

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation
Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales-Fès



المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني و التعليم العالي
و البحث العلمي

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية - فاس

Centre des Etudes Doctorales : Sciences Economiques et Gestion

**Laboratoire de Recherche : Centre d'Etude et de Recherche en analyse et
prospection économiques (CERAPE)**

Thèse pour l'obtention du Doctorat

en Sciences Economiques et Gestion

Sous le thème :

**L'adéquation de la Value at Risk à la dynamique
des marchés financiers
Application au Marché Financier Marocain**

Présentée et soutenue par :

Mohammed Amine Fouad

Sous la direction du professeur :

Toufiq KARIMI

Membres du jury :

Pr.Toufiq KARIMI

P.E.S –FSJES-FES

Président

Pr.Abderrazak EL HIRI

P.E.S –FSJES-FES

Suffragant

Pr.Abdellatif EDDAKIR

P.E.S –ENCG-FES

Suffragant

Pr.Mohammed ZEAMARI

P.E.S –FSJES-MEKNES

Suffragant

Pr.Ahmed AZOUGAGH

P.H- FSJES - FES

Suffragant

Année universitaire : 2018/2019

REMERCIEMENTS

S'il existe un moment particulièrement émouvant au cours de la thèse, c'est celui des remerciements qui marque la fin d'une aventure exceptionnelle et permet de revenir sur les moments marquants. Par ces quelques lignes, je souhaite remercier les personnes qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse. Ces années m'ont profondément marqué à tel point que je ne peux m'empêcher de rattacher cette expérience à la description de l'effet papillon par Henri Poincaré : "Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. " Loin des grands discours surchargés de compliments, ces remerciements s'adressent à ces " petites causes " qui m'ont permis de mener ce long travail jusqu'au bout.

En première ligne, je voudrais adresser mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse Pr Toufiq KARIMI, qui a accepté de diriger cette thèse et qui m'a soutenu durant toutes ces années. Je lui témoigne ici toute ma reconnaissance pour son implication, ses conseils et sa disponibilité.

Je suis profondément reconnaissante aux professeurs Abderrazak EL HIRI, Abdellatif EDDAKIR, Mohammed ZEAMARI et Ahmed AZOUGAGH d'avoir accepté de rapporter cette thèse, en dépit de leurs agendas très chargés. Mes remerciements s'adressent aussi à toute l'équipe du laboratoire CERAPE.

Une mention spéciale pour Benyounes HAMZAOUI qui a toujours été là pour moi !

A titre plus personnel, je tiens à témoigner ma reconnaissance à mes parents et mes proches, qui ont toujours cru en moi et qui m'ont soutenu dans ce projet de thèse et tout au long de ces nombreuses années d'étude. J'ai une pensée particulière pour mon père qui aurait été très fier de voir l'aboutissement de ce travail.

Je garde le mot de fin pour Sarah FASSI FIHRI, mon épouse chérie. Je lui témoigne ma reconnaissance pour son soutien permanent, pour sa patience et sa compréhension. Un immense merci pour le bonheur que son amour m'apporte.

RESUME

La complexité des marchés financiers et la recrudescence des crises particulièrement sévères contribuent à l'évolution et à la remise en cause de modèles économétriques dits classiques dans l'explication et la prévision des dynamiques financières. L'alerte donnée conjointement par les responsables prudents et les chercheurs vise à encourager le développement de modèles plus complexes, largement inspirés d'autres disciplines, pour une bonne maîtrise du risque et particulièrement le risque de marché. La réglementation internationale en vigueur pour les institutions financières a formulé certaines exigences de gestion des risques en termes de percentiles des distributions de perte. Un centile de la distribution des pertes est appelée Value-at-Risk (VaR).

Cette thèse remet en cause les modèles de la finance classique dans l'espoir d'obtenir une meilleure évaluation du niveau de risque réel des marchés financiers par la Value At Risk. La modélisation des cours boursiers doit prendre en compte les caractéristiques statistiques les plus importantes des rendements boursiers et une tout particulièrement que la plupart des modèles développés jusqu'à présent négligent les propriétés statistiques des séries financières : faits stylisés.

Nous soutenons dans cette thèse l'idée qu'une approche stochastique des chroniques financières est susceptible de conduire à de meilleurs résultats. La pertinence de cette association est évaluée pour le risque de marché dans deux cadres d'analyse distincts. Nous montrons tout l'intérêt d'une synthèse des modèles décrivant la réalité des marchés financiers pour la modélisation et la prévision de la Value-at-Risk des indices boursiers du marché financier Marocain.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	1
RESUME.....	2
SOMMAIRE	3
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	4
 INTRODUCTION GENERALE	 5
 PREMIERE PARTIE : RISQUE DE MARCHE ET L'APPROCHE VALUE AT RISK	 10
 Chapitre 1 : les marchés financiers : généralités et gestion des risques.....	 12
I. Le cadre institutionnel des marchés financiers.....	12
II. L'évolution des marchés financiers internationaux depuis les années 1980	20
III. La crise financière mondiale 2008	24
IV. Gestion économique et réglementaire des risques.....	28
 Chapitre 2 : Risque de marché	 32
I. Revue de littérature	32
II. Mesure des risques	34
III. Les théories traditionnelles de risque	35
IV. Les aspects réglementaires de risque de marché	38
 Chapitre 3 : La Value At Risk	 42
I. Présentation de l'approche VaR :	42
II. Les cas de figures de la VAR	47
 DEUXIEME PARTIE : DYNAMIQUE DES MARCHES.....	 64
 Chapitre 4 : Modélisation des cours boursiers et hypothèses de la finance classique	 65
I. Aperçu historique de la modélisation de la dynamique boursière	65
II. La théorie de l'efficacité des marchés	83
 Chapitre 5 : Modélisation mathématique des fluctuations boursières et faits stylisés	 93
I. Modèles classiques.....	93
II. Les hypothèses de la finance classique :	103
 Chapitre 6 : le comportement réel des marchés financiers : caractéristiques et propositions économétriques.....	 114
I. Les hypothèses discutables de la finance classique.....	114
II. Les propositions économétriques	127
 CHAPITRE 7 : REALISATION DU MODELE VAR ACTIONS	 146
I. Présentation et étude des données	146
II. Calcul de la VaR	162
 CONCLUSION GENERALE	 171
 ANNEXES.....	 173
 BIBLIOGRAPHIE.....	 184

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : cartographie des marchés de capitaux mondiaux en Janvier 2007	22
Figure 2 : Représentation graphique de la VAR	43
Figure 3 : Le mouvement brownien d'une particule	94
Figure 4 : loi normale	107
Figure 5 : Divers tirages aléatoires de processus de Poisson composés	142
Figure 6 : distribution à un an de processus suivant le modèle de Merton dont les sauts sont centrés. Le modèle de Merton présente des queues de distribution plus épaisses que le modèle de Black-Scholes.....	143
Figure 7 : exemple de trajectoires de processus α -stables (loi de Cauchy).....	144
Figure 8 : composition du portefeuille fictif	148

INTRODUCTION GENERALE

Les marchés financiers ont marqué une évolution et des modifications fulgurantes durant ces dernières quatre décennies. Une évolution telle que l'étude de leur fonctionnement en est devenue une tâche dont la complexité est aussi dangereusement élevée que les enjeux en question, que ce soit en termes d'équilibre autant que sur la question du devenir de l'économie mondiale. Il en a résulté qu'au degré de développement et de sophistication actuels des marchés financiers, se fier uniquement aux cours annoncés sur les bourses, pour prendre des décisions d'investissement, n'est désormais plus aussi évident ni même aussi prudent qu'il n'y paraissait il y a encore quelques années.

Face à ce constat, les théoriciens n'ont eu de cesse d'analyser sans relâche des quantités incommensurables de données empiriques relevées sur ces marchés afin d'adapter leurs réflexions et théoriser l'évolution des cours boursiers. Travail qui s'est révélé être extrêmement ardu durant ces dernières décennies, du fait que les marchés sont particulièrement incompréhensibles aussi bien pour les non-avertis que pour les spécialistes de la finance. Pour cause, l'évolution minute par minute des marchés financiers ne peut désormais être qualifiée que d'erratique. La volatilité et l'instabilité sont, ces dernières années, les mots d'ordre sur les places boursières.

Un second obstacle provient du fait que, les chercheurs académiques se sont restreints à n'envisager l'étude des marchés financiers et à considérer ces derniers que comme un ensemble de variables mathématiques, conformément aux préceptes enseignés par les "gourous¹" de la finance de marché.

La finance classique, ne s'intéressant qu'aux mécanismes d'équilibre des marchés en s'appuyant sur l'hypothèse de rationalité des investisseurs et en postulant que les marchés sont efficients, prétend encore que les cours de bourse découlent des fondamentaux économiques et des anticipations rationnelles des agents sur la situation et les perspectives de l'économie et des entreprises. Face à ces affirmations, les investisseurs n'ont jamais été aussi imprévisibles et irrationnels que durant ce contexte de myopie des horizons décisionnels que traversent aujourd'hui les marchés financiers. Plus encore, les prix qui se forment sur ceux-ci ne concordent désormais que très rarement aux prédictions des modèles standards.

A cette situation, les différentes méthodes quantitatives avec leurs différents graphiques et calculs mathématiques ne semblent plus pouvoir prétendre à une prévision efficace sans admettre les faits stylisés des séries financières². La crise de 2008 en a été une parfaite illustration et a d'ailleurs ravivé un grand débat sur les dysfonctionnements des marchés financiers.

Les experts financiers ainsi que les dirigeants politiques s'accordent à dire que cette

¹Le qualificatif de « gourou de la finance » est attribué par les médias à des investisseurs milliardaires renommés pour leurs « coups » historiques sur différents marchés, mais aussi à certains auteurs qui, pour avoir à l'occasion rencontré un certain succès de librairie, ne sont pas nécessairement eux-mêmes les investisseurs les plus avisés ni les plus influents.

² Propriétés statistiques communes à la plupart des actifs financiers.

crise financière actuelle est la plus grave depuis la Grande Dépression de 1929. En effet, son ampleur est telle qu'elle s'est propagée à l'économie réelle, provoquant par effet domino un ralentissement économique, puis une récession dans les pays du monde entier. Une des causes de cette crise majeure réside dans la mauvaise appréciation du risque des titres adossés aux crédits hypothécaires américains, notamment par les agences de notation, et de leur prolifération. Deux décennies auparavant, les options et le trading automatique ont été accusés d'être parmi les principales causes du krach boursier de 1987, notamment du fait de l'inadéquation du modèle de Black & Scholes³ pour répliquer les options du fait de la présence d'un risque résiduel négligé par le modèle. Cela illustre de manière générale l'importance cruciale de correctement estimer le risque en finance.

Les mesures du risque ont bien évolué depuis que Markowitz a avancé sa célèbre théorie de la diversification de portefeuille à la fin des années 1950, théorie qui devait révolutionner la gestion de portefeuille moderne. Dans les années 1960, Sharpe⁴ a proposé le modèle unifactoriel d'évaluation des actifs financiers où le bêta est le facteur explicatif principal du risque d'un portefeuille via la matrice des bêta.

Au début des années 1990, une nouvelle mesure du risque a fait son entrée (la banque JP Morgan en est à l'origine). En effet, on reconnaissait de plus en plus les limites des mesures traditionnelles du risque. Il fallait se donner des mesures du risque de baisse de la valeur des actifs. Pour ce faire, il fallait trouver des mesures qui sont davantage reliées à l'ensemble de la distribution des flux monétaires d'un portefeuille. C'est dans ce contexte qu'une mesure nominale du risque a été proposée : la Value-at-Risk. Quelle que soit la technique retenue, la VaR est une évaluation monétaire et probabiliste du risque de marché ce qui facilite d'autant la politique de communication de l'institution financière. A titre d'illustration, si un portefeuille est caractérisé par une VaR quotidienne à 99% égale à un million de dirhams, cela signifie qu'il existe une probabilité de 1% que la perte quotidienne sur ce portefeuille soit supérieure à un million de dirhams.

Cette mesure de risque très utile et simple d'interprétation peut être calculée par de nombreuses méthodes⁵ assez controversées. L'inconvénient majeur des méthodes classiques de calcul de la VaR reste l'estimation mal adaptée des pertes de la distribution des rendements des actifs financiers.

Choix et intérêt du thème

Une meilleure compréhension et connaissance du fonctionnement des marchés financiers internationaux, ainsi que les mécanismes de l'instabilité et de la volatilité financière

³ le modèle Black-Scholes ou modèle Black-Scholes-Merton qui est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu ; par opposition au "modèle Cox Ross-Rubinstein" qui suit un processus stochastique en temps discret. (cf. les processus stochastiques sont des fonctions du temps aléatoires)

⁴ En 1963, William Sharpe a proposé une solution dont la caractéristique essentielle consiste à faire l'hypothèse que les returns des diverses valeurs sont exclusivement liés entre eux par leur commune relation avec un facteur de base sous-jacent (indice boursier typiquement) qui permet de déterminer un coefficient appelé le "bêta" (corrélation entre le rendement d'un titre et celui du portefeuille de marché).

⁵ Voir page 62

internationale, à l'aide de la vision nouvelle apportée par la finance sont les principales motivations de notre thèse. Tout l'intérêt sera de replacer la modélisation des cours boursiers au centre de la finance dans le but d'aboutir à une compréhension et une connaissance plus profonde des divers comportements régissant les marchés allant au-delà de la simple lecture technique afin de déceler et décrypter les sentiments de ceux –ci.

En effet, nous tenons à souligner le grand intérêt qu'a représenté cette thématique pour nous, l'originalité qu'elle revêt ainsi que son apport à une réflexion renouvelée sur les marchés. Nous avons tenté, tout au long de ce travail d'apporter, en quelques sortes, une pierre à l'édifice en tentant de construire une réflexion profonde sur le fondement de cette nouvelle discipline qu'est la finance moderne afin de dévoiler l'importance de la dimension modélisation dans l'analyse de toute mécanique dans laquelle le risque est au centre. C'est d'ailleurs en ce sens que certains précurseurs de la réflexion économétrique appliquée aux marchés financiers affirment que nous assistons à la naissance de la première révolution scientifique qu'aurait à connaître la théorie financière moderne.

Problématique

La volatilité accrue et de plus en plus importante des marchés financiers pendant les dernières années combinée avec des cas spectaculaires de faillites dans le monde de la finance, a donné un regain d'intérêt évident à cet aspect important de la gestion des entreprises. Il était devenu primordial que de nouvelles techniques de gestion globale des risques s'avéraient nécessaires face à une volatilité des marchés financiers de plus en plus forte, à une complexité et un volume de plus en plus croissant des produits financiers négociés. De nos jours, et face à un environnement financier mondialement en perpétuel mouvement, il est devenu vital pour une institution financière de donner la plus grande importance à la gestion des risques auxquels elle s'expose quotidiennement et de se préparer aux plus graves scénarios pour pouvoir y faire face d'une manière efficace ou pour pouvoir ajuster ses positions en fonctions de son appétit pour le risque et de ces compétences à y faire face.

Depuis le milieu du siècle dernier, plusieurs méthodes de mesures de risque ont été développées par les chercheurs en gestion de portefeuille depuis la théorie de diversification de portefeuille de Markowitz jusqu'à la méthode de la Value at Risk développée par la banque américaine JP Morgan.

Le paramètre le plus important de la Value At Risk est la distribution des pertes et profits des rendements. Une question fondamentale se pose : comment peut-on choisir une distribution pour la variable de marché ? Idéalement, il faudrait un modèle qui soit simple et qui convienne le plus aux observations empiriques. La méthode de calcul est déterminée par la distribution choisie pour modéliser les pertes et profits du portefeuille. Empiriquement, trois principaux problèmes dans les séries temporelles financières sont détectés.

- Le premier est la non stationnarité des séries manifesté par la non stabilité des paramètres de la loi régissant les variables du processus temporel.

- Le deuxième problème est le caractère leptokurtique⁶ de la distribution des données qui consiste à des queues empiriques plus épaisses que celles considérées par la loi mise en hypothèse.
- Le troisième problème est le phénomène de la dépendance de la volatilité appelé la persistance de la volatilité issu du constat en pratique du fait que les volatilités élevées sont souvent suivies par des volatilités élevées et les volatilités faibles sont souvent suivies par des volatilités faibles, ceci a pour conséquence la sous estimation du risque assumé par l'investisseur.

La première modélisation des cours boursiers, proposée en 1900 par Bachelier⁷ a consisté à modéliser les cours financiers par des mouvements browniens. Il faut attendre plus de 60 ans pour qu'un autre modèle voit le jour et s'installe. En 1960, Samuelson propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes. De fait, tous les calculs fondés sur le mouvement brownien ont tagiquement sous-évalué les risques financiers.

Dans l'espoir d'obtenir une meilleure évaluation du niveau de risque réel des marchés financiers par la Value At Risk, la modélisation des cours boursiers doit prendre en compte les caractéristiques statistiques les plus importantes des rendements boursiers et une tout particulièrement que la plupart des modèles développés jusqu'à présent négligent les propriétés statistiques des séries financières : faits stylisés.

Démarche méthodologique et bibliographique

En termes de méthodologie, nous avons opté pour une démarche descriptive et analytique. Jugeant que la première nous aidera dans la description du champ théorique érigé tout au long de ces dernières décennies dans la sphère financière, croisée aux constations tirées d'exemples de réalités observables sur les marchés. La méthode analytique nous sera, quant à elle, d'une grande importance tant il sera décisif de soumettre les hypothèses existantes à de lourdes critiques afin de pousser vers une amélioration profonde dans la réflexion financière.

Concernant nos sources bibliographiques privilégiées, nous avons choisis de nous baser sur la lecture croisée de publications de référence de la littérature financière (articles et ouvrages), sur des études expérimentales en laboratoire, sur des analyses empiriques entreprises par des pionniers dans le domaine l'économétrie de la finance ainsi que sur les chiffres officiels d'organismes spécialisés dans la collecte, l'analyse et la diffusion continue de l'information financière.

⁶ On parle de distribution **leptokurtique**. Si le coefficient d'aplatissement est inférieur à 0, le pic de la distribution est plus arrondi autour de la moyenne avec des extrémités plus courtes et resserrées

⁷ **Louis Bachelier** (Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier), né le (11 mars 1870 au Havre et mort le 26 avril 1946 à Saint-Servan-sur-Mer), est un mathématicien français, précurseur de la théorie moderne des probabilités, et fondateur des mathématiques financières.

Plan de la thèse

Compte tenu des différents éléments abordés, cette thèse comporte deux parties.

La première partie est consacrée à la présentation des risques financiers particulièrement le risque de marché ainsi que son calcul par la méthode de la Value At Risk.

Nous commencerons par consacrer un chapitre (chapitre 1) à la présentation de l'objet de notre étude : les marchés financiers. Nous présenterons dans un premier temps leur fonctionnement, puis nous présenterons leur évolution au travers quelques brefs rappels historiques, ce qui nous permettra d'introduire quelques concepts pratiques et théoriques. Cette présentation nous aidera également à déterminer en quoi les marchés financiers sont des systèmes complexes et pourquoi leur étude passe presque nécessairement par la conception de modèles. Nous exposons ensuite Le risk management ou la gestion des risques au sens large.

Cette présentation se fera d'abord dans un cadre général, puis nous présenterons dans le deuxième chapitre (chapitre 2) le risque de marché résultant des fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille. Nous commençons par exposer une brève revue de littérature sur la typologie des risques financiers et situer l'ampleur des risques de marchés subis par les institutions financières.

Dans le troisième chapitre (chapitre 3), nous nous concentrerons sur la méthode de la VAR (Value-At-Risk) qui fut rapidement adoptée comme outil de base (norme) dans l'évaluation du risque de marché, en exposant les trois approches classiques d'estimation de la VaR, à savoir : l'approche de la matrice des variances covariances estimée (VC), l'approche de la simulation historique (SH) et l'approche de Monte Carlo (MC).

Dans la deuxième partie, nous nous attacherons à l'étude de la dynamique des marchés financiers à travers l'analyse du comportement des cours boursiers. Après avoir effectué une brève revue de l'origine les modèles classiques d'évolutions des cours financiers nous décrivons la théorie de l'efficience des marchés financiers (chapitre 4).

Ensuite nous présenterons les faits stylisés, ces phénomènes statistiques observables dans les séries de prix de la plupart des titres, et dont l'origine demeure inexpliquée (chapitre 5).

Dans le sixième chapitre, plus mathématique, nous étudions en détail les propriétés des cours boursiers caractérisant la réalité des marchés financiers qui permet de reproduire la plupart des faits stylisés.

L'analyse théorique produit des hypothèses qu'il faut tester empiriquement, c'est pourquoi la le dernier chapitre (chapitre 7) est consacrée au calibrage de la Value at risk à partir d'un portefeuille d'actions représentatives du Marché Financier Marocain.

Nous tirerons pour finir des conclusions des différents travaux exposés tout au long de cette thèse.

PREMIERE PARTIE : RISQUE DE MARCHE ET

L'APPROCHE VALUE AT RISK

La théorie des marchés financiers et, partant, la compréhension de leur comportement ont fait des progrès considérables depuis la dernière décennie. La connaissance de ces développements est d'autant plus importante, qu'à la fois les comportements des acteurs et les conditions de fonctionnement des marchés financiers rendent ceux-ci de plus en plus efficaces au sens économique du terme. Les progrès de la théorie et l'évolution du champ d'étude qu'elle cherche à mieux formaliser ont eu, et continueront d'avoir dans l'avenir, des implications profondes sur la gestion financière des entreprises, l'économie financière et bancaire, et la gestion de portefeuille.

La gestion du risque est une procédure qui vise à connaître et à maîtriser le risque inhérent à l'activité d'une entreprise. Un gestionnaire de risque a comme objectif de connaître et gérer un risque futur.

Aujourd'hui, la gestion des risques est une activité incontournable des entreprises et particulièrement dans le domaine bancaire et des institutions financières. Ces secteurs sont les piliers de toute l'économie. C'est la raison pour laquelle ces procédures de gestion de risques se doivent être parfaitement maîtrisées. D'ailleurs des organismes internationaux et nationaux ont pour but de surveiller et de contrôler la gestion du risque au sein des établissements bancaires.

La gestion du risque au sein des établissements financiers est de plus en plus discutée. Des organismes comme la commission fédérale des banques ont, entre autres, pour but de réglementer cette gestion de risque au sein des établissements bancaires. Un des objectifs de ces derniers est de limiter au maximum les problèmes liés à une mauvaise gestion et les erreurs qui peuvent impacter toute une économie, en provoquant des milliers de pertes d'emplois ou en dilapidant les économies d'épargnants.

Par ailleurs, la gestion des risques repose sur une infrastructure, des politiques et des méthodes qui permet de gérer l'information, d'établir des limites de transactions, d'évaluer la performance et enfin de répondre aux exigences de la réglementation. Depuis le milieu des années 90, le pivot de ce processus est sans contredit Value-at-Risk (VAR).

Popularisée par la banque JP Morgan et son système Risk Metrics au début des années 90, la Value-at-Risk est devenue en une décennie la mesure de référence du niveau d'exposition au risque de marché, tant pour les autorités de supervision des marchés financiers que pour la plupart des grandes institutions financières. La VaR d'un portefeuille d'actifs financiers correspond au montant de pertes qui ne serait pas dépassé sur un horizon de temps donné, si l'on exclut un ensemble d'événements défavorables ayant une faible probabilité de se produire. Théoriquement, cette mesure correspond au quantile de la distribution des pertes et profits associée à la détention d'un portefeuille d'actifs sur un horizon donné. Comme

l'explique Barry Schachter⁸, l'incroyable engouement que connaît la VaR aussi bien dans l'industrie du risque que dans le milieu académique peut s'expliquer par son extrême simplicité et son caractère généraliste, voire holiste.

⁸ "Folklore (if it is fair to attribute as folklore that which only dates back Öve years) tells us that VaR was developed to provide a single number which could encapsulate information about the risk in a portfolio, could be calculated rapidly and could communicate that information to non-technical senior managers." (Barry Schachter, 1998).

Chapitre 1 : les marchés financiers : généralités et gestion des risques

Introduction

Depuis le début du XX^{ème} siècle, les marchés financiers ont donné lieu à un nombre considérable de recherches, tant fondamentales qu'appliquées. Bien que ces recherches s'inscrivent dans le cadre général de la finance, elles sont souvent interdisciplinaires. Cette interdisciplinarité s'explique sans doute par le fait que les marchés présentent de multiples facettes : ils peuvent être vus comme des objets d'études purement financiers (à travers l'étude des enjeux économiques qu'ils représentent), mathématiques (à travers l'étude des propriétés des séries de prix) ou humains (à travers l'étude de la psychologie des acteurs économiques qui y participent). Pourtant, aucune de ces disciplines n'arrive aujourd'hui à proposer une théorie complète, qui permettrait de surmonter la complexité des marchés et de les comprendre pleinement. Ceci s'explique probablement par le fait qu'il leur faudrait proposer un ensemble de théories intégrées, liant les aspects microscopiques, c'est à dire rendre compte du comportement des individus dans toute leur hétérogénéité, de leurs caractéristiques, de la manière dont ils interagissent ou sont organisés, aux aspects macroscopiques du système financier, par exemple la manière dont les prix fluctuent.

La volatilité importante des marchés et l'accent mis sur la gestion des risques ont entraîné le développement d'instruments adaptés à la gestion des risques. Ces nouveaux instruments financiers ont révolutionné les méthodes de gestion et ce, que ce soit dans le domaine de la gestion de portefeuille, de la gestion de trésorerie d'entreprise, de la gestion bancaire et plus généralement de toute stratégie financière.

Ce chapitre est consacré à la présentation des marchés financiers et à leur environnement. Il permet d'acquérir une certaine familiarité avec le cadre institutionnel et opérationnel des marchés financiers, ainsi que la gestion des risques et particulièrement le risque de marché.

I. Le cadre institutionnel des marchés financiers

1 Présentation

Les marchés financiers permettent la confrontation de l'offre et de la demande de capitaux. In fine, la demande de capitaux émane des entreprises pour le financement de leurs investissements, de l'État et des collectivités locales pour les mêmes raisons et pour la couverture des déficits publics. L'offre de capitaux émane principalement des ménages qui assurent leur consommation future par l'épargne qu'ils constituent et qu'ils apportent au système financier, soit directement, soit indirectement par le biais des compagnies d'assurances, des caisses de retraite, etc.

Les marchés de capitaux peuvent donc être considérés comme un système industriel de collecte, de transformation et d'allocation des ressources financières. Il est donc essentiel

qu'ils jouent effectivement leur rôle, c'est-à-dire que leur fonctionnement soit peu coûteux, et que les prix des titres qui s'y négocient soient aussi proches que possible de leur vraie valeur.

Dans tout marché, il y a le neuf et l'occasion. Le marché du neuf, de création de valeurs ou titres, est appelé marché primaire. Le marché de l'occasion ou d'échange de valeurs ou titres déjà créés est appelé marché secondaire.

Les entreprises ou l'état créent les titres, on parle de création ou d'émission, et les mettent en vente à travers les intermédiaires financiers soit de gré à gré soit sur le marché boursier.

La Bourse est un marché centralisé et dirigé par les ordres. Les prix se fixent par confrontation des ordres via un système électronique centralisé. Dans ce marché, les intermédiaires exclusifs sont les sociétés de bourse. Le marché boursier est caractérisé par un encadrement des cours via le principe de réservation.

Le marché boursier est structuré selon deux filières :

- Filière de l'inscription (marché primaire) : Il s'agit de l'admission d'une société dans l'un des compartiments de la bourse. C'est une phase de diffusion et de placement de titres. Elle est caractérisée par une centralisation des souscriptions, allocation des titres par catégorie d'investisseurs et fixation du cours de première cotation.

- Filière de négociation (marché secondaire) : Lors de cette phase, le rôle de la Société gestionnaire consiste en l'organisation et la surveillance du marché, l'enregistrement des transactions, la centralisation des offres publiques, la gestion des opérations sur titres et le calcul des indices.

Le marché secondaire est organisé en:

- Un Marché Central, où sont confrontés l'ensemble des ordres de vente et d'achat pour une valeur mobilière inscrite à la cote de la Bourse des Valeurs ;
- Un Marché de Blocs où peuvent être négociées par entente directe (de gré à gré) les opérations sur des valeurs mobilières inscrites à la cote et qui portent sur des quantités supérieures ou égales à la taille minimum de blocs selon des conditions de cours issues du Marché Central.

2 La fonction des marchés financiers

La fonction primordiale d'un marché financier est de faciliter une allocation efficace des ressources, à la fois dans le temps et dans l'espace, et leur mise en œuvre dans un environnement incertain. Au niveau le plus agrégé, le marché financier assure six fonctions essentielles en permettant :

- le transfert des ressources économiques ;
- la mutualisation des ressources ;
- l'allocation et la gestion des risques ;
- la liquidité des investissements ;

- le transfert d'informations par les prix ;
- la mutation des structures de production.

➤ Le transfert des ressources économiques

En tant que marché primaire, le marché financier permet de lever du capital et de transformer directement l'épargne des ménages en ressources longues pour les collectivités publiques et privées ; en contrepartie des capitaux qu'elles recueillent sur ce marché, les collectivités émettent des titres financiers qui matérialisent les droits acquis par ceux qui ont apporté ces capitaux.

Les flux nets partant des ménages sont au nombre de trois.

- Le flux 1 : représente les capitaux placés par les ménages auprès des institutions financières : dépôts à vue ou à terme auprès des banques et des caisses d'épargne, contrats d'assurance vie et de retraite.
- Le flux 2 : concerne les souscriptions de titres effectuées par les ménages sur le marché financier.
- Le flux 3 : représente pour l'essentiel les dépôts des ménages auprès de l'administration des chèques postaux et leur souscription de bons du Trésor.

Les flux nets partant des institutions financières sont aussi au nombre de trois.

- Le flux 4 concerne les crédits accordés par les institutions financières aux entreprises,
- le flux 5 les souscriptions d'actions et d'obligations effectuées par les institutions financières sur le marché (les entreprises d'assurances et dans de nombreux pays les fonds de pension représentent le principal souscripteur net).
- Le flux 6 représente essentiellement les bons du Trésor souscrits par les banques et les autres intermédiaires financiers,

Le marché financier met en présence demandeurs et offreurs de capitaux à long terme. Les flux partant du marché financier sont doubles.

- Le flux 7 : le plus important, concerne les émissions d'actions et d'obligations destinées aux entreprises tant du secteur public que du secteur privé.
- Le flux 8 : représente le financement des administrations par l'émission d'obligations sur le marché financier : emprunts d'État, emprunts des collectivités locales, tels que départements, communes, villes et organismes divers.

En définitive, le marché financier permet le transfert des ressources économiques à la fois dans le temps, entre les pays et entre les différents secteurs de l'économie.

➤ La mutualisation des ressources

C'est ce qu'on appelle aussi l'économie du pooling, qui peut être considérée tant du point de vue des entreprises que de celui des investisseurs.

Du point de vue des entreprises, il y a inadéquation entre la richesse individuelle, aussi importante soit-elle, et la taille des entreprises. En tout état de cause, les tailles optimales des entreprises sont aujourd'hui incomparablement plus élevées que les richesses familiales, même au niveau mondial. S'ils n'étaient reliés à un grand nombre d'investisseurs, les entrepreneurs ou les dirigeants à la tête d'entreprises demandeurs de capitaux seraient contraints de faire fonctionner ces entreprises à une échelle largement inférieure à l'échelle optimale. Par conséquent, la possibilité de mettre des capitaux en commun est nécessaire à l'efficacité du processus de production et les entreprises ont besoin d'instruments de mutualisation, élaborés pour pouvoir accéder à faible coût à des fonds suffisamment importants.

Il existe une demande de mutualisation de la part des entreprises, mais il existe aussi une demande de mutualisation de la part des ménages, pour des raisons de diversification et de liquidité. La mutualisation joue donc un rôle social incontestable.

➤ L'allocation et la gestion des risques

Les analyses traditionnelles du système financier insistent sur son rôle dans l'allocation efficace du capital au sein de l'économie. Mais, une autre fonction tout aussi importante du système financier, l'allocation efficace du risque au sein de l'économie, est moins bien comprise.

Prenons un exemple, celui de l'effet de l'introduction en bourse des actions d'une entreprise financée uniquement par des capitaux propres. Cette opération de mise sur le marché permet à certains d'acquérir le risque des actions de l'entreprise, et au contraire à d'autres de s'en défaire. Ce risque n'est pas un risque supplémentaire dans l'économie, simplement la titrisation du risque de l'activité de l'entreprise ; il est réparti différemment, et améliore la situation des individus qui peuvent ainsi gérer de manière plus fine les risques auxquels ils sont exposés. Un actionnaire familial dont toute la fortune est concentrée sur le même risque d'une seule entreprise pourra ainsi diversifier son risque.

Poursuivons l'exemple. Maintenant, l'entreprise émet de la dette risquée et utilise tout ou partie du produit de cette émission pour racheter une partie de ses actions. Le risque de l'entreprise est assumé par deux catégories d'individus détenant des droits différents – sur des actions et/ou sur de la dette risquée – mais globalement le risque ne change pas. Le risque est simplement titrisé de manière différente. Allons plus loin, si, au lieu d'émettre directement de la dette, l'entreprise emprunte des fonds à une banque pour racheter tout ou partie de ses actions, le risque total de l'entreprise est alors assumé par ses propres actionnaires, par les actionnaires de la banque et par les déposants de la banque.

➤ La liquidité des investissements

On peut d'autant plus s'engager dans des activités risquées que l'on peut se défaire aisément de son engagement, c'est-à-dire s'il existe un marché liquide des engagements. La liquidité signifie la possibilité de revenir sur une décision d'investissement, prise antérieurement, à un coût de transaction aussi faible que possible.

Les marchés financiers offrent la liquidité et donnent ainsi la possibilité aux investisseurs de raccourcir, s'ils le souhaitent et pour toutes sortes de raisons, l'horizon de leur engagement d'investissement, réduisant ainsi l'incertitude inévitablement liée aux actifs financiers à long terme. Dans ces conditions, les investisseurs sont prêts à prendre davantage de risque et exigent une rentabilité plus faible de leurs investissements, ce qui a pour conséquence que les entreprises peuvent se financer à moindre coût.

➤ Le transfert d'informations par les prix

Les marchés financiers représentent une mine d'informations pour et sur les entreprises, de par les prix des actifs financiers qui y sont cotés. Ainsi les marchés des bons du Trésor et des obligations d'État renseignent sur le rendement exigé par les investisseurs pour emprunter et prêter des fonds à court terme et à long terme (par ailleurs une des composantes essentielles du coût du capital pour une entreprise). Les écarts de rendement entre les emprunts d'État classiques (notamment les OAT ou obligations assimilables du Trésor) et les OATI (obligations assimilables du Trésor indexées sur l'inflation) permettent d'estimer l'inflation anticipée à l'échelle de l'économie tout entière pour toutes sortes d'échéances. L'écart de rendement entre les obligations émises par les entreprises privées et les OAT renseigne sur le risque de ces entreprises tel qu'il est perçu.

De même, les cours des actions constituent, compte tenu de certaines hypothèses, un indicateur de la prime de risque demandée par les investisseurs pour accepter le risque inhérent à ces produits (autre aspect déterminant pour calculer le coût du capital d'une entreprise). Quant aux marchés dérivés fondés sur les cours des actions, les niveaux des indices boursiers et d'autres classes d'actifs, ils recèlent aussi énormément d'informations, notamment sur l'incertitude et la volatilité anticipée des cours des titres des sociétés cotées en bourse, des indices boursiers, des taux d'intérêt, des taux de change, des matières premières, etc.

Ces informations agrégées sont utiles à la fois pour les investisseurs et les entreprises. Quelle que soit leur activité, ces dernières peuvent extraire et analyser ces données et s'en servir pour prendre des décisions d'investissement, surveiller la concurrence, etc. En définitive, et par le transfert d'informations sur les prix qu'il permet, le marché financier facilite la coordination de la prise de décision décentralisée dans les différents secteurs de l'économie.

➤ La mutation des structures de production

Enfin, un marché financier concourt à la mutation des structures de production. Celles-ci se modifient, entre autres, par l'acquisition d'actifs ou par la prise de contrôle d'autres sociétés. De telles opérations peuvent être financées par l'émission de titres financiers, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à la trésorerie de l'entreprise ; elles sont plus commodément réalisées lorsque les actions de la société qui les entreprend sont déjà cotées en Bourse.

Les opérations de restructuration par le marché boursier peuvent s'effectuer sous la forme d'offres publiques d'achat (OPA), d'offres publiques d'échange (OPE) ou de négociations de blocs de titres. Emboîtant le pas aux grands marchés anglo-saxons, le marché

de Paris est le théâtre de batailles boursières très médiatiques dont la finalité est la prise de contrôle des sociétés, assumant ainsi pleinement sa fonction de restructuration du tissu économique.

3 Les catégories des titres financiers

Jusqu'à une époque récente, les titres financiers étaient représentés par essentiellement deux catégories de titres matérialisant les droits acquis par ceux ayant apporté des capitaux à une collectivité émettrice publique ou privée. Ceux-ci se différenciaient selon la nature des droits qu'ils représentaient et partant, selon leurs caractéristiques économiques :

- les actions qui confèrent à leurs possesseurs la qualité d'associé dans une société de capitaux ;
- les obligations représentatives d'un droit de créance.

Ces deux catégories de titres se sont diversifiées, à tel point qu'elles sont devenues des familles de titres, à l'intérieur desquelles des formes hybrides de titres financiers se sont développées.

➤ Les actions

L'action se définit comme un titre de participation ou de copropriété dans une société de capitaux, qui confère à son possesseur la qualité d'associé et, sauf exception, lui donne un droit proportionnel sur la gestion de l'entreprise, sur les bénéfices réalisés et sur l'actif social.

- Droit à la gestion, dans la mesure où l'assemblée des actionnaires élit et contrôle l'organe responsable de la gestion de la société, conseil d'administration ou conseil de surveillance qui élit à son tour le directoire. Droit à l'information, dans la mesure où les actionnaires ont droit à la communication des documents indispensables à leur information sur l'activité et les résultats de la société.

- Droit sur les bénéfices, qui sont répartis entre la mise en réserve et la distribution de dividendes aux actionnaires de la société. Le montant du dividende est donc fonction de l'évolution des résultats de la société et de l'affectation qui leur est donnée. Pour ce motif, l'action est une valeur à revenu variable. Enfin, droit sur l'actif net de la société, c'est-à-dire sur l'ensemble de son patrimoine, déduction faite de ses dettes.

Il existe par ailleurs d'autres catégories d'actions ayant sur le plan juridique des droits différenciés par rapport à ceux des actions ordinaires. Les actions de priorité ou actions privilégiées confèrent des avantages par rapport aux actions ordinaires qui concernent essentiellement la répartition des bénéfices, dividende plus élevé ou dividende prioritaire. Les actions à dividende prioritaire sans droit de vote en constituent une variante. En échange d'un dividende plus élevé ou prioritaire, ces actions sont sans droit de vote. Enfin les actions reflect (« tracking » stocks) distribuent des dividendes qui sont indexés sur les performances d'une activité particulière d'une société, sans que cette activité ait une structure juridique différenciée de celle de l'ensemble de la société.

➤ Les obligations

Pour trouver les capitaux nécessaires au développement de ses activités, un emprunteur peut également émettre des titres de créance. Appelés « obligations », ces titres donnent à leurs détenteurs la qualité de créancier de l'émetteur, public ou privé, qui s'engage à les rembourser à une échéance déterminée et à leur verser un intérêt annuel fixe.

Les caractéristiques principales de chaque obligation sont décrites dans le contrat d'émission, qui précise le prix d'émission, l'intérêt ou coupon versé chaque année, sa périodicité (année, semestre ou trimestre), le prix de remboursement et ses modalités.

Les modalités d'amortissement déterminent les conditions dans lesquelles les obligataires seront remboursés et donc la durée de vie de l'emprunt. Ces diverses caractéristiques, ainsi que certaines autres clauses, permettent de définir le « taux de rendement actuariel », coût annuel pour la collectivité émettrice d'une telle opération, ainsi que le risque de l'obligation.

Au contraire des actions qui ne peuvent être créées que par des sociétés de capitaux, les obligations peuvent être émises par des collectivités de statuts juridiques divers :

- l'État ;
- les collectivités du secteur public ou semi-public : régions, départements, villes, entreprises publiques, etc. ;
- les sociétés de capitaux du secteur privé.

Dans la famille obligataire sont apparues d'autres formes d'obligations :

- les obligations à coupon zéro qui ne donne lieu à aucun versement de coupon.
- les obligations à taux variable ou flottant dont le coupon est indexé sur un taux à court terme.

➤ Les titres financiers hybrides

Ce sont des titres qui possèdent certaines caractéristiques des actions et des obligations. Citons sans être exhaustifs, les obligations convertibles en actions, les obligations remboursables en actions (ORA), les obligations à bons de souscription d'actions (OBSA), les obligations à bons de souscription d'actions remboursables (OBSAR), les obligations convertibles échangeables en actions nouvelles ou à émettre (OCEANE), les obligations remboursables en actions nouvelles ou en numéraire (ORANE).

Les obligations convertibles en actions sont des obligations émises avec un intérêt et un prix de remboursement fixe, mais qui peuvent également être converties en actions de l'émetteur. Le détenteur de l'obligation convertible aura intérêt à convertir l'obligation en actions si la valeur des actions devient supérieure au prix de remboursement de l'obligation. Cette possibilité de choix se paie sous la forme d'un taux d'intérêt servi aux obligations convertibles inférieur à celui des obligations ordinaires.

À la différence des obligations convertibles, ce n'est pas le détenteur des obligations remboursables en actions (ORA), mais l'émetteur, qui décide du mode de remboursement de

l'obligation, espèces ou actions.

Par ailleurs, une société peut émettre des bons de souscription d'actions (BSA) de façon autonome, ou attachés à une action (ABSA), voire même à une obligation (OBSA), le ou les bons attachés sont détachés de leur support et cotés séparément. Le BSA est un actif conditionnel qui peut être évalué à l'instar d'une option. Les OBSA sont très proches des obligations à bons de souscription d'actions remboursables (OBSAR), sauf que dans une émission d'OBSAR, les souscripteurs paient séparément le prix d'émission de l'obligation et le prix du ou des bons attachés à chaque obligation, alors que dans une émission d'OBSA le prix du bon est implicite.

Les obligations convertibles échangeables en actions nouvelles ou à émettre (OCEANE) sont assorties de plusieurs options au gré du porteur comme pour toute obligation convertible en action, mais aussi de plusieurs options au gré de l'émetteur.

Les obligations remboursables en actions nouvelles ou en numéraire (ORANE) représentent une ORA assortie d'options au gré de l'émetteur.

➤ Les produits dérivés

Il existe trois familles de produits dérivés : les contrats forward et futures, les swaps et les contrats d'option qui ont beaucoup d'éléments communs.

▪ Les contrats à terme de type forward et futures

Dans leur principe les contrats de type forward et futures sont identiques. Ils ne divergent que par leurs modalités d'exécution.

Le contrat à terme forward constitue un engagement d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'actifs supports ou « actifs sous-jacents » à une date d'échéance future et à un prix spécifié au moment où le contrat est passé. Si à la date d'échéance, le prix comptant de l'actif support au contrat est supérieur au prix spécifié et convenu à l'origination du contrat, l'acheteur du contrat réalise un profit ; dans le cas contraire, il réalise une perte, et vice versa pour le vendeur.

Les actifs supports peuvent être une grande variété d'actifs financiers : les devises, les indices d'action, les indices obligataires mais aussi des matières premières (l'or, le pétrole...) ou des produits agricoles. La valeur du contrat à terme forward est versée par le débiteur au créancier seulement à l'échéance ; aucun paiement entre les deux parties contractantes n'intervient avant cette date.

Par construction, le contrat à terme de type futures est semblable au contrat à terme de type forward. La langue française n'a d'ailleurs qu'un seul mot pour les deux : contrat à terme. Aussi, le profil de gains ou de pertes des deux est identique.

Mais à l'inverse du contrat forward, le risque de crédit, c'est-à-dire le risque de défaut du contractant peut être éliminé dans le contrat future, grâce à deux mécanismes spécifiques : le dépôt de garantie et l'appel de marge d'une part, l'existence d'une chambre de compensation et la standardisation des contrats d'autre part.

▪ Les swaps

Comme leur création ne remonte qu'au début des années quatre-vingt, les swaps sont considérés comme une innovation relativement récente. Cependant un swap n'est pas autre chose qu'un portefeuille agrégé de contrats de type forward. Un contrat de swap oblige les deux parties contractantes à s'échanger (swapper) des montants de cash flows spécifiés à des dates précises. Les swaps de devises (par exemple dollars contre euros) et les swaps de taux d'intérêt (taux fixe contre taux variable dans une même devise) par lesquels les parties s'échangent des cash flows sur la base de devises et/ou de taux d'intérêt différents en constituent la forme la plus courante.

▪ Les contrats d'options

Les propriétaires de contrats forward, futures ou de swap ont contracté une obligation à terme, mais ferme et définitive. À l'inverse, l'option confère à son acheteur le droit mais non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif à une certaine échéance.

Les principaux contrats négociés sont les calls (options d'achat) et les puts (options de vente) avec pour chacun d'eux un acheteur et un vendeur, avec paiement d'un premium (prime) par l'acheteur au vendeur de tels contrats dès leur conclusion.

II. L'évolution des marchés financiers internationaux depuis les années 1980

Les marchés de capitaux internationaux ont largement retrouvé la mobilité dont ils jouissaient avant la Première Guerre mondiale et ils jouissent désormais d'une croissance dynamique sans précédent⁹.

Les institutions financières internationales font circuler de façon routinière des milliers de milliards (billions) de dollars d'actifs actions, obligations et autres instruments autour du globe. Les flux de capitaux transfrontières et les actifs sous gestion à l'étranger continuent à croître rapidement, en liant progressivement les marchés financiers nationaux, pour en faire un marché mondial de plus en plus intégré.

1 La taille des marchés de capitaux internationaux

La valeur totale des actifs financiers mondiaux (dépôts bancaires, obligations d'État, obligations d'entreprises et actions) a dépassé 150 000 milliards de dollars¹⁰ en 2007, contre 53 000 en 1993 et 12 000 en 1980. Ces 150 000 milliards de dollars représentent le montant total de capital que les banques et les marchés de capitaux mondiaux mettent à la disposition des ménages, des entreprises et des gouvernements. Une simple extrapolation indique que la valeur des actifs financiers mondiaux devrait atteindre 214 000 milliards de dollars en 2010. Cette croissance s'est accompagnée d'une réduction importante du rôle des banques, et corrélativement, d'une augmentation significative des institutions de marché comme

⁹ G.-M. Henry, Les crises du XX^e siècle, Éditions Belin, 2003

¹⁰ La Revue de la stabilité financière, « Hedge Funds », avril 2007.

intermédiaires financiers¹¹. Ce changement se constate dans la diminution des dépôts bancaires dans le stock financier mondial de 45 % en 1980 à moins de 30 % en 2007 et dans l'augmentation correspondante de la place des actions et des obligations. La liquidité des marchés de capitaux mondiaux s'en trouve d'autant accrue.

➤ Les marchés de capitaux selon les régions du monde

L'expression « marchés de capitaux mondiaux » est trompeuse, puisqu'en réalité quatre régions représentent plus de 80 % du stock financier mondial : les États-Unis, la zone euro, le Japon et le Royaume-Uni. En 2007, les États-Unis représentent toujours le premier marché des capitaux avec 54 000 milliards de dollars d'actifs financiers, suivis par la zone euro avec 33 000 milliards de dollars, le Japon 20 000 milliards de dollars et le Royaume-Uni 9 000 milliards de dollars.

En dehors de sa taille (environ 37 % du stock financier mondial), le marché américain se distingue également par l'importance qu'y tiennent les obligations d'entreprises et les actions : environ 70 % du total des actifs.

La zone euro est le deuxième marché financier mondial, avec une place croissante pour les actions et les obligations d'entreprises, alors que traditionnellement, les banques jouaient un rôle plus important dans le système financier européen.

La taille du marché du Royaume-Uni est plus modeste, mais la City représente un intermédiaire important pour les flux de capitaux transfrontières et pour les banques internationales.

Les marchés asiatiques sont encore relativement isolés les uns des autres et ils diffèrent sur des points importants. Le Japon possède le stock financier le plus important de la région, mais ce stock est relativement stagnant car il n'est soutenu que par l'expansion de la dette publique. Le marché financier chinois de l'ordre de 6 000 milliards de dollars d'actifs financiers fait partie au contraire des marchés les plus dynamiques au monde, mais les banques y jouent encore un rôle disproportionné : plus de 60 % des actifs. Le système financier indien, avec 1 400 milliards de dollars d'actifs financiers, est significativement plus petit que celui de la Chine, mais il est plus équilibré, car les banques font face à un marché des actions relativement important.

➤ Les trois centres financiers mondiaux

Plus de 80 % des flux financiers mondiaux concernent trois régions: la zone euro, le Royaume-Uni et les États-Unis.

Les États-Unis jouent le rôle d'intermédiaire financier international, recevant essentiellement des flux de dette (achats d'obligations américaines par des non résidents) et envoyant des flux d'actions et d'investissements directs à l'étranger (achats d'actions et d'actifs étrangers par des Américains).

¹¹ C'est ce qu'on appelle la désintermédiation financière.

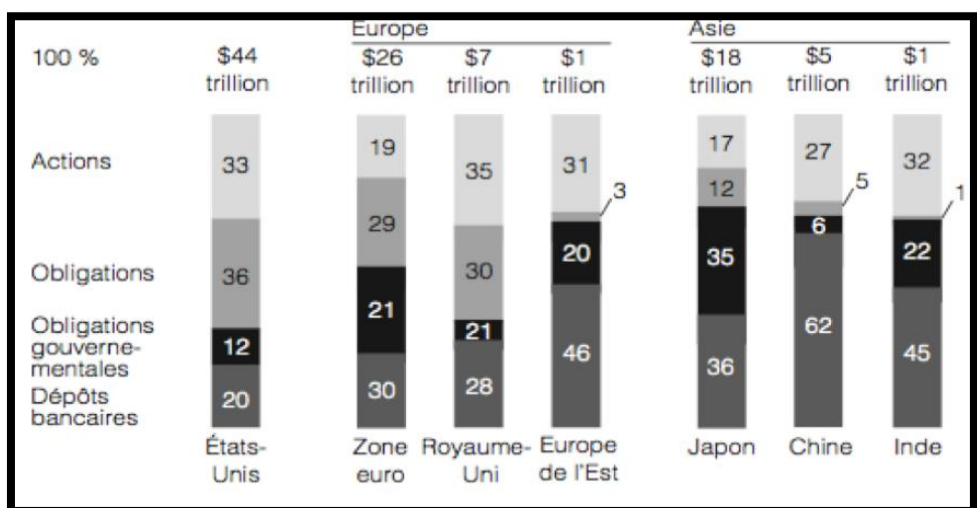


Figure 1 : cartographie des marchés de capitaux mondiaux en Janvier 2007¹²

Les entrées annuelles de capitaux aux États-Unis sont en moyenne de l'ordre de 1 000 milliards de dollars (1 150 milliards en 2006), et les sorties de capitaux de 500 milliards de dollars (277 milliards de dollars en 2006). Les flux de capitaux entre la zone euro et le reste du monde sont du même ordre, mais les sorties de capitaux sont légèrement supérieures aux entrées, tandis que les flux de capitaux transfrontières à l'intérieur de la zone euro sont de l'ordre de 1 700 milliards de dollars.

En dépit de son marché financier intérieur relativement petit, le Royaume-Uni est un intermédiaire financier important au niveau mondial : les entrées et sorties annuelles de capitaux sont de l'ordre de 1 500 milliards de dollars.

À l'opposé, le marché financier japonais reste particulièrement isolé en dépit de sa taille relative, et les flux de capitaux internationaux à destination ou en provenance du Japon sont inférieurs à ceux de la Chine, dont le marché financier est quatre fois plus petit.

2 La financiarisation croissante de l'économie mondiale

Une mesure significative du développement des marchés financiers est représentée par la financiarisation, c'est-à-dire la valeur des actifs financiers exprimée en pourcentage du PIB. La profondeur financière d'un pays peut représenter plusieurs fois le PIB de ce pays, car les actifs financiers représentent une anticipation de la valeur future, alors que le PIB reflète l'activité économique actuelle.

En 1980, le stock financier mondial équivalait approximativement au PIB mondial. En 1993, il était deux fois plus important et, en 2003, il était nettement supérieur à trois fois (326 %) le PIB mondial. La financiarisation de l'économie est généralement bénéfique, parce que les marchés financiers :

- ☐ sont plus liquides ;
- ☐ déterminent plus efficacement les prix des actifs ;
- ☐ permettent de mieux répartir les risques.

¹²McKinsey Global Institute

➤ Le rôle croissant de l'endettement

Depuis 1995, on a assisté à une croissance rapide des niveaux d'endettement mondiaux. Les obligations émises par les entreprises représentent la composante la plus importante, et à la croissance la plus rapide (10 % par an en moyenne), du stock financier mondial. Si on y ajoute les obligations émises par les États, les obligations représentent plus de la moitié de la croissance des actifs financiers de 1995 à 2005. Les émissions internationales d'obligations d'entreprises croissent à un rythme encore supérieur (22 % par an en moyenne), car les entreprises recherchent de plus en plus des fonds au-delà de leurs frontières nationales, ce qui montre bien la mondialisation croissante du capital.

C'est le phénomène qu'a connu le Japon de 1986 à 1991 et qui s'est traduit ensuite par une diminution d'environ 20 billions de la valeur de la Bourse de Tokyo et du marché immobilier japonais.

Le price-earnings ratio (P/E pour les Anglo-Saxons) est le rapport entre le prix actuel de l'action d'une entreprise et les bénéfices de cette entreprise. Dans les journaux financiers, on utilise souvent le terme de multiple, puisque le PER montre combien les investisseurs sont prêts à payer pour chaque dollar de bénéfices. Des multiples plus élevés indiquent que les investisseurs font des anticipations plus élevées sur la croissance future, ce qui fait monter le prix de l'action.

➤ Les États-Unis au cœur du système financier mondial

Les rôles que jouent les grands pays et les régions sur les marchés de capitaux mondiaux évoluent. Les États-Unis jouissent d'une position unique, non seulement comme premier marché financier, mais également comme premier centre de collecte et de diffusion des capitaux. Avec la création de l'euro, les marchés financiers européens s'intègrent progressivement et leur place s'affirme, tandis que les marchés japonais perdent de leur importance, et que le poids des marchés chinois augmente rapidement. Les marchés financiers du reste du monde sont négligeables au niveau mondial ; les marchés financiers latino-américains sont particulièrement sous-développés par rapport à ceux de pays comparables, à revenu intermédiaire, d'autres régions du monde.

➤ La montée en puissance des hedge funds

L'essor rapide des mouvements internationaux de capitaux s'est accompagné d'une évolution des rôles respectifs des différents investisseurs. Trois évolutions essentielles se sont produites depuis les années 1990 :

- l'augmentation énorme des fonds gérés par les investisseurs institutionnels;

Les économies émergentes, comme les Philippines et la Thaïlande, et les nouvelles économies industrielles, comme la RAS de Hong Kong, la Corée, Singapour et la province chinoise de Taïwan, sont de fortes exportatrices de capitaux.

Les investisseurs institutionnels sont des organismes collecteurs de l'épargne qui placent leurs fonds sur les marchés. Il s'agit principalement des fonds communs de placement, des fonds de retraite et des sociétés d'assurances.

- le développement fulgurant des fonds spéculatifs ;
- le rôle accru des Banques centrales et des « fonds de richesse nationale » des marchés émergents.

Les actifs gérés par les investisseurs institutionnels traditionnels des marchés développés (fonds communs de placement, sociétés d'assurances et fonds de retraite) sont passés d'environ 21 000 milliards de dollars en 1995 à plus de 60 000 milliards de dollars en 2007. Les États-Unis représentent la moitié environ de ce total et l'Europe plus du quart, avec des différences régionales encore significatives : aux États-Unis, les fonds de retraite détiennent un pourcentage appréciable de ces avoirs, alors qu'en Europe ce n'est le cas qu'en Irlande, aux Pays-Bas et au Royaume-Uni.

Le développement foudroyant des hedge funds représente une autre évolution déterminante des marchés de capitaux. Le nombre des hedge funds a été multiplié par plus de douze depuis 1990 et les actifs sous gestion qui étaient de l'ordre de 30 milliards de dollars en 1990, sont passés à près de 2 000 milliards de dollars en 2007, soit une multiplication par soixante-cinq.

L'afflux massif de capitaux vers les hedge funds depuis 2002 tient pour l'essentiel à l'élargissement de la base d'investisseurs de ces fonds qui est passée des « individus fortunés » aux investisseurs institutionnels (sociétés financières, fonds de retraite, endowments universitaires). Les hedge funds sont pour la plupart gérés des États-Unis¹³, le Royaume-Uni représentant la principale exception européenne.

III. La crise financière mondiale 2008

La crise mondiale de 2008 a surpris les gouvernements de la planète par son ampleur et sa brutalité. Malgré les plans de relance économique mis en place et l'injection massive de capitaux pour renflouer les systèmes financiers, la perte de confiance des acteurs économiques persiste et un climat d'incertitude domine la conjoncture mondiale. L'horizon de sortie de crise reste ainsi incertain.

Le Maroc, après avoir été épargné dans un premier temps par la crise financière, grâce à la solidité de son système bancaire et à sa faible exposition aux marchés financiers internationaux, subit depuis le deuxième semestre 2008 les répercussions de la crise économique mondiale par le biais des secteurs exportateurs, de l'activité touristique, des transferts des Marocains Résidant à l'Étranger et des flux des investissements extérieurs.

¹³Les hedge funds peuvent, bien entendu, être domiciliés dans un autre endroit de la planète que celui où se trouvent leurs gérants. Les fonds *offshore* sont ainsi localisés aux îles Cayman, aux îles Vierges britanniques, au Luxembourg ou aux Bermudes.

1 Crise immobilière aux Etats-Unis : Origines et causes de la crise

Le terme de la crise financière est appliqué à une large variété de situations dans lesquelles certaines institutions financières ou de biens perdent soudainement une grande partie de leur valeur. Au 19^{ème} et au début du 20^{ème} siècle, de nombreuses crises financières ont été associées à la panique bancaire, et de nombreuses récessions ont coïncidé avec ces paniques. D'autres situations qui sont souvent appelés crises financières sont des crashes boursiers et l'éclatement d'autres bulles financières, crises monétaires, ou crises immobilières causées par l'afflux de logements à la vente qui pourront peut être trouvé preneur dans le futur. Les crises financières les plus graves sont porteuses d'un risque systémique, c'est-à-dire qu'elles peuvent affecter par ricochet leur environnement et se traduire par une crise économique.

La Crise Economique que nous redoutons est beaucoup plus lourde de conséquences puisqu'elle peut affecter l'ensemble des acteurs économiques, les ménages, les consommateurs, les entreprises, les administrations publiques et pas seulement les épargnants, les prêteurs et les emprunteurs. La crise économique se traduit généralement par une baisse du pouvoir d'achat, la montée du chômage et des faillites du fait d'une baisse de l'activité économique (récession, voire dépression).

Pour financer leur consommation et l'acquisition de leur logement, les ménages américains n'hésitent pas à s'endetter à des niveaux qui dépassent largement les plafonds. En contrepartie, ils mettent leur bien immobilier en gage. Ce bien est une garantie pour les banques, car si le débiteur ne parvient pas à payer, il voit son bien vendu pour honorer le traitement de sa dette. Lorsque le phénomène prend de l'ampleur et touche un grand nombre de ménages, la vente de leurs biens immobiliers entraîne l'effondrement de la valeur de ces biens. Cette perte de valeur est un manque à gagner pour tout un ensemble d'acteurs.

➤ Causes et origines de la crise financière :

a. La transformation du risque

Auparavant, les banques faisaient le crédit, et donc prenaient le risque, le surveillaient, puis encaissaient des fonds au fur et à mesure. Désormais, dans le modèle actuel, essentiellement américain, les banques créent le crédit/le risque mais ne le gardent plus, ne le surveillent plus et s'empressent de le transmettre à d'autres, ce qui pose évidemment un problème. En effet, quand on ne surveille plus le risque, on ne s'en préoccupe plus vraiment. Plus vite le risque est pris, plus vite il peut être transmis, et plus vite une marge sur le passage du risque, et non plus sur son suivi, peut être obtenue. Le modèle bancaire qui était un modèle "création – garde – suivi" devient un modèle "création – titrisation – distribution".

b. La titrisation

La titrisation consiste à transformer des crédits distribués par une banque en titres de créances (obligations) qu'un investisseur peut acheter et vendre à tout moment. On dit que ces obligations sont adossées à un portefeuille d'actifs. Les banques émettrices des crédits créent des sociétés intermédiaires dans lesquelles ces crédits constituent les actifs (plus couramment,

l'ensemble des biens corporels ou incorporels d'une personne physique ou morale) et qui émettent en contrepartie des obligations qui constituent le passif. Les intérêts et les remboursements des crédits servent au paiement des intérêts des obligations émises et à leur remboursement. Ces sociétés sont appelées SPV pour « Special Purpose Vehicule » ou « Véhicule spécial », car elles n'ont pas d'autre objet social et sont créées au cas par cas.

c. Prêts Subprimes

Les subprimes, aussi appelés "crédits subprimes", sont des prêts hypothécaires à risque. Ce terme désigne plus particulièrement une forme de crédit immobilier qui est apparue aux Etats-Unis : les subprime loan ou subprime mortgage en anglais. Ces crédits, gagés sur le logement de l'emprunteur, ont été accordés à des ménages américains aux revenus modestes et ont permis à de nombreux Américains d'accéder à la propriété.

Les subprimes sont des crédits à risque, caractérisés par des taux d'intérêt variables et de niveau élevé, qui ont été accordés à des foyers à faibles revenus. En contrepartie de critères d'attribution moins stricts que pour des crédits classiques, les intérêts étaient plus élevés.

Pour que le crédit soit intéressant pour l'emprunteur, les banques et organismes de crédit spécialisés proposaient des taux bas en début de prêt (pendant les deux premières années) grâce à des montages sophistiqués avec des taux variables et des produits financiers complexes. Pourtant, ces prêts représentaient au final un taux plus élevé pour l'emprunteur et un rendement plus important pour le prêteur afin de compenser le risque de non remboursement. Par ailleurs, le risque de non remboursement était limité par la garantie hypothécaire prise sur le logement de l'emprunteur : si l'emprunteur ne pouvait plus faire face aux échéances de remboursement de son crédit immobilier, le prêteur se remboursait sur la revente du logement.

d. Subprimes font les raisons de la crise

En 2006, les crédits subprimes représentaient 24% des nouveaux crédits immobiliers octroyés aux Etats-Unis. Or, les conditions d'octroi de ces crédits faisaient peser un risque de solvabilité sur des ménages à faible revenu. De fait, en 2007, près de trois millions de foyers américains étaient en situation de défaut de paiement

Les raisons de la "crises des subprimes" sont également liées à d'autres facteurs :

- Les taux d'intérêt de ces crédits étaient variables et indexés sur le taux directeur de la banque centrale américaine ; or, entre 2004 et 2007, la Réserve fédérale américaine ou FED a rehaussé son principal taux d'intérêt directeur, qui est passé de 1% en 2004 à plus de 5% en 2007
- Les créanciers (banques et organismes de crédit spécialisés) ont titrisé une partie de ces créances ; cela signifie qu'ils les ont transformées en titres émis sur les marchés financiers, notamment en obligations appelées ABS et CDO qu'ils proposaient aux épargnants.

e. Autres mécanismes de la crise

La hausse du taux directeur de la FED a entraîné celle des taux des crédits immobiliers aux Etats-Unis : les ménages ayant souscrits des subprimes à taux d'intérêt variable n'ont plus réussi à payer des échéances mensuelles en forte hausse. Parallèlement, la demande de biens immobiliers a décliné et la valeur des appartements et des maisons a baissé, entraînant du même coup une diminution de la richesse potentielle des emprunteurs.

La conjonction de ces deux facteurs défavorables a multiplié les défauts de paiement et les situations d'insolvabilité des emprunteurs (quand la revente des maisons ne suffisait plus à assurer au prêteur le recouvrement de sa créance).

La crise s'est ensuite propagée aux établissements de crédit et au secteur financier par l'intermédiaire des obligations de type ABS et CDO : quand les ménages n'ont plus pu rembourser leurs prêts, ces titres, très prisés des spéculateurs, se sont écroulés.

2 Le Maroc face à la crise économique mondiale

Le Maroc n'a pas été touché par la crise financière, il n'a pas pour autant échappé aux premiers effets de la crise économique mondiale, ressentis à travers les activités les plus sensibles à la conjoncture internationale. Grâce aux réformes menées ces dernières années, notamment sur le front socioéconomique, et à une dynamique interne soutenue, le Maroc affronte ces répercussions dans une position relativement favorable.

Toutefois, malgré les évolutions enregistrées au cours des dernières années, l'économie marocaine ne s'est pas totalement libérée de certains facteurs de fragilité qui pourraient affecter son processus de développement, particulièrement en cette période de crise mondiale.

Sur le plan du commerce extérieur, les exportations restent à faible contenu technologique et polarisées à près des deux tiers sur les marchés de l'Union Européenne. Le Maroc ne saisit pas encore toutes les opportunités liées à la mondialisation, en raison de la faible compétitivité des exportations et leur diversification limitée.

Grâce à la solidité accrue de son système bancaire et à sa faible exposition aux marchés financiers internationaux, le Maroc n'a pas été affecté par la crise financière internationale.

En effet, l'évaluation de la stabilité du système financier, réalisée en novembre 2007, concluait que «le système bancaire marocain était stable, bien capitalisé, profitable et résistant aux chocs¹⁴ ». Cette évaluation conforte la politique de consolidation du système bancaire qui a notamment consisté en l'alignement du cadre réglementaire sur les standards

Au Maroc, la problématique n'a pas la même ampleur, mais la crise commence à s'installer vu la dépendance de notre économie de l'extérieur.

➤ Les domaines touchés par la crise

▪ Les échanges commerciaux de biens : et se manifestent par un repli de la demande étrangère adressée au Maroc, en particulier sous l'effet du tassement de l'activité et de la consommation dans les principales économies partenaires.

¹⁴ FMI, 2008

- La baisse des recettes touristiques : Elle résulte de la réduction des dépenses des ménages dans les principaux pays émetteurs de touristes et de l'intensification de la concurrence régionale et internationale en matière d'offre touristique.

- Le ralentissement des transferts des MRE : affectés dans leur pays de résidence par le repli de l'activité et par le chômage, notamment dans les secteurs du bâtiment et de l'automobile où la main d'œuvre étrangère est fortement représentée. Les transferts des MRE ont contribué ces dernières années à l'amélioration des conditions de vie en milieu rural et au développement du marché des biens de consommation et du logement.

IV. Gestion économique et réglementaire des risques

1 Le risk management

Le risk management dans une entreprise ou dans un établissement financier désigne la gestion des risques au sens large. Le processus global de gestion des risques peut être décomposé en trois étapes essentielles pour l'ensemble des risques encourus :

- Identification ;
- Mesure ;
- Suivi.

Cela ne peut se faire sans avoir préalablement :

- analysé l'ensemble des dimensions de risques que l'établissement supporte ;
- défini et conçu les techniques et modèles de mesure pour chacun de ces risques ;
- élaboré une méthodologie exhaustive de suivi et de pilotage de ces risques.

Les entreprises ont toujours suivi leurs risques dans la mesure où ceux-ci étaient susceptibles de venir perturber la réalisation de leurs objectifs notamment économiques.

Dès lors que ces risques pouvaient représenter une menace pour la collectivité, les États ont imposé des réglementations et, de ce point de vue, le secteur financier n'a pas été épargné.

On assiste donc depuis toujours à une évolution parallèle des deux plans, réglementaire et économique, cependant force est de constater que ce sont les exigences réglementaires et les sanctions potentielles en cas de non-respect des règles qui ont incité et incitent encore les établissements à améliorer et à renforcer leurs dispositifs internes de risk management.

2 Typologie des risques

L'origine du concept de risque remonte aux civilisations les plus anciennes. Dans l'Italie ancienne, *risicare* signifiait "oser". Une acception plus moderne et plus générale le définit comme une possibilité ou une probabilité mesurable d'enregistrer une perte.

Le risque est inévitable dans la vie des affaires. Ne pas vouloir en prendre, c'est courir celui d'être dépassé par des concurrents plus audacieux. Il représente le plus souvent une double opportunité, source de gains espérés, et occasion offerte de se différencier, pour les

entreprises les mieux préparées. Ainsi, la bonne gestion du risque permet de pouvoir mieux en prendre. Elle est à ce titre un élément majeur de la création de valeurs dans l'entreprise, et pas seulement pour les actionnaires, par les profits attendus ou la réduction des coûts. Elle l'est aussi pour les clients, par exemple par l'innovation, ou pour les salariés, par une meilleure sécurité au travail ou leur plus grande responsabilisation et implication. Cette possible contribution du risque à la performance de l'entreprise suppose qu'il soit d'abord identifié, pour pouvoir ensuite être géré.

En finance, on s'entend généralement sur les catégories de risques suivantes :

- ☐ le risque de crédit et le risque de contrepartie sur opérations de marché : ce sont les risques d'encourir des pertes en cas de défaillance de contreparties dans l'exécution de leurs engagements et obligations vis-à-vis de l'établissement financier ;
- ☐ le risque de marché ou risque de position : c'est le risque de perte financière à la suite d'une évolution défavorable des marchés financiers ;
- ☐ le risque de liquidité : il désigne l'incapacité temporaire ou non d'un établissement à, d'une part, lever des capitaux ou d'autre part, à effectuer des transactions à un coût ou à un prix raisonnable. On distingue le risque de liquidité de refinancement et le risque de liquidité de marché ;
- ☐ le risque opérationnel : il désigne l'ensemble des risques de pertes dues à une inadéquation ou à une défaillance des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs.

Le risque de marché sera détaillé par la suite.

D'autres risques font notamment l'objet d'une attention particulière de la part des régulateurs :

- ☐ le risque de taux d'intérêt global est le risque de taux relatif à la gestion actif/passif. En effet, la situation habituelle des banques, prêts à long terme (généralement à taux fixe) refinancés par des ressources à court terme (généralement à taux variable), les expose à un risque de variation des taux, notamment à un risque de déformation de la courbe des taux. Il est souvent aussi nommé risque de transformation
- ☐ le risque de concentration est le risque de perte financière à la suite de l'accumulation d'une proportion trop élevée du montant total d'exposition sur un seul segment d'activité, une catégorie d'émetteur, une classe d'actif, une échéance, etc.

Comme toute entreprise, les établissements financiers sont aussi exposés à des risques : risque stratégique, risque de réputation ou risque d'image, risques humains en complément de ceux qui entrent dans le périmètre des risques opérationnels.

Enfin, les activités bancaires et financières sont toujours susceptibles d'être confrontées au risque systémique : il désigne l'effet « château de cartes » ou « boule de neige » bien connu sur les marchés en cas de crise majeure. La réalisation d'un risque microéconomique ou

macroéconomique peut en effet déclencher un phénomène de contagion affectant une partie puis progressivement l'ensemble du système financier et par ricochet l'économie dite réelle.

3 Le cadre réglementaire international

Le comité de Bâle sur la supervision bancaire a été institué en 1975 en réponse à la croissance des échanges bancaires internationaux et donc à la nécessité de disposer de standards et principes communs pour renforcer la solidité et la stabilité du système bancaire et financier international. Il est animé par la Banque des règlements internationaux (BRI en français ou BIS en anglais).

Le comité fait jouer un rôle central aux fonds propres et ses travaux visent à proposer des normes régissant le niveau et la gestion des fonds propres à l'intention des banques ayant une activité internationale importante.

Il se compose aujourd'hui des représentants des banques centrales et des autorités prudentielles des pays suivants : Allemagne, Angleterre, Australie, Belgique, Brésil, Canada, Chine, Corée, Espagne, États-Unis, France, Inde, Italie, Japon, Luxembourg, Mexique, Pays-Bas, Suède, Suisse, et Turquie. Les normes prudentielles marocaines concernant l'exigence minimale de fonds propres et la surveillance bancaire se sont inspirées pour l'essentiel des normes proposées par le comité.

Le Conseil de stabilité financière

Le sommet du G20, qui s'est déroulé à Londres au début du mois d'avril 2009, a décidé de renforcer la régulation et la supervision financières mondiales. Il a été décidé de remplacer le Forum de stabilité financière (FSF), créé en 1999 en réponse à la crise initiée par la faillite du fonds LTCM, par un Conseil de stabilité financière (le CSF ou en anglais FSB — Financial Stability Board) au mandat et à la composition élargis. Il rassemble toutes les autorités nationales contribuant à la stabilité financière, dans les domaines de la monnaie, du crédit, de l'assurance, de la Bourse ou de la comptabilité.

C'est à ce nouveau conseil qu'il appartiendra d'établir les normes communes, de les proposer aux différents gouvernements, et aux ministres des Finances, de veiller à la coopération et aux échanges d'informations et de vérifier que ces normes sont appliquées de manière appropriée par les régulateurs.

Enfin il est possible de rajouter à ces deux entités, l'IOSCO (International Organization of Securities Commission) qui a pour mission de réfléchir sur le fonctionnement et la régulation des marchés.

Conclusion chapitre 1

Les marchés financiers dans le monde sont en profonde mutation. Nous avons principalement décrit dans ce chapitre les marchés financiers, leurs fonctions et les différents instruments financiers.

Depuis le début des années quatre-vingt, les marchés financiers internationaux se sont profondément transformés. La concurrence entre marchés, l'introduction de nouvelles

reglementations, ont donné lieu à de multiples modifications législatives et réglementaires qui ont profondément affecté le paysage boursier international.

Le marché financier représente l'un des deux circuits de financement de l'économie à côté de l'intermédiation bancaire. Il a pour vocation de mettre en relation directe les demandeurs et les pourvoyeurs de fonds. Son organisation, ses intervenants ainsi que son cadre réglementaire font de lui une industrie de collecte, de transformation et d'allocation de ressources en prenant en considération les risques dégagés principalement le risque de marché.

Chapitre 2 : Risque de marché

Introduction

Dans le monde de la finance, singulièrement bancaire, s'est produite une prise de conscience et ce, tant au niveau des directions générales des institutions agissant sur les marchés financiers que des autorités de contrôle de ces dernières; les risques de tous ordres, ayant pour conséquences potentielles de lourdes pertes financières, doivent être gérés, et cette gestion doit être contrôlée par un département.

En général, les risques auxquels les institutions financières peuvent faire face sont les suivants: le risque de crédit, le risque de liquidité, le risque opérationnel et le risque de marché. Depuis une dizaine d'années les développements de l'intermédiation financière, les innovations au niveau des titres, la globalisation des marchés financiers et la volatilité accrue et de plus en plus importante des marchés financiers, ont donné un regain d'intérêt évident à la gestion de risque de marché.

Notre préoccupation première sera ce dernier risque tout en sachant qu'une gestion saine et efficace devrait être globale et comprendre tous les risques auxquels une institution fait face. Le risque de marché est celui qui provient de la possibilité qu'une institution financière subisse des pertes suites à des mouvements adverses des prix.

I. Revue de littérature

1 Définition et champs d'application du risque de marché

Le risque de marché¹⁵ est défini comme étant le risque de pertes provenant des variations de la valeur au marché des positions en actions et en obligations au compte de négociation ainsi que des positions en devises et en denrées. Ces positions peuvent être au bilan ou hors bilan. Évidemment, le risque comme tel ne survient que lorsque la fluctuation de la valeur marchande est dans la direction opposée à celle espérée ou souhaitée ce qui entraîne alors une perte.

Le capital des entreprises, singulièrement de celles appartenant au secteur financier, est particulièrement exposé aux risques de marché, principalement :

- Le risque de taux : correspond au risque de variation de la valeur des positions ou au risque de variation des flux de la trésorerie futurs d'un instrument financier du fait de l'évolution des taux d'intérêts sur le marché.
- Le risque de change : correspond au risque de variation d'une position ou d'un instrument financier du fait de l'évolution des cours de change sur le marché.
- Le risque de base : c'est le risque sur un marché à terme du fait que le cours au comptant d'un instrument sous-jacent et son cours à terme ne varient pas de la même façon entre l'ouverture et la clôture d'une position.

¹⁵Définition de la Banque de Règlements Internationaux (BRI)

- Le risque de variation de cours : Le risque de variations de cours qui est un risque de prix sur la position détenue sur un actif financier déterminé, risque de l'évolution ultérieure des cours de bourse pour les actions.

- Le risque sur les produits de base : ce risque résulte de la variation de positions suite à une évolution défavorable des prix des matières premières sur les différents marchés sur lesquels la banque intervient.

2 Les facteurs de risque

Les instruments financiers sont classés dans différentes catégories (taux, change, actions, matières premières, crédit...) selon la nature des variables financières auxquelles ils sont sensibles.

L'ensemble de ces variables financières ou paramètres de marché constituent les facteurs de risque. Ils constituent les inputs de marché dans les systèmes de pricing et de gestion.

Il est courant d'identifier plusieurs milliers de facteurs de risque pour l'ensemble des portefeuilles de marché d'une banque de première signature. En effet, pour la plupart des produits financiers, il intervient un très grand nombre de variables dans le calcul de leur prix; chaque variable étant par nature un facteur de risque (courbe de taux d'intérêt, nappe de volatilité, structure de corrélation, etc.). Il est indispensable de procéder à leur définition détaillée qui peut dépendre de la maturité des différents sous-jacents des différents spreads...

L'identification des facteurs de risque constitue le socle de la démarche du risk management. Le risk manager va être obligé de faire un choix, le plus pertinent possible, pour sélectionner uniquement les facteurs de risque les plus représentatifs.

L'analyse des historiques des prix des actifs financiers montre à quel point les variations des facteurs de risque sont loin d'être uniformes.

Par ailleurs, elles sont évidemment multifactorielles et résultent de réactions pas nécessairement rationnelles. Un marché peut réagir fortement à la suite d'une rumeur puis revenir à son état initial lorsque la rumeur est démentie. En cas de crise, des réactions psychologiques exagérées peuvent conduire à un krach, voire à la réalisation d'un risque systémique.

Une partie importante de l'activité d'un risk manager est précisément d'essayer d'estimer les variations futures d'un ensemble choisi de facteurs de risque. C'est un exercice difficile et tout démontre qu'il y a souvent des différences significatives entre les anticipations des mouvements des facteurs de risque et leur réalisation effective.

3 Notion de risque général/spécifique

Pour des portefeuilles composés de produits de taux d'intérêt ou de produits sur actions, les textes réglementaires exigent une analyse en tenant compte des deux dimensions de risque : risque général et risque spécifique.

Le risque général associé à un titre est le risque de variation de l'actif qui est le plus à même de représenter un benchmark (actif de référence) :

- pour la mesure du risque général de taux, la banque doit définir :
 - un marché de référence : swaps ou emprunts d'État ;
 - les maturités (une dizaine en pratique) ;
 - les taux de rendement de référence, par exemple les taux zéro coupon ;
- pour la mesure du risque général sur actions, il faut définir l'indice dont le mouvement serait le plus corrélé avec celui du titre.

Le risque spécifique comprend :

- le risque qu'un titre varie différemment du marché en général et ce sans événement particulier ;
- le risque que la valeur de ce titre varie brutalement à la suite d'un événement l'affectant en particulier (annonce de perte, offre publique d'achat...) sans que le marché en général n'en soit spécialement affecté.

Autant le risque général paraît possible à suivre via des modèles, autant le risque spécifique est beaucoup plus complexe à prendre en compte et les évolutions de la réglementation prévues dans les années à venir risquent de porter notamment sur ce point.

II. Mesure des risques

La mesure du risque repose en premier lieu sur la sélection des facteurs de risque et des indicateurs capables de représenter correctement leur évolution. Dans un premier temps, il convient donc de déterminer les principaux indicateurs utilisés.

Néanmoins, les crises n'étant pas des phénomènes improbables, il convient aussi de tester la variation de valeur d'un portefeuille donné lors de mouvements de grande ampleur dont la probabilité, même si elle est faible, peut être compensée par l'ampleur des mouvements qu'ils peuvent entraîner. C'est l'objet des stress tests.

Enfin, l'idéal serait d'être capable de probabiliser le risque de perte d'un portefeuille, ce qui conduira aux méthodes de value at risk que nous détaillerons plus loin.

1 Les indicateurs de risque

Les gains/pertes ou P & L {profit & loss) qui seront générés entre aujourd'hui et demain découlent de la variation du prix de l'actif entre aujourd'hui et demain. Ainsi, pour une position sur une obligation ou une action, ce P & L peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$P \ \& \ L = (\text{Montant nominal de l'obligation ou nombre d'actions}) \times \text{Variation du prix de l'actif entre aujourd'hui et demain}$$

Le montant nominal sur lequel porte une opération est donc un premier indicateur de risque, c'est pourquoi les montants feront souvent l'objet d'un premier jeu de limites imposées aux traders et aux gérants.

Une deuxième catégorie d'indicateurs de risque concerne les sensibilités de l'actif aux variations de ses facteurs de risque. En effet, ces sensibilités permettent de passer des variations des facteurs de risque aux variations du prix de l'actif. En première approche :

Variation du prix = $\sum(\text{Sensibilité aux facteurs de risque} \times \text{Variation des facteurs de risque})$

L'analyse en sensibilité est encore aujourd'hui la base de la gestion des risques.

2 L'analyse en sensibilité

L'objectif de l'analyse en sensibilité est de permettre d'avoir une vision de l'évolution possible d'un P & L avant même que les mouvements des facteurs de risque ne se produisent. Ce sont des indicateurs dits « ex ante ». Autrement dit, à partir d'un point de départ, on pourra simuler les évolutions possibles du P & L grâce à des indicateurs en sensibilité.

Cependant les sensibilités d'un actif aux facteurs de risque sont elles-mêmes sensibles à ces facteurs de risque. Ce qui signifie qu'une analyse qui garderait les mêmes valeurs de sensibilité que celles obtenues au point de départ donnera de bons résultats uniquement pour de petites variations des facteurs de risque. Mais si l'on souhaite élargir le champ d'analyse, c'est-à-dire avoir une idée des évolutions du P & L pour des variations plus importantes des facteurs de risque, il faudra tenir compte des déformations des sensibilités. C'est ce que l'on qualifie d'analyse de la dynamique des sensibilités aux différents facteurs de variation des prix des actifs inconditionnels, ou des sensibilités sous scénarios.

III. Les théories traditionnelles de risque

1 Le modèle de moyenne-variance de H.Markowitz

H. Markowitz, en proposant en 1952 son célèbre modèle moyenne-variance, a donné le point de départ de la théorie moderne de la gestion de portefeuille. Selon ce modèle, tout investisseur poursuit deux objectifs conflictuels : la maximisation du rendement espéré et la minimisation du risque, mesuré par la variance des taux de rentabilité. Les principaux apports de ce modèle sont sans doute son aspect relativement général, permettant son utilisation dans un grand nombre de situations pratiques, et sa simplicité en termes d'analyse théorique.

H. Markowitz démontre qu'il est possible de constituer un portefeuille d'actifs dont le risque total est inférieur à la somme pondérée du risque des actifs qui la composent. La raison principale en est que la contribution d'un actif au risque global d'un portefeuille n'est pas égale au risque propre à cet actif mais dépend plutôt du degré de corrélation entre les variations des rendements de cet actif avec ceux des autres actifs dans le portefeuille. Par contre, l'espérance mathématique du rendement du portefeuille est la somme pondérée des rendements espérés des actifs qui la composent. D'où l'intérêt de la diversification.

H. Markowitz suppose qu'un investisseur qui cherche à former un portefeuille efficace s'intéresse uniquement à l'espérance mathématique, $\bar{X}$ et à l'écart type, $\sigma(\tilde{X})$, des rendements des titres financiers de sorte que sa fonction d'utilité est de la forme $u(\bar{X}, \sigma(\tilde{X}))$. Les hypothèses faites sont que l'utilité de l'investisseur augmente quand le rendement espéré

de son portefeuille augmente et diminue quand l'écart type de son portefeuille augmente. Ainsi, un portefeuille efficace est celui qui minimise la variance pour un rendement espéré donné ou qui maximise le rendement espéré pour un niveau donné d'écart type.

Dans la pratique, le modèle moyenne- variance de H. Markowitz se heurte à des difficultés quand le nombre de titres devient élevé. En effet, le modèle de Markowitz exige l'estimation de N variances et de $N^2 - N/2$ covariances si l'on suppose que le nombre de titres qui compose le portefeuille est de N . Quand N devient important, l'estimation de la matrice variance-covariance se présente comme un exercice très laborieux et les risques d'erreurs d'estimations sont loin d'être négligeables. Ce qui peut donner lieu à une frontière efficiente pour le moins erronée. De plus, le modèle de Markowitz ne se donnait pas pour tâche d'expliquer le processus de détermination des niveaux d'équilibre des rendements, les prenants plutôt pour acquis.

Le modèle de Markowitz comportait donc de nombreuses failles auxquelles il fallait pallier.

2 Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)¹⁶

Développé par Sharpe et Litner (1965), Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF), appelé aussi CAPM (Capital Asset Pricing Model) est un modèle très souvent utilisé, aussi bien par les praticiens que par les académiciens, pour évaluer les rendements anticipés d'équilibre sur n'importe quel actif risqué sur le marché. Un des avantages clés du MEDAF est qu'il propose une mesure unique et facile du risque à savoir le bêta¹⁷.

Le MEDAF repose sur un certain nombre d'hypothèses dont certaines semblent difficilement acceptables :

- Les investisseurs composent leurs portefeuilles en se préoccupant exclusivement de l'espérance et de la variance de rendement de ces derniers.
- Les investisseurs sont averses au risque: ils n'aiment pas le risque.
- Il n'y a pas de coût de transaction et les actifs sont parfaitement divisibles.
- Ni les dividendes, ni les gains en capitaux ne sont taxés.
- De nombreux acheteurs et vendeurs interviennent sur le marché et aucun d'entre eux ne peut avoir d'influence sur les prix.
- Tous les investisseurs peuvent prêter ou emprunter le montant qu'ils souhaitent au taux sans risque.
- Les anticipations des différents investisseurs sont homogènes.
- La période d'investissement est la même pour tous les investisseurs.

Le MEDAF stipule que le rendement espéré d'un actif est une fonction de son risque systématique. En effet, il est possible de décomposer le risque total d'un actif en deux parties:

¹⁶BERTRAND JACQUILLAT & BRUNO SOLNIK MARCHES FINANCIERS GESTION DE PORTEFEUILLE ET DES RISQUES. TROISIEME EDITION.

¹⁷ Bêta exprime la sensibilité des fluctuations de la valeur d'une action à celle de l'indice générale de marché.

$$\begin{aligned} \text{Risque total} &= \text{Risque systématique (ou encore risque marché)} \\ &+ \\ &\text{Risque non systématique (risque spécifique à l'actif).} \end{aligned}$$

Le risque systématique est attribuable aux mouvements généraux du marché et de l'économie: inflation, changement de gouvernement. Comme ce risque influence tous les actifs transigés sur le marché, il est impossible de l'éliminer par la diversification. Le risque systématique peut être mesuré par le bêta qui nous informe donc sur le degré de dépendance entre la volatilité des rendements sur le marché et la volatilité de rendement de l'actif considéré. Le bêta peut être calculé comme suit : $\beta_i = \frac{COV(R_m, R_i)}{Var(R_m)}$

Le MEDAF nous donne la relation à l'équilibre entre le rendement espéré d'un actif ou d'un portefeuille imparfaitement diversifié et son risque. Ce modèle nous donne la relation suivante: $E(R_p) = r_f + [E(R_m) - r_f] \times \beta_p = r_f + \beta_p \times \lambda$

Avec: λ = la prime par unité de risque c'est à dire $E(R_m) - r_f$

Le MEDAF stipule donc que le taux de rendement espéré (ou que devrait exiger un investisseur rationnel averse au risque) d'un actif risqué doit être égal au taux de rendement de l'actif sans risque, plus une prime de risque¹⁸. Dans ce cas, la relation entre le risque systématique et le rendement espéré demeure linéaire et seul le risque systématique doit être rémunéré par le marché puisque le risque spécifique peut être éliminé grâce à la diversification.

3 La théorie de l'arbitrage¹⁹

Au milieu des années 70 est apparu un modèle du risque basé l'absence d'arbitrage : acronyme de l'expression : Arbitrage Pricing Theory. Ce modèle proposé par ROSS (1976), reconnaît que le risque est un phénomène multidimensionnel qui s'explique par plusieurs facteurs.

Il suppose que rendement des actions d'une entreprise dépend partiellement des facteurs macroéconomiques et partiellement d'un bruit (événements spécifiques à l'entreprise). Alors que le risque dû aux facteurs macroéconomiques est non diversifiable, celui lié aux événements possibles spécifiques pour l'entreprise est diversifiable.

La volatilité globale du marché qui entre dans la mesure du risque dans le modèle CAPM est probablement un facteur par d'autres facteurs possibles. Le bêta d'un titre par rapport à un facteur systématique quelconque est alors la sensibilité relative du rendement du titre à ce facteur : $R_i = \alpha_i + \sum \beta_i \cdot F_i + \varepsilon_i$

Avec :

¹⁸ La prime de risque d'un marché financier mesure l'écart de rentabilité attendue entre le marché dans sa totalité et l'actif sans risque (l'obligation d'Etat).

¹⁹Bertrand Jacquillat & Bruno Solnik MARCHES FINANCIERS Gestion de portefeuille et des risques. Troisième édition.

R_i : le taux de rentabilité sur le titre i

$\sum \beta_i.F_i$: Les facteurs de performances

α_i : Les facteurs spécifiques

Cependant, l’une des faiblesses du modèle APT est qu’il reste muet sur l’identité des facteurs qui déterminent les rendements des titres.

Aucun modèle traditionnel ne peut donner une représentation exacte et complète de la réalité. Face à la complexité des décisions de la gestion financière, il est cependant indispensable d’avoir un modèle de base pour structurer le processus de gestion et suivre la réglementation prudentielle.

IV. Les aspects réglementaires de risque de marché

Le développement des marchés financiers dans les années 80 et surtout dans les années 90, a conduit les autorités de contrôle bancaire et les autorités de marché à prendre un certain nombre de décisions pour réguler ces marchés et à pousser les établissements financiers à développer des modèles internes de mesure de risque.

Le dispositif de surveillance des risques de marché mis en place en 1996 consiste à prévoir une mesure des risques résultant, pour les établissements de crédit et les entreprises d’investissement, des opérations enregistrées dans leur portefeuille de négociation²⁰ et une couverture de ces risques par des exigences de fonds propres.

De la même manière que pour le risque de crédit, les exigences de fonds propres relatives aux risques de marché s’appliquent sur une base consolidée. Pour les mesurer, les établissements ont le choix entre deux types d’approches :

□ l’approche standard. Celles-ci concernent les catégories suivantes de risques et sont additionnées de manière arithmétique :

Catégorie de risque	Périmètre de calcul
Risque de taux (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risques sur titres de propriété (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risque de change	Ensemble des opérations qu’elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non

²⁰ Définition prudentielle du portefeuille de négociation : Les positions détenues à des fins de négociation sont celles qui ont été prises en vue d’être cédées à court terme et/ou dans l’intention de bénéficier de l’évolution favorable des cours à court terme ou de figer des bénéfices d’arbitrage.

Risque sur matières premières	Ensemble des opérations qu'elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non
Risques optionnels	Options associées à chacune des catégories des risques précédentes

□ ou l’approche modèles internes reposant sur la détermination d’une perte potentielle (“Value at Risk”).

La construction d’un modèle interne est un projet qui permet aussi d’assainir son système d’information, notamment sur le stockage et la qualité des données. Mais le véritable enjeu concerne l’exigence en fonds propres. Nous pouvons penser qu’une mesure plus réfléchie permet de mieux mesurer la consommation en fonds propres des activités de marché. Un modèle interne est donc un élément de réponse dans le cadre d’un modèle d’allocation de fonds propres.

1 Les normes générales

Les modèles internes doivent remplir les conditions minimales suivantes:

- le système de gestion des risques de l’établissement repose sur des principes sains et mis en œuvre de manière intègre ;
- l’établissement possède en nombre suffisant de personnel qualifié pour l’utilisation de modèles élaborés non seulement dans le domaine de la négociation, mais aussi dans ceux du contrôle des risques, de l’audit interne et, du post-marché ;
- les modèles de l’établissement ont fait la preuve sur une durée significative qu’ils mesurent les risques avec une précision raisonnable ;
- l’établissement effectue régulièrement des simulations de crise.

2 Les critères qualitatifs

Nous présentons ici un résumé de ces différents critères :

- a. L’établissement financier doit disposer d’une unité de contrôle des risques, responsable de la configuration et de l’exploitation du système de gestion des risques, indépendante des unités de négociation. Elle doit établir et analyser des rapports quotidiens sur les résultats produits par les modèles ainsi qu’une évaluation de l’utilisation des limites de négociation et rend compte directement à l’organe exécutif de l’établissement.
- b. Cette unité doit effectuer régulièrement (au moins trimestriellement) des contrôles ex-post.
- c. L’organe délibérant et l’organe exécutif doivent être activement associés au processus de contrôles des risques et le considérer comme un aspect essentiel de l’activité de l’établissement.

d. Les rapports quotidiens doivent être revus par des responsables disposant de l'expertise et de l'autorité suffisantes pour exiger au besoin une réduction des positions prises par un opérateur voire une diminution du degré d'exposition global de la banque.

e. Les modèles internes doivent être étroitement intégrés à la gestion journalière des risques.

f. Le système de mesure des risques doit être utilisé conjointement avec les limites opérationnelles.

g. Un programme rigoureux de simulations de crise doit régulièrement compléter l'analyse des risques fondée sur les résultats quotidiens des modèles internes. Lorsque ses conclusions font apparaître une vulnérabilité particulière à un ensemble donné de circonstances, des mesures appropriées doivent être prises rapidement pour réduire ces risques.

h. Les établissements doivent disposer d'un programme de vérification du respect des règles et procédures internes relatives au fonctionnement du système de mesure des risques. Ce système fait l'objet d'une documentation décrivant les principes de base et le détail des techniques de mesure utilisées.

i. Une analyse indépendante du système de mesure des risques doit être effectuée régulièrement dans le cadre du processus d'un audit interne de l'établissement.

3 Les critères quantitatifs

Le choix des modèles est laissé aux établissements financiers. Mais ils doivent respecter un certain nombre de règles :

1. La perte potentielle est calculée quotidiennement.

2. Le niveau de confiance unilatéral requis est de 99%.

3. Il est appliqué un choc instantané sur les prix équivalent à une variation sur dix jours correspondant à une période de détention de dix jours ouvrés.

4. La période d'observation (échantillon historique) pour le calcul de la perte potentielle doit être au minimum d'un an.

5. Les établissements doivent mettre à jour leurs séries de données au moins une fois tous les trois mois et plus fréquemment en cas d'accroissement notable des volatilités observées.

6. Les établissements peuvent prendre en compte les corrélations empiriques entre tous les facteurs de risques sous réserve que le système de mesure de celles-ci soit fiable, appliqué de manière intègre et que la qualité des estimations soit suffisante.

7. Les modèles doivent appréhender avec précision les risques particuliers liés au caractère non linéaire du prix des options.

8. Chaque établissement doit satisfaire, sur une base journalière, à l'exigence de fonds propres correspondant à la valeur la plus élevée entre :

- i. la perte potentielle du jour précédent ; et
- ii. la moyenne des pertes potentielles sur les soixante derniers jours ouvrés, à laquelle est appliquée un facteur de multiplication.

9. La Commission Bancaire attribue à chaque établissement un facteur multiplicatif²¹ en fonction de la qualité de son système de gestion des risques, avec un minimum de 3, le complément éventuel, compris entre 0 et 1, étant directement lié aux performances de son modèle, évaluées à posteriori.

10. Lorsque le risque spécifique inhérent aux instruments liés au taux d'intérêt et aux titres de propriété n'est pas pris en compte de manière satisfaisante dans leurs modèles, les établissements sont assujettis à une exigence de fonds propres distincte destinée à couvrir ce risque calculée selon la méthodologie standard.

Pour résumer, les établissements doivent calculer la perte potentielle quotidiennement pour une période de détention de 10 jours. Notons cette perte potentielle $P(t)$ à la date t (jour ouvré).

A chaque date t , l'établissement calcule l'exigence de fonds propres $FP(t)$ de la façon

suivante :

$$FP(t) = \max \left(P(t-1) \cdot (3 + \varepsilon) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) \right)$$

Avec ε le complément éventuel ($0 < \varepsilon < 1$). Il est donc important de disposer d'une bonne mesure des risques (c'est à dire de la perte potentielle) puisque celle-ci conditionne totalement l'exigence en fonds propres.

Conclusion chapitre 2

Définir et mesurer le risque de marché n'est pas une tâche simple pour les institutions financières ni pour aucune entreprise de n'importe quelle industrie. En premier lieu, une mesure du risque de marché pertinente doit être applicable non seulement pour un instrument financier en particulier, tel qu'une action ou un swap de taux d'intérêt, mais également aux portefeuilles de ces mêmes instruments ou d'instruments reliés ainsi qu'aux portefeuilles contenant une variété d'instruments différents avec leurs risques sous-jacents. En second lieu, une mesure du risque de marché adéquate doit pouvoir tenir compte de tous les facteurs de risque possibles, par exemple une variation de prix, la convexité, la volatilité, la corrélation, la perte de valeur due au temps, le taux d'actualisation, etc. Troisièmement, la mesure doit considérer ces facteurs de risque de manière cohérente et logique; ces facteurs doivent être réunis en un dénominateur commun qui mesure le risque de marché de chaque instrument ainsi que le risque agrégé du portefeuille total. Finalement, la mesure du risque de marché doit être facilement compréhensible par les gestionnaires n'ayant pas de connaissances précises sur le sujet et doit aider à contrôler le risque de marché. La VaR est une mesure qui semble satisfaire à ces critères.

²¹ Facteur multiplicatif : Nombre variant entre 3 et 4 pouvant être multiplié à la mesure de valeur à risque calculée par la banque afin de servir d'assurance contre les mauvais fonctionnements des modèles internes.

Chapitre 3 : La Value At Risk

La théorie de la VaR n'est pas nouvelle. Elle figure parmi les travaux de Markowitz (théorie moderne du portefeuille introduite en 1952, qui présente la variance comme mesure du risque).

Son utilisation est relativement récente dans les banques. C'est surtout à la banque J.P. Morgan que l'on doit sa diffusion. En effet, en octobre 1994, le département des risques de marché de J.P. Morgan a publié sa vision du management des risques de marché en introduisant le concept de value at risk et en dévoilant une méthode simple mais révolutionnaire à l'époque de mesure du risque, fondée sur des modèles : la méthode paramétrique Riskmetrics, ou méthode dite de variance-covariance.

L'indicateur proposé pour suivre les risques a ensuite été adopté par les régulateurs et le comité de Balle pour servir de base au calcul d'exigences de fonds propres au titre des risques de marché. La méthode a ensuite été enrichie progressivement au cours des différentes versions du document technique Riskmetrics pour intégrer notamment la méthode historique et la méthode de Monte Carlo.

I. Présentation de l'approche VaR :

1 L'idée de base

Prenons le cas d'un portefeuille composé d'un ensemble de positions acheteuses sur des actions cotées sur le marché, dont la valorisation totale est de 100 millions UM. Quelles sont les informations pertinentes à adresser à la direction quant au risque de perte sur ce portefeuille entre aujourd'hui et demain ?

- Se borner à annoncer que ce portefeuille peut encourir une perte de 100 millions UM n'a pas une grande valeur ajoutée... ;
- Annoncer que la perte de demain sera par exemple de 10 millions U en faisant l'hypothèse d'une variation de prix de 10 % sans autre précision ferait surtout penser à une analyse non justifiée.

L'information qui s'avérerait utile pour la direction de l'établissement, c'est le montant de perte qui a un certain pourcentage de chances de ne pas être dépassé : savoir qu'il y a 95 % de chances ou 99 % de chances que le portefeuille ne perde pas plus que respectivement 4,15 millions UM et 5,85 millions UM entre aujourd'hui et demain lui permettrait de se positionner.

En effet il serait alors en mesure, en fonction des stratégies choisies au niveau de la direction générale et du seuil d'aversion au risque de la banque, d'accepter le risque mis en évidence ou au contraire de refuser que la banque supporte ce niveau de perte à ce niveau de probabilité et de demander à ce que les positions soient réduites ou mieux couvertes. C'est le genre de réponse que la méthode VaR permet d'obtenir.

2 Définition de la Value at Risk

Selon Jorion²² « la Value at Risk mesure la perte maximale attendue sur un horizon donné, à un niveau de confiance donné ». La VaR d'un portefeuille d'actifs financiers correspond au montant maximal des pertes dues aux mouvements de marché sur un horizon de temps donné à un niveau de confiance donné si l'on exclut un ensemble d'évènements défavorables ayant une faible probabilité de se produire.

Berdin et Hyde²³ apporte une définition plus exhaustive au concept de VaR. En effet, Berdin et Hyde définissent la VaR comme étant la mesure qui fourni une estimation de la perte potentielle sur un actif ou un portefeuille qui peut survenir avec une probabilité donnée suite à des mouvements de prix ou de taux relativement adverses, sous l'hypothèse que pendant une période de temps (l'horizon de la VaR) la composition du portefeuille reste inchangée.

Ainsi, la Value-at-Risk n'est rien d'autre qu'un fractile de la distribution de perte et profit associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée. La mesure de Value at Risk ne fait que refléter l'information contenue dans la queue gauche (associée aux pertes) de la distribution des rendements d'un actif. Si l'on considère un taux de couverture de α % (ou de façon équivalente un niveau de confiance de $1-\alpha$ %) la Value-at-Risk correspond tout simplement au fractile de niveau α % de la distribution de perte et profit valable sur la période de détention de l'actif :

$$VaR(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$

Où $F(.)$ désigne la fonction de répartition associée à la distribution de perte et profit.

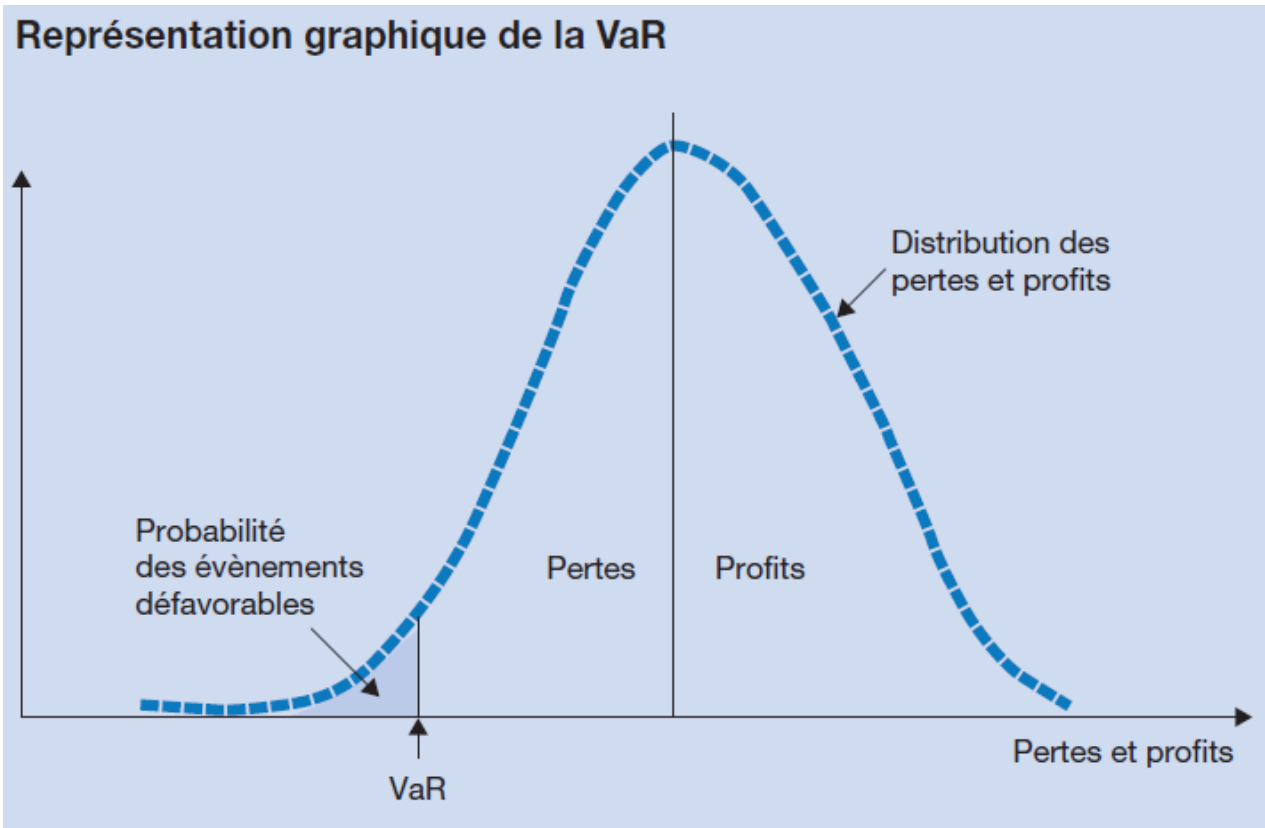


Figure 2 : Représentation graphique de la VAR

²² Jorion, Ph., 1997, Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk,

²³ Berdin.D et Hyde.S novembre 2001, Forex Risk : Measurement and evaluation using Value At Risk, Central Bank Of Irland.

Analytiquement, la VaR à horizon de temps h et au seuil de probabilité p est un nombre $VaR(h,1-\alpha)$ tel que : $Pr(L_h > VaR(h,p)) = 1-\alpha$

Ou de manière équivalente : $Pr(L_h \leq VaR(h,p)) = \alpha$

L_h : représente la perte (“Loss”); elle est une variable aléatoire positive ou négative.

De manière plus pragmatique, la VaR donne directement à un investisseur ou un gestionnaire une indication simple et compréhensible d’un risque de perte. Ces derniers pourront donc selon leurs aversions aux risques, prendre une décision quant à la position ou au portefeuille en question.

Afin de concrétiser ce concept, voici un exemple d’un cas fictif. Si nous obtenons une VaR de 820000DH pour un seuil de confiance de 90% sur une période de 10 jours, cela signifie que le portefeuille d’une valeur de 1890000DH a 90% de chance de ne pas perdre plus que 820000DH dans les 10 jours. Ce résultat est très élevé et nous indique clairement que cet actif est très risqué.

Exemple concret : le crédit populaire marocain

Depuis quelques années, les grands groupes financiers publient des informations sur la VaR de leur portefeuille de négociation. Deux raisons peuvent expliquer une telle démarche: une volonté délibérée de transparence et les exigences de l’autorité marocaine du marché des capitaux.

Le Crédit Populaire du Maroc a adopté une structure de gestion et de suivi des risques de marché qui inclut le recours à la méthodologie VaR et à des analyses de sensibilité pour l’ensemble de son portefeuille de négociation.

La VaR globale (1-Jour à 95%) du portefeuille à fin décembre 2010 est de 46,74 Millions DH, soit 0,34% de la Valeur marchande du portefeuille et 0,22% du total des Fonds Propres.

La VaR hors corrélation est de 57,6 Millions DH, soit un effet de diversification de 10,87 Millions sur le portefeuille global et réparti sur les différents instruments.

La VaR est concentrée principalement sur les opérations de change et de trésorerie devises et accessoirement sur les autres composantes (portefeuille obligataire, actions et OPCVM). Ceci est dû à la taille de ces portefeuilles, à la forte volatilité des facteurs de risques les composant et à leurs poids par rapport aux autres facteurs du portefeuille de négociation.

Au niveau du Compartiment change, Le portefeuille de change à terme a enregistré un niveau quasi stable pendant toute l’année 2010, ce qui est dû notamment à la baisse généralisée des carnets de commande malgré quelques événements observés relatifs à la volatilité accrue des cours EUR et USD.

La VaR pour les activités de change a atteint 19,53 Millions DH en fin d’année.

Au niveau du Compartiment obligataire, Courant 2010, les limites obligataires ont été revues et validées par les organes d’administration et de direction. Les limites de duration et

de position maximale du portefeuille de placement ont été maintenues au même niveau que l'année précédente.

La VaR des activités obligataires à fin Décembre 2010 représente 7,71 Millions DH.

Au niveau du Compartiment actions et OPCVM, L'encours de ce portefeuille est demeuré pratiquement stable courant l'année 2010, avec une répartition de 10%, 90% respectivement pour les actions et les OPCVM, ceci est dans l'objectif d'alléger les positions sur actions dont les valeurs ne sont pas significatives et se concentrer sur des valeurs de fonds de portefeuille réputées plus liquides.

La VaR pour les activités sur les titres de propriété représente 5,56 Millions DH.

Rappelant que La méthode retenue pour le calcul de la VAR est celle basée sur un modèle paramétrique à distribution normale (avec matrice de Variance-Covariance) qui prend implicitement en compte les corrélations entre les différents facteurs de risques se basant sur un historique de 2 ans. Une VaR globale est calculée pour l'ensemble des activités de négociation et par nature d'instruments.

3 Les paramètres de la VaR

La définition du concept VaR souligne que cette mesure dépend fortement de la distribution des pertes et profits, du choix de l'horizon de temps considéré et du niveau de confiance. Le choix de ces trois paramètres doit être fait en fonctions de divers critères, notamment l'objectif poursuivi par l'institution lorsque elle calcul la VaR et sa volonté de supporter un certain niveau de risque.

a La distribution des pertes et profits du portefeuille valable pour la période de détention

Les données à partir desquelles on calcule une Value-at-Risk peuvent prendre différentes formes. Rappelons que la Value-at-Risk se définit comme un fractile de la distribution de pertes et profits associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée. Dès lors, la forme la plus simple consiste à présenter les données en termes de profits et pertes. On note P_t la valeur d'un actif (ou d'un portefeuille) à la fin de la période t et D_t l'ensemble des paiements intermédiaires obtenus entre les dates $t-1$ et t . Les pertes et profits associés à la détention de l'actif (ou du portefeuille) sont alors définis par la différence : $P/L = P_t + D_t - P_{t-1}$

Dans ce cas, une valeur positive correspond à un profit et une valeur négative à une perte.

Généralement, ces pertes et profits sont exprimés sous la forme d'un rendement géométrique noté R_t :

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right)$$

On suppose que le rendement à la date t , R_t , est une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de distribution de pertes et profits, la fonction de densité associée à cette variable aléatoire réelle, notée : $f_R(r)$

Parallèlement, on peut définir une distribution de pertes et profits conditionnelle, c'est à dire une fonction de densité conditionnelle à un ensemble d'information disponible à la date t , noté Ω_t . Cette densité conditionnelle est notée : $f_R(r/\Omega_t)$

Cette densité conditionnelle peut elle aussi être différente d'une date à l'autre, mais généralement on se restreint à des densités conditionnelles invariantes dans le temps, i.e. telles que :

$$f_{R_t}(r/\Omega_t) = f_R(r/\Omega_t) \quad \forall r \in R, \forall t$$

Cela revient à supposer que conditionnellement à un ensemble d'information Ω_t (ou Ω_{t-1} lorsque l'on cherche à prévoir la Value-at-Risk), les rendements sont identiquement distribués.

La Value-at-Risk à la date t obtenue conditionnellement à l'ensemble d'information Ω_t s'écrit alors sous la forme :

$$\text{VaR}_t(\alpha) = F^{-1}(\alpha | \Omega_t)$$

b Le choix de la période ou l'horizon

L'horizon de gestion est la durée sur laquelle on estime le risque, elle représente le temps nécessaire pour couvrir la position du portefeuille. Le choix de l'horizon temporel dépend de l'utilisation de la VaR. un trader calcule les pertes et les profits chaque jour. Sa position est généralement liquide et activement géré. Pour un usage interne, il semble donc judicieux de calculer la VaR sur un horizon temporel d'un jour ouvré. Si cette VaR est inacceptable, le portefeuille peut être rajusté assez rapidement. Par ailleurs, une VaR sur un horizon plus long aurait peu de sens compte tenu des variations dans la composition de portefeuille.

En général, le choix de l'horizon est influencé par trois facteurs majeurs :

- il doit être adapté à la durée de détention de l'actif ou du portefeuille objet de l'estimation.
- il doit être suffisamment court pour respecter l'hypothèse d'invariance de la composition du portefeuille.
- il doit être suffisamment court pour que la quantité de données disponible (parfois faible) puisse permettre d'estimer une VaR sur cet horizon.

Mais il peut aussi être fixé par des normes réglementaires. Les organismes financiers utilisent une VaR à 10 jours mais cet horizon peut atteindre plusieurs mois lorsqu'il s'agit d'obligations.

Quelle que soit l'utilisation de la VaR, lorsque les risques de marché sont pris en considération, les analystes calculent en premier lieu la VaR sur un horizon temporel d'un jour. L'hypothèse habituelle est :

$$\text{VaR à } N \text{ jours} = \text{VaR à } 1 \text{ jour} \times \sqrt{N}$$

Quantifier le risque d'évolutions défavorables à travers la VaR revient à mesurer les déviations maximales avec une probabilité donnée, cette probabilité de dépassement nous permet de trouver le niveau de confiance.

Le niveau de confiance est quant à lui est influencé par 2 facteurs :

- il ne doit pas être trop élevé, sinon le risque de réalisation devient suffisamment faible pour être inintéressant en tant qu'indicateur.
- il doit refléter le degré d'aversion des gestionnaires face au risque de réalisation d'évènements extrêmes.

Mais tout comme pour l'horizon, le niveau de confiance peut être déterminé par des normes réglementaires. Dans la pratique, la VaR est estimée sur la base de niveau de confiance allant de 90 à 99.90%.

Les normes réglementaires imposées par Bâle II exigent que la VaR soit calculée par les banques en utilisant un niveau de confiance de 99% et un horizon de 2 semaines soit 10 jours ouvrables.

II. Les cas de figures de la VAR

1 La VaR Normale

Si les rendements X d'un actif (ou d'un portefeuille) sur une seule période sont indépendants de même loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 , alors les rendements sur la période T sont également gaussiens de moyenne μT et variance $\sigma^2 T$.

$$\text{Prob}(X_T \leq \text{VaR}(\alpha, T)) = \text{Prob}(X_T - \mu T / \sigma \sqrt{T} \leq \text{VaR}(\alpha, T) - \mu T / \sigma \sqrt{T}) = \alpha$$

En notant $z_\alpha = N^{-1}(\alpha)$ (déterminé par la table de la loi normale), la VaR gaussienne est définie par :

$$\text{VaR}(\alpha, T) - \mu T / \sigma \sqrt{T} = z_\alpha$$

$$\text{VaR}(\alpha, T) = \mu T + z_\alpha \sigma \sqrt{T}$$

Pour un VaR à 1 jour, l'expression précédente se réduit à :

$$\text{VaR}(\alpha, T) = \mu T + z_\alpha \sigma$$

Cette méthode est simple à implémenter, cependant elle ne tient pas compte des queues épaisses. La VaR qui en résulte est, en général sous estimée.

Outre la détermination de l'horizon t , et du degré de confiance, qui influent directement sur les calculs de la Value at Risk, l'hypothèse de normalité de la distribution des cours (ou des rentabilités), si elle n'est pas vérifiée risque de biaiser le résultat.

2 VaR d'un actif isolé

a VaR d'une action

L'action est un actif financier correspondant à une part de propriété d'une société. Elle peut donner lieu à vente et achat de gré à gré ou sur un marché organisé. C'est la loi de l'offre

et de la demande de ce marché qui en détermine le prix ce qui donne le caractère risqué à l'action, la volatilité des marchés financiers vient accentuer ce caractère risqué. La théorie moderne du portefeuille de Markowitz utilise comme critère de sélection le couple espérance-variance. Selon cette théorie, une action est caractérisée par son espérance et sa variance. Le premier de ces paramètres, appelé aussi le rendement espéré et la valeur moyenne de la variable en question, le second mesure la dispersion des valeurs de cette variable au tour de sa moyenne. Pour pouvoir calculer la VaR d'une action il est donc nécessaire de connaître ces deux paramètres.

Pour mieux comprendre la méthode de calcul de la VaR d'une action soit l'exemple numérique suivant :

Supposons une action avec une perte attendue à la période t de 100 UM et une déviation (écart type) de 80 UM. Nous avons alors $E(P_t) = -100$ et $\sigma(P_t) = 80$. Ceci nous permet de calculer la VaR de la manière suivante :

$$VaR_q = E(P_t) + z_q \cdot \sigma(P_t)$$

$$VaR_{0,95} = 100 + (-1,6449 \cdot 80) = -31,6$$

$$VaR_{0,975} = 100 + (-1,9600 \cdot 80) = -56,8$$

$$VaR_{0,99} = 100 + (-2,3263 \cdot 80) = -86,1$$

Ceci en se référant à la table de la loi normale qui affiche les valeurs z_q suivantes en fonction des intervalles de confiances.

b VaR d'une obligation

L'obligation est un actif généralement considéré comme peu risqué si on le compare aux actions. Il n'en demeure pas moins vrai que la détention d'obligations présente certains risques. Généralement, deux types de risques sont associés à la détention d'obligations : le premier et le risque de défaut, qui correspond essentiellement au cas où l'émetteur ne respecte pas ces engagements soit par le paiement des coupons avec retard soit dans le cas de sa faillite et donc non-paiement des coupons et non-remboursement à l'échéance.

Le deuxième type de risque et celui lié aux fluctuations des taux d'intérêt.

Pour pouvoir calculer la VaR d'une obligation, rappelons quelques notions fondamentales de mesure du risque d'une obligation : la duration (D) d'une obligation peut être considérée comme la durée de vie moyenne de l'obligation :

$$D = \frac{\sum \left(\frac{t \cdot CF_t}{(1+r)^t} \right)}{\sum \left(\frac{CF_t}{(1+r)^t} \right)}$$

Avec :

- ☐ CF_t : le cash-flow généré par l'obligation à l'instant t
- ☐ r : le taux d'intérêt de l'obligation

La sensibilité ou duration modifiée d'une obligation mesure le degré de sensibilité de celle-ci face à la variation des taux d'intérêt : $S = \frac{-D}{(1+r)}$

Si r augmente de 1 %, la valeur de l'obligation diminue de S %.

Pour bien comprendre le mode de calcul de la VaR d'une obligation soit l'exemple suivant :

Supposons un portefeuille d'obligation de coupon zéro de sept ans avec une valeur de marché de 1 800,00 UM et une valeur nominale de 1 631,483 UM (c'est à dire un rendement de 10.32%). Nous sommes intéressés de connaître la VaR de ce portefeuille pour un horizon $t = 1$ journée et une probabilité $q = 0,95$ sachant que l'écart type journalier de ce portefeuille est de 0,01%.

La durée modifiée D^* de l'obligation est :

$$D^* = -D / (1+r) = -7 / (1,1032) = -6,345$$

et la volatilité du prix est :

$$\text{Volatilité de } P = (D^*) \cdot (1,65 \sigma) = (-6,345) (1,65 \times 0,0001) = -0,1046 \%$$

Ainsi la VaR de ce portefeuille avec $t = 1$ journée et $q = 0,95$ est :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0.95} &= \text{valeur du marché de la position} \times \text{volatilité} \times \sqrt{t} \\ &= 1800,00 \times (-0,001046) \\ &= -1,883 \end{aligned}$$

c VaR d'un portefeuille

Pour pouvoir calculer la Value at Risk d'un portefeuille, il faut, comme il était le cas pour un titre isolé, connaître son espérance et sa variance ou son écart type.

Pour se faire, considérons un portefeuille constitué de N actifs en nombres respectifs : $n_1 \dots n_N$. Notons p_j le prix du $j^{\text{ième}}$ titre et p_p le prix du portefeuille qui sera donné par :

$$p_p = \sum_{j=1}^N n_j p_j$$

et la variation du prix obéira à la même relation :

$$\Delta p_p = \sum_{j=1}^N n_j \cdot \Delta p_j$$

par la suite il est possible de trouver l'espérance et la variance de Δp_p à partir de l'espérance, de la variance et des covariances des différents Δp_j :

$$\begin{aligned} E(\Delta p_p) &= \sum_{j=1}^N n_j E(\Delta p_j) \\ \text{var}(\Delta p_p) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j \text{cov}(\Delta p_i; \Delta p_j) \end{aligned}$$

où on a, lorsque les indices sont égaux :

$$\text{cov}(\Delta p_i; \Delta p_i) = \text{var}(\Delta p_i)$$

La VaR du portefeuille peut alors se calculer à partir de ces deux éléments, comme il était le cas pour un titre isolé, à l'aide de la formule suivante :

$$VaR_q = E(\Delta p_p) + z_q \cdot \sigma(\Delta p_p)$$

Cependant, il y a un inconvénient majeur lors de l'utilisation de ces relations. Cet inconvénient consiste au fait que pour pouvoir les utiliser, on doit non seulement connaître les paramètres univariés $E(\Delta p_i)$ et $\text{var}(\Delta p_i)$ pour chaque titre, mais également les paramètres bivariés $\text{cov}(\Delta p_i, \Delta p_j)$ pour chaque couple de titres, ce qui constitue un volume très important de paramètres à estimer. Si, à titre d'exemple, le portefeuille comporte $N = 150$ titres différents, on aura alors 150 espérances, 150 variances et $[N(N-1)/2] = 11175$ covariances à calculer, ce qui constitue une tâche très lourde et non moins complexe.

Certains modèles permettent, sous certaines hypothèses, de simplifier considérablement ces relations. Parmi ces modèles celui à indice simple de Sharpe où les variations des prix des différentes actions sont des fonctions de premier degré de la variation d'un seul et même indice de marché :

$$\Delta p_j = \alpha_j + \beta_j \Delta I + \Delta \varepsilon_j \quad j=1, \dots, N.$$

avec α et β ayant l'interprétation habituelle et peuvent être obtenues par technique de régression en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires.

Ainsi on a d'après ce modèle :

$$E(\Delta p_j) = \alpha_j + \beta_j E_I$$

$$\text{var}(\Delta p_j) = \beta_j^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2$$

et on calcule les covariances de la même manière : $\text{cov}(\Delta p_i; \Delta p_j) = \beta_i \beta_j \sigma_I^2$

En remplaçant ces trois relations dans celles de $E(\Delta p_p)$ et $\text{var}(\Delta p_p)$ on trouve respectivement :

$$E(\Delta p_p) = \sum_{j=1}^N n_j (\alpha_j + \beta_j E_I) = \alpha_p + \beta_p E_I$$

$$\text{var}(\Delta p_p) = \beta_p^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^N n_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2$$

la VaR relative à ce portefeuille est donc donnée par :

$$VaR_q = \alpha_p + \beta_p E_I + z_q \sqrt{\beta_p^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^N n_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2}$$

d La VaR réglementaire

La VaR réglementaire est le quantile 99 % de la perte à horizon 10 jours, en supposant les positions inchangées entre aujourd'hui et dans 10 jours. Plus précisément, l'exigence en fonds propres se calcule d'après la formule suivante :

MAX (dernière VaR ; $k \times$ Moyenne des 60 dernières VaR) avec k , coefficient multiplicateur (scaling factor) entre 3 et 4 qui est fixé par le régulateur selon la qualité de prévision du modèle.

Dans la pratique, les établissements utilisent souvent un horizon de 1 jour plus proche à la fois de la gestion opérationnelle des risques de marché d'une part et de l'horizon de liquidité des positions de trading d'autre part. En effet, le choix de l'horizon se fonde sur la possibilité de liquider la position à cet horizon.

De plus, afin de passer d'un horizon 1 jour à un horizon 10 jours, le régulateur autorise les banques à multiplier la VaR 1 jour par racine de 10 pour obtenir la VaR 10 jours, ce qui est une approximation mathématique couramment utilisée.

Enfin, le plus souvent, les départements de risques sont amenés à calculer la VaR (99^{en}. 1 jour), c'est-à-dire la perte qu'on s'attend à ne pas dépasser plus d'une fois sur cent.

Pratiquement, cela signifie que sur un an (250 jours ouvrés environ), la perte réelle du portefeuille peut dépasser deux ou trois fois la VaR.

3 Démarche générale pour le calcul de la VaR.

L'approche moderne de la VaR a pour objectif d'évaluer le risque global d'une position ou d'une entité financière comme en prenant en compte toutes les interactions possibles entre les différents actifs et passifs.

Il existe différentes méthodes de mesure de la VaR, mais elles ont en commun ces différents points :

- ◆ L'utilisation d'informations statistiques : c'est à dire toutes les informations statistiques pertinentes à propos des composantes du portefeuille, comme les volatilités historiques et les corrélations entre les différentes sources de risques qui sont utilisées dans la quantification du risque du portefeuille.

- ◆ La reconnaissance de l'interaction : il faut prendre en compte dans le portefeuille total les effets de diversification et de couverture. Par exemple une position couverte est assez peu risquée tandis qu'une position sur un dérivé seul peut se révéler très risquée. Pour cette raison le risque d'un portefeuille n'est généralement pas la simple somme des risques de ces différentes composantes, et la contribution marginale d'une position au risque total d'un portefeuille dépend de la composition du portefeuille.

Le concept de VaR semble plutôt simple, mais sa mise en oeuvre pratique ne l'est pas. Il existe différentes mesures qui se différencient par leurs hypothèses et les outils statistiques utilisés. Cependant les principes de bases restent les mêmes entre les différentes mesures.

- Pour commencer, les données concernant l'ensemble des positions de l'institution financière doivent être réunies dans une base de données centralisée. Cette tâche n'est pas toujours évidente.

- Toutes les positions doivent être valorisées à leur valeur de marché (« Mark to market »).

- Une fois les données centralisées, le risque global doit être calculé par agrégation des risques des instruments individuels entrant dans la composition du portefeuille, de sorte que les effets de diversification soient correctement pris en compte.

- C'est à dire qu'il faut déterminer les facteurs de risque individuels communs aux différentes positions comme les principaux indices boursiers, les principaux cours de change et de matières premières et les taux zéro coupons pour différentes maturités, qui sont censés influencer les différentes composantes du portefeuille.

- Il faut choisir la période de détention, le plus généralement un ou dix jours ouvrés.

- Il faut déterminer les variations des facteurs de risques individuels pour la période de détention, basées sur la distribution des changements de prix constatés sur un échantillon d'observations historiques prédéterminé.

- Puis il faut estimer les effets des variations des facteurs de risques individuels sur la valeur des composantes du portefeuille.

La VaR peut ensuite être calculée, une fois que la relation précise entre la variation de la valeur du portefeuille et les variations de chaque source de risque individuel a été déterminée.

Cette dernière étape est sans doute la plus difficile pour le calcul de la VaR, et nécessite certaines approximations qui peuvent se révéler dangereuses.

Il ressort une hypothèse sous-jacente dans l'étape de la détermination des facteurs de risques, et de l'effet de la variation de ces facteurs sur la valeur du portefeuille. C'est-à-dire que la distribution des futures variations des facteurs de risques est identique à celle des variations passées (stabilité de la loi), et que la relation entre la variation de la valeur du portefeuille et les variations des facteurs est stable.

Les différentes procédures pour ces deux dernières étapes classifient les méthodes de détermination de la VaR en différentes catégories.

4 Les méthodes d'estimation de la Value at Risk

a La méthode historique

La méthode de Simulation Historique, connue également sous le nom de méthode historique, est sans doute la méthode la plus simple dans sa conception et sa mise en œuvre.

La VaR-HS est basée sur une hypothèse assez forte, à savoir celle de distributions i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées). Avec une telle méthode de calcul, on suppose donc que la distribution conditionnelle des rentabilités est invariante et peut alors être simulée par les rentabilités passées. Par conséquent, la VaR (ou de façon équivalente le fractile

latent de la distribution conditionnelle des rentabilités) est estimée par sa contrepartie empirique.

Il suffit en fait de disposer des données historiques des gains et des pertes journalières du portefeuille dont on souhaite calculer la VaR. A partir de ces données, il est possible de reconstituer la distribution empirique des gains et des pertes journaliers et d'en déduire la VaR.

Méthodologie

Il s'agit de reconstituer l'ensemble des P & L à 1 jour, c'est-à-dire les variations de la valeur du portefeuille entre aujourd'hui et demain, en faisant l'hypothèse qu'il peut se produire entre aujourd'hui et demain ce qu'il s'est produit d'un jour à l'autre sur un historique considéré. Ainsi, le calcul d'une VaR 1 jour via une simulation historique s'effectue en plusieurs étapes :

- identification des facteurs de risque et des sensibilités à ces facteurs de risque ;
- choix de la profondeur d'historique sur laquelle porte l'étude ;
- recherche des variations historiques quotidiennes de ces facteurs de risque ;
- valorisation du portefeuille par les valeurs de marché aujourd'hui des facteurs de risque = MTM du portefeuille. Les sensibilités doivent également être valorisées (ces valorisations sont en général fondées sur les prix de clôture des marchés) ;
- calcul des P & L entre aujourd'hui et demain résultant des variations des facteurs de risque calquées sur les variations historiques et en partant du mark-to-market à aujourd'hui du portefeuille ; cet ensemble de P & L est couramment appelé le « vecteur P & L » ;
- identification de la VaR 1 jour, c'est-à-dire la valeur du P & L qui correspond au seuil de confiance défini.

Avantages

En raison de sa relative simplicité d'implémentation, la simulation Historique est sans doute parmi les méthodes les plus largement adoptées par les professionnels. Cette popularité peut s'expliquer par d'autres attraits comme l'abstraction faite des hypothèses concernant l'évaluation du modèle ou sur le processus de détermination des prix des facteurs de risque. L'évaluation complète des portefeuilles se faisant à partir des variations des observations passées et du niveau des prix courants, la non-linéarité et la non-normalité des distributions ne posent pas de problèmes particuliers. Un autre, la SI! peut prendre en compte les différents degrés de risque comme le Delta, Gamma ou Vega.

Inconvénients

La SH présente aussi quelques faiblesses, dont la plus importante est, de notre point de vue, la supposition selon laquelle le passé est un bon indicateur du futur immédiat. Cette

hypothèse fait souvent partie des difficultés incontournables rencontrées en matière de prévision économique et financière. Son inconvénient majeur réside dans le fait d'ignorer d'importants événements à cause de la période historique de référence. IX' même, il peut arriver que l'échantillon historique choisi comporte un événement trop rare pour qu'il réapparaisse dans le futur. Autrement dit, les observations extrêmes localisées dans les queues de distribution peuvent être mal représentées. Dans le même ordre d'idées, la SU ne garantit pas la captation des élévations temporaires de volatilités de certains facteurs de risque dépendants des cycles économiques (potentiellement identifiables) ponctués par des changements structurels. Plus généralement, il s'agit du problème de non-stationnarité des séries de distributions. De même, la période de référence de l'échantillon est cruciale à plus d'un titre. Une durée de 4 à 5 ans peut s'avérer nécessaire pour pouvoir effectuer un grand nombre de simulations pour un jour mobile de calcul de VaR. Se pose alors le problème des observations ayant un historique court (pour les actifs peu liquides par exemple) ou tout simplement pour celles non stockées dans les bases de données.

IL convient par ailleurs de souligner qu'une pondération identique des observations qu'elles soient récentes ou anciennes ne permet pas de rendre compte des changements dans les risques des facteurs. Pour pallier ce problème, certains établissements choisissent un lissage exponentiel. Parmi les autres faiblesses de la SH, il faut également évoquer la pratique du buckeling qui consiste à regrouper certains facteurs de risque comme les différents taux d'intérêt. Ces simplifications qui permettent d'accélérer les calculs peuvent limiter la précision de cette méthode. Justement, l'arbitrage entre rapidité et précision de calcul de la VaR est l'élément qui peut justifier le choix de la simulation de Monte Carlo.

b Méthode paramétrique : Méthode de Variance – Covariance²⁴(VC)

La détermination de la VaR paramétrique se fait au moyen d'un calcul analytique relativement aisé en pratique mais sous des hypothèses théoriques assez contraignantes, l'exemple le plus connu d'un tel modèle étant sans doute RiskMetrics. Les principales hypothèses simplificatrices consistent à supposer, d'une part, que les lois de probabilité qui régissent les distributions des variations des prix de marché sont normales et, d'autre part, que les instruments présentent un profil de risque linéaire. Sous ces hypothèses, la matrice de variances/covariances peut être appliquée assez directement aux positions détenues pour calculer la VaR. Les calculs utilisés dans la méthode RiskMetrics sont rapides et simples, et requièrent uniquement la connaissance de la matrice des variances/covariances des rendements du portefeuille. Néanmoins, cette méthode s'avère être inadaptée aux portefeuilles non linéaires (instruments optionnels), et théoriquement peu adaptée aux queues de distribution épaisses et aux distributions non normales des rendements.

Méthodologie :

Cette méthode comprend essentiellement trois étapes, à savoir :

²⁴JP.MORGAN, « Technical Document Risk Metrics™ »

- décomposer les actifs financiers du portefeuille en plusieurs facteurs de risque élémentaires.

- répartir les cash-flows associés à ces facteurs de risque en cash-flows plus simples correspondants à des échéances standards, cette technique est appelée en anglais “mapping”.

- le calcul effectif de la VaR.

La méthode Variance-Covariance se base sur trois hypothèses :

- normalité de la distribution des facteurs de risque.

- stationnarité des prix ou des rendements de l’actif objet de l’estimation : les paramètres statistiques mesurés pour la distribution observée des variations des rendements sont de bonnes estimations de ces mêmes paramètres pour l’horizon de calcul de la VaR.

- linéarité de la relation entre les prix des actifs et les facteurs de risque.

Il est tout à fait clair que ces hypothèses sont particulièrement contraignantes : l’hypothèse de la linéarité constitue une véritable entrave à l’application de la méthode Variance-Covariance aux produits optionnels ,et nous avons vu dans les sections précédentes que l’hypothèse de la normalité n’est pas toujours vraie , voir même très rare .

Ces contraintes ont poussé JP Morgane à généraliser le cadre de son approche par la linéarisation de la relation entre les prix des actifs optionnels et les facteurs de risque. De même, l’hypothèse de normalité a été assouplie de la manière suivante :

L’hypothèse de normalité permet de décrire l’évolution du rendement d’un actif par un modèle de marche aléatoire : “random walk” qui s’écrit :

$$R_t = \mu_t + \sigma \varepsilon_t$$

avec ε_t : variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée (iid) suivant une loi normale centrée réduite $N(0,1)$. Les paramètres μ et σ représentent respectivement l’espérance et l’écart type (volatilité) des rendements et sont donnés par :

$$E(R_t) = \mu$$

$$\text{Var}(R_t) = \sigma^2$$

➤ Décomposition des actifs financiers (Risk mapping):

C’est la première étape de la méthode de la matrice des variances-covariances estimée. Il s’agit de transformer les différentes positions du portefeuille en combinaisons linéaires d’un certain nombre de facteurs de risque pour faciliter les mesures des risques et le calcul des variances et donc de la VaR :

$$p = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \varepsilon = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + \varepsilon$$

Avec :

$X_1, X_2, \dots, X_n$: les facteurs de risques

p : prix de l’actif

Chacun de ces facteurs de risque est un cash-flow caractérisé par :

- un certain montant
- payé à une certaine date

Ces cash-flows doivent être actualisés à la date t_0 où la VaR est calculée.

La décomposition d'un actif en un ensemble de facteurs de risque assure une grande précision des résultats, mais cette opération est très coûteuse en moyens de calcul et en données nécessaires pour alimenter le modèle.

Il existe plusieurs modèles de décomposition, dans notre travail on s'intéresse particulièrement au cas des actions.

Pour les actions, les cash-flows correspondent simplement aux positions courantes car le titre est sujet au seul risque de volatilité des cours, éventuellement adaptées en fonction d'un taux de change si le titre est coté sur un marché étranger, dans ce cas on prend en considération le risque de change en plus du risque de volatilité.

➤ Calcul de la VaR :

Les valeurs numériques dont s'alimente la méthode de la matrice Variance-Covariance estimée sont les évaluations des valeurs moyennes et des variances des différents facteurs de risque, ainsi que des covariances relatives aux couples correspondants.

Considérons maintenant un portefeuille constitué de N actifs en nombres respectifs $n_1, \dots, n_N$; la valeur de chacun de ceux-ci s'exprimant à partir des facteurs de risque $X_1, X_2, \dots, X_N$ par une relation linéaire :

$$P_j = a_{j1}X_1 + \dots + a_{jN}X_N \quad j=1, \dots, N$$

C'est le cas pour les titres que nous étudions dans ce travail, La valeur du portefeuille peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} p_p &= \sum_{j=1}^N n_j p_j \\ p_p &= \sum_{j=1}^N n_j \sum_{k=1}^N a_{jk} X_k \\ p_p &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) X_k \end{aligned}$$

avec :

p_j : est le prix de l'actif j

p_p : est le prix de l'ensemble du portefeuille

n_j : est le nombre de titre j dans le portefeuille

X_k : est la position en les différents facteurs de risque

si on veut tenir compte du temps
$$P_p(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) X_k(t)$$

La variation de la valeur du portefeuille peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta P_p(t) &= P_p(t) - P_p(t-1) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) (X_k(t) - X_k(t-1)) \\ &= \sum_{k=1}^n (X_k(t-1) \Delta_k(t)) \end{aligned}$$

Où $\Delta_k(t)$ a l'interprétation habituelle et où
$$x_k(t-1) \equiv \sum_{j=1}^N n_j a_{jk} X_k(t-1)$$

peut s'interpréter comme le montant investi en (t-1) dans le k-ème facteur de risque.

On s'intéresse à l'évolution de la valeur du portefeuille entre l'instant présent (t=0) et l'horizon de calcul de la VaR (t=1), on suppose que l'on dispose des observations suivantes :

- les positions actuelles (à t = 0) en les différents facteurs de risque :

$$X_k(0) \quad k=1, \dots, n \text{ que nous noterons simplement } X_k$$

- l'estimation à partir des historiques, des variations relatives moyennes pour les divers facteurs de risque : $E(\Delta_k(1)) = E_k \quad k=1, \dots, N$

- l'estimation, également à partir des historiques, des variances et des covariances des facteurs de risque :

$$\text{var}(\Delta_k(1)) = \sigma_k^2 = \sigma_{kk} \quad k=1, \dots, n$$

$$\text{cov}(\Delta_k(1), \Delta_l(1)) = \sigma_{kl} \quad k, l=1, \dots, n$$

Ces données peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2(L_2) \equiv \text{var}(\Delta P_p(1))$$

La variance de la perte peut s'écrire
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k x_l \sigma_{kl}$$

$$= \bar{x}^t \sqrt{x}$$

Ce qui nous permet de calculer :

$$VaR_q^* = z_q \sigma(L_2) \equiv z_q \sqrt{\bar{x}^t \bar{x}}$$

Et donc,

$$VaR_q = VaR_q^* + E(L_1)$$

$$VaR_q = VaR_q^* - E(\Delta p_p(1))$$

$$VaR_q = VaR_q^* - \bar{x}^t \vec{E}$$

Avantages

L'avantage fondamental de la méthode VC par rapport aux autres méthodes réside dans la simplicité de la mise en oeuvre de cette technique surtout pour le cas des actions.

*L'hypothèse de normalité des variations des prix sur laquelle se base cette méthode, simplifie considérablement l'estimation de la VaR. De plus, les données nécessaires pour calculer la matrice des variances-covariances sont généralement facilement disponibles bien qu'assez volumineuses. Par conséquent, l'estimation de la VaR par la méthode VC s'effectue rapidement et requiert peu de ressources informatiques.

*En supposant que les changements des prix sont normalement distribués, la méthode VC permet d'exprimer la VaR pour toutes les combinaisons possibles du niveau de confiance et de l'horizon de calcul, contrairement à la méthode SH qui, en augmentant l'horizon de calcul, on perd une large partie des observations. Cette possibilité d'ajustement rend la VaR potentiellement riche en informations.

*Enfin, la méthode VC jouit d'une grande objectivité du fait que la procédure d'estimation est particulièrement intuitive.

Inconvénients

Grâce aux hypothèses qu'elle pose, la méthode VC est facilement mise en oeuvre.

Toutefois ces hypothèses peuvent s'avérer irréalistes et compromettre les résultats.

- L'hypothèse de normalité des variations des prix constitue une hypothèse fondamentale formulée par la méthode VC. Comme nous l'avons vue auparavant, elle simplifie énormément la procédure. Cependant, nos analyses empiriques au début du second chapitre montre que les rendements du portefeuille ne semblent pas se comporter de manière normale, c'est le cas pour la plus part des actifs financiers.

- La méthode VC repose sur une autre hypothèse fondamentale, à savoir la linéarité de la relation entre les prix des actifs et les facteurs de risque. Cette hypothèse est particulièrement contraignante lorsqu'on traite le cas des actifs optionnels tel que les options, instruments typiquement non linéaires, dans ce cas cette hypothèse peut s'avérer problématique. Par conséquent, la méthode VC ne mesure pas de manière précise le risque des portefeuilles dont une large proportion présente des caractéristiques non linéaires.

- La technique VC se fonde également sur l'hypothèse selon laquelle les volatilités et les corrélations entre les différents facteurs de risque sont stables pendant la période de temps choisie (hypothèse de stationnarité). Elle s'avère ainsi limitée dans le traitement des marchés instables, et ce particulièrement lorsque l'horizon de temps est long.

- La méthode VC peut être soumise au risque de modèle si le modèle d'évaluation des positions choisi est erroné ou incomplet.

c La simulation de Monte Carlo (MC)²⁵

Méthodologie

La SMC est similaire à la SH. la différence concerne les variations hypothétiques des prix des actifs. Ces derniers sont créés de façon aléatoire à partir d'un processus stochastique spécifié tandis qu'ils proviennent des données historiques dans le cas de la SU. L'implémentation de la SMC se fait en deux temps. Il faut d'abord préciser le processus stochastique pour la distribution des actifs financiers. Les paramètres de la distribution peuvent être déterminés à partir des observations historiques ou des options. Ensuite, on simule des mouvements fictifs de prix pour tous les facteurs de risque. Pour chaque période de calcul, le portefeuille est complètement réévalué marked-to-market comme dans le cas de la SH.

La simulation de Monte Carlo est une méthode statistique utilisée lorsqu'il est très difficile de déterminer une loi de probabilité uniquement par un raisonnement mathématique. Elle consiste en fait en la fabrication de cette distribution à l'aide de la génération d'un grand nombre d'échantillons pseudo-aléatoires²⁶ extrait de cette distribution. La méthode de simulation de MC est prônée par la banque Bankers Trust, avec son système Ra Roc 2020.

En fait, la méthode de simulation MC suppose que chacun des facteurs de risque de marché suit une loi paramétrique connue, dont les paramètres sont estimés sur base de données historiques. Une fois la distribution jointe des facteurs de marché spécifiée, une technique de génération de nombres aléatoires est mise en oeuvre. Celle-ci produit des scénarios hypothétiques en choisissant des changements des prix au hasard à partir de la distribution jointe des facteurs de risque. Chaque scénario fournit une valorisation différente du portefeuille. En générant un grand nombre de scénarios, la méthode de simulation MC construit une distribution proche de la vraie distribution des valeurs futures du portefeuille et la VaR correspond au quantile choisi de cette distribution.

L'approche MC comporte les cinq étapes suivantes :

a. On fait le choix d'une famille de modèles d'évaluation pour les différents facteurs de risque ou les actifs en portefeuille. Il peut s'agir de loi normale, log normale, ou de modèles plus complexes pour certains produits dérivés ; il peut de manière plus générale s'agir de n'importe quelle distribution qui aurait été ajustée à partir d'observations historiques. On

²⁵ NEIL D. PEARSON, Risk budgeting and Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk.

²⁶ Un générateur pseudo-aléatoire est un algorithme itératif qui engendre des suites dont le comportement est apparemment aléatoire.

peut également considérer des relations qui expriment le comportement des prix des différents actifs en fonction de facteurs communs de risque, comme un indice général de marché pour le modèle à indice simple de Sharpe pour les actions.

b. A partir des historiques des actifs en présence et des facteurs de risque, on estime:

- la distribution des différents facteurs de risque, ainsi que des paramètres qui y sont associés, moyennes et matrice des variances-covariances;
- les paramètres des relations liant les prix des actifs et les facteurs de risque; il s'agit généralement d'estimations réalisées par des techniques du type régression.

c. Pour l'ensemble des facteurs de risque, l'utilisation conjointe des modèles probabilistes obtenues en (a) et des paramètres des distributions déterminés en (b) permet de construire par simulation de MC un grand nombre M (5000 à 10000) d'échantillons pseudo-aléatoires extraits de chacune des distributions des variations des facteurs de risque en question.

Les valeurs futures des facteurs de risque s'obtiennent alors à partir des valeurs observées actuellement $X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0)$:

$$X_k^t(1) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k^{(t)}) \quad k=1, \dots, N \quad t=1, \dots, M$$

Il s'agit là d'autant de scénarios d'évolution des prix. Il est bien clair que ces simulations doivent être réalisées à partir des paramètres décrivant chacun des facteurs de risque individuellement, mais aussi à partir des corrélations liant ceux-ci les uns aux autres.

d. Les résultats de ces simulations sont alors introduits dans les relations de comportement des actifs en fonction des facteurs communs de risque

$$p_j = f_j(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad j=1, \dots, N$$

Ces relations peuvent être très simples ou beaucoup plus complexes (dans le cas des options). Elles permettent de simuler les distributions des prix futurs des différents actifs :

$$p_j^{(t)} = f_j(X_1^{(t)}(1), X_2^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)) \quad j=1, \dots, N \quad t=1, \dots, M$$

Le calcul de la valeur du portefeuille en fonction de la valeur de ses éléments constitutifs pour chacune des M simulations :

$$p_p^{(t)}(1) = \sum_{j=1}^N n_j p_j^{(t)}(1) \quad t=1, \dots, M$$

suppose que les distributions des différents prix peuvent simplement s'additionner pour donner la distribution du prix du portefeuille . Or on sait que ceci n'est possible que si la distribution conjointe des prix est multivariée normale. Puisque la méthode de MC veut éviter cette hypothèse exigeante, on peut alors effectuer l'agrégation des éléments constitutifs du portefeuille par une nouvelle simulation, en tenant compte cette fois de la structure de corrélation entre les différents actifs du portefeuille , ce qui est beaucoup plus lourd .

La confrontation avec la valeur actuelle du portefeuille

$$P_p(0) = \sum_{j=1}^N n_j P_j(0)$$

Où $p_j(0) = f_j(X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0))$ $j=1, \dots, N$ permet d'estimer la contribution de la perte subie sur le portefeuille :

$$L^{(t)} = p_p(0) - p_p^t(1) \quad t=1, \dots, M$$

Après ordonnancement et regroupement éventuel des M résultats obtenus on déduit le paramètre VaR.

Il faut cependant noter que cette méthode nécessite un ordinateur très performant car elle est coûteuse en temps de calcul (elle convient difficilement au calcul journalier d'une VaR pour un nombre trop grand d'actifs). De plus, elle demande un effort important de modélisation puisque celle-ci déterminera entièrement les trajectoires des facteurs de marché que l'on utilise pour le calcul de la VaR.

Avantages

La simulation de Monte Carlo est jugée comme étant la plus puissante en comparaison avec les autres méthodes d'estimation de la VaR. Ce jugement s'explique par sa capacité à intégrer quasiment tous les types d'exposition et de risque. Ses points forts sont nombreux. Son implémentation est en mesure de tenir compte des risques de non-linéarité des distributions des actifs et des instruments dérivés, de volatilité, et aussi de modèle.

Dans la méthode de simulation Historique, la VaR est estimée pour un seul (quantité) niveau de probabilité donné, tandis que la SMC peut générer toute la fonction de distribution de probabilité. Cette caractéristique permet de l'étendre aux pertes potentielles anticipées au delà de la VaR liée à un niveau donné de confiance. Contrairement à la SU, la SMC est capable d'intégrer des variations dues au temps, comme la baisse de la valeur temps des options, le règlement quotidien de différents flux liés à des actifs fixes ou variables ou au paiement des appels de marge sur les positions à terme ou conditionnels.

Inconvénients

L'inconvénient majeur de la SMC est le temps requis pour sa programmation informatique. En considérant, par exemple, un portefeuille moyen de 500 actifs et 100 000 répliquations de prix, il faut effectuer pas loin de 50 millions de simulations. A ce volume de calcul, la décision d'évaluer une VaR quotidienne doit se prendre en fonction de l'avantage/coût lié à son utilisation. Quelle que soit l'option choisie par la banque : achat de logiciel ou développement en interne, le coût global du système et de l'expertise est plus onéreux que celui induit par l'utilisation de la SI 1. Au coût purement matériel de cette méthode, s'ajoute une autre faiblesse liée au risque de modèle quant au choix du processus stochastique sous-jacent par les facteurs de risque et par le pricing d'instruments dérivés comme les options. Par conséquent, il faut compléter l'estimation de la VaR par l'analyse traditionnelle de la sensibilité.

En définitive, comme il a été rappelé précédemment, la qualité de l'approximation dépend fondamentalement du nombre d'échantillons aléatoires que l'ordinateur peut générer. Plus ce nombre est élevé plus celle-ci s'améliore. Actuellement, la puissance de certaines machines Permer d'aller jusqu'à un million de distributions par actif. Le temps et le cout très élevé des calculs peuvent limiter l'attrait de cette approche.

Synthèse des trois méthodes

	Simulation historique	Variance-covariance	Simulation de Monté Carlo
Hypothèse de distribution	Non	Normalité	Non
Hypothèse de stationnarité	Oui	Oui	Non
Horizon	Une période d’observation	Une période d’observation	Trajectoire de n’importe quelle durée
Données nécessaires	Historiques	Matrice des corrélations	Historique + modèle de simulation
Mise en place	Facile	Moyenne	difficile
Robustesse	Très bonne	Trop d’hypothèses	Bonne

Conclusion chapitre 3

La VaR, acronyme désignant la value at risk, en est l’un des derniers nés et des plus en vogue actuellement. La définition probabiliste de la VaR est claire mais ses méthodes de calcul sont multiples et il convient d’adopter la plus adéquate selon la nature du portefeuille d’actifs sous gestion. Les outils mathématiques mis en œuvre peuvent aussi être pointus et requièrent une parfaite maîtrise pour fournir un résultat pertinent. Ce dernier chapitre retrace les modèles de calcul de VaR les plus largement mis en place au sein des institutions qui s’y soumettent, et réserve une grande place à l’étude d’exemples qui présentent, en pratique, les différentes méthodes possibles et les problèmes qui s’y rattachent.

Enfin, le résultat dépend des hypothèses relatives à la distribution et à la modélisation des rendements des actifs financiers. De nombreuses méthodes existent et si on applique simultanément chaque méthode au même problème, les résultats diffèrent.

Conclusion partie 1

Dans cette première partie nous avons fait un survol des principaux concepts liés à l’objet de la thèse : marchés financiers, risque de marché et value at risk.

L’étude des marchés financiers est marquée par d’innombrables découvertes qui portent à la fois sur le comportement de ces marchés, la dynamique des prix, l’interaction d’agents

hétérogènes ou encore sur l'impact d'une intervention publique. C'est un thème de recherche interdisciplinaire qui trouve un écho dans le monde de la finance avec ses crises et ses scandales. Il fait appel à l'économétrie temporelle, à l'analyse comportementale, aux systèmes complexes, aux faits historiques... pour tenter de percer la complexité qui le caractérise et d'apporter des solutions aux problèmes rencontrés. La complexité inhérente aux marchés financiers découle de cette interaction microéconomique et macroéconomique, qui nécessite une étude des risques financiers particulièrement le risque de marché.

La conception du risque de marché dans le cadre réglementaire s'inscrit dans une approche quantifiable à travers l'instrument VaR et dans une approche analytique au travers des risques induits par une dépréciation des actifs.

La Value at Risk, est certainement la mesure de risque la plus communément utilisée dans l'industrie financière. C'est en effet un concept très simple, qui, pour un portefeuille donné, un horizon de temps donné, et un seuil p , donne le niveau de perte qui ne devrait être dépassé que $(1 - p) \%$ du temps. Nonobstant ses défauts notables (notamment l'absence de sous additivité), la VaR est centrale en gestion des risques et joue un rôle majeur dans la détermination du capital réglementaire. Mais, si la VaR est un concept simple et largement utilisé, sa définition n'est pas constructive. La distribution théorique du PnL d'un portefeuille n'est en effet pas observable et doit donc être estimée. De surcroît, les portefeuilles considérés sont le plus souvent complexes. Ainsi, calculer la VaR d'un portefeuille est à la fois un problème de statistiques et un problème de modélisation.

DEUXIEME PARTIE : DYNAMIQUE DES MARCHES

La recherche d'invariants est souvent considérée comme l'objectif premier de l'activité scientifique. Sur les marchés boursiers, cette recherche a pris le chemin de la modélisation du processus des variations des cours cotés. Très tôt s'est posée la question de la mise en évidence de régularités empiriques, de l'obtention d'une équation robuste régissant les fluctuations boursières, résultats qui ne seraient pas dépendants de la période d'observation des marchés ni affectés par les conditions changeantes des économies.

L'histoire de la finance au XX^e siècle est traversée par cette recherche qui, telle une ossature des autres domaines de la modélisation, a constitué le soubassement de l'ingénierie financière puis de l'industrie, fondements probabilistes sur lesquels se construisaient les modèles économiques théoriques et les produits financiers.

L'évolution des marchés financiers possède certaines caractéristiques empiriques, que tout modèle cherche à reproduire. Les techniques de modélisation et de calcul des risques pris par une banque, un ensemble de traders, ou un trader particulier doivent, pour être les plus prédictifs possibles, en vue de reproduire les principales caractéristiques inhérentes aux dynamiques boursières.

Le paradigme traditionnel de la finance cherche à comprendre les marchés financiers en se basant sur des modélisations mathématiques simples et fausses, mais préférées par les professionnels et les régulateurs à d'autres modèles pour leur simplicité même, qui ont conduit l'ensemble des acteurs financiers de la planète à l'avènement des crises.

Cette débâcle repose pour une grande part sur une représentation abstraite mais fausse du risque, que nous appelons représentation brownienne de l'incertitude, qui est massivement passée dans les pratiques professionnelles et dans les réglementations prudentielles gouvernant l'activité des établissements financiers.

La théorie de la finance concerne l'étude des prix des produits et plus précisément de leurs évolutions temporelles. Un modèle financier repose le plus souvent sur une représentation des prix des actifs financiers. Une telle représentation peut être recherchée dans une perspective de meilleure compréhension de la dynamique des marchés financiers, ou encore dans une perspective d'élaboration d'outils permettant d'améliorer la gestion des risques.

Chapitre 4 : Modélisation des cours boursiers et hypothèses de la finance classique

« Tout ce qui a son prix est de peu de valeur » disait Friedrich Nietzsche. Soit. Mais c'est ce « peu » qui obsède toute la science économique, et encore plus la finance, où s'échangent uniquement des choses immatérielles, des actions, des obligations, des instruments financiers, le tout étant consigné dans d'abstraites livres de comptes. L'échange est permanent, de plus en plus rapide, la question de la valeur trône au centre des préoccupations et des calculs. Un corpus théorique s'est, imposé pour y répondre, que nous appellerons le modèle classique de la finance, dans les années 1960 aux États-Unis. Ses racines remontent à plusieurs décennies en arrière et son succès tournera vite à l'hégémonie.

Le modèle classique de la finance, est bâti sur un certain nombre d'hypothèses qui trouvent toutes leurs sources dans la théorie économique néoclassique apparue à la fin du XIX^e siècle. Le Français Léon Walras (1834-1910), le Britannique Alfred Marshall (1842-1924), l'Autrichien Carl Menger (1840-1921) en sont les principaux fondateurs. Dans le sillage du développement des sciences et des technologies lors de la Révolution industrielle, ils défendent alors une approche basée exclusivement sur les mathématiques. Tout doit être calculable et ils créent cette notion d'homoeconomicus au comportement parfaitement rationnel et censé maximiser son utilité en analysant l'ensemble des informations disponibles.

Ce cadre d'analyse simple, aurait été très satisfaisant si ses prédictions avaient été confirmées par les données empiriques. Au fil des années, certaines notions élémentaires concernant l'ensemble du marché boursier, la dynamique des titres financiers et les comportements individuels d'échange restent inexplicables.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à l'étude de la dynamique des marchés financiers à travers l'analyse du comportement des cours boursiers. Après avoir effectué une brève revue de l'origine des modèles classiques d'évolutions des cours financiers nous décrirons la théorie de l'efficience des marchés financiers.

I. Aperçu historique de la modélisation de la dynamique boursière

1 La marche aléatoire

Le comportement des cours boursiers à long terme suscite et suscite encore l'intérêt des professionnels intervenant sur les marchés financiers. Depuis les années soixante, la compréhension de ce comportement a constitué un terrain de recherche fécond pour les universitaires qui ont constaté après plusieurs tentatives d'explication que ces cours boursiers suivent un processus de marché aléatoire. Ce constat vise notamment à confirmer l'efficience des marchés souvent avancée dans la théorie financière moderne.

Le modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières a été progressivement incorporé dans la science économique, faisant de ce modèle la représentation de l'évolution dynamique des prix d'équilibre d'un marché de libre concurrence. La construction de l'économie financière en tant que discipline scientifique a été un processus

long qui s'est déroulé en plusieurs étapes mises en évidence par Jovanovic²⁷. Elle conduit ici à dissocier le lien entre histoire du modèle de marche aléatoire et histoire de l'efficience informationnelle, un lien qui a été établi lors de la construction du canon de l'économie financière dans les années 1960. Elle rompt ainsi avec la présentation traditionnelle, héritée des débats théoriques des années 1960 et 1970 et qui se retrouve dans quasiment tous les travaux qui ont présenté et enrichi l'histoire canonique de cette discipline.

Définition de la marche aléatoire

En mathématiques, en économie, et en physique théorique, une marche au hasard est un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires, ou effectués « au hasard ». On emploie également les expressions marche aléatoire, promenade aléatoire ou random walk en anglais. Ces pas aléatoires sont de plus totalement décorrélés les uns des autres ; cette dernière propriété, fondamentale, est appelée caractère markovien du processus²⁸, du nom du mathématicien Markov. Elle signifie intuitivement qu'à chaque instant, le futur du système dépend de son état présent, mais pas de son passé, même le plus proche. Autrement dit, le système « perd la mémoire » à mesure qu'il évolue dans le temps. Pour cette raison, une marche aléatoire est parfois aussi appelée « marche de l'ivrogne ».

Le random walk repose sur l'idée que les changements, de période à période, dans le prix d'une action sont statistiquement indépendants. C'est à dire que l'analyse des cours actuels ou passés ne fournit aucune indication pour le futur²⁹.

Le modèle de marche aléatoire se présente de la façon suivante :

$$P_{t+1} = P_t + e_{t+1}$$

sous sa forme logarithmique :

$$\text{Log}(P_{t+1}) = \text{Log}(P_t) + e_{t+1}$$

avec e_{t+1} est un bruit blanc

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t + D_t}{P_t},$$

Si on suppose que les dividendes sont négligeables ce qui nous permet d'écrire :

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \approx \text{Log}\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \approx e_{t+1}$$

Ceci revient à dire que R_t suivent un bruit blanc et qu'elles sont indépendantes au cours du temps. Ce modèle suppose que les prix des titres reflètent complètement et instantanément

²⁷Éléments bibliographiques inédits sur Jules Regnault (1834-1894), inventeur du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières ", *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, 11, 215-229.

²⁸ un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov : de manière simplifiée, la prédiction du futur, sachant le présent, n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé ; toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus.

²⁹ Efficience informationnelle du marché boursier : définitions, tests empiriques et interprétations cohérentes des résultats R. Gillet [1991], p.377

l'information disponible si les variations successives des prix sont indépendantes et identiquement distribuées (iid).

Le modèle de marche au hasard en finance peut être considéré comme issu de la convergence de trois préoccupations distinctes : une préoccupation morale avec Jules Regnault³⁰, une préoccupation scientifique avec Louis Bachelier³¹, et une préoccupation financière avec Alfred Cowles³². Ces trois préoccupations relèvent de trois questions distinctes. La morale de la bourse chez Regnault, la science de la bourse chez Bachelier et la pratique de la bourse chez Cowles. Trois critères répondent à ces trois questions: un critère de démarcation éthique chez Regnault, un critère de scientificité chez Bachelier, un critère d'efficacité professionnelle chez Cowles.

2 L'introduction du modèle de marche aléatoire par Jules Regnault

L'utilisation du modèle de marche aléatoire pour représenter les variations boursières a été proposée pour la première fois en 1863 par un employé d'agent de change, Jules Regnault. Le seul ouvrage qu'il ait publié, Calcul des chances et philosophie de la bourse, constitue le premier travail théorique connu d'économie financière. Son objectif consiste à déterminer les lois de la nature qui régissent les fluctuations boursières et que le calcul statistique permet d'approcher.

a Le contexte comme raison à l'utilisation du modèle de marche aléatoire

Après avoir été critiqué et boudé, le marché boursier parisien attira, à partir du milieu du 19^{ème} siècle, les investisseurs et les entreprises privées. Son développement s'adossa à la forte croissance économique du Second Empire. A cette époque, l'évolution et l'appréciation du rôle économique de la bourse furent accompagnées de débats sur l'utilité des marchés financiers, débats qui devaient permettre de décider de laisser les marchés financiers se développer ou non. C'est en partie pour répondre à ces débats que Regnault publia son ouvrage. Cet auteur utilisa le modèle de marche aléatoire pour démontrer que la bourse est juste et équitable au regard des critères de l'époque, et par conséquent que son développement était acceptable. Selon l'auteur, l'équité de la Bourse provient de, l'égalité des intervenants face aux lois de la nature qui régissent les variations boursières, autrement dit, tous les intervenants se trouvent dans des conditions identiques.

La justice est, quant à elle, relative à l'espérance de gain des différents intervenants. Les joueurs qui spéculent sur les écarts, et dont les opérations financières ne participent pas au développement économique, sont inévitablement ruinés parce qu'ils enfreignent les règles

³⁰Jules Augustin Frédéric Regnault (né le 1^{er} février 1834 à Béthencourt, mort le 9 décembre 1894 à Paris, 10^e arrondissement), est un économiste français, connu pour avoir pour la première fois proposé de représenter les variations boursières par un modèle de marche aléatoire. Ce modèle constitue l'une des principales hypothèses et l'un des outils essentiels de la théorie financière moderne.

³¹Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, né au Havre le 11 mars 1870 et mort à Saint-Servan-sur-Mer le 26 avril 1946, est un mathématicien français. Il est aujourd'hui considéré comme un précurseur de la théorie moderne des probabilités et comme le fondateur des mathématiques financières.

³²Alfred Cowles (1891-1984) était un financier qui avait fondé une organisation de recherche privée orientée vers la prévision et le travail statistique.

morales dictées par les lois de la nature³³. En revanche, les spéculateurs, en se conformant aux lois de la nature, contribuent à l'harmonie sociale et perçoivent les coupons détachés des titres obligataires qui représentent le seul gain possible. En s'inspirant de l'homme moyen de Quételet³⁴, Regnault détermine la vraie valeur du titre, sur laquelle les spéculateurs se basent pour investir. Cette vraie valeur du titre est, selon Regnault, parfaitement déterminable grâce au calcul de la valeur moyenne de long terme du titre. Il oppose à cette détermination de long terme, une marche aléatoire de court terme due, entre autres, à la myopie des joueurs.

Chaque intervenant, même s'il ne l'exprime pas par des chiffres, agit en fonction du degré de probabilité qu'il attribue aux événements³⁵. Bien que l'information publique soit commune à tous les agents, l'évaluation des effets de chaque événement sur les cours, et par conséquent l'estimation de la valeur d'un titre qui en résulte, reste propre à chaque intervenant. Cette diversité d'opinions permet les échanges, car si tout le monde avait les mêmes idées et appréciait également les mêmes causes, il n'y aurait plus de contreparties possibles et les variations seraient nulles par conséquent. Regnault considère alors que les évaluations subjectives des joueurs sont soumises à l'erreur, mais suivent pourtant une loi précise : la loi des erreurs, la loi normale³⁶. De ce fait, les évaluations des joueurs se répartissent selon une distribution normale. En l'absence de nouvelles informations, les cours vont alors graviter autour de la valeur du titre qui correspond chez Regnault à la moyenne de long terme. Il existe ainsi deux groupes d'opérateurs également répartis autour de la valeur du titre la moyenne, les « haussiers » et les « baissiers ». Regnault analyse alors la spéculation de court terme comme un type de « jeu de pile ou face ».

Lorsqu'on lance une pièce, la probabilité qu'elle tombe sur pile ou face est de 50-50, et si l'on tombe trois fois de suite sur le côté pile, cela ne va pas augmenter la probabilité, au lancer suivant, de sortir un autre côté pile : on a à chaque fois une chance sur deux. Les lancements sont parfaitement indépendants les uns des autres.

De manière particulièrement novatrice, cet auteur assimile le comportement des cours boursiers à une marche aléatoire bien que cette expression ne soit jamais employée. Du fait de la distribution normale des évaluations des joueurs, le cours aura la même probabilité de se situer au-dessus qu'au-dessous de la valeur moyenne puisque la probabilité, 1/2, qu'une transaction soit effectuée par ceux qui sous-évaluent la valeur est la même que la probabilité qu'une transaction soit effectuée par ceux qui la surévaluent. Si cette probabilité était différente, Regnault précise que les joueurs pourraient faire un arbitrage en choisissant de suivre systématiquement le mouvement qui aurait la plus forte probabilité³⁷. De même, comme

³³ Franck Jovanovic, « Éléments biographiques inédits sur Jules Regnault (1834-1894), inventeur du modèle de marché aléatoire pour représenter les variations boursières », *Revue d'Histoire des sciences humaines*, vol. 11, 2004, p. 215-230

³⁴ Quételet présente sa conception de « l'homme moyen » comme valeur centrale autour de laquelle les mesures d'une caractéristique humaine sont groupées suivant une courbe normale.

³⁵ Regnault J. [1863] *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, Paris : Mallet-Bachelier et Castel, page 41

³⁶ Voir annexe.

³⁷ Regnault J. [1863] *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, Paris : Mallet-Bachelier et Castel, page 41

dans un jeu de pile ou face, la hausse ou la baisse des cours boursiers sont indépendantes. Par conséquent, ni l'une ni l'autre ne permettent pas d'anticiper le sens des variations futures. Selon ces hypothèses, puisque, à chaque instant, au moment même de l'opération, les probabilités de perte ou de bénéfice sont toujours égales à 1/2. Regnault explique ensuite que l'espérance de gain du joueur est nulle. Enfin, ajoute-t-il, le cours actuel reflète toutes les informations publiques disponibles à partir desquelles les intervenants établissent leur évaluation de la valeur du titre.

On peut dès à présent noter que Regnault fait référence à un modèle de marche aléatoire particulier. En effet, si l'on donne une interprétation mathématique du modèle que Regnault suggère, les prix des obligations varieraient selon un modèle de marche aléatoire avec retour à la moyenne ou centré sur la moyenne : $P_{t+1} = \bar{P} + e_{t+1}$, où $e = \{e_t, t \in N\}$ est un bruit blanc et $\bar{P}$ la valeur moyenne du titre. De ce fait, l'espérance de gain entre deux périodes est bien nulle, $E(P_{t+1} - P_t) = 0$

b La validation empirique de ce modèle :

Son modèle établi, Regnault teste son hypothèse que les variations boursières de court terme sont conformes à un modèle de marche aléatoire. Nous savons que si les cours boursiers suivent une marche aléatoire, du fait de l'indépendance du processus, les écarts augmentent proportionnellement à la racine carrée du temps. Il détermine l'écart moyen pour différentes périodes (un mois, un trimestre, une année) à partir des données mensuelles, portant sur les cours les plus bas et les prix les plus hauts. Cet écart moyen est bien proportionnel à la racine carrée du temps écoulé.

La validation de son hypothèse le conduit à énoncer une propriété du modèle de marche aléatoire pur : « Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse, et cette loi, qui ne paraît pas avoir jamais été soupçonnée jusqu'à présent, nous la formulons ici pour la première fois : L'ECART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARREE DES TEMPS³⁸ »

L'établissement empirique de cette loi de la racine carrée du temps constitue un premier résultat qui supporte le caractère aléatoire des variations boursières. Regnault l'applique ensuite à son modèle sur les variations de court terme.

Il est important de noter que Regnault tire cette loi de ses observations empiriques. Ses tests du modèle de court terme consistent à se poser la question suivante : j'achète aujourd'hui un titre dans l'intention de le revendre dans n jours n étant inférieur à 30 jours, car le modèle de court terme reste dans le cadre d'une liquidation mensuelle. Dans ce cas, l'espérance de gain est nulle et l'écart moyen suit la loi de la racine carrée du temps. Cette loi de la racine carrée des temps ne peut cependant être obtenue à partir des hypothèses que donne Regnault, selon lesquelles les cours boursiers suivent une marche aléatoire avec retour à la moyenne. En

³⁸Regnault J. [1863] *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, Paris : Mallet-Bachelier et Castel, page 41

effet, dans ce modèle, il n’y a pas indépendance des cours successifs P_t et P_{t+1} à cause de la valeur moyenne autour de laquelle les cours fluctuent.

Malgré cette incohérence, cet auteur est le premier à suggérer de représenter les variations boursières par un modèle de marche aléatoire, il est également le premier à établir que les écarts des prix sont proportionnels à la racine carrée du temps.

Pour conclure à propos de Regnault, la Bourse est à la fois juste et équitable :

- Elle est juste : les spéculateurs (agioteurs) sont inévitablement, un jour ou l’autre, ruinés.
- Elle est équitable : tous les intervenants sont dans une situation égale dans la mesure où la bourse obéit, à travers la loi normale, aux lois de la nature.

Il fallut cependant attendre 1900, la thèse de Louis Bachelier, pour que l’hypothèse de marche aléatoire de Regnault soit approfondie. La représentation des variations boursières par un tel modèle est en effet au cœur de la thèse de Bachelier.

3 La formulation mathématique opérée par LOUIS BACHELIER³⁹

Le 29 mars 1900, Louis Bachelier soutient sa thèse de doctorat sur la théorie de la spéculation, devant un jury composé notamment d’Henri Poincaré⁴⁰. L’historiographie de la finance considère en général Bachelier comme le fondateur de la finance mathématique moderne grâce au fait qu’il a été le premier à formaliser mathématiquement la représentation brownienne des variations boursières.

a La marche aléatoire chez bachelier

La thèse de Bachelier avait pour objectif l’introduction des probabilités en temps continu. Elle démontra l’équivalence entre les résultats obtenus en temps discret et ceux en temps continu en menant de front deux démonstrations : l’une avec des probabilités en temps continu, l’autre avec des probabilités en temps discret complétées par un passage à la limite grâce à la formule de Stirling⁴¹.

Bachelier appliqua ce principe d’une double démonstration à la loi de variation des cours boursiers. Il formula ainsi pour la première fois l’équation dite de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski⁴² :

$$P_{z,t_1+t_2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{x,t} P_{z-x,t_2} dx dz,$$

³⁹Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, né au Havre le 11 mars 1870 et mort à Saint-Servan-sur-Mer le 26 avril 1946, est un mathématicien français.

⁴⁰Henri Poincaré est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris. Il a réalisé des travaux d’importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l’étude qualitative des systèmes d’équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques. Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l’ensemble des branches des mathématiques de son époque.

⁴¹ La formule de Stirling, du nom du mathématicien écossais James Stirling, donne un équivalent de la factorielle d’un entier naturel n quand n tend vers l’infini : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ que l’on trouve souvent écrite ainsi : $n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

⁴² En théorie des probabilités, et plus spécifiquement dans la théorie des processus stochastiques markoviens, l’équation de Chapman-Kolmogorov est une égalité qui met en relation les lois jointes de différents points de la trajectoire d’un processus stochastique. Cette équation a été mise en évidence indépendamment par le mathématicien britannique Sidney Chapman et le mathématicien russe Andreï Kolmogorov.

Où P_{z,t_1+t_2} désigne la probabilité que le cours z soit coté au temps $t_1 + t_2$, sachant que le cours x a été coté au temps t_1 . Bachelier établit ensuite la probabilité de transition de t σW où W_t est un mouvement brownien⁴³:
$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}$$

Où t représente le temps, x un cours du titre et k une constante.

La formulation de Bachelier de l'écart type sous la forme $2\pi k$, lui permet de faire apparaître son coefficient d'instabilité ou de nervosité de la valeur⁴⁴, c'est lui qui mesure son état statique. Sa tension indique un état d'inquiétude ; sa faiblesse, au contraire, est l'indice d'un état de calme »⁴⁵. Ce coefficient représente la volatilité du titre que Bachelier suppose constante dans ses tests.

Bachelier appliqua ensuite son principe d'une double démonstration aux deux problèmes de la théorie de la spéculation qu'il proposa de résoudre : le premier établit la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé à une époque donnée c'est-à-dire la probabilité qu'une option européenne⁴⁶ soit exercée, le second cherche la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé avant une époque donnée ce qui revient à déterminer la probabilité d'exercice d'une option américaine⁴⁷. Précisons que Bachelier n'évoqua absolument pas de ce dernier type d'option qui, à cette époque, n'existait pas sur le marché boursier français. Ses calculs doivent être considérés comme un cas mathématique qu'il explora et absolument pas comme l'étude d'un problème empirique. Comme Regnault⁴⁸, Bachelier testa et valida ses hypothèses en utilisant la rente 3%.

Du point de vue économique, le travail de Bachelier prolonge celui de Regnault, en particulier par l'utilisation du modèle de marche aléatoire et le principe de la nullité de l'espérance de gain dans la détermination de la probabilité de réussite des options. Bachelier utilise les mêmes hypothèses que Regnault qu'il introduit et présente dans le même ordre. Il conserve, par exemple, la distinction liée au déterminisme entre causes constantes et causes accidentelles qu'il associe à des probabilités mathématiques et des probabilités dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir de façon mathématique. Il formalise également l'évolution théorique des cours de la rente comme le fait Regnault dans son second modèle relatif aux variations de long terme de la rente.

⁴³ Il sera traité dans les sections suivantes

⁴⁴ Bachelier, *Théorie de la spéculation* », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

⁴⁵ Bachelier, *Théorie de la spéculation* », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

⁴⁶ En finance, une **option** est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance.

⁴⁷ Les options qui peuvent être exercées à tout moment entre leur date d'achat et leur date d'échéance définie dans le contrat sont dites de type américain les options exerçables uniquement à l'échéance définie dans le contrat sont des options de type européen.

⁴⁸ En 1863, Jules Regnault publia le *Calcul des chances et philosophie de la bourse*. Cet auteur voulait ainsi résorber un vide théorique en créant une « science de la Bourse », fondée sur une analyse statistique et probabiliste. Son ouvrage, le seul qu'il ait publié, contient deux modèles. Le premier représente et analyse les variations des cours boursiers de court terme, le second celles de long terme.

Bachelier nomme ces cours théoriques les « cours vrais » qui correspondent à l'évolution logique de la rente si les prix ne prenaient en compte que les coupons et les reports. Il en tire son principe d'espérance de gain nulle :

« Par considération des cours vrais on peut dire : Le marché ne croit, à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai [correspondant à cet instant] »⁴⁹.

Sur le plan mathématique, l'apport de Bachelier est considérable. Il propose la première formulation mathématique du modèle de marche aléatoire en temps continu, formulation que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de processus de Wiener ou de mouvement brownien⁵⁰. A ce titre, la thèse de Bachelier peut être considérée comme le premier travail de mathématiques financières connu. Les outils mathématiques introduits par Bachelier constituent les bases des modèles financiers actuels qui étudient les fluctuations boursières et qui évaluent le prix des titres. Même si la reconnaissance de l'importance des travaux de Bachelier a été tardive, on sait aujourd'hui qu'ils ont influencé certains outils mathématiques que l'on retrouve dans les modèles financiers tels que le processus d'Itô ou l'application du modèle de martingale aux variations boursières proposée par Samuelson et Mandelbrot.

b L'abandon de la prévisibilité : l'espérance nulle

Dans le raisonnement qu'il construit, Bachelier va retrouver la distinction canonique de Regnault entre le normal et l'excessif⁵¹. Puis il introduira le principe d'une espérance nulle du spéculateur.

Bachelier commence par préciser son objet d'analyse, les variations boursières. Il s'agit de comprendre la logique de leur formation. Il nous dit :

« Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours⁵² ». Puis vient l'introduction de la bipartition déjà présente chez Regnault : « À côté des causes en quelques sortes naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de place⁵³ ».

C'est clair : il faut distinguer nettement deux sortes de variations, les variations estimées naturelles et les variations considérées comme artificielles ou sans fondement réel. La forme symbolique mise en évidence chez Regnault en 1863 réapparaît en 1900 chez Bachelier, dont la thèse marque donc l'entrée dans le xx^e siècle en finance de ce schéma de pensée plus ancien.

Les conséquences de la présence de cette forme symbolique pour les applications de la

⁴⁹Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

⁵⁰ Voir chapitre 2 page 138.

⁵¹Les origines du modèle de marche au hasard en finance ; Christian Walter N°33 | juin 2013

⁵²Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

⁵³Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

finance professionnelle seront considérables en particulier à partir des années 1970.

Juste après l'introduction précédente, Bachelier ajoute dans sa thèse : « La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique⁵⁴ ». La raison en est que : Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même moment les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.

Autrement dit, toute velléité d'analystes ou d'économistes qui chercheraient à déterminer l'évolution ultérieure des cours est d'avance vaine : par là, Bachelier introduit l'idée d'une imprévisibilité radicale des rentabilités futures des titres. Le regard de la science se déplace de la prévisibilité (perdue) à la variabilité (examinée). La variabilité d'un cours s'appelle, en finance, le risque de marché. C'est ce déplacement introduit par Bachelier qui est à l'origine de la transformation de la finance en « filière scientifique et industrielle du risque⁵⁵ ».

Cependant, si l'on ne peut pas prévoir l'évolution future du marché, il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. En effet, Si le marché ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s'évaluer mathématiquement. Bachelier remplace ainsi la recherche de la prévisibilité par celle de la probabilité. Mais de quelle probabilité s'agit-il ? On peut considérer deux sortes de probabilités :

- La probabilité que l'on pourrait appeler mathématique, c'est celle que l'on peut déterminer a priori, celle que l'on étudie dans les jeux de hasard.
- La probabilité dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir de façon mathématique. Elle est impossible à prévoir, et se trouve donc en dehors du champ de la recherche scientifique. Et pourtant, ou justement pour cette raison, c'est cette dernière probabilité que cherche à prévoir le spéculateur, il analyse des raisons qui peuvent influencer sur la hausse ou sur la baisse et sur l'amplitude des mouvements. Ses inductions sont absolument personnelles, puisque sa contrepartie a nécessairement l'opinion inverse.

Le programme de recherche est donc posé. Il faut maintenant résoudre le problème technique de la séparation du cours coté entre la partie « capital » et la partie « intérêt ». En effet, le point de départ de Bachelier nécessite d'avoir isolé la composante de capital du cours : « Il semble que le marché, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs, ne doit croire à un instant donné ni à la hausse ni à la baisse puisque, pour chaque cours coté, il y a autant d'acheteurs que de vendeurs⁵⁶ ». Ceci ne peut s'appliquer que sur la composante de capital du cours puisque, nécessairement, l'intérêt couru qui progresse pousse le cours à la hausse jusqu'au paiement du coupon. D'où une légère mais classique transformation des cours que Bachelier

⁵⁴Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900, p. 21–86.

⁵⁵ Michel Armatte ; La science économique comme ingénierie : Quantification et Modélisation 2010.

⁵⁶Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900 p.32.

introduit avec la notion de « cours vrai ». En vocabulaire financier actuel, ces cours appelés « vrais » correspondent à des cours d'obligations dits « pied de coupon », c'est-à-dire sans la partie du titre relevant de la progression linéaire de l'intérêt obligataire, ou « coupon couru », coté séparément.

Précisons mathématiquement cela. Notons $S(t)$ le cours de la rente obligataire à l'instant t , et μ le montant de l'intérêt annuel perçu. Le produit μt représente le coupon couru à l'instant t , si la durée t est mesurée en années. Bachelier appelle cours vrai la quantité qui se définit en retirant le coupon couru du cours coté. Notons $S^*(t)$ le cours vrai : $S^*(t) = S(t) - \mu t$

C'est sur les cours vrais que Bachelier va chercher à établir une modélisation mathématique, ce qui représente une démarche parfaitement logique car le poids croissant de l'intérêt couru peut déformer la dynamique boursière du cours, problème bien connu des actuaires sur les marchés obligataires et de taux d'intérêt⁵⁷, et il est donc nécessaire d'extraire la partie du titre qui contient la progression de l'intérêt lorsqu'on cherche à modéliser un instrument de taux.

Sur cette notion de cours pied de coupon, Bachelier postule logiquement que, « par considération des cours vrais, on peut dire : le marché ne croit, à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai ». Il en arrive alors à l'extraordinaire et célèbre assertion de sa thèse : en considérant la valeur des cours vrais, « l'espérance mathématique du spéculateur est nulle⁵⁸ ». Il est important de bien comprendre que l'acheteur n'est qualifié de spéculateur que pour autant qu'il ne raisonne que sur le seul gain en capital, et non sur l'obtention de l'intérêt associé à la détention de la rente. Cette bipartition de Bachelier préfigure la classique distinction keynésienne entre entrepreneurs et spéculateurs : recherche de l'intérêt (revenu) ou bien recherche du gain en capital (plus-value).

Le débat ouvert par Bachelier est donc le débat de la modélisation financière au XX^e siècle. La propriété de martingale⁵⁹ sur les cours actualisés est-elle vérifiée ? Ou bien existerait-il une persistance des variations boursières, qui apparaîtrait par exemple au moment des emballements spéculatifs, une sorte de mémoire du marché qui pourrait être utilisable par des stratégies d'intervention systématiques sur des marchés mal arbitrés par des acteurs efficaces comme les hedge funds⁶⁰ ? Tous les tests économétriques des années 1980 chercheront à vérifier cette hypothèse de martingale.

Une autre question apparaissait encore : une martingale n'est formellement définie que par une propriété sur les espérances mathématiques. Mais rien n'est dit sur les moments

⁵⁷ Komarnicki R. (1984), « Au carrefour actuariel du court terme et du long terme », Bulletin de l'Institut des actuaires français.

⁵⁸ Bachelier, Théorie de la spéculation », Annales scientifiques de l'École normale supérieure, vol. 3, n° 17, 1900 p.34.

⁵⁹ En calcul stochastique, une martingale désigne un type de processus stochastique, c'est-à-dire un processus aléatoire et dynamique. Ce type de processus X est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date s , dénotée F_s , est la valeur à cette même date : $E(X_t|F_s) = X_s$ (Avec $s \leq t$) X est un processus adapté à la filtration F . On parlera de sous-martingale si $E(X_t|F_s) \geq X_s$ et de sur-martingale si $E(X_t|F_s) \leq X_s$.

⁶⁰ Les hedge funds, contrairement à leur nom qui signifie couverture, sont des fonds d'investissement non cotés à vocation spéculative. Ce sont des fonds spéculatifs recherchant des rentabilités élevées et qui utilisent abondamment les produits dérivés, en particuliers les options. Ils utilisent l'effet de levier, c'est-à-dire la capacité à engager un volume de capitaux qui soit un multiple plus ou moins grand de la valeur de leurs capitaux propres. Les hedge funds présentent l'intérêt d'offrir une diversification supplémentaire aux portefeuilles « classiques » car leurs résultats sont en théorie déconnectés des performances des marchés d'actions et d'obligations.

d'ordre supérieur, en particulier sur leur existence. C'est le deuxième aspect de la thèse de Bachelier, que l'on aborde à présent.

c De la prévisibilité à la variabilité

En perdant la dimension prévisionnelle des variations boursières, l'on va alors se déplacer vers un autre objet d'étude. En effet, on a vu plus haut que, pour Bachelier, même si l'on ne peut pas prévoir l'évolution future du marché, il est possible d'étudier mathématiquement le marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s'évaluer mathématiquement. Pour Bachelier, les acheteurs et les vendeurs vont échanger des prévisions de variabilité. Ce qu'il exprime de la manière suivante : « si le marché ne croit ni à la hausse ni à la baisse du cours vrai, il peut supposer plus ou moins probables des mouvements d'une certaine amplitude⁶¹ ».

La modernité des idées de Bachelier ne cesse de surprendre. Cette amplitude des mouvements boursiers est devenue un paramètre essentiel dans les modèles financiers d'aujourd'hui : c'est ce qui est appelé la volatilité des marchés, ou écart type de leurs variations. De fait, la question posée aux professionnels des approches quantitatives des marchés n'est pas de prévoir l'évolution des cours à venir, mais seulement d'estimer leur variabilité instantanée potentielle, leur risque.

L'on voit comment, avec l'introduction du critère de volatilité, il s'est produit un déplacement dans le regard porté sur les variations boursières : au lieu de considérer les marchés dans une perspective directionnelle, ou de recherche de prévisibilité, on les considère dans une perspective distributionnelle, ou d'examen de leur variabilité, qui représente, comme on l'a dit plus haut, le risque financier. La science financière s'intéressera désormais au risque des placements, et non plus à la prévision de leur rentabilité future, rendue inaccessible par sa définition même. En tous les cas, restant en dehors du champ de l'investigation scientifique. Ce qui veut aussi dire que tout modèle mathématique qui sera présenté comme un modèle de prévision boursière sera nécessairement mal conçu. Cette caractéristique fournira un critère de démarcation entre science et pseudoscience en finance, qui sera utilisé à partir de Cowles et Working⁶² dans le débat entre universitaires et analystes techniques sur les possibilités de prévisibilité boursière par les méthodes graphiques ou statistiques.

Dès lors, la caractérisation complète du comportement d'un marché empruntera la voie de la description probabiliste de ses variations successives. Bachelier écrit donc : « La détermination de la loi de probabilité qu'admet le marché à un instant donné sera l'objet de cette étude » et, en particulier, « la recherche d'une formule qui l'exprime⁶³ », car cette

⁶¹Bachelier, *Théorie de la spéculation* », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, n° 17, 1900 p.32.

⁶² Voir section suivante.

⁶³ Bachelier, *Théorie de la spéculation* », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, n° 17, 1900 p. 32.

formule « ne paraît pas jusqu'à ce jour avoir été publiée⁶⁴ ».

La question à traiter est celle du « nombre infini de facteurs » à l'origine de cette loi de probabilité que recherche Bachelier. En traduisant ces termes en langage financier moderne, on dirait que des éléments d'information (des « nouvelles – news – élémentaires ») arrivent de manière aléatoire sur le marché qu'ils percutent et leur combinaison, leur agrégation, conduit à la formation d'une loi de probabilité limite sur les variations boursières. On reconnaît dans cette question le problème de Gauss de la somme des petits aléas indépendants, qui conduit à la loi des grands nombres et au théorème central limite : si un phénomène aléatoire global est la somme d'un très grand nombre de phénomènes aléatoires élémentaires ayant chacun une distribution quelconque, mais tous étant de faible amplitude (en termes plus techniques, si l'espérance et la variance existent), alors la distribution du phénomène aléatoire global (leur somme résultante) s'organise suivant la distribution normale de Laplace-Gauss.

4 Alfred Cowles⁶⁵ et l'économétrie

L'origine des études économétriques entreprises sur les marchés boursiers dans le cadre de la commission Cowles⁶⁶ est l'intérêt qu'Alfred Cowles porta à la mesure de la valeur ajoutée des professionnels de la gestion d'actifs pour compte de tiers.

Les travaux pionniers de Cowles lancèrent la problématique de la mesure de performance des fonds d'investissement, et des manières d'évaluer la contribution des professionnels de la gestion aux résultats des fonds gérés. Dans une magistrale étude réalisée en 1933, puis complétée en 1937 et 1944, Cowles posait les bases de toute la méthodologie de l'analyse de performance des portefeuilles, telle qu'elle se pratique encore de nos jours pour les principes fondamentaux qui la structurent.

a La mesure de la prévisibilité

Dans un article⁶⁷ célèbre publié en 1933 dans la revue *Econometrica*, au titre provocateur de « Can stock market forecasters forecast ? », Cowles pose, vraisemblablement le premier dans l'histoire de la littérature universitaire en finance, la question de la mesure de la performance de la gestion active de titres.

Il aborde cette question en interrogeant les capacités prévisionnelles des professionnels des marchés boursiers, de ceux dont le métier est, précisément, de connaître le marché. La performance est appréhendée de façon indirecte, à travers le savoir faire des professionnels à dégager des résultats en fonction d'une bonne prévisibilité : Cowles suppose que « bien gérer⁶⁸ » est équivalent à prévoir correctement (ou se tromper moins d'une fois sur deux). L'étude de la prévisibilité des marchés par ceux qui sont supposés les connaître bien est le thème de cet article : la mesure de performance est ici une mesure de prévisibilité boursière. Pour cela,

⁶⁴ Bachelier, *Théorie de la spéculation* », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, n° 17, 1900 p. 22.

⁶⁵ Alfred Cowles (1891-1984) était un financier qui avait fondé une organisation de recherche privée orientée vers la prévision et le travail statistique.

⁶⁶ Les travaux de la Cowles Commission for Research in Economics : groupe de recherche créé en 1932 à l'université du Colorado, qui s'installe à l'université de Chicago puis à l'université Yale.

⁶⁷ Les pages citées par la suite font référence à cet article.

⁶⁸ Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecasters Forecast", *Econometrica*, vol. 1, p. 309-324.

Cowles choisit des catégories illustrant les différentes activités des professionnels des marchés, qu'il sépare en deux groupes : le groupe de ceux qui gèrent, et le groupe de ceux qui conseillent, qui vendent leurs prévisions, les conjoncturistes professionnels. Dans le premier groupe, Cowles place les investisseurs institutionnels. Il choisit pour cela vingt compagnies d'assurance incendie, qu'il présente comme représentatives de leur catégorie⁶⁹, dont les actifs totalisent plusieurs centaines de millions de dollars (de 1933), et qui semblent donc constituer un échantillon sans biais de ce type d'investisseur⁷⁰. Ces compagnies d'assurance investissent leurs fonds sur le marché des actions.

Dans le second groupe, il place les conseils financiers et les journalistes financiers. Il choisit, à cette fin, seize sociétés de services financiers parmi les plus connues, qui proposent régulièrement des listes de titres à acheter. Puis vingt-quatre lettres financières telles que l'on en trouve dans toutes les places financières ou les lieux économiques dès qu'une bourse de valeurs apparaît : dix-huit sont des lettres diffusées par des conseils financiers, quatre sont des nouvelles hebdomadaires financières, l'une provient d'une banque, et une dernière d'une maison de titres.

En revanche, la dernière analyse entreprise est hardie et risque de susciter des polémiques : il s'agit des éditoriaux du *Wall Street Journal* rédigés par une personnalité en vue du monde financier américain du début du siècle : le très célèbre William Peter Hamilton, connu pour l'application systématique de la théorie de Dow aux prévisions des marchés. Non sans facétie, Cowles prévient qu'il entreprend cette étude « à cause de la réputation (de Hamilton) d'avoir réalisé de bonnes prévisions sur de nombreuses années » (p. 309). C'est, en fait, un test de la valeur des prévisions d'un acteur de la bourse de New York, dont on dirait -- en utilisant un vocabulaire contemporain -- qu'il est un gourou de Wall Street.

Cowles s'intéresse à deux types de prévisions : les prévisions concernant des cours d'actions individuelles, ou prévisions de rentabilité spécifique des titres; les prévisions relatives au marché en général, ou prévision de rentabilité globale du marché. Cela revient à séparer la capacité de prévisibilité entre une faculté de microprévision (les titres) et une faculté de macroprévision (le marché). Dans le premier cas (microprévision), Cowles examine les recommandations des sociétés de services financiers, et des compagnies d'assurance. Dans le deuxième cas (macroprévision), il s'agit des lettres financières, et des éditoriaux de W.P. Hamilton⁷¹. Cette séparation est toujours d'actualité dans les analyses contemporaines de la performance : on distingue en général la performance due au marché d'un point de vue global, de la performance due aux choix de titres spécifiques, d'un point de vue particulier. Cette décomposition actuelle de la performance totale par sources de contribution à la rentabilité, avec deux sources principales (la rentabilité du marché en général, et celle des titres en

⁶⁹ Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecast- ers Forecasts", *Econometrica*, vol. 1, p. 310.

⁷⁰ Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecast- ers Forecasts", *Econometrica*, vol. 1, p. 313.

⁷¹ Il s'agit des éditoriaux du *Wall Street Journal* rédigés par une personnalité en vue du monde financier américain du début du siècle : le très célèbre William Peter Hamilton, connu pour l'application systématique de la théorie de Dow aux prévisions des marchés. Non sans facétie, Cowles prévient qu'il entreprend cette étude « à cause de la réputation (de Hamilton) d'avoir réalisé de bonnes prévisions sur de nombreuses années

particulier).

Pour les seize sociétés de services, l'analyse est conduite en relevant les listes de tous les titres conseillés à l'achat par ces sociétés pendant quatre ans et demi de 1928 à 1932 : cela représente 7 500 recommandations d'achat. Cowles calcule la performance de chacune de ces recommandations, qui s'apparentent à des grilles de placement types pour les investisseurs, comme celles que l'on peut trouver dans les départements de gestion privée de nombreuses banques. Pour les vingt compagnies d'assurance incendie, il analyse leur politique d'investissement en titres cotés, également sur quatre ans, de 1928 à 1932, en relevant les mouvements d'achat et de vente du portefeuille de ces compagnies, et en calculant la rentabilité des placements de chaque compagnie. Il insiste sur le fait que ces politiques d'investissement reposent sur un savoir pragmatique accumulé au cours du temps par les conseils d'administration qui ont la charge du choix des investissements. Le test de prévisibilité va donc être un test de la valeur du jugement des comités d'investissement.

Pour les vingt-quatre lettres financières, il examine sur quatre ans, de 1928 à 1932, les prévisions fournies, ce qui représente plus de 3 300 prévisions. Enfin, en ce qui concerne la clairvoyance prêtée à W. P. Hamilton, Cowles analyse 26 ans de prévisions, de décembre 1903 à décembre 1929, soit 255 éditoriaux du Wall Street Journal présentés comme utilisant la théorie de Dow pour prévoir la rentabilité du marché global.

Le retraitement des données est le suivant. Dans le cas des seize sociétés de services financiers, le nom et le cours de chaque titre faisant l'objet d'une recommandation à l'achat ou à la vente est enregistré à la date de recommandation. Puis, pour chaque titre, un calcul de rentabilité de l'opération est effectué (achat, puis vente), avec un calcul de la rentabilité du marché pendant la même période. Dans le cas où une recommandation apparaît une seconde fois, c'est la première qui est utilisée comme date de départ : on suppose qu'elle a été suivie. Enfin, lorsqu'un titre est recommandé à l'achat, mais qu'aucune recommandation de vente n'apparaît ensuite, on considère que la vente a lieu après une période de détention de six mois. Ceci permet d'éviter un biais classique dû au fait que les sociétés de conseils ne recommandent pas en général de revendre des titres conseillés antérieurement à l'achat et dont les performances se sont avérées mauvaises. Ce même calcul est fait pour chacune des seize sociétés de services financiers.

Dans le cas des vingt compagnies d'assurance, Cowles remarque que la proportion de leurs actifs investis en actions n'est que de l'ordre de 20 à 30% de leurs investissements totaux. La rotation des portefeuilles n'est que de 5% par an. Il estime donc s'en tenir à limiter ses calculs aux opérations d'achat et de vente effectivement réalisées pendant la période 1928-1932, plutôt que de recalculer la rentabilité de la totalité du portefeuille. L'appréciation des prévisions des comités d'investissement sera en effet perceptible à travers les mouvements du portefeuille plutôt que sur la partie inchangée. Enfin, « pour simplifier le travail ⁷²», on alloue la même quantité de fonds à chaque titre acheté : il y a équilibrage des titres. Même si les résultats ne relèveront pas tout à fait la politique d'investissement des compagnies d'assurance

⁷²Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecasters Forecast?", *Econometrica*, vol. 1 p. 316.

examinées, ils fourniront cependant une image pertinente de la qualité de la sélectivité des titres réalisée par les comités d'investissement, et leur aptitude à choisir des actions qui ont de meilleures rentabilités que la moyenne du marché. Dans le cas d'un renforcement d'une ligne par un deuxième achat d'un même titre, Cowles applique la même méthode que pour les sociétés de services financiers : seul le premier est considéré. De la même manière, en cas de non revente du titre dans les douze mois, le titre est considéré comme vendu à cette date.

Dans le cas des vingt-quatre publications financières, la méthode de Cowles consiste à transformer les prévisions de marché en actes d'achat ou de vente. Pour cela, on demande à différents lecteurs de ces prévisions d'indiquer quelles sont leurs intentions boursières telles qu'elles se forment à la lumière de leur lecture : acheter ou vendre. « Considérant les prévisions établies par ce bulletin, allez-vous investir tout l'argent (que vous vous proposiez d'investir sur le marché), ou seulement une partie, ou bien vous retirer du marché ? ⁷³ ». Le lecteur doit donner une réponse en se positionnant à l'intérieur d'une graduation variant de 0 à 100% de son argent investi. Il s'agit d'une transformation quantitative de prévisions qualitatives.

La question du passage d'une indication qualitative d'investissement à une proportion quantifiée d'actif risqué dans un portefeuille n'est en fait abordée qu'en 1952 et en 1958 par Markowitz et Tobin. Lorsque Cowles se propose de mesurer les prévisions à l'aune des proportions d'actif risqué, les outils intellectuels nécessaires à la résolution d'un tel problème n'existent pas encore. Manquent en particulier les développements de Pratt (1964), permettant d'évaluer les primes de risques des investisseurs en regard de leur fonction d'utilité.

Le test est le suivant. On considère qu'un investisseur choisit entre deux possibilités, investir sur le marché ou conserver ses fonds en liquidités, en fonction des prévisions des bulletins financiers. L'investisseur effectue donc une allocation d'actifs (un choix de portefeuille) entre « marché » et « liquidités » (ou « actif risqué » / « actif sans risque »). Les bulletins financiers indiquent un sens du marché, hausse ou baisse, et une pondération correspondant à la confiance que les prévisionnistes accordent à leurs prévisions. Ce degré de confiance est ensuite utilisé pour transformer la prévision en performance. Plus le prévisionniste est sûr de lui, meilleure sera la performance s'il ne s'est pas trompé. Si, par exemple, la prévision est « marché haussier à 100% », et que le marché monte effectivement dans la semaine qui suit, d'une amplitude de 10%, alors le prévisionniste est crédité d'un score de 10%. Si, au contraire, le prévisionniste n'a pas indiqué nettement de tendance, cela équivaut à « marché haussier à 50% » (donc baissier à 50%), et il n'est crédité que de 5%. Dans ce cas, l'investisseur répartit ses fonds en deux parts égales entre des actions et la conservation de liquidités. Si le prévisionniste annonce « marché baissier à 100% », le score sera, compte tenu de la hausse de 10% du marché, égal à zéro : l'investisseur est supposé avoir conservé ses fonds sans investir, ou s'être retiré du marché ; il ne peut pas vendre à découvert. Si la prévision est « marché haussier à 100% », et que le marché baisse effectivement d'une amplitude de 10%, alors le score du prévisionniste est -10%. De la même

⁷³Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecasters Forecast", *Econometrica*, vol. 1 p. 316.

manière, si le prévisionniste ne se trompe qu'à moitié (« marché haussier à 50% » et baisse de 10% du marché), le score est de -5%. La performance du prévisionniste est donc égale à la performance du marché pondérée par un degré de confiance et multipliée par le signe du mouvement du marché (positif ou négatif). Avec cette méthode, si le prévisionniste ne se trompe pas (se trompe), son score est d'autant meilleur (d'autant plus mauvais) qu'il est sûr de sa prévision.

Si le score du prévisionniste est de -10% quand le marché baisse de 10% après une prévision « 100% marché haussier », cela suppose que l'investisseur a suivi entièrement les conseils du prévisionniste et a donc perdu 10%. La proportion des fonds investis en actions est égale au degré de confiance que le prévisionniste s'accorde, à sa sûreté de jugement. Le choix de portefeuille de l'investisseur, c'est-à-dire la répartition actions / liquidités correspond à un degré de croyance sur le mouvement futur du marché, égal au degré de confiance dans la prévision de l'avenir. L'investisseur-lecteur du bulletin financier suit idèlement les prévisions en les traduisant en allocation d'actifs fonction d'un degré de confiance. Puis, avec ces données, Cowles calcule la performance cumulée des résultats (scores) hebdomadaires des prévisionnistes.

En ce qui concerne les prévisions de W.P. Hamilton, les indications qu'il donne dans ses éditoriaux sont, selon Cowles, « suffisamment claires pour que l'on puisse les quantifier⁷⁴ » au moyen de trois degrés de croyance comme précédemment, appliqués à deux possibilités, hausse ou baisse. Cinq lecteurs doivent voter pour l'interprétation du sens des éditoriaux, et le degré de croyance est alors défini. Quand la prévision est haussière (baissière) avec un degré de croyance de 100%, 100% des fonds sont investis (vendus à terme) sur le marché, et revendus (couverts) lorsque le degré de croyance passe à 50%. Puis, la performance de ces mouvements est calculée, corrections faites des différentes opérations sur titres qui peuvent advenir sur les actions, mais aussi des frais de courtage, paiements de dividendes, et intérêts sur liquidités placées.

b L'échec de la prévisibilité

Cowles choisit deux critères d'appréciation de la valeur des prévisions : la comparaison avec le marché, la comparaison avec le hasard, c'est-à-dire : la comparaison avec un comportement moyen correspondant à une agrégation de titres (un indice) ; et la comparaison avec un comportement aléatoire, correspondant à des prévisions faites au hasard.

Pour les seize sociétés de services financiers, la rentabilité moyenne des performances issues de leurs 7 500 recommandations est négative de -1,43% annuel en-dessous de la performance moyenne du marché. De plus, sur les seize sociétés, seules six ont une performance supérieure à celle du marché. En utilisant le critère de la comparaison avec le « marché », le résultat global de la qualité des recommandations est donc mauvais. Sur cette période, pour un investisseur, il était donc important de ne pas se tromper de conseil financier.

La meilleure société de service obtient une performance de 20,8% annuelle au-dessus de

⁷⁴ Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecast-ers Forecasts", *Econometrica*, vol. 1 p. 314.

la performance du marché. Cowles pose alors la question de l'origine de cette bonne rentabilité : est-elle due au savoir-faire des prévisionnistes, c'est-à-dire à la qualité des recommandations, ou bien au seul hasard ? « Talent ou hasard ? ⁷⁵ », telle est la question à résoudre. Pour y répondre, Cowles imagine de comparer le résultat des prévisions de cette société n° 1 avec le résultat obtenu par un échantillon d'actions achetées « au hasard ». Mais pour pouvoir choisir entre performance due au talent du conjoncturiste et performance due au « hasard », il faut avoir au préalable défini ce que l'on entend par « hasard ».

La question qu'aborde Cowles n'est pas simple. Que veut dire l'expression « performance due au hasard ? » Elle se présente sous deux aspects. D'une part, le « hasard » peut concerner la formation de la prévision : comment peut-on savoir si une recommandation donnée est le résultat d'une réflexion économique ou financière, ou bien le résultat d'un tirage « au hasard » des cours futurs, ou bien encore de tout autre procédé de détermination d'une rentabilité future ? D'autre part, le « hasard » peut caractériser l'écart observé au marché : la mesure de cet écart. Si les recommandations sont faites « au hasard », alors cette manière de procéder sera perceptible dans la mesure de l'écart au marché : une mesure de performance effectuée un mois avant ou un mois après la date initiale donnera des résultats qui ne différeront du résultat initial que par un tirage aléatoire de rentabilité (à ajouter ou à retrancher). La possibilité de réponse à la question abordée par Cowles nécessite donc l'introduction du calcul des probabilités. Il faut faire des postulats sur le comportement statistique des cours boursiers, afin de choisir une loi de probabilité adéquate, qui permettra de simuler un tirage au hasard des rentabilités boursières. Et il faut aussi pouvoir simuler des ordres d'achats d'actions faits aléatoirement : tirer au hasard, dans l'urne du marché, des titres qui évoluent eux-mêmes au hasard des fluctuations imprévisibles des bourses.

Cowles construit donc une table de résultats obtenus « au hasard », qui lui permet d'affecter une probabilité à toute séquence de résultats réellement observés. Du 1^{er} janvier 1928 au 1^{er} janvier 1932, sur neuf périodes de six mois, les résultats des recommandations de la meilleure société ont été positifs sept fois, et négatifs deux fois (l'ensemble aboutissant à un résultat de 20,8% au-dessus de la performance du marché). La table de Cowles lui fournit la probabilité pour qu'un service aléatoire, c'est-à-dire produisant des recommandations d'achats et de ventes d'actions tirées au hasard, puisse donner de bonnes prévisions sept fois sur neuf, avec un niveau de performance de 20,8% : cette probabilité est de 0,03. Parmi seize services, la probabilité pour que, sur l'ensemble, les recommandations soient voisines de celles du meilleur serait de $16 \times 0,03 = 0,48$: près d'une chance sur deux. On peut donc s'attendre à ce que l'un au moins de ces services fournisse des recommandations comparables à celles du meilleur. Cowles en conclut que le résultat du meilleur service « ne peut pas être sans ambiguïté attribué au talent » de ses prévisionnistes. Ainsi, les tests statistiques de ce résultat « ne peuvent prouver le talent des prévisionnistes, et indiquent que, plus probablement, ces résultats sont attribuables au hasard ⁷⁶ ».

⁷⁵Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecast-ers Forecasts", *Econometrica*, vol. 1 p 311.

⁷⁶Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecast-ers Forecasts", *Econometrica*, vol. 1 p 323.

Pour les vingt-quatre bulletins financiers examinés, seuls huit d'entre eux, soit le tiers de l'échantillon, conduisent à une performance positive. Deux tiers des bulletins fournissent donc des conseils dont on peut penser que leur qualité est douteuse. Ensuite, pour comparer les résultats de ces prévisions avec les résultats de prévisions faites au hasard, Cowles construit vingt-quatre séries chronologiques artificielles, qui correspondent à un choix aléatoire de titres, achetés et vendus selon un rythme également aléatoire. La performance moyenne de l'ensemble des bulletins est inférieure de 4% à la performance qui aurait été obtenue par un investissement fait « au hasard ». Cowles déduit de cette comparaison l'assertion suivante : « d'une manière générale, les prévisionnistes échouent dans leurs tentatives de prévoir⁷⁷ » l'évolution future du marché.

De plus, les résultats d'investissement aléatoires qui sont « bons » ne sont pas moins bons que ceux provenant des prévisions des bulletins, tandis que les résultats les plus mauvais des prévisionnistes sont, pour ceux-là, nettement plus mauvais que ce qui aurait pu être obtenu par simple tirage aléatoire. En d'autres termes, cela veut dire que, lorsque les prévisionnistes sont bons, ils ne sont pas meilleurs que des générateurs de nombres aléatoires ; mais, s'ils sont mauvais, alors ils sont vraiment très mauvais ! Ce qui renforce l'argumentation de Cowles sur l'inefficacité des conjoncturistes professionnels.

Il est donc possible de trouver dans cette conclusion une préfiguration du concept d'efficacité informationnelle des marchés boursiers, même si cette propriété d'inefficacité des professionnels n'est pas pensée en ces termes par Cowles. Cependant, la question de la mesure de performance de l'utilisation de l'information par des professionnels de marché conduit inéluctablement au débat sur l'efficacité informationnelle des marchés dans son rapport avec les modèles de marche au hasard et de martingale. En ce sens, les travaux de Cowles peuvent être considérés comme la troisième origine du modèle de marche au hasard en finance.

5 Le manque. Voire l'absence, d'explication théorique

Malgré le fait que les travaux de Bachelier et de Regnault n'ont jamais cessé d'être utilisés et enseignés, ils n'ont pas ouvert la voie à une dynamique de recherche. De nouvelles recherches qui ont suivis ces travaux possédaient une dimension très appliquée et pratique, elles privilégiaient une approche économétrique sans explication théorique dont l'objectif était de valider le postulat d'imprévisibilité des variations boursières, embryon de la théorie de l'efficacité informationnelle qui se développa dans les années 1960. Cet engouement pour les nouvelles pratiques statistiques a complètement occulté les explications théoriques du caractère aléatoire des variations boursières.

L'absence d'explication théorique et la faiblesse des résultats furent rappelées avec insistance à partir de la fin des années 1950 par deux des principaux défenseurs du modèle de marche aléatoire, Working⁷⁸ et Roberts⁷⁹. Tous deux dressèrent un constat sur les limites

⁷⁷Cowles A. (1933), "Can Stock Market Forecasters Forecast?", *Econometrica*, vol. 1 p 318.

⁷⁸ Working, Holbrook :

1956. New ideas and methods for price research. *Journal of Farm Economics* 38, 1427-36.

1958. A Theory of Anticipatory Prices. *The American Economic Review* 48, 2: 188-199.

de cette situation. Roberts (1959) nota que l'indépendance des variations boursières, qui justifiait l'assimilation des variations boursières à une marche aléatoire, n'était pas encore établie (1959). Working souligna également l'absence de vérification du caractère aléatoire des variations boursières.

Selon lui, il n'était pas possible de rejeter avec certitude l'analyse chartiste (ou technique) qui se base sur les figures ou des graphiques pour prévoir les variations des cours boursiers. Il expliqua que : « même si j'ai donné l'impression d'avoir suggéré que ces " configurations techniques " dans les prix observés sont des illusions, ceci n'a pas été démontré ⁸⁰ ».

Ces quatre articles amorcèrent une importante rupture dans l'organisation de la recherche relative à l'application du modèle de marche aléatoire aux variations boursières, la rupture des années 1960.

Les travaux de ces trois auteurs n'ont pas directement ouvert la voie à une dynamique recherche. Il fallut attendre les années 1930, aux Etats-Unis, pour que le modèle de marche aléatoire puisse bénéficier d'une telle dynamique grâce, en partie, à l'émergence de l'économétrie. Puis, à partir des années 1960, l'institutionnalisation et l'organisation de l'économie financière aux Etats-Unis permirent d'amorcer un rapprochement progressif du modèle de marche aléatoire avec la théorie économique qui a conduit à l'élaboration, pendant cette décennie, de la théorie de l'efficience informationnelle. Celle-ci a donné au modèle de marche aléatoire son contenu théorique actuel, sans pour autant fournir une démonstration robuste.

II. La théorie de l'efficience des marchés

Les développements des marchés financiers dans le monde ont permis et suscité une extension et un approfondissement de la théorie financière ne serait-ce que pour pouvoir modéliser les positions de plus en plus importantes des salles de marché des banques tandis que cette théorie se trouvait souvent origine de la création d'instruments nouveaux ou de nouvelles manières d'aborder des questions anciennes comme par exemple la gestion des portefeuilles.

La quasi-totalité des instruments financiers des pratiques professionnelles des modes de couverture des positions des salles de marché des techniques de gestion des fonds fait intervenir quelque part une hypothèse d'efficience des marchés.

A quoi sert le concept d'efficience des marchés ? De manière simple et schématique ce concept exprime que le prix coté reflète fidèlement la réalité économique sous-jacente et permet donc une bonne prise de décision achat ou vente en toute connaissance de cause. Le marché est alors efficient dans le sens où en tant que mécanisme d'échange, l'information nécessaire à cet échange est correctement transmise par les prix. Comme ce concept

1961. New Concepts Concerning Futures Markets and Prices. The American Economic Review 51. 2: 160-163.

⁷⁹ Roberts, Harry V. 1959. Stock-Market "Patterns" and Financial Analysis: Methodological Suggestions. Journal of Finance 14. 1: 1-10.

⁸⁰ Working, Holbrook, New ideas and methods for price research. Journal of Farm Economics 38, p1436.

d'efficience fait intervenir l'économie de l'information, on utilise également le terme « efficience informationnelle » et on parle alors d'efficience informationnelle des marchés de capitaux.

1 Les fondements d'efficience des marchés financiers

a Principe et définition de l'efficience

L'efficience des marchés financiers est une théorie, issue de la notion de marchés purs et parfaits conçus au XIX^e siècle, dont la définition est évolutive. La première définition est celle de Fama⁸¹ et date de 1965 : « un marché financier est efficient si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif. »⁸²

Pour aboutir au bon fonctionnement des marchés, cinq conditions en rapport avec la définition de Fama doivent être de vigueur :

i) La rationalité des investisseurs, c'est-à-dire que toute anticipation issue d'un événement positif doit conduire l'investisseur à acheter (ou à conserver) et toute anticipation issue d'une information négative doit le mener à vendre. On parle d'anticipations rationnelles.

ii) La libre circulation de l'information et la réaction instantanée des investisseurs afin que le prix de l'actif intègre instantanément l'information. Cela suppose que tous les agents puissent bénéficier de la même information dans le même temps et qu'ils puissent tous immédiatement agir sur le marché dans des conditions identiques.

iii) La gratuité de l'information pour éviter la non-réaction volontaire en vu d'un prix trop élevé de l'information par rapport aux possibilités d'évolution du cours.

iv) L'absence de coûts de transaction et d'impôt de bourse qui pourraient avoir pour conséquence d'annuler des gains potentiels, dans quel cas les investisseurs n'auraient aucun intérêt à intervenir.

v) L'atomicité des investisseurs et la liquidité: un investisseur ne doit en aucun cas influencer les prix par simple ordre d'achats et de ventes. Seule l'information peut affecter les cours. Il est de même à noter que la liquidité est incapable de varier le niveau des prix sur le marché.

Il découle de l'hypothèse d'efficience que celle-ci concerne tous les marchés, tous les secteurs et toutes formes d'actifs financiers, que des conditions draconiennes soient respectées sur les informations et surtout qu'aucun investisseur ne pourra exploiter l'information en vu de réaliser un profit et que, forcément, la lecture du cours à venir d'un actif est impossible. Sur le long terme, il est normalement impossible de surperformer le marché ; cette dernière idée

⁸¹Eugene Francis « Gene » Fama (né le 14 février 1939 à Boston, Massachusetts) est un économiste américain auteur de la théorie d'efficience des marchés financiers. Ses travaux sur les prix des actifs lui ont valu le Prix Nobel d'économie pour 2013.

⁸² Fama E.F [1965], the behaviour of stock market prices, journal of business, vol 38, P 90.

correspond à l'efficacité informationnelle.

Les hypothèses et conditions de la théorie de l'efficacité n'est généralement pas vérifiées du fait de la vigueur de la définition de Fama, Jensen a proposé en 1978 une autre définition : «un marché efficace si les prix des actifs cotés intègrent les informations les concernant de telle manière qu'un investisseur ne peut, en achetant ou en vendant cet actif, en tirer profit supérieur aux coûts de transaction engendrés par cette action »⁸³.Jensen insiste donc sur l'impossibilité de réalisation de profit et exclut l'absence de coûts de transaction. Les conclusions des analyses à propos de l'efficacité des marchés dépendent parfois de la définition sur laquelle on se base.

b Les différentes formes d'efficacité.

Le concept d'efficacité est l'un des fondements principaux de la théorie financière car il constitue le fondement des modèles d'aide à la décision et de négociation des marchés financiers. Cependant, il règne quelques confusions sur sa signification ainsi que sa validité. C'est pourquoi, il nous paraît utile d'en préciser tout d'abord les différents sens. D'une manière générale ; on peut définir un marché financier efficace comme un marché qui réalise les objectifs suivants :

- Une allocation optimale des ressources.
- Un service d'échange des titres équitable pour tous les agents économiques, rapide et rendu au coût le plus faible possible.
- Une juste évaluation de la valeur des titres.

Ces objectifs renvoient en fait à quatre formes d'efficacité : L'efficacité allocationnelle, l'efficacité opérationnelle, l'efficacité informationnelle et le comportement rationnel des agents.

•L'efficacité allocationnelle

L'efficacité allocationnelle d'un marché signifie qu'il est capable d'orienter les fonds vers les emplois les plus productifs. Pour le marché boursier, il s'agit avant tout l'allocation des titres de propriété des entreprises ; qui elle-même conditionne l'allocation des ressources productives de l'économie.

•L'efficacité opérationnelle

L'efficacité opérationnelle concerne les fonctions proprement économiques de l'industrie financière. Selon cette acception, un marché est efficace si sa structure et son organisation, et de manière plus générale le processus d'échange conduisant à la formation des prix, permettent de mettre en relation de manière satisfaisante épargnants et investisseurs, au coût le plus faible.

Autrement dit, l'utilité du marché réside dans sa capacité à mettre en commun des risques, et assurer leur transfert vers ceux qui sont les plus aptes, ou les plus disposés à les supporter. Le marché financier mobilise ainsi l'épargne plus disposée à les supporter. Le

⁸³ Jensen ,CM,[1978], some anomalous evidence regarding market efficiency, journal of financial economics, vol 6 [1978], p. 98.

marché financier mobilise ainsi l'épargne vers les emplois les plus productifs, tout en restant liquide.

Cette forme d'efficience a donné naissance au courant de la littérature appelé microstructure des marchés. La motivation de l'analyse de la microstructure des marchés est liée au constat marquant que, dans leur organisation actuelle ; les marchés s'écartent des modèles classiques de formation des prix. En effet, sur les marchés concurrentiels, un processus walrassien de formation des prix n'existe que si aucune friction (informationnelle, décisionnelle, ou transactionnelle) ne vient contrarier le mécanisme de formation des cours.

Ce courant traite ainsi de l'interaction entre les opérateurs de marché, les mécanismes de transaction, et le comportement dynamique des cours des titres, lorsque l'échange est sensiblement gêné par l'existence de frictions⁸⁴.

- L'efficience informationnelle

Un marché est efficient au sens informationnel ; si toute l'information pertinente à l'évaluation des actifs financiers, qui y sont négociés, se trouve instantanément reflétée dans les cours. Une des conséquences immédiates de cette définition est que toute nouvelle information sur un titre doit se traduire par un ajustement de son prix. En conséquence, sur un marché efficient au sens informationnel, le prix d'un actif financier est à tout instant une estimation non biaisée de sa valeur intrinsèque.

- Le comportement rationnel des agents

Enfin, le comportement rationnel des agents signifie que les investisseurs utilisent l'information dont ils disposent de manière à maximiser leur utilité c.-à-d. leur espérance de gain. Leur comportement apparaît irrationnel par exemple lorsqu'ils effectuent des opérations d'achat et de vente suite à une mauvaise analyse de l'information ou un besoin de liquidité.

En fait, ces quatre formes d'efficience ne sont pas indépendantes, En effet, le marché ne peut effectuer une bonne allocation de fonds que si, par ailleurs, l'information est bien prise en compte et les transactions se réalisent à moindres frais. Mais ; la condition prépondérante à cette allocation optimale de fonds demeure l'hypothèse d'efficience au sens informationnel, cela explique pourquoi elle fait l'objet d'un nombre aussi élevé de travaux.

La théorie de l'efficience informationnelle des marchés financiers a été validée empiriquement pour les principaux marchés financiers dans la première moitié des années 70. A partir de ce moment, cette théorie fut communément admise par l'ensemble des chercheurs, et peu d'études se sont ensuite intéressées à ce problème. Cependant, durant ces dernières années, de nombreux travaux empiriques ont mis en évidence l'existence d'anomalies en matière de rendements des titres. Ces observations, remettant en cause l'hypothèse

⁸⁴ O'hara M; 1998, Market microstructure theory, Wiley-Blackwell.

d'efficience informationnelle ; ont ravivé les controverses sur cette théorie, en particulier sur les marchés dérivés⁸⁵.

c Fama et les trois formes d'efficience informationnelle.

La théorie de l'efficience informationnelle des marchés a fortement évolué au cours du temps. Fama (1965) en a formulé la première définition qui s'énonce de la manière suivante :

« Un marché est efficient si et seulement si les prix des titres reflètent à chaque instant toute l'information disponible ».

Sur un tel marché, les prix incorporent sur les conséquences des faits passés et les anticipations exprimées sur les événements futurs par conséquent, il est impossible de prévoir les variations futures du prix d'un titre, puisque tous les événements connus ou anticipés sont déjà intégrés dans le prix actuels. Seul un événement imprévisible pourra le modifier, et ce instantanément. De plus, comme l'ajustement des prix suite à une nouvelle information est instantané, aucun investisseur ne peut réaliser de profits grâce à l'exploitation de cette information.

Cette définition de l'efficience a été ensuite enrichie notamment par Jensen (1978) qui l'a amendée dans ce sens ; « Un marché est efficient conditionnellement à un ensemble d'information s'il est impossible, en spéculant sur la base de ces informations, de tirer un profit supérieur aux coûts de transaction engendrés par cette action⁸⁶ ».

Moins restrictive que la définition initiale de Fama, elle met en évidence l'impossibilité pour les investisseurs de réaliser des arbitrages, c'est-à-dire des profits sans risque, sur un marché efficient.

Parallèlement ; les travaux de Roberts (1967), ont visé à mieux définir les différents types d'informations, et les degrés d'efficience qui se répartissent en trois groupes :

- L'efficience de forme faible : toute l'information fondée sur des séries historiques de cours ou de rendements est pleinement reflétée dans le prix des titres. Selon cette acception, on ne peut pas « battre » le marché, c-à-d obtenir un rendement ajusté du risque supérieur à celui du marché, en s'appuyant sur ces données. Dans ce cadre ; l'analyse technique (ou chartiste) serait vaine.
- L'efficience de forme semi-forte : toute l'information publique disponible, telle celle fournie par la presse, les rapports annuels, les études des analystes financiers, c'est déjà contenue dans le cours des titres. Dans ce contexte, l'utilisation de l'analyse fondamentale n'aboutit pas à dégager un rendement supérieur à celui du marché.
- L'efficience de forme forte : toute l'information publique et privée est entièrement intégrée dans les cours, même les informations privilégiées dont disposent

⁸⁵ Sahut JM, 1998, l'évaluation des options sur actions ; l'alternative approche fonctionnelle, approche organisationnelle, thèse de doctorat, université Paul Cézanne d'Aix Marseille II.

⁸⁶ Jensen, CM, [1978], some anomalous evidence regarding market efficiency, journal of financial economics, vol 6 [1978], p. 98.

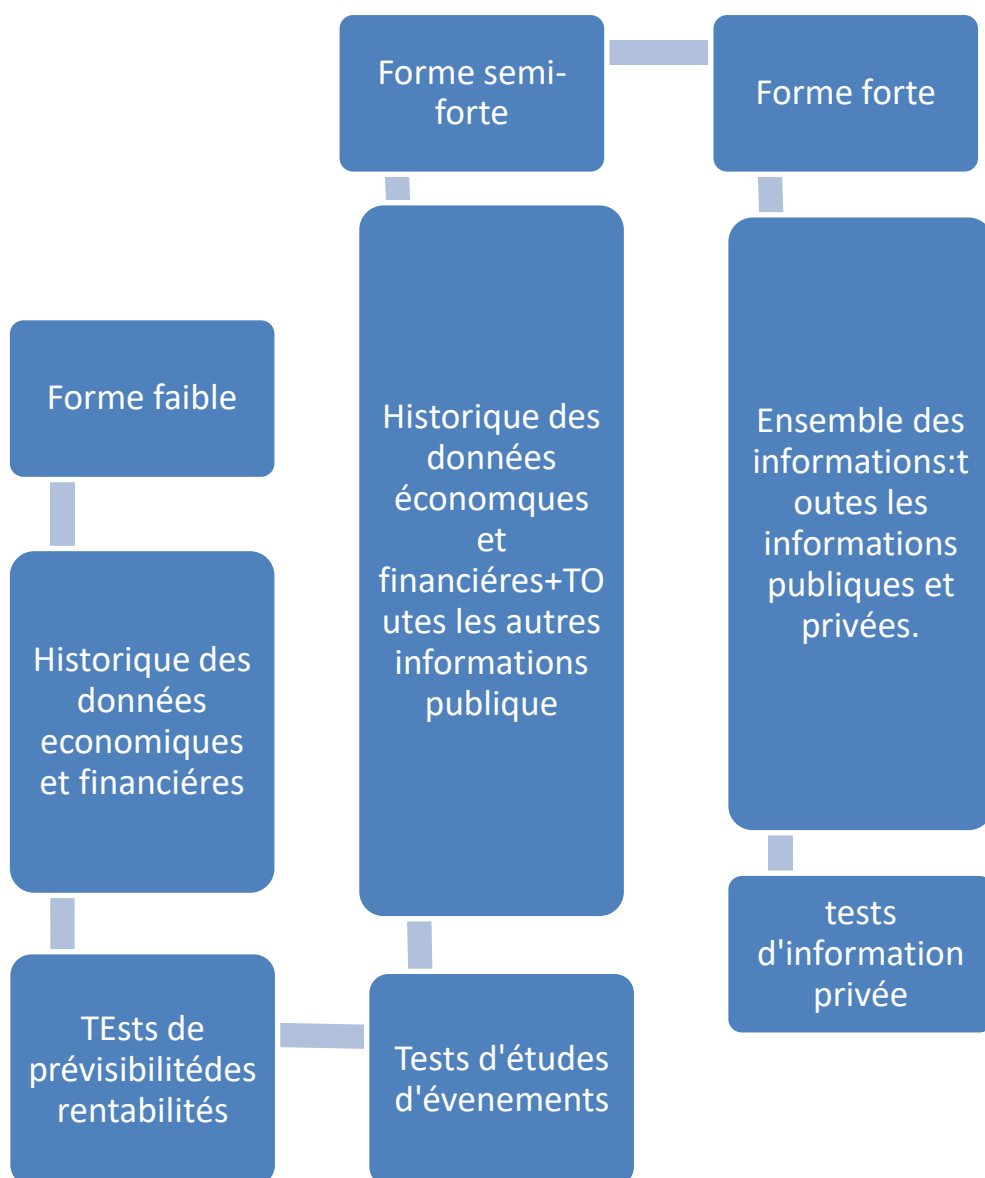
certaines investisseurs ne permettent pas d'effectuer systématiquement des transactions anormalement rentables (avec un rendement plus élevé que celui du marché) l'efficience garantit ici l'égalité de tous les actionnaires face à l'information.

Les nombreux tests empiriques sur cette théorie ont amené Fama(1991) à adapter sa classification initiale (figure n 01).les modifications portent surtout sur la forme faible et en particulier sur la nature de l'information considérée. La forme faible intègre dorénavant l'historique de toutes les variables économiques ou financières utiles à la prévision et non plus seulement celui relatif aux cours des titres.

Le second changement concerne la dénomination des tests d'efficience :

- Les tests de la forme faible deviennent les tests de prévisibilité des rentabilités.
- Ceux de la forme semi-forte évoluent en tests d'étude d'événements.
- Ceux de la forme forte sont appelés désormais les tests sur l'information privée.

Marché efficient au sens informationnel



2 Les analyses de l'efficience du marché :

L'activité boursière est une activité passionnante à étudier d'autant plus que l'étude peut déboucher sur des conclusions rentables. Les deux approches les plus pratiquées pour étudier l'investissement boursier sont l'approche fondamentale et l'approche technique.

a L'analyse technique

L'analyse technique est la plus ancienne méthode pratiquée pour analyser le comportement d'un marché. Murphy [1986] définit l'analyse technique comme : L'étude de l'évolution d'un marché principalement sur la base de graphiques, dans le but de prévoir les futures tendances.

D'après Gillet⁸⁷, l'analyse technique appelée également analyse graphique où analyse chartiste se fonde sur l'analyse des séries de cours passés pour tenter de déterminer une tendance d'évolution des prix des titres ou pour mettre en évidence des signaux permettant de prévoir, à partir de la série des cours passés, les hausses ou les baisses de cours.

L'analyse technique porte exclusivement sur l'étude des données internes du marché. Son fondement est que tous les facteurs économiques, financiers, politiques et psychologiques qui influent sur la détermination des cours sont contenus dans les mouvements de l'offre et de la demande sur le marché et que l'observation du volume de transaction et des variations de cours suffit à prévoir l'évolution des cours⁸⁸.

$$\mu_t = \alpha \mu_{t-1} + \delta_t$$

Avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Où, v_t et u_t désignent respectivement un bruit blanc et un processus autorégressif d'ordre (1)⁸⁹.

Un staticien dirait de telles techniques qu'elles supposent que les changements successifs dans les cours des valeurs mobilières sont des événements dépendants. Le recours à une telle méthode est incompatible avec la méthode de marche aléatoire des cours. L'analyse technique prétend seulement que le mouvement n'est pas majoritairement aléatoire. Selon Murphy [1986] l'efficience des marchés financiers est très proche du postulat de l'analyse technique selon lequel le marché prend tout en compte.

b L'analyse fondamentale

L'analyse fondamentale se concentre autour de la notion de valeur intrinsèque et de cours théorique. La valeur fondamentale peut être définie comme la somme actualisée des bénéfices futures ou des dividendes futurs que peut espérer l'investisseur, ce dernier s'intéresse aux informations fournies par les rapports annuels (compte de résultat, bilans, tableaux de

⁸⁷ Gillet PH [1999], « l'efficience des marchés financiers », Economica, Paris, p.40.

⁸⁸ Jacquillat B. et B. Solnik, (2004), Marchés financiers : gestion de portefeuille et des risques; Dunod, 4ème édition, p 51.

⁸⁹ Voir chapitre 2

financement) et par des contacts avec les dirigeants d'entreprise (stratégies, concurrence) muni de ces renseignements, l'analyste fondamental procède en trois étapes :

- (i) dans un premier temps, il essaie, à partir du passé de se faire une idée de ce que pourront être les résultats futures de la forme étudiée
- (ii) Dans un deuxième temps, il doit déterminer le taux de capitalisation à appliquer à ces bénéfices futurs pour obtenir un cours théorique de l'action
- (iii) Dans un dernier temps, l'analyste compare le cours théorique au cours effectivement coté sur le marché, et intervient en conséquence, si le cours coté est inférieur il achète, s'il est supérieur il vend.

Toutefois, s'il y a un grand nombre d'analystes compétents, ils aideront à réduire les écarts entre les valeurs intrinsèques des actions et leurs cours et amèneront ceux-ci à s'ajuster automatiquement à tout changement dans la valeur intrinsèque. Par conséquent, on peut dire que l'analyse fondamentale consiste à analyser l'ensemble des informations économiques, comptables et financières des entreprises cotées de manière à déterminer leur valeur fondamentale.

La valeur fondamentale varie en fonction des informations successives concernant l'entreprise ou le marché. On peut la qualifier comme une moyenne sur longue période des prix des actions dans la mesure où ces derniers devraient osciller autour de la valeur fondamentale sans toutefois s'en écarter durablement. Les cotations quotidiennes où continues favorisent ce mouvement oscillatoire qui conserve les prix autour de cette valeur intrinsèque⁹⁰.

3 Remise en cause de la théorie d'efficience

a Difficulté d'application de la théorie d'efficience

Tout d'abord, tout ordre passé sur un marché financier donne lieu à des coûts de transaction ; cependant, d'après la définition de Jensen, cela n'empêche pas la réalisation d'un marché efficient. Il existe aussi certaines bourses de part le monde qui exigent un impôt de bourse. Mais les conditions les plus improbables à exécuter sont celles relatives à l'information. Il est évidemment difficile de transmettre une information à tous les investisseurs au même moment ; malgré les progrès technologiques en matière de communication, les décalages temporels dans l'obtention des informations semblent inéluctables. De même, l'information doit être compréhensible pour tous dans le but d'être interprétée de la même façon par tous les agents : investisseurs professionnels et amateurs n'ont certainement pas les mêmes capacités de compréhension face à des événements très techniques. D'autant plus que le nombre d'individus plaçant leur épargne en Bourse sans avoir aucune connaissance financière de base ne cesse de croître, leur intéressement au marché n'est pas forcément régulier et ils peuvent donc aisément passer au travers d'informations. L'efficience des marchés est certainement plus probable lorsque ceux-ci ne sont constitués que d'investisseurs avertis. Il paraît aussi utopique de penser que les investisseurs disposant d'énormément d'actifs (les fonds de pension par exemple) n'utilisent pas leurs simples

⁹⁰Gillet PH [1999], « l'efficience des marchés financiers », Economica, Paris, p.39.

agissements pour réaliser de plus-value ; pourquoi ne pas vendre massivement ses titres pour que leurs prix diminuent et les racheter aussitôt, les cours suffisamment bas ? La rationalité des agents peut également laisser planer quelques doutes, les investisseurs n'ayant pas forcément un comportement cohérent face aux informations et ce pour plusieurs raisons : le besoin de liquidité, la non-compréhension... Les conditions nécessaires au bon fonctionnement des marchés financiers sont donc souvent difficiles à mettre en oeuvre dans la réalité autant du point de vue du comportement des agents que de celui du processus lié à l'information.

b Les mécanismes contrariant le principe d'efficience

Loin du concept d'efficience, il existe concrètement sur les marchés divers mécanismes ou effets qui viennent remettre en cause le fonctionnement théorique d'un marché.

On trouve ainsi le phénomène de mimétisme des agents économiques. Cela se manifeste par le fait qu'un agent suit les décisions d'autres agents pour prendre ses propres décisions. Pour Keynes, le mimétisme est d'abord un comportement rationnel. Il fait l'hypothèse que les agents économiques sont ignorants, qu'ils sont incapables d'interpréter les informations qu'ils reçoivent, ils ne peuvent donc anticiper le futur. Ainsi, il aura tout avantage à imiter les autres qui, eux, doivent savoir. Il est pourtant impossible de savoir s'ils savent réellement. Ce mécanisme remet en cause l'atomicité des agents puisque à présent l'action d'un seul agent, qui serait une référence pour les autres, aurait une très grande influence sur le marché. Les comportements des agents dépendent de moins en moins des valeurs économiques réelles (leurs besoins, leurs ressources) et de plus en plus des évolutions du marché (notamment l'évolution du prix d'une action).

Une autre grande défaillance du marché est l'autovalidation. On parle aussi d'anticipations autoréalisatrices, cela signifie que des anticipations d'agents économiques peuvent se concrétiser uniquement parce que ces agents pensent qu'elles sont justes, et cela qu'elles soient réellement justes ou non. Par exemple, si une majorité d'opérateurs du marché des changes pense que le dollar va s'apprécier dans le futur, donc qu'ils ont intérêt à en acheter aujourd'hui pour le revendre ultérieurement, leurs opérations d'achat vont mécaniquement valider leur croyance (le dollar va augmenter), que celle-ci soit économiquement fondée ou non. C'est l'enseignement fondamental de la théorie des « tâches solaires ». Une croyance faisait croire que si le soleil présentait de nombreuses tâches, alors les récoltes ne seraient pas bonnes. Ainsi, lorsque les paysans voyaient des tâches sur le soleil, plutôt que de produire beaucoup et de risquer des pertes, ils préféraient produire moins, d'où une diminution du volume des récoltes. Il n'y avait pourtant aucune incidence mesurable des tâches sur les récoltes, mais le résultat est là : s'il y a des tâches solaires, les récoltes diminuent.

Le price momentum est présent lorsque la performance (positive ou négative) des derniers mois a tendance à continuer pour les mois suivants, c'est-à-dire que les cours des actifs ne s'adaptent que lentement à l'arrivée de nouvelles informations, comme si les bons (mauvais) résultats des derniers mois engendraient de bonnes (mauvaises) nouvelles quelles que soient les informations intervenues. La réaction par rapport à l'information n'est donc pas

instantanée mais s'étale dans le temps et l'utilisation des informations passées permet la réalisation d'un gain. Ce phénomène ne vient certainement pas de la lenteur de l'information mais de la confiance des investisseurs envers des titres ayant déjà prouvés leur performance. Le price momentum est semblable à la notion d'effet d'élan.

La surréaction est caractérisée par un excès d'optimisme (pessimisme), appelé surinterprétation, des investisseurs sur les perspectives d'une société, se traduisant par des achats de titres qui augmentent (diminuent) jusqu'à ce qu'ils se rendent compte que leur optimisme (pessimisme) était non fondé, donc ils vendent (achètent). Il s'ensuit ainsi des variations de prix qui ne sont pas le fait de nouvelles informations. La surréaction est une variation trop forte du prix d'un actif financier qui doit donc être compensé par la suite, en ce sens la volatilité des cours est accrue.

Un phénomène lié à la surinterprétation est la sous-réaction, signifiant que l'information est sous-estimée. Les investisseurs réagissent mais avec une intensité insuffisante par rapport à l'événement, entraînant un ajustement progressif dans les mois qui suivent. L'investisseur qui a réagit instantanément peut donc tirer parti de la hausse graduelle du cours des actifs.

Toutes ces tendances relèvent de faits observés sur les marchés financiers et tendent à rendre le marché moins efficace car il semble possible de bénéficier de profits en jouant sur les erreurs de marché. Cependant certains économistes prônent continuellement l'efficacité des marchés et estiment ces phénomènes en adéquation avec l'efficacité des marchés.

Conclusion chapitre 4

La notion d'efficacité des marchés, découverte par Eugene Fama au début des années 1960, joue un rôle essentiel dans le modèle classique de la finance. En effet, si toute la théorie qui va s'édifier par la suite se base sur les prix des actifs et leur évolution, encore faut-il être certain que ceux-ci représentent bien la réalité du marché, sa « vérité », qu'ils synthétisent toute l'information existante. Si les prix ne sont qu'une simple indication et que les gros opérateurs s'entendent entre eux pour s'échanger leurs actions, un modèle basé sur les prix ne pourra être que bancal.

Après cet aperçu historique la modélisation financière des fluctuations boursières utilise comme outil probabiliste principal, des lois de probabilité qui possèdent toutes la propriété fondamentale d'avoir des accroissements indépendants et identiquement distribués (ou i.i.d.). L'histoire de l'évolution de cette modélisation au cours du vingtième siècle peut s'analyser comme l'histoire de l'émergence progressive d'un ensemble de modèles classiques. D'abord confondus avec le mouvement brownien, puis avec les processus α -stables, ces processus finissent par émerger en tant que tels dans les années soixante-dix, pour être explicitement utilisés dans les modélisations à partir des années quatre-vingt dix.

Chapitre 5 : Modélisation mathématique des fluctuations boursières et faits stylisés

La théorie de la finance concerne l'étude des prix des produits financiers et plus précisément de leurs évolutions temporelles. Un modèle financier repose le plus souvent sur une représentation des prix d'actifs financiers. Une telle représentation peut être recherchée dans une perspective de meilleure compréhension des marchés financiers, ou encore dans une perspective d'élaboration d'outils permettant d'améliorer la gestion des risques.

Une modélisation financière réalise toujours un compromis entre adéquation aux observations dans les marchés financiers et commodité d'utilisation. Une modélisation qui cherche à reproduire toutes les propriétés statistiques des observations conduit généralement à un modèle compliqué qui se révèle souvent difficile à utiliser, les calculs théoriques étant généralement difficile à mener. À l'inverse, une simplification excessive du modèle permet, certes, de mener à bout de nombreux calculs, par exemple, pricing des options et gestion du portefeuille, mais risque de ne pas être cohérent avec la réalité financière.

La première modélisation des cours boursiers, proposée en 1900 par Bachelier, a consisté à modéliser les cours financiers par des mouvements browniens. Il faut attendre plus de 60 ans pour qu'un autre modèle voit le jour et s'installe.

En 1960, Samuelson propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes. Il est important de souligner que cette modélisation de Samuelson est à la base de la théorie très populaire de Black et Scholes.

Dans la première partie de ce chapitre; nous commençons par rappeler les différents modèles classiques de la dynamique boursière et ensuite nous présentons les faits stylisés liés à ces modèles.

I. Modèles classiques

1 Modèles stochastiques de Bachelier et Samuelson

a Mouvement brownien : un peu d'histoire

En 1827, la première description du mouvement brownien est due au botaniste écossais Robert Brown⁹¹ (qui lui a donc donné son nom). Il observe de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide et en décrit les mouvements particulièrement erratiques, au point que plusieurs physiciens estiment ensuite pendant le 19^{ème} siècle que ce mouvement ne semble pas admettre de tangente.

⁹¹Robert Brown, né le 21 décembre 1773 à Montrose (Angus) et mort le 10 juin 1858 à Londres, est un botaniste écossais. Il est paradoxalement connu pour une découverte non « botanique » : le mouvement brownien.

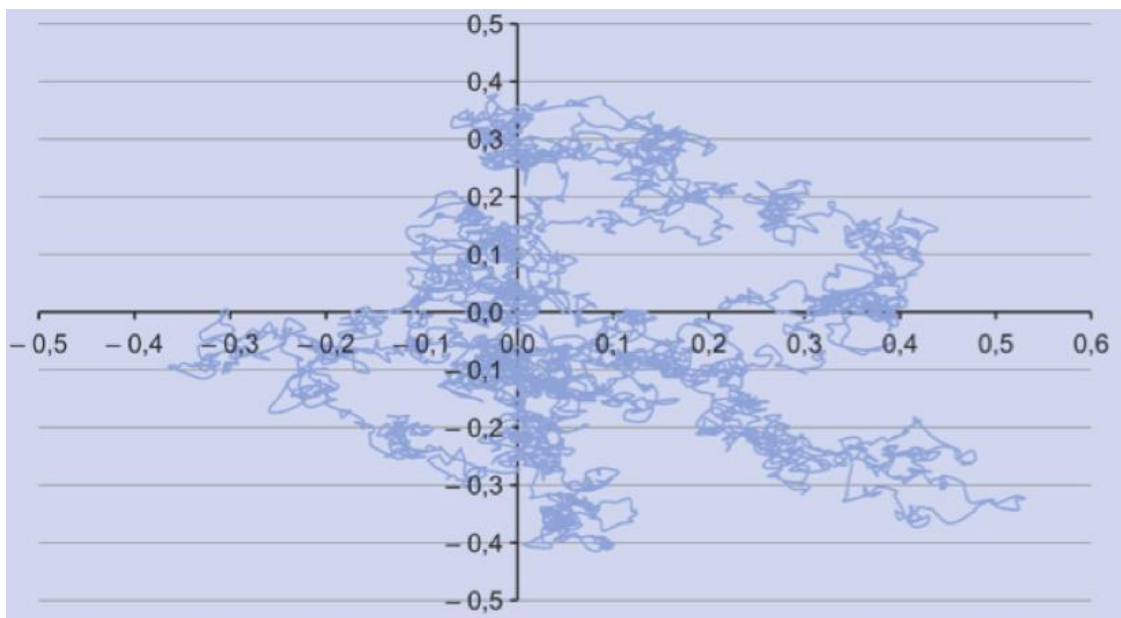


Figure 3 : Le mouvement brownien d'une particule

Cependant, avant lui on pensait que les particules étaient vivantes. Une autre théorie expliquait que le mouvement des particules était dû à la différence de température entre l'eau et le milieu ambiant provoquant l'évaporation de l'eau, ainsi qu'aux courants d'air. Brown (1828) réfuta ces théories et établit que les particules étaient inanimées. Il expliqua que la matière était composée de petites particules, appelées molécules actives, qui montrent un mouvement rapide et irrégulier, dont l'origine vient des particules. Puis au début des années 1900, le mouvement brownien fut caractérisé de la façon suivante :

- Le mouvement est très irrégulier, composé de translations et de rotations, la trajectoire ne semble pas avoir de tangentes.
- Deux particules semblent bouger de façon indépendante, même si elles sont très proches.
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites.
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence.
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux.
- Le mouvement est plus actif en température haute.
- Le mouvement est sans fin.

En 1905, la théorie cinétique, expliquant que le mouvement brownien des particules microscopiques est dû aux bombardements des molécules du fluide, semble la plus plausible.

La mise en évidence du mouvement brownien comme processus stochastique est dû indépendamment au mathématicien français Louis Bachelier (1900) et Albert Einstein⁹² en (1905). Bachelier dans sa thèse Théorie de la spéculation avait pour but la modélisation de la dynamique des actifs boursiers et son application au calcul de prix d'option. Il obtient la loi du mouvement brownien à un instant donné. Il met surtout en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : le déplacement d'une particule brownienne après un instant t de

⁹²Albert Einstein (né le 14 mars 1879 à Ulm, Wurtemberg, et mort le 18 avril 1955 à Princeton, New Jersey) est un physicien théoricien qui fut successivement allemand, puis apatride (1896), suisse (1901), et enfin sous la double nationalité helvético-américaine (1940).

dépend que de l'endroit où elle était à l'instant t et mais pas de comment elle est arrivée à ce point. Par ailleurs, Einstein, qui ignorait l'existence de ce débat, formula une théorie quantitative en 1905 du mouvement brownien. Einstein réussit à expliquer la nature du mouvement et donna la valeur du coefficient de diffusion (sous certaines hypothèses). La méthode d'Einstein repose sur des considérations de mécanique statistique qui le conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne, solution fondamentale de cette équation.

En 1923, l'américain Norbert Wiener⁹³ donne une première construction mathématique rigoureuse du mouvement brownien en tant que processus stochastique⁹⁴. Il établit en particulier la continuité des trajectoires.

Dans la période 1930-1960, de nombreuses propriétés du mouvement brownien sont ensuite établies notamment par le français Paul Lévy⁹⁵. La notion d'équation différentielle stochastique est introduite. Le japonais Kiyoshi Ito les généralisera et les analysera avec son traité de 1948. Cette démarche très féconde établit des liens importants entre analyse et probabilité et fonde l'analyse et le calcul stochastiques.

70 ans après le travail de Bachelier, redécouvert par l'économiste Paul Samuelson, Robert Merton, dans une série d'articles fondamentaux, fondaient un pan essentiel de la théorie actuelle des marchés financiers en s'appuyant sur les mathématiques des processus dérivés du mouvement brownien.

b Modèle stochastique de bachelier et samuelson : modèle brownien

Historiquement, le mouvement brownien a été exhibé pour représenter des mouvements qui évoluent au cours du temps de façon particulièrement désordonnée, par exemple en finance pour représenter des cours de bourses très volatiles ou en physique pour représenter des particules microscopiques soumises aux multiples chocs de leur environnement. Le mouvement brownien joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques (comme la loi $N(0; 1)$ pour les lois de probabilités sur $\mathbb{R}$). Il apparaît dans de nombreuses situations aussi bien théoriques qu'appliquées et il offre un cadre assez simple où de nombreux calculs peuvent être menés.

Nous allons étudier dans ce paragraphe des mouvements browniens unidimensionnels, c'est-à-dire qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ en temps discret et continu :

- Temps discret

⁹³Norbert Wiener (né le 26 novembre 1894 à Columbia (Missouri), États-Unis, mort le 18 mars 1964 à Stockholm, Suède) est un mathématicien américain, théoricien et chercheur en mathématiques appliquées, surtout connu comme le père fondateur de la cybernétique.

⁹⁴ Le calcul classique des probabilités concerne des épreuves où chaque résultat possible (ou *réalisation*) est mesuré par un nombre, ce qui conduit à la notion de variable aléatoire. Un processus stochastique ou processus aléatoire (voir Calcul stochastique) ou fonction aléatoire (voir Probabilité) représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

⁹⁵Paul Pierre Lévy, né à Paris⁵ le 15 septembre 1886 et mort à Paris 16^e le 15 décembre 1971, est un mathématicien français. Il figure, avec Émile Borel, Andreï Kolmogorov, Norbert Wiener, Joseph Leo Doob et Kiyoshi Itô, parmi les fondateurs de la théorie moderne des probabilités. On lui doit aussi des considérations importantes sur les lois stables stochastiques qui portent son nom ainsi que sur les martingales.

Pour introduire plusieurs concepts essentiels pour la suite, nous considérons d'abord un processus markovien⁹⁶ unidimensionnel observé à des instants régulièrement espacés, de valeur successives $X(0), X(1), \dots, X(t), \dots$, à accroissements $X(t) - X(t-1)$ indépendants, normalement et identiquement distribués dont l'espérance est notée μ et l'écart type σ .

$$\text{Posons } U(t+1) = \frac{X(t+1) - X(t) - \mu}{\sigma}$$

D'après les caractéristiques du processus X , les $U(t)$ sont des variables normales, centrées réduites et indépendamment distribuées, et l'équation qui régit le mouvement de X peut s'écrire : $X(t+1) - X(t) = \mu + \sigma U(t+1)$

Par ailleurs, en écrivant $X(t)$ comme la somme de $X(0)$ et de ses t accroissements entre 0 et t , il vient: $X(t) - X(0) = \sum_{i=1}^t (X(i) - X(i-1))$

Les accroissements $X(i) - X(i-1)$ étant gaussiens et indépendants;

Nous avons : $E(X(t) - X(0)) = \mu t$;

$\text{var}(X(t) - X(0)) = \sigma^2 t$

$(X(t) - X(0))$ est distribué selon $N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Ce processus très simple, appelé autorégressif du premier ordre, est couramment utilisé en économétrie.

Le mouvement brownien peut être considéré comme une limite de ce processus quand on passe du temps discret au temps continu.

• Le temps continu

Nous allons généraliser l'approche en temps discret en considérant un processus $X(t)$ défini en temps continu, c'est-à-dire pour tout t de $(0, T)$ que nous définirons comme un mouvement brownien arithmétique non standardisé, ou plus simplement un brownien. Parmi les différentes définitions possibles du mouvement brownien, nous optons ici pour la suivante :

▪ Définition du mouvement brownien arithmétique :

- $X(t)$ est mouvement brownien arithmétique si : $X(t) - X(0)$ est gaussien de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ (c'est à dire selon la loi $N(\mu t, \sigma^2 t)$).
- Ses accroissements sont indépendants, des lors si t_1, t_2, t_3, t_4 désignent quatre instants successifs quelconques avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq T$: $X(t_4) - X(t_3)$ est indépendant de $X(t_2) - X(t_1)$.

⁹⁶En mathématiques, un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passé. Les processus de Markov portent le nom de leur inventeur, Andreï Markov.

Un processus de Markov en temps discret est une séquence $X_1, X_2, X_3, \dots$ de variables aléatoires. L'ensemble de leurs valeurs possibles est appelé l'espace d'états, la valeur X_n étant l'état du processus à l'instant n . Selon les auteurs, le vocable « chaîne de Markov » désigne les processus de Markov à temps discret ou uniquement les processus de Markov à temps discret et à espace d'états discret, i.e. les processus de Markov à temps discret dont l'espace d'états est fini ou dénombrable.

Plus généralement, l'accroissement du brownien sur une période (s, t) quelconque de tous les évènements survenus jusqu'à la date s comprise :

Considérons deux dates successives s et t quelconques :

Si l'on écrit : $X(t) - X(s) = (X(t) - X(0)) - (X(s) - X(0))$, on obtient :

$$E(X(t) - X(s)) = t - s$$

Si l'on écrit : $X(t) - X(0) = (X(t) - X(s)) + (X(s) - X(0))$, on obtient :

$$Var(X(t) - X(0)) = Var(X(t) - X(s)) + Var(X(s) - X(0)),$$

D'où :

$$Var(X(t) - X(s)) = s^2(t - s).$$

On peut aussi écrire (avec $s < t$) :

$$Cov(X(s), X(t)) = Cov(X(s), X(s) + (X(t) - X(s))) = Var(X(s)) = s^2(s).$$

Par ailleurs, les accroissements $X(t) - X(s)$ ne dépendent pas des évènements antérieurs à s, le processus est Markovien. En outre X est stationnaire puisque les deux premiers moments de $X(t) - X(s)$ ne dépendent que de $t - s$.

Dés lors si on considère deux instants t et $t + \Delta t$, $X(t + \Delta t) - X(t)$ est distribué selon une loi $N(\mu t, \sigma^2 t)$ et on peut écrire : $X(t + \Delta t) - X(t) \equiv \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} U(t)$, où $U(t)$ représente une gaussienne standard.

Les propriétés du mouvement brownien sont résumées comme suit :

- Les accroissements d'un mouvement brownien ont une espérance et une variance proportionnelles à la durée de l'intervalle sur lequel ils sont calculés : $X(t) - X(s)$ est donc distribué selon une loi $N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$. Deux accroissements calculés sur des périodes de même durée sont donc identiquement distribués.

$$\text{Pour } s < t : Cov(X(s), X(t)) = s^2 s.$$

- Les trajectoires du mouvement brownien sont continues
- Le mouvement brownien est markovien et stationnaire

Parmi les mouvements browniens arithmétiques, on distingue ceux dont les accroissements sont d'espérance nulle ($\mu = 0$) et dont la variance par unité de temps est égale à un ($\sigma^2 = 1$).

▪ Définition du mouvement brownien standard (ou processus de Wiener) :

Un mouvement brownien arithmétique dont les accroissements ont une espérance nulle et une variance par unité de temps s'appelle un mouvement brownien standard, ou processus de Wiener (du nom du mathématicien qui, le premier en a étudié les propriétés) ; il sera noté dans la suite $W(t)$.

On en tire les propriétés suivantes :

- Le processus de Wiener est distribué selon une loi $N(0,t)$:
- Son accroissement entre t et $t+\Delta t$, $\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$, est $N(0, \Delta t)$;
- L'espérance conditionnelle $E(W(t) | W(s)) = W(s)$ on dit que W est une martingale⁹⁷.

En matière de mouvement brownien, le brownien standard joue un rôle analogue à celui de la variable normale centrée et réduite à l'égard des variables normales d'espérance et de variance quelconques. En particulier il est possible d'exprimer un mouvement brownien arithmétique $X(t)$ de paramètres μ et σ en fonction d'un processus de Wiener. Il suffit de vérifier que : $W(t) = \frac{X(t) - \mu t}{\sigma}$ est processus de Wiener qui confère son caractère gaussien aussi bien que l'indépendance de ses accroissements et, par construction sa moyenne est nulle et sa variance égale à $\text{Var}(X(t)/\sigma^2 = 1)$.

On écrit alors : $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$

En termes d'accroissements, cette dernière relation implique :

$$dX = \mu dt + \sigma dW$$

Puisque $dW = W(t + dt) - W(t)$ est $N(0, dt)$,

cet accroissement s'exprime en fonction d'une variable normale standard U :

$$dW = \sqrt{dt} U$$

Nous avons déjà indiqué que les trajectoires du mouvement brownien sont continues en tout point. Situons nous en un point quelconque $(t, W(t))$ d'une trajectoire quelconque d'un processus de Wiener et considérons l'accroissement Δw aléatoire à venir dans la période $(t, t+\Delta t)$.

$\text{Var}(dW) = E[(dW)^2] = \sigma^2 dt$ tend vers 0 quand dt tend vers 0 ce qui montre que la trajectoire est continue au sens de la norme quadratique.

Elle est aussi continue au sens où : pour tout $\varepsilon > 0$ $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Prob}(|dW| > \varepsilon) = 0$, puisque dW est normale centrée sur 0 et que sa variance tend vers 0 quand dt tend vers 0, ceci annule toute propriété de saut. En outre la propriété de continuité quand vient de montrer dans le cas d'un processus de Wiener W , est vérifiée également pour un processus non standard X .

Les processus $X(t)$ et $W(t)$ sont définis en temps continu, ce qui permet décrire l'équation sur un intervalle infinitésimal $(t, t + dt)$ sous la forme différentielle :

⁹⁷Une martingale est une technique donnant l'illusion d'augmenter les chances de gain aux jeux de hasard tout en respectant les règles de jeu. Le principe dépend complètement du type de jeu qui en est la cible et, dans de nombreux cas, les règles visent à empêcher la possibilité d'une martingale. Néanmoins, le terme est accompagné d'une aura de mystère qui voudrait que certains joueurs connaissent des techniques secrètes pour *tricher* avec le hasard et, par exemple, battre la banque dans les casinos. Pour ce faire, une martingale doit changer l'espérance mathématique qui est telle que, sur le long terme, les chances de gagner sont inférieures à celles de perdre.

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW$$

$$\mu dt \text{ non aléatoire} = E(dX)$$

$$\sigma dW \text{ aléa gaussien centre de var} = \sigma^2 dt$$

(dW est normale d'espérance nulle et de variance égale à dt).

La relation est une équation différentielle stochastique. Elle exprime le fait que la variation dX comprend une composante déterministe μdt égale à son espérance mathématique et une composante stochastique σdW d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 dt$: μ est appelé le terme de dérive ou de tendance, σ le paramètre de diffusion et σ^2 la variance instantanée.

Cette équation a pour forme intégrale.

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW(s) = \mu t + \sigma W(t)$$

L'EDS est la généralisation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) sans terme stochastique.

c La représentation de l'évolution des prix à l'aide d'un mouvement brownien géométrique :

Le modèle log-normal le plus simple est en temps discret que les variations $\Delta \ln S$ des logarithmes des prix sont indépendantes et identiquement distribuées quant les accroissements sont calculés sur des intervalles disjoints de même durée. En supposant finies l'espérance μ et la variance σ^2 des accroissements sur une unité de temps, et en écrivant $\ln S(t) - \ln S(0)$ comme une somme d'accroissement indépendants :

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \sum_{i=1}^t (\ln S(s) - \ln S(s-1))$$

$$\text{Il vient : } E[\ln S(t) - \ln S(0)] = \sum_{i=1}^t \mu = \mu t, \text{ Var}[\ln S(t) - \ln S(0)] = \sum_{i=1}^t \sigma^2 = \sigma^2 t$$

L'espérance et la variance des logarithmes des prix augmentent donc linéairement avec le temps. On peut également conclure que $\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t)$ est distribuée selon $N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ et par conséquent écrire : $\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) \equiv d \ln S = \mu \Delta t + \sigma dW$.

Avec dW distribué selon $N(0, \Delta t)$.

En temps continu, la relation précédente est l'équation différentielle stochastique régissant dans l'intervalle $(t, t+dt)$, le mouvement brownien arithmétique de $\ln S(t)$:

$$d \ln S(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Où μ et σ sont deux constantes et $W(t)$ est un mouvement brownien standard ou processus de Wiener.

On rappelle succinctement que :

i. la solution de cette EDS est : $\ln S(t) = \ln S(0) + mt + \sigma W(t)$ soit $S(t) = S(0)e^{mt + \sigma W(t)}$

ii. en appliquant le lemme d'Ito à $\ln S$, il vient : $\frac{dS}{S} = \left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$

ou encore en posant $m = m + 0,5\sigma^2$:

$$\frac{dS}{S} = m dt + \sigma dW(t) \Leftrightarrow S(t) = S(0)e^{(m - 0,5\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

iii/ les équations précédentes sont celles d'un mouvement brownien géométrique de caractéristiques suivantes :

$S(t)$ est lognormal ; les accroissements $\Delta \ln S$ sont indépendants et identiquement distribués selon une loi $N\left((m - 0,5\sigma^2)Dt, \sigma^2 Dt\right)$.

2 Modélisation des cours par des processus de Lévy

a Processus de Levy

Mandelbrot dans ses travaux a montré que les rendements des actifs financiers à un jour ou une semaine ne sont clairement pas statistiquement gaussiens, en particulier que la probabilité de grands mouvements de ces rendements est plus grande que celle que le monde gaussien quantifie. En fait, la loi des variations des cours boursiers se rapproche plutôt des distributions dites de Lévy α -stables qui allie une forte densité de probabilité autour de zéro à la prise en compte des valeurs extrêmes, les queues de distribution très étirées.

■ Définition

Un processus en temps continu $X(t)$, $t > 0$ est un processus de Levy si ses incréments sont stationnaires et indépendantes.

Autrement dit, si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Levy, les accroissements $X(t_i) - X(s_i)$ sur des intervalles disjoints (s_i, t_i) sont des variables aléatoires indépendantes et leur loi ne dépend que de $t_i - s_i$.

Malgré cette simplicité apparente, les processus de Levy ont de nombreuses propriétés intéressantes et constituent un domaine d'étude en plein développement. Nous étudions plus en détail le mouvement de Levy α -stable dans le chapitre suivant.

b Modèle exponentielle-Levy

On obtient le modèle exponentielle-Levy de cours des actifs financiers en remplaçant dans le modèle de Samuelson le mouvement brownien par un processus de Levy.

Mandelbrot a proposé un modèle pour les prix du coton selon un processus α -stable à variance infinie. Ce modèle a été fort critiqué à cause de la non-existence des moments du second ordre du processus.

3 Modèles de type ARCH

a Modèle ARCH

Dans ce paragraphe nous considérons les modèles à temps discret.

Dans les années 70 s'est développée la classe des modèles ARMA, (AutoRegressiveMovingAverage). Ces modèles sont dits linéaires car sont fondés sur la représentation de la valeur présente de la série temporelle comme fonction linéaire des valeurs passées et de la valeur présente d'un certain bruit blanc.

Les modèles ARCH (AutoRegressiveConditionalHeteroskedasticity) ont été introduits par Engle en 1982. Dans ces modèles, ce sont les seconds moments conditionnels qui varient en fonction du temps suivant un certain modèle de régression. Cela correspond au fait que l'on s'est rendu compte que les moments du second ordre de séries temporelles issues des marchés spéculatifs dépendent du temps, et les chercheurs en finance ont donc commencé à modéliser cette dépendance.

Puisque la variance conditionnelle d'un processus du type ARCH varie dans le temps, ces processus sont appelés conditionnellement hétéroscédastiques. Néanmoins, inconditionnellement, ces processus sont homoscedastiques. En d'autres termes, la variance non conditionnelle est identique à chaque instant du processus.

Dans la définition qui suit, nous supposons que la variance conditionnelle $\sigma[t]$ du processus $\{r[t]\}_t$ peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ que nous supposons muni d'une probabilité P et d'une filtration F_t . Typiquement, cet ensemble d'information contient tous les éléments indexés par -1 et par les périodes précédentes.

L'absence de corrélation des rendements logarithmiques et la présence de structures de dépendance non linéaires conduisent naturellement à une classe de modèles où les rendements logarithmiques $\{r[t]\}_t$ s'écrivent comme le produit de deux variables aléatoires $r[t] = \sigma[t] \varepsilon[t]$

Le processus $\{\varepsilon[t]\}_t$ est un bruit blanc, non obligatoirement gaussien, qui assure la décorrélation des rendements :

$$E[\varepsilon(t)] = 0 \quad Var[\varepsilon(t)] = 1$$

Le processus de la variance conditionnelle $\{\sigma[t]\}_t$, indépendant de $\{\varepsilon[t]\}_t$, contrôle la volatilité et, à travers lui, toute la complexité de la structure de dépendance. Le processus des rendements $\{r[t]\}_t$ est univarié dans la plupart des applications financières.

▪ Définition:

Le modèle linéaire ARCH(q), introduit par Engle, suppose la paramétrisation suivante pour $\sigma^2[t]$:

$$\sigma^2[t] = E[r^2[t] | F_t] = w + a_k r^2[t-1]$$

La version la plus simple est le processus ARCH(1)

$$\sigma^2[t] = E[r^2[t] | F_t] = w + a_1 r^2[t-1]$$

Il est simple de déduire la condition sur les paramètres ω et α_1 pour qu'un modèle ARCH(1) soit stationnaire.

■ Proposition:

Si $\alpha_1 < 1$ alors le processus ARCH(1) est asymptotiquement stationnaire.

Par conséquent, la limite σ^2 de la variance non conditionnelle $\text{Varr}[t]$ lorsque t tend vers l'infini dépend des paramètres du processus ARCH(1) et, en général, elle est différente de la variance conditionnelle $\sigma^2[t]$.

Le moment du quatrième ordre est donné par:

$$\lim E\left(r(t)^4\right) = \frac{3\omega_2(1+\alpha_1)}{\left((1-3\alpha_1)(1-\alpha_1)\right)}$$

La condition d'existence de ce moment est $3\alpha_1 < 1$. On en déduit l'expression de la kurtosis :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Kurt}(r(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\left(r(t)^4\right)}{E\left(r(t)^2\right)^2} > 3$$

Elle est toujours supérieure à celle de la loi normale. Les queues de la distribution d'un processus ARCH(1) sont donc plus épaisses que pour un processus gaussien.

b Modèle GARCH

Le modèle ARCH a, parfois du mal à se calibrer sur les données réelles et le nombre de paramètres α_j nécessaires est souvent trop important. Plusieurs variantes du modèle ARCH ont été proposées. Une variante particulièrement populaire est le modèle ARCH généralisée, ou GARCH (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity), suggéré par Bollerslev et Taylor indépendamment.

■ Définition:

Le modèle GARCH (p,q) peut s'écrire :

$$\sigma^2[t] = E\left[r^2[t] | F_t\right] = \omega + \sum_{k=1}^q \alpha_k r^2[t-k]$$

Dans le modèle GARCH, la variance conditionnelle $\sigma^2[t]$ dépend aussi bien de ses propres valeurs passées que des valeurs retardées de $r^2[t]$. Cela signifie que $\sigma^2[t]$ dépend effectivement de toutes les valeurs passées de $r^2[t]$.

En particulier, un modèle simple ou vent utilisé est le modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma^2[t] = E\left[r^2[t] | F_t\right] = \omega + \alpha_1 r^2[t-1] + \beta_1 \sigma^2[t-1]$$

En pratique, nous pouvons éliminer les termes de variance conditionnelle dans la partie droite de l'expression, par une procédure récursive, pour pouvoir estimer les paramètres du modèle GARCH(1,1). Le problème ressemble essentiellement à l'estimation d'un modèle à moyenne mobile ou d'un modèle ARMA avec une composante moyenne mobile. Le modèle GARCH(1,1) peut être représentée récursivement, comme le modèle ARCH(∞), de la même

manière qu'un processus AR(1) peut être vu comme un MA(∞), pour donner :

$$s^2[t] = \frac{w}{1 - b_1} + a \sum_{k=0}^{\infty} b_1^k r^2[t - 1 - k]$$

c Modèle HARCH

Le modèle HARCH(n) peut s'écrire

$$s^2(t) = g_0 + \sum_{j=1}^n g_j \left(\sum_{k=1}^j r(t - k) \right)^2$$

où $g_0 > 0$, $g_n > 0$ et $g_j \leq 0$ pour tout $j=1, \dots, n-1$.

On fait donc intervenir le carré des rendements sur des intervalles de longueurs différentes. Ce qui différencie ce modèle des modèles ARCH et GARCH.

Les auteurs étudient les conditions sous les quelles ce processus est stationnaire et admet des moments finis. Notons que ce modèle peut rendre compte de l'hypothèse d'hétérogénéité des marchés, décrite dans la section suivante.

II. Les hypothèses de la finance classique :

1 La propriété d'indéfinie divisibilité

Cette représentation i.i.d. contient une propriété fondamentale pour l'analyse et la modélisation des fluctuations boursières à toutes les échelles d'observation des marchés : les lois de probabilité calibrant la dispersion des variations boursières à une échelle donnée (quotidienne, hebdomadaire, mensuelle etc.) sont indéfiniment divisibles. Cela signifie que la connaissance de l'une seule de ces lois, sur une échelle de base (par exemple les variations quotidiennes), suffit à connaître les lois de probabilités de toutes les autres échelles (variations hebdomadaires etc.).

Ainsi, si f_1 est la fonction de densité de la loi de probabilité de base (par exemple celle des variations boursières quotidiennes), et que l'on cherche la fonction de densité f_n de la loi de probabilité des variations boursières sur n jours (par exemple : $n = 5$ jours ouvrés pour une semaine boursière), alors la propriété d'indéfinie divisibilité assure que :

$$f_n = \underbrace{f_1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_1}_{n \text{ fois}} = f_1^{\otimes n}$$

Où $\otimes$ est l'opérateur de convolution. Ainsi, par cette propriété, il suffit de convoluer la loi quotidienne n fois avec elle-même pour obtenir la loi dilatée des variations boursières sur n jours. Les processus de Lévy ont ceci de particulier qu'ils peuvent être caractérisés par la seule connaissance de la loi de base : les distributions de Lévy sont indéfiniment divisibles.

Une autre manière, plus intuitive, d'appréhender cette propriété fondamentale pour la modélisation financière, est de considérer que, pour tout processus de Lévy ($X_t, t \geq 0$), on peut décomposer la différence $X_1 - X_0$ (valeurs en dates $t = 1$ et $t = 0$) en la somme suivante :

$$X_1 - X_0 = \left(X_1 - X_{\frac{n-1}{n}}\right) + \left(X_{\frac{n-1}{n}} - X_{\frac{n-2}{n}}\right) + \cdots + \left(X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}\right) + \left(X_{\frac{1}{n}} - X_0\right)$$

où les accroissements $X_{k/n} - X_{(k-1)/n}$ sont des variables aléatoires i.i.d. : si l'on imagine la différence $X_1 - X_0$ comme un écart de cours de bourse, cela revient à dire que toute variation de cours peut se décomposer en somme de variations secondaires i.i.d. (dans l'exemple précédent, on décomposait ainsi une variation hebdomadaire en somme de variations quotidiennes i.i.d., avec $n = 5$). Le choix d'un processus de Lévy pour la modélisation financière permet donc de considérer toute variation de cours comme résultant de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, souvent considérées comme des chocs d'information venant percuter les marchés boursiers. On voit donc poindre ici les théorèmes limites de la somme de variables aléatoires, très importants pour la finance moderne.

Cette propriété est enfin extrêmement commode pour les calculs pratiques entrepris sur les marchés, cette commodité a représenté l'un des principaux attraits des processus de Lévy au cours du vingtième siècle, amenant les chercheurs à les préférer à d'autres formes de modélisations, où la propriété i.i.d. n'était pas vérifiée.

2 Stationnarité et ergodicité

Nous soulignons que la plupart des études statistiques de séries chronologiques sont basées sur les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. En termes simples, le problème est de savoir si les propriétés probabilistes des séries financières que nous étudions restent stables dans le temps et si chaque réalisation contient toute l'information statistique. Si ce n'est pas le cas, il est clair que les estimations statistiques par des moyennes temporelles ne peuvent pas être réellement utilisées.

Un processus stochastique $\{X(t)\}$ stationnaire est dit strictement ergodique si tous les moments généralisés empiriques calculés sur une réalisation convergent vers les moments théoriques, ainsi pour tout nombre entier et tous décalages $h_1, \dots, h_n$, nous avons les notions de stationnarité et d'ergodicité au sens stricts contrairement nécessaires en pratique, il suffit généralement à requérir la stationnarité et l'ergodicité au sens faible du processus étudié.

Nous admettons les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité, alors que la taille des séries financières est parfois trop petite pour pouvoir assurer une convergence des moments empiriques. Notons que, la consistance des résultats de prédiction des risques, qui sont présentés dans le chapitre 7, justifiera a posteriori l'hypothèse de stationnarité. En conséquence nous pouvons raisonnablement faire des statistiques par des moyennes temporelles sur nos données financières.

3 Continuité

Le mouvement brownien, bien que présentant visuellement des trajectoires qui chutent ou montent parfois rapidement sur de courtes plages de temps, est toujours continu.

Quiconque a déjà examiné de près une trajectoire boursière concrète, ne peut qu'être convaincu du caractère fondamentalement discontinue toute trajectoire de cours. À

chaque cotation, il se produit un saut, passage d'une valeur à une autre, et cette discontinuité décrit la nature fondamentale des prix : une invention, un mécanisme, introduits dans le but de permettre précisément la discontinuité.

Si on allonge la période d'analyse du cours, le phénomène reste présent: les discontinuités ne disparaissent pas. En fait, l'image qu'offre une trajectoire boursière est celle d'une discontinuité présente à tous les instants⁹⁸.

Les cotations surviennent à des moments imprévisibles et ces moments suivent une horloge qui n'est pas celle du temps physique. La variation d'un cours peut être concentrée dans un temps très court, ou au contraire s'étaler sur un temps très long. La durée entre deux cotations peut ainsi être très brève ou au contraire très longue. Les cotations sont désynchronisées par rapport au temps calendaire, et le temps du marché ne semble pas suivre le temps usuel. Le temps qui sépare deux cotations est défini par le rythme des échanges de titres qui vident les carnets d'ordre. Il s'agit d'un « temps des événements » par opposition au temps de l'horloge physique qui serait un « temps sans événement ». Comme ce temps des échanges est défini dans l'espace social du marché, on peut dire qu'il s'agit d'un temps social qui serait ici un temps boursier, qui n'est pas sans rappeler la notion du « temps des marchands » de l'histoire médiévale. L'horloge qui compte ce temps étant réglée par l'arrivée imprévisible des ordres d'achat et de vente, c'est donc une horloge aléatoire⁹⁹. Comme ce temps social de l'échange est un temps intrinsèque au marché, on peut dire que les marchés créent leur propre temps.

Entre autres deux phénomènes caractérisent donc fondamentalement la nature des variations boursières : des discontinuités permanentes, une désynchronisation du temps physique.

4 L'hypothèse gaussienne

La première modélisation des cours boursiers par un mouvement brownien, décrite précédemment, repose sur l'hypothèse que les rendements suivent une normale. Cette modélisation est encore aujourd'hui au cœur de la théorie financière.

Du point de vue des distributions marginales, les accroissements du mouvement brownien sont distribués selon la loi normale. Cet aspect, normalité, est donc confondu dans le mouvement brownien, et les tests statistiques de marche au hasard, utilisés dans les années cinquante à soixante-dix, entretiennent cette confusion entre marche au hasard et distribution normale.

L'hypothèse de normalité est très forte. Elle signifie concrètement que les aléas autour de la moyenne se comportent comme ceux d'une pièce de monnaie qui tombe avec une probabilité d'1/2 du côté pile et du côté face. Quand on jette la pièce de monnaie cent fois de

⁹⁸MANDELBROT Benoît, 1997. *Fractales, hasard et finance*. Paris, Flammarion.

suite, il est extrêmement improbable qu'elle tombe 100 fois sur pile. On peut d'ailleurs calculer très précisément cette probabilité. Elle suit une loi de Gauss, avec un très grand nombre d'écarts très faibles et un très petit nombre d'écarts élevés.

On ne peut pas prévoir le cours, les prix peuvent monter ou descendre avec la même probabilité, comme lorsque l'on joue à pile ou face avec une pièce de monnaie.

Les cours suivent ainsi une « marche aléatoire », selon les termes forgés par les successeurs de Bachelier. Cette idée est essentielle : le cours d'aujourd'hui ne dépend pas de celui d'hier, ni des précédents, il n'y a pas de dépendance temporelle.

Lorsqu'on lance une pièce, la probabilité qu'elle tombe sur pile ou face est de 50-50, et si l'on tombe trois fois de suite sur le côté pile, cela ne va pas augmenter la probabilité, au lancer suivant, de sortir un autre côté pile : on a à chaque fois une chance sur deux. Les lancements sont parfaitement indépendants les uns des autres.

Considérons le jeu consistant à effectuer 100 lancers et à créditer son compte d'un dirham lorsque la pièce tombe sur face et à le diminuer d'un dirham pour chaque pile. Répétons cette partie plusieurs fois, en remettant son compte à zéro avant de recommencer.

Avec ce jeu, certes long et routinier, on obtiendra la plupart du temps une cagnotte vide (la moyenne de ce jeu est zéro, du fait que la probabilité de tomber sur pile ou face est équiprobable).

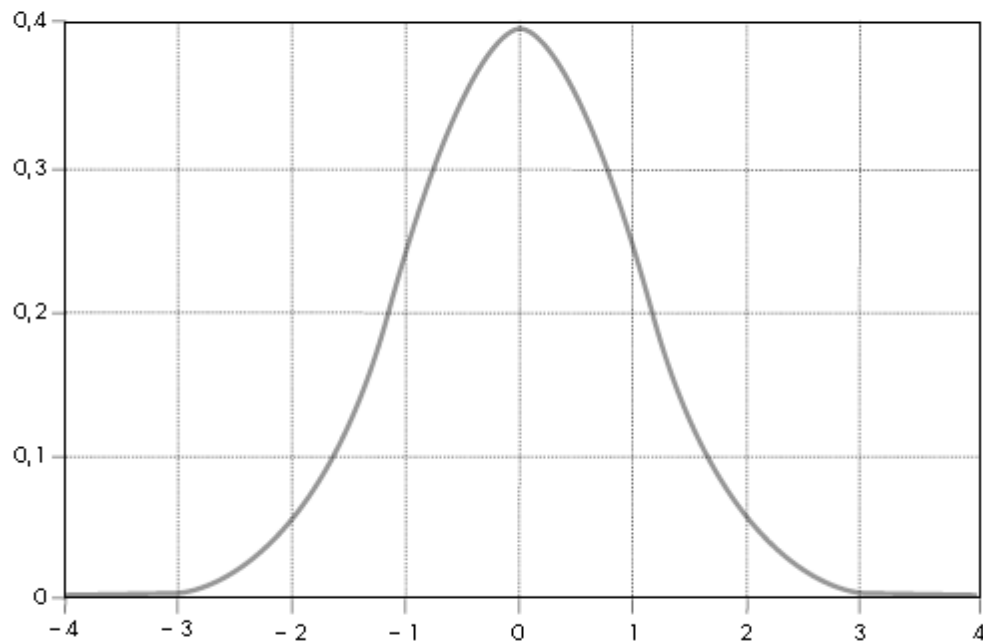
On obtiendra à plusieurs reprises une cagnotte se situant juste à proximité de cette moyenne (+ 1 dirham, - 1 dirham), mais on aura parfois des gains, ou des déficits, de 5, 7, 9 dirhams, ce qui sera plus rare au fur et à mesure que ce chiffre augmente...

En reportant les cagnottes sur un graphique (en faisant un histogramme: le nombre de cagnottes à zéro – le cas le plus fréquent – le nombre de cagnottes à 1, - 1, 2, - 2, etc.) on obtient une courbe en forme de cloche : la plupart des cagnottes se situent autour de zéro et quelques gains ou pertes exceptionnels se trouvent sur les côtés. C'est la « courbe de Gauss », découverte par Carl Friedrich Gauss, autrement appelée « loi normale », ou parfois « courbe en cloche ».

Nous sommes ici en présence d'une loi fondamentale que l'on retrouve dans nombre de disciplines, partout où les probabilités sont utilisées comme la physique, la biologie, la sociologie, et la finance précisément.

Voici la formule de la courbe de Gauss ou loi normale et son graphique (de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



La loi normale

Figure 4 : loi normale

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne : 68,2 % des valeurs sont comprises entre plus ou moins 1 écart-type (– 1 et + 1 sur le graphique), 95,4 % entre plus ou moins 2 écarts-types, 99,6 % entre plus ou moins 3 écarts-types, etc.

Pour revenir à notre jeu des 100 lancers de pièce, on constate que la plupart des cagnottes se situent autour de la moyenne, c'est-à-dire zéro, et que l'on a très peu de chance d'obtenir une cagnotte de 7 ou dirhams, ou d'en perdre du même montant : les valeurs sont très « resserrées » autour de la moyenne.

Il faut bien comprendre – et ce sera déterminant pour la suite – que la courbe de Gauss s'applique à des variables dites « i.i.d. », indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire :

- ✓ Indépendantes : les valeurs sont indépendantes les unes des autres, sortir 3 côtés piles à la suite ne va pas augmenter la probabilité de tomber de nouveau sur le côté pile au quatrième lancer ;
- ✓ Identiquement distribuées : les valeurs obtenues résultent toutes de la même loi de probabilité, ici du lancer d'une pièce avec une probabilité identique de tomber sur pile ou face.

De là, on déduit le « théorème central limite », une autre notion statistique : toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne (c'est-à-dire correspondant à la courbe de Gauss). Formulé autrement, on peut dire que tous les phénomènes résultant de l'addition de petites causes fortuites et indépendantes les unes des autres seront du type gaussien.

5 Hypothèse 2_stable

Le mouvement brownien est 2-stable par addition, ce qui se traduit par une loi d'échelle sur les rentabilités et sur les volatilités. En notant λ l'échelle de base (ou échelle de résolution) de l'analyse des variations boursières (par exemple, pour les variations quotidiennes, $\lambda = 1$ jour ; pour les variations hebdomadaires, $\lambda = 1$ semaine ; pour les variations mensuelles, $\lambda = 1$ mois, etc.), et $\sigma(\lambda)$ la volatilité des marchés correspondant à cette échelle d'analyse préalablement choisie, la propriété de 2-stabilité du mouvement brownien exprime que $S(nt) = n^{1/2} S(t)$, où n représente le multiple de l'échelle de base (par exemple, si $\lambda = 1$ jour et que $n = 5$, cela revient à passer d'une échelle de résolution quotidienne à une échelle de résolution hebdomadaire, puisque 1 semaine = 5 jours ouvrés).

Le fait que la volatilité et la densité puissent se dilater ou se contracter en racine carrée du temps, et donc qu'il soit possible de passer facilement d'une analyse boursière à une échelle d'observation donnée, à une analyse à une autre échelle, indique que le choix de l'échelle d'observation du marché est sans importance pour la description de sa dynamique : quelle que soit l'échelle d'analyse du marché. Peu importe, donc, que l'on observe les marchés boursiers en relevant un cours coté tous les jours, toutes les semaines, tous les mois etc.

Il s'agit d'une propriété fractale du mouvement brownien massivement employée par les professionnels, puisque les calculs de volatilité annualisée (en %/an) dont on trouve les résultats dans toute page financière de la presse quotidienne, ne sont que des conversions en racine carrée du temps, des calculs de volatilité périodique (en %/mois ou %/semaine) utilisée comme base d'estimation. Dans ce cas également, on peut s'interroger sur la pertinence de cette hypothèse, et se demander si cette invariance par changement d'échelle du mouvement brownien est adaptée aux marchés réels dans lesquels opèrent des acteurs à horizon de temps différents (arbitragistes, gérants de portefeuilles, assureurs etc.).

6 Autocorrélation des rendements logarithmiques

Il est naturel de s'intéresser à la fonction d'autocorrélation de la série des rendements logarithmiques :

$$\gamma(h) = \text{Corr} \delta_\tau X(t), \delta_\tau X(t+h)$$

La structure institutionnelle du marché, dite microstructure, notamment les principes d'organisation du marché, tels que l'existence des ticks, les modes de cotation, de transmission et d'exécution des ordres, peut avoir un impact sur les propriétés statistiques des actifs financiers.

Néanmoins, les études de la fonction d'autocorrélation sur les données à haute fréquence, montrent qu'elle décroît exponentiellement vite avec le temps et peut être considérée comme nulle dès que h est supérieur à 5 minutes, temps au-delà duquel les effets de microstructure deviennent négligeables.

La justification la plus fréquente de cette absence de corrélation invoque le principe d'absence d'arbitrage des marchés liquides. Si de telles corrélations, faciles à détecter, existaient, il serait étonnant de concevoir une stratégie d'arbitrage qui en

moyenne lui permettrait de gagner de l'argent. Or la mise en œuvre de ces stratégies devrait éliminer mécaniquement ces corrélations, au moins pour des temps supérieurs au temps de réaction du marché, qui typiquement est de l'ordre de quelques minutes, pour revenir à l'équilibre. Néanmoins, ce type d'arguments mérite un examen statistique plus approfondi car des subtilités existent.

7 Hypothèse de l'hétérogénéité des marchés

Selon l'hypothèse de l'hétérogénéité des marchés, il y a une grande hétérogénéité des traders sur les marchés financiers. Ces traders peuvent se différencier par leurs perceptions du marché, leurs profils de risque, leurs ensembles informationnels, leurs croyances, leurs contraintes institutionnelles, et autres. Ces différences entre les acteurs des marchés se répercutent sur leur sensibilité aux différents horizons temporels. Par conséquent, les acteurs des marchés forment des catégories qui se traduisent par leurs horizons temporels et leurs fréquences de trading caractéristiques. En effet, Les spéculateurs intra-journaliers et les market-makers échangent les titres à haute fréquence alors que les fonds de pensions et les banques centrales font des échanges de titres à basse fréquence.

Les traders de court terme observant le marché de façon continue afin de réévaluer leurs positions et exécutent leurs transactions à haute fréquence. Les traders de long terme n'observent le marché qu'une fois par jour ou moins fréquemment. Ainsi une hausse du rendement d'un actif de 0.5% suivie d'une baisse de même amplitude est un événement majeur pour un spéculateur intra-journalier mais constitue un non-événement pour un manager d'un fonds de pension. Les traders de long-terme ne sont intéressés que par les mouvements de prix de grande amplitude, ce qui ne survient qu'au cours d'intervalles temporels suffisamment larges. Autrement dit, les traders de long terme évaluent les prix du marché et leurs volatilités selon une grille temporelle grossière alors que les traders de court terme l'évaluent selon une grille temporelle

Les fréquences de trading différentes se traduisent par des réactions différentes aux mêmes informations au sein du même marché. La structure hétérogène des horizons temporels des différents acteurs du marché qui consiste en des composantes de court, moyen et long terme. Chaque composante a son propre temps de réaction à l'information spécifique à son horizon temporel et sa fréquence de trading caractéristiques.

Le tableau suivants résume les faits stylisés présents dans un chaque modèle.

Modèles	Faits stylisés
Les modèles de Bachelier et de Samuelson	Les modèles de Bachelier et de Samuelson permettent de reproduire l'absence de corrélation temporelle des rendements logarithmiques mais ils ne permettent pas de reproduire les queues épaisses et la déformation de la distribution des rendements logarithmiques en fonction de l'échelle.
Le modèle exponentielle-Lévy	Le modèle exponentielle-Lévy permet de reproduire l'absence de corrélation temporelle et les queues épaisses de la distribution des rendements logarithmiques, mais il ne permet pas de reproduire la déformation de la distribution des rendements logarithmiques en fonction de l'échelle.
Les modèles ARCH, GARCH et HARCH	Les modèles ARCH, GARCH et HARCH ont joué (et jouent encore) un rôle important dans la modélisation des séries financières. Ces modèles peuvent reproduire l'absence de corrélation temporelle. Cependant, les processus de type ARCH sont mal adaptés à la modélisation de longues séries. En particulier, ils ne permettent de reproduire que partiellement la longue dépendance observée dans les séries financières. En effet, ils présentent des corrélations à courte portée, qui décroissent exponentiellement avec le temps. Par ailleurs, sur de courtes périodes les paramètres du modèle GARCH semblent être sensiblement plus faibles. De même, les modèles de type ARCH ne rendent pas compte des comportements des queues de distribution en fonction de l'échelle.

8 Modélisation classique : conséquences professionnelles

Par malchance pour les professionnels qui utilisaient des moteurs browniens, les marchés réels, ne sont pas browniens. De fait, tous les calculs fondés sur le mouvement brownien ont tragiquement sous-évalué les risques financiers. Ainsi par exemple des notes Moody's : ces notes reposaient sur des modélisations des années 1970 dans lesquelles l'hypothèse de continuité brownienne était indispensable. À titre d'exemple, en 2006 sur les données Moody's¹⁰⁰ les risques de défaut des crédits hypothécaires titrisés en utilisant des processus non browniens¹⁰¹: on trouve un écart de 1 à 5 avec les notes Moody's. Autrement

¹⁰⁰**Moody's** (NYSE : **MCO**), officiellement Moody's Corporation, est le holding de Moody's Analytics, un fournisseur de solutions de gestion des risques, et Moody's Investors Service, société active dans l'analyse financière d'entreprises commerciales ou d'organes gouvernementaux. Moody's est également connue pour ses notations financières standardisées des grandes entreprises en fonctions du risque et de la valeur de l'investissement. Elle a 40 % de parts de marché dans le domaine de l'estimation de crédit au niveau mondial. Ses principaux concurrents sont Standard & Poor's (S&P), Fitch Ratings et Dagong.

¹⁰¹LE COURTOIS Olivier, QUITTARD-PINON François (2006). Risk-neutral and actual default probabilities with an endogenous bankruptcy jump-diffusion model. Asia Pacific Financial Markets, 13 (1).

dit, l'hypothèse de continuité brownienne a eu pour effet de sous-estimer les risques réels d'un facteur 5.

De la même manière, les calculs de besoins en fonds propres qui ont utilisé cette hypothèse ont sous-estimé les réserves nécessaires à mettre en place en fonction des risques pris.

L'hypothèse brownienne a ainsi conduit à la formation de croyances fausses sur le comportement des instruments financiers et la nature des risques de marché.

Pour utiliser une métaphore, on pourrait comparer la diffusion de la croyance brownienne à la propagation d'un virus dans des populations non protégées : le virus brownien a ainsi contaminé sur des étendues de plus en plus grandes les professionnels et les régulateurs, jusqu'à la pandémie dont le déclenchement fut la crise des crédits hypothécaires.

Le virus prit une extension nouvelle dans les années 1970. D'une part, sur le champ théorique, le développement de la théorie des options construite par Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton en 1973 nécessitait impérativement la présence de trajectoires browniennes pour l'évaluation puis l'annulation du risque des instruments dérivés. D'autre part, dans les pratiques professionnelles, les années 1970 sont les années de diffusion massive du virus dans les fonctionnements concrets des établissements financiers et bancaires. Ainsi, en 1971, à partir des conceptions de Markowitz et Sharpe, renforcées par les résultats des mesures de performance de Treynor et Jensen qui font apparaître l'absence de valeur ajoutée des gestions actives de portefeuilles, la société Wells Fargo conçoit et vend le premier fond indicel de l'histoire de la gestion d'actifs, indexé sur le NYSE. Mais surtout l'Employee Retirement Income Security Act de 1974 (ERISA) installe dans les réglementations professionnelles pour la gestion des fonds de pension une manière de gérer l'épargne longue qui fait entrer le CAPM dans l'organisation concrète des établissements financiers. La décomposition conceptuelle entre allocation stratégique, allocation tactique et choix de titres, relayée par les cabinets de consultants au moment des appels d'offres, devient la norme d'investissement des professionnels pour longtemps. Cette décomposition nécessite des trajectoires browniennes sans lesquelles il est impossible de justifier la convergence des performances à long terme vers celle du portefeuille appelé « stratégique ».

Les années 1980 sont celles de l'épidémie généralisée. Avec le développement des marchés dérivés et celui des gestions indicielles, le virus brownien touche à peu près tous les segments de l'industrie financière américaine. Il passe en Europe à ce moment, produisant les mêmes effets dans les organisations et pratiques professionnelles de la finance et des banques. C'est dans les années 1980 que l'on commence à mettre en place les calculs de besoins en fonds propres des banques au moyen d'indicateurs comme la VaR brownienne, par l'action du comité de Bâle qui a le même effet pour les banques que la législation Erisa pour les gestionnaires d'actifs. La représentation brownienne irrigue la totalité des systèmes de calculs, des méthodes de gestion et de contrôle, des établissements financiers et bancaires. Tel le sang contaminé par le virus du sida, le virus brownien coule dans les veines de l'industrie financière.

Le krach de 1987, malgré les faillites retentissantes qu'il provoque, par exemple en France celle de charges d'agents de change très connues, ne stoppe pas la propagation du virus. La lecture des commentaires des acteurs en faillite aurait pu inciter l'industrie financière à examiner les fondements de ses modèles : on lisait en effet au moment du krach que « les gestions des couvertures des risques par la technique du delta neutre n'avaient pas fonctionné ». De fait, la technique de gestion dite du « delta neutre » nécessite impérativement une trajectoire brownienne. Mais il n'en a pas été ainsi.

Au contraire, le virus a trouvé un nouveau champ d'extension en passant de la finance à la comptabilité. La mise en œuvre progressive des normes internationales IFRS qui contenaient la fameuse norme IAS 39 solidifiait dans les pratiques comptables l'idée d'une martingalisation des marchés, produisant pour la comptabilité le même effet que le comité de Bâle pour les banques et que la législation Erisa pour les fonds de pension. À la fin des années 1990, rien ne semble pouvoir arrêter la propagation de l'épidémie et c'est l'économie qui commence à être affectée par les effets du virus, avec la croissance sans limite de la financiarisation du monde (produits dérivés sur quantités issues du monde physique, comme le courant électrique, l'énergie, etc.). Au-delà des aspects délictueux dont on a beaucoup parlé, l'affaire Enron représente une illustration du passage du virus dans l'économie : lesdites idées nouvelles du charismatique Jeff Skilling, considéré comme un visionnaire à l'époque, qui avaient consisté à transformer Enron en une sorte de bourse de gaz naturel, s'appuyaient sur l'hypothèse que l'on pouvait transformer l'énergie en un instrument financier et gérer cet instrument financier avec les techniques des marchés dérivés mises au point par Black, Scholes et Merton. La faillite s'ensuivit en 2001.

Elle avait suivi la faillite du fonds LTCM, au conseil d'administration duquel on trouvait justement les fondateurs de la théorie des options : on sait que les investissements de LTCM étaient fondés sur l'application des théories de Merton et gérés selon les techniques nécessitant des trajectoires browniennes. Malgré ces fausses notes, discordantes dans le consensus généralisé de la finance américaine devenue mondiale, les années 2000 sont celles de l'extension apparemment sans limite de la financiarisation du monde, appuyée sur la marginalisation forcée des marchés et la représentation brownienne des risques. Les techniques de titrisation des crédits hypothécaires consolidées par les notations des agences qui utilisent massivement des modèles datant des années 1970 (comme les noyaux de calculs du modèle KMV de Moody's), en sous-évaluant les probabilités de défaut d'un facteur 5, achèvent de faire pénétrer le virus brownien dans la société.

Finalement, l'écroulement généralisé survient en 2007. Tout aura alors été contaminé par le virus brownien. Il s'agit donc à présent de décontaminer la finance pour pouvoir repartir sur des bases conceptuelles assainies.

Conclusion chapitre 5

Cette revue de littérature a été l'occasion d'une part, de nous familiariser avec les faits stylisés des séries financières et de leur volatilité et, d'autre part, de nous interroger sur les propriétés statistiques des séries financières.

D'un point de vue statistique les séries financières sont donc des objets complexes, qui possèdent nombre de propriétés aujourd'hui bien connues et résumées sous le nom de faits stylisés. Les rendements logarithmiques sont décorrélés, sans être pour autant indépendants. Leur volatilité exhibe en effet des dépendances à longue portée qui rendent non triviales les propriétés d'agrégation temporelle des rendements logarithmiques. En particulier, ils sont distribués selon une loi asymétrique avec des queues épaisses qui persiste sur une large échelle de temps. A l'interface de l'économie, des mathématiques se développent actuellement des recherches sur des modèles de marchés visant à reproduire les caractéristiques observées empiriquement, avec le but ultime de mieux maîtriser le comportement d'un marché financier. Les modélisations classiques ne rendent compte que partiellement des propriétés que nous venons de décrire. C'est pourquoi nous présentons une autre classe de processus qui permettrait de combler ces lacunes.

Chapitre 6 : le comportement réel des marchés financiers : caractéristiques et propositions économétriques

La construction d'une bonne image de la Bourse est essentielle pour les professions financières, mais aussi pour les économistes et plus généralement la compréhension des interactions entre économie et finance. En effet, l'image du marché est ce que les acteurs de la finance ont à l'esprit, lorsqu'ils prennent des positions, contrôlent les risques ou gèrent des portefeuilles.

Ceci car l'image d'un marché agit dans la perception du risque de fluctuations des cours, et la modélisation des variations boursières n'est que la traduction mathématisée de cette image du marché, en réalité une image de l'incertitude.

L'évolution des marchés financiers, le développement des outils économétriques ainsi que la qualité des données employées, font que la controverse sur les hypothèses de la finance classique a fait encore l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche.

Nous soutenons qu'un remplacement de ces hypothèses est indispensable pour la reconstruction de la finance sur des bases saines

La théorie de l'efficience du marché stipule que les cours des actifs reflètent toute l'information disponible et qu'il est impossible de prévoir les rentabilités futurs à partir des rentabilités passées du fait que toute l'information est déjà intégrée dans le prix.

Cette définition est remise en question dans le cas où les rentabilités présentent une structure de dépendance de long terme, et des autocorrélations significatives et qu'il est devenu possible de réaliser des profits anormaux en spéculant sur la différence entre le prix sur le marché et sa valeur fondamentale.

Une caractéristique des prix des produits financiers est que leur évolution ne peut s'expliquer par des modèles déterministes simples. La plupart des modélisations financières reposent sur une représentation probabiliste. Ainsi, le problème de la détermination du prix à une date future revient à déterminer la loi de probabilité du prix de l'actif, ce dernier étant vu comme une variable aléatoire.

En statistique, une des lois les plus utilisées est la loi gaussienne. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème central limite font que cette loi s'adapte bien dans de nombreuses études, et notamment dans le domaine des séries chronologiques financières.

Dans ce chapitre nous analysons les principales propriétés statistiques des séries financières et nous proposons une modélisation cohérente de la plupart de ces propriétés. Les hypothèses discutables du modèle classique de la finance

I. Les hypothèses discutables de la finance classique

1 La mémoire longue « long memory »

La présence potentielle du phénomène de mémoire longue dans les rendements des

actifs financiers est un fait très important aussi bien d'un point de vue théorique qu'empirique. La présence d'une mémoire longue dans les rendements journaliers et intra-journaliers des actifs, contredit la faible hypothèse de l'efficacité des marchés spécialement sur des données de volatilité à haute fréquence. Ce phénomène implique qu'un choc dans le processus de la volatilité aura un impact durable dans le temps et donc un effet de persistance qui se met en évidence.

Par conséquent, on peut dire que la présence de mémoire longue dans les séries de rentabilités a d'importantes implications en théorie financière :« L'existence d'une mémoire de long terme permet d'expliquer la possibilité d'une déconnexion durable entre les cours et les fondamentaux, à partir de là on peut conclure de l'importance considérable de mémoire longue dans de nombreux domaines de la théorie économique¹⁰² ».

a Les origines hydrologiques du concept de mémoire longue

Avant les années cinquante les modèles retenus en hydrologie pour modéliser les séries de niveau d'eau étaient principalement de simples modèles autorégressifs d'ordre un qui supposeraient que les flux et reflux d'une rivière étaient indépendants au cours de temps, et ceci ne permet pas d'appréhender le concept futur de la rivière en se basant sur une étude historique des niveaux d'eau.

Le physicien anglais Harold Edwin Hurst a rejeté ces modèles traditionnels tout en montrant que l'étude des niveaux d'eau passés fournit des informations extrêmement riches sur le comportement future de la rivière.

L'invention statistique de Hurst a permis l'analyse de la dépendance statistique de long terme, son étude porte sur le projet du barrage du Nil dans le but de déterminer la capacité idéale des réservoirs d'eau alimentés par le fleuve. La signification de cette découverte empirique réside dans le fait que la série des niveaux d'eau de fleuve n'est pas indépendante, n'est pas non plus faiblement dépendante, mais est fortement dépendante on dira alors que cette série comporte une mémoire de long terme¹⁰³ par là, Hurst est devenu un grand Nilologue et la science lui est redevable d'une invention statistique et d'une découverte empirique remarquable¹⁰⁴.

A partir de la dépendance entre les séries de prix et les conditions météorologiques, il est raisonnable que les variations des prix et des décharges du Nil se ressemblent. Cette relation est tellement évidente qu'on la voit déjà citée dans la bible dans l'épisode des vaches grasses et des vaches maigres y compris l'intervention du gouvernement du pharaon (dirigé par Joseph) dans le but de régulariser les fluctuations¹⁰⁵.

Selon Mandelbrot, l'intérêt des économistes pour les phénomènes de mémoire longue

¹⁰²Mignon V.[1998], "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières" Economie et Prévision n° 132-133, p.188.

¹⁰³Mignon, V., 1998, "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières", Economie et Prévision, n°1-2, p.194.

¹⁰⁴ Mandelbrot [1973], Les Objets fractals : forme, hasard, et dimension, trad., Flammarion, p.354.

¹⁰⁵ Mandelbrot [1973], Les Objets fractals : forme, hasard, et dimension, trad., Flammarion, p.349.

réside dans le fait que les séries hydrologiques et météorologiques présentent des caractéristiques semblables aux séries économiques. Cette ressemblance est due au fait que les séries physiques exercent un effet direct sur les séries économiques.

Dans ce qui suit nous présentons, en premier lieu, le phénomène de Hurst et la définition générale des processus à mémoire longue. En deuxième lieu, nous essayerons d'explicitier la relation entre l'exposant de Hurst et la statistique R/S.

b Le Phénomène de Hurst :

L'invention de Hurst porte sur l'étude de la dépendance statistique à long terme sur diverses séries hydrologiques. C'est à partir de son étude sur la capacité idéale d'un réservoir d'eau que Hurst a pu exhiber le processus à mémoire longue. La loi empirique de Hurst consiste en divisant la capacité du réservoir par l'écart type de T décharges successives d'un fleuve, Hurst trouve que ce rapport est proportionnel à T^H , où H est une constante appelée exposant de Hurst, comprise entre 0 et 1. Si les niveaux d'eau de la rivière étaient indépendants, Hurst aurait dû trouver que ce rapport se comportait comme $T^{1/2}$. Le fait que le rapport entre la capacité de l'écart type soit proportionnel à T^H est connu sous le nom de « loi de Hurst » ou « loi T^H »¹⁰⁶.

La découverte empirique de Hurst signifie que la série des niveaux d'eau de Nil est fortement dépendante, en d'autres termes, les effets d'un choc, par exemple, une crue importante vont avoir des répercussions sur le comportement de long terme de la série des niveaux du Nil. Suite à une crue (respectivement une décrue) les niveaux d'eaux vont aussi demeurer extrêmement élevés (respectivement extrêmement faible) durant plusieurs années successives. On dira alors que cette série comporte une mémoire de long terme.

La découverte empirique de Hurst était à la base des divers processus à mémoire longue développés par la suite tels que les travaux qui ont par la suite été approfondis par Mandelbrot.

c Définition de la mémoire longue :

Le phénomène de mémoire longue est également connu sous le nom d'effet Joseph¹⁰⁷. Cette appellation renvoie à un passage de la Bible où Joseph interprète un rêve de pharaon : il avait vu sept vaches maigres suivre sept vaches grasses et Joseph en conclut qu'il s'agissait d'une succession prévue de sept années de sécheresse à sept années de bonne récolte¹⁰⁸. Cela signifie que les périodes où la série est au dessus (ou en dessous) de sa moyenne sont extrêmement longue. La présence de mémoire longue dans une série temporelle, renvoie à des conséquences durables mais non permanentes d'un choc sur la dite série.

¹⁰⁶Mignon, V., 1998, "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières", Economie et Prévision, n°1-2, p.194.

¹⁰⁷ MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1968. Noah, Joseph and operational hydrology. Water resources Research 4, p. 909-918.

¹⁰⁸Mignon, V., 1998, "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières", Economie et Prévision, n°1-2, p 191.

Ces conséquences ne sont pas permanentes au sens où à un moment donné la série reviendra vers son niveau d'équilibre. Dans ce cas, la durée du cycle correspondra au temps durant lequel la série diverge de cette valeur d'équilibre à la suite d'un nouveau choc un autre cycle va apparaître mais sa durée n'a aucune raison d'être identique à la durée du cycle précédent d'où, la caractéristique de la mémoire longue est la présence de cycle non périodique de toutes périodes. On entend par cycle non périodique la durée pendant laquelle la série garde en mémoire les conséquences des événements passés. Le processus à mémoire longue peut être défini de façon dans le domaine temporel :

▪ Définition : le domaine temporel.

Dans le domaine temporel les processus à mémoire longue sont caractérisés par une fonction d'autocorrélation décroissant hyperboliquement au fur et à mesure que le retard s'accroît, alors que celle des processus à mémoire courte décroît exponentiellement.

Un processus à mémoire longue répond à la définition suivante : Un processus stationnaire (X_t)est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel α , $0 < \alpha < 1$, et une constante c , $c > 0$, vérifiant :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k}{c.k^\alpha} = 1$$

Par conséquent, les autocorrélations d'un processus à mémoire longue vérifient la relation asymptotique suivante :

$$\varphi_k \rightarrow ck^{-\alpha} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Les autocorrélations φ_k décroissent très lentement, c'est à dire à un taux hyperbolique. Ce décroissement hyperbolique des autocorrélations est à apposer au décroissement exponentiel des autocorrélations d'un processus ARMA.

Les processus à mémoire longue sont caractérisés par une densité spectrale s'accroissant sans limite quand la fréquence tend vers zéro, formellement on retiendra la définition suivante : Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel β , $0 < \beta < 1$, et une constante c' , $c' > 0$, vérifiant :

$$\varphi_k \leq c.a^k,$$

Où c est une constante positive et $0 < a < 1$ ¹⁰⁹.

dL'analyse R/S et exposant de Hurst :

Pour pouvoir détecter la dépendance de long terme ou bien la présence de phénomène de mémoire longue, Mandelbrot suggère l'utilisation de la statistique R/S appelé aussi (Rescaled Range ou Range overstandard déviation) qui a été développé initialement par Hurst [1951] lors de son analyse sur les crues du Nil.

¹⁰⁹Lardic .S et Mignon .V [2002], "Econométrie des séries temporelles macroéconomiques et financières", *Ed Economica*, p.329

Définition : La statistique R/S se définit comme l'étendue R des sommes partielles des écarts d'une série temporelle à sa moyenne divisée par son écart type (S_t). Ainsi, soit une série temporelle X_t , $t = 1 \dots T$ de moyenne $\bar{X}_T$, la statistique R/S notée ici Q_T s'écrit :

$$Q_T = \frac{R}{S_T}$$

Avec, l'étendue R qui s'écrit comme suit :

$$R = \max_{1 \leq k \leq T} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_T) - \min_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_T)$$

Et l'écart type de la série de type :

$$S_T = \left[\frac{\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_T)^2}{T} \right]^{1/2}$$

L'étendue R est toujours positive. Par conséquent, la statistique R/S est toujours non négative. Dans son étude, Hurst trouve que la statistique R/S se comporte comme T^H où H est une moyenne égale à 0,73. La constante H est appelée exposant de Hurst ($0 < H < 1$) qui est donnée par $H \sim \frac{\text{Log} Q_T}{\text{Log} T}$

Dans plusieurs travaux Mandelbrot et Wallis ont montré la supériorité de l'analyse R/S par rapport à plusieurs autres méthodes conventionnelles de détermination de la dépendance de long terme telle que l'analyse des autocorrélations, le ratio de variance et la décomposition spectrale.

Par exemple, Mandelbrot et Wallis ont montré à partir de la simulation de Monté Carlo que la statistique R/S peut détecter une dépendance de long terme sur une longue série temporelle non gaussienne le coefficient Skewness et Kurtosis élevé.

Propriétés de la statistique R/S :

Il existe un certain nombre de propriété de la statistique R/S qu'on peut les présenter comme suit :

- (i) Selon les travaux de Mandelbrot et Wallis¹¹⁰, l'étendue R se comporte effectivement différemment selon la forme de la distribution de la série et c'est la

¹¹⁰ MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1969. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. Water resources Research 5, p. 967-988.

division par l'écart type qui libère le comportement de (Q_n) de toute dépendance par rapport à la loi marginale. En d'autres termes, la statistique R/S est indépendante de la forme de la distribution marginale de la série.

(ii) L'application de l'analyse R/S nécessite au préalable de stationnariser la série (si celle-ci n'est pas stationnaire) car la non stationnarité de la série peut biaiser la statistique R/S et que, pour pouvoir interpréter de façon satisfaisante et non ambiguë le phénomène de Hurst, il convient de travailler sur des séries stationnaires.

(iii) Une autre propriété particulièrement intéressante de la statistique R/S est qu'elle peut détecter une structure de dépendance de long terme dans une série temporelle, même si celle-ci est fortement non gaussienne.

(iv) Mandelbrot a présenté une caractéristique intéressante de la statistique R/S est qu'elle peut détecter les cycles non périodiques à l'inverse des autres méthodes traditionnelles telles que l'analyse des autocorrélations, des ratios de variance ou l'analyse spectrale. La présence de cycle non périodique, de toutes périodes, est une caractéristique de la présence de mémoire longue dans une série temporelle. Mandelbrot note que :

« La statistique R/S mesure l'intensité de la propensité qu'a une chronique à être cycle mais non périodique, comportement qui constitue un aspect de la dépendance à long terme¹¹¹ »

Nous pouvons interpréter le terme cycle non périodique par durée moyenne d'un cycle, c'est à dire la durée pendant laquelle la série garde en mémoire, Les conséquences des événements passés.

Dans le cas où la série comporte une mémoire de long terme, l'effet du choc sera durable mais non permanent, et l'on pourra réellement déterminer la durée du cycle engendré. Dans ce cas, la série reviendra vers son niveau d'équilibre et la durée du cycle correspondra alors au temps durant lequel la série diverge de cette valeur d'équilibre. A la suite d'un nouveau choc, un autre cycle va apparaître mais sa durée n'a aucune raison d'être identique à la durée du cycle précédent, d'où le terme de cycle non périodique de toutes périodes plus la durée des cycles est importante, plus la série exhibe une mémoire de long terme.

La classification des séries temporelles en fonction de l'exposant de Hurst :

L'exposant de Hurst comme il est défini $H \sim \frac{\text{Log} Q_T}{\text{Log} T}$ est particulièrement intéressant dans la mesure où la valeur permet de classer les séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance $R/S \sim T^H$.

La loi de Hurst pouvant être appréhendée à travers R/S qui est asymptotiquement proportionnelle à T^H avec $0 < H < 1$. Dans son article 1997, Mignon a déterminé une mesure de corrélation C_H de long terme liée à l'exposant de Hurst : $C_H = 2^{2H-1} - 1$.

¹¹¹ Mandelbrot [1973], Les Objets fractals : forme, hasard, et dimension, trad, Flammarion, p.354.

CH est une mesure de corrélation de long terme entre les observations passées et les observations futures pour un passé et un futur suffisamment long $CH > 0$ si $H > 1/2$ Lorsque $H \sim 1$ alors CH augmente.

Nous pouvons spécifier trois types de dépendances selon les valeurs de H .

- Si $H = 1/2$ alors $CH = 0$ par conséquent le processus ne présente aucune dépendance de long terme, ce type de processus est nommé mémoire courte.

- Si $1/2 < H < 1$, les autocorrélations sont positives et décroissent très rapidement lorsque le retard augmente, ce sont là les caractéristiques d'un processus à mémoire longue, on peut dire ici que la série présente donc l'effet Joseph de dépendance de long terme. On parle alors de phénomène de persistance dans le cas où si la série a été à la hausse la période précédente, il y a une forte probabilité pour qu'elle soit également à la hausse la période suivante.

- Si $0 < H < 1/2$, on parle ici de processus anti-persistant c'est à dire que la corrélation CH est négative ceci s'explique par des phases de hausse qui ont tendance à être suivies par des phases de baisse. Il s'agit là d'une forme particulière de mémoire longue, qui a été nommé « l'anti- persistance de dépendance de long terme ».

2 Mise en évidence de la leptokurticité : naissance d'un fait expérimental

a Historicité du problème leptokurtique

le phénomène leptokurtique n'est pas nouveau, c'est sa reconnaissance institutionnelle qui l'est : il est aujourd'hui clairement acquis (au sens d'un knowledge) que les marchés boursiers ne possèdent pas un comportement statistique modélisable par une densité gaussienne lorsque les variations des cours sont relevées en fréquence fixe. La non normalité des distributions empiriques est acceptée comme un fait de base des marchés. Il est intéressant de noter qu'il aura fallu près de quarante ans pour que ce fait observable devienne un « fait » observé, la non-normalité entrant dans le champ de la recherche scientifique.

En effet, il est apparu assez rapidement (par exemple Osborne. 1959 ; Alexander, 1961) que les queues de distribution des rentabilités empiriques contenaient trop de points pour pouvoir être ajustées par une loi de Laplace-Gauss. Mais ce phénomène n'était pas considéré comme fait significatif pour la bonne compréhension des variations du marché étudié et la modélisation des mouvements des marchés.

Benoît Mandelbrot, le premier, prit en 1962 l'option opposée, et attira l'attention sur l'importance financière du caractère leptokurtique des distributions observées, ainsi que sur la nécessité de ne pas chercher à ignorer ce phénomène. Il fallait selon lui, tout au contraire, s'intéresser particulièrement ces points de queues. Mandelbrot considérait en effet que les queues de distributions, loin d'être un refuge de « points aberrants », contenaient des informations essentielles sur le fonctionnement du marché, pour la compréhension des risques potentiels des marchés. Selon Mandelbrot, l'information importante ne se perd pas dans la somme (les moyennes des distributions), mais se réfugie dans les queues. La position de Mandelbrot représentait donc une modification radicale du regard porté sur les variations

boursières. Jusqu'alors, on s'était intéressé aux fluctuations des sommes partielles des variables aléatoires représentant les rentabilités boursières, et au comportement asymptotique des moyennes empiriques. Mandelbrot suggérait de s'intéresser aux fluctuations des extrêmes.

Malgré ces premiers travaux de Mandelbrot (1962, 1963, 1967), et de Fama (1965), le phénomène «événement rare» resta longtemps considéré comme négligeable ou non significatif: la vision du monde des années 1960 n'incluait pas les queues de distribution dans l'analyse des fluctuations boursières. Dix ans après les premières mises en évidence, certains travaux suggéraient même, en cohérence avec cette conception intellectuelle, de tronquer les queues de distribution pour en retirer les grandes valeurs, assimilées des «points aberrants » non significatifs pour la modélisation : le « fait » disparaissait purement et simplement du phénomène observé. Granger et Orr (1972) représentent une illustration de cette position, qui valide de manière emblématique la conception de Kuhn (1983) sur la nature subjective des « faits » d'expérience dans les paradigmes.

Historiquement, c'est sur les marchés d'actions que s'est d'abord concentrée l'étude de la leptokurticité. Progressivement, est apparue une deuxième voie de recherche, sur les marchés des changes ; enfin, les marchés de matières premières et de taux d'intérêt, puis les marchés à terme, ont aussi été examinés. Aujourd'hui, tous les compartiments des marchés ont, à peu près, fait l'objet d'investigations statistiques de leurs distributions empiriques. Nous choisissons quelques exemples dans le très grand nombre d'études consacrées à l'analyse des variations boursières, afin d'illustrer la permanence de la question leptokurtique dans la finance de marché : cette question n'a, de fait, jamais été absente des investigations entreprises pour caractériser au mieux les distributions réelles observées.

Certains travaux mettent en évidence une diminution de la leptokurticité avec l'augmentation de l'ouverture du pas de temps, en temps calendaire. L'interprétation de la diminution de la leptokurticité reste cependant une question ouverte. Par exemple, parmi d'autres, Hall et al. (1989) y voient la trace d'une structure de dépendance complexe des variations des cours. Cette introduction d'une dépendance pour rendre compte de la leptokurticité, qui contrevient donc à la forme classique d'accroissements i.i.d. dans le modèle standard qui permet d'envisager la question de l'agrégation temporelle des variations des cours à partir de l'existence d'horizons de temps différents selon les intervenants des marchés, et ouvre la voie à une interprétation de la décroissance au moyen de modèles d'interactions entre agents. De la même manière, Bouchaud et Potters (1997) analysent cette décroissance comme un effet de «respiration» de l'échelle des fluctuations boursières avec le temps, en introduisant des considérations sur l'activité du marché. Ainsi, de manière plus générale, on peut estimer que cette décroissance est liée à un certain type d'interaction entre acteurs des marchés, et que des modélisations de comportements d'agents pourraient représenter une voie de recherche pertinente pour interpréter efficacement la convergence à la normalité des variations boursières au fur et à mesure que la fréquence d'observation diminue.

b Reconnaissance du problème leptokurtique

On pouvait encore écrire en 1993 que « étudier les mouvements extrêmes est une approche originale en finance¹¹² ». Ce temps n'est plus.

En effet, parallèlement à un changement de vision dans la communauté scientifique, est apparue dans la communauté des professionnels une prise de conscience grandissante de la non-normalité et de ses conséquences. Un suivi de la presse professionnelle l'illustre : pour une revue comme *Risk*, on recense plus d'une quinzaine d'articles consacrés au problème de la non-normalité. La leptokurticité est même présentée comme faisant partie de la liste des dix problèmes principaux à aborder par l'industrie financière pour les prochaines années, et la gestion des « événements rares » devient la question clé à résoudre dans la gestion du risque.

Cet intérêt professionnel nouveau vient de ce que, dans le champ de l'industrie financière se déploie, depuis une dizaine d'année, une approche institutionnelle des risques de marché, approche dite « prudentielle », qui se traduit par l'existence de groupes de réflexion internationaux dont l'objectif est de promouvoir des régies de quantification des risques universellement applicables par les établissements financiers dans tous les domaines de leur activité. Ce souci prudentiel est étroitement corrélé avec l'augmentation extrêmement rapide des encours d'instruments financiers dérivés, dont l'instabilité et la difficulté de gestion constituent des sources grandissantes de préoccupation pour les autorités de tutelle des marchés. Il est apparu de plus en plus clairement aux instances représentatives que constituent ces groupes de réflexion, que le phénomène leptokurtique venait affaiblir la fiabilité des outils et instruments tous fondés sur la distribution gaussienne.

Un autre changement, aux conséquences expérimentales importantes, est apparu dans l'environnement informatique des marchés boursiers : la puissance de calcul des machines et de la taille des bases de données disponibles, changement qui se traduit par une abondance toujours plus grande des données de cours disponibles. Avec des systèmes automatisés de cotation apparaît la possibilité de disposer de la totalité des cours cotés entre deux dates, ainsi que de la composition des carnets d'ordres. Ce nouveau gisement de données dilate démesurément le champ des possibilités d'analyse des distributions empiriques des rentabilités boursières. Ainsi, l'ordre de grandeur de la taille des échantillons a augmenté de plusieurs puissances de dix. Les tests statistiques réalisés sur les marchés dans les années 1960 utilisaient environ 1 000 données. Ceux du début des années 1990 traitent environ 100 000 données. Les plus récentes investigations examinent environ 1 million de données. Ce qui représente une progression de 10^5 à 10^7 .

Des conférences annuelles sur le traitement des données boursières de haute fréquence sont apparues à la suite de ces nouvelles possibilités, suivant l'initiative de la société suisse. Olsen & Associates qui publie régulièrement les résultats de ses études (Olsen, 2000), et les travaux sur données de haute fréquence se sont ainsi multipliés, permettant un approfondissement des investigations du phénomène leptokurtique au moyen de la

112

modélisation des durées entre échanges boursiers et de certaines caractéristiques de ces échanges (sens, volume, volatilité) ; ce qui permet de repenser la question du temps des marchés en considérant différents types de temps, selon que l'on suit le temps physique de l'horloge ou le temps opérationnel des échanges.

En conclusion de cette revue rapide, on peut dire que, de manière générale, le phénomène leptokurtique est nettement présent sur de nombreux marchés, et sur de nombreuses périodes d'observation.

c Modélisation du phénomène leptokurtique

Tenues du débat sur la modélisation

Les recherches relatives à la prise en considération du problème leptokurtique et à la modélisation de la leptokurticité ont eu (et ont toujours) un objectif double :

Descriptif : Il s'agit dans cette perspective de parvenir à modéliser le mieux possible les variations des cours réels au moyen d'outils probabilistes ou statistiques, en postulant des classes de processus qui reproduisent au mieux la non normalité, ceci de manière phénoménologique, et sans chercher à expliquer l'origine de ces variations, c'est-à-dire sans référence à des comportements d'agents. C'est une approche minimaliste, mais qui a une utilité directe et pratique dans l'évaluation des actifs financiers et la gestion des positions de marché. Elle apparaît dès les années 1960, et fait l'objet aujourd'hui de recherches intenses, renouvelées par les données de haute fréquence.

Explicatif : Il s'agit dans cette perspective de développer des hypothèses relatives aux comportements des agents et à la microstructure des marchés, ceci pour parvenir, de manière inductive, à des processus de prix pertinents quant à la réalité observée. C'est une démarche plus ambitieuse, donc plus complexe (et d'ailleurs pour cette raison plus récente), mais plus délicate à tester. Son utilité pour les professionnels ne leur apparaîtra peut-être pas immédiate, mais c'est cependant un moyen efficace pour pouvoir choisir entre plusieurs classes de processus candidats, relevant de l'approche descriptive seule.

Ces deux démarches sont cependant dans un mouvement de rapprochement l'une de l'autre, avec les investigations sur données de haute fréquence, dans la mesure où ces données font intervenir d'autres variables que les seuls cours cotés. Elles restent pour le moment encore séparées, mais la jonction entre les travaux sur la microstructure des marchés et les choix de processus de prix peut apparaître comme un objectif atteignable à un horizon raisonnable pour la recherche en finance.

3 Le caractère fractal des marchés financiers

a Le contexte : La naissance des fractales

Depuis toujours, les mathématiques raisonnent dans un univers euclidien composé de formes parfaites et lisses: droites, plans, cubes, sphères, etc. Pourtant, regardons autour de nous, demande Mandelbrot : « Les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, et l'écorce n'est pas lisse, pas plus que l'éclair ne se propage en ligne droite ». Une notion a été oubliée, la rugosité, et celle-ci « n'est pas une imperfection perturbant un

quelconque idéal. C'est l'essence même de bien des objets dans la nature comme en économie». Un nuage n'est pas une sphère avec des protubérances aléatoires, une montagne n'est pas un cône abîmé par le temps et l'érosion, etc.

On peut mesurer ce « degré de rugosité » avec les fractales. Le terme de fractale a été créé par Mandelbrot en 1975, à partir de la racine latine fractus qui signifie brisé, irrégulier. La clé des fractales consiste à « repérer la régularité dans l'irrégulier, la structure dans l'informe » d'un certain nombre d'objets.

Pour décrire ces objets irréguliers, Benoît Mandelbrot a inventé deux mots :

- L'adjectif fractal qui vient de l'adjectif latin « fractus » qui signifie irrégulier ou brisé,
- et le nom féminin fractale. La mise en place de la théorie fractale fait naître un espoir pour décrire des formes si irrégulières que les modèles continus parfaitement homogènes ne peuvent pas approcher.

Cependant deux propriétés qui caractérisent les objets fractales à savoir l'autosimilarité (ou l'auto affinité) et la dimension non entière. Les objets fractales sont dits autosimilaires c'est à dire que peu importe l'échelle selon laquelle on les observe elles présentent toujours un patron similaire à celui observé à plus grande et plus petite échelle, cela veut dire que chaque petite portion, lorsqu'elle est agrandie reproduit exactement la figure toute entière, ce sont donc des réalités ayant une complexité infinie.

La définition avancée par Mignon [1998]: « un processus $X(t)$ est autosimilaire, si pour tout r positif, la distribution en échantillon finie de $X(rt)$ est la même que celle de $rX(t)$ ¹¹³».

$$X(rt) \stackrel{d}{=} rX(t)$$

Où le signe $\stackrel{d}{=}$ représente l'égalité en distribution.

On parle d'autosimilarité lorsque dans une transformation similaire le facteur d'échelle appliqué horizontalement et verticalement est le même mais au cas où le facteur d'échelle n'est pas le même dans les deux directions on parle d'autoaffinité. Un processus $X(t)$ est dit auto affinité de paramètre d'auto affinité H si pour tout r positif, la distribution en échantillon fini de $X(rt)$ est la même que celle de $r^H X(t)$:

$$X(rt) \stackrel{d}{=} r^H X(t)$$

Où le signe $\stackrel{d}{=}$ représente l'égalité en distribution.

Une courbe autoaffine nécessite des facteurs d'échelle différents dans les coordonnées : r pour t et r^H pour $X(t)$.

D'après Mignon, la majorité des processus à mémoire longue ne sont pas autosimilaires

¹¹³ Mignon V.[1998], "Méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst. Application aux rentabilités boursières" Economie et Prévision n° 132-133, p213.

mais autos affines. Actuellement il est possible d'apprécier le degré d'irrégularité de la courbe en se basant sur la notion de dimension fractale que nous allons maintenant présenter.

b La dimension d'une fractale

La forme d'une fractale ne dépend pas de l'échelle à laquelle nous la considérons, une fractale a aussi la particularité d'avoir une dimension non entière. Pour caractériser des objets qui peuvent être infiniment irréguliers ou infiniment divisés, Mandelbrot a introduit le concept de dimension fractale. Si un objet fractale est contenu dans un espace ordinaire de dimension d , sa dimension fractale D est comprise entre 0 et d , mais contrairement aux dimensions habituelles qui sont toujours entières, par exemple $D = 1$ pour un segment, $D = 2$ pour un carré, $D = 3$ pour une courbe, D ne peut être une fraction simple, telle que $1/2$ ou $5/3$ et même un nombre irrationnel tel que $\log(4)/\log(3)$. Intuitivement une dimension comprise entre un et deux caractérise un être plus étalé qu'une courbe mais plus effilé qu'une surface. La dimension de l'autosimilarité fractale est fractionnaire, et une dimension fractionnaire permet de mesurer des qualités qui n'auraient pas de définition claire. La dimension d'une fractale avec la propriété d'autosimilarité est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{l}\right)}$$

Où, D est la dimension de la fractale. $\left(\frac{L}{l}\right)$ Est le facteur de dilatation de l'élément caractéristique de taille l qui se répète dans la fractale de taille L . N est le nombre d'éléments de taille l dans la fractale L et de dimension D . Plus D est grand, plus de détails apparaîtront si nous agrandissons la figure, $\frac{L}{l}$ est le facteur d'agrandissement. Une courbe de dimension 2 est un mouvement Brownien, c'est à dire une courbe dont tous les points sont indépendants et suivent une marche au hasard et une dimension non entière signifie que la courbe connaît des liens de dépendance temporels, c'est précisément ce qu'établit Mandelbrot à propos des cours des actifs financiers.

La dimension fractale des cours de bourse

En finance, la « rugosité » d'un historique de cours boursier s'exprime par sa volatilité, et l'on peut dire que la finance est rugueuse. Rien ne ressemble plus à un cours de Bourse sur une journée qu'un cours sur une semaine, un mois, une année, et c'est précisément de cette façon que l'on identifie une fractale (une forme identique à des échelles différentes, l'invariance d'échelle).

Outre Mandelbrot, des chercheurs comme Edgar Peters ont réalisé ce calcul de façon plus systématique. Ce dernier a par exemple calculé (sur des données mensuelles de 1950 à 1988) que l'indice des 500 grandes sociétés américaines (S & P 500) avait une dimension fractale de 1,28, l'action IBM 1,39, Coca-Cola 1,43...

Ce qui est très révélateur, c'est qu'aucun indice ou action n'a une dimension fractale égale à 2, c'est-à-dire ne correspond à un mouvement brownien. En effet, un mouvement

brownien, nous l'avons vu, a des mouvements indépendants les uns des autres, sa loi statistique ne varie pas au cours du temps, et ces mouvements correspondent à la loi normale.

Un mouvement brownien ne dessine pas une forme plus ou moins reconnaissable comme une fractale, il se répand de façon uniforme sur un plan, qui est de dimension 2. Nous avons vu que la présence récurrente de valeurs extrêmes empêchait de recourir à la loi normale. Voici une réfutation supplémentaire du modèle classique de la finance qui suppose que les variations des cours des actions sont browniennes. L'hypothèse gaussienne est fausse et il faut conclure, avec Mandelbrot, que « le cœur même de la finance est fractal ¹¹⁴ ».

Ces conclusions remettent en cause le concept d'efficience des marchés. Où est donc le problème dans sa formulation ? Toute l'information disponible est intégrée dans les cours, et seule une nouvelle information les fera varier. On « attend » la nouvelle information, et le nouveau cours, comme on « attend » le prochain lancer de pièce de monnaie lorsque l'on joue à pile ou face. Chaque cours est donc indépendant des précédents, comme chaque lancer de pièce est indépendant des tirages antérieurs (on parle de « marche au hasard » ou de « marche aléatoire »).

Mais l'erreur de la théorie de l'efficience tient à sa vision très fruste de l'information : toute l'information connue est intégrée dans les cours, et les événements à venir sont totalement imprévisibles et donc non pris en compte. On ne peut pas faire plus simpliste ! Cette approche fait l'impasse sur la notion d'anticipation, fondamentale sur les marchés. Or on ne prend pas des décisions (sur un marché, dans la vie) uniquement en tenant compte de ce qui s'est déjà produit. On se détermine également et surtout en fonction du futur, de ce que l'on souhaite, de ce que l'on prévoit, de ce qu'on pense qui va se passer. En un mot, des anticipations. L'hypothèse de la marche aléatoire ne tient plus, le futur, le présent et le passé sont reliés l'un à l'autre par la mémoire et l'anticipation, et cela se traduit dans la dimension fractale des cours de bourse.

La théorie de l'efficience suppose également que les agents soient rationnels, et capables d'analyser l'ensemble de l'information disponible. Cela ne tient pas non plus : cette hypothèse provenant de la théorie néoclassique, forgée à la fin du XIX^e siècle, est démentie chaque jour sur les marchés. La crise de 2008 a levé certaines inhibitions et désormais des éditorialistes prestigieux, comme Justin Fox, spécialiste des questions économiques au magazine Time, attaquent bille en tête ce sacro-saint principe¹¹⁵. La notion d'efficience des marchés tient une place fondamentale dans la théorie classique de la finance, « ce socle intellectuel sur lequel repose l'orthodoxie financière actuelle¹¹⁶ » selon Mandelbrot. Elle tombe. Une remarque sur le mot « efficience » : les marchés seraient donc, après ce que nous venons de voir, « inefficients

¹¹⁴ Benoît Mandelbrot, Une approche fractale des marchés, op. cit., p. 186.

¹¹⁵ Justin Fox, The Myth of the Rational Market, HarperCollins, 2009.

¹¹⁶ Benoît Mandelbrot, Une approche fractale des marchés, op. cit., p. 77.

» ? En réalité, la théorie classique a accaparé ce terme positif, valorisant, à sa propre vision erronée. L'existence d'une dimension fractale dans les cours de bourse ne veut pas dire que ceux-ci sont inefficients : c'est peut-être cela l'efficience, c'est-à-dire le fonctionnement normal et sain d'un marché !

c Relations fractales, marchés financiers :

Fractales et efficience

Le processus à mémoire longue est maintenant connu et utilisé en finance et en économie, et son application commence à se multiplier dans divers domaines. Auparavant, on a signalé que le processus de mémoire longue signifie que les observations éloignées dans le passé sont très corrélées avec les observations distinctes dans le future et par conséquent la présence de mémoire longue dans les rendements des actifs est contradictoire avec l'hypothèse d'efficience.

La théorie fractale rejette donc l'hypothèse d'efficience des marchés qui se base sur le fait que l'information est instantanément intégrée dans les prix dans la même théorie la dimension fractale est donnée par $(1/H)$. Ainsi, une série qui suit une marche au hasard ($H = 0,5$) aura une dimension fractale égale à 2, et ceci est un mouvement Brownien ordinaire. Mais un $H > 0,5$ correspond à une dimension inférieure à 2, ce qui est conforme intuitivement au fait que la courbe présente une certaine homothétie interne, les valeurs ne sont plus gaussiennes et indépendantes, des corrélations apparaissent, concrètement des cycles non périodiques en tout genre deviennent de plus en plus distincts.

En se plaçant sur les marchés financiers, on comprend donc qu'un ($H = 0,5$) correspond à un marché efficient (indépendance des valeurs dans le temps) tandis qu'un H proche de 1 (donc une dimension fractale < 2) cela signifie que le marché n'est pas efficient (des liens de dépendance relient les prix dans le temps). Or plusieurs auteurs ont montré, à la suite de Mandelbrot que les cours des actifs financiers avaient une dimension fractale strictement inférieure à 2 autrement dit que les marchés n'étaient pas efficients.

Les cours de bourses connaissent donc des liens de dépendance temporels, certes pas assez marqués pour être identifiés par les méthodes d'analyses statistiques usuelles mais suffisamment fortes pour contredire la théorie de « la marche au hasard ». Selon Christian Walter : « La présence même faible d'un processus fractal persistant semble indiquer qu'il pourrait être possible de modéliser, à l'avenir, les élans du marché par une formalisation adaptée¹¹⁷ ». Le modèle fractal devra prendre en compte des liens de dépendance temporels qui existent entre les prix et donc entre les rendements.

II. Les propositions économétriques

Depuis les travaux pionniers de l'hydrologue anglais Hurst [1951], la structure de

¹¹⁷ WALTER C., 1990-1991. L'utilisation des lois Levy-stables en finance : une solution possible au problème posé par les discontinuités des trajectoires financières. Bulletin de l'Institut des Actuaire Français, p.16.

dépendance de long terme des séries temporelles est devenu un sujet de recherche important dans le domaine économique. Par définition, on dit qu'une série est caractérisée par un phénomène de mémoire longue, lorsque, sa fonction d'autocorrélation décroît lentement en augmentant le retard. Par conséquent la présence de mémoire longue peut remettre en cause l'hypothèse d'efficience des marchés financiers. La détection d'un phénomène de mémoire longue explique l'existence d'autocorrélations significatives à long terme entre les séries financières. La connaissance du passé fournit ainsi une aide à la prévision des valeurs futures. Nous savons de plus qu'un marché est informationnellement efficient s'il est impossible de prévoir les rentabilités futures à la base de celles passées. La mémoire longue a donc d'importantes implications en théorie financière et plus précisément sur la théorie de l'efficience informationnelle.

A partir, de ce chapitre nous avons essayé de présenter le processus de mémoire longue ainsi que la notion fractale et sa jonction avec la théorie de l'efficience. Enfin nous présenterons une catégorie particulière de modélisation du mémoire longue: le processus ARFIMA (autorégressif moyenne mobil fractionnairement intégré).

1 Les modèles de longue mémoire : Le processus ARFIMA

L'étude statistique des séries chronologiques s'est traditionnellement orientée vers la détection de racines unitaires permettant ainsi le juger de la stationnarité de la série en question. Dans tous les cas ces séries peuvent être modélisées moyennant des processus du type ARMA (p,q) et ARIMA (p,d,q). En présence d'un processus de type ARMA, le paramètre de différenciation (d) est nul et la FAC (fonction d'auto corrélation) décroît linéairement, alors qu'il prend la valeur de 1 pour les séries initialement non stationnaires et la FAC décroît exponentiellement. Dans le cas de la première alternative, la série peut être modélisée par un processus à mémoire courte et dans le second cas par un processus à mémoire infinie.

Lorsque le (d) prend des valeurs réelles c'est le cas des modèles ARFIMA, et on parle alors de mémoire longue.

Les séries issues d'un processus fortement dépendant contiennent des informations pertinentes permettant de prévoir l'évolution des observations futures. Ainsi, un processus de mémoire longue approprié permet de cerner d'une manière satisfaisante la dynamique de long terme des séries en question. Les modèles ARFIMA suscitent un intérêt spécial pour l'application vu leurs capacités à modéliser le comportement de court et de long terme des séries chronologiques, Les modèles ARFIMA appartiennent au catalogue des modèles uni-fractale, c'est à dire qu'ils ont le même taux de décroissance pour tous les moments.

Ainsi, la présence d'une racine unitaire ($d = 1$ dans les modèles ARIMA) fait référence au phénomène de mémoire infinie, et l'absence de racine unitaire ($d = 0$) correspond au cas de mémoire courte, voire l'absence de mémoire. Ces deux modélisations classiques ne prennent pas en compte les cas intermédiaires à savoir l'existence d'un paramètre de différenciation d fractionnaire. Or, la présence d'un tel coefficient non entier est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de caractériser les processus à mémoire longue. Ce modèle fractionnaire de ARIMA présentées indépendamment par Granger et Joyeux [1980] et Hosking [1981] où les

séries temporelles doivent être intégrés à une valeur fractionnaire de « d ».

Le modèle ARFIMA constitue une avancée notable dans la modélisation des séries temporelles, du fait qu'il contient d'un côté une partie ARMA traditionnelle pour en tenir compte du comportement du court terme et d'un autre côté, un paramètre d'intégration fractionnaire visant à expliciter les mouvements de long terme de la série étudiée. Par contre le bruit Gaussien fractionnaire ne dépend que d'un seul paramètre, l'exposant de Hurst H, et s'il peut effectivement caractériser le comportement de long terme d'une série, il ne peut prétendre à en expliquer le comportement à court terme.

a Définition des processus ARFIMA :

Le processus ARFIMA le plus simple est le processus ARFIMA (0,d,0) ou bruit fractionnaire de paramètre d en temps discret : il se définit comme suit :

$$(1 - L)^d X_t = U_t$$

Où, L est l'opérateur retard et U_t est un bruit blanc.

Le développement binominal est donné par :

$$\nabla^d = (1 - L)^d = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j L^j$$

où

$$\Pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 \leq k \leq j} \left(\frac{k-1-d}{k} \right), \quad j = 0, 1, \dots$$

Où Γ étant la fonction euclidienne de seconde espèce.

Le processus aussi défini est le processus ARFIMA (0,d,0). Les propriétés de ce modèle sont largement développées dans Hosking (1981), nous n'en reprenons ici que les bases principales.

Théorème :

Soit (X_t) un processus ARFIMA (0,d,0).

-Lorsque $d < 1/2$, X_t est un processus stationnaire et possède une représentation moyenne mobile infinie :

$$X_t = Y(L)u_t = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k u_{t-k}$$

où

$$Y_k = \frac{G(k+d)}{G(d)G(k+1)}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \frac{K^{d-1}}{G(d)}$$

-Lorsque $d > -1/2$, X_t est un processus inversible et possède une représentation autorégressive infinie.

$$P(L)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} P_k X_{t-k} = u_t$$

$$\text{où } P_k = \frac{G(k+d)}{G(-d)G(k+1)}$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \frac{K^{d-1}}{G(-d)}$$

Supposons que $-1/2 < d < 1/2$ et que u_t soit de variance unitaire, alors :

- La fonction d'auto covariance est donnée par :

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}$$

$$\text{avec } \gamma_k \sim \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Nous constatons, donc, que lorsque $-1/2 < d < 1/2$, le processus est stationnaire et inversible. Les coefficients Ψ_k et π_k décroissent à un taux hyperbolique et non pas de façon exponentielle comme dans le cas des processus ARMA. De même, les autocorrélations diminuent à un taux hyperbolique, donc nettement plus lentement que les autocorrélations des processus ARMA (qui décroissent à un taux géométrique). La densité spectrale n'est pas limitée à une valeur finie à la fréquence zéro. Ainsi du fait de ces deux caractéristiques, les processus ARFIMA sont appelés processus à mémoire longue.

Le processus ARFIMA (0,d,0) est un cas particulier des processus ARFIMA (p,d,q) qui peuvent être définis comme suit :

$$\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Où $\varepsilon_t = \nabla^{-d} u_t$, u_t est un bruit blanc de variance σ^2 et $\phi(L)$ et $\theta(L)$ sont des polynômes retard de degré p et q respectivement.

Comme dans le cas du processus ARFIMA (0,d,0), les processus ARFIMA (p,d,q) sont des processus à mémoire longue stationnaire et inversibles lorsque :

$$d \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\text{ et } d \neq 0$$

Exposant de Hurst et processus ARFIMA :

Hosking [1981], Geweke et Porter-Hudak [1983], Lo [1991], ont montré qu'il existe une relation remarquable entre le paramètre d des processus ARFIMA et l'exposant de Hurst H : $d = H - 1/2$.

Dès lors, il est possible d'effectuer une classification des séries temporelles en fonction des valeurs du paramètre d :

- Si $0 < d < 1/2$: le processus ARFIMA est un processus stationnaire à mémoire longue. Les autocorrélations sont positives et diminuent hyperboliquement vers 0. Lorsque le retard augmente, la densité spectrale est concentrée autour des faibles

fréquences (cycles lents), elle tend vers l'infini lorsque la fréquence tend vers zéro. On est face à un processus persistant ($1/2 < H < 1$).

- Si $d = 0$, le processus ARFIMA se réduit au processus ARMA standard et ne présente aucune structure de dépendance à long terme.

- Si $-1/2 < d < 0$, le processus est anti-persistant, les autocorrélations alternent de signe et la densité spectrale est dominée par des composantes de haute fréquence (la densité spectrale tend vers zéro lorsque la fréquence tend vers zéro).

Récapitulons que le processus est utilisé pour montrer :

- La mémoire longue où la dépendance de long terme si $d \in (0 ; 0,5)$ et $d \neq 0$.
- La mémoire intermédiaire (anti-persistant) ou la dépendance négative à long Terme si $d \in$ Mémoire courte si $d = 0$, qui correspond au modèle ARMA stationnaire et inversible.
- Si $d \in (0,5; 1)$, le processus est un processus de retour à la moyenne et il n'y a pas d'impact de long terme des innovations sur les valeurs futures du processus.

b Les méthodes d'estimation

L'estimation d'un modèle ARFIMA peut être réalisée à partir de deux classes ou familles de méthodes, on présentera dans ce qui suit les méthodes dites en deux étapes et celles du maximum de vraisemblance.

Les méthodes en deux étapes semi-paramétriques :

La mise en œuvre d'une telle procédure de modélisation exige au préalable la spécification du paramètre de différenciation (intégration) fractionnaire. Il s'agit d'une étape cruciale à l'estimation du processus ARFIMA dès lors que la valeur retenue du paramètre (d) peut affecter sérieusement l'inférence statistique des coefficients estimés et en conséquence la validité du processus en lui-même. Ces méthodes s'inscrivent généralement sur le domaine des fréquences. Et sont qualifiés d'estimateurs semi- paramétriques.

Les méthodes en deux étapes consistent à :

- 1ère étape : estimer le coefficient d'intégration fractionnaire puis,
- 2ème étape : estimer les coefficients de la composante de court terme sur la série fractionnairement différenciée, on présentera le modèle le plus utilisé dans ce types d'estimateurs qui est l'estimateur GPH :

La technique la plus utilisée est celle de l'estimation de Geweke, Porter et Hudak [1983] elle commence par l'estimation du paramètre d , basé sur la régression du log- périodogram suivant¹ :

$$\ln \left[I(w_j) \right] = \beta_0 + \beta_1 \ln \left[4 \sin \left(\frac{w_j}{2} \right) \right] + v_j$$

$$\text{avec } w_j = \frac{2\pi j}{T}, j=1,2,\dots,m$$

où m est une fonction du nombre d'observations n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = 0$

en général $m = T^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.

$$L' \text{ estimateur de } d, \text{ dite } \hat{d}_{GPH} \text{ est } -\hat{b}_1 \text{ et } I(w_j) = \frac{1}{2PT} \left| \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{y}_t e^{w_j t} \right|^2$$

La régression est estimée par la méthode des moindres carrés ordinaires

La deuxième étape de procédure d'estimation GPH implique d'adapter un modèle ARMA pour les données filtrées¹¹⁸, compte tenu de l'estimation de d .

Bien que cet estimateur soit relativement facile à calculer, il a quelques problèmes potentiels, qui devraient être pris en compte. Tout d'abord, pour utiliser cette méthode, un choix de α doit d'abord être fait. Habituellement, il est une fonction simple de la taille de l'échantillon T . Peut-être le choix le plus commun, utilisé traditionnellement dans les recherches dans le domaine de l'économie et finance, est de prendre $\alpha = T^{0.5}$. Ce choix peut toutefois ne pas être le meilleur choix possible dans chaque situation, et peut conduire à des résultats biaisés¹¹⁹. L'hypothèse critique de ce modèle est que le spectre du processus ARFIMA (p,d,q) est le même que celui du processus ARFIMA $(0,d,0)$ «qualifié de bruit blanc fractionné». Cependant les critiques majeures faites à cet estimateur c'est qu'il présente des biais d'échantillon substantiel et fini et qu'il est inefficace lorsque ε_t est un processus AR ou MA¹²⁰.

Méthode du maximum de vraisemblance

Qualifiés d'estimateurs paramétriques, les méthodes du maximum de vraisemblance sont des méthodes dites en une étape où le paramètre d'intégration fractionnaire d est estimé conjointement avec les paramètres ARMA standard d'un modèle ARFIMA. Le maximum de vraisemblance nécessite l'évaluation de la fonction de vraisemblance pour un ensemble donné de paramètres. Il faut donc écrire la matrice de covariance, ou la fonction d'autocovariance, en fonction des paramètres du modèle puisqu'elles sont basées sur les autocorrélations, ces méthodes nécessitent que le processus soit stationnaire, ou qu'il soit transformé en processus stationnaire. On citera :

- la méthode de maximum de vraisemblance exact proposée par Sowell[1992].

¹¹⁸ Filtrer une série chronologique consiste à effectuer des opérations sur cette dernière. En particulier, lorsqu'on remplace la valeur présente d'un processus y_t par une somme pondérée des valeurs passées, présentes et futures de y_t .

¹¹⁹ Jussi Tolvi "Long memory in a small stock market" Economics Bulletin, Vol. 7, No. 3 pp. 1-13, 2003. p 03.

¹²⁰ James Davidson, Philipp Sibbertsen "Tests of Bias in Log-Periodogram Regression" working paper of Hannover university, Germany.

- la méthode du maximum de vraisemblance approximative proposé par Beran [1995].

A- la méthode du maximum de vraisemblance exact :

Proposé par Sowell [1992] qui a démontré que la forme générale de la fonction d'autocovariance d'une série temporelle stationnaire générée par un processus ARFIMA pouvait s'exprimer au moyen de fonctions hypergéométriques.

$$c(i) = \sigma^2 \sum_{k=-q}^q \sum_{j=1}^p y_k x_j C(d, p+k-i, p_j)$$

$$\text{où } y_k = \sum_{s=|k|}^q q_s q_{s-|k|} \quad \text{et} \quad x_j^1 = p \left[\prod_{i=1}^p (1 - p_i p_j) \prod_{m \neq j} (p_j - p_m) \right]$$

$$\text{Et } C(d, h, p) = \frac{G(1-2d)}{[G(1-d)]^2} \frac{(d)}{(1-d)_h} [p^{2p} F(d+h; 1-d-h; p) - 1]$$

$$F(a, 1; c; p) \text{ est une fonction hypergéométrique } F(a, 1; c; p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i b_i p^i}{c_i i}$$

$$\text{Et } a_i = a(a+1)(a+2) \dots (a+i-1), \quad a_0 = 1$$

L'apport d'une telle formulation provient du fait que les fonctions hypergéométriques peuvent être calculées de façon précise et rapide. L'intérêt de la méthode du maximum de vraisemblance est qu'elle utilise toute l'information à court comme à long terme concernant les comportements des séries puisque sont estimés simultanément les paramètres autorégressif, moyenne mobile et le paramètre de différenciation fractionnaire d. La méthode s'inscrit dans le domaine temporel.

B- La méthode du maximum de vraisemblance approximatif :

Beran [1995] développe un estimateur du maximum de vraisemblance approximative basé sur la minimisation de la somme des carrés des résidus naïve, qui est également applicable pour les processus ARFIMA non stationnaires avec $d > 0,5$. le log approximative de vraisemblance est¹²¹ :

$$\log L_A(d, f, q, b) = c - \frac{1}{2} \log \frac{1}{T-k} \sum_{t=2}^T \tilde{a}_t \tilde{e}_t^2$$

Où $\tilde{e}_t^2$ sont les erreurs de prévision en une étape. Beran prouve l'efficacité et la normalité asymptotique des estimateurs qui en résultent pour $(d, \square, \square)$, et propose pour tout modèle ARFIMA donné par l'équation [3.1], le paramètre de différenciation fractionné suivant :

$$d = m + d' \quad \text{où, } d' \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Et m est un entier supposé connu, désignant le nombre de fois dont la série doit être

¹²¹ Jurgen A. Doornik_ Marius Ooms, "Inference and Forecasting for ARFIMA Models With an Application to US and UK Inflation" "Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics" Vol. 8 [2004], No. 2, Article 14. 2004, p 05.

différentiée pour atteindre la stationnarité.

Autres méthodes d'estimation

L'un des plus important problème concernant le modèle ARFIMA des séries chronologiques est l'estimation du paramètre fractionnaire d ¹²². L'estimation des modèles à mémoire longue peut aussi se faire par une approximation autorégressive (estimateur MCO, estimateur de Yule-walker ,et l'estimateur spectral)¹²², ou par une méthode pseudo-linéaire qui se fait exclusivement en domaine temporel basée sur une décomposition du problème de régression de forme spéciale dans un scalaire non-linéaire et une régression linéaire multiple¹²³.

Frederiksen et Nielsen¹²⁴, comparent en utilisant la simulation de Monté Carlo les propriétés de différents classes de méthodes d'estimation du paramètre de différenciation fractionnaire à savoir ; les méthodes semi paramétriques (dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel) ; les différentes méthodes du maximum de vraisemblance et la méthode des Wavelet¹²⁵(Ondelettes).

Au niveau financier, la modélisation au moyen des processus ARFIMA permet de générer des prévisions de long terme de l'évolution du cours, ce qui autorise la construction de stratégies d'arbitrage permettant de générer des profits.

2 Modélisation avec les lois stables : *Modèles non gaussiens*

Le premier modèle de Benoît Mandelbrot traite uniquement des discontinuités et fait l'hypothèse que les données sont indépendantes. Nous avons montré la présence non négligeable de grandes fluctuations des prix et l'existence d'une valeur de Kurtosis très supérieure à 3, il faut donc travailler avec une loi qui a des queues de distribution lourdes. De plus, la variance ne se stabilise pas. Etant donné que quelle que soit la taille de l'échantillon la variance continue à varier considérablement, il est impossible d'estimer cette variance. Comme la variance étudiée ne tend pas vers une valeur limite, nous disons que la variance est infinie, bien qu'en réalité nous puissions la calculer pour une taille donnée. Pour ces raisons (et d'autres que nous verrons au fur et à mesure), Benoît Mandelbrot utilise les lois stables.

Les modèles que nous avons étudiés à partir des chapitres précédents reposaient tous sur des lois de probabilités gaussiennes. De nombreux chercheurs et professionnels de la finance, proposent de sortir de ces paradigmes gaussiens pour aller vers de nouveaux types de

¹²² Voir John W. Galbraith, Victoria Zinde-Walsh "Autoregression-Based Estimators for ARFIMA Models," CIRANO Scientific Series, Février 2001 pp 04-14.

¹²³ G.N Fouskitakis ,S.D.Fassois —A pseudo-linear method for fractionally integrated ARMA (ARFIMA) model estimation"" , Working paper of university of Patras ,greece .1996.

¹²⁴ Houmann Frederiksen ,Morten Ørregaard Nielsen "Finite Sample Comparison of Parametric, Semiparametric, and Wavelet Estimators of Fractional Integration"" Econometric Reviews Volume 24, Number 4/2005 pp 405 - 443

¹²⁵ Voir Jean-Marc Bardet, Pierre, R. Bertrand, Véronique Billat "Estimation non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien observé à des instants aléatoires"" Document de travail non publié de l'Université Panthéon Sorbonne

modèles. Pour y parvenir, la première étape est d'étudier les comportements historiques des marchés financiers pour en tirer les leçons utiles et comprendre à quels endroits la modélisation gaussienne échoue; cette démarche est présentée précédemment.

Nous ne pourrons pas, dans le cadre de ce travail, faire un tour d'horizon complet des modèles non gaussiens. Parmi les écoles très actives, évoquons les dont la démarche est de partir d'une analyse empirique, physique, des marchés pour rendre compte de ses lois d'évolution. Les quant traditionnels ne sont cependant pas en reste dans l'exploration des modèles non gaussiens et continuent de développer des classes de modèles plus larges et mieux adaptées aux historiques telles que les processus de Lévy ou les processus multifractals.

Dès 1963, Mandelbrot remettait en cause la loi gaussienne car elle sous-estime la probabilité d'occurrence des variations extrêmes des cours que l'on appelle queues de distribution. Il propose un modèle alternatif, fondé sur les lois Pareto-stables qui semblent à l'inverse, au vu des analyses actuelles, sur estimer les queues de distributions empiriques. Sa modélisation offre cependant deux voies d'approfondissement majeures que nous étudierons respectivement en deux points :

- Ses queues de distribution suivent une loi puissance
- Ses diffusions sont des processus de Lévy.

a Mise à l'épreuve des modèles gaussiens

Le constat que l'on doit tirer est que le modèle gaussien ne s'accorde pas à la réalité. Le phénomène le plus flagrant est que la distribution historique des log-retournements est moins aplatie que la distribution normale le cœur de la distribution historique est plus pointu, concentré, et les queues de distribution sont plus épaisses. Concrètement cela signifie que dans la distribution historique, les variations habituelles, de moindre amplitude, sont moins volatiles (cœur de distribution pointu), alors que les valeurs extrêmes sont quant à elles beaucoup plus probables que celles prévues par la loi gaussienne (queues de distribution épaisses)

De telles variations sont tout à fait aberrantes dans un modèle gaussien, leur fréquence probable d'occurrence est inférieure à 1 fois toutes les 311 millions d'années.

b Les lois puissances

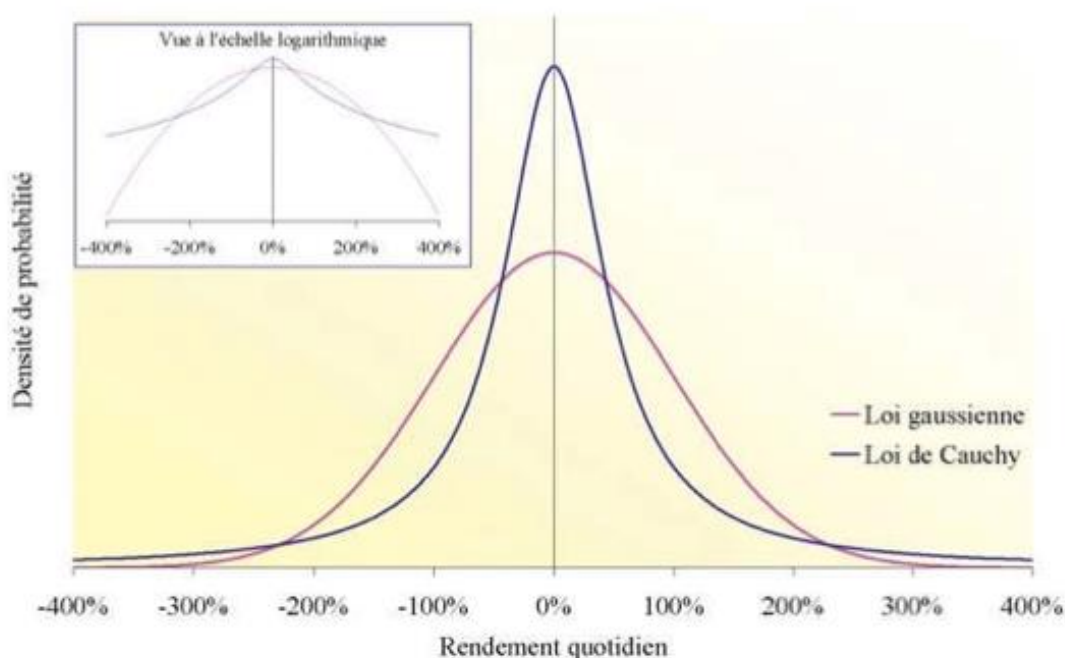
En 1963, Benoît Mandelbrot publie un article démontrant l'inadéquation du modèle gaussien ; il propose une famille de lois alternatives, les lois Pareto-stables, appelées également α -stable. Les lois gaussiennes vérifient la propriété remarquable que la somme de deux variables gaussiennes indépendantes est une variable gaussienne : les lois α -stables sont, par définition, celles qui vérifient également ce type d'assertion (la somme de lois α -stable est α -stable). Nous n'entrerons pas dans la théorie des lois stables mais nous nous arrêterons sur deux de leurs propriétés :

- Elles possèdent en général (sauf pour le cas particulier gaussien) une

queue de distribution épaisse, qui suit une loi puissance.

- Elles peuvent être modélisées par des processus de Lévy.

Le second point fera l'objet de la section suivante, concentrons-nous sur les queues de distribution. Le graphique montre un exemple de distribution α - stable. La loi de Cauchy, comparée à la distribution gaussienne.



Graphique : comparaison loi gaussienne et loi de Cauchy

On peut démontrer que, hormis dans certains cas particuliers, les queues de distribution des lois α -stables suivent une loi puissance, c'est à dire que la probabilité d'observer des valeurs supérieures à x , pour x suffisamment grand, est proportionnelle à

$1/x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 2$. En notant S la variable aléatoire modélisée, nous dirons qu'elle suit une loi puissance si, pour x suffisamment grand :

$$P(|S| > x) = 1/x^\alpha$$

Les études historiques¹²⁶ montrent que cette loi puissance est une bonne modélisation des queues de distribution historiques. Ces études, réalisées sur différents marchés (américains, européens, asiatiques) semblent même toutes montrer une loi puissance de paramètre $\alpha = 3$:

$$P(\text{Rendement supérieur à } n \%) = P/n$$

Ainsi, si la probabilité d'observer une variation plus grande que 1 % est p - la valeur de p dépend des caractéristiques propres du marché - alors la probabilité d'observer une variation de n % sera p/n^3 .

Tout en s'inspirant des lois Pareto-stables proposées par Mandelbrot, notre constat empirique invalide ces lois car elles ne peuvent pas présenter de décroissance en $1/x^3$ (le paramètre α d'une loi Pareto stable est nécessairement compris entre 0 et 2). Les distributions historiques des rendements montrent une queue de distribution

¹²⁶Gabaix 2009 ou Bouchaud et Potters 2003

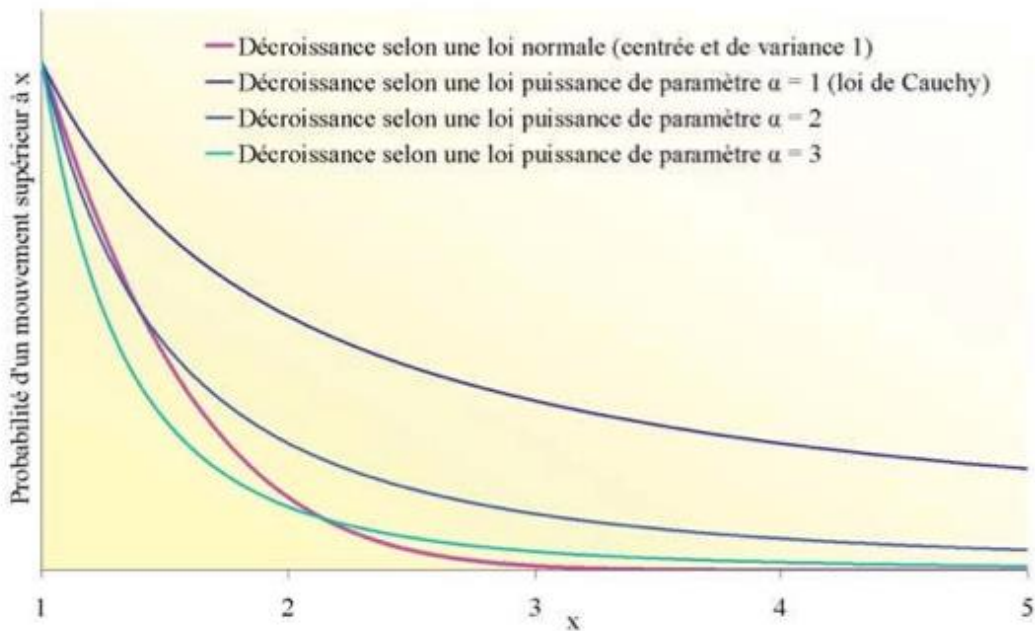
moins lourde que les lois α -stables. La loi $1/x^3$ semble valide pour des rendements journaliers ou intra-journaliers mais sur une plus longue période, mensuelle ou annuelle par exemple, les rendements paraissent toutefois convenablement modélisés par une loi gaussienne.

Sur une courte période de temps, les modélisations par des lois puissances en $1/x^3$ présentent une grande robustesse, et captent correctement les périodes de crise. En effet, les crises historiques ne semblent pas être des anomalies statistiques lorsque les rendements sont modélisés par des lois puissances¹²⁷. Dans ces modèles, de telles crises sont des événements certes rares mais possibles alors qu'elles sont complètement irréalistes dans un modèle gaussien.

S'il est intéressant de relever de telles constatations empiriques, encore faut-il les expliquer : quels mécanismes, quelles hypothèses pourraient faire apparaître ces lois puissances sur les marchés? C'est à cette question que s'attèlent certains éconophysiciens, s'inspirant d'autres domaines de modélisation.

Les lois puissances sont en effet très largement répandues, elles apparaissent régulièrement dans les phénomènes physiques et socio-économiques.

Le modèle de Cont et Bouchaud 2000 utilise la théorie de la percolation¹²⁸ pour rendre compte de l'influence qu'ont les différents opérateurs de marché les uns sur les autres. Il constitue un excellent exemple de modélisation physique de comportements financiers.



Considérons ainsi que chaque opérateur de marché est indexé par un chiffre i . Deux

¹²⁷ Gabaix 2009

¹²⁸ La théorie de la percolation étudie les propriétés des réseaux de connections, à l'image de l'interaction des petits canaux dans une éponge dont la connectivité déterminerait les capacités filtrantes de l'éponge (dans un modèle simple, s'il existe suffisamment de canaux interconnectés d'un bout à l'autre de l'éponge, alors l'eau pourra traverser l'éponge, sinon, elle sera étanche). Dans [Cont et Bouchaud 2000], les canaux sont remplacés par les *trader* et la connectivité des *trader* entre eux déterminera l'effet de troupeau, ou le degré de mimétisme.

trader i et j peuvent être connectés ou non ; s'ils sont connectés, ils auront le même avis sur une action donnée : il faut la vendre, il faut l'acheter, il faut ne rien faire. La variation du prix de l'action est alors directement proportionnelle au solde du nombre d'acheteurs et de vendeurs :

$$\Delta S_t \approx \sum \Phi_i$$

Dans cette équation, i est le numéro du trader, N le nombre total d'intervenants et Φ_i représente la position du trader :

$\Phi_i = -1$ si le trader i vend l'action,

$\Phi_i = 0$ s'il n'intervient pas sur le marché et

$\Phi_i = 1$ s'il est acheteur.

Avec le théorème central limite nous remarquons que ce modèle conduit à une variation gaussienne des prix dès lors que les avis des trader sont suffisamment indépendants et que le nombre d'intervenants est grand ($N \gg 1$). Au contraire, le modèle de Cont et Bouchaud rend compte de l'effet de troupeau : les traders ne sont pas indépendants entre eux, deux traders connectés partageant nécessairement le même avis. En revanche, les avis de deux traders non connectés sont bien indépendants entre eux.

Ce modèle est caractérisé par plusieurs grandeurs :

- le nombre de trader total N , il est supposé être très grand
- Le nombre moyen de connections d'un trader est noté c . Ce paramètre fixe également la probabilité que deux trader i et j ; soient connectés qui est alors $c / (N - 1)$.
- Le nombre moyen total de trader intervenant effectivement sur le marché, c'est-à-dire pour lesquels $\Phi_i \neq 0$. est noté n_{ordre} . Il représente ce que l'on appelle en général la profondeur de marché. La probabilité que $\Phi_i \neq 0$ est alors par définition n_{ordre} / N .

Si le nombre moyen de connections c est supérieur à 1, l'effet de troupeau l'emporte sur le système et le modèle diverge : les réseaux de connections (ensemble de trader connectés directement ou par l'intermédiaire d'autres traders) sont de taille tellement importante que le solde de l'offre et de la demande est arbitrairement grand.

Intéressons-nous au cas où l'effet de troupeau reste modéré, si c est proche de 1 tout en étant inférieur à 1. Supposons en outre que $n_{\text{nr}} < |\text{flf}|$ reste fini, ce qui est réaliste : le nombre d'ordres de bourse à un instant donné reste en général fini. Le modèle conduit alors à une loi puissance exponentiellement tronquée du type :

$$P(|S| > x) = (1/x^a) e^{-x/A}$$

Cette fonction ressemble à une loi puissance tant que $x \ll A$, dans ce cas, $e^{-x/A}$ est proche de 1. En revanche, dès que x dépasse A , c'est la décroissance exponentielle qui remportera, d'où la dénomination troncature exponentielle. Ainsi, lorsque A est suffisamment grand, la loi pourra ressembler à une loi puissance sur

un domaine relativement large.

Cont et Bouchaud ont également quantifié l'épaisseur de la queue de distribution de leur modèle, avec les deux constats suivants :

- Plus le nombre moyen de connections par trader est grand, c'est-à-dire plus les avis des traders sont liés entre eux, plus les queues de distribution des variations de prix seront épaisses.
- Plus la profondeur de marché financier est faible, plus les queues de distributions seront épaisses également. Cela met bien en valeur le lien constaté sur les marchés entre réduction de la liquidité, c'est-à-dire lorsqu'il y a moins d'acheteurs/vendeurs, et augmentation des amplitudes de variations (et donc, augmentation du risque).

Grâce à une structure très simple, qui repose sur l'influence mutuelle des traders entre eux, nous avons donc pu mettre en valeur de nombreux phénomènes :

- loi puissance (exponentiellement tronquée) des variations de prix ;
- seuil critique dans l'effet de troupeau dont le dépassement conduit à l'explosion du modèle;
- influence du taux d'interconnexion des traders sur l'épaisseur des queues de distribution ;
- lien entre profondeur de marché et épaisseur des queues de distribution.

Naturellement, la structure utilisée est trop schématique et approximative pour donner une représentation fine des variations de prix. Elle est utile pour comprendre les phénomènes, pour rendre compte de liens de causalités et, éventuellement, pour mettre en garde sur l'existence de seuils critiques pouvant conduire à l'instabilité des marchés. Elle présente en outre de nombreuses voies de raffinement, par exemple dans la modélisation de l'influence des traders les uns sur les autres. En effet, plutôt que de créer des liens binaires aléatoires entre les traders, on peut imaginer des jeux d'influence où le choix d'un trader est dicté non seulement par sa vue du marché mais aussi par celle de ses voisins, le poids de l'avis des autres dans le choix final du trader dépendant alors de son influençabilité.

c Les processus de Lévy

Quittons maintenant la logique physicienne pour aller vers une logique mathématique où le point de départ n'est plus l'historique mais l'axiomatique.

La modélisation gaussienne s'appuyait sur les trois hypothèses fondatrices suivantes :

- Les cours des actions sont continus

- Leurs rendements sont stationnaires.
- Les rendements sont indépendants des valeurs passées de l'action.

Ces trois seules hypothèses suffisent à définir le mouvement log normal. Les modèles de volatilité permettent d'adapter la modélisation, en jouant sur la paramétrisation de la volatilité, constante dans le modèle lognormal d'origine mais pouvant dépendre du temps, de la valeur de l'action, de l'historique de volatilité ou d'un facteur aléatoire dans les modèles plus élaborés. Ainsi, les modèles de étudiés aux chapitres permettent d'assouplir les hypothèses de stationnarité et d'indépendance

La seule hypothèse qui n'est pas remise en question par les modèles de volatilité est la première. La continuité des cours. Il s'agissait d'une hypothèse que nous avons considérée comme technique, sans grand impact sur la modélisation. Or, abandonner cette hypothèse nous amène à une nouvelle classe de modèles beaucoup plus large : les processus de Lévy. Partir de ces processus, pour les adapter éventuellement a posteriori aux caractéristiques du marché par la paramétrisation des constantes des diffusions permet d'élargir notre spectre de modèles tout en partant d'une base axiomatique claire et intuitive.

Nous allons dans la présente section décrire les processus de Lévy, pour en comprendre la richesse, les caractéristiques et leur intérêt dans la modélisation des actifs financiers. Formellement un processus de Lévy L_t est un processus stochastique qui vérifie les propriétés suivantes¹²⁹ :

- Ses incréments $L_{t-s} - L_t$ sont stationnaires
- Ses incréments $L_{t-s}-L_t$ sont indépendants des valeurs passées L_u du processus.

Comme dans le cas du mouvement brownien, la modélisation des actions nécessite par la suite le passage à l'exponentielle du processus de Lévy. La première question d'un mathématicien face à la nouvelle axiomatique est : pourquoi le simple fait d'abandonner l'hypothèse de continuité nous a-t-il permis de sortir du cadre gaussien? La réponse est que l'on a quitté le domaine de validité du théorème central limite. Ce théorème affirme que la moyenne d'une infinité de variables aléatoires, indépendantes, pas trop volatiles et de même loi converge vers une loi gaussienne. Considérons L_T un processus de Lévy ($L_0= 0$). Nous avons :

¹²⁹ Le lecteur mathématicien notera qu'il faut également rajouter les hypothèses que le processus est c.kil.'u; (continu a droite, limite a gauche) et que /,y - 0

$$\begin{aligned}
L_T &= (L_T - L_0) \\
&= \left(L_T - L_{\frac{T}{2}} \right) + \left(L_{\frac{T}{2}} - L_0 \right) \\
&= \left(L_T - L_{\frac{2T}{3}} \right) + \left(L_{\frac{2T}{3}} - L_{\frac{T}{3}} \right) + \left(L_{\frac{T}{3}} - L_0 \right) \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \sum_{i=1}^N \left(L_{\frac{iT}{N}} - L_{\frac{(i-1)T}{N}} \right)
\end{aligned}$$

Le processus se décompose ainsi en la somme de ses incréments sur de plus petits pas de temps. La spécificité des processus de Lévy est que ses incréments sont indépendants et de même loi (pour un pas de temps de donné). Ainsi, le processus est à tout moment la somme d'un nombre arbitrairement grand (N peut tendre vers l'infini) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Le théorème central limite affirme alors que le résultat de cette somme ne peut être qu'une loi gaussienne, pour peu que ces variables ne soient pas trop volatiles. Ainsi que nous allons le voir au paragraphe suivant, les processus de Lévy continus vérifient l'hypothèse de faible variabilité, le théorème central limite assure alors que ces processus ne peuvent être qu'un mouvement brownien (de loi d'évolution gaussienne)

Affirmer qu'un processus est continu, c'est poser que ses incréments tendent vers zéro lorsque le pas de temps tend vers zéro : $\left(L_{\frac{iT}{N}} - L_{\frac{(i-1)T}{N}} \right)$ doit tendre vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Ainsi, dans le cas continu, les incréments $\left(L_{\frac{iT}{N}} - L_{\frac{(i-1)T}{N}} \right)$ du processus de Lévy ne peuvent pas être trop volatils. Cela explique pourquoi l'hypothèse de continuité permet d'entrer dans le champ du théorème central limite. Le seul processus de Lévy continu est donc le mouvement brownien, c'est d'ailleurs ce résultat qui nous a permis de construire le modèle de Black-Scholes à partir des seules hypothèses de continuité, de stationnarité et d'indépendance.

Lorsque l'on abandonne l'hypothèse de continuité, nous sortons du domaine de validité du théorème central limite et arrivons à une classe de processus stochastiques plus large. Ces processus de Lévy se décomposent comme la somme d'un mouvement brownien et d'un processus à sauts. Nous n'entrerons pas dans le détail des processus à sauts mais nous les illustrerons par quelques exemples. Une première catégorie, la plus simple, est constituée des processus de Poisson composés. Il s'agit simplement de processus constants par morceaux qui ne peuvent bouger que par des sauts de taille fixe ou aléatoire. Ces sauts interviennent à un instant aléatoire. On pourrait par exemple modéliser le nombre de points lors d'un match de basket par un processus de Poisson composé dont les sauts sont de taille aléatoire égale à 1, 2 ou 3. Divers tirages aléatoires de processus de Poisson composés sont représentés sur le

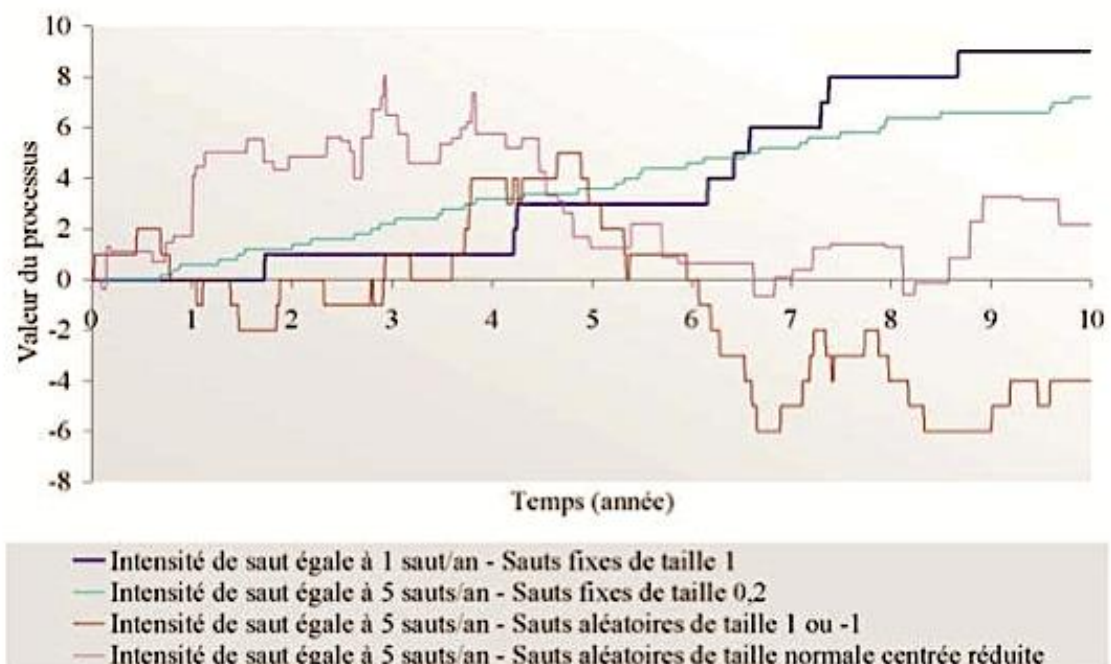


Figure 5 : Divers tirages aléatoires de processus de Poisson composés

Ces processus de Poisson composés permettent de construire le modèle d'évolution d'actif de Merton. Dans ce modèle, l'évolution du prix des actifs S_t est définie par :

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \mu t + \sigma W_t + P_t$$

Où μ représente la dérive, σW_t est un mouvement brownien sans dérive de volatilité annuelle σ et P_t est un processus de Poisson composé. Ce processus P_t admettra alors deux types de paramètres :

- L'intensité des sauts, λ , qui matérialise la fréquence d'occurrence, plus ou moins forte des sauts.
- La taille des sauts, qui suit par hypothèse une loi normale de moyenne M_s et de volatilité V_s . Le paramètre M_s décrit la valeur moyenne des sauts et V_s , la dispersion de la taille des sauts autour de cette moyenne. Par exemple, un choix de M_s nul et de V_s grand signifiera que l'on considère que les sauts positifs sont aussi probables que les sauts négatifs et que ces sauts peuvent être très dispersés et d'assez grande taille. Un choix de M_s négatif et V_s faible signifiera que l'on rend compte uniquement des sauts négatifs (modélisation de crises par exemple) dont la taille sera toujours approximativement M_s .

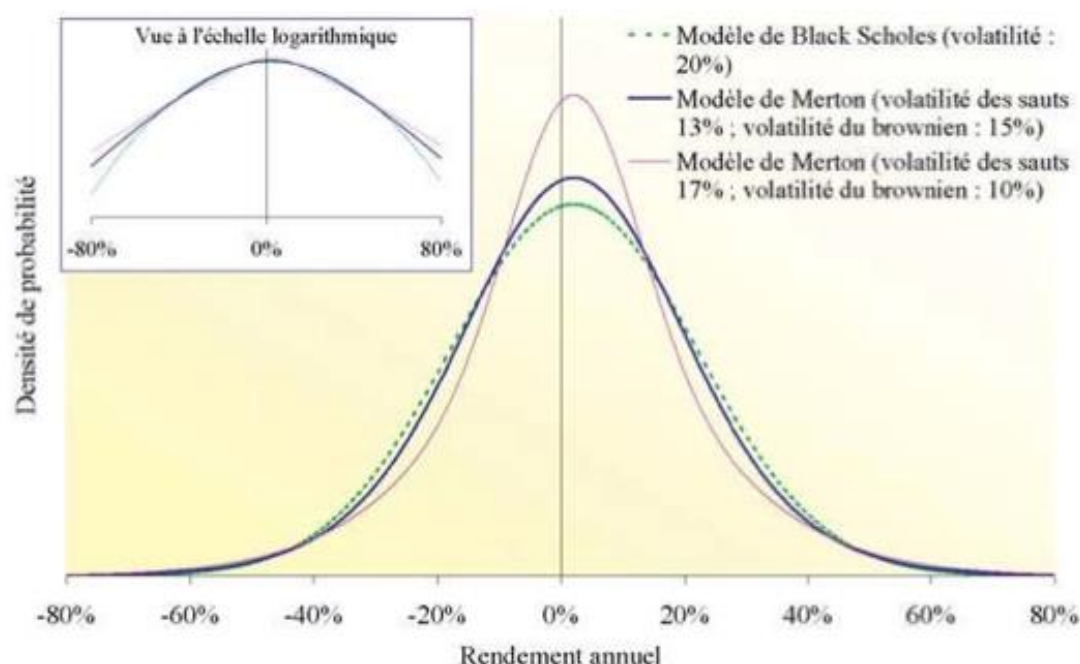


Figure 6 : distribution à un an de processus suivant le modèle de Merton dont les sauts sont centrés. Le modèle de Merton présente des queues de distribution plus épaisses que le modèle de Black-Scholes.

Le modèle de Merton apporte ainsi une composante supplémentaire au modèle de Black-Scholes, la possibilité d'événements brusques, de variations discontinues des cours : les sauts. Cette composante permet d'épaissir, modérément, les queues de distribution des lois normales comme l'illustre la figure. L'épaississement des queues de distribution est modeste car l'amplitude des sauts est matérialisée par une loi normale, c'est un choix arbitraire. L'utilisation de lois plus sévères, c'est à dire rendant plus probable des sauts importants, est tout à fait possible, notamment pour tenter de retrouver les lois puissances évoquées dans la section précédente.

Les sauts ajoutent surtout une différence qualitative de taille : l'impossibilité de couvrir continûment les produits financiers. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, nous pouvions neutraliser le risque d'un portefeuille grâce au delta hedge¹³⁰. Cette technique ne permet de couvrir que la composante continue du risque, elle ne permet pas de neutraliser le risque induit par les sauts. La théorie du modèle de Black-Scholes repose sur l'idée que notre temps de réaction est infiniment court ce qui nous permet de manipuler les actifs avec une précision infinie. En outre, le degré de liberté dont un dispose pour agir est exactement égal au nombre de degrés de liberté qu'a l'actif pour évoluer .

Les sauts du modèle de Merton détruisent ce confort offert par le modèle de Black-Scholes. Quelle que soit notre réactivité théorique, l'éventualité de l'occurrence d'un saut ajoute un degré de liberté supplémentaire aux lois d'évolution et annihile tout espoir de neutraliser le risque avec une couverture simple. Le modèle de Merton n'est pas complet, la mesure risque neutre équivalente n'est pas unique.

¹³⁰ voir annexe

Cela implique que dans le modèle de Merton, les prix risque neutre des actifs ne sont pas uniques : ce modèle autorise l'existence d'autres prix valides au sens où ils ne sont pas arbitrables.

Un des intérêts du modèle est l'analyse et l'évaluation du risque de saut. Comparer le prix obtenu dans le modèle de Black-Scholes et celui obtenu dans le modèle de Merton peut permettre de quantifier l'impact potentiel des variations brusques de cours et donc de l'hypothèse, irréaliste, de réactivité instantanée pour la couverture des risques. En outre, certains produits et constructions financières sont particulièrement sensibles à ce risque de saut.

Cette réflexion montre bien qu'un modèle n'est pas en soi meilleur qu'un autre, tout dépend de l'utilisation que l'on souhaite en faire. Si notre objectif est de vendre un produit financier traditionnel en le couvrant en delta hedge, il est important d'étudier la stratégie dans les deux modélisations que nous avons vues : le modèle de Black Scholes (éventuellement augmenté d'un modèle de volatilité) permettra de trouver un prix de marché pertinent, même si le modèle ne capte pas tous les risques; les modèles à sauts permettront d'étudier les risques de variations brutales des cours et de quantifier, par exemple, un risque de modèle.

Il existe d'autres types de processus de Lévy que nous n'approfondirons pas. Plus difficiles à se représenter intuitivement, ils peuvent avoir une intensité de sauts infinie, c'est-à-dire qu'entre deux instants, il existe toujours une infinité de sauts. Ces processus permettent de construire des lois d'évolution comme les processus α -stables, proposés par Mandelbrot, dont une illustration est présentée dans la figure suivante :

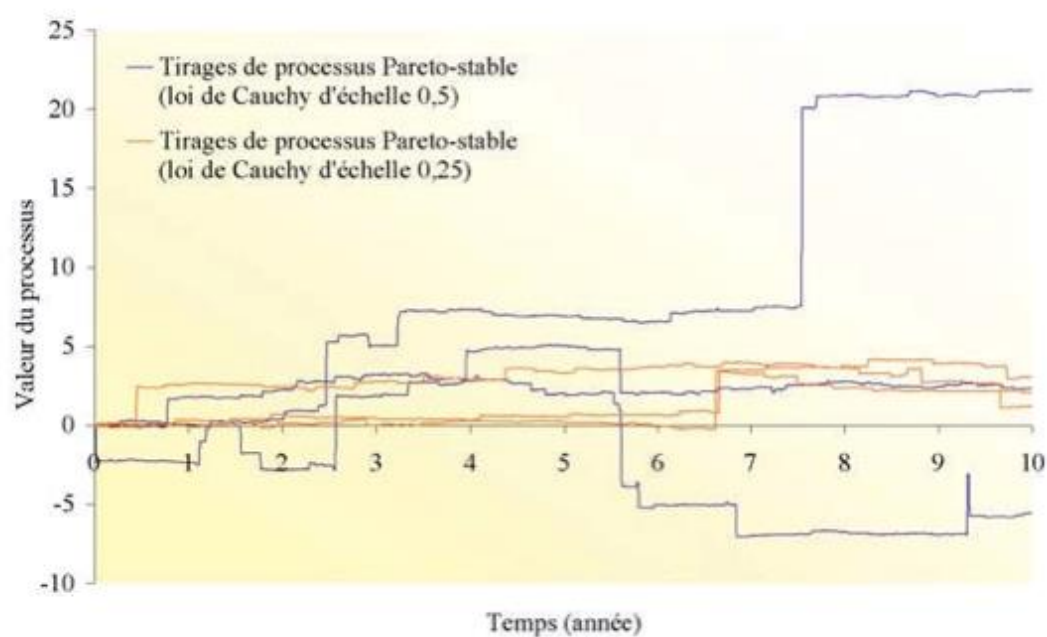


Figure 7 : exemple de trajectoires de processus α -stables (loi de Cauchy).

L'évolution des processus est constituée d'une infinité de sauts quasi infinitésimaux et de quelques sauts de très forte amplitude qui surviennent de la même manière que les sauts de Poisson composés.

Les processus de Lévy ouvrent ainsi de nombreuses voies d'analyse et de perfectionnement des modèles. La prise en compte de sauts permet notamment d'épaissir les queues de distribution, dans de faibles proportions (modèle de Merton) ou jusqu'à donner une variance infinie aux diffusions (cas des lois α -stables). Les deux hypothèses fondamentales sont la stationnarité des processus et l'indépendance des rendements. Comme dans le cadre du modèle de Black-Scholes, ces deux contraintes peuvent être contournées facilement par l'utilisation de paramètres dépendant du temps ou d'un nouveau facteur aléatoire comme dans les modèles de volatilité.

Conclusion chapitre 6

Les marchés financiers se prêtent naturellement à la construction de modèles mathématiques car ils produisent des données numériques en grande masse. Au premier rang d'entre elles se trouvent les prix des produits financiers, plus ou moins exotiques.

Après le calcul des prix vient la mesure du risque : elle vise à quantifier le risque porté par les activités de marché. La mesure de risque est beaucoup moins contrainte par les besoins de cohérence avec les prix de marché et beaucoup plus par la cohérence avec la réalité. Par exemple, les structures de corrélation simplistes issues des vecteurs gaussiens peuvent se révéler totalement inappropriées. L'étape la plus importante est l'identification des sources de risques, notamment les facteurs de risque de la Var. Par ailleurs, les mesures de risques font naître d'autres problèmes, qui sont complètement exogènes à la qualité intrinsèque de l'évaluation des risques, mais qui tiennent aux risques systemiques qu'elles concourent à alimenter par leur périodicité. Ce point est aujourd'hui bien identifié par les autorités de contrôle bancaires qui vont tenter d'y remédier notamment grâce aux nouvelles normes Bâle 3 et 4.

CHAPITRE 7 : REALISATION DU MODELE VAR

ACTIONS

Dans la première partie nous avons étudié les différents aspects théoriques de l'approche Value at risk. Il était clair que l'étape critique dans la détermination de la VaR est l'obtention de la distribution des changements de valeur du portefeuille, c'est-à-dire des gains et des pertes potentiels. Cette distribution doit faire l'objet de plusieurs analyses statistiques pour détecter les faits stylisés et les caractéristiques empiriques discutés précédemment.

Afin d'illustrer de manière empirique nos analyses et d'appliquer l'approche VaR aux données du marché financier marocain, nous allons constituer un portefeuille fictif avec les titres les plus représentatifs du marché. Mais avant cela nous allons procéder à la description des données collectées sur le marché boursier marocain et sur la base desquelles se fera le choix du portefeuille et l'estimation de la VaR.

I. Présentation et étude des données

1. Le choix des données

Dans ce chapitre nous allons utiliser les données de marché pour estimer la Value at Risk d'un portefeuille d'actions. Notre base de données sera constituée des valeurs journalières des titres du portefeuille sur une période de deux années allant du 01/03/11 jusqu'au 31/01/2014. Le portefeuille sera composé d'un certain nombre d'actions des sociétés cotées sur la bourse de Casablanca.

Les actions qui feront partie du portefeuille seront choisies parmi celles qui font partie de l'un ou l'autre des deux indices MASI et MADEX à fin que le portefeuille soit le plus possible représentatif du marché financier marocain.

Les valeurs des actions le jour au jour seront exprimées par leurs prix journaliers sur la bourse de Casablanca.

La constitution d'un portefeuille fictif :

Dans l'objectif de respecter de manière cohérente les principes fondamentaux de gestion de portefeuille, ce portefeuille doit atteindre un niveau de diversification acceptable pour réduire le risque diversifiable (risque spécifique).

Dans cette logique, on peut segmenter le marché marocain en dix secteurs, à savoir :

Titre	Secteur
LESIEUR CRISTAL	Agroalimentaire / Production
Atlanta	Assurances
ATTIJARIWafa BANK	Banques
AUTO HALL	Distributeurs
DOUJA PROM ADDOHA	Immobilier
RISMA	Loisirs et Hôtels
SAMIR	Pétrole et Gaz
MICRODATA	Matériels, Logiciels et Services Informatiques
DELTA HOLDING S.A	Sociétés de Portefeuille Holding

Ainsi, dans le choix des titres qui vont faire partie de notre portefeuille fictif nous devons tenir compte d’une diversification sectorielle en choisissant des titres dans des secteurs différents et relativement peu corrélés entre eux. Par ce fait, dans le choix de ces titres nous nous sommes imposé trois critères à satisfaire :

- Le titre doit être présent dans l’un ou l’autre des deux indices MASI et MADEX à fin que le portefeuille soit le plus représentatif possible du marché financier marocain.
- L’action choisie doit représenter le meilleur coefficient de variation (CV) dans son secteur à fin de sélectionner les titres qui représentent le meilleur rapport risque / rentabilité de chaque secteur.
- Chaque titre doit représenter un degré de corrélation faible avec les autres titres des autres secteurs à fin de respecter le critère de diversification.

Bien évidemment ce portefeuille ne représente en aucun cas les meilleurs titres du marché (selon le critère CV) mais nous avons juger important de tenir compte de la diversification sectorielle à fin d’atténuer le risque spécifique de chaque titre et à fin que le portefeuille soit le plus représentatif possible du marché boursier marocain.

Le poids de chaque titre dans le portefeuille sera proportionnel à l’importance de sa capitalisation boursière par rapport aux autres titres sélectionnés le 03/02/14. Ainsi, par exemple le titre ATTIJARIWafa BANK présente une capitalisation boursière de 17795740,65 DH sur une capitalisation totale (des neuf titres) de 49181874,97 DH pour le

même jour . Ainsi la proportion du titre AB dans notre portefeuille sera de 36 % . Pour le reste du travail nous allons supposer que le montant investis en actions le 03/02/14 est de 1000000 DH , par ce fait le montant investis en actions ATTIJARIXAFA BANK sera de 361835,344.

En divisant le montant investis en actions par le cours du titre on trouve le nombre des actions dans le portefeuille.

Dans cette logique on a :

Nombre de titres awB = 361835,344/ 305,95=1183

Si on applique cette méthode sur les neufs autres titres on aura dans notre portefeuille :

Titre	Secteur	Capitalisation boursière	Répartition dans le portefeuille	Mt investi	Cours au 3/02/2014	N ^b re de titres
LESIEUR CRISTAL	Agroalimentaire / Production	14428240	29%	293364,9847	102	2876
atlanta	Assurances	233678,97	0%	4751,322924	60,92	78
ATTIJARIWAFABANK	Banques	17795740,65	36%	361835,344	305,95	1183
AUTO HALL	Distributeurs	233678,97	0%	4751,322924	83,97	57
DOUJA PROM ADDOHA	immobilier	8559216,1	17,40%	174031,9194	57,5	3027
RISMA	Loisirs et Hôtels	1565004,85	3,18%	31820,76427	222,55	143
SAMIR	Pétrole et Gaz	1764948,5	3,59%	35886,15727	303,8	118
MICRODATA	Matériels, Logiciels et Services Informatiques	135258,3	0,28%	2750,165586	125,05	22
DELTA HOLDING S.A	Sociétés de Portefeuille Holding	1592059,11	3,24%	32370,85026	32	1012
Total		49181874,97	100%	1000000		

Figure 8 : composition du portefeuille fictif

2. Étude des statistiques descriptives des rendements du portefeuille choisi

Nous avons vu dans la deuxième partie que la détermination de la distribution des rendements du portefeuille est l’une des étapes les plus importante dans l’estimation de son VaR. Avant de pouvoir déterminer la loi de distribution des rendements nous devons tout d’abord procéder à l’étude des statistiques descriptives de ces derniers. Les données qui vont constituer l’input sont les rendements journaliers du portefeuille sélectionné précédemment.

Ces rendements sont calculés pour la période allant du 01/03/11 jusqu'au 31/01/2014, ainsi nous disposons de 730 observations.

Pour des raisons de simplification, ces actions sont considérées sans dividendes. Ainsi le rendement de chaque titre est calculé comme suit :

$$R_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$$

Avec :

- P_t : prix de l'action à l'instant t
- P_{t-1} : prix de l'action à l'instant $t-1$

Le programme E-views nous procure les résultats suivants :

d1.2.1 Les tests de normalités

➔ Méthodologie:

On va tester si la distribution des rentabilités de notre portefeuille fictif peut être modélisée par la distribution normale. Notre démonstration s'effectuera en trois étapes. Nous calculerons dans un premier temps le Skewness pour chiffrer l'écart de symétrie constatée entre la loi normale et la distribution de notre portefeuille.

Dans un deuxième temps, nous calculerons le Kurtosis pour vérifier si la distribution du portefeuille est plus ou moins tassée par rapport à la loi normale. Enfin, nous effectuerons le test de normalité de Jarque et Bera.

➤ Détermination du coefficient d'asymétrie de Fischer

Le coefficient de Skewness (Skew) ou coefficient d'asymétrie est une mesure de l'asymétrie de la distribution de la série autour de sa moyenne. Le principe du test est: H_0 la distribution est symétrique et H_1 la distribution est asymétrique.

Le Skewness est calculé de la manière suivante :

$$Skew = \frac{[T^{-1} \sum_{i=1}^T (Y_i - \bar{Y})^3]^2}{[T^{-1} \sum_{i=1}^T (Y_i - \bar{Y})^2]^3} = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \approx N\left(0; \sqrt{\frac{6}{T}}\right)$$

Avec :

- μ_3 : correspondant au moment centré d'ordre 3
- σ : correspondant à l'écart type
- X : correspondant aux rentabilités

Le Skewness d'une distribution symétrique, comme pour une distribution normale, est zéro. Un Skewness positif (resp. négatif) signifie que la distribution a une queue épaisse à droite (resp. gauche)

➤ Détermination du Coefficient d'aplatissement

L'objectif est de mesurer le niveau d'aplatissement de la distribution des rentabilités de notre portefeuille d'action, par rapport à la distribution normale centrée réduite. En statistique ce niveau d'aplatissement est mesuré par le Kurtosis.

Le coefficient d'aplatissement est égal à :

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[x - E(x)]^4}{\sigma^4}$$

Avec :

- μ_4 correspondant au moment centré d'ordre 4
- σ correspondant à l'écart type
- x les rentabilités

En fonction du résultat que nous obtiendrons nous aurons ainsi trois résultats possibles:

➔ Si $K = 3$ alors la distribution des rentabilités a un coefficient d'aplatissement similaire à la distribution normale (Distribution mésocurtique)

➔ Si $k > 3$, la distribution de notre portefeuille sera plus tassée que la distribution normale avec des queues épaisses (Distribution leptocurtique)

➔ Si $K < 3$, la distribution de notre étude présentera des queues plus fines que celle de la loi normale. (Distribution platicurtique)

➤ Le test de Jarque et Bera

Le test de Jarque et Bera conjugue les deux coefficients et permet de nous dire si oui ou non, la distribution de notre portefeuille suit une loi normale. Il correspond à la somme des coefficients d'aplatissement et d'asymétrie élevé au carré.

La statistique de Jarque-Bera permet de savoir si la série est normalement distribuée. Elle mesure la différence entre le Skewness et le Kurtosis de la série et celles d'une distribution normale, et est calculé ainsi

$$JB = \frac{n-k}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

Où k représente le nombre de coefficients estimés du modèle, et n le nombre de période.

Sous l'hypothèse nulle de normalité, on a :

$$JB \sim \chi^2_{1-\alpha}(2)$$

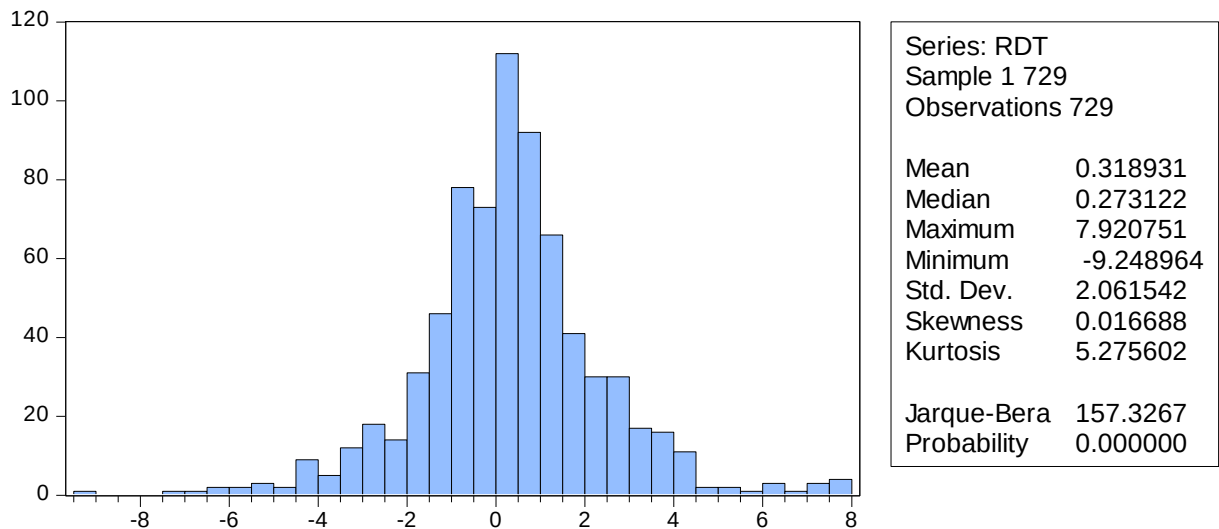
*Règle de décision :

➔ Si $JB > \chi^2_{0.95}(2)$ alors l'hypothèse nulle de normalité est rejetée au seuil de 5%.

➔ Si la p -value < 0.05 alors on rejette l'hypothèse de normalité au seuil de 5%

Résultat et interprétations sur l'hypothèse de normalité de la distribution des rentabilités :

Sur la période de notre étude, du 01/03/11 au 31/01/2014, le programme Eviews nous permet d'obtenir les données suivantes :



Histogramme et statistiques descriptives du portefeuille

Au vu du graphique, et des indicateurs considérés, nous pouvons affirmer que la distribution de notre portefeuille ne suit pas une distribution normale.

Le skewness négatif (0,01) indique que les rentabilités du portefeuille sont étalées vers la droite. Un investissement sur notre portefeuille aura donc une probabilité de hausse des rendements, supérieure à une baisse.

Le coefficient d'aplatissement de fischer est très largement supérieur à 3 (5.27), la distribution des rendements présente donc des queues plus épaisses que la distribution normale, il rend compte des phénomènes marginaux de la fluctuation des rentabilités étudiées.

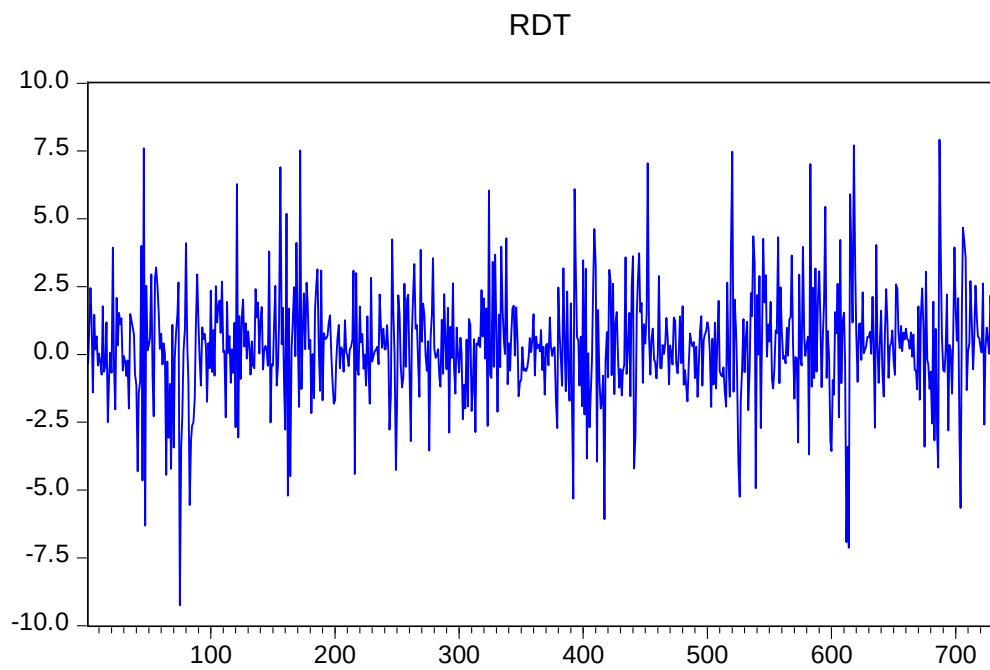
Enfin, le test de Jarque et Bera, ($p\text{-value}=0.00<0.05$) confirme que notre distribution ne suit pas une loi normale.

Les tests de stationnarité

En vue d'étudier la stationnarité de notre série, nous allons réaliser le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF). Ce test à été développé en 1981 en se basant sur l'hypothèse de corrélation des résidus et et sur l'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) des 3 modèles.

Description de l'allure graphique de la série « rdt »

Evaluation graphique de la Stationnarité



Au vue du graphique, on peut conclure qu'il s'agit d'un processus stationnaire, la moyenne et la variance sont constants au cours du temps.

Le processus ne semble ni un processus DS ni TS , mais un bruit blanc. Dans cette étape on n'a pas pouvoir de dire qu'il est un bruit blanc car un processus stationnaire n'est pas forcément un bruit blanc.

Analyse des fonctions d’auto-corrélation simple et partielle

Sample: 1 729
Included observations: 729

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.046	-0.046	1.5257	0.217
		2 0.069	0.067	4.9671	0.083
		3 -0.063	-0.057	7.8703	0.049
		4 -0.063	-0.074	10.833	0.029
		5 -0.073	-0.071	14.725	0.012
		6 0.037	0.037	15.728	0.015
		7 -0.021	-0.017	16.049	0.025
		8 0.006	-0.014	16.080	0.041
		9 0.054	0.052	18.256	0.032
		10 -0.009	-0.006	18.313	0.050
		11 0.046	0.041	19.896	0.047
		12 0.044	0.052	21.307	0.046
		13 0.006	0.012	21.333	0.067
		14 0.037	0.044	22.361	0.071
		15 -0.002	0.008	22.363	0.099
		16 -0.005	0.007	22.381	0.131
		17 -0.011	-0.002	22.467	0.167
		18 0.003	0.005	22.474	0.212
		19 -0.014	-0.005	22.625	0.254
		20 -0.001	-0.011	22.626	0.308
		21 0.006	0.003	22.651	0.363
		22 0.008	0.005	22.694	0.419
		23 -0.036	-0.047	23.663	0.423
		24 -0.035	-0.046	24.565	0.430
		25 -0.009	-0.011	24.622	0.484
		26 0.043	0.041	26.013	0.462
		27 -0.054	-0.064	28.253	0.398
		28 0.091	0.070	34.545	0.184

Commentaire :

Ici, les coefficients d’auto-corrélation simple ne sont pas significativement différent de zéro.

(Prob< =0.05).

Le corrélogramme a une forme d’un bruit blanc car rien qui dépasse. Ceci est aussi caractéristique d’une série stationnaire. Nous vérifions par la suite cette affirmation par l’application de test de stationnarité.

Nous avons mis en évidence la stationnarité de la série par l’étude du corrélogramme. Nous allons utiliser les tests de DF (ou DFA) qui nous permet de détecter la non-stationnarité de processus et d’identifier la nature de cette non stationnarité (TS, DS ou AR(1)).

La différence entre DF et DFA reste dans le nombre de retards p retenus. Si le Lag Length est égale à zéro, alors nous allons faire le test de Dickey Fuller simple. Si $p > 0$ nous appliquons le test Dickey Fuller augmenté.

Le choix du nombre de retards

Pourquoi de choisir un nombre de retard optimal est important ? :

Inclusion d'un nombre insuffisant de retards peut affecter le niveau du test tandis que l'introduction d'un nombre trop-élevé de retards réduit le nombre de degrés de liberté et donc la puissance du test, c'est-à-dire qu'il y a un Racine unitaires alors que notre processus est stationnaire.

Nous allons déterminer le nombre de retard p optimal par EViews qui calcule directement le p optimal :

En faisant les tests de racine unitaire par les critères d'Akaike (AIC) et de Schwartz (SIC), Eviews nous indique p=0.

Nous allons faire le test de Dickey Fuller simple par la suite comme le nombre de retards optimal est zéro.

La procédure de test : On part du modèle le plus général (Trend and intercept). On y teste la racine unitaire puis on vérifie par un test approprié que le modèle retenu est le bon, si on n'est pas dans le bon modèle, on recommence dans un modèle plus contraint (le modèle 2), puis avec le model 3.

Modele 1 : avec tendance et constante

Test de Racine unitaire :

			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-28.27728	0.0000
Test critical values:	1% level		-3.970708	
	5% level		-3.416001	
	10% level		-3.130278	
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(RDT)				
Method: Least Squares				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RDT(-1)	-1.048938	0.037095	-28.27728	0.0000
C	0.125738	0.152914	0.822278	0.4112
@TREND("1")	0.000575	0.000364	1.580902	0.1143
R-squared	0.524467	Mean dependent var		0.001866
Adjusted R-squared	0.523155	S.D. dependent var		2.983107
S.E. of regression	2.059953	Akaike info criterion		4.287356
Sum squared resid	3076.470	Schwarz criterion		4.306272
Log likelihood	-1557.598	Hannan-Quinn criter.		4.294655
F-statistic	399.8023	Durbin-Watson stat		1.993345
Prob(F-statistic)	0.000000			

Commentaire :

$t\text{-Statistic} = -28,27 < VC_3 \approx -3$

Règle de décision ;

☐☐☐ On rejette l'hypothèse nulle de racine unitaire, il n'existe pas de Racine unitaire donc le série est stationnaire.

□□□A fin de voir si le modèle 1 est un bon modèle, nous allons faire le test de student sur le coefficient du modèle pour voir s’il y a tendance.

Test de student : $t_c=1.58<1,96$

On ne rejette pas l’hypothèse H_0 la nullité de b, donc le série n’a pas de tendance. On n’est pas dans le bon modèle, nous allons continuer de faire le test DF avec le modèle plus contraint (modèle 2)

Modele 2 : sans tendance

Null Hypothesis: RDT has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=19)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-28.20395	0.0000
Test critical values:	1% level		-3.439105	
	5% level		-2.865294	
	10% level		-2.568825	
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(RDT)				
Method: Least Squares				
Date: 12/28/14 Time: 14:59				
Sample (adjusted): 2 729				
Included observations: 728 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RDT(-1)	-1.045661	0.037075	-28.20395	0.0000
C	0.334364	0.077330	4.323882	0.0000
R-squared	0.522828	Mean dependent var		0.001866
Adjusted R-squared	0.522170	S.D. dependent var		2.983107
S.E. of regression	2.062079	Akaike info criterion		4.288050
Sum squared resid	3087.075	Schwarz criterion		4.300661
Log likelihood	-155	Hannan-Quinn criter.		4.292916
	8.850			
F-statistic	795.4627	Durbin-Watson stat		1.993465
Prob(F-statistic)	0.000000			

Commentaire :

t-Statistic = -28< VC₂ Règle de décision ;

□□□On rejette l’hypothèse nulle de racine unitaire, il n’existe pas de Racine unitaire donc la série est stationnaire.

□□□A fin de voir si le modèle 2 est un bon modèle, nous allons faire le test de student sur le paramètre c du modèle pour voir s’il y a une constante dans mon modèle. (toujours à droite du stratégie du test)

Tc=4.32>1,96

On rejette l’hypothèse H0 la nullité de c, donc le modèle 2 présente une constante.

Le test de Phillips Perron

Le test de Phillips et Perron est basé sur une modification non paramétrique des statistiques de Dickey-Fuller pour prendre en compte l’auto-corrélation des résidus.

Nous allons utiliser les modèles 1 ,2 et 3 avec les mêmes hypothèses sauf les valeurs empiriques du t Student sont corrigées.

La valeur de l définit le nombre de retards calculé par la règle de Newey West, est environ égale à :

$$l = \left\lceil 4 \left(\frac{359}{100} \right)^{2/9} \right\rceil \cong 5.31$$

□□Modèle 1, Modèle 2, Modèle 3

Null Hypothesis: RDT has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 13 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-28.42446	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.970708	
5% level	-3.416001	
10% level	-3.130278	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	4.225920
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	3.708327

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(RDT)
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:02
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RDT(-1)	-1.048938	0.037095	-28.27728	0.0000
C	0.125738	0.152914	0.822278	0.4112
@TREND("1")	0.000575	0.000364	1.580902	0.1143
R-squared	0.524467	Mean dependent var	0.001866	
Adjusted R-squared	0.523155	S.D. dependent var	2.983107	
S.E. of regression	2.059953	Akaike info criterion	4.287356	
Sum squared resid	3076.470	Schwarz criterion	4.306272	
Log likelihood	-1557.598	Hannan-Quinn criter.	4.294655	
F-statistic	399.8023	Durbin-Watson stat	1.993345	

Prob(F-statistic)	0.000000	
Null Hypothesis: RDT has a unit root		
Exogenous: Constant		
Bandwidth: 12 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-28.29895	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.439105	
5% level	-2.865294	
10% level	-2.568825	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		4.240488
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		3.845115

Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(RDT)				
Method: Least Squares				
Date: 12/28/14 Time: 15:02				
Sample (adjusted): 2 729				
Included observations: 728 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RDT(-1)	-1.045661	0.037075	-28.20395	0.0000
C	0.334364	0.077330	4.323882	0.0000
R-squared	0.522828	Mean dependent var		0.001866
Adjusted R-squared	0.522170	S.D. dependent var		2.983107
S.E. of regression	2.062079	Akaike info criterion		4.288050
Sum squared resid	3087.075	Schwarz criterion		4.300661
Log likelihood	-1558.850	Hannan-Quinn criter.		4.292916
F-statistic	795.4627	Durbin-Watson stat		1.993465
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: RDT has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 0 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-27.53742	0.0000
Test critical values: 1% level	-2.568142	
5% level	-1.941259	
10% level	-1.616407	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	4.349689
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	4.349689

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(RDT)
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:03
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RDT(-1)	-1.021222	0.037085	-27.53742	0.0000
R-squared	0.510539	Mean dependent var	0.001866	
Adjusted R-squared	0.510539	S.D. dependent var	2.983107	
S.E. of regression	2.087025	Akaike info criterion	4.310729	
Sum squared resid	3166.574	Schwarz criterion	4.317034	
Log likelihood	-1568.105	Hannan-Quinn criter.	4.313162	
Durbin-Watson stat	1.995471			

Conclusion :

☐☐La statistique de Phillips et Perron pour trois modèles est supérieure aux valeurs critiques. On rejette l’hypothèse nulle de racine unitaire. Il s’agit bien d’un processus stationnaire.

Identification du modèle et Estimation des paramètres

Methodologie (Box et Jenkins 1976)

Nous allons étudier les corrélogrammes simple et partiel de la série. Nous allons retenir le modèle qui satisfait ces trois conditions suivantes :

- ☐☐☐Les coefficients des paramètres sont tous significativement différents de zéro
- ☐☐☐Les polynômes d’opérateur de la partie AR ne possèdent pas de racine commune et son module est inferieur à 1.
- ☐☐☐La probabilité critique de la statistique de Ljung-Box est supérieure à 0,05

L'Identification du Processus

Le corrélogramme de notre série RDT est le suivant :

Sample: 1 729
Included observations: 729

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.046	-0.046	1.5257	0.217
		2	0.069	0.067	4.9671	0.083
		3	-0.063	-0.057	7.8703	0.049
		4	-0.063	-0.074	10.833	0.029
		5	-0.073	-0.071	14.725	0.012
		6	0.037	0.037	15.728	0.015
		7	-0.021	-0.017	16.049	0.025
		8	0.006	-0.014	16.080	0.041
		9	0.054	0.052	18.256	0.032
		10	-0.009	-0.006	18.313	0.050
		11	0.046	0.041	19.896	0.047
		12	0.044	0.052	21.307	0.046
		13	0.006	0.012	21.333	0.067
		14	0.037	0.044	22.361	0.071
		15	-0.002	0.008	22.363	0.099
		16	-0.005	0.007	22.381	0.131
		17	-0.011	-0.002	22.467	0.167
		18	0.003	0.005	22.474	0.212
		19	-0.014	-0.005	22.625	0.254
		20	-0.001	-0.011	22.626	0.308
		21	0.006	0.003	22.651	0.363
		22	0.008	0.005	22.694	0.419
		23	-0.036	-0.047	23.663	0.423
		24	-0.035	-0.046	24.565	0.430
		25	-0.009	-0.011	24.622	0.484
		26	0.043	0.041	26.013	0.462
		27	-0.054	-0.064	28.253	0.398
		28	0.091	0.070	34.545	0.184

Les probabilités critiques sont tous supérieurs à 5% . On suppose que c'est un processus bruit blanc non centré. La forme du corrélogramme nous indique également que le processus semble d'être un bruit blanc comme rien qui dépasse.

Nous allons commencer à effectuer une régression sur ARMA(1,1)

Dependent Variable: RDT
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:13
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments
Convergence achieved after 11 iterations
MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.319532	0.073901	4.323796	0.0000
AR(1)	-0.752977	0.208831	-3.605682	0.0003
MA(1)	0.698347	0.227138	3.074550	0.0022
R-squared	0.006859	Mean dependent var	0.319845	
Adjusted R-squared	0.004119	S.D. dependent var	2.062812	
S.E. of regression	2.058559	Akaike info criterion	4.286002	
Sum squared resid	3072.306	Schwarz criterion	4.304918	
Log likelihood	-1557.105	Hannan-Quinn criter.	4.293300	
F-statistic	2.503618	Durbin-Watson stat	1.969726	
Prob(F-statistic)	0.082495			
Inverted AR Roots	-.75			
Inverted MA Roots	-.70			

Les coefficients ne sont pas significativement différents de zéro. On ne retient pas ce modèle.

On est amené à enlever la variable MA(1) qui est la moins significative (p-value plus éloigné de 5%) pour améliorer la significativité globale du modèle.

On estime ce modèle sans constante comme c n'est pas significative :

Dependent Variable: RDT
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:15
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations
MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.790041	0.205096	-3.852053	0.0001
MA(1)	0.745375	0.222999	3.342502	0.0009
R-squared	-0.018581	Mean dependent var	0.319845	
Adjusted R-squared	-0.019984	S.D. dependent var	2.062812	
S.E. of regression	2.083322	Akaike info criterion	4.308548	
Sum squared resid	3151.007	Schwarz criterion	4.321159	
Log likelihood	-1566.311	Hannan-Quinn criter.	4.313414	
Durbin-Watson stat	1.940897			
Inverted AR Roots	-.79			
Inverted MA Roots	-.75			

Sans C le modèle ARMA(1,1) est bien significatif.

Dependent Variable: RDT
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:15
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.319763	0.073088	4.375021	0.0000
AR(1)	-0.045661	0.037075	-1.231591	0.2185
R-squared	0.002085	Mean dependent var	0.319845	
Adjusted R-squared	0.000710	S.D. dependent var	2.062812	
S.E. of regression	2.062079	Akaike info criterion	4.288050	
Sum squared resid	3087.075	Schwarz criterion	4.300661	
Log likelihood	-1558.850	Hannan-Quinn criter.	4.292916	
F-statistic	1.516817	Durbin-Watson stat	1.993465	
Prob(F-statistic)	0.218501			
Inverted AR Roots	-.05			

Les coefficients ne sont toujours pas significativement différents de zéros. Comme le coefficient de « C » n’est pas significative, on l’enlève.

Dependent Variable: RDT
Method: Least Squares
Date: 12/28/14 Time: 15:17
Sample (adjusted): 2 729
Included observations: 728 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	nt	Coefficie	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)		-0.021222	0.037085	-0.572253	0.5673
R-squared		-0.023613	Mean dependent var	5	0.31984
Adjusted R-squared		-0.023613	S.D. dependent var	2	2.06281
S.E. of regression		2.087025	Akaike info criterion	9	4.31072
Sum squared resid		3166.574	Schwarz criterion	4	4.31703
Log likelihood		-1568.105	Hannan-Quinn criter.	2	4.31316
Durbin-Watson stat		1.995471			
Inverted AR Roots		-.02			

Le fait d’enlever la constate pas significative, nous permet de retenir le modèle AR(1) comme le coefficient n’est significativement pas différent de zéro à 5%. (p-value < 5%).

Un nouvel examen de corrélogramme des résidus est nécessaire :

Sample: 1 729
Included observations: 728
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.015	0.015	0.1649	
		2	0.025	0.025	0.6334	
		3	-0.031	-0.032	1.3352	0.248
		4	-0.095	-0.095	8.0023	0.018
		5	-0.057	-0.053	10.393	0.016
		6	0.024	0.029	10.804	0.029
		7	-0.011	-0.015	10.900	0.053
		8	0.001	-0.013	10.900	0.092
		9	0.061	0.054	13.639	0.058
		10	-0.011	-0.010	13.722	0.089
		11	0.050	0.048	15.606	0.076
		12	0.045	0.045	17.099	0.072
		13	0.009	0.016	17.163	0.103
		14	0.036	0.042	18.147	0.111
		15	0.002	0.008	18.148	0.152
		16	-0.008	0.006	18.201	0.198
		17	-0.009	-0.002	18.265	0.249
		18	0.001	0.005	18.265	0.309
		19	-0.013	-0.006	18.389	0.365
		20	-0.004	-0.012	18.399	0.430
		21	0.010	0.006	18.469	0.491
		22	0.004	0.000	18.478	0.556
		23	-0.033	-0.045	19.315	0.565

Les probabilités critiques sont supérieurs à 5%. Ce processus a une tête de bruit blanc. Au vu de corrélogramme comme rien qui dépasse , cela me confirme qu’il s’agit bien d’un bruit blanc.

On reconnait ici un processus ARMA(1,1) significative à 5%

Validation du processus pour un processus ARMA(1 ;1)

L’analyse de Racine ARMA(1 ;1)

Nous allons vérifier la stationnarité de processus ARMA pour la stabilité du modèle, le module de racine doit être inférieur à 1.

Un processus étant toujours inversible, il est stationnaire lorsque les racines l’extérieur du cercle unité du plan.

Inverted AR Roots .09 < 1

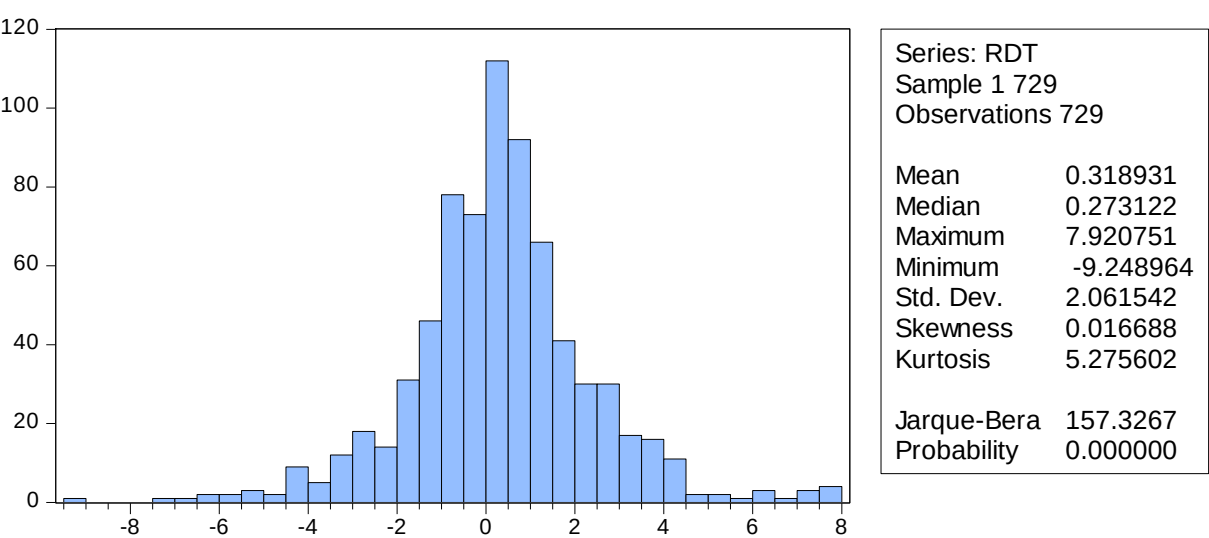
La condition sur la racine est bien vérifiée.

Conclusion : le meilleur modèle selon les critères AKAIKE et SCHZARZ, cest bien le modèle ARMA(1 ;1). Nous venons de conclure que la série est un bruit blanc donc de continuer a faire des prévisions avec ce processus est plus juste.

II. Calcul de la VaR

Soit les données suivantes :

Portefeuille	
Moyenne	0.31%
Ecart-type	2.06%
z_q	-2.33



1. La VaR normale

La VAR de notre portefeuille, en considérant l’hypothèse de normalité des distribution comme exact, sera donc égal à :

$$VaR_q = E(R_t) + z_q * \sigma(R_t)$$

Soit :

$$VaR_{0.99\%} = 0.0015 - 2.33*0.015$$

$$VaR_{0.99\%} = -0.025$$

Ainsi la perte journalière pour chaque dirham investi dans notre portefeuille est de 0,025 dirhams avec une probabilité de 99% que cette perte ne dépasse ce montant.

Toutefois, comme nous l’avons vu dans la partie précédente, la normalité des rendements n’est pas toujours évidente, voir même rare pour des séries de données financières.

Ils existent plusieurs solutions pour surmonter ce problème, l’expansion de Cornish-Fisher est l’une de celles-là.

2. L’expansion de Cornish Fischer

L’expansion de Cornish-Fisher est une relation approximative entre les percentiles d’une distribution et ces moments. Les moments d’une distribution sont : l’espérance, l’écart type, le Skewness et le Kurtosis. D’après Stuart et AL [1999], un très grand nombre de distributions

que l'on trouve en statistique tendent vers la normale quand le nombre d'observations tend vers l'infini, mais dans des échantillons de moindre taille, la distribution normale n'est pas évidente. C'est pour quoi il faut faire appel à l'expansion de Cornish-Fisher pour approximer les percentiles d'une distribution. Cette approximation est fondée sur la série de Taylor et recourt aux moments d'une distribution qui dévie de la normale pour calculer ses percentiles.

Hull [2000] fournit cette approximation jusqu'au troisième moment d'une distribution. L'expansion de Cornish-Fisher s'écrit alors comme suit :

$$w_q \cong z_q + \left(\frac{1}{6}\right)(z_q^2 - 1)Sk$$

Dans cette expression, w_q est le percentile corrigé de la distribution au seuil q ; z_q est le percentile correspondant à une $N(0,1)$ et Sk est le Skewness (Coefficient d'asymétrie).

$$w_q = -2.33 + (1/6)(-2.33^2 - 1)*(-0.05)$$

$$w_q = -2.37$$

On a alors une VAR corrigée de l'asymétrie égal à :

$$VaR_q = E(R_t) + w_q * \sigma(R_t)$$

Soit :

$$VaR_{0.99\%} = 0.0015 - 2.37*0.015$$

$$VaR_{0.99\%} = -0.034$$

Dans ce cas, w_q corrige uniquement l'asymétrie constatée sur notre distribution. La VAR corrigée, augmente de 36%. Cela signifie que l'hypothèse fausse, due à une asymétrie, d'une distribution normale des rentabilités d'un portefeuille d'action, engendre une sous estimation de 36% de sa VAR.

Il faut maintenant corriger l'excédent de Kurtosis par rapport à loi normale.

En fait le principal problème que présentent les distributions de rendements est leur caractère leptocurtique. Ce phénomène s'exprime par un excédent de Kurtosis par rapport à celui d'une distribution normale et qui est égale à 3. En tenant compte de cet excédent ($EKur$), Racicot et Théoret [2001] sont allés jusqu'à le quatrième moment de la distribution. L'expansion de Cornish-Fisher devient :

$$w_q = z_q + \frac{1}{6}(z_q^2 - 1)Sk + \frac{1}{24}(z_q^3 - 3z_q)EKur - \frac{1}{36}(2z_q^3 - 5z_q)Sk^2$$

Ainsi, en tenant compte à la fois de l'asymétrie et du leptocurtisme de la distribution des rentabilités on obtient pour $q=99\%$:

$$W_{99\%} = -3.026$$

D'où :

$$\text{VaR99\%} = 0.0015 - 3.026 \cdot 0.015$$

$$\text{VaR99\%} = -0.044$$

La VAR corrigée de l’asymétrie constatée de la distribution et du coefficient d’aplatissement n’engendre plus qu’une sous estimation de 0,7%, ce qui est tout à fait acceptable. Nous noterons toutefois que l’utilisation de la VAR, en considérant comme vrai, l’hypothèse de normalité de la distribution, à tendance, de manière générale, à sous estimer la réalité des risques. Une période d’étude plus courte aurait amplifié cette tendance. Au final nous pouvons donc admettre que sur une base de donnée de longue période l’hypothèse de normalité peut être utilisée.

3. La VaR historique

Comme a été présenté dans la partie théorique, le calcul de la VAR par la méthode de simulation historique est relativement simple puisqu’il s’agit d’une organisation des données et de calcul des quantiles de la distribution historique. Cependant cette simplicité dans le calcul ne réduit en rien la fiabilité et l’efficacité des résultats obtenus

Méthode :

Etape 1 : On calcul les variations relatives $\Delta_K(t)$ de l’ensemble des titres composant le portefeuille sur la période allant de t= 01/03/2011 à 31/01/2014

	samir	awf	microdata	delta	adoha	risma	lesieur	atlanta	autohall
01/03/11									
02/03/11	-1,89	0,31	1,07	1,48	-0,88	-1,06	0,96	0,02	3,54
03/03/11	-0,18	-0,31	-1,77	0,00	0,88	-3,58	0,00	-0,02	-1,20
04/03/11	1,58	0,18	1,80	0,49	0,88	3,72	3,81	-0,07	0,00
07/03/11	-2,76	0,28	0,00	0,65	0,87	-1,47	0,92	-0,03	0,67
08/03/11	2,13	0,13	-1,59	-0,64	-1,72	1,42	0,00	0,43	-0,67
09/03/11	0,70	-0,41	0,18	0,65	1,49	-2,80	0,00	-0,42	0,00
10/03/11	-1,38	-0,02	1,26	-0,64	0,09	0,00	0,00	0,98	-2,44
11/03/11	-0,70	0,79	0,00	-1,29	0,17	2,86	0,00	-0,88	0,00
14/03/11	4,06	-0,62	-0,89	3,99	0,00	-2,78	-1,82	0,79	0,00
15/03/11	-1,53	-0,16	-0,18	0,00	0,00	-0,74	0,00	2,21	-1,25
16/03/11	0,00	1,46	-0,18	0,06	0,00	-5,95	-2,78	1,21	0,00
17/03/11	0,00	-0,44	0,36	-0,44	-0,83	2,77	0,00	-3,30	0,00
18/03/11	0,00	-1,17	5,90	-3,79	2,23	-2,63	0,00	0,18	0,00
21/03/11	-0,17	0,98	2,53	4,59	-1,53	5,47	0,00	2,68	1,27
22/03/11	0,17	-0,94	-0,82	0,00	0,16	-2,62	-0,95	-0,09	1,10
23/03/11	1,20	1,25	-0,33	-0,94	0,53	0,00	0,00	4,26	-0,62
24/03/11	-2,21	-0,62	0,00	-4,56	-2,23	1,54	0,00	-4,30	-5,05
25/03/11	0,00	0,00	2,17	0,07	-0,88	-1,89	0,00	0,06	0,00
28/03/11	0,00	-1,21	1,63	6,03	0,00	2,97	0,00	1,43	3,51
29/03/11	-0,52	0,56	0,00	-0,31	-1,06	0,00	0,00	7,66	0,13
30/03/11	-0,17	0,33	0,16	-1,94	3,76	0,00	-0,10	-5,66	1,77
31/03/11	0,35	-0,28	0,16	4,54	-0,36	-6,00	0,00	-0,15	-1,86
01/04/11	-1,92	0,59	-0,96	0,00	-2,15	-5,98	0,10	-3,02	1,77
04/04/11	1,25	0,02	-2,26	-4,22	2,21	-5,75	0,00	-0,70	-0,50

TABLEAU :EXTRAIT DU TABLEAU DES RENDEMENTS HISTORIQUES

Etape 2 : on déduit à partir des observations, les valeurs futures estimées:

	samir	awf	microdata	delta	adoha	risma	lesieur	atlanta	autohall
01/03/11									
02/03/11	560,21	306,90	571,06	31,31	56,00	276,03	106,01	61,02	85,94
03/03/11	569,00	304,05	545,18	30,85	57,50	259,36	105,00	60,99	81,01
04/03/11	588,14	306,10	575,18	31,15	58,00	289,37	113,15	60,92	82,00
07/03/11	547,44	307,25	565,00	31,40	58,50	270,86	111,01	60,92	83,10
08/03/11	587,26	307,20	547,14	30,80	56,02	282,76	110,00	61,46	81,45
09/03/11	583,03	304,31	558,00	31,40	58,71	263,42	110,00	60,68	82,00
10/03/11	563,11	305,45	571,09	30,80	57,95	271,00	110,00	62,15	78,05
11/03/11	563,03	310,32	564,00	30,21	58,10	286,72	110,00	60,46	80,00
14/03/11	613,93	304,11	554,04	33,09	58,00	263,47	106,04	61,96	80,00
15/03/11	572,14	305,00	557,00	31,82	58,00	267,01	108,00	64,23	78,01
16/03/11	581,00	314,46	556,00	31,86	58,00	237,95	102,08	64,37	79,00
17/03/11	581,00	307,26	561,01	31,56	57,04	267,19	105,00	59,47	79,00
18/03/11	581,00	301,44	626,95	29,35	60,11	246,48	105,00	61,72	79,00
21/03/11	579,00	311,03	622,38	33,36	57,01	281,61	105,00	64,95	81,01
22/03/11	582,00	302,23	597,04	31,90	58,08	253,18	103,01	63,14	81,77
23/03/11	595,08	312,75	598,01	31,30	58,61	260,00	104,00	68,69	79,88
24/03/11	562,29	305,11	600,00	28,79	55,73	268,06	104,00	60,35	72,47
25/03/11	575,00	307,00	626,28	30,20	56,00	254,09	104,00	63,14	76,32
28/03/11	575,00	299,64	633,16	33,93	56,50	274,63	104,00	64,91	81,77
29/03/11	569,02	306,71	623,00	31,80	55,31	266,70	104,00	74,18	79,20
30/03/11	570,00	307,00	625,00	30,67	60,18	266,70	103,80	61,32	81,92
31/03/11	575,01	304,30	626,00	34,18	57,58	235,66	103,90	64,80	77,53
01/04/11	551,21	308,76	613,06	32,70	55,34	221,60	104,10	61,04	81,82
04/04/11	576,09	307,05	591,32	30,00	59,08	209,38	104,00	62,06	79,60

Tableau :Extrait Estimations du portefeuille

3- Troisième étape : On calcule les différences entre les différentes positions de l'historique et la valeur actuelle du portefeuille 03/04/08 pour avoir la distribution des pertes.

Valeurs futurs estimées	perte/profit
996956,1605	3043,839514
992559,9953	7440,004733
	-
1027508,19	27508,18961
	-
1016862,559	16862,55868
	-
1011717,477	11717,47748
	-
1014003,554	14003,55405

1011353,178	- 11353,17774
1019026,8	- 19026,80027
1005478,26	- 5478,260042
1006597,816	- 6597,815658
997752,807	2247,193
998325,6156	1674,38439
997146,5749	2853,42514
1008241,86	- 8241,860144
989483,8252	10516,17482
1008647,636	- 8647,636171
984594,4645	15405,53549
989611,59	10388,40995
989721,815	10278,18502
990823,6919	9176,308072
1003516,646	- 3516,645533
992493,4611	7506,538885
984895,693	15104,30698
991837,0443	8162,955748

Tableau : Extrait des pertes

4- Quatrième étape : On calcule la VaR pour un jour qui est le centile de cette distribution, ce calcul se fera à l’aide de la fonction prédéfinie sur Excel :

CENTILE (matrice, k)

Matrice : représente la matrice ou la plage de données définissant la distribution.

k représente le seuil de confiance de confiance.

Le tableau suivant donne les différents résultats de la VaR avec la méthode historique et avec des seuils de confiance différents :

VaR		
99%	95%	97,50%
-39611,2678	-28980,9772	-32893,9553

Remarque :

1. La VAR une fonction croissante du degré de confiance : plus le degré de confiance est important plus le niveau de risque potentiel est grand.

2. Dans le contexte réglementaire du projet nous nous contenterons d’un seuil de confiance de 99% et un horizon de temps de 1 jour et 10 jours.

4. Calcul de la VaR avec la méthode de variance-covariance

Comme a été mentionné dans le chapitre, il existe une deuxième méthode pour le calcul de La VaR, cette méthode se base sur la construction de la matrice Variance-Covariance et en tirer la variance du portefeuille en tenant compte des corrélations entre les différents actifs. Cette rubrique traitera de la construction de cette matrice et de la méthode de calcul de la VaR à l’aide de cet outil.

Méthode

Première étape : Calcul des rendements des titres du portefeuille

Le rendement journalier du portefeuille est calculé comme suit :

Rt = (Pt – Pt-1) / P t-1

Rappelons que l’ensemble des actions qui constituent le portefeuille sont considérées sans dividendes pour des raisons de simplification.

Deuxième étape : Construction de la matrice Variance-Covariance :

La matrice se présente sous la forme suivante :

(Var(1) ... Cov(1,n))
 ⋮ ⋱ ⋮
(Cov(n,1) ... Var(n))

Avec :

- Var (i) : variance des rentabilités de l’actif i.
- Cov (i, j) : covariance des rentabilités de l’actif i et j

Et :

- VAR(X) = E [X-E(X) ²]
- Cov(X) = E [(X-E(X)) (Y-E(Y))]

La matrice Variance-covariance s’écrit sous la forme suivante :

	samir	awf	microdata	delta	adoha	risma	lesieur	atlanta	autohall
samir	5,0845E-06	1,29678E-07	2,07453E-07	-1,049E-07	-7,75219E-08	-3,16021E-07	-6,5701E-08	1,01396E-07	1,09942E-07
awf	1,29678E-07	1,85281E-06	-1,64216E-07	5,23041E-08	7,67802E-07	-2,216E-07	-3,09871E-08	2,61141E-07	3,32027E-07
microdata	2,07453E-07	-1,64216E-07	1,30199E-05	3,29096E-07	1,73009E-07	2,38145E-07	1,7502E-07	-2,29264E-07	-1,39799E-07
delta	-1,049E-07	5,23041E-08	3,29096E-07	2,00119E-05	7,32464E-07	6,34509E-07	1,52896E-07	2,02076E-07	6,91219E-07
adoha	-7,75219E-08	7,67802E-07	1,73009E-07	7,32464E-07	3,17661E-06	-5,48082E-08	7,36441E-08	2,86635E-07	2,21853E-07
risma	-3,16021E-07	-2,216E-07	2,38145E-07	6,34509E-07	-5,48082E-08	6,11284E-06	5,81651E-08	-5,39672E-08	2,01569E-07

lesieur	-6,5701E-08	-3,09871E-08	1,7502E-07	1,52896E-07	7,36441E-08	5,81651E-08	1,76494E-06	9,20218E-08	3,55014E-09
atlanta	1,01396E-07	2,61141E-07	-2,29264E-07	2,02076E-07	2,86635E-07	-5,39672E-08	9,20218E-08	3,97228E-06	-8,83943E-08
autohall	1,09942E-07	3,32027E-07	-1,39799E-07	6,91219E-07	2,21853E-07	2,01569E-07	3,55014E-09	-8,83943E-08	3,82717E-06

Tableau : Matrice de Variance-Covariance

Troisième étape : Calcul de la VaR

Une fois la matrice de variance-covariance calculée, nous disposons de la matrice des proportions de chaque titre par rapport au portefeuille.

L’écart type ou volatilité du portefeuille sera donné par la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{X^T * M * X}$$

Avec :

- X : la matrice des proportions et XT sa transposée
- M : la matrice variance-covariance
- Et donc la VaR du portefeuille sera comme suit :

$$VaR_{1jour} = \sigma * P * loi.normale.standard.inverse_{(1-k)}$$

Le tableau suivant présente les différents résultats de la VaR avec la méthode Variance-Covariance en utilisant différents seuils de confiance.

Seuil de confiance	95%	97.5%	99%
VaR 1 jour	- 69024,94814	- 81745,55792	- 97177,11733

5. Analyse des résultats

Les rendements des cours du portefeuille présentent essentiellement une caractéristique empirique qui n'est pas décrite par les mouvements Brownien à savoir la distribution gaussienne.

Cette caractéristique, commune à de nombreux phénomènes, dépassent le simple comportement des marchés et elle a un impact sur le calcul des risques par la méthode de la value at risk.

les aléas des marchés suivent des lois favorisant les événements rares qui ne sont pas représentés par l'usuelle loi gaussienne. De plus, la loi de probabilité dépend de l'échelle de temps à laquelle les rendements sont évalués.

A l'échelle de quelques mois, les rendements sont gaussiens.

Au fur et à mesure que l'échelle de temps diminue, les événements rares sont favorisés par rapport à une distribution gaussienne. D'une certaine façon, les marchés sont plus risqués qu'on ne pourrait le penser.

Pour le calcul de la VaR, les paramètres estimés par des méthodes statistiques font l'objet de tests. Il faut s'assurer que la série passée peut être décrite avec le modèle choisi. Le plus simple des tests consiste à recréer le bruit blanc qui aurait pu être la source de la série observée, puis de voir s'il suit la loi supposée, s'il n'y a pas d'auto-corrélations...

Dans notre cas la stationnarité est présente et une modelisation de type ARMA est adéquate pour espérer de bonnes prévisions.

CONCLUSION GENERALE

La complexité des marchés financiers est aujourd'hui un dogme accepté et assumé par une grande partie des protagonistes de ces mêmes marchés. La première contribution de cette thèse (chapitre 1) vise à démontrer cette prise de conscience et à proposer des solutions pour améliorer la compréhension, la modélisation et la prévision des mouvements de marché et plus spécifiquement de l'évolution du risque de marché. La recrudescence des crises financières et l'essoufflement des modèles standards à pouvoir rendre compte des fluctuations des rentabilités d'un actif témoignent de la nécessité d'une nouvelle approche dans la modélisation des séries temporelles financières.

Dans le cadre de cette thèse, nous portons aussi un intérêt particulier au risque de marché (chapitre 2) dont l'évolution substantielle au cours des 30 dernières années a joué un rôle conséquent dans la survenue des crises financières. Intégré tardivement dans le cadre réglementaire, le risque de marché est mieux défini dans l'accord Bâle II qui propose de le mesurer par un instrument particulier : la Value-at-Risk (chapitre 3). En dépit des différentes limites de cette mesure, aucun instrument alternatif n'a pu s'imposer comme mesure de référence du risque de marché. Aussi, il nous semble naturel de contribuer à l'amélioration de cet instrument.

Par ailleurs, nous donnons une revue de littérature sur les ruptures des hypothèses de la finance classique. On montre aussi l'intérêt croissant de la littérature économétrique sur ces questions qui sont désormais au cœur de l'actualité financière. Ces différentes approches du risque de marché sont confrontées à des insuffisances dans la modélisation, la prévision et l'interprétation des structures existantes dans les rentabilités financières. Nous montrons que les faits stylisés alimentent un plaidoyer en faveur d'une nouvelle conception des marchés financiers et plus précisément, pour de nouvelles modélisations des séries temporelles financières. Les limites des modèles classiques et des approches stochastiques de la dynamique des marchés financiers contribuent à l'émergence d'une nouvelle vision des marchés financiers.

L'idée d'une approche classique des marchés financiers est définitivement abandonnée et le recours à des modèles plus complexes est encouragé.

Le choix d'une approche paramétrique capable de décrire l'évolution des rentabilités d'un actif est motivée par la prise en compte de :

- La mémoire longue
- La leptokurticité
- Le caractère fractal des marchés financier

Le sixième chapitre représente l'étude économétrique que nous avons menée afin de répondre à la question autour du quel est érigé ce mémoire, où nous avons tenté de modéliser le comportement réel des marchés financiers.

Nous avons supposé que les modèles à mémoire longue tel que le modèle ARFIMA parviennent à représenter le comportement de ces séries de part leur faculté à modéliser les comportements de long et de court terme leur principe est que les observations éloignées dans le passé sont très corrélés avec les observations distinctes dans le futur où un processus fortement dépendant contient des informations pertinentes permettant de prévoir l'évolution des observations futures.

Les distributions stables permettent de prendre en compte les queues de distribution épaisses observées en pratique sur la loi des rendements et intègrent les discontinuités observées sur le marché. Dans le cas où le paramètre de stabilité est inférieur à 2, leur variance est infinie (i.e. instable). Les lois stables sont stables par combinaison linéaire et ce sont les seules qui s'obtiennent comme limites des sommes linéairement normées de variables i.i.d. Nous pouvons donc utiliser le théorème central limite généralisé.

L'analyse statistique des séries financières à travers un portefeuille fictif composés d'actions cotés sur la place casablancaise est l'objet de dernier chapitre de cette thèse dans le but de faire un essai de vérification des hypothèses discutées tout au long de ce travail avec une analyse comparative de calcul de risque de marché via la value at risk.

Cette thèse est un plaidoyer pour l'ouverture de la science économique et plus particulièrement de l'économétrie financière à d'autres disciplines qui ont su intégrer de nouvelles approches, renouveler leurs instruments et développer des approches atypiques pour aider les décideurs dans leurs choix. Elle ouvre de nouvelles perspectives de recherche qui concernent différentes thématiques :

- * la réglementation financière : la nécessité d'une stabilité financière et les ravages économiques induits par les crises financières doivent pousser les instances de réglementation à une plus grande sévérité, notamment dans l'évaluation des risques. En dépit des mesures prises au lendemain de la crise financière des subprimes, les recommandations restent insuffisantes. En ce qui concerne le risque de marché, le Comité a tout intérêt à inviter progressivement les banques et les institutions financières à améliorer leurs tests d'évaluation, à utiliser des mesures plus adaptées, à tenir compte des différentes interactions possibles dans la mesure et l'évaluation de leur risque de marché ;

- * la modélisation et la prévision des séries temporelles financières : les économètres financiers doivent emboîter le pas aux physiciens, aux mathématiciens, et aux physiologistes en recourant à d'autres théories. Au-delà des résultats obtenus dans cette thèse, ce type d'approche peut se transposer dans une étude multi-agents, pour la mesure et l'évaluation d'autres risques financiers, dans une analyse multivariée ou encore dans des systèmes d'alerte des crises. Les problématiques de recherche qui peuvent intégrer ce type d'approche restent nombreuses mais souffrent des limites théoriques imposées par une approche purement stochastique ;

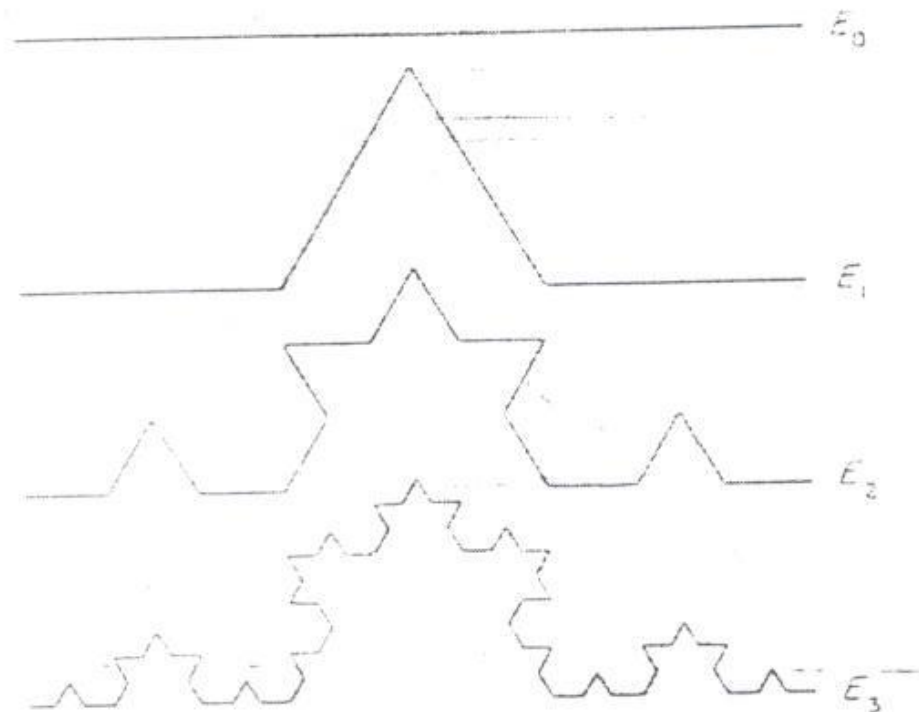
Ces différentes perspectives demeurent des ouvertures dont l'issue reste incertaine mais elles vont progressivement devenir des sujets d'intérêts majeurs tant la pression des responsables politiques et les limites des approches standards sont de plus en plus fortes.

ANNEXES

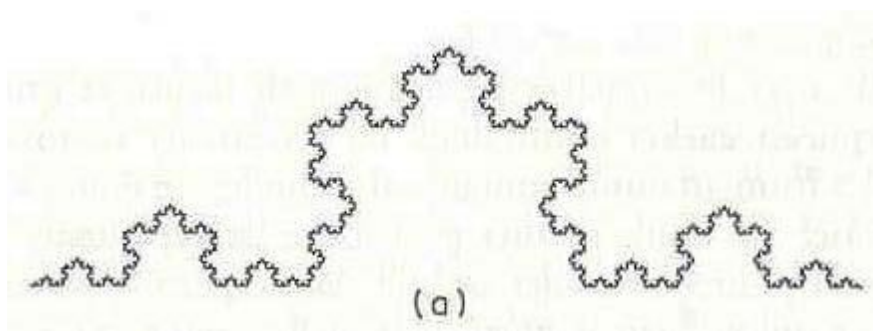
Annexe I : La courbe de Helge Von Koch

La courbe de Helge Von Koch est un bon exemple pour comprendre comment une fractale se construit. La procédure commence avec un segment. Ce segment est coupé en trois parties égales et la partie centrale est remplacée par deux segments inclinés de longueur égale au segment ôté tel que montre la figure suivante :

Initialisation de la courbe de Helge Von Koch



La même procédure est ensuite appliquée à chacun des quatre nouveaux segments (E_2) et ceci est répété une infinité de fois (figure 2)



Par conséquent la courbe de Helge Von Koch est une fractale qui possède la propriété d'autosimilarité. Ceci signifie que toute partie de l'objet convenablement dilaté peut être superposée sur une partie plus grande. Le facteur d'agrandissement est le même dans toutes les directions

Calcul de la dimension fractale de la courbe de Von Koch:

La figure initiale est un segment de taille L . Le générateur est une figure en forme de « chapeau » constituée de quatre segments ($N = 4$) de même longueur $1 = L/3$, donc la dimension de cette courbe est égale à $[\log(4) / \log(3)]$ soit $D = 1,26$. Par conséquent la dimension de la courbe de Van Koch est non entière. Ainsi, on peut dire que la courbe de Von

Koch est plus massive qu'une droite mais plus effilée qu'une surface, elle ne peut pas couvrir l'ensemble d'un plan.

Annexe II : TEST DE STATIONNARITE DES SERIES

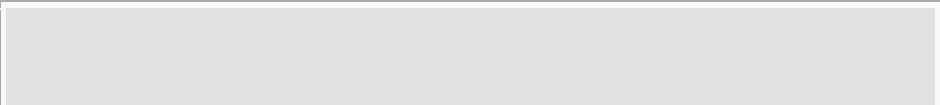
La satisfaction au test de stationnarité ou test de racine unitaire constitue la condition sine qua non pour l'application de la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). La stationnarité est un concept clé pour la validité d'une régression sur les séries temporelles. D'un point de vue statistique, la stationnarité suppose que le passé est comparable au présent et au futur. Ainsi, une série chronologique est stationnaire, au sens strict, si sa distribution de probabilité ne change pas au cours du temps. Cette définition forte de la stationnarité implique que la distribution jointe $(Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+n})$ ne dépende pas de t . Si c'est le cas, on conclut que Y_t est non stationnaire. Par ailleurs, un processus est stationnaire si celui-ci n'a ni trend, ni saisonnalité. De ce fait, fluctue autour d'une moyenne constante. Il apparaît donc que la stationnarité est une exigence qui assure l'utilisation du modèle en dehors de la période sur laquelle il a été estimé[3].

Pour procéder à l'estimation de notre modèle, nous allons au préalable, nous rendre compte de la stationnarité des variables à utiliser. Ceci est nécessaire, étant donné que les variables économiques sont rarement des réalisations de processus stationnaire. Le non stationnarité peut bien concerner l'espérance que les moments de second ordre.

Nous devons préciser ici que le test qui a été utilisé est celui de Dickey Fuller Augmenté (Ajusted Dickey-Fuller).

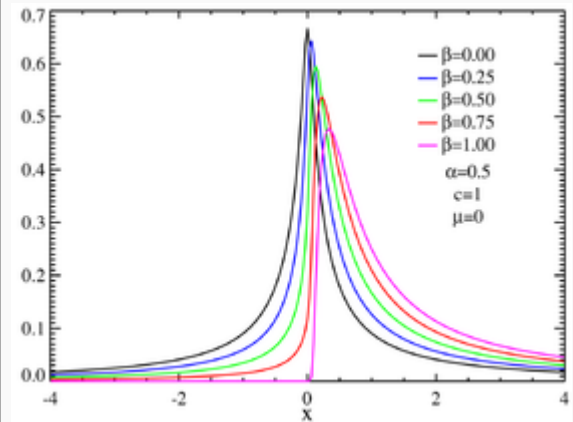
- Si la valeur d'ADF est inférieure à la valeur critique au seuil de 5% ou si sa probabilité est inférieure à 5% (en valeur absolue) alors on rejette H_0 : la série X est stationnaire.
- Si la valeur d'ADF est supérieure ou égale à la valeur critique ou si sa probabilité est supérieure à 5% (en valeur absolue) alors on accepte l'hypothèse H_0 : la série X est non stationnaire.

Annexe III : loi stable

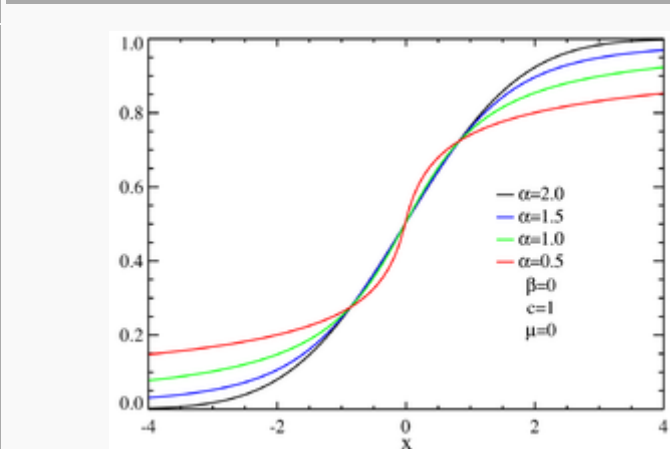


Densité de probabilité

Symmetric stable distributions
Symmetric α -distribution stable avec une facteur d'échelle unitaire

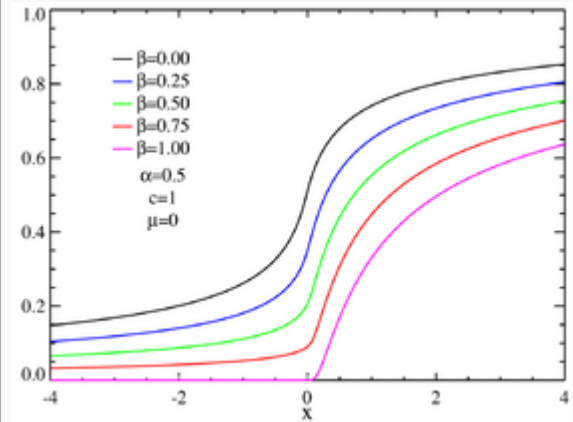


Skewed centered stable distributions with unit scale factor



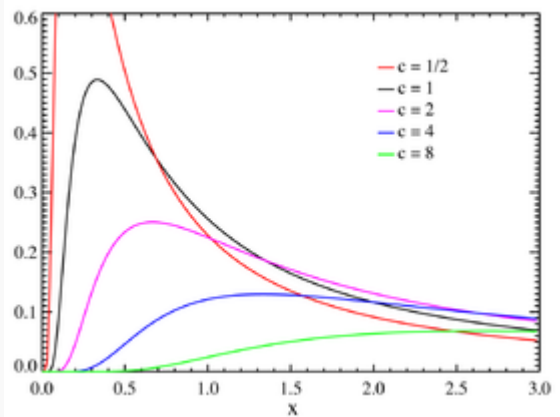
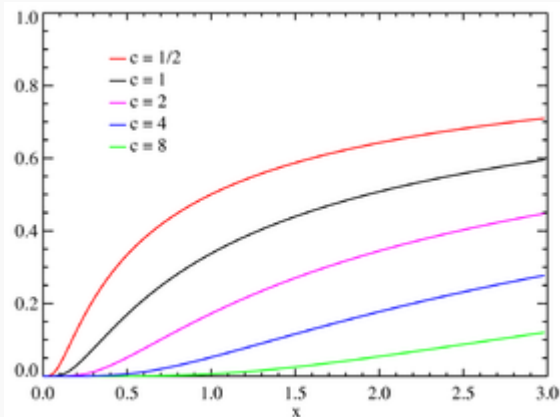
Fonction de répartition

CDF's for symmetric α -stable distributions
CDFs for symmetric α -stable distributions



	$\alpha \in$	$(0,2]$	—	paramètre	de	stabilité
Paramètres	$\beta \in$	$[-1,1]$	—	paramètre	d'asymétrie	
	$c \in$	$(0, \infty)$	—	paramètre	d'échelle	
	$\mu \in (-\infty, \infty)$	— moyenne				
Support	$x \in \mathbf{R}$, or $x \in [\mu, +\infty)$ if $\alpha < 1$ and $\beta = 1$, or $x \in (-\infty, \mu]$ if $\alpha < 1$ and $\beta = -1$					
Densité de probabilité	pas expressible analytiquement, sauf pour quelques valeurs de paramètres					
Fonction de répartition	pas expressible analytiquement, sauf pour quelques valeurs de paramètres					
Espérance	μ quand $\alpha > 1$, sinon indéfini					
Médiane	μ quand $\beta = 0$, sinon pas expressible analytiquement					
Mode	μ quand $\beta = 0$, sinon pas expressible analytiquement					
Variance	$2c^2$ quand $\alpha = 2$, sinon indéfini					
Asymétrie	0 quand $\alpha = 2$, sinon indéfini					
Kurtosis normalisé	0 quand $\alpha = 2$, sinon indéfini					
Entropie	pas expressible analytiquement, sauf pour quelques valeurs de paramètres					
Fonction génératrice des moments	indéfini					

Annexe IV : distribution de Lévy

Distribution de Lévy		
		
Densité	de	probabilité
pour différentes valeurs de c.		
		
Fonction	de	répartition
pour différentes valeurs de c.		
Paramètres		
Support		
Densité de probabilité		
Fonction de répartition		
Espérance		
Médiane	pour	
Mode	pour	
Variance		
Asymétrie	non définie	
Kurtosis normalisé	non défini	
Entropie		
Fonction génératrice des moments	non définie	

[Fonction caractéristique](#)

ANNEXE V : ANALYSE DE LA STATIONNARITE D'UNE SERIE CHRONOLOGIQUE : ADF TEST

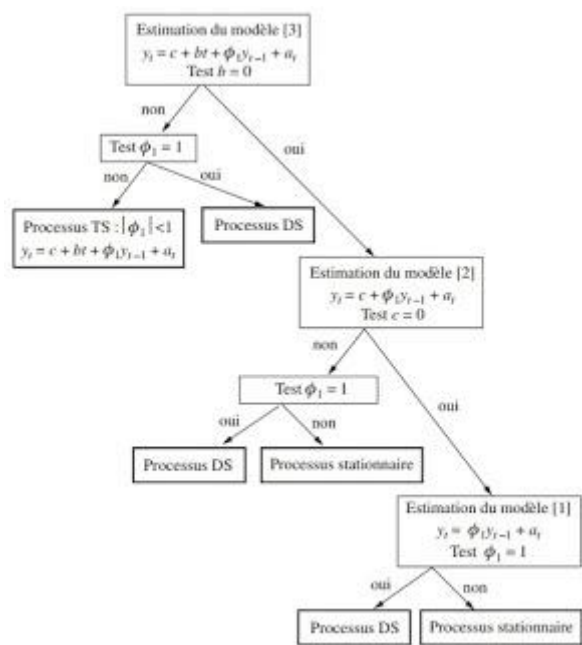
La modélisation des séries temporelles, nécessite, que ces dernières soient stationnaires. Autrement dit que la série ne comporte ni tendance, ni cycle et ni saisonnalité. Cette notion de stationnarité représente un point crucial dans l'économétrie des séries temporelles, où l'estimation des séries non stationnaires conduit à des régressions fallacieuses ou illusoires. Pour éviter ces estimations fallacieuses, les économètres procèdent à la stationnarisation des séries chronologiques.

Régression fallacieuse	Régression exact																														
Dependent Variable: CN Method: Least Squares Date: 02/09/16 Time: 15:43 Sample: 1992Q1 2014Q4 Included observations: 92 <table><tr><th>Variable</th><th>Coefficient</th><th>Std. Error</th><th>t-Statistic</th><th>Prob.</th></tr><tr><td>C</td><td>-3262.750</td><td>.4113632</td><td>-7.931555</td><td>0.0000</td></tr><tr><td>PIB</td><td>0.641353</td><td>0.0091676</td><td>68.28399</td><td>0.0000</td></tr></table> R-squared: 0.979927 Mean dependent var: 23537.53 Adjusted R-squared: 0.979704 S.D. dependent var: 5100.691 S.E. of regression: 726.6711 Akaike info criterion: 18.03832 Sum squared resid: 47524583 Schwarz criterion: 18.09115 Log likelihood: -735.9709 Hannan-Quinn criter: 18.05845 F-statistic: 4383.567 Durbin-Watson stat: 1.294869 Prob(F-statistic): 0.000000	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	C	-3262.750	.4113632	-7.931555	0.0000	PIB	0.641353	0.0091676	68.28399	0.0000	Dependent Variable: D(CN) Method: Least Squares Date: 02/09/16 Time: 15:54 Sample (adjusted): 1992Q2 2014Q4 Included observations: 91 after adjustments <table><tr><th>Variable</th><th>Coefficient</th><th>Std. Error</th><th>t-Statistic</th><th>Prob.</th></tr><tr><td>C</td><td>-7.382382</td><td>88.29474</td><td>-0.083611</td><td>0.9336</td></tr><tr><td>D(PIB)</td><td>0.688704</td><td>0.051548</td><td>13.32129</td><td>0.0000</td></tr></table> R-squared: 0.669867 Mean dependent var: 205.9670 Adjusted R-squared: 0.662234 S.D. dependent var: 1424.537 S.E. of regression: 827.8069 Akaike info criterion: 16.29741 Sum squared resid: 61003248 Schwarz criterion: 16.35260 Log likelihood: -739.5322 Hannan-Quinn criter: 16.31967 F-statistic: 177.4569 Durbin-Watson stat: 2.368797 Prob(F-statistic): 0.000000	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	C	-7.382382	88.29474	-0.083611	0.9336	D(PIB)	0.688704	0.051548	13.32129	0.0000
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.																											
C	-3262.750	.4113632	-7.931555	0.0000																											
PIB	0.641353	0.0091676	68.28399	0.0000																											
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.																											
C	-7.382382	88.29474	-0.083611	0.9336																											
D(PIB)	0.688704	0.051548	13.32129	0.0000																											

Une série temporelle est dite stationnaire si sa moyenne, sa variance et sa covariance sont constantes (ne sont pas affecté par le temps). Soit une série temporelle notée à valeurs réelles et en temps discret. S est dite stationnaire (stationnarité du second ordre) si :

$$E(S_i) = \mu \forall i = 1 \dots t$$
$$Var(S_i) = \sigma^2 \neq \infty \forall i = 1 \dots t$$
$$Cov(S_i, S_{i-k}) = f(k) \forall i = 1 \dots t \forall k = 1 \dots t$$

Ces conditions stipulent que l'espérance, la variance et la covariance sont constantes au cours du temps. A noter que la variance doit être finie. Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on parle donc de non stationnarité. Pour tester la non stationnarité des séries, on procède au test Augmented Dickey-Fuller. La stratégie de ce test est présentée comme suit :



Source : Boubonnais R., Econométrie : manuel et exercices corrigés, 9ème édition, Janvier 2015

Le test effectué sur le modèle 3 (voir figure ci-dessous) consiste à tester l’existence d’une tendance déterministe dans les séries. Autrement dit, tester l’hypothèse nulle qui stipule que ce coefficient associé à la tendance @trend est significativement égale à zéro. D’après la figure au-dessus, l’hypothèse nulle est acceptée pour les séries de la consommation nationale (CN) et du PIB. Par conséquent on décide l’absence d’une tendance déterministe pour ces deux processus. Cela est démontré par la significativité du coefficient de tendance @trend où le t-statistique des deux séries (CN et PIB) est inférieure à la valeur tabulée de la table de Student 1,96 (Respectivement 1,06 et 1,9). Nous passons au deuxième modèle dans lequel on test l’existence d’une tendance stochastique pour ces deux séries (CN et PIB).

Modèle 3																															
Log(CN)	Log(GOV)																														
Null Hypothesis: LCN has a unit root Exogenous: Constant, Linear Trend Lag Length: 6 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)																															
<table> <tr> <th></th><th>t-Statistic</th><th>Prob.*</th></tr> <tr> <td>Augmented Dickey-Fuller test statistic</td><td>-1.726443</td><td>0.8958</td></tr> <tr> <td>Test critical values:</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>1% level</td><td>-4.302840</td><td></td></tr> <tr> <td>5% level</td><td>-3.439850</td><td></td></tr> <tr> <td>10% level</td><td>-3.156109</td><td></td></tr> </table> *MacKinnon (1996) one-sided p-values.			t-Statistic	Prob.*	Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.726443	0.8958	Test critical values:			1% level	-4.302840		5% level	-3.439850		10% level	-3.156109													
	t-Statistic	Prob.*																													
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.726443	0.8958																													
Test critical values:																															
1% level	-4.302840																														
5% level	-3.439850																														
10% level	-3.156109																														
Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LCN) Method: Least Squares Date: 02/09/18 Time: 12:30 Sample (adjusted): 1950Q2 2014Q4 Included observations: 91 after adjustments																															
<table> <tr> <th>Variable</th><th>Coefficient</th><th>Std. Error</th><th>t-Statistic</th><th>Prob.</th></tr> <tr> <td>LCN(1)</td><td>-0.037788</td><td>0.008420</td><td>-1.238443</td><td>0.2185</td></tr> <tr> <td>C</td><td>0.274313</td><td>0.284018</td><td>1.273118</td><td>0.2063</td></tr> <tr> <td>@TREND("1950Q1")</td><td>0.005268</td><td>0.005251</td><td>1.067939</td><td>0.2918</td></tr> </table> R-squared: 0.031031 Mean dependent var: 0.008903 Adjusted R-squared: 0.009069 S.D. dependent var: 0.902037 S.E. of regression: 0.009185 Akaike info criterion: -6.114416 Sum squared resid: 0.007382 Schwarz criterion: -6.431654 Log likelihood: 298.4988 Hannan-Quinn criter: -6.431936 F-statistic: 1.694184 Durbin-Watson stat: 1.966801 Prob(F-statistic): 0.249320		Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	LCN(1)	-0.037788	0.008420	-1.238443	0.2185	C	0.274313	0.284018	1.273118	0.2063	@TREND("1950Q1")	0.005268	0.005251	1.067939	0.2918										
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.																											
LCN(1)	-0.037788	0.008420	-1.238443	0.2185																											
C	0.274313	0.284018	1.273118	0.2063																											
@TREND("1950Q1")	0.005268	0.005251	1.067939	0.2918																											
Log(PIB)																															
Null Hypothesis: LPIB has a unit root Exogenous: Constant, Linear Trend Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)																															
<table> <tr> <th></th><th>t-Statistic</th><th>Prob.*</th></tr> <tr> <td>Augmented Dickey-Fuller test statistic</td><td>-2.427057</td><td>0.3088</td></tr> <tr> <td>Test critical values:</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>1% level</td><td>-4.084521</td><td></td></tr> <tr> <td>5% level</td><td>-3.481294</td><td></td></tr> <tr> <td>10% level</td><td>-3.156778</td><td></td></tr> </table> *MacKinnon (1996) one-sided p-values.			t-Statistic	Prob.*	Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.427057	0.3088	Test critical values:			1% level	-4.084521		5% level	-3.481294		10% level	-3.156778													
	t-Statistic	Prob.*																													
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.427057	0.3088																													
Test critical values:																															
1% level	-4.084521																														
5% level	-3.481294																														
10% level	-3.156778																														
Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LPIB) Method: Least Squares Date: 02/09/18 Time: 12:28 Sample (adjusted): 1950Q4 2018Q4 Included observations: 89 after adjustments																															
<table> <tr> <th>Variable</th><th>Coefficient</th><th>Std. Error</th><th>t-Statistic</th><th>Prob.</th></tr> <tr> <td>LPIB(1)</td><td>-0.045503</td><td>0.018690</td><td>-2.427057</td><td>0.0175</td></tr> <tr> <td>D(LPIB(1))</td><td>0.280497</td><td>0.120842</td><td>1.891168</td><td>0.0487</td></tr> <tr> <td>D(LPIB(2))</td><td>0.289150</td><td>0.190709</td><td>2.375051</td><td>0.0470</td></tr> <tr> <td>C</td><td>0.401405</td><td>0.191298</td><td>2.453375</td><td>0.0158</td></tr> <tr> <td>@TREND("1950Q1")</td><td>0.000298</td><td>0.000718</td><td>1.803439</td><td>0.0628</td></tr> </table> R-squared: 0.288433 Mean dependent var: 0.207181 Adjusted R-squared: 0.212613 S.D. dependent var: 0.907293 S.E. of regression: 0.086471 Akaike info criterion: -7.108299 Sum squared resid: 0.083918 Schwarz criterion: -7.248488 Log likelihood: 324.0793 Hannan-Quinn criter: -7.121945 F-statistic: 5.945205 Durbin-Watson stat: 1.843682 Prob(F-statistic): 0.000171		Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	LPIB(1)	-0.045503	0.018690	-2.427057	0.0175	D(LPIB(1))	0.280497	0.120842	1.891168	0.0487	D(LPIB(2))	0.289150	0.190709	2.375051	0.0470	C	0.401405	0.191298	2.453375	0.0158	@TREND("1950Q1")	0.000298	0.000718	1.803439	0.0628
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.																											
LPIB(1)	-0.045503	0.018690	-2.427057	0.0175																											
D(LPIB(1))	0.280497	0.120842	1.891168	0.0487																											
D(LPIB(2))	0.289150	0.190709	2.375051	0.0470																											
C	0.401405	0.191298	2.453375	0.0158																											
@TREND("1950Q1")	0.000298	0.000718	1.803439	0.0628																											
Null Hypothesis: LGOV has a unit root Exogenous: Constant, Linear Trend Lag Length: 6 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)																															
<table> <tr> <th></th><th>t-Statistic</th><th>Prob.*</th></tr> <tr> <td>Augmented Dickey-Fuller test statistic</td><td>-2.826411</td><td>0.0789</td></tr> <tr> <td>Test critical values:</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>1% level</td><td>-4.302840</td><td></td></tr> <tr> <td>5% level</td><td>-3.439850</td><td></td></tr> <tr> <td>10% level</td><td>-3.156109</td><td></td></tr> </table> *MacKinnon (1996) one-sided p-values.			t-Statistic	Prob.*	Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.826411	0.0789	Test critical values:			1% level	-4.302840		5% level	-3.439850		10% level	-3.156109													
	t-Statistic	Prob.*																													
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.826411	0.0789																													
Test critical values:																															
1% level	-4.302840																														
5% level	-3.439850																														
10% level	-3.156109																														
Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LGOV) Method: Least Squares Date: 02/09/18 Time: 12:34 Sample (adjusted): 1950Q2 2014Q4 Included observations: 91 after adjustments																															
<table> <tr> <th>Variable</th><th>Coefficient</th><th>Std. Error</th><th>t-Statistic</th><th>Prob.</th></tr> <tr> <td>LGOV(1)</td><td>-0.070873</td><td>0.037985</td><td>-2.826411</td><td>0.0498</td></tr> <tr> <td>C</td><td>0.889181</td><td>0.327618</td><td>2.842816</td><td>0.0481</td></tr> <tr> <td>@TREND("1950Q1")</td><td>0.005570</td><td>0.005278</td><td>2.966365</td><td>0.0417</td></tr> </table> R-squared: 0.040287 Mean dependent var: 0.009281 Adjusted R-squared: 0.024612 S.D. dependent var: 0.612647 S.E. of regression: 0.012480 Akaike info criterion: -5.892303 Sum squared resid: 0.013729 Schwarz criterion: -6.128237 Log likelihood: 271.2383 Hannan-Quinn criter: -5.881968 F-statistic: 2.125480 Durbin-Watson stat: 2.219454 Prob(F-statistic): 0.124273		Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	LGOV(1)	-0.070873	0.037985	-2.826411	0.0498	C	0.889181	0.327618	2.842816	0.0481	@TREND("1950Q1")	0.005570	0.005278	2.966365	0.0417										
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.																											
LGOV(1)	-0.070873	0.037985	-2.826411	0.0498																											
C	0.889181	0.327618	2.842816	0.0481																											
@TREND("1950Q1")	0.005570	0.005278	2.966365	0.0417																											

La série des dépenses gouvernementales montre l’existence d’une tendance déterministe. La statistique de Student associée au coefficient @trend est égale à 2,06 qui est supérieur à la valeur critique de 1,96. On décide donc la non stationnarité de la série qui suit un processus DS puisque on admet l’hypothèse de présence e racine unitaire avec une p-value de 0,57. On passe directement à la première différence de la série, est tester la stationnarité en suivant la même démarche (Modèle 1, Modèle 2 et Modèle 3)

Modèle 2	
Log(CN)	Log(PIB)

Null Hypothesis: LCN has a unit root					Null Hypothesis: LPIB has a unit root				
Exogenous: Constant					Exogenous: Constant				
Lag Length: 8 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)					Lag Length: 2 (Automatic - based on AIC, maxlag=11)				
	t-Statistic	Prob.*				t-Statistic	Prob.*		
Augmented Dickey-Fuller test statistic					Augmented Dickey-Fuller test statistic				
-1.306006					-2.640911				
Test critical values:					Test critical values:				
1% level					1% level				
-3.53879					-3.52592				
5% level					5% level				
-2.89589					-2.88432				
10% level					10% level				
-2.58361					-2.58425				
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.									
Augmented Dickey-Fuller Test Equation									
Dependent Variable: D(LCN)									
Method: Least Squares									
Date: 02/09/16 Time: 13:04									
Sample (adjusted): 1992Q2 2014Q4									
Included observations: 91 after adjustments									
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LCN(-1)	-0.00773	0.03444	-1.306006	0.1978	LPIB(-1)	-0.070451	0.032050	-2.198091	0.0907
C	0.06559	0.04459	1.47189	0.1438	D(LPIB-1)	0.189987	0.102039	1.861822	0.0691
					D(LPIB-2)	0.175683	0.100729	1.743854	0.0888
					C	0.115930	0.043260	2.742306	0.0074
R-squared	0.00635	Mean dependent var	0.008903		R-squared	0.215596	Mean dependent var	0.007481	
Adjusted R-squared	0.00769	S.D. dependent var	0.006207		Adjusted R-squared	0.188315	S.D. dependent var	0.067983	
S.E. of regression	0.009172	Akaike info criterion	-6.523596		S.E. of regression	0.080271	Akaike info criterion	-7.162542	
Sum squared resid	0.007489	Schwarz criterion	-6.468112		Sum squared resid	0.083810	Schwarz criterion	-7.088842	
Log likelihood	293.0282	Hannan-Quinn criter.	-6.501435		Log likelihood	302.0002	Hannan-Quinn criter.	-7.123480	
F-statistic	1.89029	Durbin-Watson stat	2.004544		F-statistic	7.801486	Durbin-Watson stat	1.915077	
Prob(F-statistic)	0.16665				Prob(F-statistic)	0.002116			

La constante n’est pas significative pour la série de la consommation nationale (C=0 dans le schéma), puisque la p-value associée à est supérieure au seuil critique de 0,05 avec 0,14. On conclut donc l’absence d’une tendance stochastique pour cette série. Pour le cas de la série du PIB, la constante est significativement différente de 0, puisque la p-value associé à est inférieur 0,05 le seuil critique. A côté de cette constante on a la présence d’une racine unitaire, en fait, le processus autorégressif de ce processus est tester par , la p-value associé à ce coefficient est égale à 0,08. On accepte donc l’hypothèse de non stationnarité du processus et on procède à sa différenciation. Pour la série de la consommation natioanle, on procède au test du processus autorégressif de la série ou comme appelé communément Random Walk à travers le modèle 1 .

Modèle 1

Log(CN)

Null Hypothesis: LCN has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on AIC, maxlag=11)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	8.240127	1.0000
Test critical values:		
1% level	-2.590622	
5% level	-1.944404	
10% level	-1.614417	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LCN)
Method: Least Squares
Date: 02/09/16 Time: 14:08
Sample (adjusted): 1992Q2 2014Q4
Included observations: 91 after adjustments

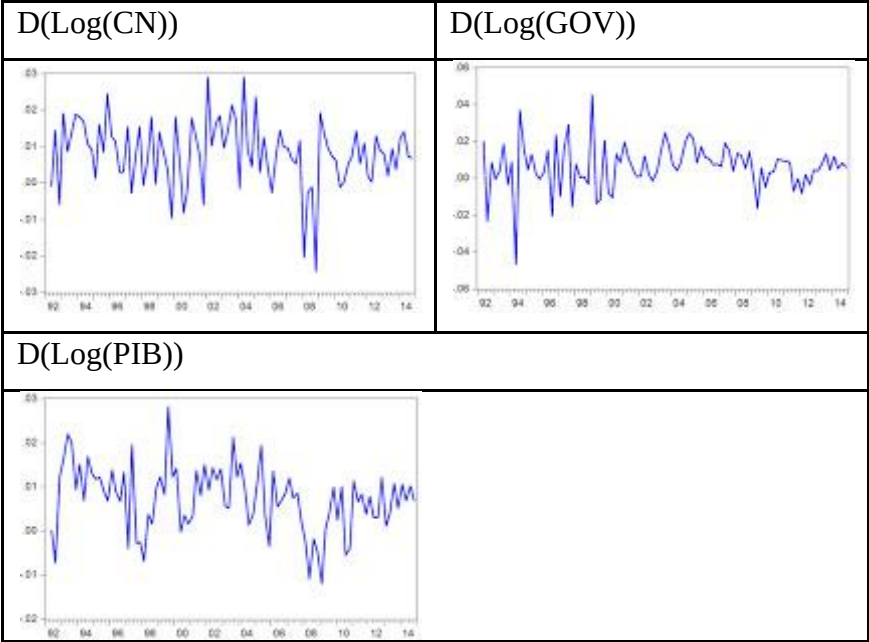
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LCN(-1)	0.000794	9.64E-05	8.240127	0.0000

R-squared	-0.005491	Mean dependent var	0.008003
Adjusted R-squared	-0.005491	S.D. dependent var	0.009207
S.E. of regression	0.009232	Akaike info criterion	-6.521387
Sum squared resid	0.007670	Schwarz criterion	-6.493795
Log likelihood	297.7231	Hannan-Quinn criter.	-6.510255
Durbin-Watson stat	1.969395		

L’hypothèse nulle de ce test correspond à tester l’existence de racine unitaire dans le processus. Les résultats du test nous informe qu’on ne peut pas rejette l’hypothèse nulle d’existence de racine unitaire puisque la statistique de Augmented Dickey-Fuller calculée est supérieure à la valeur critique de la table ADF (8,24>-1,94). Les séries de la consommation nationale est par conséquent non stationnaire et suit un processus DS.

Comme indiqué, pour stationnarité nos séries, on doit procéder à la différence première pour annuler la tendance déterministe de la série des dépenses gouvernementale, annulées le Random Walk avec dérive de la série du PIB, et le Random Walk de la série de la consommation nationale.

Les graphs des séries en première différence sont présentés comme suit :



En exécutant le test de stationnarité ADF, de la même manière sur les séries en différence comme démontré sur les séries en niveau (Modèle 3, Modèle 2 et modèle 1), nous indique que tous les variables sont stationnaires et nécessite pas une deuxième différence.

En récapitulant, pour modéliser le comportement d’une série chronologique, il faut neutraliser les séries de la saisonnalité, tester la stationnarité des séries en niveau. Si le test de stationnarité montre l’existence d’une racine unitaire, il faut soustraire la tendance si la composante tendancielle est déterministe, différencier la série si la série représente une marche aléatoire avec ou sans dérive. Dans ce qui va suivre, on va procéder à la modélisation univariée d’une série chronologique à travers les modèles AR (p), MA (q), ARMA(p,q), ARIMA(p,d,q)…, ensuite la modélisation multivariée à travers les modèles VECM et VAR

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

- Adrian Pagan,Aman Ullah, Non parametric Econometrics, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1999.
- Alain Bensoussan, Qiang Zhang, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, 2009.
- Alexander Ineichen,Asymmetric Returns ,John Wiley & Sons, Inc.,2007
- Andrey Sarychev, Albert Shiryaev,,Mathematical Control Theory and Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- ArnoldZellner,Franz C. Palm,The Structural Econometric, Cambridge university press,2004.
- B. ESPEN ECKBO,HANDBOOK OF CORPORATE FINANCE, Tuck School of Business,2007.
- BADI H. BALTAGI,CONTRIBUTIONS TO ECONOMIC ANALYSIS, Elsevier, 2006.
- Bertrand Jacquillat &Bruno Solnik,,MARCHES FINANCIERS, Gestion de portefeuille et des
- Risques.
- Bill Dalton,Financial Products,Cambridge University Press, New York ,2008.
- Carol Alexander,Market Risk Analysis,John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- Chris Brooks, Introductory Econometrics for Finance,CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008.
- Christian Gouriéroux,Alain Monfort, Statistics and Econometric Models,Cambridge university press,1989.
- Christophe HURLIN, Économétrie des Variables Qualitatives, Université d'Orléans, 2003.
- Cont, Rama ,Tankov, Peter,Financial Modelling With Jump Processes ,CRC Press, 2004.
- David Ardia,Financial Risk Management With Bayesian Estimation of GARCH Models Theory and Applications, Springer ,2008.
- David G. Mayes,The Future of Financial Markets, palgrave, 2006.
- Dennis Cox, Michael Cox,The Mathematics Of Banking and Finance, John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
- Don K.Mark,MATHEMATICAL TECHNIQUES,World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- ,2006
- Dr Jacqueline Jeynes, Risk Management: 10 Principles, Butterworth-Heinemann, 2002.
- Etienne Pardoux, Markov Processes,A John Wiley and Sons, Ltd,2008

- Francesco Saita, Value at Risk and Bank, Elsevier Inc, 2007.
- FRANÇOIS-ÉRIC RACICOT, RAYMOND THÉORET, Finance Computationnelle et Gestion des Risques, Presses de l'Université du Québec, 2006.
- Francois-Eric Racicot, Raymond Théoret, Traité d'économétrie financière, Presses de l'Université du Québec, 2001.
- Frank de Jong,,The Microstructure Of Financial Markets, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2009.
- FRANK J. FABOZZI, Financial Management and Analysis, John Wiley & Sons, Inc.,2003
- Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, Petter N. Kolm, Trends in Quantitative, The Research Foundation of CFA Institute, 2006.
- Freddy Delbaen , Miklós Rásonyi,,Modern Trends in Mathematical Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- Freddy Delbaen · Walter Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage, Springer, 2000.
- George Levy, COMPUTATIONAL FINANCE, ELSEVIER, 2004.
- George M. Frankfurter, THEORY AND REALITY IN FINANCIAL ECONOMICS, World Scientific, 2007.
- Georges Hénault, Martine spence, Marketing international, Presses de l'Université du Québec, 2006.
- Gérard Marie Henry, Les hedge funds, Éditions d'Organisation, 2008.
- Giuseppe Arbia · Badi H. Baltag, Spatial Econometrics, Library of Congress Control, 2009.
- Greg N. Gregoriou, Stock Market Volatility, Taylor & Francis Group, LLC, 2009.
- Gwilym, Owain ap, Sutcliffe, Charles, High-frequency Financial Market Data, Risk Books, 1999.
- HUMBERTO BARRETO, FRANK M. HOWLAND, INTRODUCTORY ECONOMETRICS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2006.
- James Davidson, Stochastic Limit Theory, Oxford University Press, 1994.
- Jean-Louis Chambon, Repenser la planète Finance, Éditions d'Organisation, 2009.
- Jean-Pierre Florens , Vêlayoudom Marimoutou, Anne P'eguine-Feissolle , Econometric Modeling and Inference, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2007.
- Joel Hasbrouck, Empirical Market Microstructure, OXFORD .university press, 2007.
- John Buglear, Quantitative Methods for Business, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- John Knight and Stephen Satchell, Linear Factor Models, Elsevier, 2005.

- John van der Hoek ,Robert J. Elliott,Binomial Models,Springer Science+Business Media, Inc,2006.
- John Y.Campbell,Andrew W.Lo,A Craig Mackinlay,The econometrics Of Financial Markets,Princeton University Press,1997.
- Jonathan Swan,Practical Financial Modelling,Elsevier,2005.
- José María Fanelli , Rohinton Medhora,Macroeconomic Volatility, Institutions and Financial Architectures,PALGRAVE MACMILLAN,2008.
- Khalid Al-Begain ,Armin Heindl,Miklós Telek,Analytical and Stochastic,Springer-Verlag Berlin Heidelberg,2008.
- Kurt Jechlitschka, Dieter Kirschke,Microeconomics using Excel,Routledge,2007.
- LAURE KLEIN,la crise des suprimés,Éditions d'Organisation,2008.
- Laurent Calvet,Adlai Fisher,Multifractal Volatility,Academic Press Advanced Finance Series,
- Lawrence J. Lau,Econometrics and the Cost of Capital,The MIT Press,2000.
- Lishang Jiang,Mathematical Modeling and Methods,World Scientific,2003.
- Louis Laurencelle, Richard Bertrand,Denis Allaire,Guy Châtillon,Trois essais de méthodologie quantitative,Presses de l'Université du Québec,1994.
- M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas,Actuarial Theory for Dependent Risks,John Wiley & Sons Ltd,2005.
- Marek Capinski , Tomasz Zastawniak ,Mathematics for Finance,Springer-Verlag London Limited,2003.
- Mario J. Miranda, Paul L. Fackler,Applied Computational,,
- Matthew J. Hassett, Donald G. Stewart,Probability For Risk Management,ACTEX,2006.
- MICHAEL HARRIS,Profitability and trading,John Wiley & Sons, Inc.,2008
- MICHELE BRETON, HATEM BEN-AMEUR,NUMERICAL METHODS IN FINANCE
- ,Springer Science-Business Media, Inc,2005.
- Moorad Choudhry,An introduction to Value At Risk, John Wiley & Sons Ltd,2006.
- Neil C.Schofield,Markets and Applications,John Wiley & Sons, Ltd.,2007.
- Nicolas Crespelle,La crise en questions,Éditions d'Organisation,2009.
- P. J. HUNT, J. E. KENNEDY,Financial Derivatives in Theory and Practice,JOHN WILEY & SONS, LTD,2000.
- P. Embrechts ,C. Kluppelberg, T. Mikosch,Modelling Extremal Events,Springer ,Verlag,1997.
- Paolo Brandimarte,Numerical Methods in Finance,John Wiley & Sons. Inc. New York,2002.
- Pascal Kerebel,Management des risques,Éditions d'Organisation,2009.
- Pierre-André Cornillon,,Régression Théorie et applications,Springer,2007.

- Racicot et R. Théoret, Finance computationnelle et gestion des risques, Presses de l'Université du Québec, 2006.
- Robert C. Merton, Continuous-Time Finance, Paul A. Samuelson, 1990.
- Robert J. Elliott, Mathematics of Financial Markets, Springer, 1999.
- Roger Koenker, Quantile Regression, Cambridge university press, 2005.
- SERGIO M. FOCARDI, The Mathematics of Financial Modeling, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- Shiriaev, Al'bert Nikolaevich, Essentials of Stochastic Finance, World Scientific Publishing Co, 1999.
- Siu-Ah-Ng, Hyper Models in Mathematical Finance, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.
- Aftalion, F. Poncet, P. La volatilité. In Revue Banque et Marchés. 2004.
- Sunanda Sen, Global Finance at Risk, PALGRAVE MACMILLAN, 2003
- Tawny Weber, Risqué Business, Terence C. Mills, Raphael N. Markellos, The Econometric Modelling of Financial Time Series, Cambridge university press, 2008.
- Thorsten Hens, Klaus Reiner, Schenk-Hoppé, Handbook of financial markets dynamics and evolution, North-Holland, 2009.
- Tom Y. Sawyer, Pro Excel Financial Modeling, Apress, 2009.
- Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, Jozef Teugels, Stochastic Processes, John Wiley & Sons, 1999.
- William T. Ziemba, Raymond G. Vickson, STOCHASTIC, World Scientific, 2006
- Wim Schoutens, Lévy Processes in Finance, John Wiley & Sons, Ltd., 2003.
- A. Fisher, L. Calvet and B. B. Mandelbrot, Multifractality of deutschmark/usdollar exchange rate, Cowles Foundation Paper, 1997.
- Christoffersen, P. F. et D. Pelletier, Backtesting Value-at-Risk : A Duration-Based Approach
- , Journal of Financial Econometrics, 2004.

- Engle, R. F. et S. Manganelli, CAViaR : Conditional autoregressive Value-at-Risk by regression quantiles, Journal of Business and Economic Statistics, 2004.
- MICHAEL MEYER, Ph.D., Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance, CHAPMAN & HALL/CRC, 2000

Articles

- JP. MORGAN, « Technical Document Risk Metrics™ »
- SIMONE MANGANELLI AND ROBERT F. ENGLE . « VALUE AT RISK MODELS IN FINANCE » EUROPEAN CENTRAL BANK 2001.
- Akimou Ossé . « La Value at Risk ».

- Thierry RONCALLI, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, « Introduction à la Gestion des Risques » Cours ENSAI de 3ème année.
- Cherif ELMSIYAH, « Mesures de risque et gestion du capital dans le secteur financier ».
- Raymond Théorêt & Pierre Rostan, « Quelques techniques d'analyse de la VaR ».
- Maria Coronado . « Comparing different methods for estimating Value at Risk for actual non-linear portfolios : empirical evidence ». European Journal of Finance August 2000.
- Hafrate Mohammed La Value-at-Risk, « Une nouvelle mesure du risque ».
- Christophe MAGNIN, « La classification des risques, un outil d'aide à la décision ».
- Paul Embrechts, Johanna Nešlehová, Mario V. Wüthrich, « Additivity properties for Value-at-Risk under Archimedean dependence and heavy-tailedness, 2008 Elsevier.
- Allan W. Gregory a, Jonathan J. Reeves, « Interpreting Value at Risk (VaR) forecasts », 2008.

Thèses et mémoires

- Florent Berthe ESC Bretagne Brest , « VALUE AT RISK ET HYPOTHESE DE NORMALITE » .
- François Boudreault Anouar Lamane, « La gestion du risque de marché et la Valeur-à-Risque », École des Hautes Études Commerciales de Montréal.
- FRANCOIS ERIC RACICOT & RAYMOND THEORET, « Modèles de la VaR, simulation en Visual Basic (Excel) et autres mesures récentes du risque de marché », Ecole des sciences de gestion université de Québec Montréal.
- Sessi TOKPAVI , LA VALUE-AT-RISK COMME MESURE DU RISQUE DE MARCHE : Cas de la catastrophe financière du Comté d'ORANGE Université d'Orléans Faculté de Droit d'Economie et de Gestion.
- ANNIS ABDELHEDI Estimation de la Value at Risk d'un portefeuille d'Actions faculté des sciences économiques et de gestion.
- Guillaume Nolain, Yahia Salhi, Serge Werl, « Optimisation de portefeuille selon le critère de la Value at Risk » université lyon 1 Mai 2007.

SITES INTERNET CONSULTÉS

- [Http://perso.club-internet.fr/herlin/chap5.html](http://perso.club-internet.fr/herlin/chap5.html) Thèse de HERLIN Philippe, 1998. *Les économies d'échelles sur les marchés financiers, une approche par la théorie de l'information.*
- [Http://laic3.u-clermont1.fr/~deguy/publi/MBF/](http://laic3.u-clermont1.fr/~deguy/publi/MBF/) DEGUY Sébastien. *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur le mouvement brownien fractionnaire, les processus*

gaussiens autosimilaires, l'intermittence, H , p et leurs estimations sans jamais oser le demander.

- [Http://www.oecbb.be/actualities/Notionrisque.htm](http://www.oecbb.be/actualities/Notionrisque.htm) JANSSENS Claude. *Notion de risques quelques rappels : Bé ta, CAPM.*
- <http://www.pwcglobal.com/lu/eng/about/press-rm/lejeudi25012001.html> BERBÉ Christian, Directeur Global Risk Management Solutions, 2001. *Toujours pré occupé s, les gestionnaires d'actifs - Quels indicateurs de risque ?*
- http://www.pwcglobal.com/fr/fra/ins-sol/spec-int/les_echos_02.html BÉNÂ TRE Didier et WALTER Christian PricewaterhouseCoopers, 2000. *Du hasard sage au hasard sauvage.*
- <http://www.gloriamundi.org> SCHACHTER Barry. *All About Value-at-Risk™.*
- http://www.lesechos.fr/formations/finance/articles/article_11_1.htm LES ECHOS. *VaR : quelle mise sur la table du casino ?*
- <http://www.cmap.polytechnique.fr/~rama/papers> CONT Rama, chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 7641 à l'École Polytechnique. *Recent research papers.*
- <http://fr.biz.yahoo.com/glos> VERNIMEN.

TABLES DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	1
RESUME.....	2
SOMMAIRE	3
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	4
 INTRODUCTION GENERALE	 5
Choix et intérêt du thème	6
Problématique.....	7
Démarche méthodologique et bibliographique.....	8
Plan de la thèse	9
 PREMIERE PARTIE : RISQUE DE MARCHE ET L'APPROCHE VALUE AT RISK	 10
Chapitre 1 : les marchés financiers : généralités et gestion des risques.....	12
I. Le cadre institutionnel des marchés financiers.....	12
1 Présentation.....	12
2 La fonction des marchés financiers.....	13
3 Les catégories des titres financiers	17
II. L'évolution des marchés financiers internationaux depuis les années 1980	20
1 La taille des marchés de capitaux internationaux	20
2 La financiarisation croissante de l'économie mondiale.....	22
III. La crise financière mondiale 2008.....	24
1 Crise immobilière aux Etats-Unis : Origines et causes de la crise	25
2 Le Maroc face à la crise économique mondiale.....	27
IV. Gestion économique et réglementaire des risques.....	28
1 Le risk management.....	28
2 Typologie des risques	28
3 Le cadre réglementaire international	30
Chapitre 2 : Risque de marché.....	32
I. Revue de littérature.....	32
1 Définition et champs d'application du risque de marché.....	32
2 Les facteurs de risque	33
3 Notion de risque général/spécifique	33
II. Mesure des risques	34
1 Les indicateurs de risque.....	34
2 L'analyse en sensibilité	35
III. Les théories traditionnelles de risque	35
1 Le modèle de moyenne-variance de H.Markowitz	35
2 Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).....	36
3 La théorie de l'arbitrage.....	37
IV. Les aspects réglementaires de risque de marché	38
1 Les normes générales.....	39

2 Les critères qualitatifs	39
3 Les critères quantitatifs	40
Chapitre 3 : La Value At Risk.....	42
I. Présentation de l'approche VaR :	42
1 L'idée de base	42
2 Définition de la Value at Risk.....	43
3 Les paramètres de la VaR	45
a La distribution des pertes et profits du portefeuille valable pour la période de détention	45
b Le choix de la période ou l'horizon	46
II. Les cas de figures de la VAR	47
1 La VaR Normale	47
2 VaR d'un actif isolé	47
a VaR d'une action	47
b VaR d'une obligation.....	48
c VaR d'un portefeuille.....	49
d La VaR réglementaire	51
3 Démarche générale pour le calcul de la VaR.....	51
4 Les méthodes d'estimation de la Value at Risk	52
a La méthode historique.....	52
b Méthode paramétrique : Méthode de Variance – Covariance(VC)	54
c La simulation de Monte Carlo (MC).....	59
 DEUXIEME PARTIE : DYNAMIQUE DES MARCHES FINANCIERS : FAITS STYLISTES ET REALITE.....	64
Chapitre 4 : Modélisation des cours boursiers et hypothèses de la finance classique.....	65
I. Aperçu historique de la modélisation de la dynamique boursière.....	65
1 La marche aléatoire.....	65
2 L'introduction du modèle de marche aléatoire par Jules Regnault.....	67
a Le contexte comme raison à l'utilisation du modèle de marche aléatoire	67
b La validation empirique de ce modèle :	69
3 La formulation mathématique opérée par LOUIS BACHELIER.....	70
a La marche aléatoire chez bachelier	70
b L'abandon de la prévisibilité : l'espérance nulle	72
c De la prévisibilité à la variabilité	75
4 Alfred Cowles et l'économétrie	76
a La mesure de la prévisibilité	76
b L'échec de la prévisibilité.....	80
5 Le manque. Voire l'absence, d'explication théorique	82
II. La théorie de l'efficience des marchés	83
1 Les fondements d'efficience des marchés financiers.....	84
a Principe et définition de l'efficience	84

b	Les différentes formes d'efficience.	85
c	Fama et les trois formes d'efficience informationnelle.....	87
2	Les analyses de l'efficience du marché :	89
a	L'analyse technique	89
b	L'analyse fondamentale.....	89
3	Remise en cause de la théorie d'efficience	90
a	Difficulté d'application de la théorie d'efficience	90
b	Les mécanismes contrariant le principe d'efficience.....	91
Chapitre 5 : Modélisation mathématique des fluctuations boursières et faits stylisés		93
I.	Modèles classiques	93
1	Modèles stochastiques de Bachelier et Samuelson.....	93
a	Mouvement brownien : un peu d'histoire	93
b	Modèle stochastique de bachelier et samuelson : modèle brownien	95
c	La représentation de l'évolution des prix à l'aide d'un mouvement brownien géométrique :	99
2	Modélisation des cours par des processus de Lévy	100
a	Processus de Levy	100
b	Modèle exponentielle–Levy	100
3	Modèles de type ARCH.....	101
a	Modèle ARCH	101
b	Modèle GARCH	102
c	Modèle HARCH.....	103
II.	Les hypothèses de la finance classique :	103
1	La propriété d'indéfinie divisibilité.....	103
2	Stationnarité et érgodicité	104
3	Continuité.....	104
4	L'hypothèse gaussienne	105
5	Hypothèse 2_stable	108
6	Autocorrélation des rendements logarithmiques	108
7	Hypothèse de l'hétérogénéité des marchés	109
8	Modélisation classique : conséquences professionnelles.....	110
Chapitre 6 : le comportement réel des marchés financiers : caractéristiques et propositions économétriques		114
I.	Les hypothèses discutables du modèle classique de la finance	114
1	La mémoire longue « long memory ».....	114
a	Les origines hydrologiques du concept de mémoire longue.....	115
b	Le Phénomène de Hurst :.....	116
c	Définition de la mémoire longue :	116
d	L'analyse R/S et exposant de Hurst :	117
2	Mise en évidence de la leptokurticité : naissance d'un fait expérimental	120
a	Historicité du problème leptokurtique	120

b	Reconnaissance du problème leptokurtique	122
c	Modélisation du phénomène leptokurtique.....	123
3	Le caractère fractal des marchés financiers	123
a	Le contexte : La naissance des fractales	123
b	La dimension d'une fractale	125
c	Relations fractales, marchés financiers :	127
II.	Les propositions économétriques	127
1	Les modèles de longue mémoire : Le processus ARFIMA	128
a	Définition des processus ARFIMA :	129
	Exposant de Hurst et processus ARFIMA :	130
b	Les méthodes d'estimation.....	131
2	Modélisation avec les lois stables : <i>Modèles non gaussiens</i>	134
c	Les lois puissances	135
d	Les processus de Lévy	139
	CHAPITRE 7 : REALISATION DU MODELE VAR ACTIONS	146
I.	Présentation et étude des données	146
1.	Le choix des données	146
2	Étude des statistiques descriptives des rendements du portefeuille choisi	148
II.	Calcul de la VaR	162
1.	La VaR normale.....	163
2.	L'expansion de Cornish Fischer	163
3	La VaR historique.....	165
4.	Calcul de la VaR avec la méthode de variance-covariance	
5.	Analyse des résultats.....	168
	CONCLUSION GENERALE	171
	ANNEXE	173
	BIBLIOGRAPHIE	184