbres ordinaires spectralement étoilées à involution généralisée.	50
3.1.1	Cas d'une involution d'algèbre	50
3.1.2	Cas d'une involution anti-morphisme	53
4	Chapitre 4 : Algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées	59
4.1	Algèbres A - p -normées spectralement étoilées	60
4.2	Algèbres A - p normées involutive advertiblement complètes.	62
4.2.1	Cas d'une involution d'algèbre.	62
4.2.2	Algèbres p -Banach involutives hermitiennes	64
4.2.3	Cas d'une involution anti-morphisme	65
4.3	Algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées	67
4.4	Algèbres ordinaires pseudo- <i>pre</i> -Michael spectralement étoilées.	68
4.4.1	Cas d'une involution d'algèbre	71
4.4.2	Cas d'une involution anti-morphisme.	72

Introduction générale :

1

Dans l'étude des propriétés spectrales des algèbres, l'importance des spectres (ponctuel et global) n'est plus à souligner. Ce sont des notions puissantes qui ont fait leurs preuves dans l'étude de la caractérisation de plusieurs types d'algèbres. Dans le cas commutatif, il est bien connu que les questions spectrales se développent encore plus à partir des caractères. Pour le spectre ponctuel, il intervient dans la caractérisation de plusieurs types d'algèbres.

Le spectre global intervient dans la caractérisation de plusieurs notions (spectre ponctuel, idéaux maximaux, radical de Jacobson, etc). Il joue également un rôle essentiel dans les algèbres presque commutatives à cause de l'invariance du spectre modulo le radical de Jacobson. Quant au spectre ponctuel, l'une de ses premières fondamentales propriétés, dans les algèbres de Banach, est qu'il est un compact non vide de $\mathbb{C}$. Ses propriétés algébriques et topologiques (finitude, convexité, étoilé, connexité, etc) interviennent dans la caractérisation de plusieurs types d'algèbres. C'est ainsi le cas pour le théorème de Gelfand-Mazur (algèbres qui sont des corps), le théorème de Kaplansky (algèbres de dimension finies), le théorème des idempotents de Shilov (l'existence des idempotents non triviaux), le théorème S. Bhatt (algèbres spectralement convexes), etc.

S. Bhatt (1979) a montré que si une algèbre de Banach complexe $(E, \| \cdot \|)$ est spectralement convexe (c'est à dire que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$), alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, c'est à dire que $E/Rad(E) \simeq \mathbb{C}$, où $Rad(E)$ désigne le radical de Jacobson de E . Dans le cas involutif, il a obtenu la même conclusion, en supposant que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout élément normal $x \in E$. Si de plus, l'algèbre est hermitienne et $Sp_E(u)$ est convexe, pour tout élément unitaire $u \in E$, alors il obtient également que l'algèbre E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ce travail, nous montrons que plusieurs algèbres ordinaires spectralement convexes sont presque isomorphe à $\mathbb{C}$, c'est le cas, par exemples, pour les algèbres spectralement bornées, les Q -a.l.m.c., les a.l.A.c. advertiblement complètes ordinaires. Nous produisons une étude approfondie des algèbres spectralement convexes à involution généralisée. Plusieurs résultats importants sont également obtenus pour le cas d'une involution anti-morphisme. Nous présentons également une étude approfondie des algèbres spectralement étoilées et ceci dans le cadre tout à fait général des algèbres pseudo-convexes.

Le plan de notre travail est le suivant :

Dans le premier chapitre, considéré comme préalable aux autres chapitres, nous présentons des définitions, des rappels et quelques résultats algébriques et topologiques nécessaires pour la lecture de cette thèse. On expose également des résultats

1. Pour les références de cette introduction, le premier chiffre indique le chapitre et le deuxième renvoie au numéro de la référence dans ce chapitre

qui constituent le point de départ et la motivation essentielle de notre travail. Il s'agit des résultats de S. Bhatt dans les algèbres de Banach spectralement convexes. Dans ce même chapitre, nous présentons divers exemples d'algèbres topologiques, appartenant à des classes différentes, qui nous seront utiles dans ce travail.

Le chapitre 2 traite des algèbres multiplicativement convexes, spectralement convexes. Nous nous intéressons aux résultats précédents de S. Bhatt dans le cadre tout à fait général des algèbres topologiques ordinaires. Nous établissons un résultat purement algébrique selon lequel toute algèbre unitaire E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, si $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Nous montrons ensuite qu'une algèbre ordinaire localement m -convexe, unitaire advertiblement complète et spectralement convexe, est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. On obtient aussi la même conclusion pour les algèbres spectralement bornées. En utilisant le fait que toute Q - $a.l.m.c.$ est spectralement bornée et aussi advertiblement complète, on montre également que toute Q - $a.l.m.c.$ spectralement convexe est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquence, nous obtenons que le résultat de Bhatt donné dans le cas Banach reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre normée. De plus, nous prouvons que l'hypothèse " Q -algèbre" n'est pas superflue.

Nous faisons de même pour les $a.l.A.c.$ et les $a.l.u.A.c.$ advertiblement complètes, ordinaires et spectralement convexes. Nous obtenons pour ces algèbres des résultats qui sont en parallèles avec ceux des $a.l.m.c.$ Nous introduisons une propriété $\mathcal{P}$, purement algébrique, qui intervient dans l'étude des algèbres spectralement convexes. Sans aucune considération topologique, nous montrons que si E est une algèbre complexe unitaire et ordinaire vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et si de plus E est spectralement convexe, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des questions précédentes dans le cas à involution généralisée. Nous montrons que si E est une $a.l.m.c.$ involutive advertiblement complète et ordinaire telle que le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas involutif. Nous faisons de même pour des $a.l.A.c.$ et des $a.l.u.A.c.$ Des résultats analogues aux précédents sont également obtenus pour les $a.l.A.c.$ et les $a.l.u.A.c.$ et ceci sans aucune restriction. Dans le cas hermitien, nous obtenons les analogues de tous les résultats précédents sous l'hypothèse "le spectre de tout élément unitaire est convexe".

Pour des algèbres à anti-morphisme involutif, notre démarche consiste à se ramener au cas d'une involution d'algèbre en montrant que l'algèbre est en fait commutative. On commence par établir un résultat purement algébrique selon lequel toute algèbre réelle unitaire et primitive E , telle que $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$, est nécessairement un corps. Nous montrons que si E est une Q - $a.l.m.c.$ ordinaire, munie d'une involution anti-morphisme, et si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas d'une involution

anti-morphisme. Signalons à ce propos, que dans le cas tout à fait particulier d'une algèbre de Banach unitaire, l'analogue de S. Bhatt est encore valide dans le cas d'une involution anti-morphisme à savoir que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ hermitienne tel que le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$.

Au chapitre 3, nous nous intéressons aux résultats du chapitre précédent dans le cadre tout à fait général des algèbres topologiques localement p -convexes, $0 < p \leq 1$, ordinaires, et ceci dans le cas spectralement étoilé, (c'est à dire que, $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout élément x de l'algèbre E). Nous montrons qu'une algèbre unitaire et ordinaire (ou spectralement bornée) advertiblement complète et spectralement étoilée E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants :

- E est une *a.l.m-p*-convexe, $0 < p \leq 1$,

- E est une *a.l.A.p-c.*, $0 < p \leq 1$,

- E est une *a.l.u.A.p-c.*, $0 < p \leq 1$.

Nous obtenons également des résultats analogues, en remplaçant advertiblement complète par la Q -propriété. Comme conséquence, nous montrons que le résultat de Bhatt reste encore vrai dans le cas d'une Q -algèbre p -normée, $0 < p \leq 1$.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on traite le cas des algèbres à involution généralisée. Nous montrons que si E est *a.l.m.p-c.*, $0 < p \leq 1$, à involution généralisée advertiblement complète et ordinaire telle que le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous obtenons ensuite, dans le cas p -convexe à involution généralisée, des résultats analogues à ceux du chapitre 2.

Au chapitre 4, nous considérons des algèbres pseudo-convexes. Nous généralisons les résultats précédents à cette classe d'algèbres. Nous traitons tout d'abord les algèbres A - p -normées, $0 < p \leq 1$. Nous montrons que toute algèbre $(E, \|\cdot\|_p)$ A - p -normée, ($0 < p \leq 1$), peut être munie d'une p -norme sous-multiplicative $\|\cdot\|'_p$ et que, si $(E, \|\cdot\|_p)$ est advertiblement complète, alors $(E, \|\cdot\|'_p)$ est une algèbre Q - p -normée qui est nécessairement ordinaire. Ensuite, nous prouvons, sous l'hypothèse "spectralement étoilé", que l'algèbre A - p -normée advertiblement complète E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous passons ensuite au cas où l'algèbre est munie d'une involution d'algèbre. En utilisant une généralisation du lemme de Ford (1, [13], (1.2)), et de l'inégalité de Pták (1, [21], (1.3)). Nous montrons que si le spectre de tout élément normal de l'algèbre est étoilé, alors elle est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Dans le cas hermitien, nous obtenons également qu'elle est presque isomorphe à $\mathbb{C}$ dès qu'elle est spectralement étoilée pour des éléments unitaires seulement.

Nous traitons également le cas où l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme. En utilisant un analogue au théorème de Kaplansky (1, [15], Theorem 4.8, p.405), on se ramène au cas de l'involution d'algèbre, en montrant que l'algèbre est en faite commutative. Et on aboutit aussi aux mêmes résultats.

Dans la seconde section, on s'intéresse au cas des algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées et on retrouve les résultats analogues à ceux dans le cas d'une algèbre A - p -normée. On utilise le fait qu'une algèbre pseudo-*pre*-Michael ordinaire et advertiblement complète est à spectre fonctionnel, pour conclure qu'elle est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, dès qu'elle est spectralement étoilée. Les mêmes résultats sont obtenus pour les algèbres localement uniformément A -pseudo-convexes advertiblement complètes. Lorsque E est munie d'une involution d'algèbre, on obtient la même conclusion en supposant seulement que le spectre de tout élément normal est étoilé dans le cas d'une algèbre pseudo-Michael involutive, qui est en plus $*$ spectrale. Pour les algèbres p -Michael hermitiennes $*$ spectrales, il suffit que le spectre de tout élément unitaire soit étoilé pour retrouver le même résultat. Enfin, lorsque l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme, on se ramène au cas précédent à l'aide d'un théorème de Kaplansky qui montre que l'algèbre est en fait commutative. Ce qui permet de retrouver aussi les mêmes résultats.

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1 : PRÉLIMINAIRES

Dans ce premier chapitre, considéré comme préalable aux autres chapitres, nous rappelons dans une première partie quelques résultats algébriques fondamentaux des algèbres complexes. Il s'agit des propriétés algébriques nécessaires pour la lecture de ce travail (spectre ponctuel, rayon spectral, algèbres spectralement bornées, algèbres spectralement convexes et algèbres spectralement étoilées). On présente le spectre global d'une algèbre, les algèbres ordinaires, les algèbres à spectre fonctionnel ainsi que quelques propriétés algébriques importantes du radical de Jacobson.

La deuxième partie est consacrée aux rappels de certaines propriétés des algèbres topologiques. Nous commençons par le cas Banach. On présente les propriétés intéressantes des algèbres involutives et celles des algèbres hermitiennes. On passe ensuite aux algèbres localement convexes et à ses diverses classes (algèbres localement multiplicativement convexes, algèbres localement A-convexes et algèbres localement uniformément A-convexes) tout en rappelant leurs propriétés spectrales.

Dans la troisième partie, on présente quelques résultats qui constituent le point de départ et la motivation essentielle de notre travail. Il s'agit des résultats de S. Bhatt dans les algèbres de Banach spectralement convexes. On établit son premier résultat à savoir que si une algèbre de Banach complexe E est spectralement convexe, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, c'est à dire que $E/Rad(E) \simeq \mathbb{C}$, où $Rad(E)$ désigne le radical de Jacobson de E . On présente ensuite ses deux autres résultats donnés dans le cas involutif où il obtient que l'algèbre en question est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Le premier dans le cas involutif, en supposant l'algèbre spectralement convexe pour les éléments normaux. Quant au deuxième dans le cas hermitien, en supposant l'algèbre spectralement convexe pour les éléments unitaires.

1.1 Propriétés algébriques.

Dans toute la suite, E désigne une $\mathbb{C}$ -algèbre unitaire d'unité e et $G(E)$ son groupe de ses éléments inversibles. Soit $x \in E$. Le spectre d'un élément x , noté $Sp_E(x)$, est défini par :

$$Sp_E(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(E)\}.$$

Le rayon spectral de x , noté $\rho_E(x)$, est donné par :

$$\rho_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_E(x)\}.$$

Une algèbre E est dite :

- 1) spectralement bornée si $Sp_E(x)$ est borné, pour tout $x \in E$.
- 2) spectralment convexe si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$.
- 3) spectralement étoilée, si $Sp_E(x)$ est étoilé par rapport à un de ses points.

Une forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite :

- a) multiplicative (ou caractère) si :

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

L'ensemble de tous les caractères non nuls de E , qu'on note $\mathcal{M}(E)$, est appelé le spectre de Gel'fand de E .

- b) quasi-multiplicative si :

$$f(e) = 1 \text{ et } f(x) \in Sp_E(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

On dit que E est ordinaire, si toute forme quasi-multiplicative sur E est multiplicative.

L'algèbre E est dite à spectre fonctionnel ([1], p.6) si l'ensemble $\mathcal{M}(E)$, des caractères non nuls continus, est non vide et on a :

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Le radical de Jacobson d'une algèbre E , noté $Rad(E)$ est l'intersection des noyaux de toutes les représentations irréductibles de E . L'algèbre E est dite semi-simple si $Rad(E) = \{0\}$ et si $Rad(E) = E$, l'algèbre E est dite radicale.

Si E est une algèbre non radicale, alors $Rad(E)$ est l'intersection de tous les idéaux primitifs de E . C'est aussi l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche (resp. à droite) de E . De plus, on a :

$$Rad(E) = \{x \in E : e + xy \in G(E), \forall y \in E\}.$$

Si l'algèbre est de plus commutative et unitaire d'unité e , alors $Rad(E)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de E .

Soit E une algèbre complexe. Nous dirons que $x \mapsto x^*$ est une involution généralisée sur E si $x \mapsto x^*$ est une involution vectorielle ([4], p. 63) telle que : pour tous $x, y \in E$, $(xy)^* = y^*x^*$ ou pour tout, $x, y \in E$, on a $(xy)^* = x^*y^*$. Dans le premier cas, il s'agit d'une involution d'algèbres. Dans le second, on dira que $x \mapsto x^*$ est une involution anti-morphisme.

L'ensemble des éléments hermitiens (resp., normaux) de E , est noté $\mathcal{H}(E)$ (resp., $\mathcal{N}(E)$). Un élément a de E est dit unitaire si $aa^* = a^*a = e$. L'ensemble des éléments unitaires de E est noté $\mathcal{U}(E)$. L'algèbre E est dite hermitienne si le spectre de tout élément hermitien est réel. Une algèbre E est dite spectrale, si elle peut être munie d'une semi-norme d'algèbre q vérifiant :

$$\rho_E(x) \leq q(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

Si de plus $q(x) = q(x^*)$, l'algèbre E est dite $*$ spectrale.

Soit E une algèbre de Banach complexe unitaire involutive. On désigne par p la fonction de Pták définie dans E , lorsqu'elle existe, par

$$p_E(x) = \rho_E(x^*x)^{1/2}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Le star-radical d'une algèbre involutive E , noté $s\text{-Rad}(E)$, est l'intersection des noyaux de toutes les $*$ -représentations (involutives) irréductibles de E . L'algèbre E est dite $*$ semi-simple si $s\text{-Rad}(E) = \{0\}$.

1.2 Propriétés topologiques

Soit E une algèbre sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que E est une K -algèbre p -normée, $0 < p \leq 1$, s'il existe une p -norme $\| \cdot \|_p$ d'espace vectoriel sur E telle que :

$$\| xy \|_p \leq \| x \|_p \| y \|_p, \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Si de plus, $(E, \| \cdot \|_p)$ est complet (i.e., espace p -Banach), on dit que E est une algèbre p -Banach. Si $p = 1$, alors E est une algèbre de Banach.

Une p -norme d'espace vectoriel est une A - p -normée si, pour tout $x \in E$, il existe $M(x) > 0$ telle que

$$\| xy \|_p \leq M(x) \| y \|_p, \text{ pour tout } y \in E.$$

L'algèbre E est dite A - p -normée si elle est munie d'une A - p -norme $\| \cdot \|_p$. Si $p = 1$, On dit que l'algèbre est A -normée.

Voici quelques résultats importants qui nous seront utiles par la suite :

Théorème 2.1. (Gelfand-Mazur). ([14], Theorem 2.9, p.14). Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach réelle unitaire qui est un corps. Alors E est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{H}$ le corps des quaternions. Si de plus E est complexe, alors elle est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Théorème 2.2. (Gleason Kahane Zelazko) ([14], Theorem 2.1.2, p. 45). Soit E une algèbre de Banach unitaire et ϕ une forme linéaire sur E . Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) ϕ est non nulle et est multiplicative.
- 2) $\phi(e) = 1$ et $\phi(x) \neq 0$, pour tout x inversible dans E .
- 3) $\phi(x) \in Sp_E(x)$, pour tout $x \in E$.

Théorème 2.3. ([21], Theorem 1.3, p.250). Soit E une algèbre de Banach involutive. Si x est un élément normal dans E , alors il existe une sous-algèbre fermée B , commutative, stable par involution, contenant x , tel que

$$Sp_E(y) = Sp_B(y), \text{ pour tout } y \in B.$$

Théorème 2.4. ([4], Theorem 2, p.191). Soit E une algèbre de Banach involutive. Si E est commutative et semi-simple, alors l'involution est continue.

Théorème 2.5. ([21], Theorem 1.5, p.251). Soit E une algèbre de Banach involutive, complexe, unitaire et $h \in \mathcal{H}(E)$. Supposons que $Re\lambda > 0$, pour tout $\lambda \in Sp_E h$. Alors il existe un $u \in \mathcal{H}(E)$ tel que $u^2 = h$ et $hu = uh$. Si de plus $Sp_E(h)$ est positif, alors $Sp_E(u)$ l'est aussi.

Théorème 2.6. ([4], Proposition 14, p.66), Soit E une algèbre de Banach involutive et unitaire. Et soit $h \in \mathcal{H}(E)$ vérifiant $\rho_E(h) < 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ vérifiant : $h = \frac{u+u^*}{2}$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ des éléments unitaires de E engendre E .

Une algèbre E est dite topologique si elle est munie d'une topologie d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparément continu. Si le produit est globalement continu, on dit que l'algèbre est à produit continu. Une algèbre topologique est dite une Q -algèbre, si son groupe $G(E)$ de ses éléments inversibles est un ouvert.

Une algèbre topologique (E, τ) est dite adverbiblement complète, si toute suite de Cauchy $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ dans E , qui converge adverbiblement (c'est à dire, il existe $x \in E$ tel que, les deux suites $(x_\delta x)_{\delta \in \Delta}$ et $(xx_\delta)_{\delta \in \Delta}$ convergent vers x) converge dans E .

Soit (E, τ) une algèbre complexe muni d'une topologie d'espace localement convexe séparé donnée par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. On dit que (E, τ) est une algèbre localement convexe (*a.l.c.* en abrégé), si le produit $(x, y) \mapsto xy$ est séparément continu.

On dit que (E, τ) est une algèbre localement multiplicativement convexe (*a.l.m.c.* en abrégé), si τ est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sous-multiplicatives ; c'est à dire :

$$p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y), \text{ pour tous } x, y \in E \text{ et } \lambda \in \Lambda.$$

Une *a.l.m.c* (E, τ) est dite métrisable si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes sous-multiplicatives. Une *a.l.m.c.* métrisable et complète est appelée algèbre de Fréchet. Une *a.l.m.c.* complète est appelée algèbre d'Arens-Michael.

Une algèbre topologique $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est dite *A-convexe* (*a.l.A-c*) si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(\lambda, x) > 0$ et $N(\lambda, x) > 0$ telle que, pour tout $y \in E$, on a :

$$p_\lambda(xy) \leq M(\lambda, x)p_\lambda(y) \text{ et } p_\lambda(yx) \leq N(\lambda, x)p_\lambda(y).$$

Une *a.l.A-c.* est dite uniformément *A-convexe* (*a.l.u.A-c*) si $M(\lambda, x) = M(x)$ et $N(\lambda, x) = N(x)$ ne dépendent pas de λ .

Toute *a.l.A-c* peut être munie d'une topologie d'*a.l.m.c* plus fine comme le montre ce qui suit :

Théorème ([10], Lemme 3.2, p. 477). Soit (E, τ) une algèbre localement *A-convexe* unitaire d'unité e . Alors (E, τ) peut être munie d'une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe τ' plus fine que τ .

Dans le cas uniformément *A-convexe*, on a le résultat suivant :

Théorème ([18], p. 852) Soit (E, τ) une algèbre localement uniformément *A-convexe* unitaire d'unité e . Alors (E, τ) peut être munie d'une norme d'algèbre τ' plus fine que τ .

1.3 Algèbres de Banach spectralement convexes

L'image numérique $V(x)$ d'un élément x dans une algèbre de Banach complexe $(E, \| \cdot \|)$ unitaire est définie comme suit :

$$V(x) = \{f(x) : f \in E^*, \|f\| = f(1) = 1\}.$$

où E^* désigne le dual algébrique de E .

Dans le cas de certains éléments particuliers à savoir les éléments hermitiens ou les éléments normaux d'une $\mathbb{C}^*$ -algèbre, l'image numérique fournit une approximation convexe du spectre de x comme la fermeture de l'enveloppe convexe de $Sp_E(x)$:

$$V(x) = \overline{\text{conv}(Sp_E(x))},$$

où $\text{conv}(Sp_E(x))$ est l'enveloppe convexe de spectre de x dans E .

Cette approximation a motivé S. Bhatt, dans ([5]) pour donner une caractérisation

spectrale des algèbres de Banach complexes unitaires spectralement convexes. Il a montré que, si E est une algèbre de Banach unitaire, spectralement convexe, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Théorème 3.1. ([5], Theorem 1, p.726). Si E est une algèbre de Banach unitaire complexe, spectralement convexe, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Avant de passer à la preuve de ce théorème, rappelons d'abord le résultat de Zamanek ([25], Théorème 1, p. 191) suivant, qui nous sera utile par la suite :

Théorème 3.2. Soit E est une algèbre de Banach commutative et $N = \{x \in E : \rho(x) = 0\}$ l'ensemble des éléments quasi-nilpotents. Alors on a : $RadE = N$.

En général, on a $RadA \subseteq N$ et Zamanek ([25]), en 1977, a montré que, dans le cas des algèbres de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $Rad(E) = N$.
- ii) $x \in N, y \in N \Rightarrow xy \in N$.
- iii) $x \in N, y \in N \Rightarrow x + y \in N$.

Pour la preuve du Théorème 3.1, S. Bhatt a utilisé le résultat purement algébrique suivant :

Lemme 3.3. Si pour tout $x \in E$, $Sp_E(x)$ est un singleton, alors $RadE = N$.

Preuve : D'après le résultat précédent, il suffit de montrer que, pour tout $x, y \in N$, on a $xy \in N$. On a : $\rho_E(x) = 0$ et $\rho_E(y) = 0$, donc $Sp_E(x) = Sp_E(y) = \{0\}$. Si $Sp_E(xy) \neq \{0\}$ alors xy est inversible dans E et x est inversible à droite dans E . De plus, puisque on a :

$$Sp_E(xy)/\{0\} = Sp_E(yx)/\{0\}$$

([4], proposition 3, p.20) donc $0 \notin Sp_E(yx)$ et x est inversible à gauche dans E donc inversible dans E ce qui contredit le fait que $Sp_E(x) = \{0\}$.

Rappelons qu'une forme linéaire f du dual topologique E' est un état spectral de E si

$$f(a) \in conv(Sp_E(a)), \text{ pour tout } a \in E.$$

Soit $\Omega(E)$ l'ensemble de tous les états spectraux de E . On sait que si E est commutative, alors $\Omega(E)$ est non vide. ([4], §13, p.112)

Preuve du Théorème 3.1 : Soit E une algèbre de Banach spectralement convexe. Supposons tout d'abord que E est semi-simple et commutative, d'après le Théorème de Gleason- Kahane-Zelasko ([4], Theorem 7, p.80) on a :

$$\Omega(E) = \mathcal{M}(E),$$

où $\mathcal{M}(E)$ est l'ensemble des caractères de E . Et puisque $\Omega(E)$ est convexe, $\mathcal{M}(E)$ l'est aussi. Ce qui n'est vrai que lorsque il est réduit à un singleton, et la semi-simplicité de E implique que E est isomorphe à $\mathbb{C}$. Dans le cas général, montrons que :

$$Sp_E(x) \text{ est un singleton, pour tout } x \in E.$$

Considérons la sous algèbre maximale commutative M_x de E contenant x ([4], Theorem 4, p.76). M_x est fermée et par ([4], p.25), on a :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x.$$

Et puisque M_x et $M_x/RadM_x$ sont spectralement convexes et $M_x/RadM_x$ est semi-simple, d'après le premier cas on a :

$$M_x/RadM_x \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

et par suite,

$$\forall y \in M_x, Sp_{M_x}(y) \text{ est un singleton.}$$

en particulier, $Sp_E(x)$ est un singleton. Soit $Sp_E(x) = \{\beta_x\}$, pour tout $x \in E$. Par le lemme précédent, on a

$$RadE = N.$$

Considérons l'algèbre de Banach semi-simple $E_1 = E/RadE$, par ([4]. Proposition 3 p.20) on a :

$$Sp_{E_1}(x + RadE) \subseteq Sp_E(x)$$

et

$$Sp_{E_1}(x + RadE) = \{\beta_x\}, \forall x \in E.$$

Soit $x \in E$ tel que $x \notin RadE$, alors $\beta_x \neq 0$ et $0 \notin Sp_{E_1}(\bar{x})$ et $\bar{x}$ n'est pas inversible dans E_1 , donc E_1 est un corps, et on conclut par le théorème de Gelfand-Mazur.

Remarque 3.4 Du fait que tout voisinage de zéro est absorbant, on peut supposer que le spectre de tout élément de l'algèbre appartenant à un voisinage de zéro est convexe pour retrouver le résultat, c'est à dire : s'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que le spectre de tout élément x de V est convexe, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Il est intéressant de savoir si le résultat reste encore vrai lorsqu'on remplace V par toute partie ouverte non vide de l'algèbre.

Remarques 3.5 : 1) L'assertion du théorème 3.1 ne reste pas vraie dans le cas d'une algèbre normée non complète, en considérant l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des fonctions polynômes dans l'intervalle $[0, 1]$ munie des opérations habituelles et de la norme sup.

2) En prenant E l'algèbre des fonctions réelles continues à valeurs sur l'intervalle $[0, 1]$ munie de la norme sup. C'est une algèbre de Banach réelle, semi simple commutative spectralement convexe mais, elle n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$.

1.3.1 Cas des algèbres de Banach involutives

Dans le cas où l'algèbre de Banach est munie d'une involution, l'auteur a apporté des restrictions sur les éléments de l'algèbre, en supposant seulement que le spectre de tout élément normal de l'algèbre de Banach involutive est convexe pour obtenir le même résultat.

Théorème 3.2. Soit E une algèbre de Banach unitaire involutive complexe. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Pour montrer ce résultat, S. Bhatt a utilisé le lemme suivant. Avant de l'énoncer, rappelons la définition suivante :

Définition 3.3 : On dit qu'une algèbre E possède localement une propriété " $\mathcal{P}$ ", si pour tout $x \in \mathcal{H}(E)$ la sous-algèbre involutive C_h fermée de E engendrée par e et h , possède également la propriété " $\mathcal{P}$ ".

Dans ([11], Théorème 1.1, p. 95), Cuntz a montré que, si une algèbre E est localement une $\mathbb{C}^*$ -algèbre c'est à dire, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$, C_h est topologiquement $*$ isomorphe à une $\mathbb{C}^*$ -algèbre, alors E est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre.

Une conséquence immédiate de ce résultat est donnée par :

Lemme 3.4 . Soit E une algèbre de Banach involutive complexe et unitaire.

- 1) Si E est localement de dimension finie, alors E est de dimension finie.
- 2) Si E est localement isomorphe à $\mathbb{C}$ alors, E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : 1) Si E est localement de dimension finie, alors E est localement une $\mathbb{C}^*$ -algèbre et par le résultat de Cuntz ([8]). E est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre et le spectre de tout élément auto-adjoint de E est fini. Ce qui implique par un résultat de B. Aupetit ([2], Théorème 4, p.486) que E est de dimension finie.

2) Par 1) on a : E est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre de dimension finie, dont le spectre de tout élément auto-adjoint est réduit à un singleton. Et par ([4], Proposition 20, p.67) qui montre que, dans une $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire, tout élément auto-adjoint est hermitien et le lemme 3 de ([4], p.206), qui montre que l'image numérique de tout élément hermitien de l'algèbre est l'enveloppe convexe de son spectre. Ainsi que la proposition 4 de ([4], p.52), qui affirme que l'image numérique est un compact non vide de $\mathbb{C}$, qui est convexe. On déduit que l'image numérique de tout élément de E est un singleton. Et par le résultat ([4], Corollaire 15 p.56.), prouvant que l'ensemble $D(1) = \{f \in A' : \|f\| = f(e) = 1\}$ sépare les points de l'algèbre E , on a E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve du Théorème 3.2 : Pour tout élément normal x de E , considérons la sous-algèbre B_x engendrée par x . Puisque tout élément y de B_x est normal, d'après l'hypothèse du Théorème, l'algèbre B_x est spectralment convexe et on a :

$$B_x/Rad(B_x) \simeq \mathbb{C}.$$

Ce qui implique que $Sp_E x$ est réduit à un singleton pour tout x normal de E . En particulier, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$, $Sp_E h$ est un singleton. Ce qui implique que l'algèbre E est hermitienne et par ([4], §12, p. 65), on a : $Rad E = s\text{-}Rad(E)$. Considérons maintenant l'algèbre $E_1 = E/Rad(E)$ munie de l'involution canonique déduite de celle de E , elle est une algèbre de Banach involutive et semi-simple. Soit $h \in \mathcal{H}(E_1)$, et C_h la sous algèbre fermée de E_1 engendrée par e et h . Puisque E_1 est hermitienne et semi simple, elle est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre munie de la norme auxiliaire de Ptak $p_{E_1} = \rho_{E_1}(xx^*)^{1/2}$. Par suite C_h est aussi une $\mathbb{C}^*$ -algèbre. En particulier, C_h est semi-simple pour tout $h \in \mathcal{H}(E_1)$. C_h est une algèbre de Banach commutative semi-simple unitaire, dont le spectre de tout élément est un singleton, est isomorphe à $\mathbb{C}$ (par le théorème 3-1), on déduit que E_1 est localement isomorphe à $\mathbb{C}$ et par le lemme précédent, on conclut que E_1 est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ceci complète la preuve du Théorème.

Remarque 3.5 : La conjecture tentant de montrer qu'une algèbre de Banach involutive semi-simple, dont le spectre de tout élément auto-adjoint est convexe, est isomorphe à $\mathbb{C}$, n'est pas vraie. En effet, considérons l'algèbre $C[0, 1]$ des fonctions complexes continues sur $[0, 1]$. Elle est une $\mathbb{C}^*$ -algèbre semi-simple non isomorphe à $\mathbb{C}$.

Cependant, on aura le résultat en supposant la convexité du spectre de tout élément unitaire si l'algèbre est hermitienne comme le montre ce qui suit :

Théorème 3.6 ([5], Theorem 6, p.729). Si E est une algèbre de Banach involutive hermitienne dont le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le lemme suivant est une généralisation d'un résultat bien connu dans les $\mathbb{C}^*$ -algèbres :

Lemme 3.7 : Le spectre de tout élément unitaire d'une algèbre de Banach involutive hermitienne est contenu dans le cercle unité.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$, et soit B_u est la sous algèbre maximale commutative involutive contenant u , on a

$$Sp_E(u) = Sp_{B_u}(u) = \{\chi(u) : \chi \in \mathcal{M}(B_u)\}$$

et

$$Sp_{B_u}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in \mathcal{H}(B_u).$$

Et puisque B_u est hermitienne, on a pour tout $\chi \in \mathcal{M}_{B_u}$, on a :

$$1 = \chi(uu^*) = \chi(u)\chi(u^*) = \chi(u)\overline{\chi(u)} = |\chi(u)|^2$$

Preuve du Théorème 3.5 : L'hypothèse du théorème, avec le résultat du lemme précédent, impliquent que le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre doit être réduit à un singleton. Et par suite, le spectre de tout élément auto-adjoint de l'algèbre E est un singleton. Le reste de la preuve sera comme dans le théorème 3.2.

Corollaire 3.8 : Une $\mathbb{C}^*$ -algèbre unitaire dont le spectre de tout élément unitaire est convexe est isomorphe à $\mathbb{C}$.

1.4 Exemples

- (a) Soient K un espace compact et $A = C(K)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur K . On munit A de la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme définie par :

$$\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}, \text{ pour tout } f \in A$$

Alors $(A, \| \cdot \|_\infty)$ est une algèbre de Banach unitaire commutative.

- (b) ([12]) Soit A l'algèbre des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ admettant des dérivées continues dans $[0, 1]$ jusqu'à l'ordre n . On munit A de la norme $\| \cdot \|_p$, définie par :

$$\| f \|_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \sup_{t \in [0, 1]} |f^{(k)}(t)|$$

pour tout $f \in A$. Si $f, g \in A$, on a :

$$\| fg \|_p \leq \| f \|_p \| g \|_p$$

Donc $(A, \| \cdot \|_p)$ est une algèbre normée unitaire commutative. Elle est de Banach si $p = n$.

- (c) ([12]) Soit $A = L^1(\mathbb{R})$ l'espace des classes de fonctions complexes intégrables sur $\mathbb{R}$. On munit A du produit de convolution suivant :

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(s-t)dt \text{ pour tout } f, g \in A$$

et de la norme :

$$\| f \|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \text{ pour tout } f \in A$$

Alors $(A, \| \cdot \|_1)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach commutative non unitaire.

- (d) Si E est un espace de Banach, l'algèbre $A = B(E)$ des opérateurs bornés de E est une algèbre de Banach unitaire non commutative, (si $\dim E \geq 2$).
- (e) Soit $A = (\mathbb{C}[X], \| \cdot \|)$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes, munie de la norme d'algèbre :

$$\left\| \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i \right\| = \sum_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Alors A est une algèbre normée qui n'est pas une $\mathbb{Q}$ -algèbre.

- (f) ([12]) Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. On note $A(D)$ l'algèbre des fonctions complexes définies continues sur D , holomorphes sur l'intérieur de D . Pour toute $f \in A(D)$, on pose :

$$\| f \| = \sup_{z \in D} |f(z)| \text{ et } \| f \|' = \sup_{|z| \leq 1/2} |f(z)|.$$

On a $(A(D), \| \cdot \|)$ est une algèbre de Banach. De plus, on a $\rho_{A(D)}(f) = \| f \|$, pour toute $f \in A(D)$. Par ailleurs, $(A(D), \| \cdot \|')$ est une algèbre normée non $\mathbb{Q}$ -algèbre.

- (g) ([14]) Soit $A = P(D)$ l'espace de Banach des polynômes complexes à valeurs dans le disque unité. Pour $f, g \in A$, on définit la fonction $f \circ g$ sur D par :

$$f \circ g(z) = z \int_0^1 f(z - tz)g(tz)dt$$

On a $f \circ g \in A$. En effet, pour $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ et $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ deux polynômes complexes on a :

$$(p/D \circ q/D)(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k z^{j+k+1} \int_0^1 t^k (1-t)^j dt$$

$(p/D \circ q/D)$ est donc la restriction à D d'un polynôme. Maintenant étant donné $f, g \in A$, $\varepsilon > 0$ et p, q deux polynômes tel que :

$$\| f - p/D \|_{\infty} \leq \varepsilon \text{ et } \| g - q/D \|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Alors, pour tout $z \in D$, on a

$$\begin{aligned} |f \circ g(z) - (p/D \circ q/D)(z)| &\leq \int_0^1 |f(z - tz)g(tz) - p(z - tz)q(tz)|dt \\ &\leq \int_0^1 |g(tz)| |f(z - tz) - p(z - tz)|dt + \int_0^1 |p(z - tz)| |g(tz) - q(tz)|dt \end{aligned}$$

$$\leq \| g \|_{\infty} \| f - p/D \|_{\infty} + \| p/D \|_{\infty} \| g - q/D \|_{\infty} \leq \varepsilon (\| f \|_{\infty} + \| g \|_{\infty} + \varepsilon)$$

Par suite $f \circ g$ est une limite uniforme de fonctions polynômes sur D . Il s'ensuit que $f \circ g \in A$ et que

$$\| f \circ g \|_{\infty} \leq \| f \|_{\infty} \| g \|_{\infty}$$

De plus, d'après la définition de $f \circ g$, la multiplication $(f, g) \mapsto f \circ g$ est commutative, associative et distributive. Par conséquent, A est une algèbre de Banach. D'autre part on montre par induction que :

$$|f^n(z)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \| f \|_{\infty}^n |z|^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit alors que :

$$\rho_A(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\| f \|_{\infty}^n)^{1/n} \leq \| f \|_{\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)^{1/n} = 0$$

Par suite on a : $Sp_A(f) = \{0\}$, pour tout $f \in A$. A ne possède donc pas de caractères non nuls et $A = Rad(A)$.

(h) ([14]) Soit T un opérateur linéaire borné défini sur $C[0, 1]$ par :

$$T(f)(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad f \in C[0, 1] \text{ et } t \in [0, 1].$$

Soit $A = \{\overline{\sum_{i=0}^n a_i T^i}, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$, l'adhérence de l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{i=0}^n a_i T^i$. A est une algèbre de Banach commutative qui ne possède pas d'élément unité. De plus, il est facile de vérifier que :

$$|T^n(f)| \leq \|f\|_{\infty} t^n/n!, \text{ pour tout } t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$$

Par suite $\|T^n(f)\|_{\infty} \leq \frac{1}{n!} \|f\|_{\infty}$ ce qui entraîne que

$$\rho_A(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

L'algèbre A est commutative, donc le rayon spectral est sous-additif et sous-multiplicatif. Par conséquent, on a :

$$\rho_A(f) = 0, \text{ pour tout } f \in A.$$

Il s'ensuit que $Sp_A(f) = \{0\}$, pour tout $f \in A$. Ainsi A ne possède pas de caractères non nuls. De plus $A = Rad(A)$.

(i) Pour $0 < p \leq 1$, posons :

$$l_p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$$

Alors l_p est une algèbre p -Banach complexe pour la p -norme et le produit suivants :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x \in l_p$$

et

$$(x_n)_n * (y_n)_n = (t_n)_n, \text{ avec } t_n = \sum_{|k| \leq n} x_k y_{n-k}, \text{ pour tous } x, y \in l_p$$

(j) Plus généralement, si $(w_n)_n \in \mathbb{C}$ est une suite de nombres positifs vérifiant $w_{n+k} \leq w_n w_k$, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $w_0 = 1$, alors l'algèbre

$$A = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n |x_n|^p < \infty\}$$

est une algèbre p -Banach.

(k) ([27]) Toute algèbre p -normée, ($0 < p \leq 1$), est A - p -normée.

(l) Soient $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre A -normée non normée et $p \in [0, 1]$. En posant $\|x\|_p = \|x\|^p$, pour tout $x \in E$, l'algèbre $(E, \|\cdot\|_p)$ est A - p normée non p -normée.

- (m) ([6], p.91) Soit W_p , $0 < p \leq 1$, l'algèbre des séries $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ définies sur le cercle unité, telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$. On considère $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement positive et décroissante et on pose :

$$\|\phi\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |a_n|^p, \quad \phi \in W_p$$

Il est clair que $\|\cdot\|_p$ est une p -norme d'espace vectoriel telle que

$$\|\phi \cdot \psi\|_p \leq M(\phi) \|\psi\|_p, \quad \text{pour tout } \phi, \psi \in W_p,$$

où $M(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p$. Ainsi $(W_p)_p$ est une algèbre A - p -normée qui n'est pas localement convexe.

- (n) ([7], p.153) Soit E l'algèbre des fonctions complexes f , mesurables sur $[0, 1]$, de la forme : $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi(A_i)$, $n \in \mathbb{N}$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de $[0, 1]$ telle que $mes(A_i) > 0$ pour tout $i \in 1, \dots, n$ et χ_{A_i} est la fonction indicatrice de A_i . On munit E de la p -norme d'espace vectoriel $\|\cdot\|_p$, $0 < p \leq 1$, définie, pour tout $f \in E$ par :

$$\|f\|_p = \int_{[0,1]} |f(t)|^p dt$$

Pour $f \in E$, posons $M(f) = \max\{|\lambda_i|^p, : 0 \leq i \leq 1\}$. On a :

$$\|f \cdot g\|_p \leq M(f) \cdot \|g\|_p, \quad \text{pour tout } g \in E.$$

Ainsi $(E, \|\cdot\|_p)$ est une algèbre A - p -normée, qui n'est pas A -normée, car il n'est pas localement convexe.

- (o) ([7]) Soit $A = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'algèbre des suites complexes nulles à partir d'un certain rang. Considérons $(\alpha_n)_n$ une suite strictement positive bornée et $|\cdot|_p$ la p -norme donnée par :

$$|x|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p$$

où $x = (x_n)_{n \geq 1} \in A$. Si on pose : $M(x) = \sup\{|x_n|^p : n \geq 1\}$, alors

$$|x \cdot y|_p \leq M(x) |y|_p, \quad \text{pour tout } y \in A$$

Ainsi $(A, |\cdot|_p)$ est une algèbre A - p -normée qui n'est pas localement convexe et qui n'est pas complète.

- (p) ([12]) $(\mathbb{C}[[X]], (p_n)_{n \geq 0})$ l'algèbre des séries formelles munie de la famille de semi-normes sous-multiplicatives définies par :

$$p_n\left(\sum_{i \geq 0} a_i X^i\right) = \sum_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

Alors $(\mathbb{C}[[X]], (p_n)_{n \geq 0})$ est une algèbre m -convexe métrisable complète qui est une Q -algèbre.

- (q) L'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, munie de la topologie produit est m -convexe métrisable complète qui n'est pas une Q -algèbre.
- (r) ([12]) $H(\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions complexes définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$, est une algèbre m -convexe métrisable complète qui n'est pas une Q -algèbre.
- (s) ([12]) L'algèbre $(C_{\mathbb{C}}^{\infty}[0, 1], (p_n)_{n \geq 1})$ des fonctions complexes définies sur $[0, 1]$, indéfiniment dérivables, munie de la famille des semi-normes sous-multiplicatives $(p_n)_{n \geq 1}$ où

$$p_n(f) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(k)}(x)|, \text{ pour tout } f \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}[0, 1]$$

C'est une algèbre m -convexe métrisable complète qui est une Q -algèbre.

- (t) $\mathbb{C}(X)$ l'algèbre des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients complexes, munie de la topologie de Williamson, ([19]), est une algèbre topologique localement convexe, métrisable non complète, à produit continu et qui est une Q -algèbre.
- (u) ([7], Exemple 3, p.20) Soient $E = C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues et bornées de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la topologie définie par la famille de semi-normes, $(p_{\phi})_{\phi \in C_b^0(\mathbb{R})}$. $C_b^0(\mathbb{R})$ étant l'algèbre des fonctions $\phi \in E$ tendant vers 0 à l'infini, définies par :

$$p_{\phi}(f) = \sup\{|\phi(x)||f(x)| : x \in \mathbb{C}\}$$

$C_b^0(\mathbb{C})$ est une $a.l.u.A$ -convexe qui n'est pas m -convexe.

- (v) Soit $C(\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. On la munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$. C'est une $a.l.m.c$ qui n'est pas uniformément A -convexe.
- (w) ([9]) Si on considère l'algèbre produit $C_b(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R})$ munit de la topologie produit. On obtient une $a.l.A$ -convexe qui n'est ni m -convexe ni uniformément A -convexe.
- (x) ([10]) Soit E une algèbre de Banach commutative et sans ordre, c'est à dire, si $x.E = 0$ alors $x = 0$ où $x.E = x.y : y \in E$. Considérons $M(E)$ l'algèbre des multiplicateurs de E , c'est à dire, l'espace des applications linéaires $T : E \rightarrow E$ telle que : $T(x.y) = x.T(y) = T(x).y$, pour tout $x, y \in E$. On munit $M(E)$ de la topologie définie par la famille $(p_x)_{x \in E}$ avec $p_x(T) = \|T.x\|$, $T \in M(E)$. $M(E)$ est une $a.l.u.A$ -convexe, qui n'est pas m -convexe en général.

Bibliographie :

- [1] M. Abel : Advertive topological algebras. Institute of Pure Mathematics, University of Tartu 46 Vanemuise Str. 232, 51014 Tartu, ESTONIA (2001).
- [2] B. Aupetit. On scarcity of operators with finite spectrum. Bull. Am. math. Soc., 83 (3) 485-86.
- [3] R.Arens, The space L^w and convex topological rings . Bull.Amer. Math. Soc.52, (1946). 931-935.
- [4] F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.Springer-Verlag,NewYork-Heidelberg, 1973
- [5] S. Bhatt. Spectrally convex Banach algebras. Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979),no.6,
- [6] M. Chahboun, A. El kinani, Convexifiée d'une topologie d'algèbre A-p-normée. Fonctions et Approximatio XXIX (2001) (89-97)
- [7] M. Chahboun, A. El kinani, M. Oudadess. Algèbres A-p-normées advertiblement complètes. Bull. Belg. Math. Soc. 7 (2000), 277-284
- [8] M. Chahboun, A. El kinani, M. Oudadess. Les algèbres A-F-normées advertiblement complètes Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo Serie II, Tomo XLIX (2000), pp. 151-162
- [9] A. C. Cochran. Representation of A-convex algebras.Proc. Amer. Math.Soc., 41, (1973), 473-479.
- [10] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, On a class of topological algebras. Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [11] J. Cuntz,(1976). Locally $\mathbb{C}^*$ -equivalent algebras. J. Functional Analysis, 23(2), 95-107
- [12] M. Fragoulopoulou, Topological algebras with involution.North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam,2005.
- [13] J. Ford. A square root lemma for Banach star-algebra, J. London Math. Soc.,42(1967);521-522.
- [14] E. Kaniuth A course in commutative Banach Algebras Springer Graduate Texts in Mathematics 246.
- [15] I. Kaplansky. Normed algebras. Duke Math. J.16 (1949), 399-418.
- [16] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics.North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [17] E. A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
- [18] M. Oudadess. Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes. C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 296 (1983), pp. 851-853. A.
- [19] M. Oudadess. Quelques exemples d'algèbres A-convexes. Revista Colombiana de Matematicas Volumen 29 (1995), paginas 31-41
- [20] A. Ouhmidou, A. El Kinani, On Spectrally convex ordinary algebras.Indian J. Pure Appl. Appl. Math; Springer, vol. 53(2), pages 349-354, (2021)

- [21] V. Ptak, Banach algebras with involution . Manuscripta Math.6(1972), 245-290
- [22] M. Roitman, Y. Sternfeld, When is a linear functional multiplicative? Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.
- [23] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Duke Math. J. 23 (1956), 1-11.
- [24] J. H. Williamson. On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734
- [25] J. Zamanek, (1977). A note on the radical of a Banach algebra. Manuscripta Math., 20,191-96
- [26] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras algebras. Lecture note series 31 (1971).
- [27] W. Zelazko, On the locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. t. XIX, pp. 333-355.

CHAPITRE 2

CHAPITRE 2 : ALGÈBRES LOCALEMENT MULTIPLICATIVEMENT CONVEXES SPECTRALEMENT CONVEXES

Introduction

Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach unitaire. Dans ([2], Theorem 1, p. 726), S. Bhatt a montré que si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Dans le cas involutif, il a obtenu la même conclusion ([2], Theorem 4, p. 728), en supposant que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout élément normal $x \in E$. Si de plus, l'algèbre $(E, \| \cdot \|)$ est hermitienne et $Sp_E(u)$ est convexe, pour tout élément unitaire $u \in E$, alors il obtient également ([2], Theorem 6, p. 729), que $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux résultats précédents dans le cadre tout à fait général des algèbres topologiques ordinaires. Nous commençons par établir un résultat purement algébrique (Proposition 1.1) qui nous dit que si E est une algèbre unitaire d'élément unité e , telle que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$, alors :

- 1) $Rad(E) = \{x \in E : \rho(x) = 0\}$,
- 2) $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Nous montrons, par deux exemples, que si $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$, alors E n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$. Le premier exemple (Exemple 1.4) montre que l'unitisée $E = L^1([0, 1])^\#$, de l'algèbre convolutive radicale $L^1([0, 1])$, de dimension infinie et est telle que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Dans le deuxième exemple (Exemple 1.5), il s'agit de l'algèbre de Banach $(\widehat{\mathbb{C}[[X]]}, \| \cdot \|)$, complétée de l'algèbre normée des séries formelles $(\mathbb{C}[[X]], \| \cdot \|)$, où $\| \cdot \|$ est la norme donnée dans ([1]). L'algèbre $\widehat{\mathbb{C}[[X]]}$ est de dimension infinie, alors que le spectre de tout élément est réduit à un singleton.

Nous passons ensuite au cas topologique. Nous montrons (Théorème 1.6) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une algèbre ordinaire localement m -convexe, unitaire advertiblement complète et spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Il est bien connu que toute algèbre spectralement bornée est nécessairement ordinaire. Ainsi, on obtient (Corollaire 1.7) la même conclusion du théorème 1.6, précédent en remplaçant "ordinaire" par "spectralement bornée". Par ailleurs, d'après ([13], Proposition 10, p. 123), les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $Sp_E(x)$ est borné, pour tout $x \in E$.
- ii) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$.
- iii) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$.

Dans une *a.l.m.c.* unitaire, advertiblement complète et spectralement convexe E , on obtient deux autres conséquences importantes. La première est que si $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (Corollaire 1.8). Quant à la deuxième, si $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (Corollaire 1.9). Nous montrons (Proposition 1.10) que l'hypothèse spectralement convexe de l'algèbre, c'est à dire $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$, peut être remplacée par " $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout x d'un voisinage de zéro dans l'algèbre E ". En utilisant le fait que toute *Q-a.l.m.c.* est spectralement bornée (en fait le spectre de tout élément est compact). De plus elle est aussi advertiblement complète ([14]), on obtient également (Corollaire 1.11) que toute *Q-a.l.m.c.* spectralement convexe est isomorphe à $\mathbb{C}$ modulo son radical de Jacobson.

Nous montrons que le résultat de Bhatt ([2], Theorem 1, p. 726) donné dans le cas Banach reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre normée (Corollaire 1.12). De plus, nous prouvons (Remarque 1.13) que l'hypothèse " Q -algèbre" n'est pas superflue. Puis, comme illustration, nous obtenons que l'image d'un convexe par une fonction continue n'est pas nécessairement convexe (Remarque 1.15). Signalons que, pour le cas réel, le résultat du corollaire 1.13, ne reste plus valable (Remarque 1.17). En fait, l'algèbre de Banach réelle $(C_{\mathbb{R}}([0, 1]), \| \cdot \|)$, des fonctions réelles continues de $[0, 1]$, munie de la norme de la convergence uniforme, est semi-simple, spectralement convexe de dimension infinie.

Nous faisons de même pour les *a.l.A.c.* advertiblement complètes, ordinaires et spectralement convexes. Nous montrons (Proposition 2.1.1) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une *a.l.A.c.* ordinaire, advertiblement complète et spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons (Corollaire 2.1.2) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une *a.l.A.c.*, unitaire, advertiblement complète et spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ dans le cas où $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$. Nous obtenons (Corollaire 2.1.3) également la même conclusion si $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$. De plus, comme dans le cas m -convexe, on montre (Corollaire 2.1.4), que nos résultats restent valables avec l'hypothèse " $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout x d'un voisinage de zéro dans l'algèbre E ". On établit (Corollaire 2.1.5) aussi que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une *Q-a.l.A.c.* spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Nous obtenons pour les *a.l.u.A.c.*, des résultats qui sont en parallèles avec ceux des *a.l.A.c.* Soit (E, τ) une *a.l.u.A.c.* unitaire. On sait, d'après ([10]), qu'il existe une norme d'algèbre sur E plus fine que τ . Si (E, τ) est ordinaire et spectralement convexe, on montre que $(E, \|\cdot\|)$ est également ordinaire et spectralement convexe. De plus si (E, τ) est advertiblement complète, alors que $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre. Ainsi, on obtient (Proposition 2.2.1) que si (E, τ) est une *a.l.u.A.c.* ordinaire, advertiblement complète et spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Nous introduisons une propriété, purement algébrique (Définition 2.2.2), qui intervient dans l'étude des algèbres spectralement convexes. On dit qu'une algèbre unitaire E , vérifie la propriété $\mathcal{P}$, si pour tout $x \in E$, il existe une sous algèbre maximale C_x de E contenant x et e , satisfaisant les deux conditions suivantes :

a) $\mathcal{M}(C_x) \neq \emptyset$ et b) $Sp_{C_x}(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(C_x)\}$, pour tout $y \in C_x$,

où $\mathcal{M}(C_x)$ désigne l'ensemble des caractères non nuls de C_x .

Avec les conditions algébriques précédentes et sans aucune considération topologique, nous montrons (Proposition 2.2.3) que si E une algèbre complexe unitaire et ordinaire vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et si de plus E est spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous obtenons comme conséquences que si (E, τ) est une B_0 -algèbre (ou plus généralement une *a.l.A.c.*), ordinaire et advertiblement complète et si plus E est spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (Corollaire 2.2.4). Pour une B_0 -algèbre ordinaire (E, τ) , on montre (Corollaire 2.2.5) que $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ dès qu'elle est spectralement convexe.

Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à l'étude des questions précédentes dans le cas à involution généralisée. On commence d'abord par le cas d'une involution d'algèbre. Nous montrons (Théorème 3.1.1) que si E est une *a.l.m.c.* involutive advertiblement complète et ordinaire telle que le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas involutif et ceci sans restrictions aucune (Corollaire 3.1.2, Corollaire 3.1.3, Corollaire 3.1.4, Corollaire 3.1.5, Corollaire 3.1.6).

Nous examinons ensuite le cas d'une involution $*$ -spectrale. Nous montrons (Corollaire 3.1.7) que si (E, τ) est une *a.l.m.c.*, involutive et $*$ -spectrale tel que le spectre de tout élément normal est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous faisons de même pour des *a.l.A.c.* (Proposition 3.1.8) et des *a.l.u.A.c.*. Des résultats analogues aux précédents sont également obtenus et ceci sans restrictions aucune. Dans le cas hermitien, nous obtenons les analogues de tous les résultats précédents sous l'hypothèse " le spectre de tout élément unitaire est convexe." Nous montrons (Proposition 3.1.13) que dans une *a.l.m.c.* complète unitaire, munie d'une involution d'algèbre, l'ensemble des éléments unitaires engendre l'algèbre toute entière. Si de plus, l'algèbre est ordinaire et hermitienne, alors elle est isomorphe à $\mathbb{C}$, modulo son radical de Jacobson, si le spectre de tout élément

unitaire est convexe (Proposition 3.1.14). Comme conséquence, nous obtenons la même conclusion (Corollaire 3.1.15) dans le cas $*$ -spectral ainsi que le résultat de S. Bhatt ([2], Theorem 6, p. 729).

La deuxième partie de ce paragraphe traite des algèbres à anti-morphisme involutif. Ici, notre démarche consiste à se ramener au cas d'une involution d'algèbre en montrant que l'algèbre est en fait commutative, par un résultat analogue au théorème de Kaplansky ([7], Theorem 1). On commence par établir un résultat purement algébrique, (Proposition 3.2.19) selon lequel toute algèbre réelle unitaire et primitive E telle que $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$, est nécessairement un corps. Nous obtenons (Proposition 3.2.2) ensuite l'analogue d'un résultat de Kaplansky dans le cadre des Q -a.l.m.c. unitaires semi-simples, ainsi que l'analogue d'un résultat de Civin Yood pour une involution anti-morphisme (Proposition 3.2.3). Nous obtenons (Théorème 3.2.14) que si E une Q -a.l.m.c. ordinaire, munie d'une involution anti-morphisme, et si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas d'une involution anti-morphisme. Signalons que dans le cas tout à fait particulier d'une algèbre de Banach unitaire, l'analogue de ([2], Theorem 6, p. 229) de S. Bhatt est encore valide dans le cas d'une involution anti-morphisme, à savoir que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ hermitienne tel que le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (Corollaire 3.3.19).

2.1 Algèbres localement m -convexes, ordinaires et spectralement convexes

Soit E une algèbre complexe unitaire, d'élément unité e . Si le spectre de tout élément est réduit à un singleton. Alors le radical de Jacobson coïncide avec l'ensemble des éléments quasi-nilpotents. De plus $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ comme le montre le résultat suivant :

Proposition 1.1. Soit E une algèbre unitaire, d'élément unité e , telle que $Sp_E(x)$ est un singleton pour tout $x \in E$. Alors :

- (a) $\text{Rad}(E) = \{x \in E : \rho_E(x) = 0\}$.
- (b) $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : 1) Remarquons tout d'abord que :

$$\text{Rad}(E) = \{a \in E : \rho(ab) = 0, \text{ pour tout } b \in E\}$$

et que

$$\text{Rad}(E) \subset \{x \in E : \rho(x) = 0\}$$

est toujours vraie ([3]). Il reste à montrer l'autre inclusion. Soit $x \in E$ tel que $\rho(x) = 0$ et montrons que $x \in \text{Rad}(E)$, ou encore que $\rho(xy) = 0$, pour tout $y \in E$.

Pour ce faire, on distingue deux cas selon que y est inversible ou non.

-Si y est inversible, alors xy est non inversible car x est non inversible. Comme $Sp_E(xy)$ est réduit à un singleton, on a $Sp_E(xy) = 0$. Et par suite $\rho(xy) = 0$ et donc $x \in Rad(E)$.

-Si y est non inversible, alors $Sp_E(y) = 0$. Par conséquent $Sp_E(xy) = \{0\}$ car sinon $Sp_E(xy) \neq \{0\}$. Donc $0 \notin Sp_E(xy)$. Il s'ensuit que xy est inversible dans E et donc x est inversible à droite. Et comme

$$Sp_E(xy)/\{0\} = Sp_E(yx)/\{0\}$$

vu que $Sp_E(xy) \cup \{0\} = Sp_E(yx) \cup \{0\}$ on a $0 \notin Sp_E(yx)$ et donc x inversible à gauche, ce qui n'est pas le cas puisque $Sp_E(x) = \{0\}$. Il s'ensuit que $Sp_E(xy) = \{0\}$, et donc $\rho(xy) = 0$. D'où $x \in Rad(E)$. Ainsi

$$Rad(E) = \{x \in E : \rho(x) = 0\}$$

2) Montrons maintenant que $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Posons $B = E/Rad(E)$ et considérons la surjection canonique $s : E \rightarrow E/Rad(E)$. Alors B est semi-simple et on a :

$$Sp_E(x) = Sp_B(s(x)), \text{ pour tout } x \in E$$

Soit $a \in E$. Alors $Sp_B(s(a))$ est réduit à un singleton α_a . Il s'ensuit que $Sp_E(a - \alpha_a e) = 0$. Donc $\rho(a - \alpha_a e) = 0$. Par 1), on a $a - \alpha_a e \in Rad(E)$. D'où $s(a) = \alpha_a s(e)$, et ceci pour tout $a \in E$. Donc $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 1.2. On peut voir autrement que si E est une algèbre unitaire d'élément unité e , telle que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. En effet, l'hypothèse faite sur E montre que E a seulement un idéal maximal à gauche. En effet soit M et M' deux idéaux maximaux à gauche distincts de E . Alors $M + M' = E$. Soit $m \in M$ et $m' \in M'$ tel que $m + m' = e$. Il s'ensuit que $m' = e - m$ est non inversible. Donc $1 \in Sp_E(m)$. Par ailleurs, m est non inversible, donc $0 \in Sp_E(m)$. Ainsi $Sp_E(m)$ contient au moins deux points, ce qui contredit l'hypothèse. Soit maintenant M l'unique idéal maximal à gauche de E , qui est nécessairement l'unique idéal maximal à droite de E . Alors $Rad(E) = M$. Soit $x \in E$ et $\lambda \in Sp_E(m)$. Alors $x - \lambda e$ est non inversible. Donc $x - \lambda e \in M$. Ainsi M est de codimension 1 i.e. E/M est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme $Rad(E) = M$, on a : $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit E une algèbre unitaire d'élément unité e telle que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Alors, on n'a pas nécessairement E est isomorphe à $\mathbb{C}$. comme le montre les deux exemples suivants :

Exemple 1.3. Considérons l'algèbre $L^1[0, 1]$, où la multiplication est le produit de convolution et soit E son unitisée. Il est bien connu que $L^1[0, 1]$ est radicale ([1]) donc $Rad(E) = L^1[0, 1]$. On voit alors que $E/Rad(E) \simeq \mathbb{C}$, cependant E est de dimension infinie.

Exemple 1.4. Soit $\mathbb{C}[[X]]$ l'algèbre des séries formelles. D'après ([1]), il existe

une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}[[X]]$. Notons $\widehat{\mathbb{C}[[X]]}$ l'algèbre de Banach complétée de l'algèbre normée $(\mathbb{C}[[X]], \|\cdot\|)$. On sait que $\mathbb{C}[[X]]$ admet un seul caractère (non nul) ([15]), c'est le caractère χ défini par :

$$\chi(x) = x(0), x \in \mathbb{C}[[X]]$$

Notons que ce caractère est nécessairement continu. La complétée $\widehat{\mathbb{C}[[X]]}$, de $\mathbb{C}[[X]]$, possède également un seul caractère, c'est le prolongement continu $\widehat{\chi}$ du caractère χ . Ainsi,

$$Rad(\widehat{\mathbb{C}[[X]]}) = ker \widehat{\chi}.$$

On voit alors que

$$\widehat{\mathbb{C}[[X]]}/Rad(\widehat{\mathbb{C}[[X]])} \simeq \mathbb{C}.$$

Cependant $\widehat{\mathbb{C}[[X]]}$ est de dimension infinie.

Soit E une *a.l.m.c.* commutative unitaire et complète. Alors, d'après ([9], Theorem 5, 4, p. 19), l'algèbre E est nécessairement à spectre global fonctionnel c'est à dire, que :

$$Sp_E(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}, \text{ pour tout } y \in E$$

où $\mathcal{M}(E)$ désigne l'ensemble des caractères continus de E . De plus, Mallios ([8]) a montré que dans une *a.l.m.c.* commutative unitaire, cette dernière propriété est équivalente à l'advertisibilité complétée de l'algèbre E .

Ce résultat nous permet de décrire la structure des *a.l.m.c.* ordinaires advertiblement complètes et spectralement convexes. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.6. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire advertiblement complète et spectralement convexe. Si E est ordinaire, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$. Comme

$$Sp_E(x) = Sp_{E/Rad(E)}(s(x)), \text{ pour tout } x \in E$$

où $s : E \rightarrow E/Rad(E)$ est la surjection canonique, on peut donc se ramener au cas semi-simple. De plus, comme toute *a.l.m.c.* commutative, unitaire et advertiblement complète est nécessairement à spectre global localement fonctionnel, on peut également se ramener au cas commutatif. Ainsi, notre preuve est divisée en deux étapes. Dans une première étape, on suppose que l'algèbre E est commutative et semi simple. Puis, dans une deuxième étape, on traite le cas général.

Première étape : On suppose que l'algèbre E est commutative et semi simple. Montrons que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Puis, on conclut par la Proposition 1.1. L'algèbre E étant advertiblement complète, donc, par ([14]), on a :

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}$$

Supposons que $Sp_E(x)$ possède au moins deux points distincts λ_1 et λ_2 . Alors il existe deux éléments χ_1 et χ_2 de $\mathcal{M}(E)$ tels que $\lambda_1 = \chi_1(x)$ et $\lambda_2 = \chi_2(x)$. Soit $0 < \alpha \leq 1$. Alors, comme $Sp_E(x)$ est convexe, on a :

$$\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2 = \alpha\chi_1(x) + (1 - \alpha)\chi_2(x) \in Sp_E(x)$$

Soit maintenant $f = \alpha\chi_1 + (1 - \alpha)\chi_2$. Il est clair que f est une forme linéaire sur E telle que

$$f(x) = (\alpha\chi_1 + (1 - \alpha)\chi_2)(x) \in Sp_E(x)$$

L'algèbre étant ordinaire, donc

$$\alpha\chi_1 + (1 - \alpha)\chi_2 \in \mathcal{M}(E)$$

Ce qui n'est pas le cas. En effet, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, par exemple, on n'a pas $f(x^2) = f(x)^2$ car sinon, on aura :

$$\frac{\chi_1(x)^2 + \chi_2(x)^2}{2} = \left(\frac{\chi_1(x) + \chi_2(x)}{2} \right)^2$$

Donc

$$\frac{\chi_1(x)^2 + \chi_2(x)^2}{2} = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x)$$

Et par suite, $\chi_1(x) = \chi_2(x)$, ce qui n'est pas le cas vu que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ainsi $Sp_E(x)$ est nécessairement réduit à un singleton. D'où, par la proposition 1.1, $E = E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Deuxième étape : On traite maintenant le cas général. Soit $x \in E$ et C_x la sous-algèbre maximale commutative contenant x et e , C_x est fermée, donc elle est admettiblement complète et

$$Sp_E(y) = Sp_{C_x}(y), \text{ pour tout } y \in C_x.$$

D'où C_x et par suite $C_x/Rad(C_x)$ sont spectralement convexes. En utilisant la première étape de la preuve, on déduit que $C_x/Rad(C_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ainsi $Sp_{C_x}(y)$ est réduit à un seul point, pour tout $y \in C_x$. Par conséquent, $Sp_E(x)$ est un singleton pour tout $x \in E$. Puis, on conclut par la proposition 1.1. que $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Par ([13]), toute algèbre spectralement bornée est nécessairement ordinaire. On a donc le résultat suivant :

Corollaire 1.7. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire, admettiblement complète et spectralement convexe. Si E est spectralement bornée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([13], Proposition 10, p. 123), deux autres équivalences au concept "spectralement borné" sont données. Plus précisément, il est montré que, dans une

algèbre unitaire E , les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $Sp_E(x)$ est borné, pour tout $x \in E$.
- ii) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$.
- iii) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$.

On a alors deux autres conséquences suivantes.

Corollaire 1.8. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire, advertiblement complète et spectalement convexe. Si $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.9. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire, advertiblement complète et spectalement convexe. Si $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

L'hypothèse spectralement convexe de l'algèbre, c'est à dire $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$, peut être remplacée par " $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout x d'un voisinage de zéro dans l'algèbre E " comme le montre ce qui suit :

Proposition 1.10. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire advertiblement complète et spectalement convexe. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in V$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve .: Soit $a \in E$. Alors il existe $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a = \lambda x$. Comme $Sp_E(a) = \lambda Sp_E(x)$ et $Sp_E(x)$ est convexe, on a $Sp_E(a)$ est convexe. Et on conclut par le Théorème 1.6.

Une *Q-a.l.m.c.* est spectralement bornée. De plus, elle est aussi advertiblement complète ([14]). Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.11. Soit (E, τ) une *Q-a.l.m.c.* Si E est spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2]), S. Bhatt a montré ([2], Theorem 1, p. 726) que si E est une algèbre de Banach unitaire spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une *Q*-algèbre normée comme le montre ce qui suit :

Corollaire 1.12. Soit $(E, \| \cdot \|)$ une *Q*-algèbre normée spectralement convexe. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 1.13. L'hypothèse "*Q*-algèbre" n'est pas superflue comme le montre l'exemple suivant : Soit E l'algèbre des fonctions polynômes complexes sur l'intervalle $[0, 1]$, munie des opérations usuelles et de la norme de la convergence

uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \text{ pour tout } f \in E.$$

Alors $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre normée. De plus $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas une $\mathbb{Q}$ -algèbre car le spectre de tout polynôme non constant est égal à $\mathbb{C}$. Ainsi $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre normée, non $\mathbb{Q}$ -algèbre, spectralement convexe et $E/Rad(E)$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.14. ([2], Theorem 1, p. 726). Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach spectralement convexe. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 1.15. Soit K un compact et $C(K)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur K . On munit $C(K)$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|, \text{ pour tout } f \in C(K).$$

Alors $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach. Comme elle est semi-simple et de dimension infinie, $(A, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas spectralement convexe. De plus, par ([3]), on a :

$$Sp_{C(K)}(f) = \{f(x) : x \in K\}$$

Ainsi l'image d'un convexe par une fonction continue n'est pas nécessairement convexe.

Remarque 1.16. Toute $\mathbb{Q}$ -algèbre normée $(E, \|\cdot\|)$ est spectralement bornée. Donc ordinaire. Si de plus E est commutative, alors elle vérifie en plus

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}^*(E)\}, \text{ pour tout } x \in E,$$

où $\mathcal{M}^*(E)$ désigne l'ensemble des caractères non nuls de E . Cette dernière égalité n'entraîne pas que E est ordinaire. En effet, considérons l'algèbre $E = \mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Comme tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ et que les caractères de l'algèbre E sont les mesures de Dirac $\delta_z : z \in \mathbb{C}$, on a :

$$Sp_E(P) = \{P(z) : z \in \mathbb{C}\} = \{\delta_z(P) : z \in \mathbb{C}\}, \text{ pour tout } P \in E.$$

Montrons maintenant que l'algèbre E n'est pas ordinaire. Soit f la forme linéaire définie, sur E , par :

$$f\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k X^k\right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (k+1), \text{ pour tout } P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in E.$$

On voit que f est une forme linéaire sur E telle que :

$$f(P) \in Sp_E(P), \text{ pour tout } P \in E,$$

alors f n'est pas un caractère vu que $f(X^2) = 3$ et $f(X)^2 = 4$.

Remarque 1.17. Le corollaire 1.14 ([2], Theorem 1, p. 726) n'est pas vrai dans les algèbres réelles comme le montre l'exemple suivant : Soit $E = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$, l'algèbre des fonctions réelles continues de $[0, 1]$. Soit ϕ la forme linéaire définie par :

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx, \text{ pour tout } f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1]).$$

Comme $\phi(f) = f(x_0)$, où $x_0 \in [0, 1]$, on a :

$$\phi(f) \in Sp_E(f), \text{ pour tout } f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1]).$$

Ainsi ϕ est quasi-multiplicative. Cependant, elle n'est pas multiplicative car sinon

$$\phi(f^n) = \int_0^1 f^n(x)dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\int_0^1 f(x)dx = \sup_{t \in [0, 1]} f(t),$$

ce qui n'est pas le cas (prendre, par exemple, la fonction $f(t) = 2t$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(t) = -2t + 2$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Donc E n'est pas ordinaire. Or E est spectralement convexe car

$$Sp_E(f) = f([0, 1]), \text{ pour tout } f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1]).$$

Donc $Sp_E(f)$ est convexe, pour tout $f \in C_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Par suite l'algèbre de Banach réelle $(C_{\mathbb{R}}([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ est semi-simple, spectralement convexe de dimension infinie. Elle n'est pas donc isomorphe à $\mathbb{C}$.

2.2 Algèbres localement A-convexes ordinaires spectralement convexes

Dans ce paragraphe, nous allons étendre les résultats précédents à d'autres classes d'algèbres plus vastes que les *a.l.m.c.* à savoir les *a.l.A.c.* ainsi que les *a.l.u.A.c.*

2.2.1 Cas des algèbres localement A-convexes.

Soit (E, τ) une *a.l.A.c.* unitaire et soit $(p_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes qui définissent τ . Soit $M(\tau)$ la topologie m convexe de Cochrane associée à τ .

Si (E, τ) est ordinaire et spectralement convexe, alors $(E, (q_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$ est également ordinaire et spectralement convexe. De plus si (E, τ) est advertiblement complète, on montre qu'il en est de même pour $(E, (q_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$. Ainsi, par le théorème 1.6, on obtient que si (E, τ) est une algèbre localement A-convexe, ordinaire, spectralement convexe et advertiblement complète, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 2.1.1. Soit (E, τ) une *a.l.A.c.* ordinaire et advertiblement complète.

Si pour tout $x \in E$, $Sp_E(x)$ est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes qui définissent τ et $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ la famille de semi-normes définissant la topologie de Cochrane ([5]). Montrons que $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est adverbiblement complète. Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ une suite généralisée de Cauchy adverbiblement convergente dans $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ et soit $x \in E$ tel que les suites $(x_\lambda x)_{\lambda \in \Gamma}$ et $(xx_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ convergent toutes les deux vers e dans $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. Puisque la topologie définie par $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est plus fine que τ , les deux suites convergent vers e dans (E, τ) qui est adverbiblement complète. Donc $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ converge dans (E, τ) vers un élément $y \in E$. En utilisant le fait que la multiplication est séparément continue dans (E, τ) , on obtient que x est inversible dans E et $x^{-1} = y$. Par conséquent, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ converge vers y dans $(E, q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Comme conséquences nous obtenons les résultats suivants :

Corollaire 2.1.2. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.A.c.* unitaire, adverbiblement complète et spectralement convexe. Si $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \not\subseteq \mathbb{C}$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.1.3. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.A.c.* unitaire, adverbiblement complète et spectralement convexe. Si $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.1.4. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.A.c.* unitaire adverbiblement complète et spectralement convexe. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in V$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Toute Q -algèbre est adverbiblement complète ([6]). Ainsi, on a ce qui suit :

Corollaire 2.1.5. Soit (E, τ) une *Q-a.l.A.c.* Si E est spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

2.2.2 Cas des algèbres localement uniformément A -convexes

Soit (E, τ) une *a.l.u.A.c.* unitaire et soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes qui définissent τ c'est à dire que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(x) \geq 0$ et $N(x) \geq 0$ tels que

$$p_\lambda(xy) \leq M(x)p_\lambda(y) \quad \text{et} \quad p_\lambda(yx) \leq N(x)p_\lambda(y), \text{ pour tout } y \in E.$$

Alors, d'après ([10]), il existe une norme d'algèbre $\| \cdot \|$, sur E , plus fine que τ , donnée par :

$$\| x \| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{p_\lambda(y) \leq 1} p_\lambda(xy) \right\}, \text{ pour tout } y \in E.$$

Si (E, τ) est ordinaire et spectralement convexe, alors $(E, \| \cdot \|)$ est également ordinaire et spectralement convexe. De plus si (E, τ) est adverbiblement complète, on

montre que $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre. Ainsi, par le Théorème 1.6, si (E, τ) une algèbre localement uniformément A -convexe, ordinaire, spectralement convexe et advertiblement complète, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 2.2.1. Soit (E, τ) une *a.l.u.A.c.* ordinaire et advertiblement complète. Si E est spectrament convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes définissant τ et $\|\cdot\|$ la norme de Cochrane ([10]) associée à (p_λ) . Comme (E, τ) est advertiblement complète, $(E, \|\cdot\|)$ est advertiblement complète. Donc par ([14]), $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre. Ainsi $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre normée spectralement convexe. Par le corollaire 1.11, $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Nous introduisons maintenant une propriété, purement algébrique, qui intervient dans l'étude des algèbres spectralement convexes :

Définition 2.2.2. On dit qu'une algèbre unitaire E , vérifie la propriété $\mathcal{P}$, si pour tout $x \in E$, il existe une sous algèbre maximale C_x de E contenant x et e , satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$a) \mathcal{M}(C_x) \neq \emptyset \text{ et } b) Sp_{C_x}(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(C_x)\}, \text{ pour tout } y \in C_x,$$

où $\mathcal{M}(C_x)$ désigne l'ensemble des caractères non nuls de C_x .

Avec cette propriété purement algébrique et sans considérations topologiques, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.3. Soit E une algèbre complexe unitaire et ordinaire vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Si E est spectralement convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : On montre que, dans ce cas, $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Et on conclut par la proposition 1.1. Soit alors $x \in E$. Par hypothèse, il existe une sous algèbre maximale commutative C_x de E contenant x et e telle que :

$$Sp_{C_x}(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(C_x)\}, \text{ pour tout } y \in C_x.$$

De plus, on a :

$$Sp_E(y) = Sp_{C_x}(y), \text{ pour tout } y \in C_x.$$

Donc si E est spectralement convexe. Par la même preuve que dans le théorème 1.6, on montre que $Sp_E(x)$ est un singleton. Enfin, par la proposition 1.1, $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Toute *a.l.m.c* advertiblement complète et plus généralement toute B_0 -algèbre vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Ainsi on a ce qui suit :

Corollaire 2.2.4. Soit (E, τ) une *a.l.m.c* (ou plus généralement une *a.l.A.c.*) ordinaire et advertiblement complète. Si pour tout $x \in E$, $Sp_E(x)$ est convexe,

alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.2.5. Soit $(E, \cdot)$ une B_0 -algèbre ordinaire. Si E est spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

2.3 Algèbres ordinaires spectralement convexes à involution généralisée

Soit E une algèbre complexe. Nous dirons que $x \mapsto x^*$ est une involution généralisée sur E si $x \mapsto x^*$ est une involution vectorielle ([3], Definition 1, p. 63) telle que : pour tous $x, y \in E$, $(xy)^* = y^*x^*$ ou pour tous, $x, y \in E$, on a $(xy)^* = x^*y^*$. Dans le premier cas, il s'agit d'une involution d'algèbre. Dans le second, on dira que $x \mapsto x^*$ est une involution anti-morphisme.

Dans cette section, nous étudions les résultats précédents dans le cadre des algèbres à involution généralisée. Nous allons voir que dans ce dernier cas, on peut se restreindre aux éléments normaux alors que, dans le cas hermitien, aux éléments unitaires.

2.3.1 Cas d'une involution d'algèbre

Soit E une *a.l.m.c.* munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ et ordinaire (en particulier une $*$ -spectrale *a.l.m.c.*). Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ comme le montre ce qui suit :

Théorème 3.1.1. Soit E une *a.l.m.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, ordinaire et advertiblement complète. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément normal de E . Alors x est contenu dans une sous algèbre M_x de E , fermée maximale, commutative et auto-adjointe telle que :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x.$$

Puisque tout élément de M_x est normal, l'algèbre M_x est spectralement convexe. Il s'ensuit que, d'après le théorème 1.6, on a :

$$M_x/Rad(M_x) \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

Ainsi $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, et ceci pour tout élément normal $x \in E$. En particulier pour tout élément hermitien $h \in E$, $Sp_E(h)$ est un singleton. Montrons ensuite que l'algèbre E est hermitienne. Soit h un élément hermitien de E . Alors $Sp_E(h) = \{\lambda\}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $Sp_E(h) = Sp_E(h^*) = \overline{Sp_E(h)} = \{\bar{\lambda}\}$, on obtient $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $B = E/Rad(E)$ l'algèbre localement m -convexe, munie de l'involution canonique déduite de celle de E par l'intermédiaire de la surjection

canonique $s : E \rightarrow B$. Alors B est semi-simple et hermitienne vue que E est hermitienne. De plus on a :

$$\rho_B/\mathcal{H}(B) < +\infty,$$

où $\mathcal{H}(B)$ désigne l'ensemble des éléments hermitiens de B . Donc d'après ([6], Theorem 22.1, p. 281), $\rho_B = p_B$. De plus, $\ker p_B = \{0\}$. En effet, si $x \in \ker p_B$, alors $\rho_B(x) = 0$. Donc x est non inversible dans B . Il s'ensuit que, pour tout $y \in B$, l'élément xy est non inversible dans B . Donc $Sp_B(xy) = 0$. Ainsi $\rho_B(xy) = 0$. Donc $x \in \text{Rad}(B) = \{0\}$. Soient maintenant $h \in \mathcal{H}(B)$ et M_h la sous-algèbre maximale commutative fermée involutive engendrée par e et h . Alors, d'après le théorème 1.6, $Sp_{M_h}(x)$ est un singleton, pour tout $x \in M_h$. De plus, d'après ([6], Corollary 22.15, p. 291), la restriction de p_B à M_h est une norme de $\mathbb{C}^*$ -algèbre. En particulier, M_h est semi simple, pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Par la proposition 1.1, M_h est isomorphe à $\mathbb{C}$ et ceci, pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Ainsi $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Comme conséquences, on a ce qui suit :

Corollaire 3.1.2. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, admettant une norme convexe telle que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$. Si l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- a) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$ et $Sp_E(x) \not\subseteq \mathbb{C}$,
 - b) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$
- est réalisée, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.3. L'hypothèse $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$ peut être remplacée par " $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E) \cap V$, où V est un voisinage de zéro dans l'algèbre E ".

On a également le résultat suivant :

Corollaire 3.1.4 Soit E une *Q-a.l.m.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2]), S. Bhatt a montré ([2], Theorem 4, p. 728) que si E est une algèbre de Banach unitaire à involution d'algèbre spectralement convexe, alors E modulo son radical est isomorphe à $\mathbb{C}$ dès que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre normée comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.1.5. Soit $(E, \| \cdot \|)$ une Q -algèbre normée unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.1.6. ([2], Theorem 4, p. 728). Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe,

pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une *a.l.m.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. On suppose de plus que E est $*$ -spectrale c'est à dire qu'il existe une semi-norme sous-multiplicative p tels que :

$$p(x) = p(x^*) \text{ et } \rho_E(x) \leq p(x), \text{ pour tout } x \in E,$$

alors l'algèbre E est ordinaire. Ainsi on a ce qui suit comme conséquence du résultat précédent :

Corollaire 3.1.7. Soit (E, τ) une *a.l.m.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ qui est en plus $*$ -spectrale. Si le spectre de tout élément normal est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une *a.l.A.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Alors il existe une topologie m -convexe plus fine que τ . Ainsi, on obtient ce qui suit :

Proposition 3.1.8. Soit (E, τ) une *a.l.A.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, ordinaire et advertiblement complète. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.9. Si dans les résultats précédents, on remplace l'hypothèse "ordinaire" par l'une des conditions suivantes :

- i) $Sp_E(x)$ est borné, pour tout $x \in E$.
- ii) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$.
- iii) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$.

on obtient toujours la même conclusion c'est à dire : $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.10. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.A.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, advertiblement complète. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

La même conclusion reste également valable dans les *Q-a.l.A.c.* comme le montre le résultat suivant :

Corollaire 3.1.11 Soit E une *Q-a.l.A.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, ordinaire et advertiblement complète. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une *a.l.u.A.c.* unitaire. Alors il existe une norme d'algèbre $\| \cdot \|$ sur E plus fine que τ . Si de plus (E, τ) est advertiblement complète, alors $(E, \| \cdot \|)$ est une *Q*-algèbre. On obtient ainsi ce qui suit :

Proposition 3.1.12. Soit (E, τ) une *a.l.u.A.c.* unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, ordinaire et advertiblement complète. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le Théorème 4, p. 728 de ([3]) montre que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, alors l'ensemble des éléments unitaires $\mathcal{U}(E)$ engendrent l'algèbre toute entière. Ce résultat s'étend également aux *a.l.m.c.*, involutives comme le montre le résultat suivant :

Proposition 3.1.13. Soit (E, τ) une *a.l.m.c.* complète unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ tel que $\rho_E(h) \leq 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = \frac{u+u^*}{2}$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ engendrent E .

Preuve : Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ et soit E_h la sous-algèbre involutive, maximale commutative et fermée de E contenant $\{e, h\}$. On a alors $\rho_E(h^2) \leq 1$. Donc $\rho_E[e - (e - h^2)] \leq 1$. Par le théorème 5.4 de ([6], p. 65), il existe $k \in \mathcal{H}(E)$ tel que $e - h^2 = k^2$. Donc $e = h^2 + k^2$. Posons $u = h + ik$. Alors on a : $h = 1/2(u + u^*)$ et $u \in \mathcal{U}(E)$.

Proposition 3.1.14 Soit (E, τ) une *a.l.m.c.* complète unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, ordinaire et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. En utilisant l'inégalité de Ptàk généralisée au cas des *a.l.m.c.* hermitiennes, on a :

$$\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$$

Par suite

$$|\lambda| \leq 1, \text{ pour tout } \lambda \in Sp_E(u)$$

D'autre part

$$Sp_E(u^*) = Sp_E(u) = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}$$

Il s'en suit que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Par conséquent, le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre est contenu dans le cercle unité. D'après l'hypothèse de convexité du spectre de tout élément unitaire de l'algèbre, il doit être réduit à un singleton. Il s'ensuit, d'après la proposition 1.1.1, que le spectre de tout élément hermitien est réduit à un singleton.

Le reste de la démonstration se fait de la même manière que dans le théorème 1.6.

Comme conséquence, on a ce qui suit :

Corollaire 3.1.15. Soit E une *a.l.m.c.* complète unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ qui est en plus $*$ -spectrale et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2]), Bhatt a montré ([2], Theorem 6, p. 729) que si E est une algèbre de Banach unitaire à involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si de plus $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une $\mathbb{Q}$ -algèbre normée comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.1.16 Soit $(E, \|\cdot\|)$ une $\mathbb{Q}$ -algèbre normée unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.1.17. ([2], Theorem 6, p. 729) Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

2.3.2 Cas d'une involution anti-morphisme

Dans cette section, on s'intéresse aux algèbres E munies d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ c'est à dire une involution vectorielle telle que $(xy)^* = x^*y^*$, pour tous $x, y \in E$. Nous allons voir qu'on obtient des résultats parallèles aux précédents. Notre démarche consiste à montrer que l'algèbre est en fait commutative en utilisant un analogue au théorème de Kaplansky ([7]). Ainsi, on se ramène au cas d'une involution d'algèbre.

Nous allons voir que le résultat de Kaplansky ([7]) selon lequel toute algèbre de Banach semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$ est commutative, s'étend à un cadre plus général.

On commence d'abord par ce résultat purement algébrique qui nous sera utile par la suite.

Proposition 3.2.1. Soit E une algèbre réelle, unitaire et primitive telle que $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$. Alors E est un corps.

Preuve : Soit π une représentation irréductible de E sur un espace vectoriel réel X , tel que $\ker \pi = \{0\}$. Soit D le commutant de $\pi(E)$ dans $L(X)$:

$$D = \{T \in L(X) : T \circ \pi(a) = \pi(a) \circ T, \forall a \in E\}$$

Alors D est une sous-algèbre de $L(X)$. De plus, par ([3], Proposition 6, p.121), D est un corps. Soit $x \in X$, non nul, et posons :

$$D(x) = \{T(x) : T \in D\} \text{ et } \pi(E)(x) = \{\pi(a)(x) : a \in E\}$$

Montrons que $X = D(x)$. On a $D(x) \subset X$ et montrons que $X \subset D(x)$. Supposons qu'il existe $y \in X$ et $y \notin D(x)$. Alors, d'après ([3], Definition 7, p.121), x et y sont D -indépendants. Ensuite, d'après ([3], Theorem 10, p.123), il existe $a \in E$ tel que :

$$\pi(a)(x) = y \text{ et } \pi(a)(y) = -x$$

Il en résulte que :

$$\pi(a^2 + e)(x) = 0$$

ce qui contredit le fait que $\pi(a^2 + e)$ est inversible dans $L(X)$ vu que $e + a^2$ est inversible dans E . Ainsi $X = D(x)$. Ensuite $X = \pi(E)(x)$ car les seuls sous-espaces de X , stables par $\pi(E)$, sont 0 et X vu que π est irréductible. Montrons maintenant que si $x_0 \in X$, non nul, alors on a :

$$\pi(a)(x_0) = 0 \Rightarrow a = 0.$$

En effet, supposons que $\pi(a)(x_0) = 0$ et considérons $x \in X$. Alors il existe $u \in D$ tel que $x = u(x_0)$ Il s'ensuit que :

$$\pi(a)(x) = \pi(a)(u(x_0)) = u((\pi(a)(x_0))) = u(0) = 0$$

Donc $\pi(a) = 0$ et $a = 0$ vu que π est injectif. Enfin, montrons que E est un corps. Soit $a \in E$, non nul. D'une part, il existe $u \in D$ tel que :

$$\pi(a)(x_0) = u(x_0).$$

D'autre part, il existe $b \in E$ tel que :

$$u^{-1}(x) = \pi(b)(x)$$

On obtient alors

$$\pi(ba - e)x_0 = 0$$

donc $ba = e$. De même $ab = e$.

Le résultat de Kaplansky ([7]), s'étend aux Q -a.l.m.c., unitaires semi-simples, comme le montre le résultat suivant :

Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$. Alors E est commutative ([7]). Ce résultat s'étend aux Q -a.l.m.c. unitaires semi-simples.

Proposition 3.2.2. Soit E une Q -a.l.m.c. unitaire semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$. Alors E est commutative.

Preuve : Soit $(P_i)_{i \in I}$ la famille des idéaux primitifs de E . Comme E est une Q -algèbre, les idéaux $(P_i)_{i \in I}$ sont fermés. Par ailleurs, on a :

$$Rad(E) = \bigcap_{i \in I} P_i$$

Comme l'algèbre est semi-simple, $\bigcap_{i \in I} P_i = \{0\}$. Soit maintenant p une semi-norme d'algèbre continue sur E tel que :

$$\rho_E(x) \leq p(x), \quad x \in E.$$

Alors p est une norme d'algèbre sur E vu que E est semi-simple. Pour $i \in I$, E/P_i est une algèbre normée réelle primitive, dans laquelle tout carré est quasi-inversible.

Par la proposition 3.19, E/P_i est un corps. D'après le théorème de Gelfand-Mazur, E/P_i est isomorphe à $\mathbb{R}$, ou à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{H}$. Mais comme $-e$ n'est pas un carré dans E/P_i alors E/P_i est isomorphe à $\mathbb{R}$, d'où le résultat.

Dans le cas involutif, le résultat de Civin Yood ([6]) permet de se ramener à une sous algèbre commutative. Ce résultat reste encore vrai pour un anti-morphisme involutif et ceci dans le cas topologique général comme le montre ce qui suit :

Proposition. 3.2.3. Soit (E, τ) une algèbre topologique munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ et x un élément normal de E . Alors il existe une sous-algèbre maximale commutative fermée F stable par l'involution $x \mapsto x^*$ telle que :

$$Sp_E(y) = Sp_F(y), \text{ pour tout } y \in F.$$

Preuve : Considérons la famille suivante :

$$C = \{A \subset E : a, b \in A \cup A^* \Rightarrow ab = ba\}.$$

Comme x est normal, on a $x \in C$ et donc $C \neq \emptyset$. Par ailleurs, C est inductive pour l'inclusion. Donc, d'après le lemme de Zorn, il existe $F \in C$ maximale contenant x . Il en résulte que $F = F^*$, car $F \cup F^* = F$ vue que F est maximale. Soit maintenant a un élément normal de E . Alors on a :

$$(ay = ya, \text{ pour tout } y \in F) \Rightarrow a \in F \quad (M)$$

En effet, $\{a\} \cup F \in C$ car $a^*y = ya^*$, pour tout $y \in F$. Comme F est maximale, $a \in F$. De plus, par (M), F est une sous-algèbre de E . Montrons maintenant que F est fermée. Soit $a \in \overline{F}$ et soit $(a_n)_n \subset F$ telle que $a = \lim_n a_n$. Comme $m.a_n = a_n.m$, pour tout $m \in F$, la continuité séparée du produit montre que :

$$am = ma, \text{ pour tout } m \in F.$$

Comme $F = F^*$, $a^*m = ma^*$, pour tout $m \in F$. Donc $a^*a_n = a_na^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité séparée du produit montre que a est normal. Par (M) on a : $a \in F$ et donc F est fermé. Il reste à montrer que

$$Sp_E(y) = Sp_F(y), \text{ pour tout } y \in F.$$

Comme $Sp_E(y) \subset Sp_F(y)$, il reste à prouver l'inclusion inverse. Supposons qu'il existe $\lambda \in Sp_F(y)$ et $\lambda \notin Sp_E(y)$. Alors $(x - \lambda e) \in G(E)$ avec $(x - \lambda e)^{-1} \notin F$. Or $F \cup (y - e)^{-1} \in C$, ce qui est absurde.

Voici maintenant l'analogie du théorème 3.1 dans la cas d'une involution anti-morphisme :

Théorème 3.2.4. Soit E une Q -a.l.m.c. unitaire ordinaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément normal de E . Alors, par la proposition précédente x est contenu dans une sous algèbre M_x de E , fermée maximale commutative et auto-adjointe telle que :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x$$

Puisque tout élément de M_x est normal, l'algèbre M_x est spectralement convexe. Il s'ensuit que, d'après le théorème 1.6, on a :

$$M_x/Rad(M_x) \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

Ainsi $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, et ceci pour tout élément normal $x \in E$. En particulier pour tout élément hermitien $h \in E$, $Sp_E(h)$ est un singleton. Montrons ensuite que l'algèbre E est hermitienne. Soit h un élément hermitien de E . Alors $Sp_E(h) = \{\lambda\}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme

$$Sp_E(h) = Sp_E(h^*) = \overline{Sp_E(h)} = \{\bar{\lambda}\},$$

on obtient $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $B = E/Rad(E)$ l'algèbre localement m-convexe, munie de l'involution canonique déduite de celle de E par l'intermédiaire de la surjection canonique $s : E \rightarrow B$. Alors B est semi-simple et hermitienne vue que E est hermitienne. Comme E une Q -a.l.m.c., l'algèbre B est aussi une Q -algèbre. Montrons que B est commutative. Considérons l'algèbre réelle $\mathcal{H}(B)$ des éléments hermitiens de B . Alors $\mathcal{H}(B)$ est une Q -a.l.m.c. telle que :

$$Sp_{\mathcal{H}(B)}(h) = Sp_B(h) \subset \mathbb{R},$$

pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Comme elle est hermitienne, $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in \mathcal{H}(B)$. Par conséquent, l'algèbre $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est une Q -a.l.m.c., réelle unitaire semi-simple telle que $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in \mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$. Par la proposition 3.20, l'algèbre $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est commutative. Pour conclure il reste à montrer que $\mathcal{H}(B)$ est semi-simple. Soit $h \in Rad(\mathcal{H}(B))$ et $a = u + iv \in B$, avec $u, v \in \mathcal{H}(B)$. Alors

$$\rho(hu) = 0 \text{ et } \rho(hv) = 0.$$

Et par suite $\rho(ha) = 0$. En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta \in Sp_B(ha)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $hu - \alpha$ est inversible, alors

$$a - \lambda = (hu - \alpha)[e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)].$$

Puisque B est hermitienne et

$$(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta) \in \mathcal{H}(B),$$

il s'ensuit que $e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)$ est inversible, ce qui est impossible. Donc $hu - \alpha$ n'est pas inversible i.e., $\alpha \in Sp_B(hu)$. Il en résulte que $\alpha = 0$. De la même manière, on montre que $\beta = 0$ et par conséquent $Rad(\mathcal{H}(B)) = 0$. Ce qui complète la preuve.

Comme conséquence, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.2.5. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.m.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ si l'une des propriétés suivantes est réalisée :

- 1) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$ et $Sp_E(x) \subsetneq \mathbb{C}$,
- 2) $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$.
- 3) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$,

Comme dans le cas d'une involution d'algèbre, on a aussi le résultat suivant :

Proposition 3.2.6. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.m.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.7 Soit E une Q -a.l.m.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Theorem 1, 726), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire spectralement convexe, alors E modulo son radical est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre normée comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.2.8. Soit $(E, \| \cdot \|)$ une Q -algèbre normée unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.9. ([2], Theorem 4 p. 728). Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit E une a.l.m.c. *-spectrale, où $x \mapsto x^*$ est une involution anti-morphisme. Alors on a le résultat suivant :

Corollaire 3.2.10. Soit E une Q -a.l.m.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ qui est en plus *-spectrale. Si le spectre de tout élément normal est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une a.l.A.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Alors il existe une topologie m -convexe plus fine que τ . Ainsi, on obtient ce qui suit :

Proposition 3.2.11. Soit (E, τ) une Q -a.l.A.c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ ordinaire. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, on a :

Remarque 3.2.12. Si dans les résultats précédents, on remplace l'hypothèse "ordinaire" par l'une des conditions suivantes :

- i) $Sp_E(x)$ est borné, pour tout $x \in E$.
- ii) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$, et $Sp_E(x) \not\subseteq \mathbb{C}$.
- iii) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$.

on obtient toujours la même conclusion c'est à dire : $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2.13. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q - $a.l.A.c.$ unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2.14. Soit (E, τ) une Q - $a.l.A.c.$ unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ ordinaire. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une $a.l.u.A.c.$ unitaire. Alors il existe une norme d'algèbre $\|$ sur E plus fine que τ . Si de plus (E, τ) est admettiblement complète, alors $(E, \| \cdot \|)$ est une Q -algèbre. On obtient ainsi ce qui suit :

Corollaire 3.2.15. Soit (E, τ) une Q - $a.l.u.A.c.$ unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ ordinaire. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le Théorème 4, p.728 de ([3]), montre que si $(E, \| \cdot \|)$ est une algèbre de Banach involutive, alors l'ensemble des éléments unitaires $\mathcal{U}(E)$ engendre l'algèbre toute entière. Ce résultat s'étend également aux $a.l.m.c.$ à involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ comme le montre le résultat suivant :

Proposition 3.2.16. Soit (E, τ) une $a.l.m.c.$ complète unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ tel que $\rho_E(h) \leq 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = (u + u^*)/2$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ engendre E .

Preuve : Elle est analogue à celle du cas d'une involution d'algèbre donnée par la proposition 3.1.13.

Proposition 3.2.17. Soit (E, τ) une Q - $a.l.m.c.$ complète unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ ordinaire et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. En utilisant l'inégalité de Ptàk généralisée au cas des $a.l.m.c.$ hermitiennes, on a :

$$\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$$

Par suite $|\lambda| \leq 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. D'autre part,

$$Sp_E(u^*) = Sp_E(u) = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}.$$

Il s'en suit que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Par conséquent, le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre est contenu dans le cercle unité. D'après l'hypothèse de convexité du spectre de tout élément unitaire de l'algèbre, il doit être réduit à un singleton. Il s'en suit, d'après la proposition 1.1, que le spectre de tout élément hermitien est réduit à un singleton. Le reste de la démonstration se fait de la même manière que celle du théorème 1.6. Comme conséquence, on a ce qui suit :

Corollaire 3.2.18. Soit (E, τ) une Q -a.l.m.c. complète unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ qui est en plus $*$ -spectrale et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Theorem 6, 729), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.2.19. Soit $(E, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Bibliographie :

- [1] G.R. Allan. Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 329-340.
- [2] S. Bhatt. Spectrally convex Banach algebras. Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979),no.6,
- [3] F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.Springer-Verlag,NewYork-Heidelberg, 1973
- [4] A. C. Cochran. Representation of A-convex algebras.Proc. Amer. Math. Soc., 41, (1973), 473-479.
- [5] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, On a class of topological algebras. Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [6] M. Fragoulopoulou, Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam,2005.
- [7] I. Kaplansky. Normed algebras. Duke Math. J. 16 (1949), 399-418.
- [8] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics.North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [9] E. A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
- [10] M. Oudadess. Thérèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes. C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 296 (1983), pp. 851-853.
- [11] A. Ouhmidou, A. El Kinani, On Spectrally convex ordinary algebras.Indian J. Pure Appl. Appl. Math ; Springer, (2021) vol. 53(2), pages 349-354,
- [12] V. Ptak, Banach algebras with involution . Manuscripta Math.6(1972), 245-290
- [13] M. Roitman, Y. Sternfeld, When is a linear functional multiplicative ? Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.
- [14] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Duke Math. J. 23 (1956), 1-11.
- [15] J. H. Williamson. On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.
- [16] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras algebras. Lecture note series 31 (1971).

CHAPITRE 3

CHAPITRE 3 : ALGÈBRES LOCALEMENT MULTIPLICATIVEMENT p -CONVEXES, AVEC $(0 < p \leq 1)$, SPECTRALEMENT ÉTOILÉES

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux résultats du chapitre précédent dans le cadre tout à fait général des algèbres topologiques localement p -convexes, $(0 < p \leq 1)$, ordinaires et ceci dans le cas spectralement étoilé. Nous commençons par montrer (Théorème 1.1) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une $a.l.m.p$ -convexe, $(0 < p \leq 1)$, unitaire ordinaire advertiblement complète et spectralement étoilé, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous obtenons (Corollaire 1.2) comme conséquence le même résultat du théorème 1.1 précédent, en considérant que l'algèbre est spectralement bornée au lieu de "ordinaire", sachant que toute algèbre spectralement bornée est nécessairement ordinaire. Ensuite, nous montrons (Proposition 1.3) que l'hypothèse "spectralement étoilé, peut être remplacée par " $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout x d'un voisinage de zéro dans l'algèbre E ".

Nous prouvons (Corollaire 1.4) que toute Q - $a.l.m.p$ -c., $(0 < p \leq 1)$, spectralement étoilée est isomorphe à $\mathbb{C}$, modulo son radical de Jacobson. Nous obtenons également que le résultat de Bhatt ([2], Théorème 1, p. 726) donné dans le cas Banach, reste encore vrai dans le cas d'une Q -algèbre p -normée $(0 < p \leq 1)$ (Corollaire 1.5).

Nous nous intéressons aux $a.l.A.p$ -c., $(0 < p \leq 1)$, advertiblement complètes, ordinaires et spectralement étoilées. Pour cette classe d'algèbres, nous montrons (Proposition 2.1.1) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une $a.l.A.p$ -c., $(0 < p \leq 1)$, ordinaire, advertiblement complète et spectralement étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues à ceux du chapitre 2, pour les $a.l.A.c$. De plus, comme dans le cas m -convexe, on montre (Corollaire 2.1.3) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une Q - $a.l.A.p$ -c., $(0 < p \leq 1)$, spectralement étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Par ailleurs, on montre (Proposition 2.2.1) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est $a.l.u.A.p$ -c., $(0 < p \leq 1)$, ordinaire, advertiblement complète et spectralement étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe

à $\mathbb{C}$.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on a considéré le cas des algèbres à involution généralisée. Dans le cas d'une involution d'algèbre, nous montrons (Théorème 3.1.1) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, involutive advertiblement complète et ordinaire telle que le spectre de tout élément normal de E est étoilé alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas involutif. Nous envisageons ensuite le cas des algèbres $\ast$ -spectrales. Nous montrons (Corollaire 3.1.7) que si $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, involutive et $\ast$ -spectrale telle que le spectre de tout élément normal est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Nous faisons de même pour des *a.l.A.p-c.* (Proposition 3.1.8) et des *a.l.u.A.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$. Des résultats analogues à ceux du chapitre précédent sont également obtenus et ceci sans restrictions aucune. Dans le cas hermitien, nous obtenons les analogues de tous les résultats précédents sous l'hypothèse "le spectre de tout élément unitaire est étoilé". Nous montrons (Proposition 3.1.13) que dans une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, complète unitaire, munie d'une involution d'algèbre, l'ensemble des éléments unitaires engendre l'algèbre toute entière. Si de plus, l'algèbre est ordinaire et hermitienne, alors elle est isomorphe à $\mathbb{C}$ modulo son radical de Jacobson si le spectre de tout élément unitaire est étoilé (Proposition 3.1.14). Comme conséquence, nous obtenons la même conclusion (Corollaire 3.1.14) dans le cas $\ast$ -spectral ainsi que le résultat de S. Bhatt ([2], Theorem 6, p. 729).

Le cas des algèbres munies d'une involution anti-morphisme est traité dans la deuxième partie de ce paragraphe. Notre démarche consiste à se ramener au cas d'une involution d'algèbre en montrant que l'algèbre est en fait commutative par un résultat analogue au théorème de Kaplansky ([8], theorem 1). Nous obtenons (Proposition 3. 2.1) l'analogue d'un résultat de Kaplansky dans le cadre des *Q-a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, unitaires semi-simples. Nous obtenons (Théorème 3. 2.2) que si E est une *Q-a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, ordinaire munie d'une involution anti-morphisme et si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Comme conséquences, nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas d'une involution anti-morphisme. En particulier le deuxième résultat de S.Bhatt ([2], theorem 6, p. 229) est encore valide dans le cas d'une involution anti-morphisme à savoir que si $(E, \|\cdot\|_p)$ avec, $(0 < p \leq 1)$, est une algèbre p -Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ hermitienne tel que le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (Corollaire 3.2.15).

3.0.1 Algèbres localement m - p -convexes, ordinaires et spectralement étoilées

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, $(0 < p \leq 1)$, une *a.l.m.p-c.* commutative unitaire et complète. Alors, comme dans ([10], Theorem 5. 4, p. 19), on montre que l'algèbre E est nécessairement à spectre global fonctionnel c'est à dire que :

$$Sp_E(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}, \text{ pour tout } y \in E$$

où $\mathcal{M}(E)$ désigne l'ensemble des caractères continus de E . De plus, A. Mallios ([9]) a montré que dans une *a.l.m.c.* commutative unitaire, cette dernière propriété est équivalente à l'advertisibilité complétude de l'algèbre E . Ceci reste aussi vrai dans une *a.l.m.p-c.*, avec $(0 < p \leq 1)$. Ce qui nous permet de décrire la structure des *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, ordinaires, advertisiblement complètes et spectralement étoilées. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ $(0 < p \leq 1)$, une *a.l.m.p-c.* unitaire, advertisiblement complète et spectralement étoilée. Si E est ordinaire, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : On suppose d'abord que l'algèbre E est commutative et semi-simple. Montrons alors que dans ce cas $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Puis, on conclut par la Proposition 1.1 du chapitre 2. Soit alors $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, avec $0 < p \leq 1$, une *a.l.m.p-c.* unitaire, commutative, semi-simple, ordinaire, advertisiblement complète et spectralement étoilée. Alors, comme l'algèbre E est advertisiblement complète, on a, par ([15]),

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}$$

Soit $x \in E$ fixé. Alors $Sp_E(x)$ est non vide. Soit alors $\alpha \in Sp_E(x)$ et que $Sp_E(x)$ est étoilé par rapport à α . Si $Sp_E(x)$ n'est pas réduit à un point, on considère un autre élément $\beta \in Sp_E(x)$. Comme $Sp_E(x)$ est étoilé par rapport à α , alors le segment $[\alpha, \beta] \subset Sp_E(x)$. Soit $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(E)$ tel que $\chi_1(x) = \alpha$ et $\chi_2(x) = \beta$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t\chi_1(x) + (1-t)\chi_2(x) \in Sp_E(x)$. Posons $f_t = t\chi_1 + (1-t)\chi_2$, où $t \in]0, 1[$. Alors f_t est une forme linéaire sur E vérifiant :

$$f_t(a) \in Sp_E(a), \text{ pour tout } a \in E$$

Comme l'algèbre E est ordinaire, il en découle que $f_t \in \mathcal{M}(E)$, ce qui n'est pas toujours vrai (pour par exemple $t = \frac{1}{2}$). Ainsi, $Sp_E(x)$ est réduit à un point, pour tout $x \in E$. Par la proposition 1.1 du chapitre 2, on conclut que

$$E/\text{Rad}(E) \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

Cas général. Soit $x \in E$ et C_x la sous-algèbre maximale commutative contenant x et e . Alors C_x est fermée, donc elle est advertisiblement complète et

$$Sp_E(y) = Sp_{C_x}(y), \text{ pour tout } y \in C_x.$$

D'où C_x et par suite $C_x/\text{Rad}(C_x)$ sont spectralement étoilées. En utilisant la première étape de la preuve, on déduit que $C_x/\text{Rad}(C_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ainsi $Sp_{C_x}(y)$ est réduit à un seul point, pour tout $y \in C_x$. Par conséquent, $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Puis, on conclut, par la proposition 1.1. du chapitre 2, que $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Par([14]), on sait que toute algèbre spectralement bornée est nécessairement ordinaire. Ainsi, on a ce qui suit :

Corollaire 1.2. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ avec $(0 < p \leq 1)$, une *a.l.m.p-c.*, unitaire, advertisiblement complète et spectralement étoilée. Si E est spectralement bornée, alors $E/\text{Rad}(E)$

est isomorphe à $\mathbb{C}$.

L'hypothèse spectralement étoilée de l'algèbre peut être restreinte aux éléments appartenant seulement à un voisinage de zéro de l'algèbre E comme le montre ce qui suit :

Proposition 1.3. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ($0 < p \leq 1$), une *a.l.m.p-c.* unitaire adwertiblement complète et spectralement étoilée. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $a \in E$. Alors il existe $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a = \lambda.x$. Comme $Sp_E(a) = \lambda.Sp_E(x)$ et $Sp_E(x)$ est étoilé, on a $Sp_E(a)$ est étoilé. Et on conclut par le théorème 1.1.

Une *Q-a.l.m.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), est spectralement bornée. De plus, elle aussi adwertiblement complète ([15]). Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.4. Soit une $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ avec ($0 < p \leq 1$), une *Q-a.l.m.p-c.* Si E est spectralement étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Theorem 1, p. 726), S. Bhatt a montré que si $(E, \| \cdot \|)$ est une algèbre de Banach unitaire spectralement convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une Q-algèbre p -normée comme le montre le résultat suivant :

Corollaire 1.5. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, ($0 < p \leq 1$), une Q-algèbre p -normée spectralement étoilée. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

3.0.2 Algèbres localement A - p -convexes, ($0 < p \leq 1$), ordinaires et spectralement étoilées

Dans ce paragraphe, nous allons étendre les résultats précédents à d'autres classes d'algèbres plus vastes que les *a.l.m.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), à savoir les *a.l.A.p-c.*, ainsi que les *a.l.u.A.p-c.*

Cas des algèbres localement A - p -convexes ($0 < p \leq 1$).

Soit (E, τ) une *a.l.A.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), unitaire et soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de p -semi-normes, ($0 < p \leq 1$), qui définit τ c'est à dire que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(\lambda, x) > 0$ et $N(\lambda, x) > 0$ tels que

$$p_\lambda(xy) \leq M(\lambda, x)p_\lambda(y) \text{ et } p_\lambda(yx) \leq N(\lambda, x)p_\lambda(y), \text{ pour tout } y \in E.$$

Alors, comme dans ([5]), on montre qu'il existe une topologie m - p -convexe, notée $M(\tau)$, plus fine que τ , donnée par la famille des p -semi-normes $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ définies par :

$$q_\lambda(x) = \sup\{p_\lambda(xy) : p_\lambda(y) \leq 1\}, \text{ pour tout } x \in E.$$

Si (E, τ) est ordinaire et spectralement étoilée, alors $(E, (q)_{\lambda \in \Lambda})$ est également ordinaire et spectralement étoilée. De plus si (E, τ) est advertiblement complète, on montre qu'il en est de même pour $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. Ainsi, par le théorème 1.1, on obtient que si (E, τ) est une algèbre localement A - p -convexe, $0 < p \leq 1$, ordinaire, spectralement étoilée et advertiblement complète, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 2.1.1. Soit (E, τ) une $a.l.A.p$ -c., ($0 < p \leq 1$), ordinaire et advertiblement complète. Si, pour tout $x \in E$, $Sp_E(x)$ est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de p -semi-normes, ($0 < p \leq 1$), qui définit τ et soit $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ la famille de p -semi-normes définissant la topologie de Cochran ([5]). Alors $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est advertiblement complète. En effet soit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ une suite généralisée de Cauchy advertiblement convergente dans $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ et soit $x \in E$ tel que les suites $(x_\lambda x)$ et (xx_λ) convergent toutes les deux vers e dans $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. Puisque la topologie définie par $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est plus fine que τ , les deux suites convergent vers e dans (E, τ) qui est advertiblement complète. Donc converge dans (E, τ) vers un élément $y \in E$. En utilisant le fait que la multiplication est séparément continue dans (E, τ) , on obtient que x est inversible dans E et $x^{-1} = y$. Par conséquent, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ converge vers y dans $(E, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$.

Comme conséquences nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.1.2. Soit $(E, p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une $a.l.A.p$ -c., ($0 < p \leq 1$), unitaire, advertiblement complète et spectralement étoilée. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V$. Alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Toute Q -algèbre est advertiblement complète ([15]). Ainsi, on a ce qui suit :

Corollaire 2.1.3. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q - $a.l.A.p$ -c., ($0 < p \leq 1$). Si E est spectralement étoilée, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Cas des algèbres localement uniformément A -convexes :

Soit (E, τ) une $a.l.u.A.p$ -c., ($0 < p \leq 1$), unitaire et soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de p -semi-normes qui définit τ , c'est à dire que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in E$, il existe $M(x) > 0$ et $N(x) > 0$ tels que :

$$p_\lambda(xy) \leq M(x)p_\lambda(y) \text{ et } p_\lambda(yx) \leq N(x)p_\lambda(y), \text{ pour tout } y \in E.$$

Alors, d'après ([11]), il existe une p -norme d'algèbre $\| \cdot \|_p$, sur E , plus fine que τ , donnée par :

$$\| x \|_p = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{p_\lambda(y) \leq 1} p_\lambda(xy), \text{ pour tout } y \in E.$$

Si (E, τ) est ordinaire et spectralement convexe, alors $(E, \| \cdot \|_p)$ est également ordinaire et spectralement convexe. De plus si (E, τ) est advertiblement complète, on montre que $(E, \| \cdot \|_p)$ est une Q -algèbre. Ainsi, par le théorème 1.1, si (E, τ) est une algèbre localement uniformément A - p -convexe, ordinaire, spectralement étoilée et advertiblement

complète, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 2.2.1. Soit (E, τ) une *a.l.u.A.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, ordinaire et advertiblement complète. Si E est spectralement étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de p -semi-normes définissant τ et $\|\cdot\|_p$ la p -norme de Cochran ([11]) associée à (p_λ) . Comme (E, τ) est advertiblement complète, $(E, \|\cdot\|_p)$ est advertiblement complète. Donc $(E, \|\cdot\|_p)$ est une Q -algèbre p -normée spectralement étoilée. Par le corollaire 1.5, $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

3.1 Algèbres ordinaires spectralement étoilées à involution généralisée.

Dans cette section, nous étudions les résultats précédents dans le cadre des algèbres à involution généralisée. Nous allons voir que dans le cas d'une involution d'algèbre, on peut se restreindre aux éléments normaux alors que, dans le cas hermitien, aux éléments unitaires. Alors que, pour le cas d'un anti-morphisme involutif, on se ramène à une involution d'algèbre en montrant que l'algèbre est en fait commutative.

3.1.1 Cas d'une involution d'algèbre

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.p-c.*, $0 < p \leq 1$, complète munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ -spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, comme le montre ce qui suit :

Théorème 3.1.1. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, unitaire, complète, munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ -spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément normal de E . Alors x est contenu dans une sous algèbre M_x de E , fermée maximale, commutative et auto-adjointe telle que :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x.$$

Puisque tout élément de M_x est normal, l'algèbre M_x est spectralement convexe. Il s'ensuit que, d'après le théorème 1.6, on a :

$$M_x/Rad(M_x) \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

Ainsi $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, et ceci pour tout élément normal $x \in E$. En particulier pour tout élément hermitien $h \in E$, $Sp_E(h)$ est un singleton. l'algèbre E est donc hermitienne. Considérons $B = E/Rad(E)$ l'algèbre localement m - p -convexe, munie de l'involution canonique déduite de celle de E par la surjection canonique $s : E \rightarrow B$. Alors B est semi-simple et hermitienne vue que E est hermitienne. De plus on a :

$$\rho_B/\mathcal{H}(B) < +\infty$$

où $\mathcal{H}(B)$ désigne l'ensemble des éléments hermitiens de B . Comme dans ([7], Théorème 22.1, p. 281), on montre que $\rho_B = p_B$ sur $\mathcal{N}(B)$. De plus, $\ker p_B = \{0\}$. En effet, si $x \in \ker p_B$, comme E est $*$ -spectrale, la fonction de Ptak est sous multiplicative sur E . D'après l'inégalité de Ptak généralisée, on a pour tout $y \in E$,

$$\rho(xy) \leq p(xy) \leq p(x).p(y) = 0$$

Par suite

$$\rho(xy) = 0, \text{ pour tout } y \in E$$

Donc $x \in \text{Rad}(B) = 0$. Soient maintenant $h \in \mathcal{H}(B)$ et M_h la sous algèbre maximale commutative, fermée, involutive, engendrée par e et h . Alors, d'après le théorème 1.6, $Sp_{M_h}(x)$ est un singleton, pour tout $x \in M_h$. De plus, Comme dans ([7], Corollaire 22.15, p. 291), on montre que la restriction de p_B à M_h est une norme de $\mathbb{C}^*$ -algèbre. En particulier, M_h est semi simple, pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Par la proposition 1.1 du chapitre 2, M_h est isomorphe à $\mathbb{C}$, et ceci pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Ainsi, d'après un résultat de ([2]), $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème précédent :

Corollaire 3.1.2. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, unitaire et complète munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale, telle que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$. Si l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- a) $Sp_E(x)$ est fermé, pour tout $x \in E$ et $Sp_E(x) \not\subseteq \mathbb{C}$,
- b) $Sp_E(x)$ est compact, pour tout $x \in E$,

est réalisée, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.3. L'hypothèse $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$ peut être remplacée par " $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E) \cap V$, où V est un voisinage de 0 dans l'algèbre E ".

On a également ce qui suit :

Corollaire 3.1.4. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.p-c.*, $(0 < p \leq 1)$, unitaire, complète munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Théorème 4, p. 728), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire à involution d'algèbre, alors E modulo son radical de Jacobson est isomorphe à $\mathbb{C}$, si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre p -normée, $(0 < p \leq 1)$, comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.1.5. Soit $(E, \|\cdot\|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une Q -algèbre p -normée, unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.1.6. Soit $(E, \|\cdot\|_p), 0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach, unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit (E, τ) une $a.l.A.p-c.$ ($0 < p \leq 1$) unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Alors il existe une topologie $m.p$ -convexe plus fine que τ . Ainsi, on obtient ce qui suit :

Proposition 3.1.7. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.A.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.8. Soient $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.A.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

La même conclusion reste également valable dans les $Q-a.l.A.p-c.$ comme le montre le résultat suivant :

Corollaire 3.1.9. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $Q-a.l.A.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.u.A.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire. Alors il existe une p -norme d'algèbre $\|\cdot\|_p$, sur E , plus fine que τ . Si de plus (E, τ) est advertiblement complète, alors $(E, \|\cdot\|_p)$ est une Q -algèbre. On obtient ainsi ce qui suit :

Proposition 3.1.10. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.u.A.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire complète et munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le Théorème 4, p. 728 de ([3]) montre que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, alors l'ensemble des éléments unitaires $\mathcal{U}(E)$ engendre l'algèbre toute entière. Ce résultat se généralise aussi aux $a.l.m.p-c.$, involutives comme le montre le résultat suivant :

Proposition 3.1.11. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.m.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), complète unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ tel que $\rho_E(h) < 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = \frac{u+u^*}{2}$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ engendre E .

Proposition 3.1.12. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une $a.l.m.p-c.$, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$, $*$ spectrale et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. En utilisant l'inégalité de Ptàk généralisée au cas des $a.l.m.p-c.$

hermitiennes, on a :

$$\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$$

Par suite $|\lambda| \leq 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. D'autre part,

$$Sp_E(u^*) = \overline{Sp_E(u)} = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}$$

Il s'ensuit que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Par conséquent, le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre est contenu dans le cercle unité. D'après l'hypothèse de spectre étoilé de tout élément unitaire de l'algèbre, il doit être réduit à un singleton. Il s'ensuit, d'après la proposition 1.1.1, que le spectre de tout élément hermitien est réduit à un singleton. Le reste de la démonstration se fait de la même manière que dans le théorème 3.1.1.

Dans ([2], Théorème 6, p. 729), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire à involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si de plus, $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat reste encore valide dans le cas d'une Q -algèbre p -normée avec $Sp_E(x)$ étoilé, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$, comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.1.13. Soit $(E, \|\cdot\|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une Q -algèbre p -normée, unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.1.14. Soit $(E, \|\cdot\|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach, unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

3.1.2 Cas d'une involution anti-morphisme

Dans ce paragraphe, nous allons voir que les résultats obtenus dans le cas d'une involution d'algèbre restent valables dans le cas d'une involution anti-morphisme. L'idée dans notre méthode consiste à montrer que l'algèbre est en fait commutative, en utilisant un analogue au théorème de Kaplansky ([8]). Ainsi, on se ramène au cas d'une involution d'algèbre.

Le résultat de Kaplansky ([8]) selon lequel toute algèbre de Banach réelle semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$ est commutative, se généralise aussi au cas des algèbres p -Banach. De plus, comme pour les Q -a.l.m.c unitaires semi-simples (Proposition 3.2.2. du chapitre 2), ce résultat s'étend aux Q -a.l.m.p-c, $(0 < p \leq 1)$, comme suit :

Proposition 3.2.1. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, $(0 < p \leq 1)$, une Q -a.l.m.p-c. réelle, unitaire semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$. Alors E est commutative.

Voici maintenant l'analogue du théorème 3.1 dans le cas d'une involution anti-morphisme :

Théorème 3.2.2. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ $(0 < p \leq 1)$, une Q -a.l.m.p-c., unitaire, ordinaire

munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément normal de E . Alors, par la proposition 3.2.3 du chapitre 2, x est contenu dans une sous algèbre M_x de E , fermée maximale commutative et auto-adjointe telle que :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x :$$

Puisque tout élément de M_x est normal, l'algèbre M_x est spectralement étoilée. Il s'ensuit que, d'après le théorème 1.1 du chapitre 2, on a :

$$M_x/Rad(M_x) \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.$$

Ainsi $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, et ceci pour tout élément normal $x \in E$. En particulier, pour tout élément hermitien $h \in E$, $Sp_E(h)$ est un singleton. Ensuite, montrons que l'algèbre E est hermitienne. Soit h un élément hermitien de E . Alors $Sp_E(h) = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme

$$Sp_E(h) = Sp_E(h^*) = \overline{Sp_E(h)} = \bar{\lambda},$$

on obtient $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $B = E/Rad(E)$ l'algèbre localement $m.p$ -convexe, munie de l'involution canonique déduite de celle de E par l'intermédiaire de la surjection canonique $s : E \rightarrow B$. Alors B est semi-simple et hermitienne vue que E est hermitienne. Comme E une Q -a.l.m.p-c, l'algèbre B est aussi une Q -algèbre. Montrons que B est commutative. Considérons l'algèbre réelle $\mathcal{H}(B)$ des éléments hermitiens de B . Alors $\mathcal{H}(B)$ est une Q -a.l.m.p-c telle que :

$$Sp_{\mathcal{H}(B)}(h) = Sp_B(h) \subset \mathbb{R},$$

pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$. Comme elle est hermitienne, $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in \mathcal{H}(B)$. Par conséquent, l'algèbre $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est une Q -a.l.m.p-c, réelle unitaire semi-simple telle que $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in \mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$. Par la proposition 3.2.1, l'algèbre $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est commutative. Pour conclure, il reste à montrer que $\mathcal{H}(B)$ est semi-simple. Soit $h \in Rad(\mathcal{H}(B))$ et $a = u + iv \in B$, avec $u, v \in \mathcal{H}(B)$. Alors

$$\rho(hu) = 0 \text{ et } \rho(hv) = 0.$$

Et par suite $\rho(ha) = 0$. En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta \in Sp_B(ha)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $hu - \alpha$ est inversible, alors

$$a - \lambda = (hu - \alpha)[e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)]$$

Puisque B est hermitienne et

$$(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta) \in \mathcal{H}(B)$$

Il s'ensuit que $e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)$ est inversible, ce qui est impossible. Donc $hu - \alpha$ n'est pas inversible i.e., $\alpha \in Sp_B(hu)$. Il en résulte que $\alpha = 0$. D'une manière analogue, on montre que $\beta = 0$ et par conséquent $Rad(\mathcal{H}(B)) = \{0\}$. Ce qui achève la démonstration.

Comme conséquence, on a le résultat suivant :

Proposition 3.2.3. Soient $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ($0 < p \leq 1$), une Q -a.l.m.p-c., unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.4. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ($0 < p \leq 1$), une Q -a.l.m.p-c. unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Theorem 1, 726), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire involutive telle que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors E modulo son radical de Jacobson est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat est encore valable dans le cas d'une Q -algèbre p -normée à anti-morphisme involutif comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.2.5. Soit $(E, \|\cdot\|_p)$ une Q -algèbre p -normée ($0 < p \leq 1$) unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.2.6. Soit $(E, \|\cdot\|_p)$ ($0 < p \leq 1$) une algèbre p -Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in \mathcal{N}(E)$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, une a.l.m.p-c., ($0 < p \leq 1$), *-spectrale, où $x \mapsto x^*$ est une involution anti-morphisme. Alors on obtient ce qui suit :

Corollaire 3.2.7. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ($0 < p \leq 1$), une Q -a.l.m.p-c unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$, qui est en plus *-spectrale. Si le spectre de tout élément normal est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ($0 < p \leq 1$) une a.l.A.p-c., unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Alors il existe une topologie $m.p$ -convexe plus fine que τ . Ainsi, on obtient ce qui suit :

Proposition 3.2.8. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.m.p-c., ($0 < p \leq 1$), unitaire complète munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$, *-spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2.9. Soient $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.A.p-c., ($0 < p \leq 1$), unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$. Alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une a.l.u.A.p-c., ($0 < p \leq 1$), unitaire. Alors il existe une p -norme d'algèbre $\|\cdot\|_p$ sur E plus fine que τ . Si de plus $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est adverbiblement complète, alors $(E, \|\cdot\|_p)$ est une Q -algèbre. On obtient ainsi ce qui suit :

Corollaire 3.2.10. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.u.A.p-c., ($0 < p \leq 1$), unitaire munie

d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le Théorème 4, p.728 de ([3]), montre que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach involutive, alors l'ensemble des éléments unitaires $\mathcal{U}(E)$ engendre l'algèbre toute entière. Ce résultat s'étend également aux *a.l.m.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), à involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ comme le montre le résultat suivant :

Proposition 3.2.11. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *a.l.m.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ tel que $\rho_E(h) < 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = \frac{u+u^*}{2}$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ engendre E .

Preuve : Elle est analogue à celle de la proposition 3.1.13. donnée dans le cas d'une involution d'algèbre.

Proposition 3.2.12. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *Q-a.l.m.p-c.* ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ ordinaire et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. En utilisant l'inégalité de Ptàk généralisée au cas des *a.l.m.p-c.* hermitiennes, on a :

$$\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$$

Par suite $|\lambda| \leq 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. D'autre part,

$$Sp_E(u^*) = \overline{Sp_E(u)} = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}$$

Il s'en suit que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Par conséquent, le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre est contenu dans le cercle unité. D'après l'hypothèse de spectre étoilé de tout élément unitaire de l'algèbre, il doit être réduit à un singleton. Il en découle, d'après la proposition 1.1, que le spectre de tout élément hermitien est réduit à un singleton. Le reste de la démonstration se fait de la même manière que celle du théorème 3.1.1.

Comme toute algèbre *-spectrale est ordinaire, on a comme conséquence le résultat suivant :

Corollaire 3.2.13. Soit $(E, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une *Q-a.l.m.p-c.*, ($0 < p \leq 1$), unitaire, complète et munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$, qui est en plus *-spectrale et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([2], Theorem 6, 729), S. Bhatt a montré que si E est une algèbre de Banach unitaire munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ tel que $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in \mathcal{U}(E)$. Alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce résultat est encore vrai dans une algèbre p -Banach, munie d'une involution anti-morphisme, dont le spectre de tout élément unitaire est étoilé, comme le montre ce qui suit :

Corollaire 3.2.14. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach unitaire munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$ hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Bibliographie

- [1] [1] G.R. Allan. Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 329-340.
- [2] S. Bhatt. Spectrally convex Banach algebras. Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979),no.6,
- [3] F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.Springer-Verlag,NewYork-Heidelberg, 1973
- [4] A. C. Cochran. Representation of A-convex algebras.Proc. Amer. Math. Soc., 41, (1973), 473-479.
- [5] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, On a class of topological algebras. Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [6] J.Cuntz, (1976) Locally $\mathbb{C}^*$ -equivalent algebras, J. Functional Analysis, 23 (2), 95-107.
- [7] M. Fragouloupoulou, Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005.
- [8] I. Kaplansky. Normed algebras. Duke Math. J. 16 (1949), 399-418.
- [9] [9] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics.North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [10] E. A.Michael, Locally-multiplicatively-convex topological algebras.Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
- [11] M. Oudadess. Thérèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes. C. R. Acad. Sc. Paris, série I,296 (1983), 851-853.
- [12] A. Ouhmidou, A. El Kinani, On Spectrally convex ordinary algebras.Indian J. Pure Appl. Appl. Math, Springer, (2021) vol. 53(2), pages 349-354,45
- [13] V. Ptak, Banach algebras with involution . Manuscripta Math.6(1972),245-290
- [14] M. Roitman, Y. Sternfeld, When is a linear functional multiplicative ? Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.
- [15] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Duke Math. J. 23 (1956), 1-11.
- [16] J. H. Williamson. On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.
- [17] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras algebras. Lecture note series 31 (1971).

CHAPITRE 4

CHAPITRE 4 : ALGÈBRES LOCALEMENT PSEUDO-CONVEXES SPECTRALEMENT ÉTOILÉES

Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons des algèbres dont la topologie est définie par une famille de pseudo p_i -semi-normes, $0 < p_i \leq 1$, Nous généralisons les résultats précédents à cette classe d'algèbres. Nous commençons tout d'abord par les algèbres A - p -normées, ($0 < p \leq 1$). Nous montrons (Lemme 1.1) que toute algèbre $(E, \|\cdot\|_p)$ A - p -normée, ($0 < p \leq 1$), peut être munie d'une p -norme sous-multiplicative $\|\cdot\|'_p$ définie par :

$$\|\cdot\|'_p = \sup\{\|xy\|_p, \|y\|_p \leq 1\}, \text{ pour tout } x \in E.$$

et que, si $(E, \|\cdot\|_p)$ est advertiblement complète, alors $(E, \|\cdot\|'_p)$ est une algèbre Q - p -normée (Lemme 1.2) qui est nécessairement ordinaire. Ensuite, nous prouvons, sous l'hypothèse "spectralement étoilé", que l'algèbre A - p -normée advertiblement complète E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$ (Théorème 1.1). Nous passons ensuite au cas où l'algèbre est munie d'une involution d'algèbre. En utilisant une généralisation du lemme de Ford, nous établissons que les algèbres A - p -normées hermitiennes et unitaires vérifient l'inégalité de Pták (Proposition 2.1.3). De plus le noyau de la fonction de Pták n'est autre que le radical de Jacobson de l'algèbre. Par ailleurs, nous étendons ces résultats au cas "spectralement étoilé" (Théorème 2.1.4). Dans le cas hermitien, nous obtenons également qu'elle est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, dès qu'elle est spectralement étoilée pour des éléments unitaires seulement.

Nous examinons également le cas où l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme. En utilisant un analogues au théorème de Kaplansky ([11], Theorem 4.8 p.405), qui nous permet de montrer que l'algèbre est en fait commutative. Nous établissons que, si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors E est presque isomorphe à $\mathbb{C}$. Si de plus l'algèbre E est hermitienne, on montre qu'il suffit de supposer que le spectre de tout élément unitaire est étoilé pour retrouver le résultat (Théorème 2.1.7).

Dans la seconde section, on s'intéresse au cas des algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées, et on retrouve les résultats analogues à ceux dans le cas d'une algèbre A - p -normée. On montre que si E est une algèbre pseudo-*pre*-Michael ordinaire et advertiblement complète, elle est à spectre fonctionnel. Puis, on obtient qu'elle est presque isomorphe à $\mathbb{C}$, dès qu'elle est spectralement étoilée (Théorème 3.1.5). Les mêmes résultats sont obtenus pour les algèbres localement uniformément A -pseudo-convexes advertiblement complètes. Lorsque E est munie d'une involution d'algèbre, on obtient la même conclusion en supposant seulement que le spectre de tout élément normal est étoilé, dans le cas d'une algèbre pseudo-Michael involutive, qui est en plus $*$ spectrale (Théorème 3.2.1). Pour les algèbres p -Michael ($0 < p \leq 1$) hermitiennes $*$ spectrales, il suffit que le spectre de tout élément unitaire soit étoilé pour retrouver le même résultat (Théorème 3.2.4). Et enfin lorsque l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme, on montre qu'on peut se ramener au cas précédent à l'aide d'un théorème de Kaplansky connu dans le cas d'une algèbre de Banach et qui peut se généraliser au cas d'une algèbre pseudo-Michael. Ce qui nous a permis de retrouver aussi les mêmes résultats (Théorème 3.3.1).

4.1 Algèbres A - p -normées spectralement étoilées

Soit $(E, \| \cdot \|_p)$ ($0 < p \leq 1$), une algèbre A - p -normée. On commence par donner un analogue au résultat ([7], lemme 3.2, p.477), qui nous permet de munir l'algèbre E d'une p -norme sous multiplicative, il s'agit de :

Lemme 1.1. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, ($0 < p \leq 1$), une algèbre A - p -normée. Alors l'application définie par :

$$\| \cdot \|'_p = \sup\{\| xy \|_p, \| y \|_p \leq 1\}, \text{ pour tout } x \in E.$$

est une p -norme sous-multiplicative sur E .

On sait que la notion de Q -algèbre et celle de advertiblement complète sont identiques dans le cas des algèbres normées ([19], Théorème.7, p.8), il en est de même dans le cas des algèbres p -normées. En utilisant ce résultat, on obtient le lemme suivant :

Lemme 1.2. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, ($0 < p \leq 1$), une algèbre A - p -normée advertiblement complète. Alors $(E, \| \cdot \|'_p)$ est une Q -algèbre p -normée.

Preuve : D'après ce qui précède, une algèbre p -normée advertiblement complète est une Q -algèbre. Il suffit donc de montrer que $(E, \| \cdot \|'_p)$ est advertiblement complète. Soit alors $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une suite généralisée de Cauchy qui est advertiblement convergente dans $(E, \| \cdot \|'_p)$ et soit $x \in E$ tel que les suites généralisées $(x_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(xx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergent vers l'élément unité e dans $(E, \| \cdot \|'_p)$. Puisque $\| \cdot \|_p \leq \| \cdot \|'_p$, la suite $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est de Cauchy dans $\| \cdot \|'_p$ et les suites $(x_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(xx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergent vers l'élément unité e . Donc convergent vers e dans l'algèbre $(E, \| \cdot \|_p)$. Notons y la limite de la suite $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans $(E, \| \cdot \|_p)$. Par la continuité séparée de la multiplication dans $(E, \| \cdot \|_p)$, x est invertible dans E et $x^{-1} = y$. De plus, la suite $(x_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers e dans $(E, \| \cdot \|'_p)$ et la multiplication est séparément continue pour $(E, \| \cdot \|'_p)$, donc $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge

aussi vers y dans $(E, \| \cdot \|'_p)$ Par suite $(E, \| \cdot \|'_p)$ est advertiblement convergente. Ainsi $(E, \| \cdot \|'_p)$ est une $\mathbb{Q}$ algèbre p -normée.

En utilisant les résultats des lemmes précédents, on est en mesure de montrer le premier Théorème essentiel de ce chapitre :

Théorème 1.3. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre A - p -normée advertiblement complète. Si $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in E$, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Supposons tout d'abord que l'algèbre E est commutative et semi-simple. Montrons dans ce cas, que le spectre de tout élément de E est réduit à un singleton. Puisque $(E, \| \cdot \|'_p)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre p -normée, on a

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(E)\}$$

Pour $x \in E$ fixé, $Sp_E(x)$ est étoilé, donc il existe $\alpha \in Sp_E(x)$ tel que, $Sp_E(x)$ contient tout segment reliant α à un élément $\lambda \in Sp_E(x)$. Supposons que $Sp_E(x)$ contient un autre point $\alpha \neq \lambda$ et soient $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(E)$ tels que :

$$\chi_1(x) = \alpha \text{ et } \chi_2(x) = \lambda$$

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$t\chi_1 + (1 - t)\chi_2 \in Sp_E(x)$$

Posons :

$$f_t = t\chi_1 + (1 - t)\chi_2, 0 < t \leq 1$$

Alors f_t est une forme lineaire dans E vérifiant :

$$f_t(a) \in Sp_E(a), \text{ pour tout } a \in E.$$

Comme l'algèbre E est ordinaire, il en découle que $f_t \in \mathcal{M}(E)$, ce qui n'est pas toujours vrai (par exemple pour $t = 1/2$). Ainsi, par la proposition 1.1 du chapitre 2, on conclut que $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans le cas général, nous allons montrer aussi que $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, pour tout $x \in E$. Pour ce faire, soient $x \in E$, et C_x la sous algèbre maximale commutative de E , contenant x et e . Alors C_x est une $\mathbb{Q}$ -algèbre p -normée telle que :

$$Sp_E(y) = Sp_{C_x}(y), \text{ pour tout } y \in C_x.$$

La dernière égalité montre que C_x et $C_x/Rad(C_x)$ sont spectralement étoilées. Par la première partie de la preuve, il vient que $C_x/Rad(C_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. D'où $Sp_{C_x}(y)$ est réduit à un singleton, pour tout $y \in C_x$. En particulier, $Sp_E(x)$ est un singleton et on conclut par la proposition 1.1 du chapitre 2.

Comme conséquence on obtient ce qui suit :

Corollaire 1.4. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre A - p -normée advertiblement complète. Si $Sp_E(x)$ est convexe, pour tout $x \in E$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.5. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre A - p -normée advertiblement complète. S'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $x \in V$, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x \in \lambda.V$ Donc $Sp_E(x) = \lambda.Sp_E(y)$, avec $y \in V$. Il s'ensuit que $Sp_E(x)$ est étoilé. Ainsi l'algèbre E est spectralement étoilée. En utilisant le théorème précédent, nous obtenons le résultat.

Le résultat de Bhatt ([5], Theorem 1, p. 726) reste encore vrai dans le cas des algèbres A - p -normées advertiblement complètes, comme le montre le résultat suivant :

Corollaire 1.6. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre A - p -normée advertiblement complète (en particulier une algèbre p -Banach ou algèbre de Banach). Si $(E, \| \cdot \|_p)$ est spectralement étoilée, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

4.2 Algèbres A - p normées involutive advertiblement complètes.

4.2.1 Cas d'une involution d'algèbre.

Dans ([5]), S. Bhatt a montré que si tout élément normal d'une algèbre de Banach involutive E a un spectre convexe, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. ([5], Theorem 4, p. 728). Ce résultat reste encore vrai dans le cas d'une algèbre A - p -normée, $(0 < p \leq 1)$, involutive et advertiblement complète si le spectre de tout élément normal de E est étoilé. Pour ce faire, nous aurons besoin des résultats suivants connus dans le cas des algèbres de Banach involutives et qui restent valables dans le cas des algèbres A - p normées. Il s'agit de :

Proposition 2.1.1. Soit E une algèbre A - p -normée hermitienne. Alors la fonction de Ptàk p_E définie par :

$$p_E(x) = \rho(x^*x)^{1/2}, \text{ pour tout } x \in E$$

est une semi-norme d'algèbre vérifiant :

$$RadE = \ker(p_E) \text{ et } \rho_E = p_E \text{ sur } \mathcal{N}(E)$$

Preuve : Elle est analogue à celle faite dans le cas des algèbres de Banach involutives ([17], Théorème 6.6, p.275).

Comme dans ([17]), nous montrons que l'inégalité spectrale de Ptàk reste vraie dans le cas d'une algèbre A - p -normée unitaire hermitienne et advertiblement complète. Pour ce faire, nous aurons besoin d'un analogue du lemme de Ford dans une algèbre p -Banach

involutive :

Proposition 2.1.2. (Généralisation du lemme de Ford). Soit E une algèbre p -Banach involutive, complexe, unitaire et $h \in \mathcal{H}(E)$. Supposons que : $Re\lambda > 0$, pour tout $\lambda \in Sp_E h$. Alors il existe un $u \in \mathcal{H}(E)$ tel que $u^2 = h$ et $hu = uh$. Si de plus $Sp_E(h)$ est positif, alors $Sp_E(u)$ l'est aussi.

Preuve : Elle est analogue à celle faite dans ([6]. Proposition 13, p. 44) dans le cas d'une algèbre de Banach involutive.

Ceci nous a permis d'obtenir l'inégalité de Pták dans le cas d'une algèbre p -Banach hermitienne qui se montre aussi de manière analogue au cas des algèbres de Banach involutives introduite dans ([17] Théorème 5.2, p. 267).

Proposition 2.1.3. (Inégalité de Pták généralisée). Soit E une algèbre A - p -normée (p -Banach) hermitienne et unitaire. Alors, on a :

$$\rho_E(x) \leq p_E(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

En utilisant ces résultats, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.1.4. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$ une algèbre A - p -normée advertiblement complète munie d'une involution d'algèbres $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal est étoilé, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit x un élément normal de E . Alors x est contenu dans une sous-algèbre involutive maximale commutative et fermée M_x de E vérifiant :

$$Sp_{M_x}(y) = Sp_E(y), \text{ pour tout } y \in M_x$$

Puisque tout élément de M_x est normal, il s'ensuit que M_x est aussi spectralment étoilé. D'après le théorème 1, on a $M_x/Rad(M_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Donc $Sp_E(x)$ est nécessairement réduit à un singleton. Ainsi, $Sp_E(h)$ est un singleton, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$, par suite $Sp_E(h)$ est réel. Ainsi E est une algèbre hermitienne. Considérons maintenant l'algèbre semi-simple $B = E/Rad(E)$, munie de l'involution canonique déduite de celle de E . L'algèbre B est aussi hermitienne. Pour tout $h \in \mathcal{H}(B)$, considérons la sous-algèbre M_h , involutive maximale commutative et fermée, contenant e et h . D'après ce qui précède, $Sp_{M_h}(x)$ est un singleton, pour tout $x \in M_h$. Comme dans le cas des algèbres de Banach, on peut montrer que la fonction de Pták p_B est une norme de $\mathbb{C}^*$ -algèbre telle que $Rad(B) = ker(p_B)$, l'algèbre M_h est semi-simple et d'après la proposition 1.1 du chapitre 2, M_h est isomorphe à $\mathbb{C}$ et d'après ([6], Lemme 5, p. 528) $B = E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Comme conséquence, on a aussi le résultat suivant :

Corollaire 2.1.5. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre A - p -normée advertiblement complète munie d'une involution d'algèbres $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

4.2.2 Algèbres p -Banach involutives hermitiennes

Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach. Si E est de plus hermitienne, il suffit de supposer que le spectre de tout élément unitaire est étoilé pour obtenir le même résultat que celui de S. Bhatt ([5], Theorem 6, p. 729). Nous aurons besoin d'un résultat de ([6]. Proposition 14, p. 66) connu dans les algèbres de Banach involutives hermitiennes et se montre également de la même manière que dans les algèbres p -Banach hermitiennes :

Lemme 2.1.6. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$ une algèbre p -Banach involutive et $h \in \mathcal{H}(E)$ tel que $\rho_E(h) < 1$. Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ telle que $h = 1/2(u + u^*)$. En particulier, $\mathcal{H}(E)$ est engendré par les éléments de $\mathcal{U}(E)$.

Preuve .: Puisque tout élément x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = h_1 + ih_2$ avec $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(E)$, il suffit de montrer que $\mathcal{U}(E)$ engendre seulement les éléments de $\mathcal{H}(E)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\rho_E(h) < 1$, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ et considérons la sous algèbre maximale commutative fermée et auto-adjointe E_0 de E contenant e, h , alors $\rho_{E_0}(e - (e - h^2)) < 1$, et par suite il existe un unique $x \in E_0$ tel que $(e - h^2) = x^2$, donc on a : $e = h^2 + x^2$ et par suite si on pose $z = h + ix$ on a clairement $x = 1/2(z + z^*)$ avec $z \in \mathcal{U}(E)$.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.1.7. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach involutive et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire de E est étoilé, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. D'après l'inégalité de Pták, dans les algèbres p -Banach hermitienne, on a : $\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$. Ce qui implique que $|\lambda| \leq 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. De plus, puisque pour tout $u \in \mathcal{U}(E)$,

$$Sp_E(u^*) = \overline{Sp_E(u)} = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}.$$

Il s'ensuit que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Donc le spectre de tout élément unitaire de E est contenu dans le cercle unité. Comme il est étoilé par hypothèse, il doit être nécessairement réduit à un seul point. Le reste de la preuve découle de manière analogue à celle du Théorème 2.

Une conséquence directe de ce résultat est :

Corollaire 2.1.8. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$ une algèbre p -Banach involutive et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire de E est convexe, alors $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.1.7 :

Corollaire 2.1.9. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach involutive et

hermitienne. S'il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $x \in V \cap \mathcal{U}(E)$, $Sp_E(x)$ est étoilé, alors $E/RadE$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

4.2.3 Cas d'une involution anti-morphisme

Dans cette section, on s'intéresse aux algèbres E munies d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Nous allons voir qu'on obtient des résultats parallèles aux précédents. Notre démarche consiste à montrer que l'algèbre est en fait commutative en utilisant un analogue au Théorème de Kaplansky ([11], Théorème 4.8 p. 405). Ainsi, on se ramène au cas d'une involution d'algèbre.

Nous allons voir que le résultat de Kaplansky ([11]) selon lequel toute algèbre de Banach semi-simple dans laquelle $e + x^2$ est inversible, pour tout $x \in E$ est commutative, s'étend au cas d'une algèbre p -Banach ($0 < p \leq 1$). Pour montrer l'analogue du Théorème 2.1.4, dans le cas d'une involution anti-morphisme, nous avons besoin d'un analogue du résultat de Kaplansky ([11], Theorem 4.8) dans les algèbres p -Banach. En utilisant le théorème 3.10 de ([21], p.19) et le fait que le quotient d'une algèbre p -Banach par un idéal primitif est une algèbre primitive, on montre que l'analogue au théorème Kaplansky précédent, s'étend comme suit :

Théorème 2.2.1. Toute algèbre p -Banach E semi-simple, dont le carré de tout élément est quasi-inversible, est nécessairement commutative.

Preuve : Supposons tout d'abord que l'algèbre E est primitive, c'est à dire : il existe un espace de Banach réel X et une représentation irréductible $\pi : E \rightarrow L(X)$ telle que $\ker(\pi) = \{0\}$, π est un morphisme d'algèbres, où $L(X) = \{f : X \rightarrow X \text{ f est linéaire} \}$. Notons

$$D = \{T \in L(X) : T \circ \pi(a) = \pi \circ T(a), \text{ pour tout } a \in E\}$$

le commutant de $\pi(E)$ dans $L(X)$. Alors D est alors une sous-algèbre réelle de $L(X)$ qui est un corps ([6], Proposition.6, p.121) et d'après le Théorème de Gelfand-Mazur, elle est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{H}$. Soit maintenant x un élément non nul de X . Nous allons montrer que :

$$X = D.x = \{T.x : T \in D\}.$$

Supposons qu'il existe $y \in X$ tel que $y \notin D.x$. Alors x et y sont D -indépendants ([6] Définition.7, p.121), D'après ([6], Theorem 10, p. 123) il existe $a \in E$ tel que $\pi(x) = y$ et $\pi(a)(y) = -x$. Il en résulte que :

$$\pi(a^2 + e)(x) = 0,$$

ce qui est impossible car $a^2 + e$ est inversible dans E et il reste inversible dans $L(X)$. Par conséquent

$$X = D.x$$

Notons qu'on a :

$$X = \{\pi(a)(x) : a \in E\} = \pi(E).x$$

car π est irréductible (c'est à dire les seuls sous-espaces de X , stables par $\pi(E)$ sont $\{0\}$ et X). Supposons maintenant qu'il existe $u \in D$ tel que $u^2 = -dE$. Comme $D.x = \pi(E).x$, il existe $a \in E$ tel que $u(x) = \pi(a)(x)$ on a :

$$\begin{aligned} & (\pi(a^2(x)) = \pi(a)(\pi(a)(x) = \pi(a)(u(x)) \\ = & \\ & (\pi(a)u)(x) = (u\pi(a))(x) \text{ (car } \pi(a)u = u\pi(a)) \\ = & \\ & u^2(x) = -x \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\pi(a^2 + e)(x) = 0$$

ce qui est faux car $a^2 + e$ est inversible dans E . Ainsi D n'admet aucun élément dont le carré est égal à $-Id$. Par conséquent elle ne peut être isomorphe à $\mathbb{C}$, ou à $\mathbb{H}$. On en déduit que D est isomorphe à $\mathbb{R}$, $E \simeq L(\mathbb{R})$ et E est alors commutative.

Si E n'est pas primitive. E étant semi simple, donc en considérant $(P_i)_{i \in I}$, la famille des idéaux primitifs de E , on a

$$\{0\} = Rad(E) = \bigcap_{i \in I} P_i$$

et pour $i \in I$, E/P_i est une algèbre de Banach primitive (car le quotient d'une algèbre par un idéal primitif est une algèbre primitive). De plus, pour tout $\bar{x} \in E/P_i$, $i \in I$, $\bar{e} + \bar{x}^2$, est inversible, donc d'après ce qui précède, E/P_i est commutative. Il en résulte que E est aussi commutative.

Le Théorème 2 reste vrai dans les algèbres p -Banach à involution anti-morphisme, comme le montre le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$ une algèbre p -Banach munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Comme dans la première étape de la preuve du théorème, l'algèbre $B = E/Rad(E)$ munie de l'involution canonique déduite de celle de E , B est aussi hermitienne. On va montrer que B est commutative et on conclut avec la première étape du Théorème 3.3. Comme B est semi simple, l'anti-morphisme $x \mapsto x^*$ est continu. Par suite, l'algèbre $\mathcal{H}(B)$ est p -Banach et on a :

$$Sp_{\mathcal{H}(B)}(h) = Sp_B(h) \subset \mathbb{R}, \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}(B).$$

De plus, d'après le théorème précédent on a $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est commutative. Il suffit de démontrer que $\mathcal{H}(B)$ est semi-simple. Soit $h \in Rad(\mathcal{H}(B))$ et $a = u + iv \in B$, avec $u, v \in \mathcal{H}(B)$. Donc $\rho(hu) = 0$ et $\rho(hv) = 0$. Montrons que $\rho(ha) = 0$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta \in Sp_B(ha)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $hu - \alpha$ est inversible, alors

$$ha - \lambda = (hu - \alpha)[e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)]$$

Puisque B est hermitienne et $(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta) \in \mathcal{H}(B)$, il s'ensuit que $e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)$ est inversible, ce qui est impossible. Par suite $(hu - \alpha)$ n'est pas inversible et $\alpha \in Sp_B(hu)$. Donc $\alpha = 0$ et de la même manière, on montre que $\beta = 0$ et par suite $h \in Rad(\mathcal{H}(B)) = 0$, ce qui complète la preuve.

Comme conséquence, on a :

Corollaire 2.2.3. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.2.4. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. S'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$, $Sp_E(x)$ est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Si l'algèbre est de plus hermitienne, on peut montrer de la même manière que précédemment le résultat suivant :

Théorème 2.2.5. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach hermitienne, munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément unitaire de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.2.6. Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $(0 < p \leq 1)$, une algèbre p -Banach hermitienne, munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément unitaire de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

4.3 Algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées

Dans cette deuxième partie de ce chapitre, on traite le cas des algèbres localement pseudo-convexes spectralement étoilées. On montre que si E est une algèbre pseudo *pre*-Michael ordinaire et advertiblement complète et spectralement étoilée, alors E modulo son radical de Jacobson est isomorphe à $\mathbb{C}$. Lorsque E est munie d'une involution d'algèbre, on obtient la même conclusion en supposant seulement que le spectre de tout élément normal est étoilé. Pour les algèbres p -Michael hermitiennes, il suffit que le spectre de tout élément unitaire soit étoilé pour retrouver le même résultat. Et enfin lorsque l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme, on montre qu'on peut se ramener au cas précédent à l'aide d'un théorème de Kaplansky, connu dans le cas d'une algèbre de Banach et qui se généralise, au cas d'une algèbre pseudo-Michael. Ce qui nous a permis de retrouver aussi les mêmes résultats.

Soit (E, τ) une algèbre topologique unitaire complexe. On dit que E est une algèbre localement pseudo-convexe si l'espace vectoriel topologique sous-jacent est localement pseudo-convexe. Il est bien connu dans ([22], page 6.) que sa topologie peut être définie

par la famille $|\cdot|_{i \in I}$ de p_i semi-normes homogènes $|\cdot|_{i \in I}$, avec $0 < p_i \leq 1$ est fixé pour chaque $i \in I$. De plus, si, pour tout $x \in E$ et pour tout $i \in I$, il existe un nombre positif $M(x, i)$ tel que :

$$\max(|xy|_i, |yx|_i) \leq M(x, i) |y|_i, \text{ pour tout } y \in E,$$

alors (E, τ) est dite algèbre localement absorbante pseudo-convexe ou algèbre localement A -pseudo-convexe. (*l.A.p.c.a* en abrégé) ([1]), et lorsque $M(i, x) = M(x)$, pour tout $x \in E$ et $i \in I$, alors E est dit localement uniformément A -pseudo convexe (*l.u.A.p.c.a* en abrégé) ([8]). Dans le cas où chaque semi-norme $|\cdot|_i$ de la famille est sou-multiplicative, c'est à dire vérifiant :

$$|xy|_i \leq |x|_i |y|_i, \text{ pour tous } x, y \in E.$$

alors l'algèbre (E, τ) est dite localement multiplicativement pseudo-convexe ou localement m -pseudo-convexe (*a.l.m.pseudo.c.a* en abrégé). Si $p_i = p$, pour tout $i \in I$, ces algèbres sont dites localement p -convexes (*a.l.p.c.* en abrégé), localement- p -convexes (*a.l.A.p.c.* en abrégé), localement uniformément A - p -convexes (*l.u.A.p.c.*) et localement m - k -convexes (*l.m.p.c.*). En particulier, lorsque $p = 1$, ces algèbres sont localement convexes (*l.c.*), localement A -convexes (*l.A.c.*), localement uniformément A -convexes (*l.u.A.c.*) et localement m -convexes (*l.m.c.*).

Pour des raisons de commodité, une algèbre localement m -pseudo-convexe séparée complète E est appelé algèbre pseudo-Michael ([4]). Et si elle est localement m - p -convexe, elle sera appelée algèbre p -Michael. Enfin, si $p = 1$, E est dite algèbre de Michael. Si l'hypothèse de complétude est omise dans ces définitions, on les appellera algèbres *pre*-Michael au lieu de Michael.

4.4 Algèbres ordinaires pseudo-*pre*-Michael spectralement étoilées.

Soit $(E, |\cdot|_{i \in I})$ une algèbre pseudo-*pre*-Michael ordinaire et spectralement étoilée. Quand est ce que $E/Rad(E)$ est un corps ?

Le résultat suivant nous donne une réponse à cette question dans le cas où l'algèbre est advertiblement complète. Considérons la classe des algèbres pseudo-*pre*-Michael advertiblement complètes. Soit (E, τ) une algèbre pseudo-Michael dont la topologie est définie par la famille $(|\cdot|_{i \in I})$ des p_i -semi-normes supposée saturées ([4], Définition 4. 3.7, p. 191) avec $(0 < p_i \leq 1)$. Il est bien connu dans ([4], Theorem 4.5.3, p. 202) qu'une algèbre pseudo-Michael E est limite projective $\varprojlim \hat{E}_i$ d'algèbres p_i -Banach avec $\hat{E}_i$ est l'algèbre complétée de l'algèbre normée $E_i = E/ker |\cdot|_i$, munie de la p_i -norme $|\pi(x)|_i = |x|_i$ et π_i est la surjection canonique de E dans E_i . Et que toute algèbre *pre*-pseudo-Michael est une sous-algèbre dense dans la limite projective $\varprojlim \hat{E}_i$ d'algèbres p_i -Banach $\hat{E}_i$.

Proposition 3.1.1. Soit $(E, |\cdot|_{i \in I})$ une algèbre pseudo-*pre*-Michael unitaire. Alors E est advertiblement complète, si et seulement si, E est une algèbre pleine dans sa complétée $\hat{E}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément inversible dans $\hat{E}$. Alors il existe un $b = a^{-1} \in \hat{E}$

tel que $ab = ba = e$. Soit $(b_i)_{i \in I}$ une suite généralisée dans E qui converge vers b . Donc elle est de Cauchy et que les suites généralisées $(xb_i)_i$ et $(b_ix)_i$ convergent vers e . Et puisque E est advertiblement complète, la suite $(b_i)_{i \in I}$ converge dans E et par suite $b = a^{-1} \in E$. Réciproquement, soit $(x_i)_{i \in I}$ une suite généralisée de Cauchy advertiblement convergente et x_0 sa limite dans $\hat{E}$. Alors il existe $x \in E$ tel que les suites $(xx_i)_{i \in I}$ et $(x_ix)_{i \in I}$ convergent vers e . On a alors $xx_0 = x_0x = e$ et x est donc inversible dans E et $x_0 \in E$ et par conséquent, la suite $(x_i)_{i \in I}$ converge dans E .

Corollaire 3.1.2. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-*pre*-Michael. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) E est advertiblement complète.
- 2) Pour tout $x \in E$, $x \in G(E)$ si et seulement si $\pi_i(x) \in G(E_i)$, pour tout $i \in I$.

Preuve : Soit $x \in E$. Puisque E est advertiblement complète, on a :

$$x \in G(E) \Leftrightarrow x \in G(\hat{E})$$

Et par ([4], Proposition 4.5.6, p. 205), on a :

$$x \in G(E) \Leftrightarrow \pi_i(x) \in G(\hat{E}_i), \text{ pour tout } i \in I.$$

Réciproquement, $x \in E$ inversible dans E si, et seulement si,

$$\pi_i(x) \in G(\hat{E}_i), \text{ pour tout } i \in I \Leftrightarrow x \in G(\hat{E}).$$

Et par suite, E est pleine dans $\hat{E}$ et on conclut par la proposition 3.1.

En utilisant la proposition 4.5.6 ([4], p. 205), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3.1.3. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-*pre*-Michael unitaire et advertiblement complète. Alors on a :

- i) $\rho(x) = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (|x^n|_i)^{1/nk_i} \right\}$, pour tout $i \in I$.
- ii) $Sp_E(x) = \bigcup_{i \in I} Sp_{\hat{E}_i(\pi_i(x))}$, pour tout $x \in E$.

Comme conséquence, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.1.4. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-*pre*-Michael unitaire et commutative. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) E est advertiblement complète.
- ii) $Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(\hat{E})\}$

En utilisant tous ces résultats, on montre le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre ordinaire pseudo-*pre* Michael unitaire et advertiblement complète. Si E est spectralement étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Commençons tout d'abord par le cas où l'algèbre est commutative et semi-simple. Pour $x \in E$ fixé, $Sp_E(x)$ est étoilé, donc il existe $\alpha \in Sp_E(x)$ tel que, $Sp_E(x)$ contient tout segment reliant α à un élément $\lambda \in Sp_E(x)$. Supposons que $Sp_E(x)$ contient un autre point $\alpha \neq \lambda$ et $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(E)$ tels que : $\chi_1(x) = \alpha$ et $\chi_2(x) = \lambda$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$t\chi_1 + (1 - t)\chi_2 \in Sp_E(x)$$

Posons :

$$f_t = t\chi_1 + (1 - t)\chi_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

On a f_t est une forme lineaire dans E vérifiant : $f_t(a) \in Sp_E(a)$, pour tout $a \in E$. Comme l'algèbre E est ordinaire, il en découle que $f_t \in \mathcal{M}(E)$, ce qui n'est pas toujours vrai (pour $t = 1/2$ par exemple). Ainsi on conclut, par la proposition 1.1 du chapitre 2.

Dans le cas général, on montre aussi que pour tout $x \in E$, $Sp_E(x)$ est un singleton. Etant donné un $x \in E$, soit C_x la sous algèbre maximale commutative de E engendrée par x et e . Alors C_x est une algèbre pseudo-*pre*-Michael advertiblement complète vérifiant :

$$Sp_E(y) = Sp_{C_x}(y), \quad \text{pour tout } y \in C_x$$

De plus $C_x/Rad(C_x)$ est commutative semi-simple advertiblement complète pseudo-*pre*-Michael qui est ordinaire et spectralment étoilée. Par la première partie de la preuve, on a : $C_x/Rad(C_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Par suite $Sp_{C_x}(y)$ est un singleton, pour tout $y \in C_x$. Ainsi $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout $x \in E$. Puis, on conclut par la proposition 1.1 du chapitre 2.

Comme conséquence on a ce qui suit :

Corollaire 3.1.6. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre ordinaire pseudo-*pre*-Michael unitaire et advertiblement complète. Si E est spectralment convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. S'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $x \in V$, $Sp_E(x)$ est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.7. En utilisant la proposition ([18], p. 123), on peut remplacer ordinaire par l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- Le spectre de tout élément est borné.
- Le spectre de tout élément est fermé et $\subsetneq \mathbb{C}$
- Le spectre de tout élément est compact.

Puisque une Q-*algèbre* topologique est spectralement bornée ([10], Theorem 6.11, p.74) et elle est advertiblement complète ([10], Theorem 6.5, p.71), on a le résultat suivant :

Corollaire 3.1.8 : Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une Q-*algèbre* pseudo-*pre*-Michael unitaire. Si E est spectralment étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans ([1]), M. Abel a défini une topologie d'algèbre $m(\tau)$ dans l'algèbre localement A -pseudoconvexe (E, τ) qui est la moins fine parmi les topologies d'algèbres pseudo-*pre*-Michel et qui est plus fine que τ . Comme conséquence de ce résultat, on obtient ce qui suit :

Corollaire 3.1.9. Soit (E, τ) une algèbre localement A -pseudo-convexe, unitaire et advertiblement complète. Si E est spectralement bornée et étoilée, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.1.10 Soit (E, τ) une algèbre localement uniformément A -pseudo-convexe unitaire et advertiblement complète. Dans ([3]), El Kinani et Oudadess ont exhibé une famille dénombrable $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de q_n semi-norms homogènes avec $0 < q_n \leq 1$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans E vérifiant : $(E, \|\cdot\|_n)$ est une algèbre pseudo-*pre*-Michael métrisable et que la topologie définie par la famille $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est plus fine que τ . Il en découle que $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, dans le cas où E est ordinaire (en particulier spectralement borné) et spectralment étoilé.

4.4.1 Cas d'une involution d'algèbre

Dans ([15], Théorème 3.1), on a montré que si tout élément normal de l'algèbre d'Arens Michael involutive ordinaire E (en particulier algèbre d'Arens Michael*-spectrale) a un spectre convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Dans cette section, on va examiner les résultats précédents dans la classe des algèbres pseudo-Michael ordinaires. Et on montre que les résultats restent encore vrais dans la classe des algèbres pseudo-Michael involutives (en particulier dans les algèbres pseudo-Michael * spectrales comme le montre le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. Soit $(E, |\cdot|_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-Michael involutive unitaire et * spectrale. Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $x \in E$ un élément normal. Alors x est contenu dans une sous-algèbre commutative maximale involutive et fermée C_x de E et

$$Sp_{C_x}(y) = Sp_E(y), \quad \text{pour tout } y \in C_x.$$

Puisque tout élément de C_x est normal, alors C_x est spectralement étoilé. Et on aura, par le théorème 3.1, $C_x/Rad(C_x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que $Sp_E(x)$ est un singleton, pour tout élément normal x de E . En particulier, $Sp_E(h)$ est un singleton, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$. Ceci implique que E est une algèbre hermitienne. Considérons maintenant l'algèbre pseudo-Michael semi-simple $B = E/Rad(E)$, munie de l'involution canonique déduite de celle de E . Alors B est aussi hermitienne et

$$\rho_B(h) < \infty, \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}(B)$$

Comme pour les algèbres d'Arens Michael involutives ([10], Théorème 22.1., p.281). On montre que la fonction de Pták p_B et le rayon spectral ρ_B coïncident sur $\mathcal{H}(B)$ et que $ker(p_B) = \{0\}$. Soit maintenant $h \in \mathcal{H}(B)$ et considérons M_h la sous algèbre involutive

maximale commutative fermée de B contenant e et h . Puisque tout élément de M_h est normal, comme dans le cas des algèbres d'Arens Michael involutives ([10], Corollaire 22.15., p. 291), p_B est une $\mathbb{C}^*$ -norme dans B . En particulier, M_h est semi-simple. et par le Théorème 3.1.5, il est isomorphe à $\mathbb{C}$ et donc B est aussi isomorphe à $\mathbb{C}$, ceci termine la preuve.

Comme conséquence immédiate on a aussi le résultat suivant :

Corollaire 3.2.2. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-Michael involutive unitaire et $*$ spectrale.

- 1) Si le spectre de tout élément normal de E est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.
- 2) S'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $x \in V \cap \mathcal{N}(E)$, $Sp_E(x)$ est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.2.3. Comme dans le corollaire 3.4, on montre que le second résultat de S. Bhatt ([5], Theorem 4, p. 728) reste encore vrai dans le cas d'une Q-algèbre pseudo-*pre*-Michael involutive.

En utilisant le Corollaire 5.3.5 ([4], p. 236), le résultat suivant peut être montré de la même manière que le Théorème 5.6 ([10], p. 67) :

Lemme 3.2.4. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre p -Michael, avec $0 < p \leq 1$, involutive et unitaire. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ et $\rho_E(h) < 2^p - 1$: Alors il existe $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = 1/2(u + u^*)$. En particulier, si $\rho_E(h) < +\infty$, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$, alors $\mathcal{H}(E)$ est engendré par l'ensemble $\mathcal{U}(E)$ de ses éléments unitaires.

Dans le cas où $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ est une algèbre p -Michael avec $0 < p \leq 1$, il suffit de supposer que le spectre de tout élément unitaire est étoilé, comme dans le cas Banach, ([5], Theorem 6, p. 729), pour montrer que l'algèbre modulo son radical est isomorphe à $\mathbb{C}$:

Théorème 3.2.5. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre p -Michael, avec $0 < p \leq 1$, unitaire, $*$ spectrale et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire est étoilé, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$:

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. On a $Sp_E(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Il s'ensuit, du fait que le spectre de tout élément unitaire est étoilé, que $Sp(u)$ est un singleton. Le reste de la preuve se fait de la même manière que dans le théorème 4.1.

4.4.2 Cas d'une involution anti-morphisme.

Si l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme, en utilisant un résultat analogue au théorème de Kaplansky et à l'aide d'un théorème de structure, qui montre qu'une algèbre pseudo-Michael est limite projective d'algèbres p_i -Banach, ($0 < p_i \leq 1$), on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.3.1. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-Michael unitaire, munie d'une

involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal est étoilé, alors, $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : L'algèbre $B = E/Rad(E)$, munie de l'involution canonique déduite de celle de E , est hermitienne. On va montrer que B est commutative et on va conclure comme dans la première étape de la preuve du théorème 4.1. Puisque B est semi-simple, l'anti-morphisme $x \mapsto x^*$ est continu. Donc l'algèbre $\mathcal{H}(B)$ est une algèbre pseudo-Michael réelle telle que :

$$Sp_{\mathcal{H}(B)}(h) = Sp_B(h) \subset \mathbb{R}, \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}(B)$$

De plus, en utilisant le théorème 3.10 de ([21]), on montre que le résultat de Kaplansky ([11], Theorem 4.8) est encore valable dans les algèbres pseudo-Michael, du fait que ces derniers sont considérées à l'aide du théorème de structures, comme limites projectives d'algèbres p_i -Banach ($0 < p_i \leq 1$) et que le théorème de Kaplansky est aussi vrai dans les algèbres p_i -Banach $0 < p_i \leq 1$. Par conséquent on a $\mathcal{H}(B)/Rad(\mathcal{H}(B))$ est commutative. Enfin, montrons que $\mathcal{H}(B)$ est semi-simple. Soit $h \in \mathcal{H}(B)$ et $a = u + iv \in B$, lorsque $u, v \in \mathcal{H}(B)$. Alors on a $\rho(hu) = 0$ et $\rho(hv) = 0$. Donc $\rho(ha) = 0$. De plus, soit $\lambda = \alpha + i\beta \in Sp_B(ha)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $hu - \alpha$ est inversible, alors

$$ha - \lambda = (hu - \alpha)[e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)]$$

Puisque B est hermitienne et $(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta) \in \mathcal{H}(B)$, il s'ensuit que $e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)$ est inversible, ce qui est impossible. Par suite $(hu - \alpha)$ n'est pas inversible et $\alpha \in Sp_B(hu)$. Donc $\alpha = 0$ et de la même manière, on montre que $\beta = 0$ et par suite $h \in Rad(\mathcal{H}(B)) = 0$, ce qui complète la preuve.

Comme une conséquence, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.3.2. Soit $(E, | \cdot |_i)_{i \in I}$ une algèbre pseudo-Michael munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de E est convexe, alors $E/Rad(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Bibliographie

- [1] M. Abel, J. Arhippainen : Locally m -pseudoconvex topologies on locally A -pseudoconvex algebras. Czechoslovak Math. J. 54(3) (2004), 675-680.
- [2] M. Abel. Advertive topological algebras. Institute of Pure Mathematics, University of Tartu 46 Vanemuise Str. 232, 51014 Tartu, ESTONIA (2001).
- [3] M. Abel, A. El Kinani and M. Oudadess. On locally uniformly A -pseudoconvex algebras. Rocky Mountain Journal of Mathematics Volume 37, Number 1, 2007.
- [4] V. K. Balachandran : Topological Algebras. North-Holland, Amsterdam 2000.
- [5] S. Bhatt. Spectrally convex Banach algebras. Indian J. Pure Appl. Math.10 (1979),no.6,
- [6] F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.Springer-Verlag,NewYork-Heidelberg, 1973.
- [7] A. C. Cochran. Representation of A -convex algebras.Proc. Amer. Math.Soc., 41, (1973), 473-479.
- [8] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, On a class of topological algebras. Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [9] J.Cuntz,(1976) Locally $\mathbb{C}^*$ -equivalent algebras, J. Functional Analysis, 23 (2), 95-107.
- [10] M. Fragoulopoulou, Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam,2005.
- [11] I. Kaplansky. Normed algebras. Duke Math. J. 16 (1949), 399-418.
- [12] [9] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics.North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [13] E. A.Michael, Locallymultiplicatively-convex topological algebras.Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
- [14] M. Oudadess. Thérèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A -convexes. C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 296 (1983), 851-853.
- [15] A. Ouhmidou, A. El Kinani, On Spectrally convex ordinary algebras.Indian J. Pure Appl. Appl. Math, Springer, (2021) vol. 53(2), pages 349-354.
- [16] A. Ouhmidou, A. El Kinani, Spectrally starred advertibly complete A - p -normed algebras Revista Colombiana de Matematicas Volumen 57 (2023)1, 115-122.
- [17] V. Ptak, Banach algebras with involution . Manuscripta Math.6(1972), 245-290.
- [18] M. Roitman, Y. Sternfeld, When is a linear functional multiplicative? Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.
- [19] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Duke Math. J. 23 (1956), 1-11.
- [20] J. H. Williamson. On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734.
- [21] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras algebras. Lecture note series 31 (1971).

- [22] L. Waelbroeck : Topological vector spaces and algebras. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

ANNEXE : QUELQUES RESULTAS DE TYPE GELFAND-MAZUR

Introduction :

Dans cette annexe, on montre que si $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée, unitaire, semi simple et advertiblement complète, telle que pour tout $x \in Fr(G(E))$, $Sp_E(x)$ est étoilé, pour tout $y \in B_x$, avec B_x est la sous-algèbre maximale commuative engendrée par $\{x, e\}$. Alors $E/RadE \simeq \mathbb{C}$.

Dans le cas involutif, on obtient le même résultat si on suppose que le spectre de tout élément normal de la frontière de $G(E)$ est étoilé. Si de plus l'algèbre est supposée hermitienne, il suffit de supposer que le spectre de tout élément unitaire de la frontière de $G(E)$ est étoilé pour aboutir à la même conclusion. Enfin, on traite le cas où l'algèbre est munie d'une involution anti-morphism, on obtient des résultats parallèles au cas de l'involution d'algèbre, en utilisant un résultat de Kaplansky, qui montre que l'algèbre est en fait commutative.

Algèbre A - p normée semi-simple advertiblement complètes :

On va montrer que tous les résultats du chapitre précédent peuvent être retrouvés en supposant seulement que le spectre des éléments sont étoilés uniquement sur la frontière de $G(E)$. On commence par le cas non involutif et on montre le résultat suivant :

Théorème 1.1 :

Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, où $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée unitaire semi-simple et advertiblement complète. Si pour tout $x \in Fr(G(E))$, $Sp_E(y)$ est étoilé, pour tout $y \in B_x$, B_x est la sous-algèbre maximale, commutative, engendrée par $\{e, x\}$. Alors $E/RadE \simeq \mathbb{C}$.

Preuve : Montrons tout d'abord que le spectre de tout élément de la frontière de $G(E)$ est réduit à un singleton. Soit $x \in Fr(G(E))$, alors pour tout $y \in B_x$ on a $Sp_E(y) = Sp_{B_x}(y)$ et puisque l'algèbre est Q - p -normée, elle est à spectre fonctionnel et on a :

$$Sp_E(y) = \{\chi(y) : \chi \in \mathcal{M}(B_x)\}$$

Soit $y \in B_x$. Puisque $Sp_E(y)$ est étoilé, il existe un $\alpha \in Sp_E(y)$ tel que pour tout $\lambda \in Sp_E(y)$, le segment joignant α et λ est contenu dans Sp_E . Il s'en suit que $Sp_E(y) = \{\alpha\}$, car sinon, il existe un autre point $\lambda \neq \alpha$ dans $Sp_E(y)$, et par suite, $\alpha = \chi_1(y)$ et $\chi_2(y) = \lambda$, avec $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}(B_x)$. Donc pour tout $0 < t \leq 1$ on a :

$$t\chi_1 + (1-t)\chi_2 \in Sp_E(y)$$

Posons $f = t\chi_1 + (1-t)\chi_2$. Puisque B_x est ordinaire alors f est un caractère, ce qui n'est vrai que si le spectre global de l'algèbre est réduit à un singleton. Par ailleurs, puisque x est non inversible on déduit que :

$$Sp_E(x) = \{0\}, \text{ pour tout } x \in Fr(G(E))$$

Montrons en suite que

$$G(E)^c = Rad(E).$$

il est clair que $Rad(E) \subset G(E)^c$. Pour l'inclusion inverse, soit $x_0 \in G(E)^c$, puisque $Sp_E(x_0)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$, on a $Fr(Sp_E(x_0))$ est non vide. Soit $\lambda \in Sp_E(x_0)$ et $\lambda_0 \in Fr(Sp_E(x_0))$, alors $x_0 - \lambda_0 e \in Fr(G(E))$ et on a

$$\lambda - \lambda_0 \in Sp_E(x_0 - \lambda_0 e) = \{0\}$$

donc $\lambda = \lambda_0$. Et par suite on a

$$Sp_E(x_0) = \{0\}, \forall x_0 \in G(E)^c$$

Soit $y \in E$. Alors $x_0 y \in G(E)^c$ ou $y x_0 \in G(E)^c$. et par suite on a

$$\rho(x_0 y) = 0, \text{ pour tout } y \in E.$$

Ce qui entraine que $x_0 \in Rad E$. Comme E est semi-simple, $Rad E = \{0\}$ et on aura $G(E)^c = \{0\}$. Tout élément non nul de E est inversible, d'après le théorème de Gelgand-Mazur, $E \simeq \mathbb{C}$.

Commme conséquence immédiate on a le résultat suivant :

Corollaire 1.2 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée unitaire semi simple et advertiblement complète (en particulier une algèbre p Banach et donc de Banach). si pour tout $x \in Fr(G(E))$, $Sp_E(y)$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$, pour tout $y \in B_x$. Alors $E \simeq \mathbb{C}$.

Remarque 1.3 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée unitaire semi-simple et admissible complétée. Si pour tout $x \in Fr(G(E))$, $Sp_E(x)$ est réduit à un singleton, alors $Sp_E(x) = \{0\}$, pour tout $x \in Fr(G(E))$. Les mêmes arguments utilisés dans la preuve du Théorème précédent nous permettent de conclure que $E \simeq \mathbb{C}$.

2. Cas d'une algèbre involutive :

Dans ([5], Theorem 4, p.728), Bhatt a montré que si le spectre de tout élément normal d'une algèbre de Banach involutive E est convexe, alors $E/RadE \simeq \mathbb{C}$.

Dans le chapitre précédent, on a montré que le résultat s'étend aux algèbres A - p normées admissiblement complètes unitaires et dont le spectre de tout élément normal est étoilé et lorsque l'algèbre est munie d'une involution généralisée.

En fait ce résultat reste encore vraie avec l'hypothèse que le spectre de tout élément normal de la frontière de $G(E)$. Comme le montre le résultat suivant :

Théorème 2.1 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, avec $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée unitaire semi-simple et admissible complète, munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$. Si pour tout $x \in Fr(G(E) \cap \mathcal{N}(E))$, $Sp_E(x)$ est étoilé, Alors $E/Rad(E) \simeq \mathbb{C}$.

Preuve : Soit x un élément normal de $Fr(G(E))$. Alors x est contenu dans la sous algèbre fermée maximale commutative B_x et stable par involution telle que $Sp_E(y) = Sp_{B_x(y)}$ pour tout $y \in B_x$ et puisque B_x est ordinaire car c'est une sous algèbre d'une algèbre Q - p normée on a :

$$Sp_E(x) = \{\chi(x) : \chi \in \mathcal{M}(B_x)\}$$

Comme B_x est une algèbre ordinaire car elle est spectralement bornée et d'une manière analogue à celle utilisée précédemment on montre que $sp_E(x)$ est réduit à un singleton. Il s'ensuit que $sp_E(x) = \{0\}$ pour tout $x \in Fr(G(E)) \cap \mathcal{N}(E)$

Soient maintenant un $x_0 \in G(E)^c$, $\lambda \in Sp_E(x_0)$ et $\lambda_0 \in Fr(Sp_E(x_0))$. Alors $x_0 - \lambda_0 e \in Fr(G(E))$ et par suite $\lambda - \lambda_0 \in Sp_E(x_0 - \lambda_0 e) = \{0\}$.

Donc $\lambda = \lambda_0$. Ce qui entraîne que $Sp_E(x_0)$ est réduit à un singleton. Par conséquent

$$Sp_E(x_0) = \{0\}, \text{ pour tout élément normal } x_0 \in G(E)^c.$$

En particulier, $Sp_E(h) = 0$, pour tout élément hermitien h de $G(E)^c$. Ceci implique que l'algèbre E est hermitienne et que $Sp_E(h)$ est réduit à un singleton, pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$. Et comme dans ([20]), on peut montrer que la fonction de Ptàk p_E , donnée par : $p_E(x) = \rho(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in E$ est une norme d'algèbre sur E .

Considérons un $h \in \mathcal{H}(E)$ et M_h la sous -algèbre maximale, fermée, commutative et auto-djointe de E , engendrée par e et h . On a $Sp_{M_h}(x)$ est un singleton, pour tout $x \in M_h$. De plus M_h est semi simple, en effet, si $a \in RadM_h$ on a $a^*a \in RadM_h$ et $p_E(a) = \rho_E(a^*a) = 0 \rightarrow a = 0$. Il s'en suit que M_h est isomorphe à $\mathbb{C}$ et par conséquent E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Comme une application on a le résultat suivant :

Corollaire 2.2 : Soit $(E, \| \cdot \|)_p$, avec $0 < p \leq 1$, une algèbre A - p normée unitaire semi-simple et admissible complète, munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ (en particulier algèbre p Banach involutive ou algèbre de Banach involutive) . Si $\forall x \in Fr(G(E) \cap \mathcal{N}(E))$, $Sp_E(x)$ est convexe. Alors $E/Rad(E) \simeq \mathbb{C}$.

En utilisant ([20], Theorem 5.4, p. 65) , On peut montrer de la même manière que dans ([6], Proposition 14, p. 66), le résultat suivant :

Lemme 2.3 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach involutive. Soit $h \in \mathcal{H}(E)$ vérifiant $\rho_E(h) < 1$, alors il exist $u \in \mathcal{U}(E)$ tel que $h = \frac{1}{2}(u + u^*)$. En particulier E est engendrée par ses éléments unitaires.

Dans le cas hermitien, il suffit de supposer que le spectre de tout élément unitaire de la frontière de $G(E)$ est étoilé pour retrouver le même résultat comme le montre ce qui suit :

Théorème 2.4 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach unitaire semi simple et hermitienne. Si le spectre de tout élément unitaire

de la frontière de $G(E)$ est étoilé, alors $E \simeq \mathbb{C}$.

Preuve : Soit $u \in \mathcal{U}(E)$. en utilisant le résultat de ([20], Théorème 22.1, p. 281) on a : $\rho_E(u) \leq p_E(u) = 1$. Ce ci implique que $|\lambda| \leq 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. De plus on a

$$Sp_E(u) = Sp_E(u^*) = Sp_E(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in Sp_E(u)\}.$$

Ceci entraine que $|\lambda| = 1$, pour tout $\lambda \in Sp_E(u)$. Et par conséquent le spectre de tout élément unitaire de l'algèbre est contenu dans le cercle unité, donc doit être réduit à un singleton.

Par suite le spectre de tout élément hermitien de la frontière de $G(E)$ est un singleton et on a $Sp_E(h) = \{0\}$, pour tout $h \in Fr(G(E) \cap \mathcal{H}(E))$ et le reste de la preuve découle de manière analogue que dans le théorème précédent.

3. Cas d'une involution anti-morphisme :

Dans le cas où l'algèbre est munie d'une involution anti-morphisme, l'idée repose sur un analogue au théorème de Kaplansky qui nous permet de montrer que l'algèbre est en fait commutative, et nous retrouvons ainsi le résultat comme le montre ce qui suit :

Théorème 3.1 :

Soit $(E, \|\cdot\|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach unitaire semi simple, munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de $Fr(G(E))$ est étoilé, alors E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : On va montrer que E est commutative et on va conclure par la première étape de la preuve du théorème 2.4. Comme E est semi simple, l'anti-morphisme $x \mapsto x^*$ est continu et par suite l'algèbre $\mathcal{H}(E)$ est une algèbre réelle p -Banach qui vérifie

$$Sp_{\mathcal{H}(E)}(h) = Sp_E(h) \subset \mathbb{R},$$

pour tout $h \in \mathcal{H}(E)$. De plus en utilisant ([26], Theorem 3.10), on peut montrer que le résultat de Kaplansky ([15, Theorem 4.8]) est encore valable dans les algèbres p Banach, ce qui entraine que l'algèbre $\mathcal{H}(E)/Rad(\mathcal{H}(E))$

est commutative. Pour conclure il reste à montrer que $\mathcal{H}(E)$ est semi-simple. Soit $h \in \text{Rad}(\mathcal{H}(E))$ et $a = u + iv \in E$, avec $u, v \in \mathcal{H}(E)$. Alors

$$\rho(hu) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(hv) = 0.$$

Et par suite $\rho(ha) = 0$. En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta \in \text{Sp}_E(ha)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $hu - \alpha$ est inversible, alors

$$a - \lambda = (hu - \alpha)[e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)].$$

Puisque E est hermitienne et

$$(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta) \in \mathcal{H}(B),$$

il s'ensuit que $e + i(hu - \alpha)^{-1}(hv - \beta)$ est inversible, ce qui est impossible. Donc $hu - \alpha$ n'est pas inversible i.e., $\alpha \in \text{Sp}_E(hu)$. Il en résulte que $\alpha = 0$. De la même manière, on montre que $\beta = 0$, et par conséquent $\text{Rad}(\mathcal{H}(E)) = 0$. Ce qui complète la preuve.

Comme conséquence on a :

Corollaire 3.2 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach unitaire semi simple, munie d'une involution anti-morphisme $x \mapsto x^*$. Si le spectre de tout élément normal de $\text{Fr}(G(E))$ est convexe, alors E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 3.3 : Soit $(E, \| \cdot \|_p)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p -Banach unitaire semi simple et hermitienne, munie d'une involution $x \mapsto x^*$ anti-morphisme. Si le spectre de tout élément unitaire de la frontière de $G(E)$ est étoilé, on peut montrer de manière analogue que E est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Bibliographie générale

- [1] M. Abel, J. Arhippainen : Locally m-seudoconvex topologies on locally Apseudoconvex algebras. Czechoslovak Math. J. 54(3) (2004), 675-680.
- [2] M. Abel, A. El Kinani and M. Oudadess. On locally uniformly Apseudoconvex algebras. Rocky Mountain Journal of Mathematics Volume 37, Number 1, 2007.
- [3] M. Abel, Advertive topological algebras. Institute of Pure Mathematics, University of Tartu 46 Vanemuise Str. 232, 51014 Tartu, ESTONIA (2001).
- [4] M. Abel, A. El Kinani and M. Oudadess, On locally uniformly Apseudoconvex algebras. Rocky Mountain Journal of Mathematics Volume 37, Number 1, 2007.
- [5] [3] G.R. Allan. Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 329-340.
- [6] B. Aupetit. On scarcity of operators with finite spectrum. Bull. Am. math. Soc., 83 (3) 485-86.
- [7] R.Arens, The space L^w and convex topological rings . Bull.Amer. Math. Soc.52, (1946). 931-935.
- [8] F. F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.Springer-Verlag, NewYork-Heidelberg, 1973
- [9] S. Bhatt. Spectrally convex Banach algebras. Indian J. Pure Appl. Math.10 (1979),no.6,
- [10] V. K. Balachandran : Topological Algebras. North-Holland, Amsterdam 2000.
- [11] M. Chahboun, A. El kinani, Convexifiée d'une topologie d'algèbre A-p-normée. Fonctiones et Approximatio XXIX (2001) (89-97)
- [12] M. Chahboun, A. El kinani, M. Oudadess. Algèbres A-p-normées advertiblement complètes. Bull. Belg. Math. Soc. 7 (2000), 277-284
- [13] M. Chahboun, A. El kinani, M. Oudadess. Les algèbres A-F-normées advertiblement complètes Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo Serie II, Tomo XLIX (2000), pp. 151-162

- [14] A. C. Cochran. Representation of A -convex algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 41, (1973), 473-479.
- [15] A. C. Cochran, R. Keown, C. R. Williams, On a class of topological algebras. Pacific J. Math. 34 (1970), 17-25.
- [16] J. Cuntz, (1976). Locally $\mathbb{C}^*$ -equivalent algebras. j. Functional Analysis, 23(2), 95-107
- [17] Doran, R.S. and Belfi, V.A., Characterizations of $\mathbb{C}^*$ -algebras : The Gelfand-Naimark Theorems, Marcel Dekker, Inc., New York, (1986).
- [18] M. Fragoulopoulou, Topological algebras with involution. North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005.
- [19] J. Ford. A square root lemma for Banach star-algebra, J. London Math. Soc., 42(1967) ; 521-522.
- [20] Eberhard Kaniuth A course in commutative Banach Algebras Springer Graduate Texts in Mathematics 246.
- [21] [I] I. Kaplansky. Normed algebras. Duke Math. J. 16 (1949), 399-418.
- [22] A. Mallios, Topological Algebras. Selected Topics. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [23] E. A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
- [24] M. Oudadess. Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A -convexes. C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 296 (1983), pp. 851-853. A.
- [25] M. Oudadess. Quelques exemples d'algèbres A -normées Revista Colombiana de Matematicas Volumen 29 (1995), paginas 31-41
- [26] A. Ouhmidou, A. El Kinani, On Spectrally convex ordinary algebras. Indian J. Pure Appl. Math ; Springer, vol. 53(2), pages 349-354, (2021)
- [27] A. Ouhmidou, A. El Kinani, Spectrally starred advertibly complete A - p -normed algebras Revista Colombiana de Matematicas Volumen 57 (2023)1. 115-122,
- [28] V. Ptak, Banach algebras with involution . Manuscripta Math. 6(1972), 245-290

- [29] M. Roitman, Y. Sternfeld, When is a linear functional multiplicative? Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), no. 1, 111-124.

- [30] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, (1973).

- [31] L. Waelbroeck : Topological vector spaces and algebras. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

- [32] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Duke Math. J. 23 (1956), 1-11.

- [33] J. H. Williamson. On topologising the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 729-734

- [34] J. Zemanek, (1977). A note on the radical of a Banach algebra. Manuscripta Math., 20, 191-96

- [35] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras algebras. Lecture note series 31 (1971).

- [36] W. Zelazko, On the locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. t. XIX, pp. 333-355.



N° d'ordre :

Résumé (200 mots max.)

S. Bhatt (1979) a montré que si une algèbre de Banach complexe E , est spectralement convexe (c'est à dire que le spectre de tout élément de l'algèbre est convexe), alors E est presque isomorphe à C , c'est à dire que $E/\text{Rad}(E)$ est isomorphe à C , où $\text{Rad}(E)$ désigne le radical de Jacobson de E . Dans le cas involutif, il a obtenu la même conclusion, en supposant que le spectre de tout élément normal de l'algèbre est convexe. Si de plus, l'algèbre est hermitienne et le spectre de tout élément unitaire est convexe, alors il obtient également que l'algèbre E est presque isomorphe à C . Dans ce travail, nous montrons que plusieurs algèbres ordinaires spectralement convexes sont presque isomorphes à C , c'est le cas, par exemple, pour les algèbres spectralement bornées, les Q -a.l.m.c., les a.l.A.c. advertiblement complètes ordinaires. Nous produisons une étude approfondie des algèbres spectralement convexes à involution généralisée. Plusieurs résultats importants sont également obtenus pour le cas d'une involution anti-morphisme. Nous produisons également une étude approfondie des algèbres spectralement étoilées et ceci dans le cadre tout à fait général des algèbres pseudo-convexes.

Mots-clefs (5) : spectralement convexe, spectralement étoilé, algèbre ordinaire, algèbres advertiblement complète, involution anti-morphism

Abstract

S. Bhatt (1979) showed that if a complex Banach algebra E is spectrally convex (i.e. the spectrum of any element of the algebra is convex), then E is almost isomorphic to C , i.e. that is, $E/\text{Rad}E$ is isomorphic to C , where $\text{Rad}E$ denotes the Jacobson radical of E . In the involutive case, he obtained the same conclusion, assuming that the spectrum of any normal element of the algebra is convex. If furthermore, the algebra is Hermitian and the spectrum of any unitary element is convex, then it also obtains that the algebra E is almost isomorphic to C . In this work, we show that several ordinary spectrally convex algebras are almost isomorphic to C , this is the case, for example, for spectrally bounded algebras, Q -a.l.m.c., ordinary advertibly complete a.l.A.c. We produce an in-depth study of spectrally convex algebras with generalized involution. the case of an anti-morphism involution. We also produce an in-depth study of spectrally star algebras within the very general framework of pseudo-convex algebras.

Keywords (5) : Spectrally convex, Spectrally starred, ordinary algebras, advertibly complete algebras, anti-morphism involution.