Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz-Fès
Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications

THESE

Présentée par

Mariem JIDOU KHAYAR

Pour l'obtention du

Doctorat en Mathématiques

Discipline : Mathématiques Appliquées

Spécialité : EDP et Contrôle optimal

Intitulée :

==========

Contrôlabilité de quelques problèmes paraboliques bilinéaires et semi-linéaires

==========

Soutenue le 21 Décembre 2019

Devant le jury composé de

Pr. Abdelfattah Touzani	PES	Faculté des sciences Dhar Al Mahraz Fès	Président
Pr. Abdelmoujib Benkirane	PES	Faculté des sciences Dhar Al Mahraz Fès	Directeur de Thèse
Pr. Mohamed Ouzahra	PH	Ecole normale supérieure de Fès	Co-Directeur de thèse
Pr. El Houssine Azroul	PES	Faculté des sciences Dhar Al Mahraz Fès	Rapporteur
Pr. Zakia Hammouch	PH	Faculte des Sciences et Techniques Errachidia	Rapporteur
Pr. Driss Meskine	PES	Ecole Supérieure de Technologie, Essaouira	Rapporteur
Pr. Youssef Akdim	PES	Faculté des sciences Dhar Al Mahraz Fès	Examinateur
Pr. Bennouna Jaouad	PES	Faculté des sciences Dhar Al Mahraz Fès	Examinateur

Remerciements

Je ne saurais commencer ce manuscrit autrement qu'en remerciant tous ceux qui ont contribué et soutenu ce travail.

En premier lieu, c'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse Monsieur **Abdelmoujibe Benkirane** et Monsieur **Mohamed Ouzahra**. J'ai pleinement conscience de l'immense chance que j'ai eu de travailler sous leur direction pendant ces années de thèse, je les remercie pour leur disponibilité, leurs encouragements et leur confiance.
La réussite de cette thèse est en grande partie tributaire de leurs qualités scientifiques exceptionnelles et leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension.

J'adresse mes profonds remerciements à Monsieur **Abdelfattah Touzani**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de juger cette thèse comme président de jury, je lui exprime tout mon respect et ma gratitude.

Je tiens également à remercier mes rapporteurs **El Houssine Azroul**, **Zakia Hammouch** et **Driss Meskine** d'avoir accepté de relire ce manuscrit et d'avoir bien voulu siéger dans ce jury.

Mes vifs remerciement vont également à Messieurs **Youssef Akdim**, **Bennouna Jaouad** pour avoir accepté d'examiner cette thèse, et pour leur participation au jury.

J'exprime ma profonde reconnaissance à messieurs les professeurs **Rachid El Ayadi** et **Adil Brouri** pour leur précieuse aide concernant les simulations numériques.

Je voudrais saisir l'occasion pour remercier la direction de la Faculté des sciences Dhar El Mehraz et tous les membres du Laboratoire LAMA pour l'entourage et les conditions favorables de travail qu'ils nous ont fourni.

Mes remerciements vont également à tous mes amis et collègues qui m'ont encouragé pendant cette thèse, en particulier mon amie et ma soeur **Layla Ezzahri** pour son soutien et pour tous les beaux moments qu'on a partagé pendant mes études universitaires au Maroc.

Ma gratitude va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de ce travail doctoral : ma famille d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir soutenu dans la voie que j'ai choisi.

Et enfin, je suis reconnaissante au Royaume du Maroc et je tiens à remercier le peuple marocain et le gouvernement de m'avoir permis de réaliser mon rêve de poursuivre mes études doctorales et compléter mes études universitaires.

Dédicaces

En premier lieu, Je dédie ce travail, avec ma gratitude et mes remerciements, à ma mère qui a toujours été le secret du succès dans ma vie, qui m'a appris dès mon jeune âge à être la meilleure, à atteindre autant que je peux, à aimer la science, la réussite et l'excellence.

A mon cher frère et mes chères soeurs.

A mon père compatissant qui a beaucoup lutté pour moi et qui m'a toujours soutenu dans ma carrière autant qu'il a pu.

A ma grande famille.

A mes fidèles amis.

A mes chers professeurs.

Et à tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu à atteindre cet objectif et ont poussé dans mon âme l'espoir, la lutte et l'ambition pour un avenir meilleur.

Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir. Et de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure.

Jacques-Louis Lions
mathématicien français
1928-2001

Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier le problème de la contrôlabilité pour une classe de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques bilinéaires ou semilinéaires. En premier lieu, nous étudions le problème de la contrôlabilité partielle des systèmes bilinéaires, ce qui consiste à faire ramener le système de son état initial à un état désiré donné seulement sur région interne du domaine géométrique du système. Nous nous intéressons aussi au problème de la contrôlabilité exacte globale des systèmes semilinéaires avec un contrôle multiplicatif distribué. L'approche utilisée permet le calcul explicite du contrôle et utilise la notion de contrôlabilité à zéro pour les systèmes contrôlés additivement ainsi que les propriétés des semi-groupes linéaires.

Des exemples d'illustrations sont présentés avec simulations numériques en vue de visualiser le comportement de l'état final du système par rapport à l'état cible.

Mots clés : Contrôlabilité exacte - Equation de la chaleur - Contrôlabilité partielle - Contrôle bilinéaires - Système semi-linéaire.

Abstract

The aim of this thesis is to study the problem of controllability for a class of systems described by parabolic partial differential equations bilinear and semi-linear.. Firstly, we studied the partial controllability problems of bilinear systems , which consist of steering the system from the initial state to a desired one in a subregion of the system evolution domain. We treated also the exact global controllability of semilinear systems with a distributed multiplicative control. The used approach allows the explicit calculation of the control and uses the notion of zero controllability for systems controlled additively and the properties of linear semi-group.

Illustrative examples are presented with numerical simulations to visualize the behavior of the final state of the system relative to the target state.

Keywords : Exact controllability - Reaction-diffusion equation - Partial controllability - Bilinear control - Semilinear system.

Notation

Ensembles et éléments

X	:	espace de Banach.
x	:	variable de l'espace.
t	:	variable du temps.
Ω	:	domaine (ouvert borné) de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$.
$\partial\Omega$	:	frontière de Ω.
ω	:	région non vide de Ω.
T	:	réel positif.
Q_T	:	produit cartésien de Ω par $(0,T)$.
Σ_T	:	produit cartésien de $\partial\Omega$ par $(0,T)$.

Opérateurs et espaces

A	:	opérateur linéaire de X dans X.
A^*	:	adjoint de A.
$D(A)$	:	domaine de A.
$\mathbf{R}(\lambda, A)$	:	résolvante de l'opérateur A au point λ.
$\rho(A)$	:	ensemble résolvant de A.
$L^p(\Omega)$	:	espace des fonctions p-sommable sur Ω $(1 \leq p \leq \infty)$.
y_t	:	dérivée partielle de $y \in L^p(\Omega)$ par rapport à t.

∇	:	opérateur gradient $\nabla y = t\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$, où $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de y par rapport à x_i.
Δ	:	opérateur Laplacien $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$, où $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$ est la dérivée second de y par rapport à x_i.
$\mathcal{L}(X)$	:	espace des fonctions linéaires continues définies de X vers lui-même.
$\mathbb{1}_E$	:	fonction caractéristique de l'ensemble E.
I	:	fonction identité.
$y\|_\omega$	:	restriction de $y \in L^p(\Omega)$ à ω.

Autres

$\|.\|_X$	:	norme définie sur X.
$\longrightarrow$	:	convergence forte.
$\rightharpoonup$	:	convergence faible.
p.p	:	presque partout.

Introduction

La théorie des systèmes est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques appliquées. En particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre des problèmes issus de divers domaines : des sciences physique, de la chimie, de l'économie, de médecine, des sciences de l'ingénieur...

Un système réel est défini par une équation qui décrit sa loi d'évolution dans un domaine déterminé, avec des conditions au bord et une condition initiale, le système est alors bien posé s'il existe un cadre fonctionnel satisfaisant qui permet de donner un sens à l'équation et d'assurer l'existence et l'unicité de la solution.

Les systèmes linéaires interviennent dans de nombreux contextes d'applications, ils permettent de traiter une bonne partie de la théorie des systèmes en dimension finie. Cependant, ces modèles ne permettent pas d'étudier d'autres problèmes réels intéressants, par exemple, ceux qui donne lieu à des systèmes bilinéaires. L'intérêt des systèmes bilinéaires est multiple puisqu'un grand nombre de processus industriels ou naturels ont intrinsèquement une structure bilinéaire. A titre d'exemple, on peut citer les transferts de chaleur par condition-convection, la dynamique des organes de sens, la génération des cellules par division cellulaire, la production d'énergie électrique, l'économie de certains pays, etc...[64].

L'état d'un système est caractérisée par un ensemble de variables qu'il faut connaître à un instant t_0 pour pouvoir prédire de façon univoque le comportement de ce système à tout instant $t > t_0$ et pour toute entrée entre t_0 et t. L'espace d'état est un espace vectoriel contenant les états du système et qui est convenablement choisi. Si cet espace est de dimension fini on dit que ce système est de dimension finie où localisé (c'est le cas des systèmes d'équations différentielles ordinaires), et si l'espace d'état est de dimension infinie alors le système est dit de dimension infinie où distribué

(c'est le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles ou EDP).

Les commandes utilisées pour agir sur un système de façon à le diriger vers une cible sont appelés contrôles, ils permettent l'action sur un système qu'on souhait maîtriser.

La théorie de contrôle est une branche de la théorie des systèmes qui a pour objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle dans le but d'atteindre certains objectifs pour le système étudié, par exemple ramener le système de son état initial à un état désiré, ramener le système à son équilibre contre différent types de perturbations...

Le contrôle apparait d'une manière additive dans les systèmes linéaires et d'une manière multiplicative pour les systèmes bilinéaires. Par exemple, les contrôles multiplicatifs (bilinéaires) sont essentiels pour modéliser des processus de convection par diffusion-réaction contrôlés au moyen de catalyseurs pouvant accélérer où ralentir la réaction.

La problématique générale de la contrôlabilité consiste à étudier la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné de manière exacte ou de manière approchée à un instant donné.

La contrôlabilité partielle (ou régionale) est une extension qui est très importante dans les applications pratiques, elle consiste à contrôler seulement une partie de l'état, en effet si on considère un système défini sur un domaine géométrique Ω, et si ω est une région de Ω, la contrôlabilité partielle sur ω consiste à conduire le système considéré de son état initial vers un état désiré sur ω.

Mathématiquement, le problème de la contrôlabilité pour les systèmes linéaires a été largement étudié et une base complète est disponible dans la littérature [28, 15, 31, 32].

Historiquement, le premier résultat de contrôlabilité concernant les systèmes bilinéaires en dimension infinie est dû à Ball, Marsden et Slemrod en 1982, ils ont démontré dans [4] que l'ensemble des états atteignables à partir de n'importe quel état initial est d'intérieur vide dans l'espace ambiant. Plusieurs interprétations ont été alors données à ce résultat négatif. En effet, on peut l'expliquer par un choix inapproprié d'espaces de contrôles et d'états désirés.

Cannarsa et Khapalov [14] ont étudié les propriétés globales de la contrôlabilité approché de l'équation de réaction-diffusion en utilisant des contrôles bilinéaires explicités pour le cas où les états initial et désiré vérifient certains conditions de signes en relation avec le principe du maximum.

Dans [67] Ouzahra a montré la contrôlabilité globale approchée et exacte de l'équation de réaction-diffusion par une contrôle statique (ne dépend pas du temps), en utilisant des approches basées sur la théorie des semi-groupes et la contrôlabilité nulle des systèmes linéaires.

Lin, Zhou et Gao [59] ont donné un résultat positif consacré à la contrôlabilité exacte du système parabolique régi par un contrôle bilinéaire pour une classe d'états désirés.
Dans [68] M. Ouzahra, A. Tsouli et A. Boutoulout ont traité la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur bilinéaire avec des conditions aux limites non homogènes.
Khapalov [51] a étudié les propriétés de la contrôlabilité approchée globale "non négative" d'une équation de la chaleur semi-linéaire. En appliquant au plus trois contrôles bilinéaires statiques, il a montré que tout état cible non négatif peut être approximativement atteignable à partir de tout état initial non négatif et non nul, puis il a appliqué ce résultat pour établir des propriétés de la contrôlabilité de la version non homogène de ce problème.
Aussi, Canarsa, Floridia et Khapalov [17] ont établi la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur dans le cas semi-linéaire monodimensionnel dans un temps donné $T > 0$, lorsque l'état désiré admet un nombre fini de points de changement de signe dans le même ordre que l'état initial.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux problèmes de la contrôlabilité pour l'équation de la chaleur bilinéaire et semilinéaire.
Ce manuscrit est organisé comme suit :

Le chapitre 1 introduit les principaux outils mathématiques utilisés dans cette thèse. On commence par rappeler les différentes propriétés des semi-groupes linéaire, puis on donne quelques résultats d'existence et d'unicité, ainsi que quelques résultats relatifs à la notion de contrôlabilité pour les systèmes à contrôles additifs.

Le chapitre 2 est consacré à un rappel sur quelques résultats existants concernant le problème de contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur bilinéaire et semilinéaire.

Dans le chapitre 3 on étudie le problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur bilinéaire, on traite les cas :

- Les conditions aux bords de Dirichlet non homogène.
- Les conditions aux bords de Dirichlet homogène.

Le chapitre 4 concerne la contrôlabilité partielle de l'équation de la chaleur bilinéaire, nous

donnons dans ce chapitre des résultats de la contrôlabilité partielle qui améliore des résultats précédemment connus dans le cas de la contrôlabilité globale.

Dans le chapitre 5 nous allons étudier la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur semi-linéaire en se basant sur la contrôlabilité de l'équation de la chaleur bilinéaire.

Table des matières

Résumé **6**

Notation **9**

Introduction **11**

1 Généralités **19**

1.1 Semi-groupes linéaires 19

1.1.1 Notion de C_0-Semi-groupe 19

1.1.2 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe 22

1.1.3 L'opérateur résolvante 22

1.2 Notion de contrôlabilité 24

1.2.1 Contrôlabilité globale 25

1.2.2 Contrôlabilité régionale (partielle) 25

1.2.3 Contrôlabilité à zéro des systèmes linéaires 26

1.3 Résultats préliminaires 28

1.3.1 Existence et unicité de la solution 28

1.3.2 Séparation des ouverts 29

1.3.3 Lemme de Gronwall 31

2 Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur 33

2.1 Équation de la chaleur bilinéaire 33

2.1.1 Cas d'états initial et désiré ayant un nombre fini de changement de signe . . 33

2.1.2 Cas d'états initial et désiré ayant même signe 36

2.2 Équation de la chaleur semilinéaire 41

2.2.1 Cas multidimensionnel 41

2.2.2 Cas monodimensionnel 49

3 Contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur 57

3.1 Cas de conditions au bord non homogènes 57

3.2 Cas de conditions au bord homogènes 71

4 Partial controllability of the bilinear reaction-diffusion equation 77

4.1 Introduction 77

4.2 Partial approximate controllability 79

4.3 Partial exact controllability 85

4.4 Examples and simulations 89

5 Exact controllability of the reaction-diffusion equation under bilinear control 97

5.1 Introduction 97

5.2 The main results 99

5.2.1 Exact controllability of the bilinear equation 99

5.2.2 Exact controllability of the semilinear system 105

5.3 Simulation 107

5.4 Conclusion 109

Conclusion et perspectives 113

Bibliographie **115**

Chapitre 1

Généralités

Ce premier chapitre a pour but de présenter quelques notions mathématiques qu'on va utiliser tout au long de cette thèse, en particulier la théorie des semi-groupes, la notion de contrôlabilité et certains résultats concernant les systèmes paraboliques.

1.1 Semi-groupes linéaires

Dans cette section on rappelle quelques résultats fondamentaux sur la théorie des semi-groupes.

1.1.1 Notion de C_0-Semi-groupe

Soit X un espace de Banach muni de la norme usuelle $\|.\|$.

Définition 1.1.1 *Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ linéaires continus de X dans X est appelée semi-groupe fortement continu (ou plus simplement C_0-semi-groupe) si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$,

ii) $S(0) = Id$ *(l'opérateur d'identité),*

iii) $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \forall x \in X$.

De plus un C_0-semi-groupe est de constractions si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Exemple 1.1.1 *Soit $X = L^2(0, +\infty)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carrée intégrables sur $[0, +\infty[$, muni du produit interne usuel, considérons l'opérateur suivant :*

$$(T(t)h)(x) = h(x+t), \quad h \in X, \quad x \geq 0.$$

Il est clair que les propriétés i) et ii) sont satisfaites et que $\|T(t)\| \leq 1$ *pour tout* $t \geq 0$. *Donc il reste à montrer iii).*

Pour une fonction continue h *de support compact, on a :*

$$\|T(t)h - h\|_{L^2(0,+\infty)} = \left(\int_0^\infty |h(t+x) - h(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad quand \quad t \longrightarrow 0^+.$$

L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(0,+\infty)$. *Ainsi pour une fonction* $f \in L^2(0,+\infty)$ *et pour tout* $\varepsilon \geq 0$, *on peut trouver une fonction continue* h *à support compact et telle que :*

$$\|f - h\|_{L^2(0,+\infty)} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\|_{L^2(0,+\infty)} &= \|T(t)(f-h) + T(t)h - h + h - f\|_{L^2(0,+\infty)} \\ &= \|f-h\|_{L^2(0,+\infty)} + \|T(t)h - h\|_{L^2(0,+\infty)} + \|h - f\|_{L^2(0,+\infty)} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

pour t *suffisamment petit.*

D'où quand $t \longrightarrow 0^+$, *on obtient :*

$$\|T(t)f - f\|_{L^2(0,+\infty)} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $T(t)$ *définit un* C_0-*Semi-groupe de contraction sur* $L^2(0,+\infty)$.

Exemple 1.1.2 *Soit* $\{\phi_n, n \geq 1\}$ *une base orthonormée dans un espase de Hilbert séparable, et soit* $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ *une suite de nombres réels. Alors*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \phi_n \rangle \phi_n \tag{1.1}$$

est un opérateur linéaire borné si et seulement si $\{e^{\lambda_n t}, n \geq 1\}$ *est une suite bornée, et c'est le cas*

$$\sup_{n \geq 1} \lambda_n < \infty$$

Sous cette hypothèse, nous avons :

$$T(t+s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(t+s)}\langle z, \phi_n\rangle\phi_n$$

et

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle T(s)z, \phi_n\rangle\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(t+s)}\langle \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m(s)}\langle z, \phi_m\rangle\phi_m, \phi_n\rangle\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}e^{\lambda_n s}\langle z, \phi_n\rangle\phi_n = T(t+s)z \end{aligned}$$

On a : $T(0) = I$ est satisfait, et pour la propriété iii) on a pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n\rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle z, \phi_n\rangle|^2 \\ &\leq \sup_{1\leq n\leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle z, \phi_n\rangle|^2 + K \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_n\rangle|^2, \end{aligned}$$

pour $K = \sup_{\substack{0\leq t\leq 1 \\ n\geq 1}} |e^{\lambda_n t} - 1|^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_n\rangle|^2 < \frac{\varepsilon}{2K},$$

on peut alors choisir $t \leq 1$ tel que : $\sup_{1\leq n\leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}$. Ce qui donne

$$\|T(t)z - z\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^{N} |\langle z, \phi_n\rangle|^2 + K\frac{\varepsilon}{2K} \leq \varepsilon.$$

D'où $T(t)$ est fortement continu. Ainsi (1.1) défini un C_0-semi-groupe si $\sup_{n\geq 1} \lambda_n < \infty$.

Corollaire 1.1.1 *Pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X.*

Théorème 1.1.1 *Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe, alors il existe des constantes $w \geq 0$ et $M \geq 0$ tel que :*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \text{ pour } t \geq 0.$$

1.1.2 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe

Définition 1.1.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur A défini par :*

1. $Ax = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t}$ *quand la limite existe.*
2. *Le domaine de A :* $D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0} \dfrac{S(t)x - x}{t};\ \ existe\}$

Proposition 1.1.1 *Tout semi-groupe fortment continu possède un unique générateur infinitésimal $(A, D(A))$.*

Théorème 1.1.2 *Soient $S(t)$ et $T(t)$ des C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés et soient A, B respectivement leurs générateurs infinitisimaux.*
Si $A = B$, alors $S(t) = T(t)$ pour $0 \leq t < \infty$.

Exemple 1.1.3 *Si A est un opérateur borné, alors A est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu donné par :*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = e^{tA}.$$

De plus l'opérateur $t \longrightarrow S(t)x$ est dérivable et il est l'unique solution du problème de cauchy :

$$\begin{cases} y_t = Ay \\ y(x,0) = x \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1.3 L'opérateur résolvante

Définition 1.1.3 *Soit A un opérateur qui génère un C_0-semi-groupe.*

1. *L'ensemble $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)\}$ s'appelle ensemble résolvant de A.*

2. *Pour tout $\lambda \in \rho(A)$, l'application $\mathbf{R}(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée résolvante de A.*

Proposition 1.1.2 *Soit $\mathbf{R}$ la résolvante d'un opérateur linéaire borné A. Alors $\mathbf{R}$ a les propropriétés suivantes :*

1. *Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors*

$$\mathbf{R}(\lambda, A) - \mathbf{R}(\mu, A) = (\mu - \lambda)\mathbf{R}(\lambda, A)\mathbf{R}(\mu, A),$$

2. $\mathbf{R}(\lambda, A)$ *est une application analytique sur* $\rho(A)$,

3. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $|\lambda| > \|A\|$, *alors* $\lambda \in \rho(A)$ *et on a*

$$\mathbf{R}(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}},$$

4. *On a* $\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbf{R}(\lambda, A) = (-1)^n\, n!\mathbf{R}(\lambda, A)^{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda \in \rho(A)$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A génère un semi-groupe fortement continu est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.1.3 *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ si et seulement si :*

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$,*
2. *il existe $\mathbf{M} > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\lambda \in \rho(A)$ $(\lambda > \omega)$, on a*

$$\|\mathbf{R}(\lambda, A)^n\| \leq \frac{\mathbf{M}}{(\lambda - \omega)^n}, n \geq 1.$$

Démonstration. Voir [71]

Théorème 1.1.4 *(Hille-Yosida)*
Soit A un opérateur linéaire non-borné. Alors A génère un semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si A vérifie la propriété 1) du théorème précédent et aussi l'ensemble
$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$, *contient* $]0, +\infty[$ *et*

$$\|\mathbf{R}(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Démonstration. Voir [71].

Proposition 1.1.3 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A, alors :*

1. *Pour tout $x \in D(A)$ on a $S(t)x \in D(A)$ et $AS(t)x = S(t)Ax$.*
2. *Pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et $x \in X$, on a*

$$\mathbf{R}(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

Lemme 1.1.1 *Si A génère un C_0-semi-groupe de contraction, alors on a :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda \mathbf{R}(\lambda, A)x = x \quad \forall x \in X.$$

Corollaire 1.1.2 *L'opérateur résolvante de A commute avec A et $S(t)$, et pour tout $\lambda > 0$, on a : $AR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ et*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

En outre, pour tout $y \in D(A)$ on a $\lambda AR(\lambda, A)y \to Ay$, quand $\lambda \to +\infty$.

Théorème 1.1.5 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal.*
Alors l'application $t \longrightarrow S(t)x$ est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in D(A)$ et nous avons :

1. *Pour tout $x \in D(A)$ on a $\dfrac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x$.*
2. *Pour tout $t \geq 0$*

$$\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A) \text{ et } A\int_0^t S(\tau)xd\tau = S(t)x - x.$$

1.2 Notion de contrôlabilité

Dans cette section, nous introduisons les notions de contrôlabilité exacte, à zéro et approchée pour un systèmes distribué.
De manière générale on peut définir un système de contrôle par une équation aux dérivées partielles (EDP) comme suit :

$$\begin{cases} y_t(x,t) = f(t,y,v), & t > 0, \\ y(x,0) = y_0(x). \end{cases} \tag{1.3}$$

où $v \in \mathcal{U}$ est le contrôle et $y(.,t) \in X$ est l'état du système. X et $\mathcal{U}$ sont des espaces de Banach appelés respectivement espace d'états et espace des contrôles admissibles.
Le problème de la contrôlabilité consiste à étudier la possibilité de transférer l'état du système de l'état initial y_0 vers un état désiré en un temps fini par l'action d'un contrôle v.

1.2.1 Contrôlabilité globale

On rappelle les notions de la contrôlabilité globale suivantes :

Définition 1.2.1 *(Contrôlabilité exacte). On dit que le système (1.3) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si, pour tout $y_0, y_d \in X$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que*

$$y(T) = y_d$$

Définition 1.2.2 *(Contrôlabilité à zéro). On dit que le système (1.3) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si, pour tout $y_0 \in X$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que*

$$y(T) = 0$$

Définition 1.2.3 *(Contrôlabilité approchée) On dit que le système (1.3) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et $y_0, y_d \in X$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que*

$$\|y(T) - y_d\|_X \leq \varepsilon.$$

1.2.2 Contrôlabilité régionale (partielle)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On reconsidère le système (1.3) sur un espace fonctionel X des fonctions définies sur Ω (par exemple $X = L^2(\Omega)$, $X = H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$..., selon le type de système).
Soit ω un sous-ensemble ouvert de Ω. La contrôlabilité régionale consiste en la possibilité de conduire le système (1.3) en un temps fini $T > 0$ de son état initial à un état désiré sur la région ω seulement, ce qui peut traduir par les définitions suivantes :

Définition 1.2.4 *Le système (1.3) est exactement partiellement contrôlable au temps $T > 0$ si, pour tout $y_0, y_d \in X$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que*

$$y(T)|_\omega = y_d|_\omega.$$

Définition 1.2.5 *Le système (1.3) est approximativement partiellement contrôlable au temps $T > 0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, et $y_0, y_d \in X$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que*

$$\|y(T)|_\omega - y_d|_\omega\| \leq \varepsilon.$$

1.2.3 Contrôlabilité à zéro des systèmes linéaires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x,t)y = \mathbb{1}_\omega u(x,t), & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T), T > 0, \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

où $a \in L^\infty(Q_T)$, $y_0(x) \in L^2(\Omega)$, et $\mathbb{1}_\omega$ est la fonction caractéristique de l'ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, $u \in L^\infty(Q_T)$ représente le contrôle.

Nous avons le résultat suivant consernant la contrôlabilité à zéro du système (1.4).

Théorème 1.2.1 *[33] Pour tout $T > 0$, $a \in L^\infty(Q_T)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^\infty(\omega \times (0,T))$ tel que la solution correspondante du système* (1.4) *satisfait :*

$$y(.,T) = 0 \quad dans \ \ \Omega \tag{1.5}$$

De plus, u peut être choisi tel que l'estimation suivante soit vérifiée :

$$\|u\|_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + (T^{1/2} + T)\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3}\right)\right] \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

où $C = C(\Omega, \omega) > 0$.

Preuve Soit $T > 0$ fixé, $a \in L^\infty(Q_T)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonctionnelle suivante :

$$J_\varepsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2}\left[\int\int_{\omega\times(0,T)} |\varphi| dx dt\right]^2 + \varepsilon\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \varphi(x,0)y_0(x)dx, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega). \tag{1.7}$$

Pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, φ est la solution correspondante du système suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x,t)\varphi = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(T) = \varphi^0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

La fonction $\varphi^0 \longmapsto J_\varepsilon(\varphi^0)$ est continue et strictement convexe dans $L^2(\Omega)$, de plus J_ε est coercif, et on a [27] :

$$\liminf_{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

Par conséquant, J_ε admet un unique minimum en $\hat{\varphi}_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$. Soit $\hat{\varphi}_\varepsilon$ la solution du (1.8) correspondante à $\hat{\varphi}_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$.

D'autre part (voir [27]) on a pour

$$u_\varepsilon \in \left(\int\int_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\varepsilon| dxdt \right) sgn(\hat{\varphi}_\varepsilon),$$

que la solution y_ε du système (1.4) correspondante à u_ε satisfait :

$$\|y_\varepsilon(.,T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{1.9}$$

Nous prétendons, pour une constante $C = C(\Omega,\omega) > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(\omega\times(0,T))} \leq exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + (T^{1/2}+T)\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} \right) \right] \|y_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Ainsi, en le minimum $\hat{\varphi}_\varepsilon^0$, on a :

$$J_\varepsilon(\hat{\varphi}_\varepsilon^0) \leq J_\varepsilon(0) = 0.$$

En accordant à (1.7), on obtient :

$$\frac{1}{2}\left[\int\int_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\varepsilon| dxdt \right]^2 \leq \int_\Omega \hat{\varphi}_\varepsilon(x,0) y_0(x) dx \leq \|\hat{\varphi}_\varepsilon(.,0)\|_{L^2(\Omega)} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$$

et en outre,

$$\int\int_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\varepsilon| dxdt \leq \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + T + (T^{1/2}+T)\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} \right) \right] \|y_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Là, on a utilisé la propriété suivante :

$$\|\varphi_\varepsilon(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp\left[C\left(1 + \tfrac{1}{T} + T + (T^{1/2}+T)\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} \right) \right] \left(\int\int_{\omega\times(0,T)} |\varphi| dxdt \right)^2,$$

pour tout $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ et $T > 0$.

Alors, à partir de (1.11), on obtient (1.10) en tenant compte que :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega\times(0,T))} = \int\int_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\varepsilon| dxdt.$$

D'après l'inégalité (1.10), on peut extraire une sous suite u_ε telle que :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^\infty(\omega\times(0,T)),$$

où u satisfait (1.6).

On sait que (1.9) est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que le contrôle u et la solution de (1.4) correspondante à u satisfons (1.5) et (1.6).

1.3 Résultats préliminaires

Soit X un espace de Banach. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y_t(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \quad t > 0, \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \tag{1.12}$$

où $A:\ D(A) \subset X \longrightarrow X$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans X, et $f :]0, +\infty[\times X \longrightarrow X$ est une fonction continue en t et Lipschitzienne en y, c'est à dire que :

$$\exists L > 0, \ \ \forall\, y, z \in X, \ \ \|f(t, y) - f(t, z)\|_X \leq L\|y - z\|_X.$$

et $f \in L^1(0, T; X)$.

1.3.1 Existence et unicité de la solution

On introduit quelques types de solutions pour le système (1.12).

Solution forte (où classique)

Définition 1.3.1 *Une fonction $y : [0, T] \longrightarrow X$ est dite solution forte de (1.12) sur $[0, T]$ si elle satisfait :*

1) $y(t) \in D(A) \quad$ pour $0 < t < T$.

2) y est continue sur $[0, T[$, différentiable sur $]0, T[$.

3) y vérifie $y(0) = y_0$ et $y_t = Ay(t) + f(t, y(t))$ p.p. sur $]0, T[$.

Solution faible

Définition 1.3.2 *Une fonction y est dite solution faible de (1.12) sur $[0, T]$ si :*

1) $y \in \mathcal{C}(0, T; X)$

2) la fonction $\phi : t \longmapsto \langle y(t), z\rangle \quad \forall z \in D(A^*)$ est absolument continue sur $[0, T]$ et vérifie

- $\langle y(0), z\rangle = \langle y_0, z\rangle$
- $\dfrac{d}{dt}\langle y(t), z\rangle = \langle y(t), A^*z\rangle + \langle f(t), z\rangle \quad$ *p.p. sur [0,T]*

Solution "mild"

Définition 1.3.3 *$y \in \mathcal{C}([0, T], X)$ est une solution mild de (1.12) si elle vérifie :*

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,y(s))ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Proposition 1.3.1 *[3] y est une solution mild du système (1.12) si et seulement si y est une solution faible de (1.12).*

Théorème 1.3.1 *[71] Soit $f : [t_0,T] \times X \longrightarrow X$ une fonction continue en t et Lipschitzienne sur X. Alors pour tout état initial $y_0 \in X$, le système (1.12) admet une unique solution $y \in \mathcal{C}([t_0,T];X)$. De plus, l'application $y_0 \longmapsto y$ est Lipschitzienne de X dans $\mathcal{C}([t_0,T];X)$.*

1.3.2 Séparation des ouverts

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

Lemme 1.3.1 *Soit O un ouvert de Ω tel que : $\bar{O} \subset \Omega$. Alors il existe un ouvert O_1 de Ω tel que :*

$$\bar{O} \subset O_1 \subset \bar{O_1} \subset \Omega.$$

De plus, il existe une fonction $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que :

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{dans } O\,; \\ 0 \leq \eta \leq 1, & \text{dans } O_1/O\,; \\ 0, & \text{dans } \Omega/O_1. \end{cases}$$

Preuve : Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}d(\bar{O}, \partial\Omega)$.
On pose : $U = \{x \in \Omega / d(x,\bar{O}) < \varepsilon\}$ et $O_1 = \{x \in \Omega /\ d(x,U) < \varepsilon\}$. Les deux ensembles U et O_1 sont ouverts et on a :

$$\bar{O} \subset U \subset O_1 \subset \bar{O_1} \subset \Omega.$$

Considérons la fonction f définie comme suite : f(x)=$\begin{cases} ce^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| <1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$
avec c est une constante vérifiant : $\int_{B(0,1)} f(x)dx = 1$, où $B(0,1)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.
On définit la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$ et soit η la convolution de φ avec la fonction caractéristique 1_U.

Les propriétés de la convolution nous donne que $\eta \in C^\infty(\Omega)$ et nous avons aussi les propriétés suivantes :

i) Pour $x \in O$:

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x-v) * \mathbf{1}_U(v)dv \\ &= \int_U \varphi(x-v)dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_U f(\frac{x-v}{\varepsilon})dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{U\cap B(x,\varepsilon)} f(\frac{v-x}{\varepsilon})dv\end{aligned}$$

On a : $v \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow \| x-v \| < \varepsilon$

$\Rightarrow \inf_{y\in\bar{O}} \| y-v \| \leq \| x-v \| < \varepsilon \Rightarrow d(v,\bar{O}) < \varepsilon \Rightarrow v \in U$

Donc $B(x,\varepsilon) \subset U$.

D'*où*

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} f(\frac{x-v}{\varepsilon})dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,1)} f(t)dt = 1.\end{aligned}$$

ii) Pour $x \in O_1$ on a :

$$0 \leq \eta(x) = \int_U f(\frac{v-x}{\varepsilon})dv \leq \int_{B(0,1)} f(t)dt = 1.$$

iii) Pour $x \in \Omega/O_1 : \varepsilon \leq d(x,U) \Rightarrow \varepsilon \leq \| x-v \|, \forall v \in \mathrm{U}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(\frac{x-v}{\varepsilon}) = 0, \forall v \in U \\ &\Rightarrow \eta(x) = 0.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Soit $\omega = (a,b)$ et $O = (c,d)$ tel que : $0 < c < a < b < d < 1$, on définit sur $\Omega = (0,1)$ la fonction suivante :*

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \textit{dans (0,c) ;} \\ 1-(a-x)^3P(x), & \textit{dans [c,a] ;} \\ 1, & \textit{dans } \omega = \textit{(a,b) ;} \\ 1-(x-b)^3Q(x), & \textit{dans [b,d] ;} \\ 0, & \textit{dans (d,1) .} \end{cases}$$

Avec : $P(x) = \dfrac{1}{(a-c)^3} + 3\dfrac{(x-c)}{(a-c)^4} + 6\dfrac{(x-c)^2}{(a-c)^5}$ *et* $Q(x) = \dfrac{1}{(d-b)^3} + 3\dfrac{(d-x)}{(d-b)^4} + 6\dfrac{(d-x)^2}{(d-b)^5}$.
On a, $\eta \in W^{2,\infty}(0,1)$.

1.3.3 Lemme de Gronwall

Lemme 1.3.2 *Soient* φ, ϕ *et* y *des fonctions continues sur* $[a,b]$, *à valeurs positives et vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\forall t \in [a,b], \;\; y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \tag{1.13}$$

Alors :

$$\forall t \in [a,b], \;\; y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \psi(u)du}ds \tag{1.14}$$

Preuve : Posons $F(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)y(s)ds$ et $G(t) = F(t)e^{-\int_a^t \psi(s)ds}$.
Multiplions l'inégalité (1.13) par $\psi(t)$, on obtient :

$$F^{'}(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t),$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$G^{'}(t) \leq \varphi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \psi(s)ds}.$$

Remarquons que : $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit par intégration que :

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(t)\psi(s)\left(e^{-\int_a^s \psi(u)du}\right)ds. \tag{1.15}$$

de l'hypothèse (1.13), nous avons

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t)e^{\int_a^t \psi(s)ds}$$

d'où en utilisant l'inégalité (1.15) on conclut que

$$\forall t \in [a,b],\, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \psi(u)du}ds.$$

Corollaire 1.3.1 *Soient φ et y deux fonctions continues et positives vérifiant :*

$$\exists c \geq 0 / \ \forall t \in [a,b],\ y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq ce^{\int_a^t \varphi(s)ds}$$

Chapitre 2

Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur

Dans ce chapitre on rappelle certains résultats de la littérature consernant la contrôlabilité approchée des systèmes bilinéaires et semilinéaires.

2.1 Équation de la chaleur bilinéaire

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ un domaine borné de frontière $\partial\Omega$, et considérons le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T_0), (T_0 > 0), \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T_0), \\ y(0) = y_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

où la fonction $v \in L^\infty(Q)$ représente un contrôle bilinéaire, et $y_0 \in L^2(\Omega)$ est l'état initial.

2.1.1 Cas d'états initial et désiré ayant un nombre fini de changement de signe

Dans cette partie, on prend $n = 1$.

Supposons dans ce cas que les états initial et désiré ont le même nombre fini de points de changement de signe. Soit $\Omega = (0,1)$ et $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ avec $H_0^1(\Omega) = \{\phi \mid \phi, \phi_x \in L^2(\Omega), \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Alors le système (2.1) admet une solution unique

$y \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \bigcap C([0,T]\times\bar{\Omega})$.

Le résultat suivant montre la possibilité de contrôler une classe d'états désirés.

Soit $y_d \in H_0^1(0,1)$ vérifiant les hypothèse suivantes :

(H_1) : $y_0(x)$ a nombre fini de points de changement de signe dans $(0,1)$.

(H_2) : $y_d(x)$ a exactement le même nombre de changement de signe dans le même ordre que $y_0(x)$

Théorème 2.1.1 *[14]. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps $T > 0$ et un contrôle multiplicatif $v \in L^\infty(Q_T)$, tel que la solution de (2.1) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|y(.,T) - y_d\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon.$$

Le contrôle v peut être exprimer à l'aide des contrôles statiques défini par morceaux.

Preuve La preuve du Théorème 2.1.1 contient deux étapes dans le cas où les points de changement de signe n'ont pas besoin d'être déplacés.

dans ce cas nous considérons que les points de changement du signe de l'état initial donné y_0 coïncide avec ceux de l'état cible. Notre objectif est de trouver un contrôle statique qui conduire le système (2.1) de y_0 vers y_d dans l'intervalle du temps $(0,T)$.

Étape 1 Le cas d'un point unique de changement de signe.

Sans perte de généralité on peut supposer que $y_0(x)$ et $y_d(x)$ sont positifs sur certains intervalles $(0,x_0)$ et $(0,x_1)$, respectivement, et négatif sur $(0,x_0)$ et $(0,x_1)$, avec $x_0 = x_1$.

Étape 1.1 Un cas particulier. Dans cette étape, nous supposons la condition suivante :

(H3) Supposons que $|y_d(x)| < |y_0(x)|$ pour $x \neq 0, x_1, 1$ et la fonction suivante :

$$\begin{cases} ln\left(\frac{y_d(x)}{y_0(x)}\right), & \text{où } y_0 \neq 0 \text{ } dans \text{ } [0,1], \\ 0, & \text{ailleurs dans } [0,1]. \end{cases} \tag{2.2}$$

lieu dans $L^\infty(\Omega)$.

(Nous rappelons que $y_d(x)$ et $y_0(x)$ ont le même signe quant ils diffèrent de zéro.)

Étape 1.1.1 Sélection du contrôle bilinéaire.

la fonction $v_0(x)$ dans (2.2) vérifie : $v_0(x) \leq 0$.

On suppose

$$v(x,t) := \tfrac{1}{T} v_0(x).$$

Alors la solution du système (2.1) correspondant a v donnée par :

$$y(x,t) = e^{\frac{1}{T}v_0(x)}y_0(x) + \int_0^t e^{\frac{t-\tau}{T}v_0(x)}y_{xx}(x,\tau)d\tau.$$

à l'instant $t = T$ on a :

$$y(x,T) = y_d(x) + \int_0^t e^{\frac{T-\tau}{T}v_0(x)}y_{xx}(x,\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

Étape 1.1.2 Évalaution de $\|y_{xx}\|_{L^2(Q_T)}$.

D'après (2.3) on a :

$$y(x,T) - y_d(x) = \int_0^t e^{\frac{T-\tau}{T}v_0(x)}y_{xx}(x,\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

Montrons que le second membre tend vers zéro en $L^2(Q_T)$ quand $T \longrightarrow 0^+$ ce qui nous donne que $y(x,T) \longrightarrow y_d(x)$ en même temps.

Puisque

$$\int_\Omega \left(\int_0^T e^{\frac{T-\tau}{T}v_0(x)}y_{xx}(x,\tau)d\tau\right)^2 dx \leq T\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)}. \tag{2.5}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $v_0 \in C^2([0,1])$

Sinon ($v_0 \notin C^2([0,1])$) il existe une suite des fonctions uniformément bornées $\{v_{0l}\}_{l=1}^{\infty}$, $v_{0l}(x) \leq 0$, $v_{0l} \in C^2([0,1])$ converge vers v_0 dans $L^2(\Omega)$, et on a :

$$e^{tv_{0l}(x)/T}y_0(x)|_{t=T} \to e^{tv_0(x)/T}y_0(x)|_{t=T} = y_d(x) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } l \longrightarrow \infty.$$

Multipions (2.1) par y_{xx} avec $v = \frac{1}{T}v_0 \leq 0$ et en utilisant l'intégration par parties sur Q_T on obtient :

$$\begin{aligned}\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T\int_\Omega y_t y_{xx}dxdt - \frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega v_0 y y_{xx}dxdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (y_x^2)_t dxdt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega v_0 y_x^2 dxdt + \frac{1}{2T}\int_0^T\int_\Omega v_{0x}(y^2)_x dxdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (y_x^2)_t dxdt + \frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega v_0 y_x^2 dxdt - \frac{1}{2T}\int_0^T\int_\Omega v_{0xx}y^2 dxdt.\end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}&\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2}\int_\Omega y_x^2(x,T)dx - \frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega v_0 y_x^2 dxdt\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega y_x^2(x,0)dx - \frac{1}{2T}\int_0^T\int_\Omega v_{0xx}y^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.6}$$

En particulier, rappelons que : $v_0(x) \leq 0$,

$$\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega y_{0x}^2 dx + \frac{1}{2T}\max_{x\in\bar{\Omega}}|v_{0xx}|\int_0^T\int_\Omega y^2 dxdt$$

Or, puisque $v_0(x) \leq 0$, multiplions (2.1) par y et l'integration par parties sur Q_T donne :

$$\int_0^T \int_\Omega y^2(x,t)dxdt \leq T \int_\Omega y_0^2(x)dx.$$

Combinons cela avec (2.6), on déduit que :

$$\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega y_{0x}^2 dx + \frac{1}{2}\max_{x\in\bar{\Omega}}|v_{0xx}| \int_\Omega y_0^2 dx. \tag{2.7}$$

Par conséquent, en utilisant (2.5) et (2.7) on obtient :

$$\int_\Omega \left(\int_0^T e^{\frac{T-\tau}{T}v_0(x)} y_{xx}(x,\tau)d\tau\right)^2 dx \leq T\|y_{xx}\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq T\frac{1}{2}\int_\Omega y_{0x}^2 dx + T\frac{1}{2}\max_{x\in\bar{\Omega}}|v_{0xx}| \int_\Omega y_0^2 dx. \tag{2.8}$$

D'où

$$\int_\Omega \left(\int_0^T e^{\frac{T-\tau}{T}v_0(x)} y_{xx}(x,\tau)d\tau\right)^2 dx \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow 0.$$

D'après les inégalités (2.4) et (2.5) on obtient la contrôlabilité approchée du (2.1) sous l'hypothèse (H3).

Pour le cas général (l'hypothèse (H3) n'est pas forcement vérifié) et plus du discusion concernant le cas où les points de changement de signe ont besoin d'être déplacées voir [14].

2.1.2 Cas d'états initial et désiré ayant même signe

Dans ce cas on suppose que l'état initial et l'état désiré ont les même points de changement de signe (qui peuvent être en nombre fini où infini).

Soit $A = \Delta$ l'opérateur Laplacien de domaine $D(A) = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$, et $S(t)$ le semi-groupe engendré par A dans $L^2(\Omega)$, et soit $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, $\lambda > 0$ est la résolvante de A.

Le théorème suivant donne la contrôlabilité approchée de système (2.1) dans un temps fini.

Théorème 2.1.2 *[67] Soit $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ vérifiant l'hypothèses suivantes :*

(H1) $y_0(x)y_d(x) \geq 0$ p.p dans Ω.

(H2) $y_0(x) = 0 \Leftrightarrow y_d(x) = 0$ p.p dans Ω.

(H3) $a := ln(\frac{y_d}{y_0}1_\Lambda) \in W^{2.\infty}(\Omega)$, avec 1_Λ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\Lambda = \{x \in \Omega / y_0(x) \neq 0\}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps $0 < T = T(T_0, y_0, y_d, \varepsilon) < T_0$ et un contrôle statique (c-à-d que $v = v(x)$ ne dépend pas du temps) $v \in W^{2,\infty}(\Omega)$ tel que la solution de (2.1) vérifie :

$$\|y(T) - y_d\| < \varepsilon.$$

Preuve Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < T < T_0$.

Dans le cas $a = 0$ p.p dans Ω nous avons : $y_d = y_0$.

Posons le contrôle nul $v = 0$ on peut conclure à partir de ça que $S(T)y_0 \to y_0$ quand $T \to 0^+$.

Dans la suite on suppose que $a \neq 0$ dans Ω, on distingue deux cas :

Cas 1 $y_0 \in D(A)$

Considérons le contrôle statique

$$v(x,t) = v(x) = \frac{a(x)}{T} \in L^\infty(\Omega),$$

avec ce contrôle le système (2.1) admet une unique solution $y(t)$ dans $[0,T]$, et d'autre part l'application $y_0 \to \Gamma(t)y_0 := y(t)$ défini un C_0-semi-groupe dans $L^2(\Omega)$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $A + v(x)I$ de domaine $D(A)$.

Comme $y_0 \in D(A)$ on a $\Gamma(t)y_0 \in D(A)$ $\forall t \geq 0$, aussi il existe deux constantes positives M et w telles que :

$$\|\Gamma(t)y\| \leq Me^{wt}\|y\|, \ \forall t \geq 0, \ \forall y \in L^2(\Omega).$$

Puisque $y(t) \in D(A)$ et $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$ on a : $ay(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Il vient de la formule de variation de la constante que :

$$y(t) = e^{tv(x)}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)v(x)}Ay(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

On a : $y(t) \in D(A)$, donc il suffit d'avoir $Ay(.) \in L^1(0,T)$, a cette fin on remarque d'abord que :

$$(A + v(x)I)\Gamma(t)y_0 = \Gamma(t)(A + v(x)I)y_0,$$

où I est l'identité dans $L^2(\Omega)$ et $A + v(x)I$ est le générateur du semi-groupe $\Gamma(t)$, alors pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\|Ay(t)\| \leq \|\Gamma(t)(A + v(x)I)y_0\| + \|v(x)\Gamma(t)y_0\|$$

$$\leq Me^{wt}\|(A+v(x)I)y_0\| + \frac{Me^{wt}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{T}\|y_0\|.$$

D'où $Ay(.) \in L^1(0,T)$.

Il résulte des hypothèse (i) et (ii) que :

$$e^{Tv(x)}y_0 = y_d \quad dans \quad \Omega,$$

ainsi on a

$$y(T) - y_d = \int_0^T e^{\frac{T-s}{T}a(x)}Ay(s)ds. \tag{2.9}$$

Montrons que le terme à droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers zéro dans $L^2(\Omega)$ quand $T \to 0^+$. Plus précisement, on va établir l'estimation suivante :

$$\|y(T) - y_d\| \leq CT\|y_0\|_{D(A)}, \quad (C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}) > 0), \tag{2.10}$$

où $\|.\|_{D(A)}$ est la norme du graphe associée à A et définie par : $\|y\|_{D(A)} = (\|y\|^2 + \|Ay\|^2)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $y \in D(A)$.

On va utiliser la formule de variation de la constante suivante :

$$y(t) = S(t)y_0 + \frac{1}{T}\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.11}$$

Alors on a :

$$Ay(t) = S(t)Ay_0 + \frac{1}{T}A\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.12}$$

Pour estimer la norme sur $L^2(\Omega)$ du second terme à droite dans l'inégalité précédente on va utiliser les propriétés de l'opérateur résolvante de A, on a :

$$\lambda AR(\lambda,A)\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds = \int_0^t S(t-s)\lambda R(\lambda,A)A(a(x)y(s))ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

puisque $S(t)$ est un semi-groupe de contraction, on déduit que :

$$\|\lambda AR(\lambda,A)\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds\| \leq \int_0^t \|A(a(x)y(s))\|ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

D'après (2.11) on a : $\displaystyle\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds \in D(A), \quad \forall t \in [0,T]$.

Lorsque $\lambda \to +\infty$ dans (2.13), il résult :

$$\left\|A\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds\right\| \leq \int_0^t \|A(a(x)y(s))\|ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.14}$$

En combinant la formule de Green et l'inégalité de poincaré on obtient :

$$\|\nabla y(t)\| \leq C\|\Delta y(t)\|, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.15}$$

pour certaine constante dépendante seulement de Ω.

Autrement, pour tout $s \in [0,T]$ et pour $x \in \Omega$ nous avons :

$$A(a(x)y(s)) = \Delta(a(x))y(s) + 2\nabla(a(x)).\nabla(y(s)) + a(x)\Delta(y(s)).$$

Ainsi, en utilisant (2.15) et le fait que $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$, l'inégalité (2.14) donne :

$$\left\| A\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds \right\| \leq \|\Delta a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t \|y(s)\|ds$$

$$+ C\int_0^t \|Ay(s)\|ds, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.16}$$

où $C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}) > 0$.

Nous avons besoin d'estimer $\|y(t)\|$ pour $t \in [0,T]$.

Il vient de (2.11) et du fait que $S(t)$ est de contraction que :

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \frac{\|\Delta a\|_{L^\infty(\Omega)}}{T} \int_0^t \|y(s)\|ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

l'inégalité de Gronwall implique que :

$$\|y(t)\| \leq C\|y_0\|, \quad \forall t \in [0,T], \ \ (C = C(\|a\|_{L^\infty(\Omega)})).$$

En utilisant ça dans (2.16) on obtient :

$$\left\| A\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds \right\| \leq CT\|\Delta a\|_{L^\infty(\Omega)}\|y_0\| + C\int_0^t \|Ay(s)\|ds,$$

$$\forall t \in [0,T], \ (C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})). \tag{2.17}$$

Il résulte de (2.12) que :

$$\|Ay(t)\| \leq \|Ay_0\| + \frac{1}{T}\left\| A\int_0^t S(t-s)a(x)y(s)ds \right\|, \quad \forall t \in [0,T].$$

Ce qui par (2.17), donne :

$$\|Ay(t)\| \leq C\|y_0\|_{D(A)} + \frac{C}{T}\int_0^t \|Ay(s)\|ds, \quad \forall t \in [0,T], \ \ (C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on déduit que :

$$\|Ay(t)\| \leq C\|y_0\|_{D(A)}, \quad \forall t \in [0,T], \ \ (C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

En utilisant cette dernière estimation, on conclut à partir de (2.9) que :

$$\|y(T) - y_d\| \leq C \int_0^T \|Ay(s)\| ds$$

$$\leq CT\|y_0\|_{D(A)}$$

pour certaine constante $C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}) > 0$.
Ainsi, prenons $0 < T < \dfrac{\varepsilon}{C\|y_0\|_{D(A)}}$ (qui dépend seulement de y_0 et y_d), et $v(x,t) = \dfrac{a(x)}{T}$ dans $\Omega \times (0,T)$, on trouve :

$$\|y(T) - y_d\| < \varepsilon.$$

Cas 2 $y_0 \in L^2(\Omega)$ (n'est pas nécessairement dans $D(A)$).
Dans ce cas le système (2.1), contrôlé par $v(x,t) = \dfrac{a(x)}{T}$, admet une unique solution $y(t)$ dans $[0,T]$.
En utilisant les propriétés du semi-groupe $S(t)$ généré par A, on a : $\hat{y}_0 := S(T)y_0 \in D(A)$ (voir [18]).
Soit $\hat{y}$ la solution classique de (2.1) correspondant avec l'état initial $\hat{y}_0$ et le contrôle $v(x,t) = \dfrac{a(x)}{T}$ où $a(x) = ln(\dfrac{y_d}{y_0})1_\Lambda$, $\Lambda = \{x \in \Omega / y_0(x) \neq 0\}$.
D'après les mêmes techniques utilisées dans le cas 1, on a l'estimation suivante :

$$\left\| \hat{y}(T) - \frac{y_d \hat{y}_0}{y_0} 1_\Lambda \right\| \leq TC\|\hat{y}_0\|_{D(A)}, \ (C = C(\|a\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

Puisque $S(t)$ est un semi-groupe de contraction, on a : $\|\hat{y}_0\|_{D(A)} \leq \|y_0\|_{D(A)}$.
D'où, pour tout $0 < T < T_1 := \dfrac{\varepsilon}{3C\|y_0\|_{D(A)}}$ (rappelons que $y_0 \neq 0$) nous avons :

$$\left\| \hat{y}(T) - \frac{y_d \hat{y}_0}{y_0} 1_\Lambda \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

En outre, remarquons que : $\left\| \dfrac{y_d \hat{y}_0}{y_0} 1_\Lambda - y_d \right\| \leq e^{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}} \|S(T)y_0 - y_0\|$.
On déduit qu'il existe $T_2 > 0$ tel que pour tout $T \in [0, T_2]$, on a :

$$\left\| \frac{y_d \hat{y}_0}{y_0} 1_\Lambda - y_d \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient de la formule de variation de la constante que :

$$\hat{y}(t) - y(t) = S(t)\hat{y}_0 - S(t)y_0 + \frac{1}{T}\int_0^t S(t-s)a(x)(\hat{y}(s) - y(s))ds.$$

En utilisant les propriétés du semi-groupe de contraction, on déduit que :

$$\|\hat{y}(t) - y(t)\| \leq \|S(t)y_0 - y_0\| + \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{T}\int_0^t \|\hat{y}(s) - y(s)\|ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

en appliquant à nouveau le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\|\hat{y}(T) - y(T)\| \leq C\|S(T)y_0 - y_0\|, \ (C = C(\|a\|_{L^\infty(\Omega)})).$$

D'où, il existe $T_3 > 0$ tel que pour $T \in [0, T_3]$, on a

$$\|\hat{y}(T) - y(T)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement, on conclut que pour tout $0 < T < T^* := inf(T_0, T_1, T_2, T_3)$, on a :

$$\|y(T) - y_d\| < \varepsilon.$$

Ceci compléte la preuve.

2.2 Équation de la chaleur semilinéaire

2.2.1 Cas multidimensionnel

Considérons le problème de Dirichlet régi dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ par un contrôle multiplicatif (bilinéaire) $v \in L^\infty(Q_T)$ dans terme de réaction :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + vu - f(x,t,u,\nabla u), & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T), T > 0, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in L^2(\Omega), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.18}$$

En supposant que la fonction f satisfait les conditions suivantes :

– $f(x,t,q,p)$ est lebesgue mesurable en x,t,q,p, et continue en q,p presque partout $(x,t) \in Q_T$;

– il existe une fonction positive ψ dans $L^{1+n/(n+4)}(\Omega)$, $\beta > 0$, et

$$r_1 \in \left[0, 1+\frac{4}{n}\right), \qquad r_2 \in \left[0, 1+\frac{2}{n+2}\right) \tag{2.19}$$

tel que

$$|f(x,t,q,p)| \leq \psi(x,t) + \beta|q|^{r_1} + \beta\|p\|^{r_2}_{\mathbb{R}^n} \quad dans \;\; Q_T \;\; pour \;\; q \in \mathbb{R}, \;\; p \in \mathbb{R}^n; \tag{2.20}$$

– il existe $\rho > 0$ et $\nu > 0$ tel que

$$\int_\Omega f(x,t,\phi,\nabla\phi)\phi dx \geq (\nu-1)\int_\Omega \|\nabla\phi\|^2_{\mathbb{R}^n} dx - \rho\int_\Omega (1+\phi^2)dx \quad \forall\phi \in H^1_0(\Omega). \tag{2.21}$$

On rappelle que le système (2.18) admet au moins une solution dans
$C([0,T];L^2(\Omega))\bigcap H_0^{1,0}(Q_T)\bigcap L^{2+4/n}(Q_T)$ (voir [53], p. 466).

Dans la suite un résultat de contrôlabilité non négative de (2.18) sera prouvé dans le cas de dimension quelconque de l'espace et dans un intervalle de temps arbitrairement petit (0,T) donné à l'avance.

l'idée principale est de considérer le système (2.18) comme l'interaction des trois dynamiques suivantes :

– Dynamique de diffusion pure : lorsque $v = 0$ et $f = 0$.

– Dynamique de réaction pure : provoquée uniquement par le terme de réaction, associé au système :

$$y_t = vy \quad dans \quad Q_T. \tag{2.22}$$
$$y|_{t=0} = y_0.$$

– Perturbation nonlinéaire : la dynamique provoquée par le terme non linéaire qui vérifie (2.19)-(2.21).

Le résultat suivant montre la contrôlabilité approchée du système (2.18) :

Théorème 2.2.1 *[51] Soit $T > 0$, et soit la paire des états initial et désiré $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ et $u_d \in L^2(\Omega)$ telle que :*

$$\frac{u_d}{u_0} \in H^2(\Omega), \quad \nabla\left(\frac{u_d}{u_0}\right) \in [L^\infty(\Omega)]^n, \quad \Delta\left(\frac{u_d}{u_0}\right) \in L^\infty(\Omega), \tag{2.23}$$

et

$$0 < c_1 \leq \frac{u_d(x)}{u_0(x)} \leq c_2 < 1 \quad dans \quad \Omega, \tag{2.24}$$

avec c_1 et c_2 sont deux constantes positives.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps $T_* \in (0, T)$ tel que pour toute solution de (2.18)-(2.21) *(eventuellement non unique), associée au contrôle*

$$v(x) = \frac{1}{T_*} ln \left(\frac{u_d(x)}{u_0(x)} \right), \tag{2.25}$$

on a l'estimation suivante :

$$\|u(., T_*) - u_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{2.26}$$

On introduit les trois lemmes suivants qui seront utilisés dans la preuve du Théorème 2.2.1.
Notons $\mathcal{B}(0,T) = C([0,T]; L^2(\Omega)) \bigcap H_0^{1,0}(Q_T)$ et

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}(0,T)} = \left(\max_{t\in[0,T]} \|\phi(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^T \int_\Omega \|\nabla\phi\|^2_{R^n} dxds \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\nu > 0$ vient de (2.21).

Lemme 2.2.1 *Soit $T > 0$ et $v \in L^\infty(\Omega)$. Alors toute solution de* (2.18), (2.19)-(2.21), *satisfait l'estimation suivante :*

$$\|u\|_{\mathcal{B}(0,T)}, \quad \|u\|_{L^{2+4/n}(Q_T)} \leq Ce^{(\alpha+\rho)T}(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\rho T)^{1/2}, \tag{2.27}$$

avec $\alpha = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ et C est une constante positive générique qui ne dépend pas de v.

Preuve

Rappelons que $f(.,.,u,\nabla u) \in L^{1+n/(n+4)}(Q_T)$ et que (voir [53] P.142) :

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}|_0^t + \int_0^t \int_\Omega \left(\|\nabla u\|^2_{R^n} - vu^2 + f(x,s,u,\nabla u)u \right) dxds = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.28}$$

En combinant (2.21) et (2.28) on trouve que pour $t \in [0,T]$:

$$\|u(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \int_\Omega \|\nabla u\|^2_{R^n} dxds$$

$$\leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(\alpha+\rho) \int_0^t \int_\Omega u^2 dxds + 2\rho T$$

$$\leq (\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\rho T) + 2(\alpha+\rho) \int_0^t \left(\|u(.,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^\tau \int_0^1 \|\nabla u\|^2_{R^n} dxds \right). \tag{2.29}$$

Appliquons l'inégalité de Gronwall-Bellman à (2.29) on obtient la première estimation de (2.27) par rapport à la norme de $\mathcal{B}(0,T)$ avec $C=\sqrt{2}$.

La deuxième estimation vient de la continuité de l'injection $\mathcal{B}(0,T)$ dans $L^{2+4/n}(Q_T)$ (voir [53] P. 467 et P. 475).

On a :

$$\|\xi\|_{L^{2+4/n}(Q_T)} \leq C\|\xi\|_{B(0,T)}, \tag{2.30}$$

pour certaine constante $C>0$ indépendante de T. Dans ce cas $C=c\sqrt{2}$ dans (2.27).

Cela termine la preuve du Lemme 2.2.1.

Considérons maintenant la version bilinéaire du système (2.18) définie comme suit :

$$h_t = \Delta h + vh \quad dans \quad Q_T, \tag{2.31}$$

$$h=0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \qquad h|_{t=0}=h_0 \in L^2(\Omega).$$

Lemme 2.2.2 *Soit $T>0$, $v\in L^\infty(\Omega)$, $\delta\in(0,\frac{1}{4})$, nous avons les estimations suivantes pour la différence $\xi=u-h$ entre toute solution correspondante à* (2.18)-(2.21) *et la solution correspondante à* (2.31) *:*

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{B}(0,T)}, \|\xi\|_{L^{2+4/n}(Q_T)} \leq Ce^{2\sqrt{2}\alpha T}\big(&\|u_0-h_0\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\frac{1}{\sqrt{\delta}}T^{\frac{n+4}{2(n+2)}(1-\frac{r_1 n}{n+4})}\|u\|^{r_1}_{L^{2+4/n}(Q_T)}\\ &+T^{\frac{n+4}{2(n+2)}(1-\frac{(n+2)r_2}{(n+4)})}\|\nabla u\|^{r_2}_{[L^2(Q_T)]^n}+\|\psi\|_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)}\big),\end{aligned} \tag{2.32}$$

où C est une constante qui ne dépend pas de $\alpha=\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Preuve

Nous allons estimer la différence entre toute solution possible de (2.18) et sa version bilinéaire (2.31).

Notons $\xi=u-h$, alors :

$$\xi_t = \Delta\xi + v\xi - f(x,t,u,\nabla u) \quad dans \quad Q_T, \tag{2.33}$$

$$\xi|_{\Sigma_T}=0. \quad \xi|_{t=0}=u_0-h_0.$$

Multiplions (2.33) par ξ, et en intégrant par parties dans $Q_t = \Omega \times (0,t)$, on obtient la suite d'estimation suivante pout tout $t \in [0,T]$:

$$\|\xi(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \int_\Omega \|\nabla \xi\|^2_{R^n}(x,s)dxds$$

$$= \|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t \int_\Omega v\xi^2 dxds - 2\int_0^t \int_\Omega \xi f(x,s,u,\nabla u)dxds$$

$$\leq \|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \int_0^1 \xi^2 dxds + 2\|\xi\|_{L^{2+4/n}(Q_t)} \|f(x,t,u,\nabla u)\|_{L^{1+n/(n+4)}(Q_t)}$$

$$\leq \|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \int_0^1 \xi^2 dxds + 2c\|\xi\|_{\mathcal{B}(0,t)} \|f(x,t,u,\nabla u)\|_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)}$$

$$\leq \|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,s)} ds + \delta \|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,t)} + \frac{c^2}{\delta} \|f(.,.,u,\nabla u)\|^2_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)}, \tag{2.34}$$

où nous avons utilisé (2.30) et les inégalités de Hölder et de Young.
Il résulte de (2.34) que :

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,t)} \leq 2\|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\alpha \int_0^t \|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,s)} ds + 2\delta \|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,t)}$$

$$+ \frac{2c^2}{\delta} \|f(.,.,u,\nabla u)\|^2_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)} \quad \forall t \in [0,T].$$

Ainsi

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,t)} \leq 4\|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 8\alpha \int_0^t \|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,s)} ds$$

$$+ \frac{4c^2}{\delta} \|f(.,.,u,\nabla u)\|^2_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)} \tag{2.35}$$

pour vu que : $0 < \delta < \frac{1}{4}$.
En appliquant l'inégalité de Gronwall-Bellman, on déduit de (2.35) que :

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{B}(0,T)} \leq e^{2\sqrt{2}\alpha T} \left(2\|\xi(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2c^2}{\delta} \|f(.,.,u,\nabla u)\|^2_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)} \right). \tag{2.36}$$

Maintenant, en utilisant (2.20) et l'inégalité de Hölder (voir [53] P. 469, [48] P. 863), on obtient :

$$\|f(.,.,u,\nabla u)\|^2_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)} \leq \beta T^{\frac{n+4}{2(n+2)}(1-\frac{r_1 n}{(n+4)})} \|u\|^{r_1}_{L^{2+4/n}(Q_T}$$

$$+ \beta T^{\frac{n+4}{2(n+2)}(1-\frac{(n+2)r_2}{(n+4)^2})} \|\nabla u\|^{r_2}_{L^{2+4/n}(Q_T)} + \|\psi\|_{L^{1+n/(n+4)}(Q_T)}. \tag{2.37}$$

En combinant (2.36) et (2.37), on obtient le résultat du Lemme 2.2.2.

Lemme 2.2.3 *Soit $T > 0$. Alors la solution de* (2.31) *vérifie l'estimation suivante avec* $h_0 \in H_0^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$, $\nabla v \in [L^\infty(\Omega)]^n$, $\Delta v \in L^\infty(\Omega)$, $v(x) \leq 0$ *:*

$$\int\int_{Q(T)} (\Delta h)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla h(x,T)\|^2_{R^n} dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\nabla h_0\|^2_{R^n} dx + \frac{1}{2}\|\Delta v\|_{L^\infty} T C^2 e^{2\alpha T} \|h_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.38}$$

où C est la constante définie dans Lemme 2.2.1 et $\alpha = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Preuve

On va estimer Δh dans $L^2(Q_T)$ où h satisfait (2.31) avec $h_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Considérons :

$$v \in L^\infty(\Omega) \bigcap H^2(\Omega), \quad \nabla v \in [L^\infty(\Omega)]^n, \quad \Delta v \in L^\infty(\Omega), \quad v(x) \leq 0 \quad dans \quad \Omega. \tag{2.39}$$

En multipliant (2.31) par Δh et intégrant sur Q_T, il résult que :

$$\int\int_{Q(T)} (-h_t \Delta h + (\Delta h)^2) dxdt = -\int\int_{Q(T)} vh\Delta h dxdt. \tag{2.40}$$

et on a :

$$-\int\int_{Q(T)} vh\Delta h dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^n h^{2_{x_k}}(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^n h^{2_{x_k}}(x,0)dx,$$

d'où en prenat (2.39) :

$$-\int\int_{Q(T)} vh\Delta h dxdt = \int\int_{Q(T)} \sum_{k=1}^n vhh_{x_k x_k} dxdt$$

$$= \int\int_{Q(T)} \sum_{k=1}^n vh^2_{x_k} dxdt + \frac{1}{2}\int\int_{Q(T)} \sum_{k=1}^n v_{x_k}(h^2)_{x_k} dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\Delta v\|_{L^\infty(\Omega)} \int\int_{Q(T)} h^2 dxdt.$$

Combinons ça avec les égalités ci-dessus, il résult que :

$$\int\int_{Q(T)}(\Delta h)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla h(x,T)\|^2_{R^n} dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla h_0\|^2_{R^n} dx + \frac{1}{2}\|\Delta v\|_{L^\infty(\Omega)} \int\int_{Q(T)} h^2 dxdt \tag{2.41}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla h_0\|^2_{R^n} dx + \frac{1}{2}\|\Delta v\|_{L^\infty(\Omega)} T \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega h^2(x,t) dx.$$

À partir de (2.41) et de l'estimation (2.27), on obtient l'estimation (2.38).

Preuve du Théorème 2.2.1

1 Cas où f=0

Dans ce cas on considère la version bilinéaire (2.31) du système (2.18).

Etape 1 Soit h_0 et h_d vérifient les hypothèse du Théorème 2.2.1 à la place du u_0 et u_d.

Posons :

$$v_*(x) = \ln\left(\frac{h_d(x)}{h_0(x)}\right). \tag{2.42}$$

Ainsi

$$h_d(x) = e^{v_*(x)} h_0(x). \tag{2.43}$$

Remarque 2.2.1 *Rappelons que* (2.22) *est une EDO linéaire en* $L^2(\Omega)$*, avec le fait* (2.42) *et* (2.43) *sa solution y satisfait la propriété suivante :*

$$y(x,1/s) = h_d(x) \quad lorsque \quad y_0 = h_0, \quad v(x) = sv_*(x), \ \ \forall s > 0. \tag{2.44}$$

Etape 2

Pour établir le résultat du théorème 2.2.1, on va montrer que h_d peut être approchée par une solution appropriée de (2.31).

A cette fin nous allons étudier la différence entre la solution du (2.31) et celui du (2.22) sur $(0,T)$.

Considérons pour tout $v \in L^\infty(\Omega)$ et notons $g = h - y$.

Alors, en supposant que $y_0 = h_0$ dans (2.31) et (2.22), on obtient :

$$g_t = vg + \Delta h$$

$$g|_{t=0} = 0.$$

Ainsi

$$g(x,t) = \int_0^t e^{v(x)(t-\tau)} \Delta h(x,\tau) d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{2.45}$$

Soit maintenat v de la forme (2.44), on a :

$$v(x) = s v_*(x).$$

Nous traitons maintenant le nombre positif s comme un paramètre (sa valeur sera déterminée dans l'étape 4).

Donc, d'après (2.24) on a :

$$\ln c_1 \leq v_* \leq \ln c_2 < 0,$$

la formule (2.45) donne :

$$\|g(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{e^{2st \ \ln c_2} - 1}{s \ln c_2} \right) \|\Delta h\|^2_{L^2(Q_t)}, \quad Q_t = \Omega \times (0,t), \ \ t \in [0,T]. \tag{2.46}$$

Etape 3

En utilisant l'estimation (2.38) du Lemme 2.2.3 avec $v = s v_*$, on trouve à partir de (2.46) que :

$$\|g(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{e^{2st \ \ln c_2} - 1}{s \ln c_2} \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla h_0\|^2_{R^n} dx + \frac{1}{2} s \|\Delta v_*\|_{L^\infty(\Omega)} t C^2 e^{2\alpha st} \|h_0\|^2_{L^2(\Omega)} \right), \tag{2.47}$$

où $\alpha = \|v_*\|_{L^\infty(\Omega)}$

Etape 4

Soient $s > 0$ et $T_* \in (0,T)$ tels que :

$$T_* = \frac{1}{s} \quad o \quad T_* s = 1. \tag{2.48}$$

Il résulte de (2.47), (2.48) et le propriété (2.44) que :

$$\|g(.,T_*)\|_{L^2(\Omega)} = \|h(.,T_*) - y(.,T_*)\|_{L^2(\Omega)} = \|h(.,T_*) - h_d\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \tag{2.49}$$

quant $s \longrightarrow \infty$ (où $T_* \longrightarrow 0^+$), ce qui assure (2.26), pour tout $\varepsilon > 0$.

Ceci termine la preuve lorsque $f = 0$.

Le cas général

En utilisant le Lemme 2.2.2, on peut déduire de ce qui précéde que les solutions u et h de (2.18) et (2.31) sont telles que :

$$\|u(.,T_*) - h(.,T_*)\| \longrightarrow 0,\ T_* \longrightarrow 0.$$

D'où le résultat du Théorème 2.2.1 dans le cas général.

2.2.2 Cas monodimensionnel

Position du problème

On considère le problème semilinéaire de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + v(x,t)u - f(u), & \text{dans} \quad Q_T = (0,1)\times(0,T), T>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(0,1). \end{cases} \tag{2.50}$$

Où $v \in L^\infty(Q_T)$ est un contrôle bilinéaire.

Le terme non linéaire $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

– $f(0) = 0$, et f est différentiable en 0.

– f est Lipschitzienne, et soit L sa constante de Lipschitz, on a :

$$|f(u') - f(u)| \leq L|u' - u| \qquad \forall u, u' \in \mathbb{R}.$$

Dans cette section on suppose que $u_0 \in H_0^1(0,1)$ a un nombre fini de zéros, c'est à dire qu'il existe des points

$$0 = x_0^0 < x_1^0 < \ \ldots \ < x_n^0 < x_{n+1}^0 = 1$$

tels que

$$u_0(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_l^0,\ l = 0,\ \ldots n+1.$$

De plus, on suppose que les zéros intérieurs $(x_l^0,\ l = 1,\ \ldots n)$ sont des points de changement de signe, c'est-à-dire que pour tout $l = 1,\ \ldots n$,

$$u_0(x)u_0(y) < 0, \quad \forall x \in (x_{l-1}^0, x_l^0),\ \forall y \in (x_l^0, x_{l+1}^0).$$

L'objectif ici est de montrer que tout état cible $u_d \in H_0^1(0,1)$, a un nombre fini de changement de signe dans le même ordre que u_0, peut être approximativement atteindre dans $L^2(0,1)$-norme à un instant donné $T > 0$.
Soit $x_l^d,\ l = 0,\ \ldots\ n+1$ les zéro de u_d, alors la condition ci-dessus peut s'exprimer par l'expression suivante :

$$u_0(x)u_d(y) < 0 \quad , \forall x \in (x_{l-1}^0, x_l^0)\ \ \forall y \in (x_l^d, x_{l+1}^d),\ \text{pour } l = 1,\ \ldots\ n.$$

Définition 2.2.1 *On dit qu'une fonction $v \in L^\infty(Q_T)$ est statique par morceaux, s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $c_k(x) \in L^\infty(0,1)$ et $t_k \in [0,T]$, $t_{k-1} < t_k$, $k = 1,\ \ldots,\ N$ avec $t_0 = 0$ et $t_m = T$, tels que*

$$v(x,t) = c_1(x)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{k=2}^{m} c_k(x)\mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}(t),$$

où $\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}$ et $\mathbb{1}_{(t_{k-1},t_k]}$ sont les fonctions caractéristiques de $[t_0,t_1]$ et $(t_{k-1},t_k]$, respectivement.

Résultat principal de la contrôlabilité

Le résultat principal concernant la contrôlabilité du système (2.50) est le suivant :

Théorème 2.2.2 *[17] Soit $u_0 \in H_0^1(0,1)$. Supposons que u_0 a un nombre fini de points de changement de signe. Considérons $u_d \in H_0^1(0,1)$ qui a exactement le même nombre de points de changement de signe dans le même ordre que u_0. Alors pour tout $\eta > 0$ il existe $T = T(\eta, u_0, u_d) > 0$ et un contrôle statique par morceaux $v = v(\eta, u_0, u_d) \in L^\infty(Q_T)$ tels que la solution de (2.50) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|u(.,T) - u_d\|_{L^2(0,1)} \leq \eta.$$

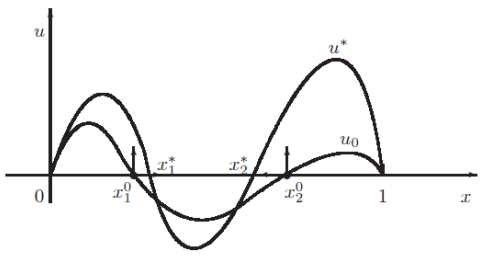


Figure 1 : Contrôle de deux points de changement de signe.

Nous aurons besoin des définitions et résultats suivants qui seront utilisés dans la preuve du Théorème précédent :

Notations et définitions

On va utiliser les notations suivantes :

◇ **Espaces de Sobolov**

$$H^1(0,1) = \{\phi \in L^2(0,1)|\ \phi_x \in L^2(0,1)\}$$
$$H_0^1(0,1) = \{\phi \in H^1(0,1)|\ \phi(0) = \phi(1) = 0\}$$
$$H^2(0,1) = \{\phi \in H^1(0,1)|\ \phi_{xx} \in L^2(0,1)\}.$$

◇ **Espaces de Hölder**

Pour $\vartheta \in (0,1)$ un nombre fixe, on pose :

$$C^{\vartheta}([0,1]) := \left\{ w \in C([0,1]) \ : \ \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^{\vartheta}} < +\infty \right\},$$

$$C^{2+\vartheta}([0,1]) := \left\{ w \in C^2([0,1]) \ : \ w'' \in C^{\vartheta}([0,1]) \right\}.$$

Soit $Q_T = (0,1)\times(0,T)$. On définie les espaces suivants des fonctions qui dépendent du temps :

$$C^{\vartheta,\frac{\vartheta}{2}}(\bar{Q}_T) := \left\{ u \in C(\bar{Q}_T) \ : \ \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\vartheta}} + \sup_{t,s\in[0,T]} \frac{|u(x,t)-u(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\vartheta}{2}}} < +\infty \right\},$$

$$C^{2,1}(\bar{Q}_T) := \left\{ u \ : \ \bar{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ u_{xx},\ u_x,\ u_t \ \in \ C(\bar{Q}_T) \right\},$$

$$C^{2+\vartheta,1+\frac{\vartheta}{2}}(\bar{Q}_T) := \left\{ u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) \ : \ u_{xx},\ u_x,\ u_t \ \in \ C^{\vartheta,\frac{\vartheta}{2}}(\bar{Q}_T) \right\}.$$

◇ **Partition d'un intervalle**

Soit $N \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{R} \ = \ \{(a_1,\ \ldots,\ a_N)|\ a_k \in \mathbb{R},\ a_k > 0,\ k \ = \ 1,\ \ldots,\ N\}$.

Pour tout

$$(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_N) = (\tau_k)_1^N \in \mathbb{R}_+^N,\ (\sigma_1,\ \ldots,\sigma_N) = (\sigma_k)_1^N \in \mathbb{R}_+^N,$$

On définit

$$T_0 := 0, \qquad S_k := T_{k-1} + \sigma_k, \qquad T_k := S_k + \tau_k, \qquad k \ = \ 1,\ \ldots,\ N. \tag{2.51}$$

Notons que : $0 = T_0 < S_k < T_K \leq T_N$, $k = 1, \ldots, N$, on considére la partition suivante de l'intervalle $[0, T_N]$ à $2N$ intervalles :

$$[0,T] = [0,S_1] \cup [S_1,T_1] \cup \ldots \cup [T_{N-1},S_N] \cup [S_N,T_N] = \bigcup_{k=1}^{N} (\mathcal{O}_k \cup \mathcal{E}_k), \tag{2.52}$$

où, pour tout $k = 1, \ldots, N$ nous avons défini $\mathcal{O}_k := [T_{k-1}, S_k]$ et $\mathcal{E}_k := [S_k, T_k]$.

◇ Problèmes sur des intervalles disjoints de temps

Soit $N \in \mathbb{N}$, pour tout $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathbb{R}_+^N$ fixé, considérons $(\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \mathbb{R}_+^N$, pour $k = 1, \ldots, N$. On introduit les problèmes de diffusion pure ($v \equiv 0$) sur des intervalles de temps disjoints suivants :

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + f(w), & \text{dans} \quad Q_{\mathcal{E}_k} = (0,1) \times [S_k, T_k], \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & t \in [S_k, T_k], \\ w|_{t=S_k} = w_k(x), \qquad w''(x)|_{x=0,1} = 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Nous allons considérer les données initiales w_k et les temps τ_k, $k = 1, \ldots, N$, comme paramètres de contrôle, où w_k est un élément de $C^{2+\vartheta}([0,1])$, avec $\vartheta \in (0,1)$ fixé au début.

Définition 2.2.2 *On appelle solution de* (2.53) *la fonction w définie sur* $(0,1) \times \bigcup_{k=1}^{N} [S_k, T_k]$ *par*

$$w(x,t) = W_k(x,t), \qquad \forall (x,t) \in (0,1) \times [S_k, T_k], \quad k = 1, \ldots, N.$$

où pour tout $k = 1, \ldots, N$, W_k est l'unique solution du k^{me} problème défini sur $(0,1) \times [S_k, T_k]$ *par* (2.53) *avec l'état initial w_k.*

Définition 2.2.3 *Soit $u_0 \in H_0^1(0,1)$ une fonction de n points de changement de signe. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $(\tau_k)_1^N \in \mathbb{R}_+^N$, on appelle une famille finie à la fois du temps et des données initiales de* (2.53) *associée à u_0, l'ensemble de la forme $\{(\tau_k)_1^N, (w_k)_1^N\}$ tel que :*

* $(\tau_k)_1^N \in \mathbb{R}_+^N$;

* $w_k \in C^{2+\vartheta}([0,1])$, *pour tout $k = 1, \ldots, N$, satisfie :*

1. $w_k(0) = w_k(1) = 0$, $w''(0) = w''(1) = 0$,
2. *w_1 et u_0 ont les mêmes points de changement de signe, dans le même ordre que les points de changement de signe de u_0,*
3. *pour $k = 2, \ldots, N$, $w_k(.)$ et $w(., T_{k-1})$ ont les même points de changement de signe dans le même ordre que les points de changement de signe de u_0, où w est la solution de* (2.53).

◇ Résultat de lissage pour préserver les points de changement de signe atteints

Soit $N \in \mathbb{N}$, pour tout $(\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \mathbb{R}_+^N$ fixé, considérons $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \mathbb{R}_+^N$, pour $k = 1, \ldots, N$, on donne $u_{k-1}, r_{k-1} \in H_0^1(0,1)$, $v_k \in L^\infty((0,1) \times [T_{k-1}, S_k])$, et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + v_k(x,t)u - f(u), & \text{dans} \quad Q_{\mathcal{O}_k} = (0,1) \times [T_{k-1}, S_k], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [T_{k-1}, S_k], \\ u|_{t=T_{k-1}} = u_{k-1} + r_{k-1} \in H_0^1(0,1). \end{cases} \tag{2.54}$$

Rappelons que $S_k = T_{k-1} + \sigma_k$.

On va montrer qu'étant donné T_{k-1}, alors il existe un $\sigma_k > 0$ assez petit tel que $\|r_{k-1}\|_{L^2(0,1)}$ est petite, et avec ça on peut conduire le système (2.54) de $u_{k-1} + r_{k-1}$ vers un voisinage de n'importe quel état w_k, où w_k a les mêmes points de changement de signe que u_{k-1} dans le même ordre.

Résultats préliminaires

Nous allons utiliser les résultats suivants dans la preuve du Théorème 2.2.2.

Théorème 2.2.3 *Soit $u_0 \in H_1^0(0,1)$ ayant n points de changement de signe : $x_l^0 \in (0,1)$, avec $0 := x_0^0 < x_l^0 < x_{l+1}^0 \leq x_{n+1}^0 := 1, \quad l = 1, \ldots, n$. Soit $x_l^d \in (0,1), \ l = 1, \ldots, n$, tel que : $0 := x_0^d < x_l^d < x_{l+1}^d \leq x_{n+1}^d := 1$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et une famille finie de temps et d'états initiale $\{(\tau_k)_1^{N_\varepsilon}, (w_k)_1^{N_\varepsilon}\}$ tel que, pour tout $(\sigma_k)_1^{N_\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^N$, la solution w^ε du problème (2.53) vérifie :*

$$w^\varepsilon(x, T_{N_\varepsilon}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_l^\varepsilon, \quad l = 0, \ldots, n+1,$$

pour certains points $x_l^\varepsilon \in (0,1), \quad 0 := x_0^\varepsilon < x_l^\varepsilon < x_{l+1}^\varepsilon \leq x_{n+1}^\varepsilon := 1, \ l = 1, \ldots, n$, tel que :

$$\sum_{l=1}^{n} |x_l^d - x_l^\varepsilon| < \varepsilon.$$

De plus, $w^\varepsilon(., T_{N_\varepsilon})$ a le même ordre de changement de signe que u_0.

Démonstrations : Voir [17], Section 4.

Théorème 2.2.4 *Soit u_{k-1}, r_{k-1}, $w_k \in H_0^1(0,1)$. Supposons que u_{k-1} et w_k ont les mêmes n points de changement de signe dans le même ordre de changement de signe. Alors, pour tout $\eta > 0$ il existe un suffisant petit, $\sigma_k = \sigma_k(\eta, u_{k-1}, w_k) > 0$ et un contrôle statique par morceaux $v_k = v_k(\eta, u_{k-1}, w_k \in L^\infty((0,1) \times (T_{k-1}, S_k))$ tels que :*

$$\|U_K(., S_K) - w_k(.)\|_{L^2(0,1)} \leq \eta + C_k \|r_{k-1}\|_{L^2(0,1)},$$

où U_K est la solution de (2.54) dans $(0,1) \times [T_{k-1}, S_k]$ et $C_k = C(u_{k-1}, w_k)$ est une constante positive.

Démonstrations : Voir [17], P. 10.

Lemme 2.2.4 *Soit $u_0 \in H_0^1(0,1)$ une fonction de n points de changement de signe. Soit $\{(\tau_k)_1^N, (w_k)_1^N\}$ une famile finie de temps et de données initiales de (2.53) associés à u_0, et soit $w : (0,1) \times \bigcup_{k=1}^{N} [S_k, T_k] \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution de (2.53).*
Pour tout $\delta > 0$, il existe $\sigma_\delta = (\sigma_k)_1^N \in \mathbb{R}_+^N$, et un contrôle bilineaire $v_\delta \in L^\infty((0,1) \times (0, T_N))$ tel que la solution de (2.50) : $u_\delta : (0,1) \times [0, T_N] \to \mathbb{R}$ correspondante à v_δ vérifie que :

$$\|u_\delta(., T_k) - w(., T_k)\|_{L^2(0,1)} \leq \delta, \quad \forall k = 1, \ldots, N. \tag{2.55}$$

Maintenant, on peut démontrer le Théorème 2.2.2.

Preuve du Théorème 2.2.2

Soit $\eta > 0$ fixé, et $u_0 \in H_0^1(0.1)$ ayant n points de changement de signe $x_l^0 \in (0.1)$, avec
$0 := x_0^0 < x_l^0 < x_{l+1}^0 \leq x_{n+1}^0 := 1$, $l = 1, \ldots, n$.
Soit $u_d \in H_0^1(0.1)$ ayant n points de changement de signe $x_l^d \in (0,1)$, $l = 1, \ldots, n$, tels que :
$0 := x_0^d < x_l^d < x_{l+1}^d \leq x_{n+1}^d := 1$.

Étape 1 : Appliquons Théorème 2.2.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et une famille finie du temps et de données initiales $\left\{(\tau_k)_1^{N_\varepsilon}, (w_k)_1^{N_\varepsilon}\right\}$ tel que, pour tout $(\sigma_k)_1^{N_\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}_\varepsilon}$, la solution $w^\varepsilon : (0,1) \times \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} [S_k, T_k] \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème (2.53) satisfait

$$w^\varepsilon(x, T_{N_\varepsilon}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_l^\varepsilon \quad l = 0, \ldots, n+1, \tag{2.56}$$

pour certains points $0 := x_0^\varepsilon < x_l^\varepsilon < x_{l+1}^\varepsilon \leq x_{n+1}^\varepsilon := 1$, $l = 1, \ldots, n$, tel que :

$$\sum_{l=1}^{n} |x_l^d - x_l^\varepsilon| < \varepsilon. \tag{2.57}$$

De plus, $w^{\varepsilon}(.,T_{N_\varepsilon})$ a le même ordre de changement de signe que u_0.

Étape 2 : Appliquons le Lemme 2.2.4, pour tout $\delta > 0$ il existe $\sigma_{\varepsilon,\delta} = (\sigma_k)_1^{N_\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}_\varepsilon}$, $v_{\varepsilon,\delta} \in L^\infty((0,1)\times(0,T_{N_\varepsilon}))$ tel que, la solution du (2.50) correspondante au contrôle bilinéaire $v_{\varepsilon,\delta}$ que l'on dénote par $u_{\varepsilon,\delta} : (0,1)\times[0,T_{N_\varepsilon}] \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie :

$$u_{\varepsilon,\delta}(.,T_{N_\varepsilon}) = w^{\varepsilon}(.,T_{N_\varepsilon}) + r_{N_\varepsilon}(.), \tag{2.58}$$

où

$$\|r_{N_\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} \leq \delta. \tag{2.59}$$

Étape 3 :

Conduisons le système (2.50) de $u_{\varepsilon,\delta}(.,T_{N_\varepsilon})$ à u_d.

Par (2.57), il est facile de montrer qu'il existe $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\eta) > 0$ et $u_d^\varepsilon \in H_0^1(0,1)$ tels que pour tout $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$, on a :

$$u_d^\varepsilon(x) = 0 \iff x = x_l^\varepsilon,\ \ l = 0,\ \ldots, n+1 \quad et \quad \|u_d - u_d^\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\eta}{3}. \tag{2.60}$$

Puisque $w^{\varepsilon}(.,T_{N_\varepsilon})$ et u_d^ε ont les mêmes points de changement de signe, on déduit en tenant en compte (2.56)-(2.59), qu'on peut conduire le système (2.50) de $u_{\varepsilon,\delta}(.,T_{N_\varepsilon})$ vers u_d^ε à un instant donné $T > T_{N_\varepsilon}$. En effet appliquons le Théorème 2.2.4, pour tout $\bar\eta > 0$ on déduit qu'il existe $\sigma^d = \sigma^d(\bar\eta,\varepsilon,u_0,u_d) > 0$ et un contrôle bilinéaire statique par morceaux $v_d = v_d(\bar\eta,\varepsilon,u_0,u_d) \in L^\infty((0,1)\times(T_{N_\varepsilon},T))$, avec $T := T_{N_\varepsilon} + \sigma^d$, tel que, en utilisant l'inégalité (2.59), on obtient :

$$\|U^*(.,T) - u_d^\varepsilon(.)\|_{L^2(0,1)} \leq \bar\eta + C^*(\varepsilon)\|r_{N_\varepsilon}(.)\|_{L^2(0,1)} \leq \bar\eta + C^*(\varepsilon)\delta, \tag{2.61}$$

où U^* est la solution du (2.54) dans $(0,1)\times[T_{N_\varepsilon},T]$ avec l'état initial $u_{\varepsilon,\delta}(.,T_{N_\varepsilon})$, $C^*(\varepsilon) = C(\varepsilon,u_0,u_d)$.

Conclusion. Fixons $\varepsilon := \frac{\varepsilon^*(\eta)}{2}$ et $\bar\eta := \frac{\eta}{3}$. Alors, on considère la constante $C^*(\varepsilon) = C^*\left(\frac{\varepsilon^*(\eta)}{2}\right)$ dans (2.61) et on choisit $\delta := \dfrac{\eta}{3C^*(\frac{\varepsilon^*(\eta)}{2})}$. Donc par (2.60) et (2.61), on obtient la conclusion suivante :

$$\|U^*(.,T) - u_d(.)\|_{L^2(0,1)} \leq \|U^*(.,T) - u_d^\varepsilon(.)\|_{L^2(0,1)} + \|u_d - u_d^\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \eta.$$

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur

Ce chapitre contient des résultats importants de la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur en utilisant des contrôles bilinéaires.
On étude deux cas de l'équation de la chaleur bilinéaire, le prémière cas est le cas de l'équation avec des conditions au bord de Dirichlet non homogènes et le deuxième cas c'est l'équation avec des conditions de Dirichlet homogènes.
On va établir des résultats de la contrôlabilité exacte pour une classe d'états désirés dans les cas précédents

3.1 Cas de conditions au bord non homogènes

On considère le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{dans } Q_T, \\ y = g, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$ de bord assez régulier $\partial\Omega$, et pour $T > 0$ est fixé $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $v \in L^\infty(Q_T)$ est le contrôle, $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ représente la condition au bord de Dirichlet non homogène, $y_0 \in L^2(\Omega)$ est l'état initial.
On introduit le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *[6] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $S(t)$ le semigroupe généré par Δ sur $L^1(\Omega)$*

avec les conditions de Dirichlet homogène. Alors $S(t)(L^1(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega)$ *pour tout* $t > 0$ *et*

$$\|S(t)y_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ct^{-n/2}\|y_0\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall y_0 \in L^1(\Omega), \ \ t > 0, \tag{3.2}$$

où C *est une constante indépendante de* y_0.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *[59] Soit l'état désiré* $y_d \in W^{2,\infty}(\Omega)$ *tel que :* $y_d > 0$ *dans* $\bar{\Omega}$ *et* $\Delta y_d \geq 0$ *dans* Ω, $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $g = y_d$ *sur* $\partial\Omega$, *alors il existe* $T = T(y_d) > 0$ *tel que pour tout* $y_0 \in L^2(\Omega)$, *il existe un contrôle bilinéaire* $v \in L^\infty(Q_T)$ *avec lequel la solution du* (3.1) *dans* $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *satisfait :*

$$y(.,T) = y_d(x) \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } T \geq T(y_d).$$

Preuve

On pose $z = y - y_d$, $z_0 = y_0 - y_d$. Il résulte de (3.1) que z satisfait :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v(x,t)(z + y_d) + \Delta y_d, & \text{dans } Q_T, \\ z = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(x,0) = z_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Il est bien connu (voir [53]) que pour tout $z_0 \in L^2(\Omega)$, $v \in L^\infty(Q_T)$, et y_d donné comme dans Théorème 3.1.1, le système (3.3) admet une unique solution dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Donc pour montrer que le système (3.1) est exactement contrôlable à y_d, il suffit de montrer que le système (3.3) est contrôlable à zéro, on va montrer ça en trois étapes.

Étape 1 : Montrons dans cet étape que pour $T_1 > 0$, il existe $M_1 > 0$ (M_1 dépend de y_d, et indépendant de z_0) tel que la solution correspondante de (3.3) satisfait :

$$\|z(.,T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1.$$

On suppose que le contrôle v est constant tel que : $v < -1$, en multipliant l'équation (3.3) par $z(x,t)$ et en intégrant sur Ω, il résulte pour tout $t \in [0,T]$:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega z^2(x,t)dx + 2\int_\Omega |\nabla z(x,t)|^2 dx = 2\int_\Omega v z^2(x,t)dx + 2\int_\Omega v y_d(x) z(x,t)dx$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_\Omega \Delta y_d(x) z(x,t)dx \\
&\leq 2\int_\Omega v z^2(x,t)dx + \|v\|_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega z^2(x,t)dx \\
&+\|v\|_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx \\
&+\int_\Omega z^2(x,t)dx \\
&=\int_\Omega (2v + \|v\|_{L^\infty(Q_T)} + 1) z^2(x,t)dx \\
&+\|v\|_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx \\
&\leq esssup_{Q_t}(2v + \|v\|_{L^\infty(Q_T)} + 1)\int_\Omega z^2(x,t)dx \\
&+\|v\|_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx,
\end{aligned}
$$

où $Q_t = \Omega \times (0,t)$.

Posons $r(t) = \displaystyle\int_\Omega z^2(x,t)dx$, nous avons :

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq esssup_{Q_t}(2v + \|v\|_{L^\infty(Q_T)} + 1)r(t) + \|v\|_{L^\infty(Q_T)}\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx.$$

Soit v une constante négative et $r(0) = \|z(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)}$, on a :

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq (v+1)r(t) + |v|\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx.$$

Ainsi,

$$r(t) \leq e^{(v+1)t}\|z(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{(v+1)(t-\tau)}\left(|v|\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx\right)d\tau.$$

$$= e^{(v+1)t}\|z(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(|v|\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx\right)\int_0^t e^{(v+1)(t-\tau)}d\tau.$$

Donc, on déduit que :

$$\|z(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{(v+1)t}\|z(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{e^{(v+1)t}-1}{v+1}\left(|v|\int_\Omega y_d^2(x)dx + \int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx\right)$$

$$= e^{(v+1)t}\|z(.,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{|v|(e^{(v+1)t}-1)}{v+1}\int_\Omega y_d^2(x)dx + \frac{e^{(v+1)t}-1}{v+1}\int_\Omega |\Delta y_d(x)|^2 dx$$

Ainsi, pour $T_1 > 0$ donné, on peut prendre le contrôle $v = v_1 < -1$ (v_1 dépend de z_0 et suffisament grand) et M_1, (M_1 dépend de y_d mais pas de z_0), tel que la solution z du système (3.3) correspondante vérifie :

$$\|z(.,T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1.$$

Étape 2 : Maintenant, nous montrons que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, nous pouvons trouver un contrôle et un temps $T_2(y_d) > 0$ suffisamment grand avec lesquels la solution du (3.3) satisfait :

$$\|z(T_2+1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Remarquons que pour $y_d \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et d'après le théorème d'injection de Sobolev nous avons $y_d \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Donc puisque $y_d > 0$ dans $\bar{\Omega}$ il existe une constante $\nu > 0$ telle que $y_d \geq \nu > 0$ dans $\bar{\Omega}$. Ainsi, $0 \leq \dfrac{\Delta y_d}{y_d} \in L^\infty(\Omega)$, d'où si on pose $v_2 = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d}$ dans (T_1, T_2), on obtient :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d} z, & \text{dans } \Omega \times (T_1, T_2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_1, T_2), \\ z(x, T_1) = z(x, T_1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Multiplions (3.4) par z et intégrons sur Ω, il résulte que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |z|^2 dx + \int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d} z^2 dx = 0.$$

On a $\Delta y_d y_d \geq 0$, donc :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |z|^2 dx + \lambda \int_\Omega z^2 dx \leq 0.$$

Où $\lambda > 0$ est la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, nous avons,

$$\|z(T_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda(T_2-T_1)} \|z(T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 e^{-\lambda(T_2-T_1)}.$$

On définit le même contrôle $v_3 = v_2$ dans (T_2, T_2+1), on a :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d} z = 0, & \text{dans } \Omega \times (T_2, T_2+1), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2, T_2+1), \\ z(x, T_1) = z(x, T_1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Rappelons que $\dfrac{\Delta y_d}{y_d} \geq 0$, en appliquant le Lemme 3.1.1, on obtient :

$$\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|z(T_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda(T_2-T_1)}. \tag{3.6}$$

D'où pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe un $T_2(y_d) > 0$ suffisamment grand tel que :

$$\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Étape 3. Ici, on établit la contrôlabilité à zéro en utilisant un résultat classique de la contrôlabilité avec un contrôle additive.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = v(z+y_d) + \Delta y_d, & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit $v = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d} + v_4$, nous avons :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d} z = v_4(z+y_d), & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour $z(., T_2+1) \in L^\infty(\Omega)$ et $\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0$ (ε_0 est déja fixé), au lieu de (3.8) considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d} z = u(x,t), & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

D'après le résultat qui l'on rappelle dans chapitre 1 (voir Théorème 1.2.1), il existe un contrôle $v \in L^\infty(\Omega \times (T_2+1, T_2+2))$ tel que la solution correspondante du système (3.9) satisfait :

$$z(., T_2+2) = 0. \tag{3.10}$$

D'ailleurs,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq C\|z(T_2+1)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.11}$$

où C_1 est indépendante de T_2.

D'autre par, d'après le principe du maximum, on a

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq \|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))}, \tag{3.12}$$

où C_2 est indépendante de T_2.

En combinant (3.11) et (3.12) il résulte que :

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq (1+C_1C_2)\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Maintenant, nous prenons :

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{1+C_1C_2} < \frac{\nu}{1+C_1C_2}.$$

Supposons que $\nu > 1$, il découle de (3.6), pour $T_2 > 0$ suffisamment grand, que :

$$\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon_0.$$

Ainsi, on a :

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} < \nu. \tag{3.14}$$

D'où, on peut définir le contrôle bilinéaire v_4 dans (3.8) comme suit :

$$v_4 = \frac{u}{z+y_d} \ \ dans \quad \Omega\times(T_2+1,T_2+2)), \tag{3.15}$$

où z est la solution du système (3.7). En utilisant le fait que $y_d \geq \nu > 0$, et l'inégalité (3.14), on conclut que : $v_4 \in L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))$.
Nous avons que le système (3.8) avec le contrôle $v = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d} + v_4$ et le système (3.9) avec le contrôle u sont indentiques sur (T_2+1,T_2+2). Donc d'après (3.10) on a $z(.,T_2+2)=0$, où z est la solution de (3.8) avec $v = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d} + v_4$.
Finalement, on conclut à partir des étapes 1,2 et 3, que pour tout $y_0(x) \in L^2(\Omega)$, on peut sélectionner $T(y_d) > 0$ suffisamment grand tel que la solution z de (3.3) avec le contrôle

$$v(t) = \begin{cases} v_1, & \text{dans } (0,T_1), \\ v_2 = v_3 = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d}, & \text{dans } (T_1,T_2+1), \\ \dfrac{-\Delta y_d}{y_d} + v_4, & \text{dans } (T_2+1,T_2+2). \end{cases} \tag{3.16}$$

satisfait $z(.,T_2+2)=0$, où $T(y_d) = T_2+2$ dépend de y_d mais pas y_0.
Pour $T > T(y_d)$, si on prend $v = \dfrac{-\Delta y_d}{y_d}$ dans $(T(y_d),T)$, alors la solution corresponante z de (3.3) vérifie que : $z(x,t)=0$, pour tout $(x,t) \in \Omega\times(T(y_d),T)$. D'où on obtient le résultat du Théorème 3.1.1.

À partir de la preuve du Théorème 3.1.1, nous avons le résultat suivant.

Corollary 3.1.1 *Soit $y_d \in W^{2,\infty}(\Omega)$ vérifie : $y_d < 0$ dans $\bar{\Omega}$, et $\Delta y_d \leq 0$ dans Ω, $g \in \mathcal{C}(\bar{\Sigma_T})$, $g = y_d$ sur Σ_T, alors existe un $T(y_d) > 0$ tel que pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^\infty(Q_T)$ tel que la solution correspondante de (3.1) dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega))$ satisfait :*

$$y(x,T) = y_d \quad \text{dans } \Omega, \text{ pour tout } T \geq T(y_d).$$

Remarque 3.1.1 *Si l'ensemble $\{x \in \Omega / y_d(x) = 0\}$ est non négligable, alors le résultat pcécédent ne s'applique pas.*

On introduit le résultat suivant concernant la contrôlabilité du (3.1) d'un état initial donné vers une classe d'états désirés à déterminer.
Soit $y_d \in L^2(\Omega)$ vérifie les hypothèses suivantes :
(H_0) : $y_d = g$ sur $\partial\Omega$.
(H_1) : $y_d \Delta y_d \geq 0$ dans Ω.
(H_2) : $\dfrac{\Delta y_d}{y_d} \mathbb{1}_\Lambda \in L^\infty(\Omega)$, où $\mathbb{1}_\Lambda$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\Lambda = \{x \in \Omega / y_d(x) \neq 0\}$.
(H_3) : $y_d \in W^{2,\infty}(\omega_0)$ et $|y_d| > 0$ dans $\bar{\omega_0}$, où ω_0 est un ouvert non vide de Ω.

Remarque 3.1.2 *1) Notons que les hypothèses $(H_0) - (H_3)$ donne que $g \neq 0$. En effet, de la deuxième hypothèse on a : $|\Delta y_d| \leq C|y_d|$ dans Ω, $C > 0$, on multiplie cette inégalité par $|y_d|$ puis on intégre, après l'utilisation de la première hypothèse on obtient que si $g = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $y_d = 0$ dans Ω, ce qui est en contraduction avec l'hypothèse (H_3).*
2) Soit le contrôle statique $v(x,t) = -\dfrac{\Delta y_d}{y_d} \mathbb{1}_\Lambda$, alors l'hypothèse (H_3) donne l'existence et l'unicité de la solution correspondante.

Le théorème suivant montre l'existence d'un contrôle v qui amène le système (3.1) de y_0 à y_d dans un temps fini $T(y_d)$.

Théorème 3.1.2 *[68] Soit $y_0 \in L^2(\Omega) - \{0\}$ et soit y_d satisfaisant les hypothèses $(H_0) - (H_3)$. Alors il existe un temps $T = T(y_d) > 0$, indépendant de y_0, pour lequel il existe un contrôle bilinéaire $v \in L^\infty(Q_T)$ tel que la solution correspondante de (3.1) satisfait $y(.,T) = y_d$ p.p., dans Ω.*

Preuve : On définit le nouveau état : $z = y(t) - y_d$ et $z_0 = y_0 - y_d$, d'après (3.1) on a :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = v(z + y_d) + \Delta y_d, & \text{dans } Q_T, \\ z = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(.,0) = z_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

D'où si on montre que le système (3.17) est exactement contrôlable à zéro, on obtient que le système (3.1) est exactement contrôlable à y_d, ce qui est réaliser en quatre étapes.
L'idée principale de la preuve est de construire un contrôle v pour lequel le système bilinéaire est équivalent au système linéaire c'est à dire que :

$$v(x)(z(t) + y_d) = \mathbb{1}_{\omega_1} u$$

où, le contrôle u est celui donné par Théorème 1.2.1 (voir chapitre 1, section 2), et ω_1 est une région de Ω vérifiant que $z(x,t) + y_d \neq 0 \;\; p.p., \; x \in \omega_1$.
Étape 1 : Montrons que, pour $T_1 > 0$ donné, il existe $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(y_d) > 0$ tel que :

$$\|z(., T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{M}_1(y_d).$$

Considérons le contrôle constant $v(t) = v_1 = c$. Avec ce contrôle le système (3.17) admet une unique mild solution $z(.) \in \mathcal{C}(0, T_1; L^2(\Omega))$ donnée par la formule de la variation des constantes :

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-\tau)\left(c(z(\tau) + y_d) + \Delta y_d\right) d\tau. \tag{3.18}$$

Pour $z_0 \in H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$ la mild solution $z(t)$ devient une solution classique.
On prend $c < 0$, ce qui donne que : $\|v_1\|_{L^\infty(\Omega \times (0,t))} = -c$, pour tout $t \in [0, T_1]$.
Pour $z_0 \in H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$, on multiplie l'inégalité (3.18) par $z(t)$ puis on intégre sur Ω, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\int_\Omega \Delta z(t) z(t) dx \leq 2\int_\Omega c z^2(t) dx + 2\int_\Omega c y_d z(t) dx + 2\int_\Omega \Delta y_d z(t) dx$$

$$\leq 2\int_\Omega c z^2(t) dx - c\left[\int_\Omega y_d^2 dx + \int_\Omega z^2(t) dx\right] + \int_\Omega |\Delta y_d|^2 dx + \int_\Omega z^2(t) dx$$

Il résulte que :

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1+c)\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - c\|y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta y_d\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant le lemme de Gronwall (la version différentielle), on a :

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|z_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{(1+c)t} - \frac{c(e^{(1+c)t}-1)}{1+c}\|y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{e^{(1+c)t}-1}{1+c}\|\Delta y_d\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Remarquons que les termes $\dfrac{c(e^{(1+c)t}-1)}{1+c}$, $\dfrac{(e^{(1+c)t}-1)}{1+c}\|y_d\|^2_{L^2(\Omega)}$ sont bornées pour $c \in (-\infty, -1)$, donc en prenant

$$c = \frac{-2\ln(\|z_0\|_{L^2(\Omega)}) - T_1}{T_1} \quad \text{pour } \|z_0\|_{L^2(\Omega)} > 1,$$

et une constante arbitraire $c < -1$ pour $\|z_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, on en déduit que :

$$\|z(T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{M}_1(y_d), \tag{3.20}$$

où $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(y_d)$ est indépendant de z_0.

En général, pour $z_0 \in L^2(\Omega)$ et pour $t > 0$ fixé on peut prendre une suite $(z_{0n}) \subset H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ telle que $z_{0n} \longrightarrow z_0$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \longrightarrow +\infty$. Si $z_n(t)$ est la solution correspondante du (3.17), alors $z_n(t) \longrightarrow z(t)$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, où $z(t)$ est la solution de (3.17) correspondante à l'état initial z_0.

En effet, il résulte de la formule de la variation de la constante que :

$$z_n(t) - z(t) = S(t)(z_{0n} - z_0) + \int_0^t S(t-s)v(s)(z_n(s) - z_0(s))ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi

$$\|z_n(t) - z(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z_{0n} - z_0\|_{L^2(\Omega)} - c\int_0^t \|z_n(s) - z(s)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \geq 0.$$

D'où L'inégalité de Gronwall donne :

$$\|z_n(t) - z(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z_{0n} - z_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-tc}, \quad \forall t \geq 0.$$

il résulte que $z_n(t) \longrightarrow z(t)$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \longrightarrow +\infty$. On conclut que l'inégalité (3.20) est vérifiée pour tout $z_0 \in L^2(\Omega)$.

Étape 2 : On prend $z(T_1)$ comme état initial, on va montrer la contrôlabilité à zéro en un temps $T_2 > T_1$ à déterminer, on pose $v(t) = v_2 = -\dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda$ dans (T_1, T_2), nous avons :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z = 0, & \text{dans } \Omega \times (T_1, T_2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_1, T_2). \end{cases} \tag{3.21}$$

Il découle de l'hypothèse (H_2) que la fonction $f(z) = \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z$ est globalement Lipschitzienne, donc le système (3.21) a une unique solution globale dans (T_1, T_2) (voir [71]).
En multipliant l'équation (3.21) par z et en intégrant sur Ω, on déduit que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega z^2(t)dx - \int_\Omega \Delta z(t)z(t)dx + \int_\Lambda \frac{\Delta y_d}{y_d}z^2(t)dx \leq 0.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\Delta y_d}{y_d} \geq 0$ dans Λ on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega z^2(t)dx + \lambda_1 \int_\Omega z^2(t)dx \leq 0,$$

où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre de $-\Delta$ correspondante aux conditions frontières de Dirichlet. Ainsi

$$\|z(T_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda^1(T_2-T_1)}\|z(T_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{M}_1 e^{-\lambda^1(T_2-T_1)}. \tag{3.22}$$

Ce qui nous donne la contrôlabilité approchée à zéro de (3.17) à T_2 pour T_2 suffisamment grand.
Étape 3 : On définit le même contrôle $v_3 = v_2$ dans (T_2, T_2+1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z = 0, & \text{dans } \Omega \times (T_2, T_2+1), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2, T_2+1). \end{cases} \tag{3.23}$$

En utilisant le Lemme 3.1.1, on va montrer que

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1(t-T_2)^{-n/2}\|z(T_2)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \varphi_t - \Delta\varphi = 0, & \text{dans } \Omega \times (T_2, T_2+1) \\ \varphi = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2, T_2+1) \\ \varphi(x, T_2) = |z(x, T_2)|, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

Le principe du maximum donne que : $\varphi \geq 0$. En prenant la différence entre (3.23) et (3.24) et en multipliant le résultat par $(z-\varphi)^+ := \max(z-\varphi, 0)$, on déduit que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(z-\varphi)^+(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z(t)(z(t)-\varphi(t))^+dx \leq 0, \quad t \in (T_2, T_2+1), \tag{3.25}$$

Ce qui implique que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(z(t)-\varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda|(z(t)-\varphi(t))^+|^2dx$$

$$+\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda\varphi(t)(z(t)-\varphi(t))^+dx\leq 0,\ \ t\in(T_2,T_2+1). \tag{3.26}$$

D'où, on a :
$\frac{d}{dt}\|(z(t)-\varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 0\Longrightarrow\|(z(t)-\varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\|(z(T_2)-\varphi(T_2))^+\|^2_{L^2(\Omega)}$.
Il s'en suit que $(z(t)-\varphi(t))^+=0,\ \forall t\in(T_2,T_2+1)$, et donc $z(t)\leq\varphi(t)$.

En utilisant la même méthode, on prend la somme de (3.23) et (3.24) et en multipliant l'équation résultante par $(z+\varphi)^-:=\min(z+\varphi,0)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(z(t)+\varphi(t))^-\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z(t)(z(t)+\varphi(t))^-dx\leq 0,\ \ \forall t\in(T_2,T_2+1), \tag{3.27}$$

ce qui en résulte :
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(z(t)+\varphi(t))^-\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda|(z(t)+\varphi(t))^-|^2dx$$

$$-\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda\varphi(z(t)+\varphi(t))^-dx\leq 0,\ \ \forall t\in(T_2,T_2+1). \tag{3.28}$$

D'où, on a :
$\frac{d}{dt}\|(z(t)+\varphi(t))^-\|^2_{L^2(\Omega)}\leq 0\Longrightarrow\|(z(t)+\varphi(t))^-\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\|(z(T_2)+\varphi(T_2))^-\|^2_{L^2(\Omega)}$
Alors, on a : $(z(t)+\varphi(t))^-=0$, donc $z(t)\geq-\varphi(t)$ et par conséquent

$$|z(t)|\leq\varphi(t)\quad\text{p.p. dans } Q_T.$$

Autrement, la solution φ du système (3.24) peut être représentée par

$$\varphi(t)=S(t-T_2)|z(T_2)|,\ \ \forall t\in[T_1,T_2], \tag{3.29}$$

où $S(t)$ est le semi-groupe généré sur $L^1(\Omega)$ par $-\Delta$ avec les conditions aux limites de Dirichlet.
En utilisant le Lemme 3.1.1, on obtient :

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C_1(t-T_2)^{-n/2}\|z(T_2)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En prenant $t=T_2+1$ dans l'inégalité précédente et en utilisant l'injection continu $L^2\hookrightarrow L^1$, il découle de (3.22) que :

$$\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\mathcal{M}_2e^{-\lambda^1(T_2-T_1)},\quad\mathcal{M}_2>0. \tag{3.30}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_2 = T_2(y_d) > 0$ suffisamment grand tel que

$$\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{3.31}$$

Étape 4 : Dans cette dernière étape on conduit le système (3.17) de l'état initial $z(T_2+1)$ à l'état final 0, on va utiliser le résultat de la controlabilité à zéro qui a été rappeler dans le premier chapitre (Théorème 1.2.1).

On considère le système suivant

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = v(z+y_d) + \Delta y_d, & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2). \end{cases} \tag{3.32}$$

On prend $v_4 = \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda + v$, on obtient :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda z = v_4(z+y_d), & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2). \end{cases} \tag{3.33}$$

Soit ω_1 un ouvert de Ω, considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{z}_t - \Delta\widetilde{z} + \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda\widetilde{z} = \mathbb{1}_{\omega_1}u(t), & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ \widetilde{z} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ \widetilde{z}(x, T_2+1) = z(x, T_2+1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.34}$$

Soit le système auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \varphi_t - \Delta\varphi = \mathbb{1}_{\omega_1}|u(t)|, & \text{dans } \Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ \varphi = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T_2+1, T_2+2), \\ \varphi(x, T_2+1) = |z(x, T_2+1)|, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

En prenant la différence entre (3.34) et (3.44) et en multipliant le résultat par $(\widetilde{z} - \varphi)^+$, il s'en suit après integration sur Ω que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda\widetilde{z}(t)(\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+dx + \int_\Omega |\nabla(\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+|^2dx$$

$$= \int_\Omega (\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+(\mathbb{1}_{\omega_1}u(t) - \mathbb{1}_{\omega_1}|u(t)|)dx \leq 0, \ \ \forall t \in (T_2+1, T_2+2), \tag{3.36}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda|(\widetilde{z}(t) - \varphi(t))^+|^2dx +$$

$$\int_\Omega \frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda \varphi(t)(\widetilde{z}(t)-\varphi(t))^+ dx \leq 0, \quad \forall t \in (T_2+1, T_2+2),$$

à partir du principe du maximum, on a : $\varphi \geq 0$, p.p. dans Ω. Alors

$$\frac{d}{dt}\|(\widetilde{z}(t)-\varphi(t))^+\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \forall t \in (T_2+1, T_2+2).$$

En procédant comme dans l'étape précédente, on déduit que $|\widetilde{z}| \leq \varphi$ p.p. dans Q_T.
En outre, la solution du problème (3.44) est donnée par la formule suivante :

$$\varphi(t) = S(t-T_2-1)|z(T_2+1)| + \int_{T_2+1}^t S(t-\tau)\mathbb{1}_{\omega_1}|u(\tau)|d\tau, \ p.p. \ (x,t) \in Q_T. \tag{3.37}$$

Remarquons que la fonction constante $\phi(x) = 1$ est une solution de l'équation :

$$\begin{cases} \varphi_t = \Delta\varphi, & \text{dans } Q_T, \\ \varphi(0) = 1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.38}$$

Il résulte du principe du maximum que $S(t)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$. D'où

$$S(t)\mathbb{1}_{\omega_1}|u| \leq S(t)\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}S(t)\mathbf{1} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \ \forall t \geq 0.$$

De la même manière, on a

$$S(t-T_2-1)|z(T_2+1)| \leq \|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Il s'en suit que

$$\|\widetilde{z}(t)\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq \|\varphi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_{T_2+1}^t \|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds, \tag{3.39}$$

donc

$$\|\widetilde{z}(t)\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq \|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))}. \tag{3.40}$$

De l'hypothèse (H_3) on a $y_d \in W^{2,\infty}(\omega_0)$, et $|y_d| > 0$ dans $\overline{\omega_0}$, donc $y_d \in C(\overline{\omega_0})$ et d'après le théorème de l'injection de sobolev : $|y_d| > \mu > 0$ dans $\overline{\omega_0}$, pour une certaine constante $\mu > 0$.
On prend $\zeta = T_2+1$, $T = T_2+2$ et $a = \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda$ dans le Théorème 1.2.1, on déduit qu'il existe un contrôle $u \in L^\infty(\Omega \times (T_2+1, T_2+2))$ tel que la solution correspondante de (3.34) satisfait $\widetilde{z}(., T_2+2) = 0$. De plus, on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq C_2\|z(T_2+1)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq C_3\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.41}$$

où C_2 et C_3 sont des constantes indépendantes de T_2.
Soient $\varepsilon < \dfrac{\mu}{2(1+C_3)}$ et T_2 suffisamment grand tel que (3.31) soit vérifiée.
D'après les inégalités (3.40) et (3.41), on a :

$$\|\widetilde{z}(t)\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} \leq (1+C_3)\|z(T_2+1)\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.42}$$

D'où

$$\|\widetilde{z}(t)\|_{L^\infty(\omega_0\times(T_2+1,T_2+2))} \leq \|\widetilde{z}(t)\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))} < \frac{\mu}{2}. \tag{3.43}$$

Alors $|\widetilde{z}(t)+y_d| > \dfrac{\mu}{2}$ p.p. dans ω_0.
Supposons que $\omega_1 \subset \omega_0$, alors on peut définir le contrôle $v_4 \in L^\infty(\Omega\times(T_2+1,T_2+2))$ par

$$v_4 = \frac{\mathbb{1}_{\omega_1} v}{z(t)+y_d},$$

avec ce contrôle la solution de (3.33) et celle de (3.34) correspondante à v sont identiques. Alors d'après le Théorème 1.2.1 il existe une unique mild solution $z(t)$ telle que $z(.,T_2+2)=0$.
Finalement, on conclut que le contrôle

$$v(t) = \begin{cases} v_1, & \text{dans } (0,T_1) \\ v_2 = v_3 = -\dfrac{\Delta y_d}{y_d}, & \text{dans } (T_1,T_2+1) \\ \dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda + v_4, & \text{dans } (T_2+1,T_2+2). \end{cases} \tag{3.44}$$

est tel que la solution correspondante de (3.17) satisfait

$$z(.,T(y_d)) = 0, \text{ p.p. dans } \Omega,$$

où $T(y_d) = T_2+2$, ce qui achève la preuve.

Remarques 3.1.1 *1. Dans la preuve précédente on peut prendre $T_2+\alpha$ et $T_2+\beta$ avec $\beta > \alpha > 0$, au lieu de T_2+1 et T_2+2.*

2. La stratégie de contrôles peut être schématisée par :

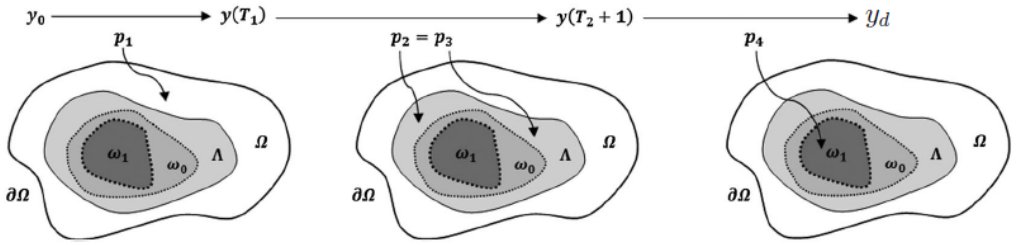


Figure. Les étapes de la contrôlabilité.

3.2 Cas de conditions au bord homogènes

Dans cette section on étude la contrôlabilité de l'équation de la chaleur bilinéaire avec des conditions au bord homogène de Dirichlet.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T_0), \quad T_0 > 0 \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T_0) \\ y(0) = y_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.45}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière, $y_0 \in L^2(\Omega)$ est l'état initiale, et $v \in L^\infty(Q)$ est un contrôle bilinéaire.

Dans la suite nous allons fournir une classe des états cibles pouvant être exactement obtenue à partir de l'équation (3.45) à un temps fini en appliquant des contrôles multiplicatifs.

Cet objectif peut être atteint en utilisant des résultats de la contrôlabilité approchée de l'équation (3.45) déja présentés dans le chapitre 2 et de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur linéaire avec un contrôle additif appliqué dans une région ω de Ω.

Le résultat ci dessous donne la contôlabilité exacte d'équation (3.45).

Théorème 3.2.1 *[67] Supposons que $n = 1$. Soit $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $y_d \in H^2(\Omega)$ satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1.2. Supposons aussi que :*

(H_4) $\dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda \in L^\infty(\Omega)$.

(H_5) $|y_d| > 0$, *sur un sous-ensemble ouvert non vide O de Ω.*

Alors il existe un temps $0 < T_* = T_*(T_0, y_0, y_d) < T_0$ et un contrôle $v \in L^\infty(\Omega \times (0,T_*))$ pour lequel

$$y(T_*) = y_d \quad \text{dans } \Omega.$$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 2.1.2, il existe un temps $0 < T < T_0$ et un contrôle qui est indépendant du temps $v \in L^\infty(\Omega)$ tel que :

$$\|y(T) - y_d\| < \varepsilon. \tag{3.46}$$

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{dans } \Omega \times (T, T_0) \\ y = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T, T_0) \\ y(T) = y(T^-), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.47}$$

Posons $z = y - y_d$, le système (3.47) devient

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v(x,t)(z + y_d) + \Delta y_d, & \text{dans } \Omega \times (T, T_0) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T, T_0) \\ z(T) = y_(T^-) - y_d, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.48}$$

Alors le problème d'amener le système (3.45) de y_0 à y_d devient un problème d'amener le système (3.48) de $z(T)$ à 0 dans un temps $T < T_* < T_0$.

Le reste de cette preuve est divisé en deux étapes :

Étape 1 : Contrôlabilité approchée dans $L^\infty(\Omega)$.

Nous allons déteminer le temps $T^{'} := T + \eta$, $\eta > 0$ tel que

$$\|z(T^{'})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Pour η suffisamment petit et indépendant de T, on considère le contrôle suivant qui est indépendant du temps dans $(T, T^{'})$,

$$v = -\frac{\Delta y_d}{y_d} \mathbb{1}_\Lambda, \text{ dans } \Omega$$

et on pose $b = -\dfrac{\Delta y_d}{y_d} \mathbb{1}_\Lambda$ dans Ω.

Il résulte de [2] (Proposition 5.8.2) que $\nabla y_d(x) = 0$, pour tout $x \in \Omega - \Lambda$. Alors en prenant la dérivée seconde, on obtient $\Delta y_d = 0$ dans $\Omega - \Lambda$.

Il s'en suit que $by_d + \Delta y_d$ dans $\Omega - \Lambda$.

D'autre part, nous avons à partir de la définition de b que $by_d + \Delta y_d = 0$ dans Λ. Ainsi le système (3.48) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x)z, & \text{dans } \Omega \times (T, T') \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T, T') \\ z(T) = y(T^-) - y_d, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.49}$$

La solution est donnée par

$$z(t) = S(t-T)z(T) + \int_T^t S(t-s)b(x)z(s)ds, \quad \forall t \in [T, T']. \tag{3.50}$$

Alors, puisque $S(t)$ est un semi-groupe de contraction,

$$\|z(t)\| \leq \|z(T)\| + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_T^t \|z(s)\|ds, \quad \forall t \in [T, T'].$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$\|z(t)\| \leq C\|z(T)\|, \quad \forall t \in [T, T'], \quad C = C(\eta) > 0. \tag{3.51}$$

Maintenant, pour tout $f \in L^1(\Omega)$, nous savons (voir Lemme 3.1.1)

$$\|S(t)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall t > 0, \tag{3.52}$$

où la constante C est indépendante de f.

En suite, en appliquant la norme L^∞ dans (3.50) et en utilisant (3.52), on obtient

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t-T)^{-\frac{1}{2}} \|z(T)\|_{L^1(\Omega)} + C\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \lim_{\nu \to 0^+} \int_T^{t-\nu} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|z(s)\|_{L^1(\Omega)} ds, , \quad \forall t \in [T, T']. \tag{3.53}$$

À partir de l'inégalité (3.51), on a :

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t-T)^{-\frac{1}{2}} \|z(T)\|_{L^1(\Omega)} + C\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|z(T)\| \int_T^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

$$\forall t \in [T, T']. \quad C = C(\eta) > 0.$$

Donc, pour $t = T'$, on obtient

$$\|z(T')\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|z(T)\|, \quad C = C(\eta) > 0.$$

Ainsi, (3.46) implique :

$$\|z(T^{'})\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad C = C(\eta) > 0. \tag{3.54}$$

Étape 2 : Le temps et le contrôle de la contrôlamilité exacte.

Dans la suite on considère le contrôle suivant :

$$v(x,t) = b(x) + v_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (T^{'}, T_0),$$

où v_1 est un nouveau contrôle à déterminer. Alors le système (3.48) devient

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x)z + v_1(x,t)(z + y_d), & \text{dans } \Omega \times (T^{'}, T_0) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T^{'}, T_0) \\ z(T^{'}) = z(T^{'-}), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.55}$$

Introduisons le système linéaire auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + b(x)w + \mathbb{1}_{\omega}u(x,t), & \text{dans } \Omega \times (T^{'}, T_0) \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T^{'}, T_0) \\ w(T^{'}) = z(T^{'-}), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.56}$$

où ω est un sous-ensemble ouvert non vide de Ω tel que $\overline{\omega} \subset O$.

Soit $\eta > 0$ défini comme dans l'étape 1. Nous allons montrer que pour une valeur de η assez petite et indépendante de T, il existe un contrôle v_1 pour lequel la solution du système (3.55) s'annulle à $T_* := T^{'} + \eta$.

D'après le Théorème 1.2.1, il existe un contrôle $u \in L^{\infty}(\Omega \times (T^{'}, T_*))$ tel que $w(T_*) = 0$, dans Ω, et on a

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega \times (T^{'}, T_*))} < C \, \|w(T^{'})\|, \quad pour certain C = C(\eta) > 0. \tag{3.57}$$

Montrons que

$$\|w(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} < C \, \varepsilon, \quad \forall t \in [T^{'}, T_*], \quad C \, > \, 0.$$

Pour tout $t \in [T^{'}, T_*]$, Nous avons

$$w(t) = S(t - T^{'})z(T^{'}) + \int_{T^{'}}^{t} S(t-s)u(s)ds + \int_{T^{'}}^{t} S(t-s)b(x)w(s)ds. \tag{3.58}$$

Il s'en suit que

$$\|w(t)\| \leq \|z(T^{'})\| + \int_{T^{'}}^{T_*} \|u(s)\|ds + \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{T^{'}}^{T_*} \|w(s)\|ds$$

$$\leq \|z(T^{'})\| + C\ \|u\|_{L^{\infty}(\Omega\times(T^{'},T_{*}))} + \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{T^{'}}^{T_{*}} \|w(s)\|ds, \quad C = C(\eta) > 0.$$

Il résulte de (3.57) et (3.54) que

$$\|w(t)\| \leq C\ \varepsilon + \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{T^{'}}^{T_{*}} \|w(s)\|ds, \quad \forall t \in [T^{'}, T_{*}], \quad C = C(\eta) > \ 0.$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$\|w(t)\| < C\ \varepsilon, \quad \forall t \in [T^{'}, T_{*}], \quad C = C(\eta) > \ 0. \tag{3.59}$$

Puisque $z(T^{'}) \in L^{\infty}(\Omega)$, on a (voir [18], P. 44)

$$\|S(t)z(T^{'})\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|z(^{'})\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Alors, en prenant la norme L^{∞} dans (3.58), on déduit via (3.52) que pour tout $t \in [T^{'}, T_{*}]$, on a :

$$\|w(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|z(T^{'})\|_{L^{\infty}(\Omega)} + C \lim_{\nu\to 0^{+}} \int_{T^{'}}^{t-\nu} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{L^{1}(\Omega)} ds$$

$$+ C \lim_{\nu\to 0^{+}} \int_{T^{'}}^{t-\nu} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|b(x)w(s)\|_{L^{1}(\Omega)} ds, \quad C\ >\ 0. \tag{3.60}$$

En combinant ceci avec (3.57), on obtient

$$\|w(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|z(T^{'})\|_{L^{\infty}(\Omega)} + C\ \|z(T^{'})\| + C \lim_{\nu\to 0^{+}} \int_{T^{'}}^{t-\nu} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|w(s)\|ds, \quad C = C(\eta) > \ 0.$$

Ensuite, en utilisant (3.46), (3.54) et (3.59), on déduit que

$$\|w(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} < C_{*}\ \varepsilon, \quad \forall t \in [T^{'}, T_{*}]. \tag{3.61}$$

où C_{*} est une constante qui dépend de $T_{*} - T = 2\eta$, mais pas de T.

Maintenant, puisque $y_d \in H^1(O)$ et $|y_d| > 0$, dans O nous avons (rappelons que $n = 1$ et $\overline{\omega} \subset O$) $|y_d| \geq \mu$ dans $\overline{\omega}$ pour $\mu > 0$.

Prenons T et η assez petits et indépendants l'un de l'autre (par exemple $0 \ < \ T \ < \ \dfrac{T_0}{3}$ et $0 \ < \ \eta \ < \ \dfrac{T_0}{3}$), tel que $0 \leq T + 2\eta \leq T_0$.

Puisque toutes les constantes dans cette preuve ne dépend pas de T (mais seulement du petit pas η, qu'on peut choisir arbitrairement) on peut prendre ε assez petit ($0 \ < \ \varepsilon \ < \ \dfrac{\mu}{2C_{*}}$), tel que

$$|w(x,t) + y_d| \geq \overline{\mu} > 0, \text{ sur } \overline{\omega} \times (T^{'}, T_{*}).$$

Cela nous permet de définir un contrôle $v_1(x,t)$ dans $\Omega \times (T^{'}, T_*)$ par la relation suivante :

$$v_1(x,t)(w(x,t)+y_d) = \mathbb{1}_\omega u(x,t), \quad \text{pour tout } \ (x,t) \in \Omega \times (T^{'}, T_*)$$

Alors, puisque $u \in L^\infty(\Omega \times (T^{'}, T_*))$, il s'en suit que $v_1 \in L^\infty(\Omega \times (T^{'}, T_*))$.

Par ailleurs, le système (3.55) avec le contrôle v_1 devient :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x)z + \dfrac{u(x,t)}{w(x,t)+y_d}\mathbb{1}_\omega(z+y_d), & \text{dans } \Omega \times (T^{'}, T_0) \\ z = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (T^{'}, T_0) \\ z(T^{'}) = z(T^{'-}), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.62}$$

Ce système admet w comme solution. Donc, par l'unicité de la solution, nous avons $z = w$ dans $\Omega \times (T^{'}, T_0)$.

Conclusion : Pour le système initial (3.45) le contrôle $v \in L^\infty(\Omega \times (0, T_*))$ défini par

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(\dfrac{y_d}{y_0}\right)}{T}\mathbb{1}_\Lambda, & (0,T) \\ -\dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda, & (T, T+\eta) \\ -\dfrac{\Delta y_d}{y_d}\mathbb{1}_\Lambda + \dfrac{u(x,t)}{w(x,t)+y_d}\mathbb{1}_\omega, & (T+\eta, T_*) \end{cases} \tag{3.63}$$

réalise la contrôlabilité exacte de (3.45), c'est à dire que : $y(T_*) = y_d$.

Chapitre 4

Partial controllability of the bilinear reaction-diffusion equation

abstract

In this chapter, we study the approximate and exact partial controllability of a bilinear reaction-diffusion equation governed by a locally supported control. This consists on achieving a desired state only on a privileged subregion of the geometrical domain of the system at hand. For a given initial state we will provide sufficient conditions on the desirable state to be reached. The steering control is explicitly expressed.

4.1 Introduction

In this chapter, we will study the partial controllability properties of the following Dirichlet boundary value problem :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)\mathbf{1}_O y, & \text{in } Q = \Omega \times (0,+\infty) \\ y = 0, & \text{in } \Sigma = \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ y(0) = y_0, & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

where Ω is an open bounded domain of $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, O is an open subset of Ω, and $v \in L^\infty(Q)$ is a control function with corresponding solution $y = y(x,t)$.
Let us introduce the unbounded operator $A = \Delta$ with domain $\mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, endowed with the following graph norm : $\| y \|_{\mathcal{D}(A)} = \| Ay \| + \| y \|$, which is equivalent to the Euclidean one : $\|y\|_{\mathcal{D}(A)} = (\|Ay\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Let $S(t)$ denote the contraction semigroup generated by A in

$L^2(\Omega)$. The state space is $X = L^2(\Omega)$ and is endowed with its natural norm denoted by $\|\cdot\|$. In the sequel, for any open subset ω of Ω and for $y \in L^2(\Omega)$, we will denote by $y|_\omega$ the restriction of y to ω. Moreover the norm of $y|_\omega$ in $L^2(\omega)$ is reduced to $(\int_\omega |y(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

In terms of applications, equation (4.1) provides practical description of various real problems (see [2, 3, 4, 9, 14] and the references therein). The standard problem of controllability of system like (4.1) consists on finding a suitable available control v such that the solution of the system, starting from the initial state y_0 and provided with this control function reaches the state y_d at a time $T > 0$. An extension which is very important in practical applications is that of partial controllability which consists on controlling only a part of the state. For example in an industrial furnace, it may be that the control is only required to maintain the temperature at a certain level in a prescribed subregion of the furnace. Many other application can be found in [14, 20, 30, 31]. The notion of partial controllability (also called regional controllability) has been introduced firstly for linear systems by El Jai et al. [15, 16]. Recently, the author in [22] studied the partial exact controllability of the linear wave equation. In [8] some new results have been established on approximate controllability for the one dimensional Heat equation under additive or multiplicative controls with local mobile support. Partial approximate controllability with additive controls has been studied for semilinear parabolic equations in [9, 10, 36, 37]. Research in the conventional controllability of distributed bilinear systems has attracted many researchers (see [2, 5, 6, 7, 8, 23, 32]). In [13, 26, 27, 14], Khapalov studied the multiplicative controllability of various equations of parabolic and hyperbolic types. Based on these works, the exact controllability of equations like (4.1) with inhomogeneous Dirichlet conditions has been treated in [15, 16] for a time which is large enough.

In the context of system (4.1), Khapalov [24] studied the nonnegative approximate controllability of the one-dimensional version of (4.1) for initial and target states which have the same sign. In [3, 4], the same nonnegative approximate controllability properties have been derived for a couple (y_0, y_d) of initial and target states which are allowed to change their sign, provided this change of sign holds in the same manner for y_0 and y_d at finitely many zero. Recently, the approximate controllability of the $n-$dimensional system (4.1) has been studied in [17] under the sign condition : $y_0(x)y_d(x) \geq 0$, for almost all (a.e.) $x \in \Omega$ with the same points of vanishing. Moreover, under additional regularity assumptions on the target state to be achieved, the exact controllability has been treated in the one-dimensional case. However, according to the maximum

principle, system (4.1) can not be steered to any target state that change its sign from an initial state which has a constant sign. Alternatively, it seems natural to look for studying the possibility of reaching the given target state on a suitable part of the geometrical domain. In [8], Fernàndez and Khapalov have studied this question for the one dimensional version of the equation (4.1). The notion of partial controllability extends the conventional one, and enables us to achieve the controllability of some parts of the state when the controllability of the full state is impossible or not required. In this chapter, we study the approximate and exact partial controllability for system (4.1). The proof consists in finding a control v that realizes the approximate controllability for (4.1) and for the exact steering, we combine the $L^\infty-$estimation of the heat-semigroup with the null controllability of linear heat equation starting from initial states with small size on the target set.

The paper is organized as follows : In the next section, we identify a set of desirable states which are partially approximately accessible from y_0 in a subregion $\omega \subset \Omega$, at a suitable time $T > 0$. In Section 3, we show that among target states which are partially approximately accessible from y_0 in ω, there are some of them that can be exactly achieved in the region ω at a finite time. The last section is devoted to numerical examples.

4.2 Partial approximate controllability

Let us first recall the notion of mild solution for system (4.1).

Definition 4.2.1 *([71], pp. 183-184).*

Let $T > 0$. A continuous function $y : [0, T] \to L^2(\Omega)$ is a mild solution of the system (4.1) on $[0, T]$ if it satisfies the integral equation :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)v(\cdot, s)\mathbf{1}_O y(s)ds$$

for all $t \in [0, T]$.

The above integral equation is called the variation of constants formula.

In the sequel we use the notation $y(t)$ or $y(\cdot, t)$ to indicate the mild solution of (4.1).

Definition 4.2.2 *The system (4.1), augmented with the output $\zeta(t) = y(t)|_\omega$, is said to be :*

• *partially approximately controllable in* $L^2(\Omega)$ *if for every* $\epsilon > 0$ *and* $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$, *there is a* $T > 0$ *and a control* $v \in L^\infty(Q_T)$ *(with* $Q_T = (0,T) \times \Omega$*) such that the corresponding mild solution* y *of (4.1) satisfies the estimate :*

$$\|y(T)|_\omega - y_d|_\omega\| < \epsilon$$

• *partially exactly controllable in* $L^2(\Omega)$ *if for every* $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$, *there is a* $T > 0$ *and a control* $v \in L^\infty(Q_T)$ *such that the corresponding mild solution* y *is such that :* $y(T)_\omega = y_d|_\omega$.

Remark 4.2.1 *Taking* $\omega = \Omega$ *in Definition 4.2.2, one retrieves the notion of global controllability of bilinear systems (see [14]).*

Let us now give a motivating example for partial controllability, in which we show that it is possible to steer the system (4.1) to a target state in a particular subset of the geometrical domain, while it is impossible to steer it in the whole domain.

Example 4.2.1 *Let* $y_0(x) = 1$, *for a.e.* $x \in \Omega = (0,1)$ *and let* $y_d(x) = \begin{cases} 2, & x \in \omega = (0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$
According to the maximum principle, it is not possible to steer y_0 *to* y_d *at a time* $T > 0$.
Now, let us define the new target state : $\hat{y}_d = 2$ *a.e. in* Ω. *Applying the results of [3, 17], we deduce that for all* $\varepsilon > 0$, *there are a time* $T > 0$ *and a static control* $v \in L^\infty(\Omega)$ *such that :* $\|y(T) - \hat{y}_d\| < \varepsilon$. *Then, since* $\hat{y}_d = y_d$ *in* ω, *it comes :*

$$\Big(\int_\omega |y(x,T) - y_d(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

In the sequel, for any nonempty set E, we will denote by $\mathbf{1}_E$ the characteristic function of E, i.e.

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

In the following theorem we give sufficient conditions for partial approximate controllability.

Theorem 4.2.1 *Let* ω *be an open subset of* O, *and let* $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ *be such that :*
(i) for a.e. $x \in \omega$, $y_0(x)y_d(x) \geq 0$,
(ii) for a.e $x \in \omega$, $y_0(x) = 0 \Leftrightarrow y_d(x) = 0$,
(iii) the function defined by :

$$g(x) = \begin{cases} \ln(\frac{y_d(x)}{y_0(x)}), & x \in E \cap \omega \\ 0, & x \notin E \cap \omega \end{cases}$$

lies in $L^\infty(\Omega)$, *where* $E = \{x \in \Omega/\ y_0(x) \neq 0\}$.

Then for all $\varepsilon > 0$, *there exist a time* $T > 0$ *and a time-independent control* $v_{_T} \in L^\infty(\Omega)$ *such that the respective solution of (4.1) satisfies :*

$$\|y(T)|_\omega - y_d|_\omega\|_{L^2(\omega)} < \varepsilon.$$

where $\|y(T)|_\omega - y_d|_\omega\|_{L^2(\omega)} = \left(\int_\omega |y(x,T) - y_d(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Proof. For any $T > 0$, we consider the following static control : $v(x,t) = v_{_T}(x) = \frac{g(x)}{T} \in L^\infty(\Omega)$.

Case 1 : $v_T \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Here, we distinguish two subcases :

Case 1-1 : Assume that $y_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Let $\varepsilon > 0$. We will determine a time $T > 0$ and a static control $v_T \in L^\infty(\Omega)$ such that $y(T)$ approaches y_d in ω with the precision ε. In the case where $g(x =)0$ a.e. $x \in \Omega$ we can take $v_T = 0$, since in this case $\|y(T) - e^{Tv_T} y_0\| = \|S(T)y_0 - y_0\| \to 0$ as $T \to 0$.

We now suppose that $g \neq 0$ a.e. in Ω and $y_0 \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$.

Let us consider the static control $v_{_T}(x) = \frac{g(x)}{T}$. We will show that the respective solution to (4.1) is such that : $\|y(T) - e^{Tv_T(x)} y_0\| \to 0,\ \text{as } T \to 0.$

With the control v_T, the system (4.1) admits a unique solution in $[0,T]$ which is such that $y(t) \in \mathcal{D}(A)$, for all t in $[0,T]$ and satisfies the following variation of constants formula :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)v_{_T}(x)y(s)ds,\ t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Then we have :

$$Ay(t) = S(t)Ay_0 + A\int_0^t S(t-s)v_{_T}(x)y(s)ds,\ t \in [0,T].$$

Moreover, we have the following variation of constant formula :

$$y(t) = e^{\frac{t}{T}g} y_0 + \int_0^t e^{\frac{t-s}{T}g(x)} Ay(s)ds.$$

Thus

$$y(T) - e^g y_0 = \int_0^T e^{\frac{T-s}{T}g(x)} Ay(s)ds. \tag{4.3}$$

Since $g \in W^{2,\infty}(\Omega)$, we can see that for all $y \in \mathcal{D}(A)$ we have $gy \in \mathcal{D}(A)$ and

$$\Delta(gy) = \Delta(g)y + 2\nabla(g)\cdot\nabla(y) + g\Delta(y),\ \text{a.e. in }\ \Omega.$$

This, together with the Poincaré's inequality gives

$$\|A(gy)\| \leq C\|y\|_{\mathcal{D}(A)}, \tag{4.4}$$

for some constant $C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})$.

In the sequel, C will denote a generic constant which is independent of T, which we will use all over the rest of the proof. We will also suppose that $0 < T < 1$.

Moreover, we can show as in [17] that :

$$\|A\int_0^t S(t-s)gy(s)ds\| \leq \int_0^t \|A(gy(s))\|ds,\ t \in [0,T].$$

Inequality (4.4) gives

$$\|A\int_0^t S(t-s)gy(s)ds\| \leq C\int_0^t \|y(s)\|_{\mathcal{D}(A)} \tag{4.5}$$

where $C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})$.

We shall now estimate $\|y(t)\|$ for $t \in [0,T]$. It follows from (4.2) that :

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \tfrac{1}{T}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t \|y(s)\|ds,\ t \in [0,T],$$

which leads, via the Gronwall's inequality, to :

$$\|y(t)\| \leq C\|y_0\|,\ t \in [0,T],\ (C = C(\|g\|_{L^\infty(\Omega)})).$$

This, together with (4.5), gives

$$\|y(t)\|_{\mathcal{D}(A)} \leq \|y_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \tfrac{C}{T}\int_0^t \|y(s)\|_{\mathcal{D}(A)}ds,\ t \in [0,T]\ (C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

We conclude again by Gronwall's inequality that

$$\|y(t)\|_{\mathcal{D}(A)} \leq C\|y_0\|_{\mathcal{D}(A)},\ \ t \in [0,T]\,(C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}))\cdot$$

Using this last estimate, we derive from (4.3),

$$\|y(T) - e^g y_0\| \leq C^*T\|y_0\|_{\mathcal{D}(A)},\ (C^* = C^*(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})). \tag{4.6}$$

Moreover, it follows from assumptions (i) and (ii) that : $e^g y_0 = y_d$ a.e. in ω.

Then for $0 < T < \min(1, \frac{\varepsilon}{C^*\|y_0\|_{\mathcal{D}(A)}})$ and for $v(x,t) = \frac{g(x)}{T}$, we get

$$\|\ y(T)\ |_\omega - y_d\ |_\omega\|_{L^2(\omega)} < \varepsilon.$$

Case 1-2 : Assume that $y_0 \in L^2(\Omega)$.

By proceeding as in [17], we can see that this case follows from Case 1-1 by taking the control $v_T(x) = \frac{g(x)}{T}$ with $g = \ln(\frac{y_d}{y_0})\mathbf{1}_{E\cap\omega}$, and by approaching the current initial state y_0 by the new initial state $y_{0T} := S(T^{1/2})y_0 \in \mathcal{D}(A)$. More precisely, if $y_T(t)$ denotes the solution of (4.1) associated to the initial state $y_{_{0T}}$ and control v_T, then since we use the same control as in Case 1, it follows from (4.6) that :

$$\|y_T(T) - e^g y_{_{0T}}\| \leq CT\|y_{_{0T}}\|_{\mathcal{D}(A)},\ (C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

But we know that :

$$\|AS(T^{1/2})y_0\| \leq \frac{C\|y_0\|}{\sqrt{T}},$$

for some constant $C > 0$ (see [21], pp. 111-112). Then, assuming that $T < 1$, this leads to the following estimate :

$$\|y_{_{0T}}\|_{\mathcal{D}(A)} \leq \frac{C}{\sqrt{T}}\|y_0\|,\ (C = C(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

It follows that :

$$\|y_T(T) - e^g y_{_{0T}}\| \leq C^* T^{1/2}\|y_0\|,\ (\text{for some } \ C^* = C^*(\|g\|_{W^{2,\infty}(\Omega)})).$$

Thus for T small enough, we have :

$$\|y_T(T) - e^g y_{_{0T}}\| < \epsilon/3.$$

By continuity of $S(t)$, we have $y_{0T} \to y_0$ in $L^2(\Omega)$ as $T \to 0^+$. Then

$$\|y(T) - y_d\| \leq \|y(T) - y_T(T)\| + \|y_T(T) - e^g y_{0T}\| + \|e^g y_0 - e^g y_{_{0T}}\|$$

The variation of constants formula yields :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)v_{_T}(x)y(s)ds,\ t \in [0,T]$$

and

$$y_T(t) = S(t)y_{_{0T}} + \int_0^t S(t-s)v_{_T}(x)y_T(s)ds,\ t \in [0,T].$$

Then, since $S(t)$ is a contraction semigroup, we deduce that :

$$\|y_T(t) - y(t)\| \leq \|y_{_{0T}} - y_0\| + \frac{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}{T}\int_0^t \|y_T(s) - y(s)\|ds,\ t \in [0,T]$$

Thus Gronwall's inequality gives

$$\|y_T(T) - y(T)\| \leq C\|y_{0T} - y_0\|,\ C = C(\|g\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

So there is $T > 0$ small enough such that :

$$\|y_T(T) - y(T)\| < \epsilon/3.$$

Finally, we have

$$\|e^g y_0 - e^g y_{0T}\| \leq e^{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}\|y_{0T} - y_0\|$$

so that for T small enough, we have $\|e^g y_0 - e^g y_{0T}\| < \epsilon/3$. This completes the proof of the Case 1.

Case 2 : $v_T \in L^\infty(\Omega)$.

Since $g \in L^\infty(\Omega)$, there is a sequence $(g_k) \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset W^{2,\infty}(\Omega)$ of uniformly bounded functions in Ω such that $g_k \to g$ in $L^2(\Omega)$, as $k \to +\infty$. We will consider the control : $v_T(x) = \dfrac{g_k}{T}$ for a suitably selected $k \in I\!N$ (large enough integer). Let $y(t)$ be the solution of (4.1) corresponding to $v_T(x)$ and to the initial state $y(0) = y_0$. Finally, let $(y_{0l}) \in L^\infty(\Omega)$ be such that $y_{0l} \to y_0$ in $L^2(\Omega)$, as $l \to +\infty$.

We have the following triangular inequality :

$$\|y(T) - e^g y_0\| \leq \|y(T) - e^{g_k} y_0\| + \|e^{g_k} y_0 - e^{g_k} y_{0l}\| + \|e^{g_k} y_{0l} - e^g y_{0l}\| + \|e^g y_{0l} - e^g y_0\|$$

$$\leq \|y(T) - e^{g_k} y_0\| + \|e^{g_k} y_{0l} - e^g y_{0l}\| + \big(\sup_{k \in I\!N} \|e^{g_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + e^{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}\big)\|y_{0l} - y_0\|.$$

Let $L \in I\!N$ be such that

$$\big(\sup_{k \in I\!N} \|e^{g_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + e^{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}\big)\|y_{0L} - y_0\| < \frac{\epsilon}{3},$$

and for such value of L, we consider a K such that

$$\|e^{g_K} - e^g\|\|y_{0L}\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Finally, for this value of K, it comes from Case 1-2 that there exists $T > 0$ such that

$$\|y(T) - e^{g_K} y_0\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Hence we have : $\|y(T) - e^g y_0\| < \epsilon$.

Since $e^g y_0|_\omega = y_d|_\omega$, it comes

$$\|y(T)|_\omega - y_d|_\omega\|_{L^2(\omega)} < \epsilon.$$

As a consequence we have

Corollary 4.2.1 *If* $\ln(\frac{y_d}{y_0})\mathbf{1}_{E\cap O} \in L^\infty(O)$, *then the system (4.1) can be approximately partially steered from* y_0 *to* y_d *in* $\omega := \{x \in O / y_0(x)y_d(x) > 0\}$ *at a time* $T > 0$, *with a static control* $v_T \in L^\infty(\Omega)$.

Remark 4.2.2 *For* $\omega = O = \Omega$, *we retrieve the result of [17].*

4.3 Partial exact controllability

Our main result in this section is as follows.

Theorem 4.3.1 *Let* $p \in \mathbf{R}$; $p \geq 2$ *and* $1 \leq n < 2p$ *and let* ω *be an open subset of* O. *Let* $y_0 \in L^p(\Omega)$ *and* $y_d \in L^p(\omega)$. *Assume that* y_d *admits an extension* $\hat{y}_d \in H^2(\Omega)$ *such that :*
(i) $\frac{\Delta\hat{y}_d}{\hat{y}_d}\mathbf{1}_{\hat{E}} \in {}^\infty(\Omega)$, $\hat{E} = \{x \in \Omega;\ \hat{y}_d(x) \neq 0\}$,
(ii) for a.e. $x \in \Omega$, $y_0(x)\hat{y}_d(x) \geq 0$ *and* $y_0(x) = 0 \Leftrightarrow \hat{y}_d(x) = 0$,
(iii) $\hat{g} = \ln(\frac{\hat{y}_d}{y_0})\mathbf{1}_E \in L^\infty(\Omega)$,
(iv) $|\hat{y}_d| \geq \alpha > 0$, *a.e. in* ω_0, *for some open subset* ω_0 *of* O.
Then there exist a time $T > 0$ *and a control* $v \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ *such that the respective solution of (4.1) satisfies :* $y(T)|_\omega = y_d$.

Proof. The proof is divided it into two steps.
Step 1 : Partial approximate controllability in $L^\infty(\Omega)$. Let $T > 0$ and let $\epsilon > 0$. From Theorem 4.2.1, there exists $T_1 \in (0,T)$ and a $L^\infty-$control v_1 such that the respective solution of the system (4.1) satisfies :

$$\|y(T_1) - \hat{y}_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon. \tag{4.7}$$

Let $z := y - \hat{y}_d$ and let $T_2 = T_1 + \eta \in (T_1, T)$ with $\eta > 0$.
We will determine η such that

$$\|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Consider the following time-independent control in (T_1, T_2),

$$v_2 = -\frac{\Delta\hat{y}_d}{\hat{y}_d}\mathbf{1}_{\hat{E}}\ a.e.,\ \text{in}\ \Omega,$$

and let us set $b = -\frac{\Delta\hat{y}_d}{\hat{y}_d}\mathbf{1}_{\hat{E}}$ a.e., in Ω. Then, from the definition of b we have $b\hat{y}_d + \Delta\hat{y}_d = 0$, a.e. in Ω. Thus z satisfies the following system :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x)z, & \text{in } \Omega \times (T_1, T_2) \\ z = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_1, T_2) \\ z(T_1) = y(T_1^-) - y_d, & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.8}$$

whose solution is given by

$$z(t) = S(t - T_1)z(T_1) + \int_{T_1}^{t} S(t - s)b(x)z(s)ds, \quad t \in [T_1, T_2]. \tag{4.9}$$

Then, since $S(t)$ is a contraction semigroup,

$$\|z(t)\| \leq \|z(T_1)\| + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{T_1}^{t} \|z(s)\|ds, \quad t \in [T_1, T_2].$$

Gronwall's inequality gives

$$\|z(t)\| \leq C\|z(T_1)\|, \quad t \in [T_1, T_2],\ C = C(\eta) > 0. \tag{4.10}$$

Now, for all $f \in L^p(\Omega)$ and $t > 0$ we have (see [5], p. 44) :

$$\|S(t)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, t^{-\frac{n}{2p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.11}$$

where the constant C is independent of f.

Now let $\lambda > \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$ and let us consider the following system :

$$\begin{cases} \varphi_t = \Delta\varphi + b(x)\varphi - \lambda\varphi, & \text{in } \Omega \times (T_1, T_2) \\ \varphi = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_1, T_2) \\ \varphi(T_1) = z(T_1), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.12}$$

We have (see [6], p. 259)

$$\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t - T_1)^{\frac{-n}{2}} \|z(T_1)\|_{L^1(\Omega)},\ t \in (T_1, T_2). \tag{4.13}$$

The solution of (4.12) is such that :

$$\varphi(t) = e^{-\lambda(t-T_1)}z(t),\ t \in (T_1, T_2),$$

where z is the solution of (5.8). Hence, it follows from (4.13) that :

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t - T_1)^{\frac{-n}{2}} e^{\lambda(t-T_1)} \|z(T_1)\|_{L^1(\Omega)},\ t \in (T_1, T_2)$$

and so

$$\|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|z(T_1)\|_{L^1(\Omega)},\ C = C(\eta) > 0.$$

Thus (4.7) implies

$$\|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon,\ C = C(\eta) > 0. \tag{4.14}$$

Step 2 : Building the control result and concatenation.

In the sequel, we will search a time $T = T_2 + \tau$ (where τ may be taken the same as in the previous step) and a control $v(x,t)$ such that $y(T) = \hat{y}_d$ a.e. in Ω.

Let us consider the following system :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ y = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ y(T_2) = y(T_2^-), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.15}$$

With the new variable $z = y - \hat{y}_d$, the system (4.15) becomes

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v(x,t)(z + \hat{y}_d) + \Delta\hat{y}_d, & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ z = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ z(T_2) = y(T_2^-) - \hat{y}_d, & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

Then the problem of steering the system (4.1) from y_0 to $\hat{y}_d$ turns out to steering the system (4.16) from $z(T_2)$ to 0 at T.

In order to remedy to the term $\Delta\hat{y}_d$, we use the control $v(x,t) = b(x) + v_3(x,t)$ so that (4.16) becomes :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x)z + v_3(x,t)(z + \hat{y}_d), & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ z = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ z(T_2) = y(T_2^-) - \hat{y}_d, & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.17}$$

Let us introduce the following linear system :

$$\begin{cases} \phi_t = \Delta\phi + b(x)\phi + \mathbf{1}_{\omega_0}u_2(x,t), & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ \phi = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ \phi(T_2) = z(T_2^-), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.18}$$

For all $t \in [T_2, T]$, we have

$$\phi(t) = S(t - T_2)z(T_2) + \int_{T_2}^{t} S(t-s)(b(x)\phi(s) + \mathbf{1}_{\omega_0}u_2(\cdot, s))ds. \tag{4.19}$$

It is well known (see e.g. [7]) that for all $T > T_2$, there exists a control $u_2 \in L^\infty(\omega_0 \times (T_2, T))$ such that the corresponding solution to (4.18) is such that : $\phi(T) = 0,\ a.e.$ in Ω, and we have

$$\|u_2\|_{L^\infty(\omega_0\times(T_2,T))} < C\,\|\phi(T_2)\|_{L^2(\Omega)},\ \text{for some } C = C(T - T_2) > 0. \tag{4.20}$$

Since $z(T_2) \in L^\infty(\Omega)$, it comes that :

$$S(t - T_2)z(T_2) \in L^\infty(\Omega)\ \text{ and }\ \|S(t - T_2)z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)},\ t \in (T_2, T].$$

Moreover, by applying (5.11), we have

$$\|S(t - s)\mathbf{1}_{\omega_0}u_2(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(t - s)^{-\frac{n}{2p}}\|u_2(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega)},\ 0 \le s < t.$$

Using Gronwall's inequality, we can see that :

$$\|\phi(t)\| < \epsilon,\ \ t \in [T_2, T].$$

Then, taking the $L^\infty-$norm in (4.19) and making use of (5.12) and (4.20) we deduce that for all $t \in [T_2, T]$, we have $\phi(t) \in L^\infty(\Omega)$ and

$$\|\phi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < C\epsilon, \tag{4.21}$$

where C is some constant which depends on τ, but not on T.
Hence, we can chose ϵ small enough in (4.21), so that $|\phi(x, t) + \hat{y}_d| \ge \beta,\ a.e.$ on $\omega_0 \times (T_2, T)$, for some $\beta > 0$. This enables us to define a multiplicative control v on $\Omega \times (T_2, T)$ by the following relation :

$$v_3(x, t)\mathbf{1}_{\omega_0}(\phi(x, t) + \hat{y}_d) = \mathbf{1}_{\omega_0}u_2(x, t),\ a.e.\ x \in \Omega,\ \ \text{for all } t \in (T_2, T).$$

Since $\hat{y}_d \in H^2(\Omega)$ and $u_2 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$ we have $v \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$.
Then, controlling system (4.16) with such a control $v(x, t)$, leads to the following system :

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + \frac{u_2(x,t)}{\phi(x,t)+\hat{y}_d}\mathbf{1}_{\omega_0}(z + \hat{y}_d), & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ z = 0, & \text{in } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ z(T_2) = z(T_2^-), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.22}$$

which admits ϕ as a solution. Hence, by uniqueness, we have $z = \phi$, a.e. in $\Omega \times (T_2, T)$.
We conclude (recall that $\omega_0 \subset O$) that the control defined by :

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1(x), & (0, T_1) \\ v_2(x), & (T_1, T_2) \\ v_2(x) + \frac{u_2(x,t)}{\phi(x,t)+\hat{y}_d}\mathbf{1}_{\omega_0}, & (T_2, T) \end{cases} \tag{4.23}$$

lies in $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ and the respective solution of the initial system (4.1) is such that :
$y(T) = \hat{y}_d$, a.e. in Ω, and hence $y(T)|_\omega = y_d$ $\square$
We have the following global controllability result.

Corollary 4.3.1 *Let $p \geq 2$ be such that $1 \leq n < 2p$. Let $O = \Omega$, $y_0 \in L^p(\Omega)$ and $y_d \in H^2(\Omega)$ and assume that :*
(i) $\frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbf{1}_E \in {}^\infty(\Omega),\ E = \{x \in \Omega;\ y_d(x) \neq 0\}$,
(ii) for a.e. $x \in \Omega$, $y_0(x)y_d(x) \geq 0$ and $y_0(x) = 0 \Leftrightarrow y_d(x) = 0$,
(iii) $g = \ln(\frac{y_d}{y_0})\mathbf{1}_E \in L^\infty(\Omega)$,
(iv) $|y_d| \geq \alpha > 0$, *a.e. in ω_0, for some open subset ω_0 of O.*

Then there exist a time $T > 0$ and a control $v \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ such that the respective solution of (4.1) satisfies : $y(T) = y_d$.

4.4 Examples and simulations

Example 4.4.1 *Let $\Omega = (0,3)$ and*

$$y_0 = \begin{cases} x, & x \in [0, 3/2] \\ \\ -x + 3, & x \in [3/2, 3] \end{cases}$$

Let $\omega = O = (1,2)$ and

$$y_d = \big(1 - (x-1)(x-2)\big)e^{(x-1)^2(x-2)^2},\ x \in \omega.$$

and let us consider the following extension of y_d :

$$\hat{y}_d = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ \big(1 - (x-1)(x-2)\big)e^{(x-1)^2(x-2)^2}, & x \in [1,2] \\ -x + 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

It is clear that the assumptions (i)-(iv) of Theorem 4.3.1 are satisfied. Hence, the system (4.1) can be exactly steered from y_0 to y_d in ω at a small time, via the control (4.23).

Example 4.4.2 *Let $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ with $\Omega = O = (0,1)$. Let $\omega = (0.5, 0.9)$, $y_0 = 5\sin(\pi x)$ and*

$$y_d(x) = \begin{cases} x(\sqrt{e} + 50(x - 1/2)), & x \in (0, 1/2) \\ \frac{1}{2}e^x \sin(\pi x), & x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Notice that, according to maximum principle, it is not possible to attain y_d from y_0 all over the geometrical domain.

Below, the figures corresponding to approximate steering with the error functions : Figure 1, reflects the approximate steering (trajectory $y(T)$) with $T = 1.3$, Figure 2, describes the variation of the error function corresponding to partial steering, which is defined by :
$E_\omega(t) = \|y(t)|_\omega - y_d|_\omega\|, t \in [0, T]$, and shows that $E_\omega(t)$ tends to zero near the time of partial approximate controllability T, and Figure 3 describes the variation of the global error function defined by $E(t) = \|y(t) - y_d\|, t \in [0, T]$, and shows that $E(t)$ increases with times near T, which means that control v_T unable us to achieve the state y_d all over the geometric domain Ω.

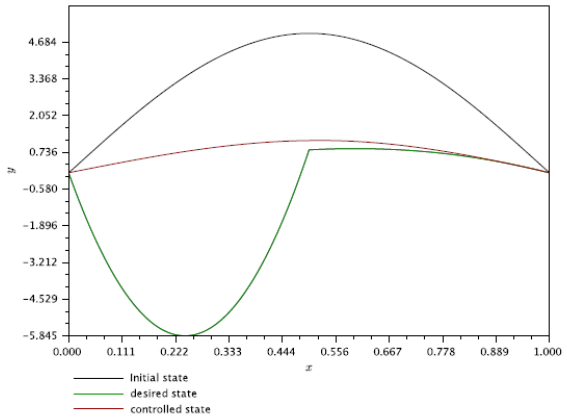


Figure 1 : The evolution of the state at T.

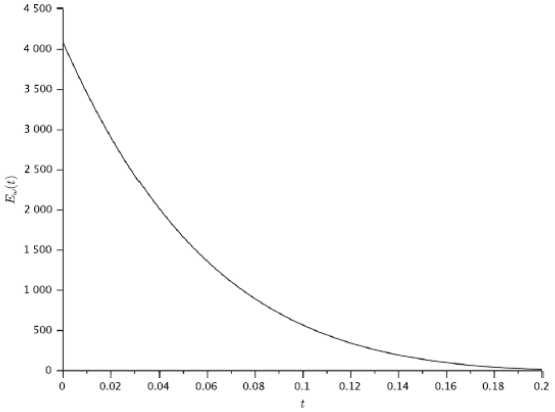


Figure 2 : The variation of the error along ω.

The next figure shows that the target state y_d can not be achieved in the whole domain $\Omega = (0, 1)$.

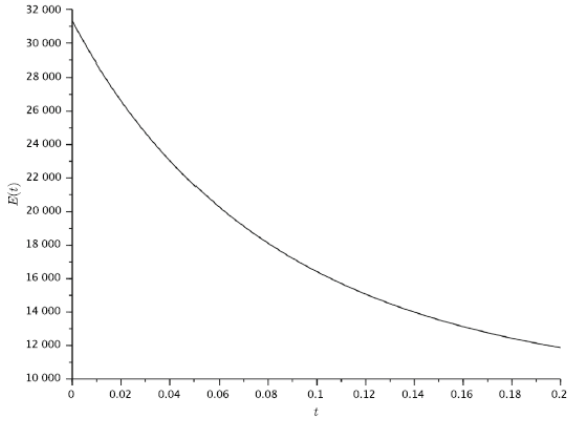


Figure 3 : The variation of the error along the whole domain.

Bibliographie

[1] Robert A. Adams, John J.F, Pure and Applied Mathematics, Fournier-sobolev Spaces-Academic press (2003).

[2] J.M. Ball, J.E. Marsden, and M. Slemrod, Controllability for distributed bilinear systems. SIAM J. Control and Optim., 20 (1982), 575-597.

[3] H. T. Banks, P. M. Kareiva, and L. Zia. Analyzing field studies of insect dispersal using two-dimensional transport equations. Environmental Entomology 17(5) :815-820, October 1988.

[4] V. Barbu, Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional System, Academic Press, Boston, 1993.

[5] K. Beauchard, Local controllability of a 1-D Schrödinger equation, J. Math. Pures Appl., 84 (2005), 851-956.

[6] K. Beauchard and J.-M. Coron, Controllability of a quantum particle in a moving potential well, J. Funct. Anal., 232 (2006), 328-389.

[7] K. Beauchard, Local controllability of a 1-dimensional beam equation, SIAM J. Control. Optim., 47 (2008), 1219-1273.

[8] K. Beauchard, Local controllability and non-controllability for a $1D$ wave equation with bilinear control. J. Differential Equations., 250 (2011), 2064-2098.

[9] P. Cannarsa, G. Fragnelli and J. Vancostenoble, (2006). Regional controllability of semilinear degenerate parabolic equations in bounded domains. Journal of mathematical analysis and applications, 320(2), 804-818.

[10] P. Cannarsa and G. Fragnelli, (2006). Null controllability of semilinear degenerate parabolic equations in bounded domains. Electron. J. Differential Equations, 2006(136), 1-20.

[11] P. Cannarsa and A. Khapalov, Multiplicative controllability for reaction-diffusion equation with target states admitting finitely many changes of sign, discrete and continuous dynamical systems Series B, 14 (2010), 1293-1311.

[12] P. Cannarsa, G. Floridia and A. Khapalov Multiplicative controllability for semilinear reaction-diffusion equations with finitely many changes of sign, arXiv :1510.04203v1, 14 Oct 2015.

[13] T. Cazenave and A. Haraux, An introduction to semilinear evolution equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 13, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[14] Y. Chen, K. L. Moore and Z. Song, (2004). Diffusion boundary determination and zone control via mobile actuator-sensor networks (MAS-net) : Challenges and opportunities. In Defense and Security (pp. 102-113). International Society for Optics and Photonics.

[15] A. El Jai and A. J. Pritchard, (1993). Regional controllability of distributed systems. In Analysis and Optimization of Systems : State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems (pp. 326-335). Springer Berlin Heidelberg.

[16] A. El Jai, M. C. Simon, E. Zerrik and A. J. Pritchard, (1995). Regional controllability of distributed parameter systems. International Journal of Control, 62(6), 1351-1365.

[17] E. Fernàndez-Cara, E. Zuazua, Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 17, (2000), 583-616.

[18] S. C. Ferreira, Jr., M. L. Martins, and M. J. Vilela. A reaction-diffusion model for the growth of avascular tumor, Phys. Rev. E 65, 021907, 23 January 2002.

[19] L. A. Fernández and A. Y. Khapalov. Controllability properties for the one-dimensional Heat equation under multiplicative or nonnegative additive controls with local mobile support. ESAIM : Control Optim. Calc. Var., Volume 18, Number 4, (2012), 1207-1224.

[20] S. Guerrero, A. Mercado, and A. Osses. An inverse inequality for some transportâĂŞdiffusion equation. Application to the regional approximate controllability. Asymptotic Analysis, 52(3-4), (2007), 243-257.

[21] A. Haraux. "Some Sharp Estimates for Parabolic Equations", Journal of Functional Analysis 187, 110-128 (2001)

[22] Y. He, Partial exact controllability for wave equations. Systems & Control Letters, 103 (2017), 45-49.

[23] K. Kime, Simultaneous control of a rod equation and a simple Schrödinger equation, Systems & Control Letters., 24 (1995), 301-306.

[24] A. Y. Khapalov, Global non-negative controllability of the semilinear parabolic equation governed by bilinear control, ESAIM : Control Optim. Calc. Var., 7 (2002), 269-283.

[25] A. Y. Khapalov, Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : A qualitative approach, SIAM J. Control. Optim., 41 (2003), 1886-1900.

[26] A. Y. Khapalov, Controllability properties of a vibrating string with variable axial load, Discrete Cont. Dyn. Syst., 11 (2004), 311-324.

[27] A. Y. Khapalov, Reachability of nonnegative equilibrium states for the semilinear vibrating string by varying its axial load and the gain of damping, ESAIM : Control Optim. Calc. Var., 12 (2006), 231-252.

[28] A. Y. Khapalov, Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls, Lecture Notes in Mathematics 1995, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[29] P. Lin, Zhongcheng Zhou and Hang Gao, Exact controllability of the parabolic system with bilinear control. Applied Mathematics Letters, 19 (2006), 568-575.

[30] P. Martinez, J. P. Raymond and J. Vancostenoble, (2002). Nulle contrôlabilité régionale d'une équation de type Crocco linéarisée. Comptes Rendus Mathematique, 334(7), 581-584.

[31] P. Martinez, J. P. Raymond and J. Vancostenoble, (2003). Regional null controllability of a linearized Crocco-type equation. SIAM Journal on Control and Optimization, 42(2), 709-728.

[32] M. Ouzahra, Controllability of the wave equation with bilinear controls, European Journal of Control, 20 (2014), 57-63.

[33] M. Ouzahra, A. Tsouli and A. Boutoulout. Exact controllability of the heat equation with bilinear control. Mathematical methods in the applied sciences, Volume 38, Issue 18, (2015), 5074-5084.

[34] M. Ouzahra, (2016). Approximate and exact controllability of a reaction-diffusion equation governed by bilinear control. European Journal of Control, 32, 32-38.

[35] A. Pazy, (1983). Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer Verlag, New York.

[36] Popescu, M. C., Balas, Valentina, Manolea, GHEORGHE, & Mastorakis, Nikos (2009, May). Regional Null Controllability for Degenerate Heat Equations. In Proceedings of the WSEAS International Conference, 11th WSEAS International Conference on Sustainability in Science Engineering (SSEâĂŹ09), Timisoara, Romania, 28-31.

[37] E. Zuazua, Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities. Control Cybern. 28, (1999), 665-683.

Chapitre 5

Exact controllability of the reaction-diffusion equation under bilinear control

abstract

The goal of this chapter is to study the global exact controllability of a reaction-diffusion equation in a bounded domain with Dirichlet boundary conditions. We will first consider the case of bilinear equation, then we identify a set of target states that can be exactly reached at any a priori given time. This result is then applied to prove the exact controllability of semilinear reaction-diffusion equation under distributed controls. The approach is constructive and based on linear semigroup theory and null controllability properties of linear problems.

5.1 Introduction

This chapter deals with the controllability of the following semilinear reaction-diffusion equation

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + q(x,t)y + f(y), & \text{in } Q_T \ \ (T>0) \\ y(0,t) = 0, & \text{on } \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ with a boundary $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$ and $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Here, $q \in L^\infty(Q_T)$ is a control function with corresponding solution $y = y(x,t)$. The nonlinearity $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is assumed to be a Lipschitz function such that $f(0) = 0$. In terms

of applications, equation like (5.1) provides practical description of various real problems such as chemical reactions, nuclear chain reactions, biomedical models... (see [1, 2, 9, 10, 14, 18, 19, 20, 21] and the references therein). Equation (5.1) can be also used to describe a diffusion process with $y(x,t)$ being the concentration of a substance at point x at time t, or a heat-transfer process, with $y(x,t)$ describing the temperature at point x and time t (see [14], p. 17, and [3, 4]). It shown in [2] that equation like (5.1) can be also used to study the insect dispersal with constant random motion and $(x,t)-$dependent emigration parameter. It has may be also used as a model for the growth of avascular tumor [9],... The question of controllability of the bilinear reaction-diffusion equation has attracted many researchers (see e.g., [3, 4, 8] and [14]-[17]). In [3], the approximate controllability properties have been derived for the truncated bilinear version of (5.1) (i.e. $f = 0$) for initial and target states y_0, y_d with finitely many changes of sign. The same question has been discussed by Fernàndez and Khapalov in [8] when the support of the bilinear control is allowed to depend on time. The exact controllability of the bilinear part of equation (5.1) with inhomogeneous Dirichlet conditions has been considered in [15, 16]. However, the assumptions of [15, 16] are not compatible when dealing with homogeneous Dirichlet conditions. Recently, the approximate and exact controllability have been studied for the truncated bilinear version of equation (5.1) under the sign condition $y_0(x)y_d(x) \geq 0$, for almost every $x \in \Omega$ in [17]. Moreover, the partial controllability of bilinear reaction-diffusion equation has been studied in [12]. According to the maximum principle, it is not possible to steer the bilinear part of (5.1) from an initial state which has a constant sign to a target state that change its sign. In [13], Khapalov studied the global approximate controllability of the semilinear convection-diffusion-reaction equation by multiplicative controls while dealing with nonnegative initial and target states. In [4], Cannarsa, Floridia and Khapalov have studied the global approximate controllability properties of system (5.1) in the one-dimensional case for suitable classes of initial and target states that change their sign at a finite number of points.

However, in the works above, the time of steering depends on the given initial and target states. In this paper, we are interested in the multiplicative controllability of the semilinear reaction diffusion system (5.1) at a priori given time, when the initial and target states have the same sign at almost every $x \in \Omega$ and satisfy $\ln(\frac{y^d}{y_0}) \in L^\infty(\Omega)$. We will first deal with bilinear case ($f = 0$), then we proceed to the full equation (5.1). Moreover, we will see that the exact steering of the semilinear system (5.1) can be reduced to the controllability of its bilinear part since the nonlinear

term f can be absorbed by the control in an appropriate way.

The paper is organized as follows : In the next section, we first consider the problem of exact controllability of the bilinear part of the system (5.1), and we will show that the steering time can be arbitrary small and uniform for all initial and reached states. Then, we apply this result to solve the problem of exact controllability of the semilinear system (5.1) at a priori fixed time. In the third section we present a numerical example with simulations.

5.2 The main results

Our goal in this section is to study the exact controllability properties of the system (5.1) at a given time $T > 0$.

5.2.1 Exact controllability of the bilinear equation

Here we consider the following system

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & \text{in } Q_T \\ y(0,t) = 0, & \text{on } \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

From [17], one may deduce the following approximate controllability result regarding the bilinear part (5.2) of the system (5.1).

Lemma 5.2.1 *[17] For any initial state $y_0 \in L^2(\Omega)$, for any function $g \in W^{2,\infty}(\Omega)$ and for all $\varepsilon > 0$, there exists a time $T = T(y_0, y_d, \epsilon)$ such that the respective solution to (5.2) controlled with $v := \frac{g}{T}$ satisfies*

$$\|y(T) - e^g y_0\| < \varepsilon.$$

We also recall the following null-controllability of the linear heat equation.

Lemma 5.2.2 *[7, 11] Consider the system*

$$\begin{cases} \psi_t = \Delta\psi + b(x)\psi + \mathbf{1}_\omega u_2(x,t), & in\, \Omega \times (t_0, T) \\ \psi = 0, & on\ \partial\Omega \times (t_0, T) \\ \psi(\cdot, t_0) = \xi \in L^2(\Omega), & in\, \Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

where $0 \leq t_0 < T$, $b \in L^\infty(\Omega)$ and ω is a nonempty open subset of Ω. Then there is a control $u_2 \in L^\infty(\Omega \times (t_0, T))$ such that the corresponding solution to (5.3) vanishes at T. Furthermore, we have

$$\|u_2\|_{L^\infty(\Omega\times(t_0,T))} \leq C \|\xi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.4}$$

where $C = C_{T-t_0}$ is a positive constant depending on $T - t_0$ and such that C_{T-t_0} is bounded near $t_0 \to 0^+$.

We now state the exact controllability result of the bilinear system (5.2).

Theorem 5.2.1 *Let $y_0 \in L^p(\Omega)$, $(p \geq 2$ and $p > \frac{n}{2})$ and let $y_d \in H^2(\Omega)$ such that*
i) for a.e. $x \in \Omega$, $y_0(x)y_d(x) \geq 0$ and $y_d(x) = 0 \Leftrightarrow y_0(x) = 0$,
ii) $ln(\frac{y_d}{y_0})\mathbf{1}_{E_{y_0}} \in L^\infty(\Omega)$, where $\mathbf{1}_{E_{y_0}}$ denotes the characteristic function of the set $E_{y_0} = \{x \in \Omega/\ y_0(x) \neq 0\}$,
iii) $\frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbf{1}_{E_{y_d}} \in L^\infty(\Omega)$ and $|y_d| \geq \alpha > 0$, a.e. on some open subset $\omega \subset \Omega$.
Then for any $T > 0$, there exists a control $v \in L^\infty(Q_T)$ such that the respective solution to (5.2) satisfies $y(T) = y_d$, a.e. in Ω.

Proof 5.2.1 *Let $T > 0$.*
1. Approximate steering.
Let $g := ln(\frac{y_d}{y_0})\mathbf{1}_E$. It follows from the assumption (i) that $e^g y_0 = y_d$. Then, in the case where $g \in W^{2,\infty}(\Omega)$, we deduce from Lemma 5.2.1 that for any $\varepsilon > 0$, there exist $0 < T_1 < T$ small enough such that the corresponding solution to (5.2) controlled with $v_1 = \frac{g}{T}$ verifies

$$\|y(T_1) - y_d\| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Moreover, in the general case $g \in L^\infty(\Omega)$, one can construct a sequence $(g_k) \subset W^{2,\infty}(\Omega)$ which is uniformly bounded in Ω such that $g_k \to g$ in $L^2(\Omega)$, as $k \to +\infty$. We will consider the control $v_1(x) = \dfrac{g_k}{T_1}$ for a suitably selected $k \in \mathbb{N}$ (large enough integer). Let $y(t)$ be the solution of (5.2) corresponding to $v_1(x)$ and to the initial state $y(0) = y_0$. Finally, let $(y_{0l}) \in L^\infty(\Omega)$ such that $y_{0l} \to y_0$ in $L^2(\Omega)$, as $l \to +\infty$.
We have the following triangular inequality :

$$\|y(T_1) - e^g y_0\| \leq \|y(T_1) - e^{g_k} y_0\| + \|e^{g_k} y_0 - e^{g_k} y_{0l}\| + \|e^{g_k} y_{0l} - e^g y_{0l}\| + \|e^g y_{0l} - e^g y_0\|$$

$$\leq \|y(T_1) - e^{g_k} y_0\| + \|e^{g_k} y_{0l} - e^{g} y_{0l}\| + \big(\sup_{k\in I\!N} \|e^{g_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + e^{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}\big)\|y_{0l} - y_0\|.$$

Let $L \in I\!N$ be such that

$$\big(\sup_{k\in I\!N} \|e^{g_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + e^{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}\big)\|y_{0L} - y_0\| < \frac{\epsilon}{3},$$

and for such value of L, we consider K such that

$$\|e^{g_K} - e^{g}\|\|y_{0L}\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Finally, for this value of K, it comes from Lemma 5.2.1 that there exists $T > 0$ such that

$$\|y(T_1) - e^{g_K} y_0\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

We conclude that

$$\|y(T_1) - e^{g} y_0\| < \epsilon.$$

Hence, since $e^g y_0 = y_d$, it comes that (5.5) holds for some $0 < T_1 < T$.

2. Exact steering.

Let us consider the following system

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + v(x,t)y, & in\ \Omega \times (T_1, T), \\ y(0,t) = 0, & on\ \partial\Omega \times (T_1, T), \\ y(T_1) = y(T_1^-), & in\ \Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Let $z = y - y_d$, where y satisfies (5.6). Thus z satisfies

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v(x,t)(z + y_d) + \Delta y_d, & in\ \Omega \times (T_1, T) \\ z(0,t) = 0, & on\ \partial\Omega \times (T_1, T) \\ z(T_1) = y(T_1^-) - y_d, & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.7}$$

In order to prove Theorem 5.2.1, it is sufficient to prove that (5.7) is exact null controllable.

Let $T_2 \in (T_1, T)$ be close to T_1, so we can assume in the sequel that $0 < T_2 - T_1 < 1$.

Then consider the following time-independent control in (T_1, T_2),

$$v_2(x) = -\frac{\Delta y_d}{y_d}\mathbf{1}_{E_{y_d}},\ a.e.,\ in\ \Omega.$$

From the definition of v_2 we have $v_2 y_d + \Delta y_d = 0$, a.e. in Ω. Thus the system (5.7) can be reduced to the following one

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v_2(x) z, & in\ \ \Omega \times (T_1, T_2) \\ z = 0, & on\ \ \partial\Omega \times (T_1, T_2) \\ z(T_1) = y(T_1^-) - y_d, & in\ \ \Omega \end{cases} \tag{5.8}$$

whose solution is given by

$$z(t) = S(t-T_1)z(T_1) + \int_{T_1}^{t} S(t-s)v_2(x)z(s)ds,\ \forall t \in [T_1, T_2]. \tag{5.9}$$

Then, since $S(t)$ is a contraction semigroup,

$$\|z(t)\| \leq \|z(T_1)\| + \|v_2\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{T_1}^{t} \|z(s)\|ds,$$

for all $t \in [T_1, T_2]$.

Gronwall's inequality gives

$$\|z(t)\| \leq C\|z(T_1)\|,\ \forall t \in [T_1, T_2],\ C > 0. \tag{5.10}$$

Moreover, we know that $S(t)(L^p(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega)$, and for all $\xi \in L^p(\Omega)$ we have

$$\|S(t)\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, t^{-\frac{n}{2p}} \|\xi\|_{L^p(\Omega)}, \forall t > 0, \tag{5.11}$$

where the constant C is independent of ξ.

We also have $S(t)(L^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega)$, and for all $\xi \in L^\infty(\Omega)$ we have (see [5], p. 44)

$$\|S(t)\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall t \geq 0.$$

Using the smooth effect of the heat semigroup $S(t)$, we can take the mild solution $z(t)$ in the space of continuous function equipped with the supremum norm.

Then, by taking the $L^\infty-$norm in (5.9) and using (5.11), we get

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t-T_1)^{-\frac{n}{2p}} \|z(T_1)\|_{L^1(\Omega)} + C\|v_2\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{T_1}^{t} (t-s)^{-\frac{n}{2p}} \|z(s)\|_{L^1(\Omega)} ds,\ \forall t \in [T_1, T_2],$$

for some constant $C > 0$ which is independent of $\eta := T_2 - T_1$. Then, using (5.10), it comes

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t-T_1)^{-\frac{n}{2p}} \|z(T_1)\|_{L^1(\Omega)} + C\|v_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|z(T_1)\| \int_{T_1}^{t} (t-s)^{-\frac{n}{2p}} ds,\ \forall t \in [T_1, T_2],$$

and in particular

$$\|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\eta^{-\frac{n}{2p}} \|z(T_1)\|,$$

where C is a positive constant which is independent of $\eta \in (0, 1)$.

Thus (5.5) implies

$$\|z(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\eta^{-\frac{n}{2p}} \epsilon, \tag{5.12}$$

for some constant $C > 0$ which is independent of η.

Let us now consider the control $v(x,t) = v_2(x) + v_3(x,t)$ *on* $[T_2, T]$, $v_3 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$ *(with* $v_3(t) = 0,\ t \in (T_1, T_2)$*).*

Using this control, the system (5.7) becomes

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v_2(x)z + v_3(x,t)(z + y_d), & in\ \ \Omega \times (T_2, T) \\ z = 0, & on\ \ \partial\Omega \times (T_2, T) \\ z(T_2) = y(T_2^-) - y_d, & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.13}$$

Let us consider the following linear system

$$\begin{cases} \psi_t = \Delta\psi + v_2(x)\psi + \mathbf{1}_\omega u_1(x,t), & in\ \Omega \times (T_2, T) \\ \psi(0,t) = 0, & on\ \partial\Omega \times (T_2, T) \\ \psi(T_2) = z(T_2), & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.14}$$

From Lemma 5.2.2, there exists a control $u_1 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$ *such that the corresponding solution to (5.14) satisfies* $\psi(., T) = 0$*. Furthermore, the steering control* u_1 *satisfies the estimate*

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2,T))} \leq C\|\psi(T_2)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.15}$$

for some C *which is independent of* T_2*. In other words, for some positive constant* C *(depending though on* $T - T_2$*). Moreover, since* T_2 *is small enough, we can (according to the Lemma 5.2.2) choose* C *only dependent on* T*.*

The solution of (5.14) is given, for all $t \in [T_2, T]$*, by*

$$\psi(t) = S(t - T_2)\psi(T_2) + \int_{T_2}^t S(t - s)(v_2(x)\psi(s) + u_1(\cdot, s))ds. \tag{5.16}$$

Since $\psi(T_2) \in L^\infty(\Omega)$*, we have (see [5], p. 44)*

$$\|S(t)\psi(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Since $\psi(T_2) \in L^p(\Omega)$ *and* $u_1 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$*, we can see that* $\psi(t) \in L^p(\Omega),\ T_2 \leq t \leq T$*. Moreover, from (5.11), we have*

$$\|S(t - s)\psi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t - s)^{-\frac{n}{2p}}\|\psi(s)\|_{L^p(\Omega)},\ 0 \leq s < t,$$

and

$$\|S(t - s)\mathbf{1}_\omega u_1(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(t - s)^{-\frac{n}{2p}}\|u_1(\cdot, s)\|_{L^p(\Omega)},\ 0 \leq s < t\cdot$$

Thus from (5.16), we have $\psi(t) \in L^\infty(\Omega)$*, for all* $t \in (T_2, T]$ *and*

$$\|\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi(T_2)\|_{L^\infty(\Omega)} + C\|u_1\|_{L^\infty(\Omega\times(T_2,T))} + C\int_{T_2}^t \|\psi(s)\|_{L^\infty(\Omega)},$$

for some C which is independent of η.

Gronwall's inequality yields via (5.12) and (5.15)

$$\|\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_* \eta^{-\frac{n}{2p}} \varepsilon,\ t \in [T_2, T],$$

for η small enough and for some constant $C_* > 0$ which is independent of η.

Since $|y_d| \geq \alpha > 0$, a.e. in ω, we can choose ε and η small enough such that

$\eta > (\frac{C_* \epsilon}{\alpha})^{\frac{2p}{n}}$.

$$|\psi(x,t) + y_d| > 0,\ a.e\ \omega \times (T_2, T)$$

This enables us to define a control v_3 in $\Omega \times (T_2, T)$ through the following relation

$$v_3(x,t)(\psi(x,t) + y_d) = u_1(x,t)$$

Since $u_1 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$, it follows that $v_3 \in L^\infty(\Omega \times (T_2, T))$.

Using the control $v(x,t) = v_2(x) + v_3(x,t),\ t \in (T_2, T)$ in the system (5.13), leads to the following one

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + v_2(x) z + \dfrac{u_1(x,t)}{\psi(x,t) + y_d}(z + y_d), & in\ \Omega \times (T_2, T) \\ z(0,t) = 0, & on\ \partial\Omega \times (T_2, T) \\ z(T_2) = y(T_2^-) - y_d, & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.17}$$

which admits ψ as a solution. Hence, by uniqueness we have $z = \psi$ a.e in $\Omega \times (T_2, T)$.

Finally, returning to initial system (5.2), the control is then defined by

$$v(x,t) = \begin{cases} v_1(x), & in\ (0, T_1) \\ v_2(x), & in\ (T_1, T_2) \\ v_2(x) + \dfrac{u_1(x,t)}{\psi(x,t) + y_d}, & in\ \ (T_2, T) \end{cases}$$

is such that $v \in L^\infty(Q_T)$ and $y(T) = y_d$.

Remark 5.2.1 *The result of Theorem 5.2.1 improves the results from the literature in terms of the steering time which is here independent of initial and target states (see for instance [3, 17]).*

5.2.2 Exact controllability of the semilinear system

Presently, the system (5.1) is considered. The next theorem introduces significant differences with respect to the literature in terms of the proof's techniques. Indeed, the method used in [4] consists on shifting the points of sign change by making use of a finite sequence of initial-value pure diffusion problems. In [17], a static control was used to study the approximate controllability of the truncated part of (5.1), and the equation at hand becomes linear so that one can apply the linear semigroup theory. In the context of equation (5.1), the central idea of our method is to try to select the bilinear control in such a way that the corresponding trajectory of (5.1) can be approximated by the bilinear term $v(x,t)y(t)$ on a small interval of steering $[0,T]$. In the other words, the effect of the pure diffusion (i.e. $v=0$ and $f=0$) as well as the one of the nonlinearity becomes negligible as $T \to 0^+$.

Our exact controllability result for semilinear case is as follows :

Theorem 5.2.2 *Let $T>0$. If y_0 and y_d satisfy the assumptions of Theorem 5.2.1, then there exists a control $q(\cdot,\cdot) \in L^\infty(Q_T)$ for which the respective solution to (5.1) is such that $y(T)=y_d$.*

Proof 5.2.2 *The idea consists in looking for a control that make the system (5.1) equivalent to its bilinear part (5.2), so that one may apply the results of the previous section.*
Let us observe that (at least formally) the system (5.1) can be written as follows :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + (q(x,t) + \frac{f(y)}{y}\mathbf{1}_{E_y})y, & in\ Q_T \\ y(0,t)=0, & on\ \Sigma_T \\ y(x,0)=y_0(x), & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.18}$$

where $E_y = \{(x,t) \in Q_T : y(x,t) \neq 0\}$. This leads us to consider the following bilinear system

$$\begin{cases} \varphi_t = \Delta \varphi + v(x,t)\varphi, & in\ Q_T \\ \varphi(0,t)=0, & on\ \Sigma_T \\ \varphi(x,0)=y_0(x), & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.19}$$

According to Theorem 5.2.1, there exists $v \in L^\infty(Q_T)$ for which the solution of the system (5.19) is such that : $\varphi(T)=y_d$.
From the assumptions on f, we deduce that $|f(y(x))| \leq L|y(x)|$ for a.e $x \in \Omega$, where L is a Lipschitz constant of f. Thus we have $\dfrac{f(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi} \in L^\infty(\Omega)$, where $E_\varphi = \{(x,t) :\ \varphi(x,t) \neq 0\}$.

Consider the following bilinear system :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + \big(v(x,t) - \frac{f(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}\big)y + f(y), & in\ Q_T \\ y(0,t) = 0, & on\ \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & in\ \Omega. \end{cases} \tag{5.20}$$

and let us set $q(x,t) = v(x,t) - \dfrac{f(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}$ *in (5.20), where* φ *is the solution of (5.19) corresponding to the steering control* v*. It is apparent that* φ *is a solution of (5.20). Hence, by uniqueness we have that* $y = \varphi$ *is the unique solution of (5.20) corresponding to the control* $q(x,t) = v(x,t) - \dfrac{f(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}$.
Then the controllability result of the theorem follows from Theorem 5.2.1.

Remark 5.2.2 *1. In the case where* $f(0) \neq 0$*, we can use the control* $q(x,t) = v(x,t) - \dfrac{f(\varphi) - f(0)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}$.

2. The result of Theorem 5.2.2 extends the results of approximate multiplicative controllability of semilinear systems established in [4] to the case of several dimensions with initial and target states that may change their sign at finitely or infinitely points of Ω*. Moreover, the result of Theorem 5.2.2 also holds for a nonlinearity* $f = f(t,x,y,\nabla y)$ *which is globally Lipschitz in* y *uniformly w.r.t the other parameters (see [13]).*

The next result provides a set of states that can be reached with additive controls through the following semilinear system :

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + f(y) + u(x,t), & \text{in } Q_T \\ y(0,t) = 0, & \text{on } \Sigma_T \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.21}$$

Corollary 5.2.1 *Let assumptions of Theorem 5.2.1 hold. Then for any* $T > 0$*, there exists a control* $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *for which the respective solution to (5.21) satisfies* $y(T) = y_d$.

Proof 5.2.3 *It suffices to take* $u(x,t) = q(x,t)y(x,t)$*, where* q *is the steering control of (5.1) from* y_0 *to* y_d *at* T *and* y *is the corresponding solution of (5.1).*

5.3 Simulation

Let us consider the system (5.1) with $f(y) = \sin(y)$, and let us take $y_0 = 10^{-2}(x + 10^{-2})(1.01 - x)$ and $y_d = y_0 e^x$ in $\Omega = (0, 1)$.

Thus, we have $a(x) = \frac{1}{T} \ln \frac{y_d}{y_0} = \frac{x}{T}$ and $g(x) = -\dfrac{\Delta y_d}{y_d} = -1 + \dfrac{4x}{(x + 10^{-2})(1.01 - x)}$.

According to Theorem 5.2.2, we deduce that for every $T > 0$, there are positive real numbers T_1 and T_2 which are small enough for which the control :

$$q(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{T_1} - \dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}, & (0, T_1) \\ -1 + \dfrac{4x}{(x + 10^{-2})(1.01 - x)} - \dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}, & (T_1, T_2), \\ -1 + \dfrac{4x}{(x + 10^{-2})(1.01 - x)} + \dfrac{u(x,t)}{\psi(x,t) + y_d} - \dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi}\mathbf{1}_{E_\varphi}, & (T_2, T) \end{cases}$$

($E_\varphi = \{(x,t) : \ \varphi(x,t) \neq 0\}$) achieves the exact steering of system (5.1) from y_0 to y_d at T, where φ solves (5.19) with

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{T_1}, & (0, T_1) \\ -1 + \frac{4x}{(x+10^{-2})(1.01-x)}, & (T_1, T_2) \\ -1 + \frac{4x}{(x+10^{-2})(1.01-x)} + \frac{u(x,t)}{\psi(x,t)+y_d}, & (T_2, T) \end{cases}$$

and $u(x,t)$ is the control of null-controllability of the linear system :

$$\begin{cases} \psi_t = \Delta\psi - \psi + u(x,t), & \text{in } \Omega \times (T_2, T) \\ \psi(0,t) = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (T_2, T) \\ \psi(T_2) = y(T_2) - y_d, & \text{in } \Omega \end{cases}$$

and ψ is the corresponding solution.

Here we consider a globally distributed control $u(x,t)$, which can be taken time-independent (see [14], p.57)

$$u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 k^2 + 1)e^{-(T-T_2)(\pi^2 k^2+1)}}{e^{-(T-T_2)(k^2\pi^2+1)} - 1} \Big(\int_0^\pi (y(\xi, T_2) - y_d(\xi))\varphi_k(\xi) d\xi \Big) \varphi_k(x), \tag{5.22}$$

where, $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x), \ k \geq 1$ are the eigenfunctions of A associated to the eigenvalues $\lambda_k = -k^2\pi^2$.

Now, remarking that system (5.1) with control $q(x,t)$ and system (5.19) with control $v(x,t)$ have the same state, it suffices to simulate the latter.

We will give simulations for $T = 1,\ T_1 = 0.01$ and $T_2 = 0.02$, and we will follow the three steps given below :

Step 1. Approximate steering : Solve system (5.1), controlled on the time interval $(0, T_1)$, by : $v(x,t) = v_1(x) = \frac{1}{T_1}\ln(\frac{y_d}{y_0}) = 100x$ to get $y(x, T_1)$.

Step 2. Computation of the additive control $u(x,t)$: Solve (5.19) on the time interval $(0, T_2)$, by taking the control :

$$v(x,t) = v_1(x,t) = \begin{cases} 100x, & (0, T_1) \\ -1 + \dfrac{4x}{(x+10^{-2})(1.01-x)}, & (T_1, T_2) \end{cases}$$

This gives $y(\xi, T_2)$, which enables us to compute the control $u(x,t)$ using the formula (5.22).

Step 3. Exact steering : Consider the solution ψ :

$$\psi(x,t) = e^{T_2 - t}S(t - T_2)y(x, T_2) + \int_{T_2}^{t} e^{-(t-s)}S(t-s)u(x,s)ds,$$

of the equation :

$$\psi_t = \Delta\psi - \psi + u(x,t),\ t \in (T_2, T),$$

with $\psi(T_2^+) = y(T_2^-)$ as initial state.

Then, we use the relation $y(x,t) = \psi(x,t) + y^d,\ t \in (T_2, T)$ to get $y(x,T) = y_d$.

Below, the figures corresponding to the exact steering with the error function :

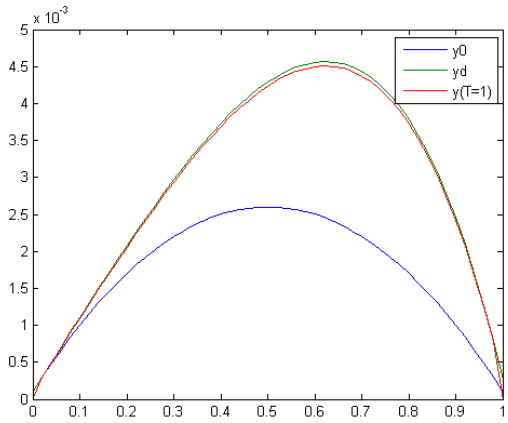


Figure 1 : The evolution of the state at T.

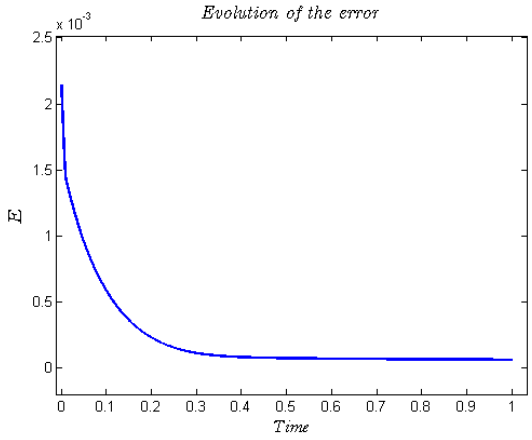


Figure 2 : The variation of the error.

• Figure 1, reflects the exact steering and shows that the trajectory $y(t)$ becomes very close to the desirable state at time T.

• Figure 2, describes the variation of the error function defined by $E(t) = \|y(t) - y_d\|, t \in [0, T]$, and shows that $E(t)$ tends to zero when t becomes close to the time of steering T.

5.4 Conclusion

In the present paper, multiplicative controllability of semilinear reaction-diffusion is considered in several space dimensions. The approach is constructive and consists in using a set of three controls applied subsequently in time. First a static control is used to achieve the approximate steering in L^2 at a small time T_1. Then a second static control is used in a small time interval $[T_1, T_2]$ so that the approximate steering becomes in L^∞ sense. Finally, in the remaining time interval $[T_2, T]$ we exploit a $(x, t)-$dependent control law that ensure the zero controllability of an appropriate linear system (with additive control) to guarantee the exact steering. Furthermore, the considered methods allow us to achieve the approximate and exact steering (for a given couple of initial and desirable states) at arbitrary small control time which can be fixed in advance.

Bibliographie

[1] A.R.A. Anderson and M.A.J. Chaplain, 'Continuous and discrete mathematical models of tumor-induced angiogenesis', *Bulletin of Mathematical Biology*, **60**, (1998), 857-900.

[2] H. T. Banks, P. M. Kareiva, and L. Zia, 'Analyzing field studies of insect dispersal using two-dimensional transport equations', *Environmental Entomology*, **17**(5), (1988), 815-820.

[3] P. Cannarsa and A. Khapalov, 'Multiplicative controllability for reaction-diffusion equation with target states admitting finitely many changes of sign', *Discrete and continuous dynamical systems Series B*, **14**, (2010), 1293-1311.

[4] P. Cannarsa, G. Floridia and A. Y. Khapalov, 'Multiplicative controllability for semilinear reaction-diffusion equations with finitely many changes of sign', *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2017, **108**(4), 425-458.

[5] T. Cazenave and A. Haraux, 'An introduction to semilinear evolution equations', *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 13, Oxford University Press, Oxford*, 1998.

[6] L. C. Evans. 'Partial Differential Equation (Graduate Studies in Math'. ISSN 1065-7339, vol. **19**). *In Am. Math. Soc*, (1998).

[7] E. Fernàndez-Cara, E. Zuazua, 'Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equations', *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **17**, (2000), 583-616.

[8] L. A. Fernàndez and A. Y. Khapalov, 'Controllability properties for the one-dimensional Heat equation under multiplicative or nonnegative additive controls with local mobile support', *ESAIM : Control Optim. Calc. Var.*, Volume **18**(4) (2012), 1207-1224.

[9] S. C. Ferreira, Jr., M. L. Martins, and M. J. Vilela, 'Reaction-diffusion model for the growth of avascular tumor, *Phys. Rev. E* 65, 021907, Published 23, (2002).

[10] A. Friedman, 'PDE problems arising in mathematical biology, Networks and heterogeneous media', **7**, no. 4, (2012).

[11] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, 'Controllability of Evolution Equations', Lecture Notes 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[12] M. Jidou Khayar, & M. Ouzahra, 'Partial controllability of the bilinear reaction-diffusion equation'. International Journal of Dynamics and Control, 1-8, (2018).

[13] A. Y. Khapalov, 'Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : A qualitative approach', *SIAM J. Control. Optim.*, **41** (2003), 1886-1900.

[14] A. Y. Khapalov, 'Controllability of partial differential equations governed by multiplicative controls', *a Lecture Notes in Mathematics* 1995, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[15] P. Lin, Zhong cheng Zhou and Hang Gao, 'Exact controllability of the parabolic system with bilinear control', *Applied Mathematics Letters*, **19** (2006), 568-575.

[16] M. Ouzahra, A. Tsouli and A. Boutoulout, 'Exact controllability of the heat equation with bilinear control', *Mathematical methods in the applied sciences*, **38**(18) (2015), 5074-5084.

[17] M. Ouzahra, 'Approximate and exact controllability of a reaction-diffusion equation governed by bilinear control', *European Journal of Control*, **32** (2016), 32-38.

[18] B. Perthame, 'Some mathematical aspects of tumor growth and therapy', ICM 2014, *International Congress of Mathematicians*, Aug 2014, Seoul, South Korea, (2014), **36**.

[19] T. Roose, S.J. Chapman, P.K. Maini, 'Mathematical models of avascular tumor growth', *SIAM Rev.*, **49**, no. 2, (2007), 179-208.

[20] S. Salsa, 'Partial differential equations in action : from modelling to theory', *Springer-Verlag Italia*, Milano 2008.

[21] A. Tosin, 'Initial boundary-value problems of tumor growth within a host tissue', *J. Math. Biol.*, **66**, (2013), 163-202.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés au problème de la contrôlabilité pour une classe de systèmes paraboliques. Nous avons d'abord étudié le problème de la contrôlabilité partielle pour une région cible interne du domaine géométrique ($\omega \subset \Omega$) dans le cas où l'état initial et l'état désiré ont le même signe et les mêmes points de changement de signe dans la région ω. Nous avons montré en particulier qu'il est possible d'achever la contrôlabilité partielle en effectuant une action locale. La notion de contrôlabilité partielle constitue une extension de la notion classique (globale) qui consiste à atteindre un état désiré défini sur tout le domaine d'évolution du système. Nous avons considéré ce cas spécial dans le contexte de l'équation de la chaleur semilinéaire pour un couple d'état initial et d'état désiré ayant le même signe. Dans le cas d'une action globalement répartie sur le domaine géométrique cela permet d'avoir la contrôlabilité dans un intervalle de temps uniforme (c-à-d le même pour tous les états initiaux et désirés). L'approche utilisée permet aussi d'expliciter le contrôle en fonction des états initiaux et désirés. Les résultats obtenus sont aussi illustrés par des exemples numériques et des simulations.

Les résultats élaborés laissent penser à plusieurs autres problèmes qui peuvent faire l'objet d'axes de recherche. En effet on peut mentionner les problèmes ouverts suivants :

- Contrôlabilité partielle pour une région située sur la frontière du domaine ($\omega \subset \partial\Omega$).
- Contrôlabilité d'un système semilinéaire dans le cas d'une action locale.
- Contrôlabilité (partielle où globale) en présence d'un coût à minimiser (problème de contrôle optimal).
- Etude de la contrôlabilité pour d'autres classes de systèmes non linéaires.
- Reprendre le même problème avec un contrôle bilinéaire frontière (l'opérateur de contrôle est alors non borné).
- Etudier la contrôlabilité des systèmes avec exposant fractionnaires.

Bibliographie

[1] Adams R. A., (1975) Sobolev Spaces, Academic Press, New York.

[2] Attouch H., Buttazzo G. and Michaille G. (2006) Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDES and Optimization, SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.

[3] Ball J.M (1977) Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula, Proc. Amer. Math. Soc. 63, no. 2, p. 370-373.

[4] Ball J.M., Marsden J.E., Slemrod M (1982) Controllability for distributed bilinear systems. SIAM J Control Optim 20 :575-597.

[5] Baras P. and Goldstein J.A. (1984) The heat equation with a singular potential. Trans. Amer. Math. Soc., 284(1) :121-139.

[6] Barbu. V. (1993) Analysis and control of nonlinear infinite dimensional system. Academic Press, Boston.

[7] Barbu. V. (2000) Exact controllability of the superlinear heat equation. Appl. Math. Opt., 42, 73-89.

[8] Bardos C., Tartar L. (1973) Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines. In : Arch. Rational Mech. Anal. 50, p. 10-25.

[9] Beauchard K. (2008) Local controllability of a 1D beam equation, SIAM J.Control Optim. Vol. 47(3), 1219-1273.

[10] Beauchard K. and Laurent C. Local (2010) controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control. J. Math. Pures Appl. (9), 94(5) :520-554.

[11] Boyer F., Hubert F. and Rousseau J. (2011) Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations. In : Numer. Math. 118.4, p. 601-661.

[12] Boyer F., Olive G. (2014) Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients. In : Math. Control Relat. Fields 4.3, p. 263-287.

[13] Brezis H. (1983) Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris.

[14] Cannarsa P., Khapalov A. (2010) Multiplicative controllability for reaction-diffusion equation with target states admitting finitely many changes of sign. Discrete Contin Dyn Syst Ser B 14 :1293-1311

[15] Cannarsa P. and Floridia G. (2011) Approximate controllability for linear degenerate parabolic problems with bilinear control, Proc. Evolution Equations and Materials with Memory (eds. D. Andreucci, S. Carillo, M. Fabrizio, P. Loreti and D. Sforza), Universitá La Sapienza Roma, 19-36, arXiv : 1106.4232.

[16] Cannarsa P., Martinez P., and Vancostenoble J. (2005) Null controllability of degenerate heat equations. Adv. Differential Equations, 10(2) :153-190.

[17] Cannarsa P, Floridia G, Khapalov A (2015) Multiplicative controllability for semilinear reaction-diffusion equations with finitely many changes of sign, arXiv :1510.04203v1.Accessed 14Oct 2015.

[18] Cazenave T, Haraux A (1998) An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 13, Oxford University Press, Oxford.

[19] Cazenave T. and Haraux A. (1990) Introduction aux problèmes dŠévolution semi-linéaires, volume 1 of Mathématiques and Applications (Paris) [Mathematics and Applications]. Ellipses, Paris.

[20] Coron J.-M. (2007) Control and nonlinearity. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, p. xiv+426.

[21] Coron J.-M., Guerrero S., and L. Rosier L. (2010) Null controllability of a parabolic system with a cubic coupling term. SIAM J. Control Optim., 48(8) :5629-5653.

[22] Curtain R. F., Zwart H. J. (1991) An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. Springer-Verlag.

[23] Dolecki S. and Russell. D.L. (1977) A general theory of observation and controlT̃. In : SIAM J. Control Optimization 15.2, p. 185-220.

[24] Doubova A. and al. (2002) On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. In : SIAM J. Control Optim. 41.3, p. 798-819 (cf. p. 14).

[25] El Jaï A., Zerrik E., Simon M.C. and Amouroux M. (1995) Regional observability of a thermal process, IEEE transactions on automatic control, Vol. 40. No. 3, 518-521.

[26] Engel K.J. and Nagel R. (2000) One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag New York.

[27] Fabre C., Puel J.P. and Zuazua E. (1995) Approximate controllability of the semilinear heat equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 125A, 31-61.

[28] Fabre C, Paule J.P, Zuazua E (1993) Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire avec des contrôles de norme L^∞, C.R. Acad.Sci. Paris, 316, 679-684.

[29] Fattorini H. (1968) Boundary control systems, SIAM J. Cont, Vol. 6, 349-385.

[30] Fattorini H. (1966) Some remarks on complete controllability. In : SIAM J. Control 4, p. 686-694.

[31] Fattorini H.O and Russell D.L (1971) Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. Rat. Mech. Anal., 4 272-292.

[32] Fernández-Cara E, Zuazua E (2000) The cost approximate controllability for heat equations : The linear case, Advances Diff. Eqs. 5 , 465-514.

[33] Fernández-Cara E, Zuazua E (2000) Null and approximate controllability for weakly blowing-up semilinear heat equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 17, 583-616.

[34] Fursikov A.V., Imanuvilov O.Y. (1996) Controllability of Evolution Equations, in : Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University, Korea.

[35] Fursikov A.V. and Imanuvilov O.Y. (1999) Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations. Uspekhi Mat. Nauk, 54(3(327)) :93-146.

[36] Glowinski R. - Li C.L. - Lions J.L. (1990) A numerical approach to the exacte boundary controllability of the wave equation. Dirichlet controls : description of numerical methode. Japan J. Appl. Math. pp. 1-76.

[37] Glowinski R., Lions J.L. and He. J. (2008) Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : a numerical approach Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 117. Cambridge University Press, Cambridge.

[38] González-Burgos M., Teresa L. (2010) Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force, Port. Math. 67, no. 1, p. 91-113.

[39] González-Burgos M., Pérez-García R. (2006) Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force, Asymptot. Anal. 46 , no. 2, p. 123-162.

[40] Guerrero S. (2007) Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force, SIAM J. Control Optim. 46, no. 2, p. 379-394.

[41] Haraux A. (2004) Analternative functional approach to exact controllability of reversible systems, Portugallae Mathematica, vol 61, Fasc.4.

[42] Henry D. (1981) Geometric theory of semilinear parabolic systems Lect. Notes Math. 840, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[43] Imanuvilov O.Y. (1993) Boundary controllability of parabolic equations. Uspekhi Mat. Nauk, 211-212.

[44] Jidou khayar M., Ouzahra M. (2018) Partial controllability of the bilinear reaction$\acute{U}$diffusion equation, International Journal of Dynamics and Control, doi.org/10.1007/s40435-018-0485-0.

[45] Jidou khayar M., Brouri A. and Ouzahra M. Exact controllability of the reaction-diffusion equation under bilinear control, Nonlinear Dynamics and Systems Theory (accepted)

[46] Kapitonov B. (1999) Simultaneous exact controllability for a class of evolution systems. Comput. Appl. Math., 18(2) :149-161, 257.

[47] Khapalov A.Y. (2010) Controllability of Partial Differential Equations Governed by Multiplicative Controls,Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg.

[48] Khapalov AY (1995) Some aspects of the asymptotic behavior of the solutions of the semilinear heat equation and approximate controllability, J. Math. Anal. Appl., 194, pp. 858-882.

[49] Khapalov AY (2002) Global non-negative controllability of the semilinear parabolic equation governed by bilinear control.ESAIM Control Optim Calc Var 7 :269-283

[50] Khapalov AY (2006) Reachability of nonnegative equilibrium states for the semilinear vibrating string by varying its axial load and the gain of damping. ESAIM Control Optim Calc Var 12 :231- 252

[51] Khapalov AY (2003) Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : a qualitative approach. SIAM J Control Optim 41 :1886-1900

[52] Khodja F. A. and Benabdallah A. (2005) Une introduction à la théorie du contrôle.

[53] Ladyzhenskaya O.H., Solonikov V.A., (1968) and N.N. Uralceva, Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type, AMS, Providence, RI.

[54] Lei P., Gao H. (2010) Null controllability of semilinear parabolic equations via the bilinear control. Applied Mathematics Letters 23, 53-57.

[55] Li X. and Yong J. (1995) Optimal Control Theory for Infinite-Dimensional Systems, Birkhauser, Boston, Massachusetts.

[56] Lions J. L. (1988) Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes distribués, Tome 1, Vol. 8, Masson, Paris.

[57] Lions J. L. (1969) Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod. Paris.

[58] Lions J. L. and Magenes E. (1968) Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1 et 2, Dunod, Paris.

[59] Lin P, Zhou Z, Gao H (2006) Exact controllability of the parabolic system with bilinear control. Appl Math Lett 19 :568-575.

[60] Littman. W. (1987) Boundary control theory for hyperbolic and parabolic equations with constent coeffcients. Anal. Sc. N. Sup. PisaIV, pp. 567-580.

[61] Loreti P., Valente V. (1997) Partial exact controllability for spherical mem- branes, SIAM J. Control Optim. 35 , no. 2, p. 641-653.

[62] Mauffrey K. (2012) On the null controllability of a parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces, J. Math. Pures Appl.

[63] Michael G., Crandall and Pazy A. (1969) Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. Journal of Functional Analysis. 3, 376-418.

[64] Mohler R.R. (1973) Bilinear control processe. Academic Press, New York.

[65] Mohler R.R., Kolodziej W.J. (1980) An overview of bilinear system theory and applications, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 10, pp. 683-688.

[66] Ouzahra M. (2014) Controllability of the wave equation with bilinear controls, Eur. J. Control Vol0 20 (2), 57-63.

[67] Ouzahra M (2016) Approximate and exact controllability of a reactionŰdiffusion equation governed by bilinear control. Eur J Control 32 :32-38

[68] Ouzahra M, Tsouli A, Boutoulout A (2015) Exact controllability of the heat equation with bilinear control. Math Methods Appl Sci 38(18) :5074-5084

[69] Ouzahra M., Ayadi R. and Boutoulout A. (2012) Strong stabilisation and decay estimate. Int. Journal of control, Vol 85, N 10, 1497-1505.

[70] Martinez P., Raymond J.P., and Vancostenoble J. (2003) Regional null controllability of a linearized Crocco-type equation. SIAM J. Control Optim., 42(2) :709-728.

[71] Pazy A. (1983) Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer Verlag, New York.

[72] Russell D.L. (1978) Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. recent progress and open, SIAM Rev, Vol. 20. No. 4, 639-739.

[73] Souza F. J.A.M. (1989) Control of no linear distibuted parameter systems. Proc, VIII Congreso Chileno De Ingenieria Electrica. Chile. pp. 370-375.

[74] Tucsnak M. and Weiss G. (2000) Simultaneous exact controllability and some applications. SIAM J. Control Optim., 38(5) :1408-1427.

[75] Turinici G. (2000) On the controllability of bilinear quantum systems. In Mathematical models and methods for ab initio quantum chemistry, volume 74 of Lecture Notes in Chem., pages 75-92. Springer, Berlin.

[76] Turinici G. (2007) Beyond bilinear controllability : applications to quantum control. In Control of coupled partial differential equations, volume 155 of Internat. Ser. Numer. Math., pages 293-309. Birkhäuser, Basel.

[77] Vancostenoble J. and Zuazua E. (2008) Null controllability for the heat equation with singular inverse-square potentials. J. Funct. Anal., 254(7) :1864-1902.

[78] Yoshida, K. (1971) Functional Analysis. Springer-Berlin.

[79] Zabczyk J. (1992) Mathematical control theory : an introduction, Systems and Control : Fondations and Applications, Birkhäuser Boston.

[80] Zhang X. (2000) Exact Controllability of Semilinear Evolution Systems and Its Application, Journal of optimization theory and applications : Vol. 107, No. 2 415-432.

[81] Zhou H. (1983) Approximate Controllability for a Class of Semilinear Abstract Equations, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 21, 551-555.

[82] Zuazua E. (1990) Exact Controllability for the Semilinear Wave Equations, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 59, 1-31.

[83] Zuazua E. (1997) Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation, J. Math. pures et appl., 76, pp.237-264.