Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès
Centre d'Etudes Doctorales
"Sciences et Technologies"

Formation Doctorale : STIC

Discipline : Physique

Spécialité : Génie électrique

Laboratoire : Electronique Signaux Systèmes et Informatique

THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Redouane Chaibi

Commande des systèmes dynamiques non linéaires T-S flous par l'approche polynomiale SOS

Soutenue le 15/07/2019

Devant le jury composé de :

Pr. Abdellah Aarab	***Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Fès***	***Président***
Pr. Fouad Mesquine	***Université Cadi Ayad, Faculté des sciences Semlalia Marrakech***	***Rapporteur***
Pr. Mohamed Ouahi	***Ecole Nationale des Sciences Appliquées Fès***	***Rapporteur***
Pr. Ismail Boumhidi	***Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Fès***	***Membres***
Pr. Mohamed Benhayoune	***Université Cadi Ayad, Faculté des sciences Semlalia Marrakech***	***Membres***
Pr. El Houssaine Tissir	***Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Fès***	***Directeur de thèse***
Pr. Abdelaziz Hmamed	***Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences***	***Professeur Invité***

Année universitaire : 2018-2019

Redouane Chaibi

Génie électrique

Commande des systèmes dynamiques non linéaires T-S flous par l'approche polynomiale SOS

Remerciement

Ce travail a été mené au sein de l'équipe de recherche d'Électronique Signaux Systèmes et d'informatique (LESSI) au département de physique de la faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès, sous la direction de professeur **Abdelaziz HMAMED** et le professeur **El Houssaine TISSIR**, qui m'ont accueilli au sein de leurs équipe et qui m'ont offert la possibilité de m'évoluer. Je les remercie pour la confiance, l'appui et la liberté qu'ils m'ont témoignés, l'intérêt grandissant qu'ils ont porté sur mes travaux, leur disponibilité durant ces années, sans oublier leurs valeurs humaines et bonne humeur qui ont fait de chaque rencontre des moments très agréables.

J'adresse mes respectueux remerciements aux membres du jury : Monsieur **Abdellah AARAB**, Professeur à l'université de Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Fès, de m'avoir fait l'honneur de présider ma thèse. J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **Fouad MESQUINE**, Professeur à Université Cadi Ayad, Faculté des sciences Semlalia Marrakech et à Monsieur **Mohamed OUAHI**, Professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées Fès, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de ce travail et pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques constructives ont contribué à améliorer ce document. J'adresse toute ma gratitude à Monsieur **Ismail BOUMHIDI**, Professeur à l'université de Sidi Mohammed Ben Abdellah, Faculté des Sciences Fès et Monsieur **Mohamed Benhayoune**, Professeur à l'université Cadi Ayad, Faculté des sciences Semlalia Marrakech, pour avoir accepté d'examiner mon travail. Leur présence dans ce jury est pour moi un grand honneur.

J'adresse mes sincères remerciements au chef de département, Monsieur **Ismail BOUMHIDI**, de m'avoir guidée et accompagnée depuis le Master (M2SI), qui était son principal coordinateur et je lui suis très reconnaissant pour son soutien et ses conseils au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres du laboratoire LESSI professeur et doctorants pour leurs sympathies. Enfin, mes remerciements vont à toute ma famille, qui m'a accompagné tout au long de mes études par son amour inconditionnel et son soutien constant.

Abstract

This thesis investigates the stability and stabilization problems for nonlinear systems represented by Takagi–Sugeno fuzzy models for the both continuous and discrete time. The main work of this thesis can be summarized as follows : First of all, sufficient conditions to design static output feedback control (SOF) for T–S fuzzy systems are proposed in terms of LMIs (Linear Matrix Inequalities) without any transformation matrices, and equality constraints. Then, to reduce the conservatism, new approaches based on the multiple polynomial Lyapunov functions have been proposed by using a sum of squares (SOS) approach. Furthermore, the polynomial fuzzy system has been employed to cope with SOF control and robust SOF H_∞ control in terms of SOS formulation respectively. Next, the SOS approach is proposed for the stabilization of two-dimensional polynomial T-S fuzzy models. Finally, practical and numerical examples are presented to demonstrate the validity of the proposed approaches, these results are compared with other methods cited in references.

Keywords: Takagi–Sugeno fuzzy system, static output feedback (SOF) control, linear matrix inequalities (LMIs), polynomial Takagi–Sugeno fuzzy systems, sum of squares, two-dimensional (2-D) system.

Resumé

Cette thèse étudie la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires, en temps continu et discret représentés par les modèles flous Takagi-Sugeno. Les principaux travaux de cette thèse peuvent être résumé comme suit : Tout d'abord, la proposition des conditions suffisantes pour concevoir une commande par retour de sortie statique (SOF) pour les systèmes flous T–S en utilisant l'LMI sans aucune transformation matricielle ni contrainte d'égalité. De plus, la proposition de nouvelles approches basées sur la multifonction polynomiale de Lyapunov afin de réduire le conservatisme en utilisant l'approche de la somme des carrés (SOS). En outre, l'utilisation du système flou polynomial pour gérer la commande par SOF et la commande robuste H_∞ par SOF en terme de SOS, respectivement. Ensuite, la proposition de l'approche de la somme des carrés pour la stabilisation des modèles polynomiaux flous T-S bidimensionnels. Enfin, des exemples pratiques et numériques sont présentés pour démontrer la validité des approches proposées. Ces résultats sont comparés à d'autres méthodes citées dans les références.

Mots clés : système flou Takagi–Sugeno, commande par retour de sortie statique (SOF), inégalité matricielle linéaire (LMI), système polynomial flou Takagi–Sugeno, la somme des carrées (SOS), système bidimensionnel 2–D.

Publications scientifiques

Journaux indexés

- **Redouane Chaibi**, Ismail Er Rachid, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. Finite Frequency Static Output Feedback H_∞ Control of Continuous Time T–S Fuzzy Systems. Journal of Circuits, Systems and Computers, Vol. 28, No. 2 1950023 (19 pages) 2018.

- Ismail Er Rachid, **Redouane Chaibi**, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. Observer-based H_∞ control with finite frequency specifications for discrete time T-S fuzzy systems. International Journal of Systems Science, vol. 49, no. 16, pages 3307–3319, 2018.

- **Redouane Chaibi**, Abdelaziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. Control of Discrete 2-D Takagi-Sugeno Systems via a Sum of Squares Approach. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 30(2), 137-147, 2019.

- **Redouane Chaibi**, Ismail Er Rachid, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. Robust FF H_∞ SOF Control For Uncertain Fuzzy Systems Via a SOS Approach. in revisions, optimal control application, 2019.

- **Redouane Chaibi** Baderdine El Haiek, El Houssaine Tissir, Abdelaziz Hmamed, Tereza Alvarez. Robust H_∞ Control of Takagi-Sugeno Systems with Actuator Saturation, in revisions, Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2019.

- **Redouane Chaibi**, Ismail. Er Rachid, El Houssaine Tissir and Abdelaziz Hmamed, Finite Frequency H_∞ Control For 2-D T-S Fuzzy FMII Model With Stochastic Perturbation, in revisions, International Journal of Systems Science, 2019.

- Khadija Naamane, **Redouane Chaibi**, El Houssaine Tissir and Abdelaziz Hmamed, stabilization of nonlinear discret time fuzzy systems with saturating actuators, Journal of Nonlinear Systems and Applications 37-41, 2018.

Conférences internationaux

- Ismail Er Rachid, **Redouane Chaibi**, Badreddine El Haiek, El Houssaine Tissir, and Abdelaziz Hmamed, Robust Observer-Based Controller Design for Uncer-

tain Discrete-time Systems in Finite Frequency Domain. In 2018 6th International Conference on Multimedia Computing and Systems (ICMCS) (pp. 1-6).10-12 May 2018, Rabat, Morocco. IEEE, 2018.

– **Redouane Chaibi** et AbdelAziz Hmamed. Static output feedback control problem for polynomial fuzzy systems via a sum of squares (SOS) approach. In Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV), 17-19 April 2017, Fez, Morocco, IEEE, 2017.

– **Redouane Chaibi**, AbdelAziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. Stability conditions for polynomial T–S fuzzy systems using a sum of squares approach. In Electrical and Information Technologies (ICEIT), 2017 International Conference on, pages 15, 15-18 Nov. 2017, Rabat, Morocco IEEE.

– **Redouane Chaibi**, AbdelAziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. Stabilization of Polynomial Fuzzy Systems Using Multiple Polynomial Lyapunov Functions. In The 14th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis ACD 2017, 16-17 November, Bucharest, ROMANIA, page 15. IEEE.

– Khadija Naamane, **Redouane Chaibi**, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. Stabilization of discrete-time T–S fuzzy systems with saturating actuators. In Advanced Technologies for Signal and Image Processing (ATSIP), 2017 International Conference on, pages 15. 22-24 May 2017, Fez, Morocco, IEEE.

– **Redouane Chaibi**, AbdelAziz Hmamed et Fernando Tadeo. Stabilization of discrete time 2-D T-S Fuzzy system via a sum of squares (SOS) approach. 5th International Conference on Systems and Control (ICSC), 2016, pages 109114. 25-27 May 2016, Marrakesh, Morocco, IEEE.

Notations & Abrevéations

Notations

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Z}^+$	L'ensemble des entiers non négatifs.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
I	La matrice d'identité (de taille spécifiée par le contexte).
$\lambda_i(.)$	Valeur propre d'une matrice.
$*$	Représente un terme induit par la symétrie.
A^T	La transposée de A.
A^{-1}	Matrice inverse de A.
$A < 0$ (≤ 0)	Matrice A est définie négative (semi-définie négative).
$A > 0$ (≥ 0)	Matrice A est définie positive (semi-définie positive).
$M^\perp$	Matrice orthogonale de M, telle que $MM^\perp = 0$.
$sym(M)$	Représente le bloc $M + M^T$.
$x(t)$	Vecteur d'état du système continue.
$x(k)$	Vecteur d'état du système discret.
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A.
$\lambda(A)$	Valeur propres de la matrice carrée.
$\text{Diag}(A, B)$	Matrice diagonale avce A, et B sont les élement du diagonale.

Acronymes

-T-S	Takagi-Sugeno
-BMIs	Bilinear matrix inequality (Inégalités Matricielles Bilinéaires).
-LMI	Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire).
-LMIs	Inégalités Matricielles Linéaires.
-PDC	Parallel Distributed Compensation (Compensation distribuée parallèle).
-SOS	Sum of squares (La somme des carrées).
-GKYP	Lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov.
-SOF	Static Output Feedback (Retour de sortie statique).
-LF	La fonction quadratique de Lyapunov.
-MLF	Multifonction de Lyapunov.
-MPLF	Multifonction polynomiale de Lyapunov.
-FF	La fréquence finie.
-FE	La fréquence entière.

Table des matières

Abstract ii

Resumé iii

Introduction générale 1

1 État de l'art 7
- 1.1 Introduction . . . 7
- 1.2 Stabilité des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) . . . 7
  - 1.2.1 Système 1-D non linéaire . . . 7
  - 1.2.2 La commande robuste H_∞ par retour de sortie statique des systèmes flous T-S . . . 10
  - 1.2.3 La commande H_∞ pour les systèmes flous T-S en temps continu dans le domaine des fréquences finies . . . 14
  - 1.2.4 Système flou T–S à deux dimensions en temps discret . . . 17
- 1.3 La somme des carrés (SOS) . . . 20
  - 1.3.1 Définitions des fonctions polynomiales . . . 20
  - 1.3.2 Définition de la SOS . . . 20
- 1.4 Modèle polynomial flou et la fonction polynomiale de Lyapunov . . . 22
  - 1.4.1 Modèle polynomial flou T-S . . . 22
  - 1.4.2 La fonction polynomiale de Lyapunov . . . 23
  - 1.4.3 La commande polynomiale floue . . . 23
- 1.5 Lemmes utilisés . . . 26
- 1.6 Conclusion . . . 28

2 Commande H_∞ par retour de sortie statique en fréquence finie pour des systèmes flous T–S en temps continu **29**
- 2.1 Introduction . . . 29
- 2.2 Formulation du problème . . . 30
- 2.3 Commande H_∞ par SOF en fréquence finie . . . 32
- 2.4 Exemples numériques . . . 39
- 2.5 Conclusion . . . 44

3 La commande des systèmes polynomiaux flous basés sur la somme des carrés (SOS) **45**
- 3.1 Introduction . . . 45
- 3.2 Commande des systèmes polynomiaux flous par l'utilisation de la multifonction polynomiale de Lyapunov . . . 46

3.2.1 Formulation du problème 46
3.2.2 Condition de stabilité du système polynomial flou T–S 47
3.2.3 Condition de stabilisation pour le système polynomial flou . . . 50
3.2.4 Simulations numériques 53
3.3 La commande par retour de sortie statique pour les systèmes polynomiaux flous basés sur la somme des carrés (SOS) 61
3.3.1 Formulation du problème 61
3.3.2 Exemples de Simulations 63
3.4 Conclusion 68

4 Commande H_∞ par SOF pour des systèmes polynomiaux flous incertains dans le domaine des fréquences finies 69
4.1 Introduction 69
4.2 Préliminaire et Formulation du problème 70
4.3 Commande H_∞ par SOF en FF 73
4.4 Exemples de simulation 83
4.5 Conclusion 91

5 Commande des systèmes Takagi-Sugeno 2-D discrets par l'approche des sommes des carrés 93
5.1 Introduction 93
5.2 Formulation du problème 94
5.2.1 La commande par la multifonction polynomiale de Lyapunov . 96
5.2.2 La commande d'un système polynomial par la loi de commande non PDC 99
5.3 Résultats de simulation 103
5.4 Conclusion 109

Conclusion générale 110
Bibliographie 113

Table des figures

1.1 Trajectoires des états du système polynomial 26

2.1 Trajectoires des états du système non linéaire (2.32) 41
2.2 Le signal de la commande généré par retour de sortie statique pour le système non linéaire (2.32) 41
2.3 Le rapport de $\gamma(t) = \frac{\sqrt{z^T(t)z(t)dt}}{\sqrt{\omega^T(t)\omega(t)dt}}$ pour le système non linéaire (2.32) . . . 41
2.4 Trajectoires des états du système pour l'Exemple 2.2. 43
2.5 Trajectoire de la tension d'entrée directe $v_d(t)$ pour l'Exemple 2.2. . . . 44
2.6 Trajectoire de la tension d'entrée en quadrature $v_q(t)$ pour l'Exemple 2.2. 44

3.1 Région de faisabilité fournie par le Théorème 1 dans [Faria 2011](o) et le Théorème 3.1 dans ce chapitre (×) pour l'Exemple 3.1 54
3.2 Trajectoires des états du système x_1 et x_2 pour l'Exemple 3.2 55
3.3 Le temps transitoire de la multifonction polynomiale de Lyapunov obtenue pour l'Exemple 3.2 56
3.4 Temps transitoire de la MPLF de sixième ordre pour l'Exemple 3.2 . . . 57
3.5 Structure du pendule inversé 58
3.6 Évolution de x_1 pour la commande proposée et la commande de [Cao 2014], à partir de plusieurs conditions initiales (Exemple 3.3) 59
3.7 Trajectoires des états du système non linéaire en boucle fermée (3.37) à l'aide de la commande proposée, à partir de la condition initiale $x_1(0) = \frac{5}{36}\pi$, $x_2(0) = 0$ 60
3.8 Signal de commande pour le système non linéaire (3.37) pour les conditions initiales $x_1(0) = \frac{5}{36}\pi$, $x_2(0) = 0$ 60
3.9 La zone de faisabilité trouvée par Théorème 3 dans [Jeung 2014]. . . . 66
3.10 La zone de faisabilité trouvée pour le modèle polynomial flou, (Théorème 3.3). 66
3.11 Trajectoires du système non linéaire en boucle fermée (3.53) dans les plans de phase x_1 - x_3 pour certaines conditions initiales. 67
3.12 Trajectoires pour le système non linéaire en boucle fermée (3.53) dans les plans de phase x_2 - x_4 pour certaines conditions initiales. 68

4.1 Évolution des états de la boucle fermée pour l'Exemple 4.1 85
4.2 Évolution de la commande pour l'Exemple 4.1 85
4.3 Le rapport $\rho(k) = \sqrt{z^T(k)z(k)/w^T(k)w(k)}$ pour l'Exemple 4.1 86
4.4 Camion remorque. 86
4.5 Réponses d'état du système en boucle fermée (4.8) pour l'Exemple 4.2 . 88

4.6 Évolution de la commande du système en boucle fermée (4.8) pour l'Exemple 4.2 89
4.7 Évolution des états de la boucle fermée dans l'Exemple 4.3 90
4.8 Évolution de la commande pour l'Exemple 4.3 90

5.1 État horizontal $x^h(k,l)$ pour $a_2 = -2,4$ en utilisant la commande proposée. 106
5.2 État vertical $x^v(k,l)$ pour $a_2 = -2,4$ en utilisant la commande proposée. 106
5.3 Trajectoire de l'état du système polynomial 2-D $x^h(k,l)$. 108
5.4 Trajectoire de l'état du système polynomial 2-D $x^v(k,l)$. 109

Liste des tableaux

1.1 Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences. 16

2.1 Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences. 32
2.2 Les valeurs de γ pour l'Exemple 2.1 40
2.3 Les valeurs de γ pour l'Exemple 2.2. 43

3.1 Les gains de la commande par SOF F_i $i = 1, ..., 4$ 65

4.1 Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences. 74
4.2 Les valeurs de γ et les gains de la commande par SOF pour l'Exemple 4.1. 84
4.3 Les valeurs de γ pour l'Exemple 4.2. 88

5.1 Intervalles de faisabilité pour a_2 105
5.2 Nombre des variables et nombre de (LMI / SOS), avec $n_1 = n_2 = n_d$ et $m_1 = m_2 = m_d$ 107

Introduction générale

La majorité des systèmes et processus physiques sont non linéaires, ce qui complique l'analyse et la conception des commandes. Afin de surmonter ces difficultés, les systèmes Takagi–Sugeno (T–S) ont été utilisés pour commander les systèmes non linéaires et depuis 1985, ils ont été un moyen de résolution de nombreux problèmes d'analyse et de conception de la commande d'une grande classe des systèmes non linéaires. De nombreux efforts ont été déployés dans les études des systèmes flous T–S [Tanaka 2004, Feng 2006, Feng 2010] et [Gassara 2017]. Les avantages de cette approche peuvent être résumés en trois points : Premièrement, une capacité à transformer les systèmes non linéaires d'ordre supérieur à un ensemble des systèmes linéaires [Takagi 1985]. Deuxièmement, une possibilité de combiner les principes de la logique floue avec la théorie des systèmes linéaires. Troisièmement, un outil de modélisation puissant d'une large classe des systèmes non linéaires complexes. Ainsi, les problèmes de stabilité et de stabilisation des systèmes non linéaires décrits par les systèmes flous T–S ont fait l'objet de nombreuses études au cours des deux dernières décennies, plusieurs résultats intéressants formulés habituellement dans le cadre des contraintes d'Inégalité Matricielles Linéaires (LMIs) peuvent être trouvés dans la littérature [Feng 2006, Wang 2009, Tian 2009, Feng 2010, Xie 2015, Ma 2016, Naamane 2017], où les résultats sont généralement basés sur la fonction quadratique de Lyapunov (LF), qui tend malheureusement à donner des conditions restrictives. D'autres conditions de stabilité pour les systèmes non linéaires ont été étudiées (voir, [Xiaodong 2003, Mozelli 2009b]). Nous soulignons que la multifonction de Lyapunov (MLF), donne de bons résultats en comparaison avec la fonction quadratique de Lyapunov ([Johansson 1999, Feng 2004]), ce qui permet d'assurer la stabilité d'une classe plus large des systèmes non linéaires. D'ailleurs, les informations sur la dérivée temporelle des fonctions d'appartenance sont prises en compte par la commande floue non PDC dans [Lam 2009], qui introduit des matrices dépendantes de paramètres d'optimisation (slack) pour faciliter l'analyse de stabilité.

De plus, il est bien connu que la présence des incertitudes peut dégrader les performances de nombreux systèmes commandée et peut aussi être une source d'instabilité. De nombreux chercheurs ont examiné l'influence des incertitudes sur les performances des systèmes commandés, voir par exemple [Lo 2004, Kau 2007, Tong 2007, Choi 2009, Yang 2015]. En outre, plusieurs conditions de stabilisation ont également été proposées pour obtenir des résultats moins restrictifs dans [Ding 2010, Chang 2011].

La majorité des références citées précédemment se sont concentrées sur la commande par retour d'état. Cependant, dans la plupart des applications industrielles, les variables d'état ne sont pas toujours complètement mesurables. Par conséquent, le problème de la commande par retour de sortie statique (SOF) a attiré l'attention des chercheurs, en particulier la commande par retour dynamique. L'inconvénient majeur de

cette dernière est la dimension croissante du système en boucle fermée. Alternativement, la commande par retour de sortie statique (SOF) des systèmes flous T–S a suscité beaucoup d'intérêt et représente un problème difficile à synthétiser [Qiu 2010, Jeung 2014, Zhong 2017]. Étant donné que la commande par SOF est liée à la résolution des Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI) qui sont des problèmes plus difficiles à résoudre que les LMIs. Le SOF est l'un des problèmes les plus importants de la théorie et des applications de la commande. Cela est dû à sa simplicité de mise en oeuvre dans la pratique par rapport à la commande par retour de sortie dynamique (voir [Syrmos 1997] et les références qu'il contient). De nombreux résultats concernant la conception de commande par SOF ont été développés. Dans [Mehdi 2004] et [Agulhari 2010], les commandes par SOF ont été proposés en utilisant une méthode en deux étapes, dans laquelle une conception de commande par retour d'état a été obtenue à partir de la première étape, tandis que la seconde est la solution du problème d'LMI. Ainsi, la conception dépend du gain de la commande par retour d'état obtenu lors de la première étape. Pour les modèles flous T–S, il y a quelques résultats pour la commande par SOF que nous pouvons citer [Nachidi 2007, Nachidi 2008, Chen 2016]. En particulier, basée sur la fonction quadratique de Lyapunov et sur quelques transformations matricielles, une procédure permettant de calculer la commande par SOF a été donnée dans [Nachidi 2007]. Dans [Nachidi 2008], une procédure numérique basée sur l'algorithme de cône a été étudiée. Les auteurs de [Chen 2016] ont proposé un algorithme itératif basé sur la fonction quadratique de Lyapunov, afin de résoudre la commande par SOF des modèles flous T–S en temps continu. Dans ces travaux étudiés, les conditions sont bilinéaires. Des algorithmes itératifs, qui dépendent des valeurs initiales, ont été développés afin de résoudre numériquement le problème de stabilisation. Dans d'autres études, [Chadli 2002, Fang 2006, Kau 2007], le problème des BMIs pour la commande par SOF a été résolu en insérant une contrainte d'égalité pour la matrice de Lyapunov.

Par ailleurs, les systèmes bidimensionnels [Rogers 1992, Sulikowski 2004], suscitent un vif intérêt dans la théorie des systèmes en raison de leurs applications étendues dans la pratique, par exemple, dans le traitement et la transmission de signaux multidimensionnels et processus thermique. En fait, les systèmes 2–D sont très appropriés pour modéliser des processus physiques décrits par des équations aux dérivées partielles [Marszalek 1984]. De plus, les techniques 2–D peuvent également être utilisées comme outil d'analyse pour résoudre les problèmes de la commande complexes, notamment la commande PI du processus répétitif linéaire en temps discret [Sulikowski 2006], la commande d'apprentissage itératif [Owens 2000] et la commande du processus répétitif [Sulikowski 2004]. Plusieurs modèles 2–D ont été proposés en fonction de leur application [Du 2002]. De nombreuses approches ont été dérivées pour le cas 2–D : le problème du filtrage H_∞ pour les systèmes flous T–S 2–D a été étudié dans [Boukili 2014] sous forme d'LMI. Des conditions suffisantes ont également été étudiées dans [Boukili 2015], sous forme d'LMI en tenant compte de l'effet des perturbations stochastiques. Les systèmes T–S de commutés ont été étudiés dans

[Ahmida 2016], à l'aide des fonctions de Lyapunov-Krasovskii.

Cependant, dans ces études, la méthode directe de Lyapunov a généralement été utilisée pour étudier la stabilité et la stabilisation des modèles flous T–S. Cette méthode conduit souvent à des conditions formulées en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) [Chadli 2002, Chang 2009, Faria 2011], qui peuvent être résolues numériquement et efficacement par l'approche LMI. Pourtant, en raison de la limitation de l'approche LMI, qui ne peut traiter que les problèmes avec des matrices et des variables constantes (ne contient aucun terme polynomial), il convient de souligner que certains systèmes non linéaires ne sont pas commandés sous la forme des LMIs, mais peuvent être commandés par des approches polynomiales floues sous forme de la somme des carrés (SOS).

D'une manière générale, les systèmes polynomiaux flous sont une généralisation des systèmes T–S permettant de traiter une classe plus large des systèmes non linéaires [Tanaka 2008, Tanaka 2009]. L'approche de la somme des carrés (SOS) est actuellement étudiée pour ces systèmes, car l'utilisation des conditions polynomiales basées sur la SOS est moins restrictive que l'utilisation des conditions basées sur l'LMI pour les systèmes T–S. Plusieurs approches utilisant la décomposition de la SOS ont été étudiées, par exemple : [Cao 2014], où la loi de commande PDC, est utilisée pour obtenir la stabilité robuste pour les systèmes flous T–S en boucle fermée. De plus, les conditions de stabilité et de stabilisation présentées dans [Tanaka 2009] sont plus générales et moins restrictives que celles des approches existantes fondées sur l'approche LMI. Dans la réf. [Kim 2016], les conditions de stabilité du système T–S en temps continu ont été présentées, en utilisant une fonction non quadratique polynomiale de Lyapunov. Une méthode basée sur l'utilisation de multifonction polynomiale de Lyapunov a été traitée dans [Guelton 2013] sous forme de SOS pour l'analyse de stabilité.

Nous constatons que les méthodes et les résultats rapportés dans la littérature restent encore limités et que la réduction du conservatisme reste un problème important et difficile. Le but de cette thèse est de proposer de différentes méthodes pour synthétiser les lois de commande permettant de garantir la stabilité et réduire le conservatisme pour les systèmes non linéaires. Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes : Premièrement, la proposition d'une méthode de conception d'une loi de commande H_∞ par retour de sortie statique pour les systèmes flous T–S en temps continu. Les conditions sont formulées en terme d'LMI et peuvent être facilement résolues à l'aide des techniques d'optimisation convexes. Deuxièmement, l'exploitation du modèle polynomial flou T–S pour décrire le système non linéaire, d'ailleurs, en utilisant l'approche SOS, nous avons analysé la stabilité et la commande du système polynomial flou en boucle fermée. Troisièmement, la proposition et la formulation des conditions suffisantes pour la synthèse de loi de commande par SOF et de loi de commande robuste H_∞ par SOF sous forme de SOS pour les systèmes polynomiaux flous en temps continu et discret, respectivement. Finalement, cette thèse étudie également les lois de commande par retour d'état pour des systèmes polynomiaux T–S bidimensionnels (2–D) en

temps discret, en utilisant l'approche de la somme des carrés.

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'articulent autour de cinq chapitres. Dans le chapitre 1, nous donnons quelques définitions et concepts fondamentaux pour la représentation des systèmes flous de type Takagi-Sugeno sous forme d'LMI et SOS, nous présentons l'étude du problème de stabilité et stabilisation des systèmes polynomiaux non linéaires.

Le chapitre 2 traite la commande H_∞ par retour de sortie statique (SOF) à fréquence finie (FF) pour une classe des systèmes flous T–S en temps continu et présente des conditions suffisantes d'existence d'une commande H_∞ par SOF en fréquence finie, en se basant sur le Lemme généralisé de Kalman Yakubovich Popov (GKYP). Les inégalités matricielles bilinéaires sont converties en un ensemble d'inégalités matricielles linéaires, à l'aide de certaines dérivations spéciales. Deux exemples pratiques sont donnés pour démontrer l'efficacité de la méthode proposée.

Le chapitre 3 est consacré à la description d'une méthodologie d'optimisation d'une loi de commande pour les systèmes polynomiaux T–S en temps continu, en utilisant l'approche de la somme des carrés (SOS). Les résultats de la commande par retour d'état sont obtenus en utilisant les propriétés de dérivation des fonctions d'appartenance et le concept de taux de décomposition de la multifonction polynomiale de Lyapunov. Le développement théorique montre que les conditions proposées peuvent réduire le conservatisme par rapport aux résultats existants dans la littérature. Quelques exemples numériques sont fournis pour démontrer l'applicabilité de l'approche proposée. Dans ce même chapitre, nous abordons aussi le problème de la commande par retour de sortie statique polynomial pour les systèmes en temps continu, représenté par les systèmes polynomiaux flous T–S. Basée sur la fonction polynomiale de Lyapunov, la commande polynomiale floue par retour de sortie statique (SOF) est présentée en terme de la SOS. Enfin, un exemple numérique est utilisé pour illustrer l'efficacité des résultats proposés.

Nous avons consacré le chapitre 4 pour la description d'une méthodologie qui permet de traiter la commande robuste H_∞ par retour de sortie statique (SOF) à des fréquences finies (FF) pour les systèmes polynomiaux flous T–S. En utilisant le Lemme généralisé de Kalman Yakubovich Popov (GKYP) et la fonction polynomiale de Lyapunov, des conditions suffisantes sont proposées pour la conception de ces commandes en terme de la somme des carrés (SOS). Ces conditions n'incluent ni transformation matricielle ni les contraintes d'égalité, ce qui simplifie la solution numérique. Cependant, la commande proposée est conçue dans une fréquence finie pour réduire le conservatisme généré par celles conçues dans le domaine de fréquence entière. Quelques exemples pratiques sont fournis pour démontrer l'applicabilité de l'approche proposée.

La stabilisation des systèmes polynomiaux T–S est résolue dans le chapitre 5 en utilisant l'approche de la somme des carrés SOS pour le cas de deux dimensions (2–D). Premièrement, nous fournissons une condition de stabilisation formulée en terme de multifonction polynomiale de Lyapunov (MPLF). Ensuite, une condition de stabilisation non quadratique est développée en appliquant une technique de stabilisation

relaxée. Les deux conditions peuvent être résolues à l'aide d'outil numérique SOSTOOLS. Á la fin, deux exemples numériques illustrent l'efficacité des résultats.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'état d'art sur les systèmes flous T–S. Nous commençons par l'introduction du modèle flou T–S en temps continu et discret. Ensuite, une conception de commande floue basée sur le concept de "compensation parallèle distribuée" est décrite pour une classe des systèmes non linéaires capable d'assurer la stabilité. Ce chapitre examine aussi la stabilisation d'une classe des systèmes flous bi-dimensionnels T–S en temps discret pour le modèle de Roesser sous forme d'LMI et présente le modèle et la commande polynomiale floue T–S (qui sont une représentation plus générale du modèle et de la commande floue T–S). De surcroît, les conditions de conception de la commande floue basée sur la fonction polynomiale de Lyapunov (qui contient la fonction quadratique de Lyapunov en tant que cas particulier) sont dérivées. Par conséquent, l'approche de conception proposée pourrait être plus générale que les approches de conception d'LMI existantes basées sur la fonction quadratique de Lyapunov. Enfin, nous présentons quelques Définitions et Lemmes utiles pour les différents chapitres de cette thèse.

1.2 Stabilité des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

1.2.1 Système 1-D non linéaire

Dans cette section, nous rappelons la représentations du modèle flou T–S et l'analyse de stabilité associée basée sur la fonction quadratique de Lyapunov [Tanaka 2004]. Le modèle flou Takagi-Sugeno a été utilisé avec succès pour approximer les systèmes non linéaires par l'interpolation de nombreux modèles linéaires locaux par des règles floues de type « SI-ALORS » [Takagi 1985]. En conséquence, la théorie conventionnelle des systèmes linéaires peut être appliquée à l'analyse et à la synthèse d'une commande floue pour les systèmes non linéaires. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\nabla x(t) = f(x(t), u(t)) \tag{1.1}$$

Où ∇ représente un opérateur. Pour les systèmes flous en temps continu $\nabla x(t)$ signifie $\dot{x}(t)$ et pour les systèmes flous en temps discret $\nabla x(t)$ représente $x(t+1)$. f est une fonction non linéaire. $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état et $u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t), \ldots, u_m(t)]^T$ est le vecteur d'entrée.

1.2.1.1 Le modèle T–S flou

En se basant sur le concept du secteur non linéaire [Tanaka 2004], nous pouvons représenter exactement (1.1) par le modèle flou T–S suivant.

Règle du système i : SI $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et ... et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}

$$ALORS \quad \nabla x(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, , \ldots, r \tag{1.2}$$

où $\varsigma_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ sont les variables de prémisses. La fonction d'appartenance associée à la règle de modèle $i-$ème et au composant variable prémisse $j-$ème est désignée par M_{ij}, r indique le nombre des règles Si-Alors. Chaque $\varsigma_j(t)$ est une quantité variant dans le temps qui peut être un état et/ou une variable externe. A_i et B_i sont des matrices constantes avec des dimensions appropriées.

Le système flou (1.2) peut être déduit comme suit :

$$\nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\} \tag{1.3}$$

$$\varsigma(t) = [\varsigma_1(t) \ldots \varsigma_p(t)]$$

et

$$w_i(\varsigma(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(\varsigma_j(t))$$

Nous constatons que :

$$\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(t)) > 0, \quad w_i(\varsigma(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots r$$

Par conséquent

$$h_i(\varsigma(t)) = \frac{w_i(\varsigma(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(t))} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t)) = 1$$

1.2.1.2 Fonction quadratique de Lyapunov

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$x^T(t)Px(t), \quad P = P^T > 0 \tag{1.4}$$

En utilisant la fonction quadratique de Lyapunov (1.4), les conditions de stabilité du système en boucle ouverte (1.3) avec $u(t) = 0$ sont obtenues sous la forme (1.5) et (1.6) pour les systèmes flous T–S en temps continu et discret, respectivement.

$$A_i^T P + PA_i < 0 \tag{1.5}$$

$$A_i^T PA_i - P < 0 \tag{1.6}$$

Les conditions (1.5) et (1.6) sont représentées sous forme d'LMI. Ainsi, les conditions de stabilité peuvent être résolues numériquement par l'utilisation de "LMI-Toolbox".

1.2.1.3 Loi de commande PDC (Parallel distributed compensation) sous forme d'LMI

La Compensation Parallèle Distribuée (PDC) [Tanaka 2004] offre une procédure permettant de synthétiser une loi de commande floue à partir du modèle flou T–S (1.3).

Règle de la commande i : Si $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et,. . . ,et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}

$$ALORS \quad u(t) = F_i x(t), \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.7}$$

où F_i sont les matrices de gains de la commande de dimensions appropriées à synthétiser.

La commande floue globale peut être exprimée par

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))F_i x(t) \tag{1.8}$$

En substituant la loi de commande (1.8) dans (1.3), le système en boucle fermée (1.3) est présenté par

$$\nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(t))h_j(\varsigma(t))\{A_i + B_i F_j\}x(t) \tag{1.9}$$

Dans cette section, nous présenterons les conditions de stabilisation de base, pour les systèmes flous en temps continu et pour les systèmes flous en temps discret dans les Théorèmes 1.1 et 1.2, respectivement. Dans la discussion qui suit, l'origine $x = 0$ est supposée être le seul point d'équilibre du système flou.

Théorème 1.1 *[Kim 2000] Le système flou en temps continu* (1.9) *est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices* $Q > 0$, N_i, $i = 1, \ldots, r$ *et* Z_{ij} , $i, j = 1, 2, .., r$ *telles*

que

$$QA_i^T + A_iQ + N_i^T B_i^T + B_iN_i \leq Z_{ii}, \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.10}$$

$$QA_i^T + A_iQ + QA_j^T + A_jQ + N_j^T B_i^T + B_iN_j + N_i^T B_j^T + B_jN_i \leq 2Z_{ij} \quad i = 1, \ldots, r-1 \quad j = i+1, \ldots, r \tag{1.11}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1r} \\ Z_{12} & Z_{22} & \cdots & Z_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{1r} & Z_{2r} & \cdots & Z_{rr} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.12}$$

les gains de la commande floue sont : $F_i = N_iQ^{-1}$, pour $i = 1, \ldots, r$

Théorème 1.2 *[Kim 2000] Le système flou en temps discret (1.9) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $Q > 0$, N_i, $i = 1, \ldots, r$ et Z_{ij}, $i, j = 1, 2, .., r$ telles que*

$$\begin{bmatrix} -Q - Z_{ii} & QA_i^T + N_i^T B_i^T \\ * & -Q \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.13}$$

$$\begin{bmatrix} -2Q - 2Z_{ii} & QA_i^T + QA_j^T + N_i^T B_j^T + N_j^T B_i^T \\ * & -2Q \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r-1 \quad j = i+1, \ldots, r \tag{1.14}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1r} \\ Z_{12} & Z_{22} & \cdots & Z_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{1r} & Z_{2r} & \cdots & Z_{rr} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.15}$$

Les gains de la commande floue sont donnés par : $F_i = N_iQ^{-1}$, $i = 1, \ldots, r$

1.2.2 La commande robuste H_∞ par retour de sortie statique des systèmes flous T-S

Les lois de la commande présentées ci-dessus sont basées sur la disponibilité complète des variables d'état du système. Par conséquent, si l'état du système n'est pas entièrement disponible, il est possible de synthétiser une commande par retour de sortie (statique ou dynamique). Au cours des deux dernières décennies, le problème de la commande par SOF a attiré l'attention de plusieurs chercheurs [Chang 2003, Kau 2007, Jeung 2014, Zhong 2017]. De plus, dans les applications du monde réel, de nombreux systèmes non linéaires comportent des incertitudes paramétriques. Par conséquent, le

modèle flou avec des incertitudes paramétriques peut être utilisé pour représenter le système non linéaire incertain. Dans cette section, nous présentons les conditions de stabilité d'une loi de commande par SOF, pour un système flou T-S continu et discret.

Considérons le modèle flou T-S suivant avec des incertitudes paramétriques :
Règle floue i : SI $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et ... et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}

$$Alors \begin{cases} \nabla x(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))\omega(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))u(t) \\ z(t) = (C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_{1i} + \Delta D_{1i}(t))\omega(t) + (D_{2i} + \Delta D_{2i}(t))u(t) \\ y(t) = C_{yi}x(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, le vecteur $\omega(t) \in \mathbb{R}^{m_\omega}$ est une perturbation, le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^{m_u}$ est la commande, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie commandée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie mesuré. A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_{2i}, C_{yi} et D_{1i}, sont des matrices réelles constantes décrivant le système nominal et $\Delta A_i(t)$, $\Delta B_{1i}(t)$, $\Delta B_{2i}(t)$, $\Delta C_i(t)$, $\Delta D_{1i}(t)$, $\Delta D_{2i}(t)$, sont des matrices variantes dans le temps qui représentent des incertitudes paramétriques ou des erreurs de modélisation. Les incertitudes examinées dans le présent chapitre sont liées à la norme et décrites par

$$\begin{aligned} \Delta A_i(t) &= H_x F_\Delta(t) E_{x1i}, \quad \Delta C_i(t) = H_z F_\Delta(t) E_{z1i} \\ \Delta B_{1i}(t) &= H_x F_\Delta(t) E_{x2i}, \quad \Delta D_{1i}(t) = H_z F_\Delta(t) E_{z2i} \\ \Delta B_{2i}(t) &= H_x F_\Delta(t) E_{x3i}, \quad \Delta D_{2i}(t) = H_z F_\Delta(t) E_{z3i} \end{aligned} \quad (1.17)$$

où H_x, H_z, E_{x1i}, E_{x2i}, E_{x3i}, E_{z1i}, E_{z2i} et E_{z3i}, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $F_\Delta(t)$ est la fonction matricielle non linéaire variante dans le temps et satisfait $F_\Delta^T(t)F_\Delta(t) \leq I$. Étant donné une paire de $(x(t), u(t))$, le système flou est déduit comme suit :

$$\begin{cases} \nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))\omega(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))u(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[(C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_{1i} + \Delta D_{1i}(t))\omega(t) + (D_{2i} + \Delta D_{2i}(t))u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))C_{yi}x(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour le modèle flou T–S incertain représenté sous la forme (1.18), nous définissons les performances robustes H_∞ comme suit :

Définition 1.1 *[Kau 2007] Étant donné un nombre réel $\gamma > 0$, le système flou T–S incertain (1.18) est robustement stable avec une atténuation de perturbation γ si pour*

tout $\omega(t) \in L_2\ (0, \infty, \mathbb{R}^{m_\omega})$*, le système* (1.18) *est stable et la réponse* $z(t)$*, avec des conditions initiale nulle, satisfait l'équation suivante :*

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt \tag{1.19}$$

pour le système en temps continu et

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^T(t)z(t) < \gamma^2 \sum_{t=0}^{\infty} \omega^T(t)\omega(t) \tag{1.20}$$

pour le système en temps discret.

Supposons que la commande floue par SOF ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))F_i y(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(t))h_j(\varsigma(t))F_i C_{yj} x(t) \end{aligned} \tag{1.21}$$

où F_i sont les gains de la commande à déterminer.
En substituant (1.21) à (1.18), le système flou en boucle fermée peut être représenté par

$$\begin{cases} \nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \{[A_i + \Delta A_i(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i}(t))F_j C_{yl}]x(t) \\ \qquad + (B_{1i} + \Delta B_{1i}(t))\omega(t)\} \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \{[C_i + \Delta C_i(t) + (D_{2i} + \Delta D_{2i}(t))F_j C_{yl}]x(t) \\ \qquad + (D_{1i} + \Delta D_{1i}(t))\omega(t)\} \end{cases} \tag{1.22}$$

L'objectif est de concevoir $F_i, i = 1, 2, \ldots, r$ tel que le système flou en boucle fermée (1.22) soit robustement stable avec γ l'atténuation des perturbations. Pour trouver les lois de commandes, les lemmes suivants sont nécessaires.

Lemme 1.1 *[Kau 2007] Le système en temps continu* (1.22) *est robustement stable avec une atténuation* γ *s'il existe* $P > 0$ *et* F_j*,* $j = 1, 2, \ldots, r$ *tel que,*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \begin{bmatrix} sym\{((A_i + \Delta A_i) + (B_{2i} + \Delta B_{2i})F_j C_{yl})P\} & * & * \\ (B_{1i}^T + \Delta B_{1i}^T) & -\gamma^2 I & * \\ ((C_i + D_{2i}F_j C_{yl}) + (\Delta C_i + \Delta D_{2i}F_j C_{yl}))P & (D_{1i} + \Delta D_{1i}) & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.23}$$

Lemme 1.2 *[Kau 2007] Le système en temps discret (1.22) est robustement stable avec l'atténuation γ s'il existe $P > 0$ et F_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \begin{bmatrix} -P & * & * & * \\ 0 & -\gamma I & * & * \\ ((A_i + \Delta A_i) + (B_{2i} + \Delta B_{2i})F_j C_{yl})P & (B_{1i} + \Delta B_{1i}) & -P & * \\ ((C_i + D_{2i}F_j C_{yl}) + (\Delta C_i + \Delta D_{2i}F_j C_{yl}))P & (D_{1i} + \Delta D_{1i}) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.24}$$

Dans cette partie, un ensemble des conditions LMI est dérivé pour la conception de la commande floue par SOF.

Théorème 1.3 *[Kau 2007] Le système flou continu (1.22) est robustement stable avec l'atténuation γ s'il existe des matrices $P > 0$; N_i, $i = 1, 2, \ldots, r$; Y_{iii}, $i = 1, 2, \ldots, r$; $Y_{jii} = Y_{iij}^T$, Y_{iji}, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, r$; $Y_{ijl} = Y_{lji}^T$, $Y_{ilj} = Y_{jli}^T$, $Y_{jil} = Y_{lij}^T$, $i = 1, 2, \ldots, r-2$, $j = i+1, \ldots, r-1$, $l = j+1, \ldots, r$, ε_{ijl}^x, ε_{ijl}^z, $i, j, l = 1, 2, \ldots r$ et une matrice non singulière M telles que*

$$\psi_{Ciii} \leq Y_{iii}, \quad i = 1, 2, \ldots r \tag{1.25}$$

$$\psi_{Ciij} + \psi_{Ciji} + \psi_{Cjii} \leq Y_{iij} + Y_{iji} + Y_{iij}^T, \quad i, j = 1, 2, \ldots r, \ i \neq j \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} \psi_{Cijl} + \psi_{Cilj} + \psi_{Cjil} + \psi_{Cjli} + \psi_{Clij} + \psi_{Clji} \leq Y_{ijl} + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + \\ Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T \quad i = 1, 2, \ldots r-2, \quad j = i+1, 2, \ldots r-1, \quad l = j+1, 2, \ldots r, \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1i1} & Y_{1i2} & \cdots & Y_{1ir} \\ Y_{2i1} & Y_{2i2} & \cdots & Y_{2ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{ri1} & Y_{ri2} & \cdots & Y_{rir} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.28}$$

$$MC_{yj} = C_{yj}P, \quad j = 1, 2, \ldots r \tag{1.29}$$

où

$$\psi_{Cijl} = \begin{bmatrix} sym\{A_iP + B_{2i}N_jC_{yl}\} & * & * & * & * & * & * \\ B_{1i}^T & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ C_iP + D_{2i}N_jC_{yl} & D_{1i} & -I & * & * & * & * \\ \varepsilon_{ijl}^x H_x^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^x I & * & * & * \\ E_{x1i}P + E_{x3i}N_jC_{yl} & E_{x2i} & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^x I & * & * \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ijl}^z H_z^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^z I & * \\ E_{z1i}P + E_{z3i}N_jC_{yl} & E_{z2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^z I \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Dans ce cas, les gains de la commande floue par SOF peuvent être choisis comme $F_j = N_jM^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Théorème 1.4 *[Kau 2007] Le système en temps discret (1.22) est robustement stable avec une atténuation γ s'il existe des matrices $P > 0$; N_i, $i = 1,2,\ldots,r$, Y_{iii}, $i = 1,2,\ldots,r$, $Y_{jii} = Y_{iij}^T$, Y_{iji}, $i = 1,2,\ldots,r$, $j \neq i$, $j = 1,2,\ldots,r$, $Y_{ijl} = Y_{lji}^T$, $Y_{ilj} = Y_{jli}^T$, $Y_{jil} = Y_{lij}^T$, $i = 1,2,\ldots,r-2$, $j = i+1,\ldots,r-1$, $l = j+1,\ldots,r$, ε_{ijl}^x, ε_{ijl}^z, $i,j,l = 1,2,\ldots r$ et une matrice non singulière M telles que*

$$\Lambda_{Diii} \leq Y_{iii}, \quad i = 1,2,\ldots r \tag{1.31}$$

$$\Lambda_{Diij} + \Lambda_{Diji} + \Lambda_{Djii} \leq Y_{iij} + Y_{iji} + Y_{iij}^T, \quad i,j = 1,2,\ldots r, \ i \neq j \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{Dijl}+\Lambda_{Dilj} + \Lambda_{Djil} + \Lambda_{Djli} + \Lambda_{Dlij} + \Lambda_{Dlji} \leq Y_{ijl} \\ + Y_{ilj} + Y_{jil} + Y_{ijl}^T + Y_{ilj}^T + Y_{jil}^T, \\ i = 1,2,\ldots r-2, \quad j = i+1,2,\ldots r-1, \quad l = j+1,2,\ldots r, \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1i1} & Y_{1i2} & \cdots & Y_{1ir} \\ Y_{2i1} & Y_{2i2} & \cdots & Y_{2ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{ri1} & Y_{ri2} & \cdots & Y_{rir} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.34}$$

$$MC_{yj} = C_{yj}P, \quad j = 1,2,\ldots r \tag{1.35}$$

où

$$\Lambda_{Dijl} = \begin{bmatrix} -P & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * \\ A_iP + B_{2i}N_jC_{yl} & B_{1i} & -P & * & * & * & * & * \\ C_iP + D_{2i}N_jC_{yl} & D_{1i} & 0 & -I & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ijl}^x H_x^T & 0 & -\varepsilon_{ijl}^x I & * & * & * \\ E_{x1i}P + E_{x3i}N_jC_{yl} & E_{x2i} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^x I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{ijl}^z H_z^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^z I & * \\ E_{z1i}P + E_{z3i}N_jC_{yl} & E_{z2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ijl}^z I \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Les gains de la commande floue par SOF peuvent être choisis comme suit : $F_j = N_jM^{-1}$

1.2.3 La commande H_∞ pour les systèmes flous T-S en temps continu dans le domaine des fréquences finies

Notons que toutes les références citées précédemment traitent le problèmes de conception de la commande floue dans le domaine de fréquence entière, alors que pour certains systèmes pratiques, les gammes de fréquences d'entrée sont connues à l'avance. Ainsi, il est nécessaire que les problèmes de conception de la commande soient conçus dans

le domaine de fréquence finie [Iwasaki 2005]. Dans cette section, la commande H_∞ par retour d'état à fréquence finie est conçue pour les systèmes flous T-S, qui atténue plus efficacement les perturbations à fréquence finie. À l'aide du lemme GKYP, le problème de conception est converti en un problème d'optimisation avec un ensemble de contraintes d'LMI.

Considérons un système non linéaire en temps continu décrit par le modèle suivant :

Règle i : SI $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et ... et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}
Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}(t))u(t) \\ z(t) &= C_i x(t) + D_{1i}\omega(t) + D_{2i}u(t) \end{aligned} \tag{1.37}$$

où $i = 1; \ldots, r$; r est le nombre de règles floues, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de la commande, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie commandée, $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ est une entrée de perturbation, A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_{1i} et D_{2i} sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

En utilisant la méthode d'inférence floue, le modèle global dynamique est représenté comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}(t))u(t)] \\ z(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[C_i x(t) + D_{1i}\omega(t) + D_{2i}u(t)] \end{aligned} \tag{1.38}$$

Nous considérons la commande floue par retour d'état (1.8).

En substituant (1.8) dans (1.38), nous pouvons obtenir le système flou en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(t))h_j(\varsigma(t))[(A_i + B_{2i}F_j)x(t) + B_{1i}\omega(t)] \\ z(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(t))h_j(\varsigma(t))[(C_i + D_{2i}F_j)x(t) + D_{1i}\omega(t)] \end{aligned} \tag{1.39}$$

En pratique, de nombreux problèmes de réduction de modèles dépendent intrinsèquement de la fréquence, c'est-à-dire que la précision requise pour l'approximation sur certaines gammes de fréquences est plus importante que d'autres. Il sera plus compatible de concevoir des commandes selon des spécifications de fréquence finie plutôt que des spécifications de fréquence entière, ce qui motive l'approche à fréquence finie proposée dans cette section.

Les deux lemmes suivants sont essentiels pour les développements des systèmes

continus en fréquence finie.

Lemme 1.3 *(Lemme généralisé de KYP [Iwasaki 2005]) Considérons la matrice de la fonction de transfert $G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$, les relations suivantes sont équivalentes : (1) L'inégalité du domaine de fréquence finie.*

$$\begin{bmatrix} G(j\bar{\omega}) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G(j\bar{\omega}) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \bar{\omega} \in \Omega \tag{1.40}$$

où Ω est défini dans le Tableau 1.1 et Π est une matrice symétrique de dimension appropriée.

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

(2) Il existe des matrices $P = P^*$ et $Q = Q^* > 0$, telles que

$$\begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} A & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} B & 0 \\ D & I \end{bmatrix}^* < 0 \tag{1.41}$$

où Σ est considéré dans le tableau 1.1.

Tableau 1.1 – Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences.

gamme de fréquence Ω	basse fréquence BF $\lvert\bar{\omega}\rvert \le \bar{\omega}_l$	moyenne fréquence MF $\bar{\omega}_1 \le \bar{\omega} \le \bar{\omega}_2$	haute fréquence HF $\bar{\omega}_h \le \lvert\bar{\omega}\rvert$
$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \bar{\omega}_l^2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Q & j\bar{\omega}_c Q + P \\ -j\bar{\omega}_c Q + P & -\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\bar{\omega}_h^2 Q \end{bmatrix}$

avec $\bar{\omega}_c = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)/2$.

Le théorème suivant fournit les conditions d'inégalité pour la commande H_∞ par retour d'état dans le domaine des fréquences finies.

Théorème 1.5 *[Wang 2013] Considérons le système (1.39), étant donné un scalaire positif $\bar{\omega}_l$ avec $G_{zd}(i\bar{\omega})$ est la matrice de la fonction de transfert de la perturbation $\omega(t)$ à la sortie commandée $z(t)$ du système en boucle fermée du modèle flou T-S, la condition d'inégalité*

$$\Sigma_{max}(G_{zd}(i\bar{\omega})) < \gamma, \quad \forall |\bar{\omega}| \le \bar{\omega}_l \tag{1.42}$$

est satisfaite s'il existe des variables matricielles $P_i = P_i^T$, $Q_i = Q_i^T > 0$, W_j, Y_j, V_{1j}, V_{2j}, V_{3j}, V_{4j}, X_j $1 \le i \le j \le r$ de dimensions appropriées, telles que

$$\Psi_{ii} < 0, \quad 1 \le i \le r \tag{1.43}$$

$$\frac{1}{r-1}\Psi_{ii} + \frac{1}{2}(\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) < 0, \quad 1 \le i \ne j \le r \tag{1.44}$$

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad 1 \leq i \leq r \tag{1.45}$$

$$\frac{1}{r-1}\Gamma_{ii} + \frac{1}{2}(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \tag{1.46}$$

où Ψ_{ij}, Γ_{ij} *sont*

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} -Q_i & * & * & * \\ V_{1j} & I + V_{2j} + V_{2j}^T & * & * \\ \Psi_{31ij} & V_{3j}^T - B_{1i}V_{2j} & \Psi_{33ij} & * \\ -D_{1i}V_{1j} & V_{4j}^T - D_{1i}V_{2j} & -\Psi_{43ij} & \Psi_{44ij} \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} -W_j - W_j^T & * & * \\ A_iW_j + B_{2i}Y_j + X_j & -X_j & * \\ W_j & 0 & -X_j \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{31ij} &= P_i - B_{1i}V_{1j} + W_j^T \\ \Psi_{33ij} &= \bar{\omega}_i^2 Q_i - A_iW_j - B_{1i}V_{3j} - (A_iW_j + B_{1i}V_{3j})^T \\ &\quad - B_{2i}Y_j - (B_{2i}Y_j)^T \\ \Psi_{43ij} &= C_iW_j + D_{1j}V_{3j} + (B_{1i}V_{4j})^T + D_{2i}Y_j \\ \Psi_{44ij} &= -\gamma^2 I - D_{1i}V_{4j} - (D_{1i}V_{4j})^T \end{aligned} \tag{1.49}$$

Remarque 1.1 *Le Théorème 1.5 présente une approche de conception de la commande* H_∞ *à fréquence finie, qui peut réduire le conservatisme introduit par les approches à fréquence entière lorsque les gammes de fréquences sont connues.*

1.2.4 Système flou T–S à deux dimensions en temps discret

Afin de traiter les systèmes 2–D, il est nécessaire de disposer des modèles qui les représentent sous une forme mathématique compacte. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur des représentations basées sur ce qu'on appelle Roesser, car ce modèle est probablement le plus fréquemment utilisé pour représenter les systèmes à deux dimensions, puisqu'il apparaît naturellement dans de nombreux problèmes pratiques, notamment dans les circuits itératifs linéaires et le traitement d'images. La caractéristique principale de ce modèle d'espace des états est que le vecteur d'état est décomposé en deux composantes, appelées horizontales et verticales et notées respectivement x^h et x^v. Plus précisément, les informations des systèmes à deux dimensions (2–D) se propagent dans deux directions indépendantes. Un modèle 2–D flou est établi en connectant le modèle linéaire local à partir des deux directions.

Considérons un système 2–D non linéaire en temps discret de type Roesser décrit par

$$x^+(s,l) = \mathcal{Z}(x(s,l)) + \mathcal{S}(x(s,l))u(s,l) \tag{1.50}$$

$$x^h(0,l) = f(l), \qquad x^v(s,0) = g(s) \tag{1.51}$$

avec

$$x(s,l) = \begin{bmatrix} x^h(s,l) \\ x^v(s,l) \end{bmatrix}, x^+(s,l) = \begin{bmatrix} x^h(s+1,l) \\ x^v(s,l+1) \end{bmatrix},$$

où $x^h(.) \in \mathbb{R}^{n_1}$ correspond au vecteur d'état dans la direction horizontale, $x^v(.) \in \mathbb{R}^{n_2}$ correspond au vecteur d'état dans la direction verticale, $u(.) \in \mathbb{R}^m$ est la commande. $\mathcal{Z}(.)$ et $\mathcal{S}(.)$ sont des fonctions non linéaires satisfaisant $\mathcal{Z}, \mathcal{S} \in \mathbb{C}$. s, l sont deux entiers dans $\mathbb{Z}$. $f(l)$ et $g(s)$ sont les conditions aux limites correspondantes le long des deux directions indépendantes.

En étendant la méthode de modélisation floue pour les systèmes 1-D [Takagi 1985] au cas des systèmes 2–D, nous pouvons obtenir un modèle 2–D flou en temps discret décrit par les règles suivantes

SI $\varsigma_1(s,l)$ EST M_{i1} ET, ... ET $\varsigma_p(s,l)$ EST M_{ip}
ALORS

$$x^+(s,l) = A_i x(s,l) + B_i u(s,l), \quad i = 1,2,\dots r \tag{1.52}$$

$$x^h(0,l) = f(l), \qquad x^v(s,0) = g(s)$$

avec

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_1^i \\ B_2^i \end{bmatrix}$$

où, M_{is} sont les ensembles flous, $\varsigma_p(s,l)$, pour $p = 1,\dots,s$, sont les variables de base, r est le nombre des règles floues SI-ALORS, A_i, B_i sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Le système flou peut être exprimé comme suit :

$$x^+(s,l) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(s,l))\{A_i x(s,l) + B_i u(s,l)\} \tag{1.53}$$

Où

$$h_i(\varsigma(s,l)) = \frac{w_i(\varsigma(s,l))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(s,l))}, \; w_i(\varsigma(s,l)) = \prod_{j=1}^{s} M_{ij}(\varsigma(s,l))$$

Il est facile de voir que $h(\varsigma(s,l)) = [h_1(\varsigma(s,l)) \dots h_r(\varsigma(s,l))]^T$ appartient à $h_i(\varsigma(s,l)) \geq$

0, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(s,l)) = 1$.

On peut étendre directement la loi de commande (PDC) utilisée pour les systèmes flous 1–D au cas des systèmes à deux dimensions. Ainsi, la loi de commande pour les systèmes 2–D est donnée sous la forme suivante :

$$u(s,l) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(s,l)) F_i x(s,l) \tag{1.54}$$

avec F_i sont les gains de la commande telle que

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1^i & F_2^i \end{bmatrix}$$

Le système en boucle fermée est donné par

$$x^+(s,l) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(s,l)) h_j(\varsigma(s,l)) \{A_i + B_i F_j\} x(s,l) \tag{1.55}$$

Définition 1.2 *[Xie 2010b] Le système flou 2–D en temps discret (1.55) est asymptotiquement stable si* $\lim_{r\to\infty} \sup\{\| x(s,l) \| : r = s + l\} = 0$ *avec les conditions initiales et les conditions aux limites (1.51).*

Théorème 1.6 *[Hmamed 2009] Le système flou (1.55) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive* $P \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$ *tel que,*

$$\begin{bmatrix} P & (A_i + B_i F_j)^T P \\ * & P \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r \tag{1.56}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

Afin de construire la commande de stabilisation et la matrice de Lyapunov $P > 0$, le résultat suivant peut être dérivé sous forme d'LMI.

Théorème 1.7 *[Hmamed 2009] Le système flou 2-D (1.55) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices définies positives* $X_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $Y_1^j \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ *et* $Y_2^j \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$ *tel que*

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & (A_{11}^i X_1 + B_1^i Y_1^j)^T & (A_{21}^i X_1 + B_2^i Y_1^j)^T \\ * & X_2 & (A_{11}^i X_2 + B_1^i Y_2^j)^T & (A_{22}^i X_2 + B_2^i Y_2^j)^T \\ * & * & X_1 & 0 \\ * & * & * & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r \tag{1.58}$$

Les gains sont donné par :

$$F_i = \begin{bmatrix} Y_1^i X_1^{-1} & Y_2^i X_2^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

En général, la fonction quadratique de Lyapunov est généralement utilisée pour dériver les conditions de stabilité des lois de commande de type PDC. De plus, les conditions présentées dans cette section peuvent être formulées sous forme d'LMI et pouvant être résolues par l'utilisation du «LMI-TOOLBOX». Cependant, les conditions de stabilité développées à partir de la fonction quadratique de Lyapunov sont assez restrictives. D'autre part, la stabilité [Tanaka 2007] et les conditions de stabilisation [Tanaka 2009] pour les systèmes polynomiaux flous sont difficiles à résoudre directement par les solveurs LMI, mais ils peuvent être résolus par SOSTOOLS. Le système polynomial flou sera étudié dans la section suivante.

1.3 La somme des carrés (SOS)

La méthode étudiée dans cette section repose sur la somme des carrés (SOS). Nous donnons tout d'abord une description de cette approche et nous fournissons quelques définitions et propositions.

1.3.1 Définitions des fonctions polynomiales

Définition 1.3 *[Jarvis-Wloszek 2003] (Monôme) un monôme m_α dans n est une fonction définie comme $m_\alpha(x) = x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Le degré d'un monôme est défini comme,* $\deg m_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Définition 1.4 *[Jarvis-Wloszek 2003] (Polynômes) : Un polynôme f est une combinaison linéaire finie de monômes. $f := \sum_\alpha c_\alpha m_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$*

Avec $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Définissons $\mathbb{R}_n$ comme étant l'ensemble de tous les polynômes. Le degré de f est défini comme $\deg f := \max_\alpha \deg m_\alpha$ (à condition que le c_α associé soit différent de zéro). De plus, nous définissons $\sum_n$ comme étant l'ensemble des polynômes de la somme des carrés (SOS) dans les variables n.

$$\sum_n := \{p \in \mathbb{R}_n | p = \sum_{i=1}^t f_i^2 \quad f_i \in \mathbb{R}_n, i = 1, .., t\} \tag{1.60}$$

1.3.2 Définition de la SOS

La méthode de calcul utilisée dans cette section repose sur la décomposition par la SOS de plusieurs variables polynomiales. Une fonction polynomial multivarié $f(x(t))$ (où $x(t) \in \mathbb{R}^n$) est une SOS s'il existe des fonctions polynomiales $f_1(x(t)),\ldots, f_n(x(t))$

tels que $f(x(t)) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x(t))$. Il est clair que $f(x(t))$ étant une SOS implique naturellement $f(x(t)) > 0$ pour tout $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Cela peut être montré comme équivalent à l'existence d'une forme quadrique spéciale indiquée dans la proposition suivante [Prajna 2004b].

Proposition 1 *[Prajna 2004b] Soit $F(x)$ $N \times N$ une matrice polynomiale symétrique de degré $2d$ dans $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, supposons que $Z(x)$ est un vecteur colonne, dont les entrées sont des monômes dans x avec un degré non supérieur à d et considérons les conditions suivantes :*
1) $F(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2) $v^T F(x)v$ est une SOS, où v est un vecteur $v \in \mathbb{R}^N$.
3) Il existe une matrice semi-définie positive Q telle que $v^T F(x)v = (v \otimes Z(x))^T Q(v \otimes Z(x))$, avec $\otimes$ indiquant le produit Kronecker.
puis (1) $\Leftarrow$ (2) *et* (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Proposition 2 *[Parrilo 2000] : Soit $f(x(t))$ une fonction polynomial dans $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de degré $2d$. Supposons que $\tilde{x}(x(t))$ est un vecteur de colonne dont les entrées sont des monômes dans $x(t)$ avec un degré non supérieur à d. Alors, $f(x(t))$ est une SOS s'il existe une matrice semi-définie positive P telle que*

$$f(x(t)) = \tilde{x}^T(x(t))P\tilde{x}(x(t)) \tag{1.61}$$

Rappelons qu'un monôme dans $x(t)$ est une fonction de la forme $x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, où α_1, α_2, ..., α_n, sont des entiers non négatifs. Dans ce cas, le degré du monôme est donné par $\alpha_1 + \alpha_2 +, \ldots, +\alpha_n$.

La décomposition de la SOS pour $f(x(t))$ peut être calculée à l'aide de la programmation semi-définie, puisqu'elle revient à rechercher un élément P à l'intersection du cône des matrices semi-définies positives et à un ensemble défini par certaines contraintes découlant de (1.61). Notons, en particulier, que la fonction polynomiale $f(x(t))$ est globalement non négative s'il peut être décomposé en tant que SOS. Par conséquent, la décomposition de la SOS en conjonction avec la programmation semi-définie fournit une relaxation de calcul polynomial qui prouve la non négativité globale des polynômes multivariés [Parrilo 2000], [Shor 1987], qui appartient à la classe des problèmes difficiles à résoudre. Même si la condition de la SOS n'est pas nécessaire pour la non négativité, des expériences numériques semblent indiquer que l'écart entre la SOS et la non négativité est faible [Prajna 2004b].

1.4 Modèle polynomial flou et la fonction polynomiale de Lyapunov

Le modèle flou T-S et l'analyse de stabilité basée sur la fonction quadratique de Lyapunov ont été brièvement rappelé dans la section 1.2. Dans cette section, nous introduisons un nouveau type de modèle flou avec une conséquence de règle polynomiale, c'est-à-dire un modèle flou dont les parties résultantes sont représentées par des polynômes. Ensuite, nous montrerons que les conditions de stabilité pour les systèmes polynomiaux flous basés sur la fonction polynomiale de Lyapunov peuvent être réduites à des problèmes de la SOS. Par conséquent, au lieu d'utiliser l'LMI-TOOLBOX, ces problèmes peuvent être résolus via SOSTOOLS [Prajna 2004a].

1.4.1 Modèle polynomial flou T-S

Dans cette section, nous proposons un modèle polynomial flou en temps continu et discret. En utilisant l'approche de secteurs non linéaires, nous introduisons un modèle polynomial flou pour représenter exactement le système non linéaire (1.1). La différence entre le système (1.2) et le système polynomial flou (1.62) est la représentation partielle. Le modèle flou de (1.2) a une conséquence sur le modèle linéaire, alors que le modèle polynomial flou proposé a une conséquence sur un modèle polynomial, comme indiqué ci-après.

Règle floue i : SI $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et,...,et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}

$$ALORS \quad \nabla x(t) = A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t), \quad i = 1, 2, , \ldots, r \tag{1.62}$$

Où $A_i(x(t))$ et $B_i(x(t))$ sont des matrices polynomiales dans $x(t)$. Le terme $\tilde{x}(x(t))$ désigne un vecteur de colonne dont les entrées sont des monômes dans $x(t)$. C'est-à-dire que $\tilde{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur de $N \times 1$ monômes dans $x(t)$. Un monôme dans $x(t)$ est une fonction de la forme $x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2} \ldots x_N^{\alpha_N}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ est un entier non négatif. Par conséquent, $A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ est un vecteur polynomial. Ainsi, le modèle polynomial flou (1.62) à un polynôme dans chaque partie conséquente. Nous considérons $T(\tilde{x}(x(t))) \in \mathbb{R}^{N\times m}$ qui est une matrice polynomiale définie par $\tilde{x}(x(t)) = T(\tilde{x}(t))x(t)$. Les détails de $\tilde{x}(x(t))$ ont été donnés dans la Proposition 2.

Nous supposons que

$$\tilde{x}(x(t)) = 0 \quad si \quad x(t) = 0$$

tout au long de cette section.

Le processus de défuzzification du modèle (1.62) peut être représenté par

$$\nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))\{A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)\} \tag{1.63}$$

Ainsi, le modèle flou global est obtenu par une fusion floue des modèles du système polynomial.

Si $\tilde{x}(x(t)) = x(t)$, $A_i(x(t))$ et $B_i(x(t))$ sont des matrices constantes pour tous i, alors $A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)$ se réduit à $A_i x(t) + B_i u(t)$, c'est-à-dire que (1.63) se réduit à (1.3). Donc, (1.63) est une représentation plus générale.

1.4.2 La fonction polynomiale de Lyapunov

Pour obtenir des résultats de stabilité plus restrictifs, nous utilisons une fonction polynomiale de Lyapunov représentée par

$$\tilde{x}^T(x(t))P(\hat{x}(t))\tilde{x}(x(t)), \quad P(\hat{x}(t)) = P^T(\hat{x}(t)) > 0 \tag{1.64}$$

Où $P(\hat{x}(t))$ est une matrice définie positive dans $\tilde{x}(t)$. Les conditions de stabilité du système en boucle ouverte (1.63) avec $u(t) = 0$ sont obtenues sous forme (1.65) et (1.66) pour des systèmes polynomiaux flous en temps continu et discret respectivement.

$$A_i^T(x(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A_i(x(t)) + \dot{P}(\hat{x}(t)) < 0 \tag{1.65}$$

$$A_i^T(x(t))P(\hat{x}^+(t))A_i(x(t)) - P(\hat{x}(t)) < 0 \tag{1.66}$$

Si $\tilde{x}(x(t)) = x(t)$, $P(\hat{x}(t))$ est une matrice constante, alors (1.64) se réduit à la fonction quadratique de Lyapunov (1.4). De plus, (1.65) et (1.66), se réduisent à (1.5) et (1.6) respectivement. Par conséquent, (1.64) est une représentation plus générale.

1.4.3 La commande polynomiale floue

Puisque le PDC reflète la structure du modèle flou d'un système non linaire, une loi de commande floue avec une conséquence de règle polynomiale peut être construite à partir du modèle polynomial flou donné par (1.62).

Règle de la commande i : Si $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et,...,et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip}

$$ALORS \quad u(t) = F_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) \tag{1.67}$$

La commande floue globale peut être calculée par

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))F_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) \tag{1.68}$$

Avec $F_i(x(t))$ sont les gains de la commande polynomiale floue.
A partir de (1.63) et (1.68), le système en boucle fermée peut être représenté par

$$\nabla x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(t))h_j(\varsigma(t))\{A_i(x(t)) + B_i(x(t))F_j(x(t))\}\tilde{x}(x(t)) \tag{1.69}$$

Si $\tilde{x}(x(t)) = x(t)$ et $A_i(x(t))$, $B_i(x(t))$ et $F_j(x(t))$ sont des matrices constantes pour tous les i et j, alors (1.63) et (1.68) réduisent à (1.3) et (1.8), respectivement. Par conséquent, (1.63) et (1.68) sont des représentations plus générales.

Remarque 1.2 *Pour éviter l'introduction d'une condition non convexe, on suppose que $P(\hat{x})$ ne dépend que des états $\tilde{x}$ dont la dynamique n'est pas directement affectée par l'entrée de la commande, à savoir les états dont les lignes correspondantes dans $B_i(x)$ sont nuls. Par rapport à cela, il peut être avantageux d'utiliser une transformation d'état initiale pour introduire autant que possible de lignes nuls dans $B_i(x)$.*

Théorème 1.8 *[Cao 2014] Le système polynomial flou en temps continu (1.69) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices polynomiales $X(\hat{x}) \in \mathbb{S}^N$, $[Y_{ij}(x)]_{r\times r} \in \mathbb{S}^{rN}$, $M_j(x) \in \mathbb{R}^{m\times N}$ et les scalaires prédéfinis ε_l, $\varepsilon_2 > 0$ tels que*

$$v_1^T(X(\hat{x}) - \varepsilon_l I)v_1 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.70}$$

$$v_1^T(Y_{ii}(x) - \Omega_{ii}(x))v_1 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.71}$$

$$v_1^T(Y_{ij}(x) + Y_{ij}^T(x) - \Omega_{ij}(x) - \Omega_{ji}(x))v_1 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.72}$$

$$v_2^T([Y_{ij}(x)]_{r\times r} + \varepsilon_2 I)v_2 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.73}$$

où

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}(x) = {} & \bar{A}_i(x)X(\hat{x}) + X(\hat{x})\bar{A}_i^T(x) + \bar{B}_i(x)M_j(x) + M_j^T(x)\bar{B}_i^T(x) \\ & - \sum_{k\in K}\frac{\partial X(\hat{x})}{\partial x_k}A_i^k(x)\tilde{x}\end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\bar{A}_i(x) = T(x)A_i(x)$$

$$\bar{B}_i(x) = T(x)B_i(x)$$

Les gains de la commande polynomiale floue $F_i(x)$ peuvent être obtenus comme suite :

$$F_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\hat{x}) \tag{1.75}$$

Théorème 1.9 *[Tanaka 2008] Le système polynomial flou en temps discret (1.69) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice polynomiale symétrique $X(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et une matrice polynomiale $M_i(x) \in \mathbb{R}^{m\times N}$ telle que (1.76), (1.77) et (1.78) soient satisfaites, où $\varepsilon_l(x)$ et $\varepsilon_{2ij}(x)$ sont des polynômes non négatifs tels que $\varepsilon_l(x) > 0$ $(x \neq 0)$ et $\varepsilon_{2ij}(x) \geq 0$ pour tout x.*

$$\nu_1^T(X(\hat{x}) - \varepsilon_l I)\nu_1 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.76}$$

$$\nu_2^T \begin{bmatrix} X(\hat{x}) - \varepsilon_{2ii} I & * \\ T(\tilde{A}(x)x)\Omega_{ii}(x) & X(\tilde{A}(x)x) \end{bmatrix} \nu_2 \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.77}$$

$$\nu_3^T \begin{bmatrix} X(\hat{x}) - \varepsilon_{2ij} I & * \\ \frac{1}{2}T(\tilde{A}(x)x)(\Omega_{ij}(x) + \Omega_{ji}(x)) & X(\tilde{A}(x)X) \end{bmatrix} \nu_3, \quad i < j \quad est \quad une \quad SOS \tag{1.78}$$

où

$$\Omega_{ij}(x) = A_i(x)X(\hat{x}) + B_i(x)M_j(x) \tag{1.79}$$

$$T(\tilde{A}(x)x) = T(\tilde{x}(t+1)) \tag{1.80}$$

$$X(\tilde{A}(x)x) = X(\tilde{x}(t+1)) \tag{1.81}$$

et

$$F_i(x) = M_i(x)X^{-1}(\tilde{x}) \tag{1.82}$$

Exemple 1.1 *Considérant le système polynomial flou T-S suivant en temps continu proposé dans [Tanaka 2009]*

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(\varsigma(t))\{A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)\} \tag{1.83}$$

où $\tilde{x}(x(t)) = [x_1 \quad x_2]$ *et* $\hat{x}(x(t)) = x_2$

les fonctions d'appartenance sont

$$h_1(x_1) = \frac{\sin(x_1) + 0.2172x_1}{1.2172x_1}, \quad h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$$

$$A_1(x(t)) = \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2(x(t)) = \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0.2172 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1(x(t)) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2(x(t)) = B_1(x(t))$$

en se basant sur le Théorème 1.8, nous obtenons les résultats suivantes

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} 28.4463x_1 + 0.0078067x_2 - 0.0001503 \\ 9.8881x_1 + 0.0017906x_2 + 0.0019454 \end{bmatrix}^T,$$
$$F_2(x) = \begin{bmatrix} 28.4463x_1 + 0.0078067x_2 - 0.0001503 \\ 9.8881x_1 + 0.0017906x_2 + 0.0019454 \end{bmatrix}^T,$$

et

$$X(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1.341.10^{-5}x_2^2 & -2.091.10^{-6}x_2^2 \\ -2.091.10^{-6}x_2^2 & 6.008.10^{-6}x_2^2 \end{bmatrix}$$

Fig. 1.1 montre les trajectoires des états du système polynomial flou T-S avec $x(0) = [2 \;\; 6]^T$

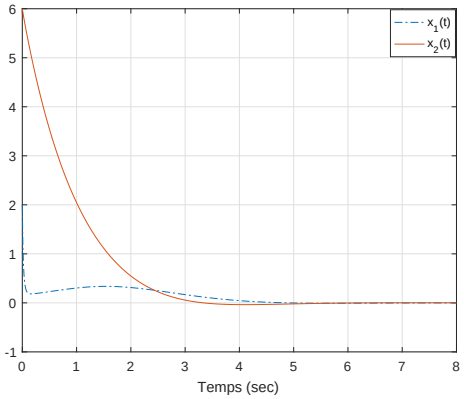


FIGURE 1.1 – Trajectoires des états du système polynomial

Nous pouvons constater que la principale différence entre la commande basée sur un modèle flou T–S et la commande basée sur un modèle polynomial flou est la représentation des matrices, c'est à dire que A_i, B_i et F_i sont autorisées à être des matrices polynomiales dans x. En plus, notre approche utilise une fonction de Lyapunov plus générale (une fonction polynomiale de Lyapunov). Dans un cadre plus général que la modélisation et la commande, notre approche basée sur la SOS fournit une analyse moins restrictive par rapport à l'approche LMI.

1.5 Lemmes utilisés

Dans cette section, nous fournissons, sans preuve, quelques Lemmes de base qui seront utilisés.

Lemme 1.4 *[Boyd 1994] (complément de Schur) Pour une matrice symétrique donnée* $S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$ *où* $S_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) $S < 0$
(2) $S_{11} < 0, \quad S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$
(3) $S_{22} < 0, \quad S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

Lemme 1.5 *[Gahinet 1994] Soit une matrice symétrique* $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *et deux matrices X, Z, il existe une matrice Y telle que l'LMI*

$$\Sigma + sym\{X^T Y Z\} < 0 \tag{1.84}$$

est valable si et seulement si les deux inégalités de projection suivantes sont satisfaites :

$$X^{\perp T} \Sigma X^{\perp} < 0, \quad Z^{\perp T} \Sigma Z^{\perp} < 0. \tag{1.85}$$

où $X^{\perp}$ *et* $Z^{\perp}$ *sont des matrices arbitraires dont les colonnes constituent une base des espaces nuls de X et Z, respectivement.*

Lemme 1.6 *[Jeung 2014] Pour une matrice définie positive* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, les matrices X et Y avec les dimensions appropriées, l'inégalité suivante est vraie :*

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T R X + Y^T R^{-1} Y$$

Lemme 1.7 *[Jeung 2014] Pour une matrice définie positive* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, une matrice carrée* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et le scalaire* α*, l'inégalité suivante est vraie :*

$$-X^T R^{-1} X \leq \alpha^2 R \pm \alpha X \pm \alpha X^T$$

Lemme 1.8 *[Petersen 1987] Soit X, Y et* $\Delta(k)$ *des matrices réelles avec les dimensions appropriées et* $\Delta(k)^T \Delta(k) \leq I$*. Alors, pour tout scalaire* $\delta > 0$

$$X\Delta(k)Y + Y^T \Delta(k)^T X^T \leq \delta X X^T + \frac{1}{\delta} Y^T Y \tag{1.86}$$

Lemme 1.9 *[Chang 2015b] Soit les matrices T, Q, U et W avec les dimensions appropriées et le scalaire* ξ*. L'inégalité*

$$T + QW + W^T Q^T < 0 \tag{1.87}$$

est satisfaite si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} T & * \\ \xi Q^T + UW & -\xi U - \xi U^T \end{bmatrix} < 0 \tag{1.88}$$

Lemme 1.10 *[Cao 2014] Pour toute matrice polynomiale inversible $X(\hat{x})$ où $\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_k]^T \in \mathbb{R}^k$, l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\frac{\partial X^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} = -X^{-1}(\hat{x})\frac{\partial X(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k}X^{-1}(\hat{x}), \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Lemme 1.11 *([Peaucelle 2000].) Soit A, R, L, P et Q des matrices de dimension appropriée. Les inégalités suivantes sont équivalentes :*

$$A^T P + P^T A + Q < 0 \tag{1.89}$$

$$\exists R, L : \begin{bmatrix} A^T L^T + LA + Q & P^T - L + A^T R \\ P - L^T + R^T A & -R - R^T \end{bmatrix} < 0 \tag{1.90}$$

Lemme 1.12 *[de Oliveira 1999] Pour deux matrices symétriques $P > 0$ et $Q > 0$, l'inégalité $A^T QA - P < 0$ est vérifiée, s'il existe une matrice G telle que*

$$\begin{bmatrix} P & * \\ GA & G + G^T - Q \end{bmatrix} > 0$$

1.6 Conclusion

Ce chapitre fournit des connaissances et des concepts de base sur les modèles flous T–S, y compris le concept de la fonction de Lyapunov pour les systèmes 1–D et 2–D, où la compensation parallèle distribuée a été utilisée pour concevoir la commande floue T–S. De surcroît, ce chapitre présente les concepts fondamentaux liés à la stabilité et la stabilisation des systèmes polynomiaux flous en temps continu et discret. Ces systèmes sont plus généraux et plus flexibles que ceux des approches existantes basées sur l'approche LMI pour le modèle et la commande floue T–S. Et alors, quelques Lemmes utiles ont été présentés. Ces propriétés faciliteront la synthèse des méthodologies de commande proposée dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Commande H_∞ par retour de sortie statique en fréquence finie pour des systèmes flous T–S en temps continu

2.1 Introduction

La commande par retour de sortie statique (SOF) a suscité une attention considérable [Syrmos 1997, Chang 2003, Zhong 2017] car la commande par SOF est moins coûteuse à implémenter et plus fiable en pratique et elle est plus simple que la commande par retour de sortie dynamique. La commande par SOF est déclarée comme suit : pour un système donné, trouver un gain de la commande par SOF tel que le système en boucle fermée soit stable. D'ailleurs, il existe un grand nombre de résultats dans la littérature traitant la conception de la commande par SOF. Une contrainte d'égalité a été utilisée dans [De Souza 2000]. Basée sur une optimisation LMI non itérative, la conception d'observateur robuste et la commande robuste H_∞ par SOF pour une classe des systèmes non linéaires ont été proposées dans [Abbaszadeh 2009]. Dans une autre étude, [Chang 2015a], propose une commande robuste H_∞ par SOF pour les systèmes linéaires avec incertitude polytopique en temps continu et en temps discret.

Récemment, certaines méthodes de conception de la commande par retour de sortie statique floue ont été publiées pour divers types de systèmes continus et discrets [Zhang 2010, Jeung 2014, Chang 2015b, Chen 2016, Chaibi 2017a] et [Nguyen 2017]. Une commande robuste par retour de sortie dynamique a été conçue par l'utilisation d'un descripteur dans [Guelton 2009]. Le problème de la commande robuste H_∞ par SOF en présence des incertitudes paramétriques et de la saturation des actionneurs a été proposé pour les systèmes flous T–S dans [Saifia 2012], où l'estimation du domaine d'attraction pour ces systèmes est résolue sous la forme d'LMI. Une procédure numérique basée sur l'algorithme de cône est donnée pour la conception de la commande par SOF du système flou T–S dans [Nachidi 2008].

Notons que toute la conception de commande H_∞ par SOF précédemment citée concerne le domaine de fréquence entière (FE), alors que dans ce cas, les approches de conception standard pour l'ensemble du domaine de fréquence peuvent apporter un conservatisme. Il est donc important et plus pratique de concevoir une commande H_∞ par SOF dans un domaine de fréquence finie. Cependant, il est difficile d'utiliser

le Lemme GKYP en cas de fréquence finie pour étudier la commande H_∞ par SOF. Le Lemme GKYP pour les systèmes continus a également été étudié dans quelques articles. Pour en énumérer quelques-uns, la commande H_∞ par retour de sortie statique pour des systèmes de vibration a été résolue dans [Zhang 2014]. Les auteurs de [Wang 2013] ont examiné la conception de la commande H_∞. D'autres résultats comme [Wang 2017] et [Errachid 2017] ont été obtenus pour la stabilisation des systèmes continus par l'utilisation du Lemme GKYP.

Motivé par les études précédentes, ce chapitre concerne la commande H_∞ par SOF à des fréquences finies pour les systèmes flous T–S en temps continu. Des conditions suffisantes de la commande H_∞ par SOF pour les systèmes flous T–S sont établies en se basant sur le Lemme GKYP. À l'aide de certaines dérivations spéciales, la commande par SOF de ce chapitre n'a pas besoin d'une transformation matricielle ni de contraintes d'égalité. Ainsi, il est facile de voir que la commande par SOF peut être obtenue en utilisant l'approche LMI. Enfin, les résultats de la simulation ont montré que la conception à fréquence finie proposée donne de meilleurs résultats par rapport aux approches à fréquence entière existantes dans la littérature.

2.2 Formulation du problème

Considérons la commande H_∞ par SOF pour un système flou Takagi-Sugeno (T-S) en temps continu décrit par les règles suivantes :

Règle du système i : SI $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et $\ldots$ et $\varsigma_p(t)$ est M_{ip},

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}u(t) \\ z(t) = C_{1i}x(t) + D_{11i}\omega(t) + D_{12i}u(t) \\ y(t) = C_{2i}x(t) + D_{21i}\omega(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $i = 1, 2, \ldots, r$, $\varsigma(t) = [\varsigma_1(t)\varsigma_2(t)\ldots\varsigma_p(t)]$ sont des variables de prémisses connues, M_{ij} sont les ensembles flous et r représente le nombre des règles floues. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de la commande, le vecteur $\omega(t) \in \mathbb{R}^{mw}$ est une perturbation, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ est la sortie mesurée avec les matrices C_{2i} de rang plein. A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{12i} et D_{21i} sont des matrices constantes avec les dimensions appropriées.

Le processus de défuzzification du modèle T-S (2.1) peut être représenté par (2.2).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}u(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[C_{1i}x(t) + D_{11i}\omega(t) + D_{12i}u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))[C_{2i}x(t) + D_{21i}\omega(t)] \end{cases} \tag{2.2}$$

Où $h_i(\varsigma(t)) = w_i(\varsigma(t))/\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(t))$, $w_i(\varsigma(t)) = \prod_{j=1}^{s} M_{ij}(\varsigma_j(t))$, $M_{ij}(\varsigma_j(t))$ est le degré de la fonction d'appartenance de $\varsigma_j(t)$ et $w_i(\varsigma(t))$ représente le poids de la i-ème règle. Dans ce chapitre , nous supposons que $w_i(\varsigma(t)) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(t)) > 0$ pour tout t. Par conséquent, nous obtenons $h_i(\varsigma(t)) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t)) = 1$. pour tout t.

Dans [Jeung 2014], le concept de PDC pour concevoir la commande floue T-S est proposé. Nous considérons la commande floue selon la loi PDC pour concevoir la commande par retour de sortie statique.

Règle de la commande i : Si $\varsigma_1(t)$ est M_{i1} et, ..., et $\varsigma_s(t)$ est M_{is}

$$Alors \quad u(t) = K_i y(t) \tag{2.3}$$

où K_i sont les gain de la commande par SOF pour tous les $i = 1, 2 \ldots, r$. La commande par SOF globale est déduite comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(t))K_i y(t) \tag{2.4}$$

En substituant (2.4) dans (2.2), le système flou en boucle fermée peut être représenté par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l[\bar{A}_{ijl}x(t) + \bar{B}_{ijl}\omega(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l[\bar{C}_{ijl}x(t) + \bar{D}_{ijl}\omega(t)] \end{cases} \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{ijl} = A_i + B_{2i}K_j C_{2l}, \qquad \bar{B}_{ijl} = B_{1i} + B_{2i}K_j D_{21l}, \\ &\bar{C}_{ijl} = C_{1i} + D_{12i}K_j C_{2l}, \qquad \bar{D}_{ijl} = D_{11i} + D_{12i}K_j D_{21l} \\ &h_i = h_i(\varsigma(t)), \quad h_j = h_j(\varsigma(t)), \quad h_k = h_k(\varsigma(t)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le Lemme suivant est nécessaire pour le développement de nos résultats.

Lemme 2.1 *[Iwasaki 2005] Le système flou T-S en temps continu dans (2.5) a un niveau $\gamma > 0$ d'atténuation des perturbations H_∞ dans le domaine de fréquence finie, s'il existe des matrice symétrique P et $Q > 0$, telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}^T\bar{C} & \bar{C}^T\bar{D} \\ \bar{D}^T\bar{C} & \bar{D}^T\bar{D} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.7}$$

Avec

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{A}_{ijl}, \qquad \bar{B} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{B}_{ijl}, \\ \bar{C} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{C}_{ijl}, \qquad \bar{D} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{D}_{ijl}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix}$ *et* Ω *sont définies dans le Tableau 2.1*

Tableau 2.1 – Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences.

gamme de fréquence $\Omega_{\forall\bar{\omega}\in\mathbb{R}}$	basse fréquence BF $\lvert\bar{\omega}\rvert \le \bar{\omega}_l$	moyenne fréquence MF $\bar{\omega}_1 \le \bar{\omega} \le \bar{\omega}_2$	haute fréquence HF $\bar{\omega}_h \le \lvert\bar{\omega}\rvert$
$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \bar{\omega}_l^2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Q & j\bar{\omega}_c Q + P \\ -j\bar{\omega}_c Q + P & -\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 Q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\bar{\omega}_h^2 Q \end{bmatrix}$

avec $\bar{\omega}_c = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)/2$.

Remarque 2.1 *Une méthode itérative basée sur la décomposition d'LMI a été présentée dans [Chen 2016] pour la commande par SOF des systèmes flous T–S. L'inconvénient majeur de cette approche est que la conception des commandes floues par SOF dépend des valeurs initiales. Pour éviter cet inconvénient, une méthode de conception LMI est fournie dans ce chapitre sans aucune contrainte d'égalité imposée aux matrices du système.*

2.3 Commande H_∞ par SOF en fréquence finie

Dans cette section, nous concevrons la commande H_∞ par SOF avec une fréquence finie pour un système flou T-S.

Théorème 2.1 *[Chaibi 2018] Considérons le système flou en boucle fermée (2.5) et un scalaire $\gamma > 0$, le système est asymptotiquement stable avec la performance γ, s'il existe*

des matrices symétriques P, $Q > 0$, $\bar{P} > 0$ et les matrices F et G, telles que les LMIs suivantes sont satisfaites.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & F\bar{B} & 0 \\ * & \Lambda_{22} & G\bar{B} & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.9}$$

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} -F - F^T & \bar{P} + F\bar{A} - G^T \\ * & G\bar{A} + \bar{A}^T G^T \end{bmatrix} < 0 \tag{2.10}$$

où,
Dans la gamme de moyenne fréquence (MF)

$$\Lambda_{11} = -Q - F - F^T, \quad \Lambda_{12} = j\bar{\omega}_c Q + P + F\bar{A} - G^T, \quad \Lambda_{22} = -\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 Q + G\bar{A} + \bar{A}^T G^T$$

Dans la gamme de basse fréquence (LF)

$$\Lambda_{11} = -Q - F - F^T, \quad \Lambda_{12} = P + F\bar{A} - G^T, \quad \Lambda_{22} = \bar{\omega}_l^2 Q + G\bar{A} + \bar{A}^T G^T$$

Dans la gamme de haute fréquence (HF)

$$\Lambda_{11} = Q - F - F^T, \quad \Lambda_{12} = P + F\bar{A} - G^T, \quad \Lambda_{22} = -\bar{\omega}_h^2 Q + G\bar{A} + \bar{A}^T G^T$$

Preuve 2.1 *Nous pouvons vérifier que* (2.10) *est équivalent à,*

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix} + sym\left(\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I & \bar{A} \end{bmatrix}\right) < 0 \tag{2.11}$$

En utilisant le Lemme 1.5 avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix}, \quad X = I, \quad Y = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} \end{bmatrix}$$

L'inégalité (2.11) *peut garantir*

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{A} \\ I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.12}$$

Cela implique que le système en boucle fermée avec $\omega(t) = 0$ est asymptotiquement stable.
soit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 + \bar{C}^T\bar{C} & \bar{C}^T\bar{D} \\ 0 & \bar{D}^T\bar{C} & -\gamma^2 I + \bar{D}^T\bar{D} \end{bmatrix},$$

avec Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont définis dans le Tableau 2.1.

En utilisant le complément de Schur, (2.9) est équivalent à

$$\Sigma + sym(X^T Y Z) < 0 \tag{2.13}$$

où

$$X = I,\ Y = \begin{bmatrix} F^T & G^T & 0 \end{bmatrix}^T,\ Z = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix}$$

choisissons $Z^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ *et par l'application du Lemme 1.5, nous obtenons de (2.13) que (2.7) est vrai.*

La preuve est terminée.

Dans le Théorème suivant, nous présenterons des conditions suffisantes sous forme d'LMI permettant de garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (2.5) dans le domaine des fréquences finies avec la conception de la commande H_∞ par SOF.

Théorème 2.2 *[Chaibi 2018] Considérons le système flou en boucle fermée (2.5) et un scalaire $\gamma > 0$, le système est asymptotiquement stable avec la performance γ et avec un paramètre scalaire α connu, s'il existe des matrices symétriques P, $Q > 0$, $\bar{P} > 0$, $R > 0$ et des matrices F, G, H, M et N_i, telles que les LMI suivantes sont satisfaites.*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{iii} & \theta_{iii} \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \qquad i = 1, \ldots, r \tag{2.14}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{iij} + \Xi_{iji} + \Xi_{jii} & \theta_{iij} & \theta_{iji} & \theta_{jii} \\ * & \Gamma & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma & 0 \\ * & * & * & \Gamma \end{bmatrix} < 0 \tag{2.15}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r, \qquad i \neq j$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{ijl} + \Xi_{ilj} & & & & & & \\ +\Xi_{jil} + \Xi_{jli} & & & & & & \\ +\Xi_{lij} + \Xi_{lji} & \theta_{ijl} & \theta_{ilj} & \theta_{jil} & \theta_{jli} & \theta_{lij} & \theta_{lji} \\ * & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \tag{2.16}$$

$$i = 1, \ldots, r-2, \quad j = i+1, \ldots, r-1, \quad l = j+1, \ldots, r.$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{iii} & \vartheta_{iii} \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \qquad i = 1, \ldots, r \tag{2.17}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{iij} + \Phi_{iji} + \Phi_{jii} & \vartheta_{iij} & \vartheta_{iji} & \vartheta_{jii} \\ * & \Gamma & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma & 0 \\ * & * & * & \Gamma \end{bmatrix} < 0 \tag{2.18}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r, \qquad i \neq j$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ijl} + \Phi_{ilj} \\ +\Phi_{jil} + \Phi_{jli} \\ +\Phi_{lij} + \Phi_{lji} & \vartheta_{ijl} & \vartheta_{ilj} & \vartheta_{jil} & \vartheta_{jli} & \vartheta_{lij} & \vartheta_{lji} \\ * & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \tag{2.19}$$

$$i = 1, \ldots, r-2, \quad j = i+1, \ldots, r-1, \quad l = j+1, \ldots, r.$$

Où

$$\Xi_{ijl} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12ijl} & FB_{1i} + B_{2i}N_jD_{21l} & 0 \\ * & \Xi_{22ijl} & GB_{1i} + B_{2i}N_jD_{21l} & C_{1i}^T H^T + C_{2l}^T N_j^T D_{12i}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_{11i}^T H^T + D_{21l}^T N_j^T D_{12i}^T \\ * & * & * & I - H - H^T \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Dans la gamme de moyenne fréquence ;

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= -Q - F - F^T \\ \Xi_{12ijl} &= j\bar{\omega}_c Q + P + FA_i - G^T + B_{2i}N_jC_{2l} \\ \Xi_{22ijl} &= -\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 Q + sym\{GA_i + B_{2i}N_jC_{2l}\} \end{aligned}$$

Dans la gamme de basse fréquence :

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= -Q - F - F^T \\ \Xi_{12ijl} &= P + FA_i - G^T + B_{2i}N_jC_{2l} \\ \Xi_{22ijl} &= \bar{\omega}_l^2 Q + sym\{GA_i + B_{2i}N_jC_{2l}\} \end{aligned}$$

Dans la gamme de haute fréquence :

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &= Q - F - F^T \\
\Xi_{12ijl} &= P + FA_i - G^T + B_{2i}N_jC_{2l} \\
\Xi_{22ijl} &= -\bar{\omega}_h^2 Q + sym\{GA_i + B_{2i}N_jC_{2l}\}
\end{aligned}$$

$$\theta_{ijl} = \begin{bmatrix} 0 & FB_{2i} - B_{2i}M \\ C_{2l}^T N_j^T & GB_{2i} - B_{2i}M \\ D_{21l}^T N_j^T & 0 \\ 0 & HD_{12i} - D_{12i}M \end{bmatrix}, \ \Gamma = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & \alpha^2 R - \alpha M - \alpha M^T \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{ijl} = \begin{bmatrix} -F - F^T & \bar{P} + FA_i - G^T + B_{2i}N_jC_{2l} \\ * & sym\{GA_i + B_{2i}N_jC_{2l}\} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$\vartheta_{ijl} = \begin{bmatrix} 0 & FB_{2i} - B_{2i}M \\ C_{2l}^T N_j^T & GB_{2i} - B_{2i}M \end{bmatrix}$$

De plus, les gain de la commande par SOF sont données par $K_j = M^{-1}N_j$, pour $j = 1, 2, ..., r$.

Preuve 2.2 *Supposons que l'inégalité (2.14) soit vérifiée, cela implique que $I - H - H^T < 0$ et $\alpha^2 R - \alpha M - \alpha M^T < 0$ avec $\alpha^2 R > 0$, garantissent que M et H ne sont pas singuliers. De (2.14) - (2.16) nous avons*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \Psi_{ijl} < 0 \tag{2.22}$$

où

$$\Psi_{ijl} = \begin{bmatrix} \Xi_{ijl} & \theta_{ijl} \\ * & \Gamma \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

en appliquant le Lemme 1.7 et le complément de Schur, l'inégalité (2.23) implique que,

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{ijl} = \Xi_{ijl} &+ \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T N_j^T \\ D_{21l}^T N_j^T \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T N_j^T \\ D_{21l}^T N_j^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
&+ \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \\ 0 \\ HD_{12i} - D_{12i}M \end{bmatrix} (M^T R^{-1} M)^{-1} \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \\ 0 \\ HD_{12i} - D_{12i}M \end{bmatrix}^T < 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Par le Lemme 1.6 et en définissant $N_j = MK_j$*, nous pouvons vérifier que* (2.24) *est équivalent à*

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{ijl} = \Xi_{ijl} &+ \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \\ 0 \\ HD_{12i} - D_{12i}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T K_j^T \\ D_{21l}^T K_j^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T K_j^T \\ D_{21l}^T K_j^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \\ 0 \\ HD_{12i} - D_{12i}M \end{bmatrix}^T < 0\end{aligned} \tag{2.25}$$

La substitution de (2.20) *dans* (2.25) *donne l'inégalité* (2.26)

$$\bar{\bar{\Psi}}_{ijl} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\Xi}}_{11} & \bar{\bar{\Xi}}_{12ijl} & \bar{\bar{\Xi}}_{13ijl} & 0 \\ * & \bar{\bar{\Xi}}_{22ijl} & \bar{\bar{\Xi}}_{23ijl} & \bar{\bar{\Xi}}_{24ijl} \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\bar{\Xi}}_{34ijl} \\ * & * & * & I - H - H^T \end{bmatrix} < 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Xi}}_{11} &= \Sigma_1 - F - F^T \\ \bar{\bar{\Xi}}_{12ijl} &= \Sigma_2 + FA_i - G^T + FB_{2i}K_jC_{2l} \\ \bar{\bar{\Xi}}_{22ijl} &= \Sigma_3 + sym\{GA_i + GB_{2i}K_jC_{2l}\} \\ \bar{\bar{\Xi}}_{13ijl} &= FB_{1i} + FB_{2i}K_jD_{21l} \\ \bar{\bar{\Xi}}_{23ijl} &= GB_{1i} + GB_{2i}K_jD_{21l} \\ \bar{\bar{\Xi}}_{24ijl} &= C_{1i}^T H^T + C_{2l}^T K_j^T D_{12i}^T H^T \\ \bar{\bar{\Xi}}_{34ijl} &= D_{11i}^T H^T + D_{21l}^T K_j^T D_{12i}^T H^T\end{aligned}$$

avec Σ_1, Σ_2 *et* Σ_3 *sont définis dans le Tableau 2.1*

Considérant le fait que $-(V - X)X^{-1}(V - X)^T \leq 0$, $X > 0$, *qui implique que* $-VX^{-1}V^T \leq -V - V^T + X$, *en multipliant* (2.26) *par* $diag\{I, I, I, H^{-1}\}$ *à gauche et son transposé à droite et en remplaçant* $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ *et* $\bar{D}$, *par leurs expressions dans* (2.8), *nous obtenons l'inégalité dans* (2.9).

De (2.17) - (2.19) *nous avons*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \varphi_{ijl} < 0 \tag{2.27}$$

où

$$\varphi_{ijl} = \begin{bmatrix} \Phi_{ijl} & \vartheta_{ijl} \\ * & \Gamma \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Par le Lemme 1.7 et le complément de Schur, l'inégalité (2.28) implique que,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{ijl} = \Phi_{ijl} &+ \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T N_j^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T N_j^T \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \end{bmatrix} (M^T R^{-1} M)^{-1} \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \end{bmatrix}^T < 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous pouvons facilement vérifier que (2.29) implique (2.30) de Lemme 1.6 et en définissant $N_j = MK_j$.

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ijl} = \Phi_{ijl} + \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T K_j^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2l}^T K_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FB_{2i} - B_{2i}M \\ GB_{2i} - B_{2i}M \end{bmatrix}^T < 0 \tag{2.30}$$

La substitution de (2.21) dans (2.30) donne l'inégalité suivante

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ijl} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12ijl} \\ * & \bar{\Phi}_{22ijl} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -F - F^T \\ \bar{\Phi}_{12ijl} &= \bar{P} + FA_i - G^T + FB_{2i}K_jC_{2l} \\ \bar{\Phi}_{22ijl} &= sym\{GA_i + GB_{2i}K_jC_{2l}\} \end{aligned}$$

À partir de (2.31) et en tenant compte de (2.8), nous obtenons (2.10).
Ceci complète la preuve.

Remarque 2.2 *Théorème 2.2, présente une technique de conception de la commande floue H_∞ par SOF à des FF, qui peut être moins restrictif par rapport aux méthodes de la commande floue à fréquence entière.*

Remarque 2.3 *La commande par retour de sortie statique donnée par les références [Fang 2006, Jeung 2014, Chang 2015b, Chang 2015a] et [Chaibi 2017a], présente des termes bilinéaires $PB_iK_jC_l$ qui rendent ces conditions difficiles à traiter numériquement. Pour surmonter ce problème, [Fang 2006, Chaibi 2017a] ont utilisé des contraintes d'égalité $PB_i = B_iM$, $i = 1, \ldots, r$. Ensuite, [Jeung 2014, Chang 2015b, Chang 2015a] ont introduit une condition suffisante pour éliminer les contraintes d'égalités $PB_i = B_iM$. Inspiré par ces travaux, ce chapitre étudie la conception de la commande H_∞ par SOF à une fréquence finie sans aucune contrainte d'égalité.*

2.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous utiliserons deux exemples pratiques pour démontrer l'efficacité de notre approche.

Exemple 2.1 *Considérons le système mécanique non linéaire, ressort à une masse « masse ressort amortisseur » décrit dans [Wu 2005]. Les équations d'un ressort à une masse sont*

$$M\ddot{x}(t) + c_1\dot{x}(t) + c_2x(t) = (1 + c_3\dot{x}^3(t))u(t) + \omega(t) \tag{2.32}$$

où M, $u(t)$ et $\omega(t)$ sont respectivement la masse, la force et la perturbation et la non-linéarité est donnée par $\dot{x}^3(t)$. Les paramètres du système mécanique sont les suivants : $M = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1,155$, $c_3 = 0,13$.

En se basant sur [Wu 2005], si les états du système sont la vitesse et la position ($x_1(t) = \dot{x}(t)$ et $x_2(t) = x(t)$) alors on définit

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{bmatrix} 2x_2(t) \\ 2u(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ 2x_1(t) + x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Si $x_1(t) \in [-1.5 \quad 1.5]$, alors le modèle non linéaire d'un ressort à une masse (2.32) peut être décrit par le modèle T-S suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(x_1)(t)\{A_ix(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}u(t)\} \\ z(t) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(x_1)(t)\{C_{1i}x(t) + D_{11i}\omega(t) + D_{12i}u(t)\} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(x_1)(t)\{C_{2i}x(t) + D_{21i}\omega(t)\} \end{aligned}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1,155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1,155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_{21} = \begin{bmatrix} 1.4387 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0,5613 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D_{121} = D_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{111} = D_{112} = D_{211} = D_{212} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Où les fonctions d'appartenance sont

$$h_1(x_1(t)) = 0,5 + \frac{x_1^3(t)}{6.75}, \qquad h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$$

Le Tableau 2.2 montre les valeurs de γ obtenues par l'approche de fréquence entière existante dans [Wu 2005] et l'approche de fréquence finie présentée dans ce chapitre. Nous pouvons voir que l'approche proposée donne de meilleurs résultats que ceux existants dans la littérature.

Tableau 2.2 – Les valeurs de γ pour l'Exemple 2.1

Méthodes	Théorème 1 dans [Wu 2005]	Théorème 2.2 [Chaibi 2018] (avec $Q = 0$)	Théorème 2.2 [Chaibi 2018] (BF avec $\|\bar{\omega}\| \leq 1$)
γ	3	2.7303	2.7296

Maintenant, en utilisant le Théorème 2.2, pour BF, lorsque $\alpha = 5$ et $\bar{\omega}_l = 1$, nous pouvons obtenir la borne inférieure de H_∞, $\gamma_{min} = 2,7296$ et les gains de la commande H_∞ par SOF,

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.2342 & 0.1210 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0,1056 & 0,0554 \end{bmatrix}$$

Les résultats de la simulation sont présentés dans les figures 2.1 - 2.3. Les figures 2.1 et 2.2 montrent la réponse de l'état et le signal de la commande du système en boucle fermée, avec $\omega(t) = 0$ et $x(0) = [-1 \quad -1.4]^T$. D'après Fig 2.1, nous pouvons conclure que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. La figure 2.2 montre que la loi de commande proposée converge plus rapidement que celle de [Wu 2005]. La représentation graphique du rapport de $\gamma(t) = \frac{\sqrt{z^T(t)z(t)dt}}{\sqrt{\omega^T(t)\omega(t)dt}}$ est représentée sur la figure 2.3 sous la condition initiale $x(0) = [0 \quad 0]^T$ lorsque $\omega(t) = sin(2\pi t)$, il est clair que ce rapport tend vers une valeur constante qui est inférieure à la valeur prescrite de $\gamma = 2,7296$.

Exemple 2.2 *Considérons un moteur synchrone magnétique permanent (PMSM) [Li 2002]. Le PMSM a été modélisé par un modèle flou à deux règles dans [Lee 2009] et a été modifié dans [Saifia 2012].*

$$\begin{cases} \dot{i}_d(t) = -\frac{R}{L} i_d(t) + n_p i_q(t) W(t) + v_d(t) \\ \dot{i}_q(t) = -\frac{R}{L} i_d(t) + n_p i_d(t) W(t) - \frac{\Psi}{L} W(t) + v_q(t) \\ \dot{W}(t) = \frac{\Psi}{L} i_q(t) - \frac{\tau}{j} W(t) + 2\omega(t) \end{cases} \tag{2.34}$$

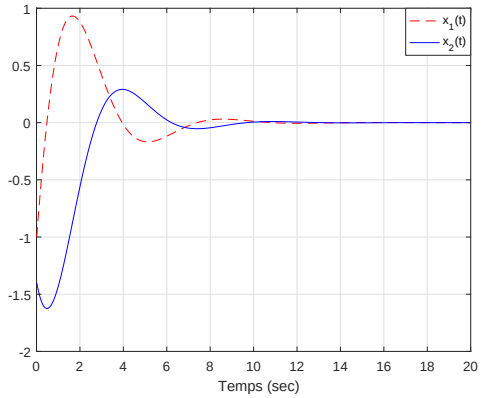


FIGURE 2.1 – Trajectoires des états du système non linéaire (2.32)

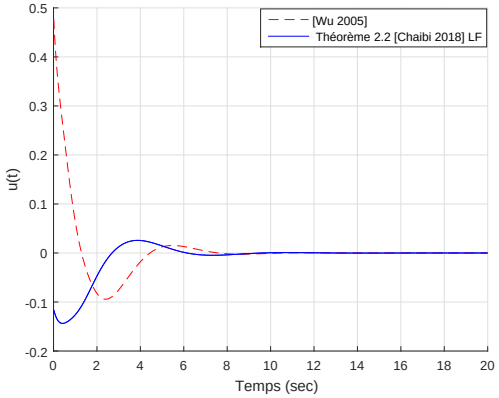


FIGURE 2.2 – Le signal de la commande généré par retour de sortie statique pour le système non linéaire (2.32)

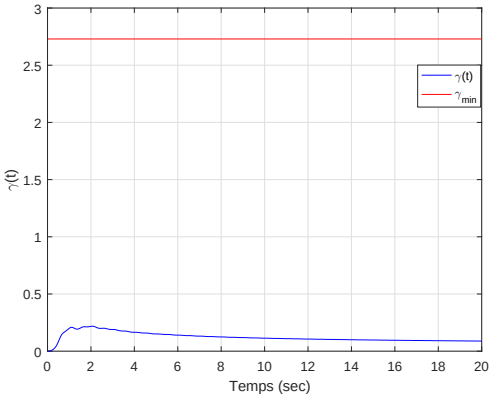


FIGURE 2.3 – Le rapport de $\gamma(t) = \frac{\sqrt{z^T(t)z(t)dt}}{\sqrt{\omega^T(t)\omega(t)dt}}$ pour le système non linéaire (2.32)

Où $i_q(t)$ et $i_d(t)$ sont respectivement le courant en quadrature et le courant direct. $W(t)$ est la vitesse angulaire du moteur. $v_q(t)$ et $v_d(t)$ sont les tensions d'entrée en quadrature et directe respectivement. $n_p = 1$ et $\Psi = 0.031Nm/A$, désignent respectivement le nombre de paires de pôles et le flux d'aimants permanents, $L = 0.01425H$ est l'inductance directe du stator en quadrature, $R = 0.9\Omega$ est la résistance de l'enroulement du stator et $j = 4,5 \times 10^{-5}kg.m^2$ est le moment d'inertie polaire, $\tau = 0.0162N/rad/s$ est le coefficient d'amortissement visqueux.

Nous pouvons nous référer à [Chang 2010, Wei 2015] pour plus de discussions sur le PMSM. Les sorties commandées sont les suivantes :

$$\begin{cases} z_1(t) = 2(1+\partial)i_d(t) + 4i_q(t) + 4W(t) \\ \qquad + i_q(t)W(t) + W(t)^2 + 0,1\omega(t) \\ z_2(t) = \omega(t) \end{cases}$$

avec ∂ est un paramètre incertain. Dans ce chapitre, nous supposons que $\partial = 0$.
pour $W(t) \in [\theta_1,\ \theta_2]$ le PMSM est modélisé par deux règles floues avec les paramètres suivants :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & n_p\theta_1 & 0 \\ -n_p\theta_1 & -\frac{R}{L} & -\frac{\Psi}{L} \\ 0 & \frac{\Psi}{L} & -\frac{\tau}{j} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & n_p\theta_2 & 0 \\ -n_p\theta_2 & -\frac{R}{L} & -\frac{\Psi}{L} \\ 0 & \frac{\Psi}{L} & -\frac{\tau}{j} \end{bmatrix},\ B_{1i}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D_{1i} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ D_{12i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'appartenance sont représentées sous la forme suivante :

$$h_1(W(t)) = \frac{\theta_2 - W(t)}{\theta_2 - \theta_1}, \qquad h_2(W(t)) = 1 - h_1(W(t)) \tag{2.35}$$

on définit
$x(t) = [i_d^T(t)\ \ i_q^T(t)\ \ W^T(t)]^T$ et $u(t) = [v_d^T(t)\ \ v_q^T(t)]^T$.

Supposons que seules les variables $i_q(t)$ et $W(t)$ sont des variables mesurables et que la sortie mesurée est la fonction non linéaire alors on a :

$$y_1(t) = i_q(t)W(t), \qquad y_2(t) = W(t)$$

alors

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

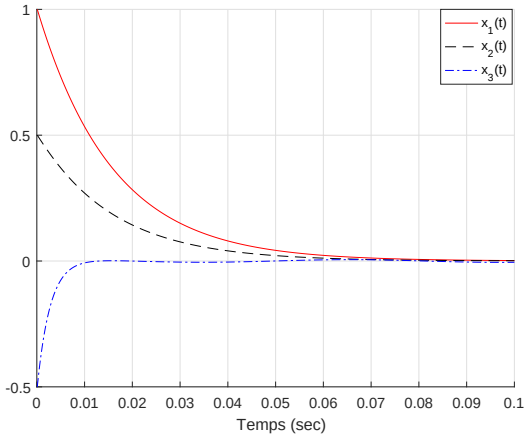


FIGURE 2.4 – Trajectoires des états du système pour l'Exemple 2.2.

Pour $\theta_1 = -1$ et $\theta_2 = 1$, la valeur de H_∞ liée à la norme obtenue par le Théorème 2.2 et les résultats de [Saifia 2012] et de [Lee 2009] sont présentés dans le Tableau 2.3. Lors du choix des paramètres $\alpha = 0.1$ pour le cas BF, nous obtenons les gains de la commande H_∞ par SOF comme suit :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,5517 & 0.0099 \\ -8,7011 & 0.4661 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1,3592 & 0,0051 \\ 8,7061 & 0.4420 \end{bmatrix}$$

Supposons l'état initial $x(0) = [1 \quad 0,5 \quad -0.5]^T$ et $\omega(t) = cos(100t)$, les résultats de la simulation sont illustrés aux Fig. 2.4 - 2.6. La figure 2.4 montre les réponses de l'état du système flou T-S en boucle fermée (2.34). Les figures 2.5 et 2.6 illustrent la réponse de la tension d'entrée directe $v_d(t)$ et de la tension d'entrée en quadrature $v_q(t)$ respectivement, par le Théorème 2.2 dans le cas BF et les résultats dans [Saifia 2012] et [Lee 2009]. Il est clair que notre approche fournit une convergence plus rapide.

Le Tableau 2.3 montre les valeurs de γ obtenues par différentes méthodes, (pour les fréquences entières (EF) existantes dans [Saifia 2012, Lee 2009] et les fréquences finies présentées dans ce chapitre). Donc, nous pouvons déduire que la méthode présentée dans ce chapitre donne de meilleurs résultats que les méthodes existantes dans la littérature.

Tableau 2.3 – Les valeurs de γ pour l'Exemple 2.2.

Méthodes	[Saifia 2012] et [Lee 2009]	Théorème 2.2 EF $Q = 0$ [Chaibi 2018]	Théorème 2.2 BF $\bar{\omega} \leq 1$ [Chaibi 2018]	Théorème 2.2 MF $1 \leq \bar{\omega} \leq 10$ [Chaibi 2018]
γ	0.5	0.1282	0.1277	0.1002

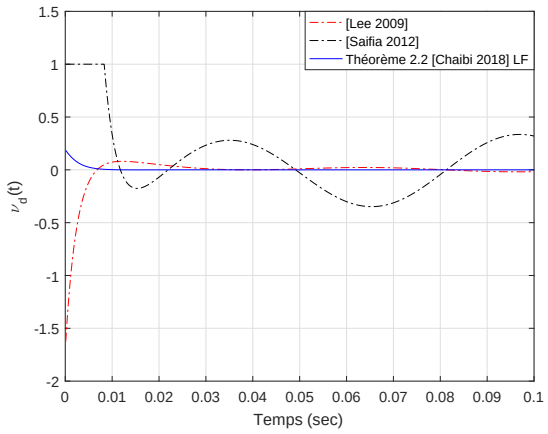


FIGURE 2.5 – Trajectoire de la tension d'entrée directe $v_d(t)$ pour l'Exemple 2.2.

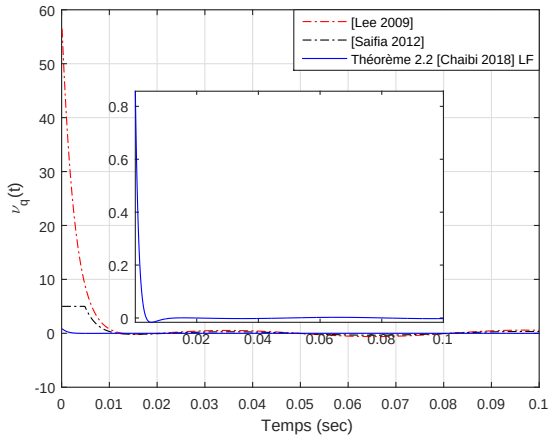


FIGURE 2.6 – Trajectoire de la tension d'entrée en quadrature $v_q(t)$ pour l'Exemple 2.2.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la commande floue H_∞ par retour de sortie statique pour les systèmes flous T–S en temps continu. Á l'aide du Lemme GKYP, des conditions suffisantes ont été dérivées pour synthétiser une loi de commande H_∞ floue par SOF. Les conditions de conception sont présentées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires. Notre approche permet de synthétiser une loi de commande H_∞ par SOF, sans aucune contrainte d'égalité, ce qui représente un avantage par rapport à certaines méthodes de la littérature telles que [Fang 2006, Lee 2009]. En outre, lorsque la plage de fréquences est connue, notre approche réduit le conservatisme introduit par toutes les méthodes de fréquence entière telle que [Wu 2005, Lee 2009] et [Saifia 2012]. Ceci a été illustré par deux exemples pratiques.

CHAPITRE 3

La commande des systèmes polynomiaux flous basés sur la somme des carrés (SOS)

3.1 Introduction

Le système T–S standard a récemment été étendu aux systèmes polynomiaux T–S [Tanaka 2009], dans lesquels les règles floues sont aussi des systèmes polynomiaux. Cette nouvelle classe de système est plus complexe à traiter, mais représente un ensemble plus large des systèmes non linéaires. Elles sont généralement résolues à l'aide de l'approche de la somme des carrés (SOS), qui est une généralisation des inégalités matricielles linéaires (LMI). Plusieurs approches utilisant la décomposition SOS ont été étudiées, par exemple : [Cao 2014], où la loi de commande PDC, est utilisée pour obtenir la stabilité robuste pour les systèmes flous en boucle fermée. De plus, les conditions de stabilité et de stabilisation présentées dans [Tanaka 2009] sont plus générales et moins restrictives que celles des approches existantes fondées sur l'approche LMI. Considérant la forme des fonctions d'appartenance, certaines approches ont été proposées pour traiter les systèmes T–S à deux dimensions (2–D) en utilisant le SOS. [Chaibi 2016], propose une condition de stabilisation de système discret T–S bidimensionnel basée sur la fonction polynomiale de Lyapunov. De plus, une méthode basée sur l'utilisation de multifonction polynomiale de Lyapunov a été traitée dans [Guelton 2013] sous forme de la SOS pour l'analyse de stabilité. Cependant, il est très intéressant de souligner que les systèmes polynomiaux T–S n'ont pas été suffisamment étudiés à l'aide du multifonction polynomiale de Lyapunov (MPLF), ce qui motive notre travail.

Par ailleurs, la conception de la commande par retour de sortie statique est un problème important, car la commande par SOF est moins coûteuse à mettre en oeuvre et plus fiable en pratique. Cependant, la commande par SOF est un problème non convexe et sa solution complète n'est pas encore résolue. Les documents [Tanaka 2009] et [Chaibi 2017b] utilisaient les matrices polynomiales au lieu des matrices constantes du modèle flou T–S et de la commande PDC. Le nouveau type de commande floue est appelé commande polynomiale floue, par exemple [Nguang 2011]. Les résultats publiés dans [Chaibi 2016] démontrent que les conditions de stabilisation basées sur la fonction

polynomiale de Lyapunov contiennent les conditions basées sur la fonction quadratique de Lyapunov et ils sont considérées comme cas particulier. Basée sur la fonction polynomiale de Lyapunov, les conditions de stabilité peuvent être dérivées en terme de la SOS et résolues numériquement par le SOSTOOLS [Prajna 2004a].

3.2 Commande des systèmes polynomiaux flous par l'utilisation de la multifonction polynomiale de Lyapunov

Cette partie présente les conditions de stabilité et de stabilisation pour les systèmes polynomiaux T–S en temps continu. En comparaison avec des résultats existants dans [Guelton 2013], les limites supérieures des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance sont prises en compte et les matrices dépendantes de paramètre d'optimisation (slack) développé par [Márquez 2017] sont appliquées en utilisant le concept de taux de décroissance dans la multifonction polynomiale de Lyapunov (MPLF). Cela permet de gérer la vitesse de réponse d'un système commandé, nous proposons donc de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation pour ce type de système. Les conditions dérivées sont plus générales que celles obtenues à l'aide de la multifonction de Lyapunov (MLF) classique. Ainsi, l'approche discutée dans ce chapitre est plus générale et moins restrictive par rapport aux résultats existants dans la littérature.

3.2.1 Formulation du problème

Le système polynomial flou T-S en temps continu est représenté par l'ensemble de règles floues suivantes :

Règle i : SI $\sigma_1(x(t))$ EST M_{i1} ET, ..., ET $\sigma_s(x(t))$ EST M_{is}
ALORS

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t) \tag{3.1}$$

où $\sigma(x(t)) = [\sigma_1(x(t))\ \sigma_2(x(t)) \dots \sigma_s(x(t))]$ sont des variables de prémisses connues, M_{ij} sont les ensembles flous, $i = 1, 2, \dots, r$ et r est le nombre de règles. $A_i(x(t))$ sont des matrices polynomiales dans $x(t)$. Le vecteur de colonne dont les entrées sont toutes définies dans $x(t)$ est désigné par $\tilde{x}(x(t))$. $\tilde{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ est un monôme de vecteur $n \times 1$ dans $x(t)$. Un monôme dans $x(t)$ est une fonction de la forme $x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, où α_1, α_2, ..., α_n est un entier non négatif.

Le processus de défuzzification du modèle T-S (3.1) peut être représenté comme suit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma(x(t)))[A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)] \tag{3.2}$$

où $h_i(\sigma(x(t))) = w_i(\sigma(x(t)))/\sum_{i=1}^{r} w_i(\sigma(x(t)))$, $w_i(\sigma(x(t))) = \prod_{j=1}^{s} M_{ij}(\sigma_j(x(t)))$, avec $M_{ij}(\sigma_j(x(t)))$ est le grade de la fonction d'appartenance de $\sigma_j(x(t))$ dans M_{ij} et $w_i(\sigma(x(t)))$ représente le poids de la i-ème règle. Dans ce chapitre, nous supposons que $w_i(\sigma(x(t))) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} w_i(\sigma(x(t))) > 0$ pour tout t. Par conséquent, nous obtenons $h_i(\sigma(x(t))) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma(x(t))) = 1$, pour tout t.

Définir $\mathbf{K} = \{k_1, k_2, ..., k_q\}$ comme un ensemble de numéro de ligne indiquant que les entrées de la ligne entière de $B_i(x)$ sont toutes égales à zéro pour tout i et $\hat{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_q})$. Nous allons utiliser x, $\tilde{x}(x)$ au lieu de $x(t)$, $\tilde{x}(x(t))$, respectivement. Notons $A_i^k(x)$, la k -ème ligne de A_i et $h_i = h_i(\sigma(x(t)))$.

3.2.2 Condition de stabilité du système polynomial flou T–S

Basée sur la multifonction polynomiale de Lyapunov, une nouvelle condition de stabilité est présentée pour le système polynomial T-S, qui dépend de la dérivée temporelle des fonctions d'appartenance.

Exprimons la dérivée temporelle des fonctions d'appartenance en tant que

$$\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(\sigma(x(t))) = 0 \quad \forall\ \sigma(x(t)) \tag{3.3}$$

à partir de (3.3), nous obtenons

$$\dot{h}_r(\sigma(x(t))) = -\sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(\sigma(x(t))) \tag{3.4}$$

Hypothèse 3.1 *[Tanaka 2003] Les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance floues satisfont $|\dot{h}_\rho| \leq \phi_\rho$, $\rho = 1, 2, \ldots, r-1$ où ϕ_ρ est un scalaire positif.*

Théorème 3.1 *[Chaibi 2019c] Soit $\phi_\rho > 0$, $\rho = 1, \ldots, r-1$ et $\alpha(x) > 0$ des polynômes donnés. Le système polynomial flou (3.2) avec $u(t) = 0$ est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques polynomiales $P_i(\hat{x})$ et $\varepsilon_i(x)$ et $\varepsilon_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, sont des polynômes non négatifs tels que $\varepsilon_i(x) > 0$, pour $x \neq 0$, $\varepsilon_{ij}(x) \geq 0$, pour tout x, satisfaisant l'ensemble suivant de la SOS :*

$$\nu_1^T(P_i(\hat{x}) - \varepsilon_i(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \quad i = 1, 2, \ldots r \tag{3.5}$$

$$\nu_1^T(P_\rho(\hat{x}) - P_r(\hat{x}) - \varepsilon_\rho(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \quad \rho = 1, 2, \ldots r-1 \tag{3.6}$$

$$-\nu_2^T(\Xi_{ii} + \varepsilon_{ii}(x)I)\nu_2 \quad est\ une \quad SOS \quad i = 1, \ldots, r \tag{3.7}$$

$$-\nu_2^T(\Xi_{ij} + \Xi_{ji} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_2 \quad est\ une \quad SOS \quad i < j \tag{3.8}$$

où ν_1 et ν_2 sont des vecteurs indépendants de $x(t)$, avec les dimensions appropriées et

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{ij11} & * \\ P_j(\hat{x}) - L^T(x) + R^T(x)T(x)A_i(x) & -R(x) - R^T(x) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.9}$$

$$\Xi_{ij11} = A_i^T(x)T^T(x)L^T(x) + L(x)T(x)A_i(x) + \alpha P_j(\hat{x}) + \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) + \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho(P_\rho(\hat{x}) - P_r(\hat{X}))$$

$T(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ étant une matrice polynomiale dont l'entrée $(i, j)^{th}$ est donnée par $T^{ij}(x) = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x)$.

Preuve 3.1 *Supposons que les conditions de la SOS dans* (3.6) - (3.8) *soient satisfaites, nous pouvons écrire*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j \Xi_{ij} < 0 \tag{3.10}$$

où Ξ_{ij} *est défini dans* (3.9)
L'équation (3.6) *implique que*

$$P_\rho(\hat{x}) \geq P_r(\hat{x}) \qquad \rho = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{3.11}$$

de l'hypothèse 3.1

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho(P_\rho(\hat{x}) - P_r(\hat{x})) \geq \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(P_\rho(\hat{x}) - P_r(\hat{x})) \tag{3.12}$$

de (3.4)*, nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(P_\rho(\hat{x}) - P_r(\hat{x})) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) + \dot{h}_r P_r(\hat{x}) \\ &= \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

l'inégalité (3.9) *peut être écrite ainsi :*

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{ij11} & * \\ P_j(\hat{x}) - L^T(x) + R^T(x)T(x)A_i(x) & -R(x) - R^T(x) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{ij11} &= A_i^T(x)T^T(x)L^T(x) + L(x)T(x)A_i(x) + \alpha P_j(\hat{x}) \\ &+ \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) + \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) \end{aligned}$$

Par l'utilisation du Lemme 1.11 avec

$$\begin{aligned} A &= T(x)A_i(x) \qquad P = P_j(\hat{x}) \\ Q &= \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) + \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) + \alpha P_j(\hat{x}) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) + A_i^T(x)T^T(x)P_j(\hat{x}) + P_j(\hat{x})T(x)A_i(x) \\ &+ \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) + \alpha(x)P_j(\hat{x}) \le 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nous considérons une multifonction polynomiale de Lyapunov comme dans [Guelton 2013].

$$V(x) = \tilde{x}^T(x) \sum_{i=1}^{r} h_i P_i(\hat{x})\tilde{x}(x) \tag{3.16}$$

Pour le calcul de la dérivée proposé par [Yu 2012], la condition est définie comme suit :

$$\dot{V}(x) \le -\alpha(x)V(x) \tag{3.17}$$

la dérivée temporelle de (3.16) *est obtenue comme*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{\tilde{x}}^T(x) \sum_{i=1}^{r} h_i P_i(\hat{x})\tilde{x}(x) + \tilde{x}^T(x) \sum_{i=1}^{r} h_i P_i(\hat{x})\dot{\tilde{x}}(x) \\ &+ \tilde{x}^T(x) \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x})\tilde{x}(x) + \tilde{x}^T(x) \sum_{i=1}^{r} h_i \dot{P}_i(\hat{x})\tilde{x}(x) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Par conséquent, on peut voir que

$$\begin{aligned}\tilde{x}^T(x)[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\{\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x})+A_i^T(x)T^T(x)P_j(\hat{x})\\ +P_j(\hat{x})T(x)A_i(x)+\sum_{k\in K}\frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial\hat{x}_k}A_i^k(x)\tilde{x}(x)\\ +\alpha(x)P_j(\hat{x})\}]\tilde{x}(x)\leq 0\end{aligned} \tag{3.19}$$

La preuve est terminée

Remarque 3.1 *Il existe quelques résultats concernant la stabilité des systèmes flous T–S en terme de dérivée temporelle des fonctions d'appartenance : voir par exemple [Tanaka 2003] et [Mozelli 2009b], où les conditions de stabilité et de stabilisation sont écrites sous forme d'LMI, en utilisant la multifonction de Lyapunov (MLF) suivante :*

$$V(x(t))=x(t)^T\sum_{i=1}^{r}h_iP_ix(t) \tag{3.20}$$

Afin d'obtenir des résultats plus générales, nous utilisons MPLF (3.16) au lieu de MLF. En fait, si $\tilde{x}(x)=x(t)$ et $P_i(\hat{x})$ est une matrice constante, alors (3.16) se réduit à (3.20). Par conséquent, (3.16) est une représentation plus générale, ce qui signifie que notre travail couvre l'ensemble des solutions de [Tanaka 2003, Mozelli 2009a] et [Faria 2011], garantissant ainsi un degré de conservation moins élevé.

3.2.3 Condition de stabilisation pour le système polynomial flou

Dans [Tanaka 2009], le concept de la compensation distribuée parallèle (PDC) pour concevoir la commande polynomiale est proposé. Dans ce chapitre, nous considérons une loi PDC pour concevoir la commande polynomiale.

Règle de la commande i : Si $\sigma_1(x(t))$ est M_{i1} ET, ... ET $\sigma_s(x(t))$ est M_{is}
Alors

$$u(t)=K_i(x)\tilde{x}(x) \tag{3.21}$$

où $i=1,2\ldots,r$ et $K_i(x(t))$ pour tout i sont les matrices de gain polynomiales dans $x(t)$.

La commande polynomiale globale est déduite comme suit

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r}h_iK_i(x)\tilde{x}(x) \tag{3.22}$$

En substituant (3.22) dans (3.2), le système en boucle fermée peut être représenté par

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j [A_i(x) + B_i(x)K_j(x)]\tilde{x}(x) \tag{3.23}$$

Remarque 3.2 *La différence entre le système T–S dans [Faria 2011] et le système polynomial flou T–S utilisé dans ce chapitre est la représentation de la partie résultante : quand $A_i(x)$, $B_i(x)$ et $K_j(x)$ dans (3.23) et $P_i(\hat{x})$ sont des matrices constantes pour tous les i et j et $\tilde{x}(x) = x$, nous avons le système T–S standard utilisé précédemment dans la littérature, par exemple dans [Faria 2011]. Par conséquent, notre approche peut être vue comme une généralisation des résultats dans la littérature telle que [Faria 2011].*

Théorème 3.2 *[Chaibi 2019c] Soit $\phi_\rho > 0$, $\rho = 1, \ldots, r-1$, μ_1, μ_2, $\alpha(x) > 0$ des scalaires donnés. Le système polynomial flou (3.23) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques polynomiales $X_i(\hat{x})$ et des matrices polynomiales $Y_j(x)$ telles que (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27) sont satisfaites, où $\varepsilon_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\varepsilon_{ij}(x)$ sont des polynômes non négatifs tels que $\varepsilon_i(x) > 0$, pour $x \neq 0$, $\varepsilon_{ij}(x) \geq 0$, pour tout x.*

$$\nu_1^T(X_i(\hat{x}) - \varepsilon_i(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.24}$$

$$\nu_1^T(X_\rho(\hat{x}) - X_r(\hat{x}) - \varepsilon_\rho(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \quad \rho = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{3.25}$$

$$-\nu_2^T(\Psi_{ii} + \varepsilon_{ii}(x)I)\nu_2 \quad est\ une \quad SOS \quad i = 1, \ldots, r \tag{3.26}$$

$$-\nu_2^T(\Psi_{ij} + \Psi_{ji} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_2 \quad est\ une \quad SOS \quad i < j \tag{3.27}$$

où

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_{ij11} & * \\ \Psi_{ij21} & -2\mu_2 X_j(\hat{x}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.28}$$

$$\Psi_{ij11} = (X_j(\hat{x})A_i^T(x) + Y_j^T(x)B_i^T(x))T^T(x)\mu_1 + \alpha X_j(\hat{x}) + \mu_1 T(x)(A_i(x)X_j(\hat{x}) + B_i(x)Y_j(x)) + \sum_{\rho=1}^{r-1}\phi_\rho(X_\rho(\hat{x}) - X_r(\hat{x})) - \sum_{k\in K}\frac{\partial X_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k}A_i^k(x)\tilde{x}(x)$$

$$\Psi_{ij21} = (1-\mu_1)X_j(\hat{x}) + T(x)(A_i(x)X_j(\hat{x}) + B_i(x)Y_j(x))\mu_2$$

avec

$$K_j = Y_j X_j^{-1}$$

Preuve 3.2 *à partir des conditions de la SOS (3.25) - (3.27), nous avons*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j \Psi_{ij} < 0 \tag{3.29}$$

où Ψ_{ij} *est défini dans* (3.28)

L'équation (3.25) *implique que*

$$X_\rho(\hat{x}) \geq X_r(\hat{x}) \qquad \rho = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{3.30}$$

de l'hypothèse 3.1

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho(X_\rho(\hat{x}) - X_r(\hat{x})) \geq \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(X_\rho(\hat{x}) - X_r(\hat{x})) \tag{3.31}$$

de (3.4)*, nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(X_\rho(\hat{x}) - X_r(\hat{x})) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho X_\rho(\hat{x}) + \dot{h}_r X_r(\hat{x}) \\ &= \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho X_\rho(\hat{x}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

l'inégalité (3.28) *peut être écrite ainsi :*

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_{ij11} & * \\ \Psi_{ij21} & -2\mu_2 X_j(\hat{x}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ij11} &= (X_j(\hat{x})A_i^T(x) + Y_j^T(x)B_i^T(x))T^T(x)\mu_1 + \alpha X_j(\hat{x}) \\ &\quad + \mu_1 T(x)(A_i(x)X_j(\hat{x}) + B_i(x)Y_j(x)) \\ &\quad + \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho X_\rho(\hat{x}) - \sum_{k\in K} \frac{\partial\, X_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) \\ \Psi_{ij21} &= (1-\mu_1)X_j(\hat{x}) + T(x)(A_i(x)X_j(\hat{x}) + B_i(x)Y_j(x))\mu_2 \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $X_j(\hat{x}) = P_j^{-1}(\hat{x})$*,* $j, \rho = 1, \ldots, r$*,* $K_j X_j = Y_j$*. Par la multiplication des deux côtés de* (3.33) *par le diag*$\{P_j(\hat{x}), P_j(\hat{x})\}$ *et en appliquant le Lemme 1.10 on trouve*

$$\bar{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{ij11} & * \\ \bar{\Psi}_{ij21} & -2\mu_2 P_j(\hat{x}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{ij11} &= (A_i^T(x) + K_j^T(x)B_i^T(x))T^T(x)\mu_1 P_j(\hat{x}) + \alpha P_j(\hat{x}) \\ &\quad + \mu_1 P_j(\hat{x})T(x)(A_i(x) + B_i(x)K_j(x)) \\ &\quad + \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) + \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) \\ \bar{\Psi}_{ij21} &= (1-\mu_1)P_j(\hat{x}) + \mu_2 P_j(\hat{x})T(x)(A_i(x) + B_i(x)K_j(x)) \end{aligned}$$

on remplaçant les termes $L = \mu_1 P_j(\hat{x})$ *et* $R = \mu_2 P_j(\hat{x})$ *dans l'inégalité* (3.34)*, nous obtenons :*

$$\bar{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{ij11} & * \\ \bar{\Psi}_{ij21} & -R - R^T \end{bmatrix} < 0 \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{ij11} &= (A_i^T(x) + K_j^T(x)B_i^T(x))T^T(x)L^T(x) + \alpha P_j(\hat{x}) \\ &+ L(x)T(x)(A_i(x) + B_i(x)K_j(x)) \\ &+ \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho P_\rho(\hat{x}) + \sum_{k\in K} \frac{\partial\, P_j(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} A_i^k(x)\tilde{x}(x) \\ \bar{\Psi}_{ij21} &= P_j(\hat{x}) - L^T(x) + R(x)T(x)(A_i(x) + B_i(x)K_j(x)) \end{aligned}$$

on remplaçant $(A_i(x) + B_i(x)K_j(x))$ *dans* (3.35) *par* $A_i(x)$*, cela est équivaut à* (3.14)*.*

Remarque 3.3 *Les références précédentes ont proposée des conditions suffisantes pour les systèmes polynomiaux utilisant une approche SOS. Par exemple, [Cao 2014], les conditions de stabilisation sont examinées à l'aide de la fonction polynomiale de Lyapunov (PLF)* $V(x) = \tilde{x}^T(x)P(\hat{x})\tilde{x}(x)$*. Cependant, si* $P_i(\hat{x}) = P(\hat{x})$*, alors* (3.16) *se réduit au PLF utilisé dans [Cao 2014]. De plus, si* $P_i(\hat{x}) = P(\hat{x})$ *et* $\alpha(x) = 0$*, alors la condition du Théorème 3.2 se réduit à la condition du Théorème 2 dans [Tanaka 2009]. Par conséquent,* (3.16) *est une représentation plus générale et le Théorème 3.2 est moins restrictif que le Théorème 1 dans [Cao 2014] et le Théorème 2 dans [Tanaka 2009].*

Remarque 3.4 *Nous avons obtenu une condition suffisante pour la stabilité et la stabilisation en utilisant le concept de taux de décroissance dans la MPLF, son avantage est d'avoir la possibilité de manipuler le temps de convergence. De plus, la solution de MPLF fournit un résultat moins restrictif que les résultats utilisant MLF.*

3.2.4 Simulations numériques

Afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée, nous présentons trois exemples illustratifs. Le premier est utilisé pour comparer les résultats proposés en terme de conservatisme lorsque le système n'est pas polynomial. Le deuxième exemple montre que la fonction polynomiale de Lyapunov d'ordre supérieur permet d'obtenir des résultats plus améliorés en terme de stabilité. Le troisième exemple est fourni pour montrer l'application pratique de la commande polynomiale proposée au problème de l'équilibrage du pendule inversé sur un chariot. Les résultats de la simulation montrent que l'approche proposée via MPLF présente des avantages évidents par rapport à celles développées à partir de PLF.

Exemple 3.1 *Nous considérons le système T-S suivant [Faria 2011]*

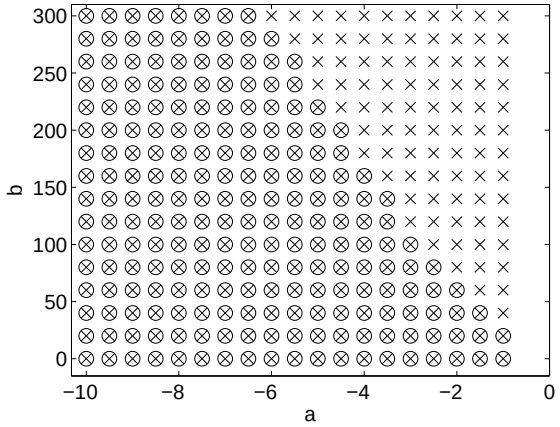


FIGURE 3.1 – Région de faisabilité fournie par le Théorème 1 dans [Faria 2011](o) et le Théorème 3.1 dans ce chapitre (×) pour l'Exemple 3.1

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1-sin(x_i)}{2} & pour \ \ |x_i| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & pour \ \ x_i > \frac{\pi}{2} \\ 1, & pour \ \ x_i < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\beta_i(x_i) = 1 - \alpha_i(x_i)$$

$$h_1 = \alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2), \quad h_2 = \alpha_1(x_1)\beta_2(x_2)$$
$$h_3 = \beta_1(x_1)\alpha_2(x_2), \quad h_4 = \beta_1(x_1)\beta_2(x_2)$$

La stabilité de ce système est vérifiée en utilisant le Théorème 1 dans [Faria 2011] et le Théorème 3.1 dans ce chapitre, pour plusieurs valeurs de paires (a, b), $a \in [-10 \quad -1]$, $b \in [0 \quad 300]$ *et* $\phi_i = 0,85$, $i = 1, 2, \ldots, 4$. *La figure 3.1 montre les régions de stabilité obtenues en utilisant le Théorème 1 dans [Faria 2011] et le Théorème 3.1 : on peut voir que le Théorème 3.1 offre une zone de faisabilité plus grande que celui du Théorème 1 dans [Faria 2011]. L'approche de la SOS utilisée ici est moins restrictive que l'approche LMI utilisée précédemment dans la littérature.*

Exemple 3.2 *Considérons un système polynomial T-S donné par [Guelton 2013]*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2} h_i(x) A_i(x) \tilde{x}(x) \tag{3.36}$$

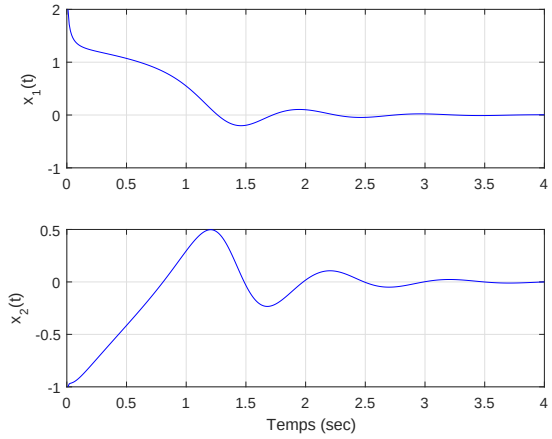


FIGURE 3.2 – Trajectoires des états du système x_1 et x_2 pour l'Exemple 3.2

où

$$h_1(x) = \frac{1 + sinx_1(t)}{2}, \quad h_2(x) = 1 - h_1(x)$$

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} -0.8 - x_1^4 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 - 5x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

La figure 3.2 représente la trajectoire des états pour l'Exemple 3.2, lorsque $\phi_i = 0.85$, $i = 1, 2$, *pour la condition initiale* $x(0) = [2 \quad -1]$.

Les conditions (3.5) - (3.8) *ont été résolues à l'aide de SOSTOOLS [Prajna 2004a] : En se basant sur le Théorème 3.1, des solutions pour la MPLF ont été obtenues en deuxième, quatrième et sixième ordres qui garantissent la stabilité de* (3.36).

Les MPLF obtenus sont les suivants :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{r} h_i p_i(x)$$

pour le deuxième ordre MPLF (équivalent à une MLF)

$$p_1(x) = 0,081983x_1^2 + 0,0094462x_1x_2 + 0.16525x_2^2$$
$$p_2(x) = 0,13586x_1^2 - 0,043762x_1x_2 + 0,11517x_2^2$$

La MPLF de quatrième ordre obtenu par notre approche est donné par

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 0.021338x_1^4 + 0,074702x_1^3x_2 + 0,109x_1^2x_2^2 \\ &\quad - 0.043652x_1x_2^3 + 0,086354x_2^4 \\ p_2(x) &= 0,018942x_1^4 + 0,051212x_1^3x_2 + 0,13143x_1^2x_2^2 \\ &\quad + 0,001372x_1x_2^3 + 0,018778x_2^4 \end{aligned}$$

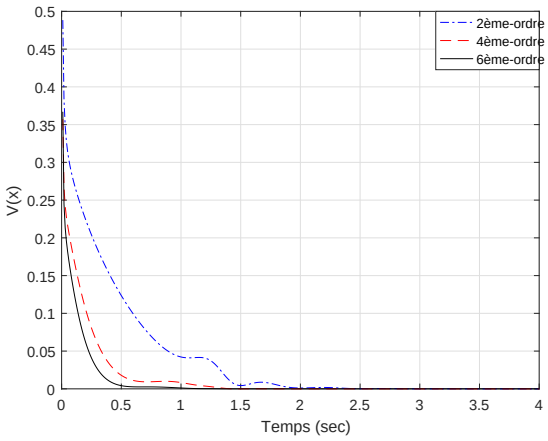


FIGURE 3.3 – Le temps transitoire de la multifonction polynomiale de Lyapunov obtenue pour l'Exemple 3.2

alors que le sixième ordre de la MPLF est donné par

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 0,0077512x_1^6 + 0,028982x_1^5x_2 + 0,038928x_1^4x_2^2 \\ &+ 0.033398x_1^3x_2^3 + 0,07942x_1^2x_2^4 \\ &- 0.048086x_1x_2^5 + 0.026172x_2^6 \\ p_2(x) &= 0,007861x_1^6 + 0,027138x_1^5x_2 + 0,02877x_1^4x_2^2 \\ &- 0.01485x_1^3x_2^3 + 0,048064x_1^2x_2^4 \\ &- 0,0057864x_1x_2^5 + 0.0059572x_2^6 \end{aligned}$$

La MPLF de sixième ordre suivant est obtenu par [Guelton 2013]

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 15.826x_1^6 + 41,007x_1^5x_2 + 11,546x_1^4x_2^2 + 14,596x_1^3x_2^3 \\ &+ 35,996x_1^2x_2^4 + 18,318x_1x_2^5 + 4.6672x_2^6 \\ p_2(x) &= 15.827x_1^6 + 24.8804x_1^4x_2^2 + 39,61x_1^3x_2^3 \\ &+ 43,45x_1^2x_2^4 + 18,64x_1x_2^5 + 47,615x_2^6 \end{aligned}$$

La figure 3.3 montre l'évolution des MPLF construits selon l'approche proposée, nous pouvons constater que les MPLF d'ordre supérieur permettent d'obtenir des résultats moins restrictive. Fig 3.4 montre la comparaison de MPLF de sixième ordre, obtenus à partir du Théorème 3.1 de ce chapitre et du Théorème 1 dans [Guelton 2013]. Il est facile de voir que notre approche permet d'obtenir des résultats de stabilité moins restrictives. Ceci est dû à l'influence du taux de décroissance dans le MPLF.

Exemple 3.3 *Pour montrer l'applicabilité de la méthodologie proposée pour commander des systèmes pratiques, nous examinons le problème de l'équilibrage d'un pendule*

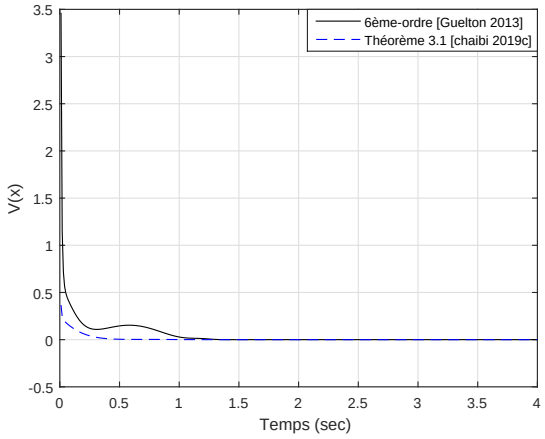


FIGURE 3.4 – Temps transitoire de la MPLF de sixième ordre pour l'Exemple 3.2

inversé sur un chariot, [Cao 2014], représenté par la figure 3.5

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \frac{gsin(x_1(t)) - amlx_2^2(t)sin(2x_1(t))/2 - acos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - amlcos^2(x_1(t))}\end{aligned} \tag{3.37}$$

Où x_1 représente l'angle vertical du pendule, x_2 est la vitesse angulaire, $m = 2,0kg$ et $M = 8,0kg$, sont respectivement les masses du pendule et du chariot, $g = 9,8m/s^2$ est la constante de gravité, $l = 0,5m$ est la demi-longueur du pendule, $u(t)$ est la force exercée sur le panier et $a = \frac{1}{m+M}$

Suivant [Cao 2014], le pendule inversé peut être représenté par le modèle polynomial T-S suivant avec quatre règles floues :

Règle 1 : Si $\sin(x_1)$ *est environ* $1.x_1$ *et* $cos(x_1)$ *est environ* $cos(0°)$,
Alors

$$\dot{x}(t) = A_1(x)\tilde{x}(x) + B_1(x)u(t)$$

Règle 2 : Si $sin(x_1)$ *est environ* $1.x_1$ *et* $cos(x_1)$ *est environ* $cos(88°)$,
Alors

$$\dot{x}(t) = A_2(x)\tilde{x}(x) + B_2(x)u(t)$$

Règle 3 : Si $sin(x_1)$ *est environ* $0,6507.x_1$ *et* $cos(x_1)$ *est environ* $cos(0°)$, *Alors*

$$\dot{x}(t) = A_3(x)\tilde{x}(x) + B_3(x)u(t)$$

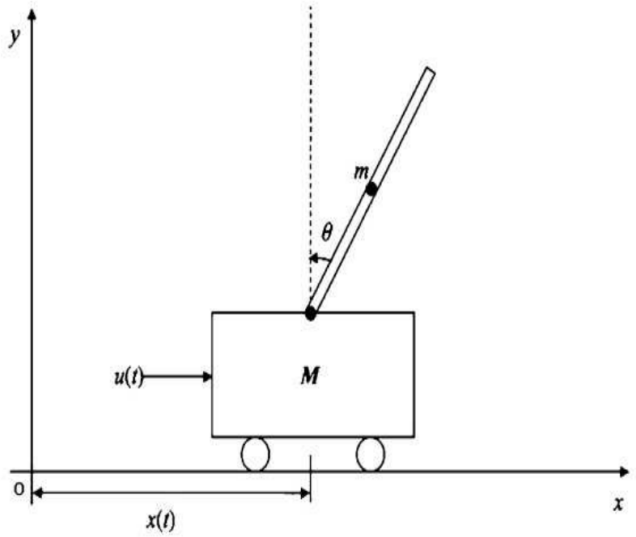


FIGURE 3.5 – Structure du pendule inversé

Règle 4 : Si $sin(x_1)$ *est environ* $0,6507.x_1$ *et* $cos(x_1)$ *est environ* $cos(88°)$*, Alors*

$$\dot{x}(t) = A_4(x)\tilde{x}(x) + B_4(x)u(t)$$

Où $\tilde{x}(x) = [x_1 \;\; x_2]^T$ *et*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.2941 - 0.1765x_2^2 & 0 \end{bmatrix},\ A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 14.7027 - 0.0052x_2^2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_3(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 11.2531 - 0.1148x_2^2 & 0 \end{bmatrix},\ A_4(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.5669 - 0.0034x_2^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1(x) = B_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \end{bmatrix},\ B_2(x) = B_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0052 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'appartenance correspondantes sont

$$h_1(x) = \frac{sin(x_1(t)) - 0.6507x_1(t)}{0.3493x_1(t)} \cdot \frac{cos(x_1(t)) - 0.0349}{0.9651}$$
$$h_2(x) = \frac{sin(x_1(t)) - 0.6507x_1(t)}{0.3493x_1(t)} \cdot \frac{1 - cos(x_1(t))}{0.9651}$$
$$h_3(x) = \frac{x_1(t) - sin(x_1(t))}{0.3493x_1(t)} \cdot \frac{cos(x_1(t)) - 0.0349}{0.9651}$$
$$h_4(x) = \frac{x_1(t) - sin(x_1(t))}{0.3493x_1(t)} \cdot \frac{1 - cos(x_1(t))}{0.9651}$$

Nous résolvons les conditions de la SOS dans le Théorème 3.2, avec $\alpha(x) = 10^{-5}(1 + x_1^2 + x_2^2)$ *et* $\phi = 0.86$*, nous obtenons les gains polynomiales suivants :*

$$K_1(x) = \begin{bmatrix} 0.0097303x_1^2 - 107.29x_2^2 + 9838.2 \\ 0.011982x_1^2 - 0.10655x_2^2 + 747.84 \end{bmatrix}^T,$$

$$K_2(x) = \begin{bmatrix} 0.30972x_1^2 + 690.74x_2^2 + 266010 \\ 0.07552x_1^2 + 145.26x_2^2 + 50370 \end{bmatrix}^T,$$

$$K_3(x) = \begin{bmatrix} 0.0083666x_1^2 - 63.603x_2^2 + 6066.3 \\ 0.01168x_1^2 - 0.75628x_2^2 + 699.87 \end{bmatrix}^T,$$

$$K_4(x) = \begin{bmatrix} 0.0056293x_1^2 - 62.406x_2^2 + 11976 \\ 0.010987x_1^2 - 0.91846x_2^2 + 1207.4 \end{bmatrix}^T$$

La figure 3.6 illustre l'évolution de x_1 *pour le système polynomial flou T–S en boucle*

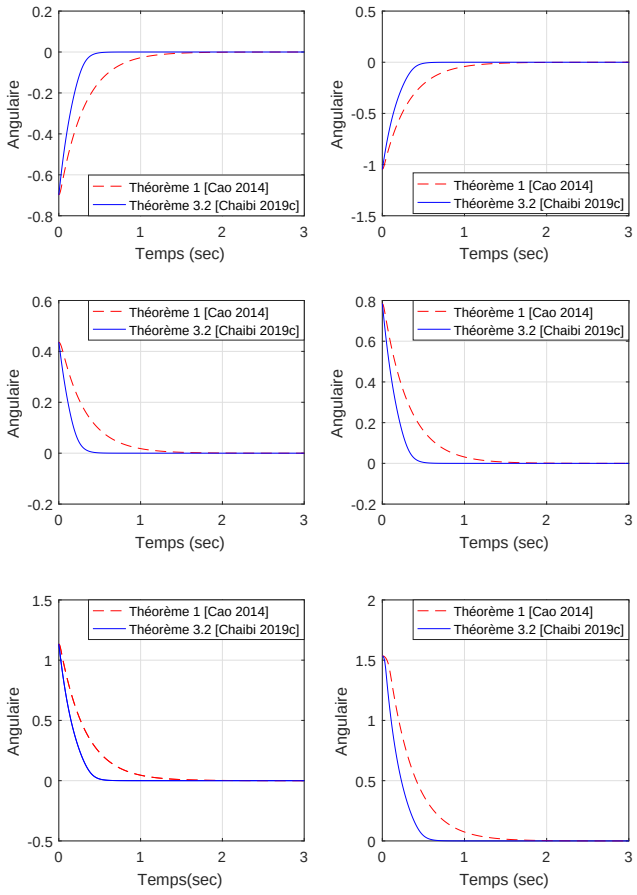


FIGURE 3.6 – Évolution de x_1 pour la commande proposée et la commande de [Cao 2014], à partir de plusieurs conditions initiales (Exemple 3.3)

fermée, à partir des conditions initiales $x_1(0) = -\frac{2}{9}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{36}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{13}{36}\pi, \frac{22}{45}\pi$ *et* $x_2(0) = 0$ *Figues. 3.7 et 3.8 montrent les évolutions des états du système en boucle fermée, pour la condition initiale* $x(0) = [\frac{5}{36}\pi,\ 0]$ *(l'évolution de* x_2 *est similaire aux autres conditions initiales). D'après les fig. 3.6 et 3.7, nous voyons que la méthode proposée stabilise le pendule inversé. De plus, la condition du Théorème 3.2 surpasse l'approche précédente [Cao 2014].*

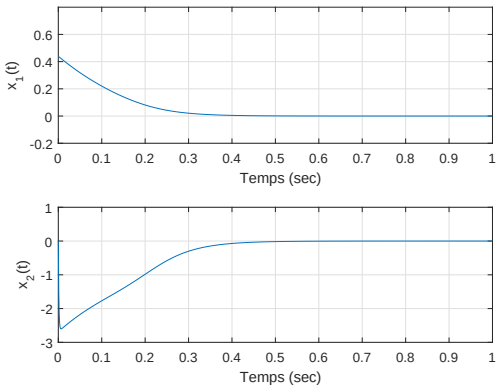


FIGURE 3.7 – Trajectoires des états du système non linéaire en boucle fermée (3.37) à l'aide de la commande proposée, à partir de la condition initiale $x_1(0) = \frac{5}{36}\pi$, $x_2(0) = 0$

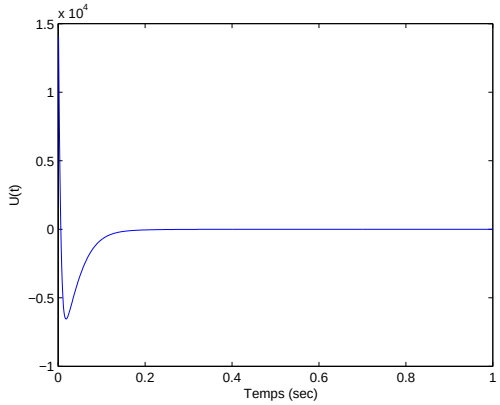


FIGURE 3.8 – Signal de commande pour le système non linéaire (3.37) pour les conditions initiales $x_1(0) = \frac{5}{36}\pi$, $x_2(0) = 0$

3.3 La commande par retour de sortie statique pour les systèmes polynomiaux flous basés sur la somme des carrés (SOS)

Cette partie présente une approche sous forme de la somme des carrés (SOS) pour la synthèse de la commande par retour de sortie statique d'un système non linéaire en utilisant des systèmes polynomiaux flous. Selon l'approche proposée, une commande polynomiale par retour de sortie statique peut être synthétisé facilement.

3.3.1 Formulation du problème

La commande polynomiale par retour de sortie statique considérée dans ce chapitre peut être représentée par le système polynomial flou T–S suivant :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est M_{i1} et ... et $\sigma_s(t)$ est M_{is}

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t) \\ y(t) = C_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) \end{cases} \tag{3.38}$$

où $i = 1, 2, \ldots, r$, $\sigma(t) = [\sigma_1(t)\sigma_2(t)\ldots\sigma_p(t)]$ sont des variables de prémisse, M_{ij} est l'ensemble flou et r le nombre des règles floues. $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de la commande, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ est la sortie mesurée avec les matrices $C_i(x(t))$ de rang plein. $A_i(x(t))$ $B_i(x(t))$ et $C_i(x(t))$ sont des matrices polynomiales dans $x(t)$. Les vecteurs de colonne dont les entrées sont toutes identiques dans $x(t)$ sont notés $\tilde{x}(x(t))$. $\tilde{x}(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de $n \times 1$ monôme dans $x(t)$.

Le processus de défuzzification du modèle T-S (3.38) peut être représenté par (3.39).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma(t))[A_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) + B_i(x(t))u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma(t))C_i(x(t))\tilde{x}(x(t)) \end{cases} \tag{3.39}$$

Dans [Tanaka 2007], le concept de PDC pour la conception de la commande polynomiale floue est proposée. Nous considérons la commande polynomiale floue selon la loi PDC pour concevoir la commande polynomiale par retour de sortie statique.

Règle de la commande i : Si $\sigma_1(t)$ est M_{i1} et ... et $\sigma_s(t)$ est M_{is}

$$Alors \quad u(t) = -F_i(x(t))y(t) \tag{3.40}$$

où $i = 1, 2 \ldots, r$ et $F_i(x(t))$ pour tout i sont les gains de la commande polynomiale par SOF dans $x(t)$.

La commande polynomiale globale est déduite

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma(t))F_i(x(t))y(t) \tag{3.41}$$

En substituant (3.41) dans (3.39), le système flou en boucle fermée peut être représenté par

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l [A_i(x) - B_i(x)F_j(x)C_l(x)]\tilde{x}(x) \tag{3.42}$$

où $h_i = h_i(\sigma(t))$, $h_j = h_j(\sigma(t))$, $h_l = h_l(z(t))$

Théorème 3.3 *[Chaibi 2017a] Le système (3.42) est asymptotiquement stabilisable, s'il existe un matrice symétrique polynomiale $P(\tilde{x})$ et des matrices polynomiales $K_i(x)$, telles que (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47), où $\varepsilon_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$ et $\varepsilon_{ijl}(x)$ sont des polynômes non négatifs tels que $\varepsilon_i(x) > 0$, pour $x \neq 0$, $\varepsilon_{ij}(x) \geq 0$, $\varepsilon_{ijl}(x) \geq 0$, pour tout x, $i, j = 1, 2, \ldots, r$,*

$$\nu_1^T(P(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad sos \tag{3.43}$$

$$\begin{gathered} -\nu_1^T(\Omega_{iii} + \sum_{k\in K}\frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k}A_i^k(x)\tilde{x}(x) + \varepsilon_i(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad sos \\ i = 1, 2, \ldots, r \end{gathered} \tag{3.44}$$

$$\begin{gathered} -\nu_1^T(\Omega_{iij} + \Omega_{iji} + \Omega_{jii} + \sum_{k\in K}\frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial xk}(2A_i^k(x) + A_j^k(x))\tilde{x}(x) \\ + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad sos \\ i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, r; \quad i \neq j \end{gathered} \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered} -\nu_1^T(\Omega_{ijl} + \Omega_{ilj} + \Omega_{jil} + \Omega_{jli} + \Omega_{lij} + \Omega_{lji} + \sum_{k\in K}\frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k}(2A_i^k(x) \\ + 2A_j^k(x) + 2A_l^k(x))\tilde{x}(x) + \varepsilon_{ijl}(x)I)\nu_1 \\ est\ une \quad sos \quad i = 1, \ldots, r-2 \\ j = i+1, \ldots, r-1; \quad l = j+1, \ldots, r \end{gathered} \tag{3.46}$$

$$P(\tilde{x})T(x)B_i(x) = T(x)B_i(x)M(x) \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.47}$$

Avec ν_1, est un vecteur indépendant de $x(t)$, de dimension appropriée.

$$\begin{gathered} \Omega_{ijl} = A_i^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) - C_l^T(x)K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \\ + P(\tilde{x})T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K_j(x)C_l(x) \end{gathered} \tag{3.48}$$

$T(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice polynomiale dont la $(i, j)-$ème entrée est donnée par

$T^{ij}(x) = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x)$. Le gain de la commande stabilisant $F_i(x)$ est définit comme suit : $K_i(x) = M(x)F_i(x)$.

Si la matrice $P(\tilde{x})$ est constante, la stabilité est vérifiée globalement.

Preuve 3.3 *Nous utilisons une fonction polynomiale de Lyapunov représentée par [Tanaka 2007]*

$$V(x) = \tilde{x}^T(x)P(\tilde{x})\tilde{x}(x) \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \{\tilde{x}^T(x)[(\tilde{A}_{ijl}^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) \\ + P(\tilde{x})T(x)\tilde{A}_{ijl} + \sum_{k\in K}\frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k}A_i^k(x)\tilde{x}(x)]\tilde{x}(x)\}\end{aligned} \tag{3.50}$$

où $\tilde{A}_{ijl}(x) = A_i(x) - B_i(x)F_j(x)C_l(x)$
Nous avons l'inégalité suivante.

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \{\tilde{x}^T(x)[(\Omega_{ijl} + \sum_{k\in K}\frac{\partial\, P(\tilde{x})}{\partial x_k}A_i^k(x)\tilde{x}(x))]\tilde{x}(x)\} \leq 0 \tag{3.51}$$

Où

$$\begin{aligned}\Omega_{ijl} = A_i^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) - C_l^T(x)K_j^T(x)B_i^T(x)T^T(x) \\ + P(\tilde{x})T(x)A_i(x) - T(x)B_i(x)K_j(x)C_l(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \Omega_{ijl} = \sum_{i=1}^{r} h_i^3\Omega_{iii} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{r} h_i^2 h_j(\Omega_{iij} + \Omega_{iji} \\ + \Omega_{jii}) + \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{l=j+1}^{r} h_i h_j h_l(\Omega_{ijl} \\ + \Omega_{ilj} + \Omega_{jil} + \Omega_{jli} + \Omega_{lij} + \Omega_{lji})\end{aligned} \tag{3.52}$$

Remarque 3.5 *La différence entre le système flou T–S et le système polynomial flou T–S réside dans la représentation de la partie résultante. Cela signifie que, si $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_l(x)$ et $F_j(x)$ dans (3.42) et $P(\tilde{x})$ sont des matrices constantes pour tout i, j et l et $\tilde{x}(x) = x$ alors nous obtenons la même représentation du système flou T–S proposé dans la littérature [Jeung 2014]. Par conséquent, le système polynomial flou T–S est une représentation plus générale.*

3.3.2 Exemples de Simulations

Afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée, nous considérons le système non linéaire (3.53) suivant [Fang 2006].

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + \sin x_3(t) - 0.1x_4(t) + (x_1^2(t) + 1)u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_1^2 x_2(t) - 0.3x_3(t) \\
\dot{x}_4(t) &= \sin x_3(t) - x_4(t) \\
y_1(t) &= x_2(t) + (x_1^2(t) + 1)x_4(t) \\
y_2(t) &= x_1(t)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Supposons que $x_1(t) \in$ [-a a], $x_3(t) \in$ [-b b], où a et b sont des nombres positifs.
les fonctions d'appartenance sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
M_1^1(x_1) &= \frac{x_1^2}{a^2} \\
M_1^2(x_1) &= 1 - M_1^1(x_1) \\
M_2^1(x_3) &= \begin{cases} \frac{b \sin x3 - x3 \sin b}{x_3(b - \sin b)} & x_3 \neq 0 \\ 1 & x_3 = 0 \end{cases} \\
M_2^2(x_3) &= 1 - M_2^1(x_1)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Le système non linéaire (3.53) peut être représenté par le système flou T-S comme suit :
Règle du système 1 : Si $x_1(t)$ est M_1^1 et $x_3(t)$ est M_2^1

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

Règle du système 2 : Si $x_1(t)$ est M_1^1 et $x_3(t)$ est M_2^2

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

Règle du système 3 : Si $x_1(t)$ est M_1^2 et $x_3(t)$ est M_2^1

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t) \\ y(t) = C_3 x(t) \end{cases}$$

Règle du système 4 : Si $x_1(t)$ est M_1^2 et $x_3(t)$ est M_2^2

$$Alors \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t) \\ y(t) = C_4 x(t) \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\sin b}{b} & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin b}{b} & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\sin b}{b} & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin b}{b} & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1+a^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_1, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = B_3$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1+a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.6 *Dans cette section, nous observons que le nombre de règle floue pour le système polynomial flou est généralement égal ou inférieur à celui du système flou T–S et que la méthode de la SOS utilisée pour le système polynomial flou fournit des résultats plus souples que les approches LMI existantes dans la littérature pour le système flou T–S.*

Pour $a = 1,4$ et $b = 0,7$, nous appliquons le Théorème 3.3, dans le cas où la matrice de Lyapunov P et les gains de la commande par retour de sortie statique ne sont pas des polynômes. Les gains de retour de sortie statique obtenus sont donnés dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1 – Les gains de la commande par SOF F_i $i = 1, ..., 4$

Methods	F_1	F_2	F_3	F_4
[Jeung 2014]	[−5.55 − 55.50]	[−5.85 − 56.95]	[−10.20 − 82.72]	[−10.34 − 83.49]
Théorème 3.3 [Chaibi 2017a]	[0.55 4.49]	[0.565 4.61]	[1.13 7.15]	[1.13 7.11]

La figure 3.9 montre la zone de faisabilité obtenue par des conditions de stabilité sous forme d'LMI (Théorème 3 dans [Jeung 2014]). La Figure 3.10 montre la zone de faisabilité obtenue par les conditions de stabilité du Théorème 3.3. Où a et b satisfaisant $2 \leq a \leq 9$ et $0,01 \leq b \leq 9$.

En comparant les deux figures 3.9 et 3.10, la méthode de la SOS proposée dans le Théorème 3.3 offre une zone de faisabilité plus grande que celle de (Théorème 3 dans [Jeung 2014]). Par conséquent, l'approche de la SOS est moins restrictive que

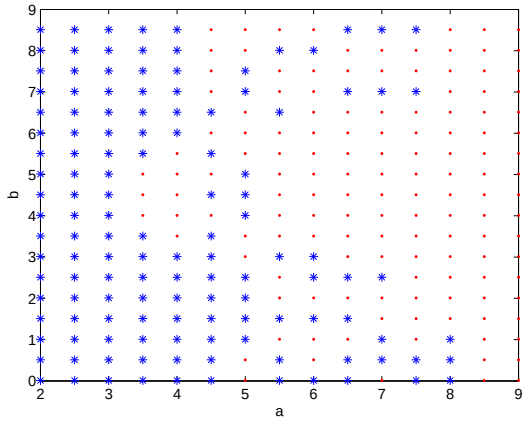


FIGURE 3.9 – La zone de faisabilité trouvée par Théorème 3 dans [Jeung 2014].

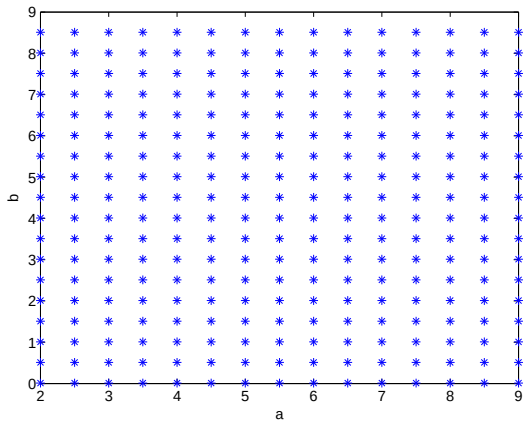


FIGURE 3.10 – La zone de faisabilité trouvée pour le modèle polynomial flou, (Théorème 3.3).

l'approche LMI. Les symboles (*) et (.) dans la figure 3.9, représentent respectivement les régions de la faisabilité obtenues par les conditions LMI dans le Théorème 3 [Jeung 2014] et les régions pour lesquelles ces conditions d'LMI sont infaisables.

Le modèle flou T-S du système (3.53) a quatre règles. Nous verrons que le système non linéaire (3.53) peut être converti en système polynomial flou T-S avec deux règles pour $x_1 \in (-\infty + \infty)$. Où $\tilde{x}(x)$=x=$[x_1 \quad x_2]^T$

Les fonctions d'appartenance sont données comme suit :

$$h_1(\sigma(t)) = \begin{cases} \frac{b \sin x3 - x3 \sin b}{x_3(b - \sin b)} & x_3 \neq 0 \\ 1 & x_3 = 0 \end{cases} \qquad (3.55)$$
$$h_2(\sigma(t)) = 1 - h_1(\sigma(t))$$

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\sin b}{b} & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin b}{b} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(x) = B_2(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1(x) = C_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 + x_1^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

La condition de conception de la commande polynomiale floue par l'approche de la SOS dans Théorème 3.3 est faisable. Les gains de la commande par SOF $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont obtenus sous la forme suivante :

$$F_1 = [\frac{-(2.61.10^{-1}x_2^2 + 1.3x_3^2 + 4.04.10^{-1}x_4^2)10^{-4}}{(2.52x_2^2 + 1.8x_3^2 + 6.89x_4^2)} \quad \frac{(0.232x_2^2 + 0.263x_3^2 + 0.238x_4^2)}{(2.52x_2^2 + 1.8x_3^2 + 6.89x_4^2)10^{-4}}],$$
$$F_2 = [\frac{-(2.38x_2^2 + 9.94x_3^2 + 2.33x_4^2)10^{-5}}{(2.52x_2^2 + 1.8x_3^2 + 6.89x_4^2)} \quad \frac{(0.23x_2^2 + 0.253x_3^2 + 0.236x_4^2)}{(2.52x_2^2 + 1.8x_3^2 + 6.89x_4^2)10^{-4}}]$$

Les figures 3.11 - 3.12 montrent les trajectoires du système non linéaire en boucle fermée (3.53), obtenus par l'approche LMI (r=4), du Théorème 3 dans [Jeung 2014] et par l'approche de la SOS (r=2) dans le Théorème 3.3. En comparant Fig. 3.11 - 3.12, il est clair que la convergence des trajectoires des états du système avec l'approche de la SOS est plus rapide que celle avec l'approche LMI.

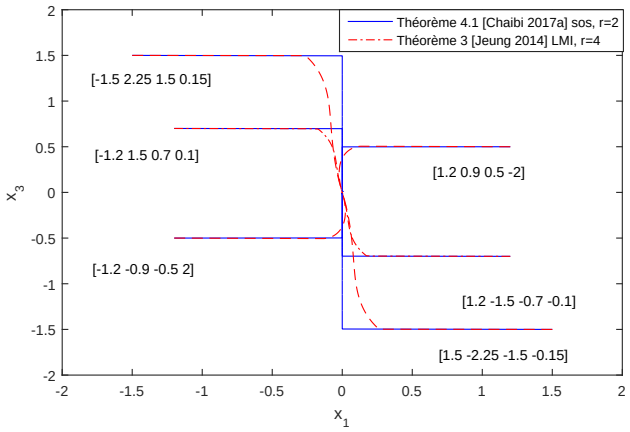


FIGURE 3.11 – Trajectoires du système non linéaire en boucle fermée (3.53) dans les plans de phase x_1 - x_3 pour certaines conditions initiales.

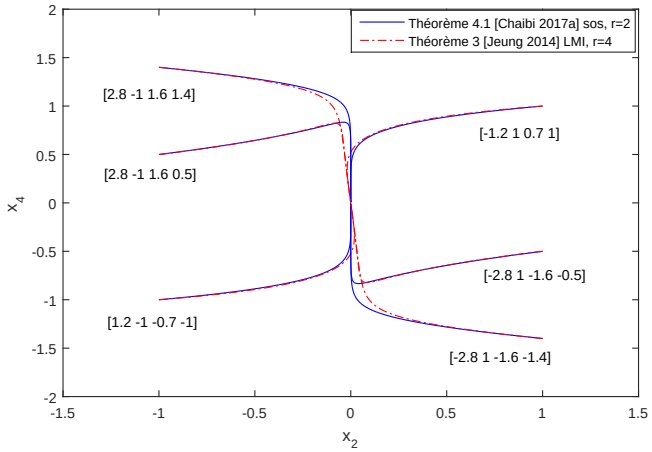


FIGURE 3.12 – Trajectoires pour le système non linéaire en boucle fermée (3.53) dans les plans de phase x_2 - x_4 pour certaines conditions initiales.

3.4 Conclusion

Ce chapitre aborde la commande des systèmes polynomiaux flous T–S en temps continu en utilisant une approche de la somme des carrés (SOS). En considérant explicitement le taux de décroissance au sein de la multifonction polynomiale de Lyapunov et en utilisant les propriétés des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance, nous obtenons des conditions de stabilité et de stabilisation qui améliorent les résultats précédents. De plus, la commande par retour de sortie statique pour les systèmes polynomiaux flous, a été aussi proposés sous forme de SOS. Les conditions de stabilisation sont obtenues en utilisant la fonction polynomiale de Lyapunov. Les résultats montrent que la zone de faisabilité en utilisant l'approche de la SOS est moins restrictive qu'en utilisant l'approche LMI existante dans la littérature. Des exemples de simulation ont été présenté pour illustrer l'efficacité de notre approche.

Chapitre 4

Commande H_∞ par SOF pour des systèmes polynomiaux flous incertains dans le domaine des fréquences finies

4.1 Introduction

Il convient de noter que la commande par SOF pour les systèmes polynomiaux n'est pas largement étudiée en tant que contrepartie linéaire. Nous pouvons citer [Yu 2016], où la commande robuste H_∞ de système polynomial incertain a été étudiée. La stabilisation et la commande H_∞ par retour de sortie dynamique pour les systèmes polynomiaux en temps discret ont été discutés dans [Chaibi 2016] et [Ye 2016] respectivement. Basée sur la fonction polynomiale de Lyapunov, une commande polynomiale floue par SOF a récemment été dérivée en terme de SOS dans [Chaibi 2017a]. [Baldi 2016] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation des systèmes polynomiaux par SOF et [Krug 2013] a étudié une commande H_∞ par SOF pour les systèmes polynomiaux avec des incertitudes paramétriques. Dans les travaux abordés, les conditions sont bi-linéaires dans les variables de décision. Un algorithme itératif basé sur la décomposition de la SOS, qui dépend des valeurs initiales, a été développé pour résoudre numériquement le problème de stabilisation. Cependant, le choix des valeurs initiales reste un problème ouvert.

Tous les modèles de la commande H_∞ par SOF précédemment cités traitent la gamme des fréquences entières (EF), alors que dans ce cas, les approches de conception standard pour l'ensemble des domaines de fréquences peuvent apporter un conservatisme. Il est donc important et plus pratique de concevoir une commande H_∞ par SOF en domaine de fréquence finie (FF). Cependant, il est difficile d'utiliser le Lemme GKYP en cas de fréquence finie pour rechercher la commande H_∞ par SOF. Certaines approches ont été proposées pour traiter le Lemme de GKYP en utilisant des techniques d'LMI. Nous pouvons citer [Chaibi 2019a], où le problème de la commande H_∞ par SOF en FF pour des systèmes T–S continus a été fourni. De plus [Errachid 2018] a discuté la commande H_∞ dans le domaine de FF basée sur l'observateur pour les systèmes flous T–S en temps discret. [Wang 2017] et [Errachid 2017] traitent le problème de la stabilisation pour les systèmes continus avec le Lemme GKYP. Il est intéressant de noter que tous ces documents démontrent que les conditions en FF sont générale-

ment moins restrictives que leurs contreparties dans le domaine de EF et contiennent les conditions standards en tant que cas particuliers. Cependant, il existe très peu de littérature sur les systèmes polynomiaux flous avec le domaine de FF. Cependant, aucun résultat concernant la commande H_∞ par SOF pour les systèmes polynomiaux flous en FF n'est disponible dans la littérature et ce problème reste important et difficile à résoudre. Cela motive le travail actuel.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour la commande robuste H_∞ par SOF pour des systèmes polynomiaux flous T–S en FF. Plus précisément, en utilisant Lemme GKYP, des conditions suffisantes sont alors établies. La commande robuste H_∞ par SOF est proposée et formulée sous la forme de la SOS. De cette manière, la non-linéarité des systèmes polynomiaux peut-être manipulée avec précision. En comparaison avec les approches de la littérature, la méthode proposée ne nécessite ni transformation matricielle ni contraintes d'égalité, qui sont difficiles à satisfaire. Par conséquent, la méthode proposée peut non seulement garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, mais également conduire à des résultats moins restrictifs.

4.2 Préliminaire et Formulation du problème

Considérons le système polynomial flou T–S suivant, en temps discret avec des incertitudes paramétriques :

Règle du système i : SI $\varsigma_1(x(k))$ est M_{i1} est ... ET $\varsigma_p(x(k))$ est M_{ip} Alors

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{A}_i(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{B}_i(x(k))u(k) + \bar{E}_i(x(k))\omega(k) \\ z(k) = \bar{C}_{1i}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{D}_i(x(k))u(k) + \bar{F}_i(x(k))\omega(k) \\ y(k) = \bar{C}_{2i}(x(k))\tilde{x}(x(k)) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $i = 1, 2, \ldots, r$ et r représente le numéro de la règle SI-ALORS, $\varsigma_1(x(k)) = [\varsigma_1(x(k))\ \varsigma_2(x(k)) \ldots \varsigma_p(x(k))]$ sont les variables de prémisses connues, M_{ij} sont des ensembles flous, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ est l'entrée de commande, $y(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ est la sortie mesurée. $\omega(k) \in \mathbb{R}^{m_4}$ est le signal de perturbation supposé être le signal arbitraire dans $\mathcal{L}_2[0, \infty)$. Le vecteur de colonne dont les entrées sont toutes définies dans $x(k)$ est désigné par $\tilde{x}(x(k))$. $\tilde{x}(x(k)) \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur de $N \times 1$ monôme dans $x(k)$. $\bar{A}_i(x(k))$, $\bar{B}_i(x(k))$, $\bar{E}_i(x(k))$, $\bar{C}_{1i}(x(k))$, $\bar{D}_i(x(k))$, $\bar{F}_i(x(k))$ et $\bar{C}_{2i}(x(k))$ sont des matrices polynomiales dans $x(k)$ qui se composent de deux parties :

$$\begin{aligned} \bar{A}_i(x(k)) &= A_i(x(k)) + \Delta A_i(k), & \bar{B}_i(x(k)) &= B_i(x(k)) + \Delta B_i(k) \\ \bar{E}_i(x(k)) &= E_i(x(k)) + \Delta E_i(k), & \bar{C}_{1i}(x(k)) &= C_{1i}(x(k)) + \Delta C_{1i}(k) \\ \bar{D}_i(x(k)) &= D_i(x(k)) + \Delta D_i(k), & \bar{F}_i(x(k)) &= F_i(x(k)) + \Delta F_i(k) \\ \bar{C}_{2i}(x(k)) &= C_{2i}(x(k)) + \Delta C_{2i}(k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $A_i(x(k))$, $B_{1i}(x(k))$, $E_i(x(k))$, $C_{1i}(x(k))$, $D_i(x(k))$, $F_i(x(k))$ et $C_{2i}(x(k))$, sont des matrices polynomiales de dimensions compatibles, $\Delta A_i(k)$, $\Delta B_{1i}(k)$, $\Delta E_i(k)$, $\Delta C_{1i}(k)$, $\Delta D_i(k)$, $\Delta F_i(k)$ et $\Delta C_{2i}(k)$ sont les incertitudes de paramètres variables dans le temps avec des dimensions compatibles décrites par :

$$\begin{aligned} \Delta A_i(k) &= X_x \Delta(k) Y_{Ai}, \quad \Delta B_i(k) = X_x \Delta(k) Y_{Bi}, \\ \Delta E_i(k) &= X_x \Delta(k) Y_{Ei}, \quad \Delta C_{1i}(k) = X_z \Delta(k) Y_{C1i}, \\ \Delta D_i(k) &= X_z \Delta(k) Y_{Di}, \quad \Delta F_i(k) = X_z \Delta(k) Y_{Fi}, \\ \Delta C_{2i}(k) &= X_y \Delta(k) Y_{C2i}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où X_x, X_z X_y, Y_{AI}, Y_{Bi}, Y_{Ei}, Y_{C1i}, Y_{Di}, Y_{Fi} et Y_{C2i}, $i = 1, 2, ...r$, sont des matrices constantes réelles connues et $\Delta(k)$ sont des matrices inconnues variables dans le temps, satisfaisant : $\Delta(k)^T \Delta(k) \leq I$

Le processus de défuzzification du système polynomial flou T–S (4.1) peut être représenté par (4.4)

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k)))[\bar{A}_i(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{B}_i(x(k))u(k) + \bar{E}_i(x(k))\omega(k)] \\ z(k) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k)))[\bar{C}_{1i}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{D}_i(x(k))u(k) + \bar{F}_i(x(k))\omega(k)] \\ y(k) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k)))\bar{C}_{2i}(x(k))\tilde{x}(x(k)) \end{cases} \tag{4.4}$$

où

$$h_i(\varsigma(x(k))) = \frac{w_i(\varsigma(x(k)))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(x(k)))}, \; w_i(\varsigma(x(k))) = \prod_{j=1}^{s} M_{ij}(\varsigma_j(x(k)))$$

$M_{ij}(\varsigma_j(x(k)))$ est le grade de la fonction d'appartenance de $\varsigma_j(x(k))$ dans M_{ij} et $w_i(\varsigma(x(k)))$ représente le poids de la i-ème règle. Dans ce chapitre, nous supposons que $w_i(\varsigma(x(k))) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(x(k))) > 0$ pour tout k. Par conséquent, nous obtenons $h_i(\varsigma(x(k))) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k))) = 1$ pour tout k.

Différent de [Fang 2006, Jeung 2014, Chang 2015b, Chen 2016, Zhong 2017], ce chapitre considère explicitement la commande H_∞ avec des incertitudes dans le domaine des fréquences finies pour le système polynomial flou T–S.

Remarque 4.1 *Notons que d'après les études précédentes sur les modèles polynomiaux flous, [Tanaka 2008, Tanaka 2009, Chaibi 2016, Chaibi 2017a] l'approche de la SOS présente un grand avantage. Il s'agit d'une généralisation des approches existantes du système flou T–S et d'une représentation plus efficace des systèmes de com-*

mande non linéaires. En fait, l'approche de la SOS utilisée ici est moins restrictive que l'approche LMI et les résultats suggérés dans ce chapitre incluent ceux précédemment utilisés dans la littérature [Chang 2015b].

Basée sur la loi de compensation parallèle distribuée (PDC) [Tanaka 2008] fréquemment utilisée pour concevoir la commande polynomiale floue, la commande par SOF du système polynomial flou T–S (4.4) est représentée ci-dessous

Règle de la commande i : SI $\varsigma_1(x(k))$ est M_{i1} ET ... ET $\varsigma_s(k)$ est M_{is} ALORS

$$u(k) = K_i(x(k))y(k) \tag{4.5}$$

où $i = 1, 2 \ldots, r$ et $K_i(x(k))$ sont les gains de la commande polynomiale floue, qui dépendent de $x(k)$.

La commande polynomiale par SOF globale est déduite comme suit :

$$\begin{aligned} u(k) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k)))K_i(x(k))y(k) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(\varsigma(x(k)))h_j(\varsigma(x(k)))K_i(x(k))\bar{C}_{2j}(x(k))\tilde{x}(x(k)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

En combinant (4.6) et (4.4), le système polynomial flou en boucle fermée peut être représenté comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l[(\bar{A}_{ijl}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{E}_i(x(k))\omega(k)] \\ z(k) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l[\bar{C}_{ijl}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{F}_i(x(k))\omega(k)] \end{cases} \tag{4.7}$$

où

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{ijl}(x(k)) = \bar{A}_i(x(k)) + \bar{B}_i(x(k))K_j(x(k))\bar{C}_{2l}(x(k)) \\ &\bar{C}_{ijl}(x(k)) = \bar{C}_{1i}(x(k)) + \bar{D}_i(x(k))K_j(x(k))\bar{C}_{2l}(x(k)) \\ &h_i = h_i(\varsigma(x(k))), \quad h_j = h_j(\varsigma(x(k))), \quad h_l = h_l(\varsigma(x(k))). \end{aligned}$$

Nous considérerons $T(x(k))$ qui est une matrice polynomiale définie par $\tilde{x}(k+1) = T(x(k+1))x(k+1)$, donc le système polynomial (4.7) peut être représenté par :

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l [(\bar{A}_{Tijl}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{E}_{Ti}(x(k))\omega(k)] \\ z(k) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l [\bar{C}_{ijl}(x(k))\tilde{x}(x(k)) + \bar{F}_i(x(k))\omega(k)] \end{cases} \tag{4.8}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{A}_{Tijl}(x(k)) &= T(x^+)\bar{A}_i(x(k)) + T(x^+)\bar{B}_i(x(k))K_j(x(k))\bar{C}_{2l}(x(k)) \\ \bar{E}_{Ti}(x(k)) &= T(x^+)\bar{E}_i(x(k)), \qquad T(x^+) = T(x(k+1)) \end{aligned}$$

Lemme 4.1 *[Chibani 2018] La dynamique du système (4.8) a un niveau $\gamma > 0$ d'atténuation des perturbations H_∞ dans le domaine de fréquence finie, s'il existe des matrices symétriques polynomiales $P_h(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{r} h_i(k)P_i(\hat{x})$, $P_{h^+}(\hat{x}) = \sum_{s=1}^{r} h_s(k+1)P_s(\hat{x})$ et $Q(x) > 0$, telle que les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \tilde{A}_T(x) & \tilde{E}_T(x) \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_T(x) & \tilde{E}_T(x) \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \tilde{C}^T(x)\tilde{C}(x) & \tilde{C}^T(x)\tilde{F}(x) \\ \tilde{F}^T(x)\tilde{C}(x) & \tilde{F}^T(x)\tilde{F}(x) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix}$ et Ω sont définis dans le Tableau 4.1, avec $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$, $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2$ et

$$\tilde{A}_T(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{A}_{Tijl}(x(k)), \quad \tilde{E}_T(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{E}_{Ti}(x(k))$$
$$\tilde{C}(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{C}_{ijl}(x(k)), \quad \tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_i h_j h_l \bar{F}_i(x(k))$$

Remarque 4.2 *Ce chapitre présente une commande H_∞ par SOF pour les systèmes polynomiaux flous avec une FF. Comme indiqué dans [Chibani 2018], les conditions à des FF sont plus générales et contiennent les conditions à des EF en tant que cas particuliers, ce qui signifie que notre travail couvre l'ensemble des solutions de [Chang 2015b], tout en garantissant des conditions moins restrictives.*

4.3 Commande H_∞ par SOF en FF

Cette section présente les principaux résultats de ce chapitre. Pour simplifier les notations, nous utiliserons x au lieu de $x(k)$ et $\tilde{x}(x)$ au lieu de $\tilde{x}(x(k))$. Nous sommes

Tableau 4.1 – Σ_1, Σ_2 et Σ_3 dans différentes gammes de fréquences.

Gamme de fréquence Ω	$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2^* & \Sigma_3 \end{bmatrix}$
basse fréquence $\lvert\theta\rvert \leq \theta_l$	$\begin{bmatrix} -P_{h^+}(\hat{x}) & Q(x) \\ Q(x) & P_h(\hat{x}) - 2cos(\theta_l)Q(x) \end{bmatrix}$
moyenne fréquence $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	$\begin{bmatrix} -P_{h^+}(\hat{x}) & e^{(j\theta_c)}Q(x) \\ e^{(-j\theta_c)}Q(x) & P_h(\hat{x}) - 2cos(\theta_\omega)Q(x) \end{bmatrix}$
haute fréquence $\theta_h \leq \lvert\theta\rvert$	$\begin{bmatrix} -P_{h^+}(\hat{x}) & -Q(x) \\ -Q(x) & P_h(\hat{x}) + 2cos(\theta_h)Q(x) \end{bmatrix}$

maintenant en mesure de présenter une nouvelle approche pour la commande H_∞ par SOF dans une fréquence finie pour les systèmes polynomiaux flous T-S en temps discret.

Théorème 4.1 *[Chaibi 2019a] Soit $\gamma > 0$, le système flou en boucle fermée (4.8) est robustement stable avec la performance H_∞ s'il existe une matrice polynomiale $G(x)$ et des matrices symétriques polynomiales $\bar{P}_i(\hat{x}) > 0$, $Q(x) > 0$ et $P_i(\hat{x})$, les scalaires $\varepsilon_i(x)$, sont des polynômes non négatifs $i, = 1, 2, \ldots, r$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\nu_1^T(\bar{P}_i(\hat{x}) - \varepsilon_i(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \tag{4.10}$$

$$\nu_1^T(Q(x) - \varepsilon_1(x)I)\nu_1 \quad est\ une \quad SOS \tag{4.11}$$

$$-\nu_2^T(\Omega(x) + \varepsilon_1(x)I)\nu_2 \quad est\ une \quad SOS \tag{4.12}$$

$$-\nu_3^T(\bar{\Omega}(x) + \varepsilon_1(x)I)\nu_3 \quad est\ une \quad SOS \tag{4.13}$$

où

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 - G^T(x) & 0 & 0 \\ * & \Sigma_3 + sym\{G(x)\tilde{A}_T(x)\} & G(x)\tilde{E}_T(x) & \tilde{C}^T(x)H^T(x) \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{F}^T(x)H^T(x) \\ * & * & * & I - H(x) - H^T(x) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.14}$$

$$\bar{\Omega}(x) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{h+}(\hat{x}) - G(x) - G^T(x) & G(x)\tilde{A}_T(x) \\ * & -\bar{P}_h(\hat{x}) \end{bmatrix} < 0 \tag{4.15}$$

avec Σ_1, Σ_2 et Σ_3 se trouvent dans la Tableau 4.1 et ν_i $i = 1, ..., 7$ sont des vecteurs

indépendants de $x(k)$.

Preuve 4.1 *on peut vérifier que (4.15) est équivalent à,*

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{h+}(\hat{x}) & 0 \\ * & -\bar{P}_h(\hat{x}) \end{bmatrix} + sym\left(\begin{bmatrix} G(x) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \tilde{A}_T(x) \end{bmatrix} \right) < 0 \tag{4.16}$$

On utilisant Lemme 1.5 avec

$$\nprec = \begin{bmatrix} \bar{P}_{h+}(\hat{x}) & 0 \\ * & -\bar{P}_h(\hat{x}) \end{bmatrix}, \quad X = I, \quad Y = \begin{bmatrix} G(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A}_T(x) \end{bmatrix}$$

l'inégalité (4.16) peut garantir

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_T(x)^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{h+}(\hat{x}) & 0 \\ * & -\bar{P}_h(\hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_T(x) \\ I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.17}$$

Cela implique que le système en boucle fermée avec $\omega(k) = 0$ est asymptotiquement stable

Considérant le fait que $-(V - X)X^{-1}(V - X)^T \leq 0$, $X > 0$, ce qui implique que $-VX^{-1}V^T \leq -V - V^T + X$, multipliant (4.14) par $diag\{I, I, I, H(x)^{-1}\}$ à gauche et sa transposé à droite. Nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 - G^T(x) & 0 & 0 \\ * & \Sigma_3 + sym\{G(x)\tilde{A}_T(x)\} & G(x)\tilde{E}_T(x) & \tilde{C}^T(x) \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{F}^T(x) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.18}$$

soit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \\ \Sigma_2^T & \Sigma_3 + \tilde{C}^T(x)\tilde{C}(x) & \tilde{C}^T(x)\tilde{F}(x) \\ 0 & \tilde{F}^T(x)\tilde{C}(x) & \tilde{F}^T(x)\tilde{F}(x) - \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad X = I, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ G(x) \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$Z = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A}_T(x) & \tilde{E}_T(x) \end{bmatrix}$$

$Z = [-I \quad \tilde{A}_T(x) \quad \tilde{E}_T(x)]$ avec Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont définis dans le Tableau 4.1. Par le complément de Schur, (4.18) est équivalent à

$$\Sigma + sym\{X^T Y Z\} < 0 \tag{4.19}$$

En choisissant $Z^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{A}_T(x) & \tilde{E}_T(x) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et en appliquant le Lemme 1.5, nous obte-

nons de (4.19) *que* (4.9) *est satisfaite.*
La preuve est terminée

Remarque 4.3 *Notons que si* $\bar{P}_h(\hat{x})$ *est une matrice constante et que* $\tilde{x}(x(k)) = x(k)$ *alors* (4.17) *se réduit au multifonction de Lyapunov* $\tilde{x}^T(k+1)\bar{P}_{h+}\tilde{x}(k+1) - \tilde{x}^T(k)\bar{P}_h\tilde{x}(k) < 0$ *utilisée dans la littérature, donc* (4.17) *est une représentation plus générale et réduira le conservatisme dans les conditions développées.*

Remarque 4.4 *Théorème 4.1 n'est pas un problème convexe, en raison de l'existence de termes bilinéaires* $G_T(x)\bar{B}_i(x)K_j(x)\bar{C}_{2l}(x)$ *et* $G_T(x)\bar{D}_i(x)K_j(x)\bar{C}_{2l}(x)$*, qui sont difficiles à traiter numériquement. Pour surmonter ce problème, il existe de nombreuses méthodes convexes pour la conception de la commande par SOF dans la littérature. Des conditions suffisantes avec une contrainte d'égalité ont été utilisées dans [Feng 2006] et [Chaibi 2017a] pour le système flou T–S. Dans [Krug 2013] et [Baldi 2016], l'approche itérative de la SOS a été développée pour résoudre numériquement les problèmes par SOF pour les systèmes polynomiaux. Notons que les approches itératives dépendent des valeurs initiales. Cependant, comment sélectionner les valeurs initiales reste un problème ouvert. Ainsi, pour éviter cet inconvénient, une méthode de conception SOS est fournie dans ce chapitre sans aucune contrainte d'égalité.*

Théorème 4.2 *[Chaibi 2019a] Le système flou en boucle fermée* (4.8) *est robustement stable avec une commande* H_∞ *de performance* $\gamma > 0$ *s'il existe un scalaire connu* ξ*, des matrices symétriques polynomiales définies positives* $\bar{P}_i(\hat{x})$*,* $Q(x)$*, matrices symétriques polynomiales* $P_i(\hat{x})$*, matrices polynomiales* $G(x)$*,* $U(x)$ *et* $N_j(x)$ *pour* $i, j = 1, 2, ..., r$ *tels que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$condition \quad SOS \quad (4.10)$$
$$condition \quad SOS \quad (4.11)$$

$$-\nu_4^T(\Psi_{siii} + \varepsilon_i(x)I)\nu_4 \quad est\ une \quad SOS \quad i, s = 1, 2..., r \tag{4.20}$$

$$-\nu_4^T(\Psi_{siij} + \Psi_{siji} + \Psi_{sjii} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_4 \quad est\ une \quad SOS \quad i \neq j = 1, 2..., r \tag{4.21}$$

$$-\nu_4^T(\Psi_{sijl} + \Psi_{silj} + \Psi_{sjil} + \Psi_{sjli} + \Psi_{slij} + \Psi_{slji} + \varepsilon_{ijl}(x)I)\nu_4 \quad est\ une \quad SOS \quad 1 \leq i < j < l \leq r \tag{4.22}$$

$$-\nu_5^T(\bar{\Psi}_{siii} + \varepsilon_i(x)I)\nu_5 \quad est\ une \quad SOS \quad i, s = 1, 2.., r \tag{4.23}$$

$$-\nu_5^T(\bar{\Psi}_{siij} + \bar{\Psi}_{siji} + \bar{\Psi}_{sjii} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_5 \quad est\ une \quad SOS \quad i \neq j = 1, 2.., r \tag{4.24}$$

$$-\nu_5^T(\bar{\Psi}_{sijl} + \bar{\Psi}_{silj} + \bar{\Psi}_{sjil} + \bar{\Psi}_{sjli} + \bar{\Psi}_{slij} + \bar{\Psi}_{slji} + \varepsilon_{ijl}(x)I)\nu_5 \quad est\ une \quad SOS \quad 1 \leq i < j < l \leq r \tag{4.25}$$

Où

$$\Psi_{sijl} = \begin{bmatrix} -P_s(\hat{x}) & \Psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22i} & G(x)T(x^+)\bar{E}_i(x) & \bar{C}_{1i}^T(x)H^T(x) & \Psi_{25ijl} \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{F}_i^T(x)H^T(x) & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & \xi H(x)\bar{D}_i(x) \\ * & * & * & * & R \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

$$\bar{\psi}_{sijl} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{11s}(x) & G(x)T(x^+)\bar{A}_i(x) & \xi G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x) \\ * & -\bar{P}_i(\hat{x}) & \bar{C}_{2l}^T(x)N_j^T(x) \\ * & * & R \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &= \Sigma_2 + G^T(x) \\ \Psi_{22i} &= \Sigma_{3i} + G(x)T(x^+)\bar{A}_i(x) + \bar{A}_i^T(x)T^T(x^+)G^T(x) \\ \Psi_{25ijl} &= \xi G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x) + \bar{C}_{2l}^T(x)N_j^T(x) \\ \Psi_{44} &= I - H(x) - H^T(x) \\ R &= -\xi(U(x) + U^T(x)) \\ \bar{\psi}_{11s} &= \bar{P}_s(\hat{x}) - G(x) - G^T(x) \end{aligned}$$

les gains de la commande par SOF sont donnés par $K_j(x) = U^{-1}(x)N_j(x)$

Preuve 4.2 *L'inégalité* (4.27) *garanties que* $-\xi U(x) - \xi U^T(x) < 0$*, ce qui implique que* $U(x)$ *est non singulier. Bien évidemment, les conditions de la SOS* (4.23) - (4.25) *peuvent être réécrites comme suit :*

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{r} h_s(k+1)[\sum_{i=1}^{r} h_i^3(k)\bar{\psi}_{siii} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{r} h_i^2(k)h_j(k)(\bar{\psi}_{siij} + \bar{\psi}_{siji} + \bar{\psi}_{sjii}) \\ + \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{l=j+1}^{r} h_i(k)h_j(k)h_l(k)(\bar{\psi}_{sijl} + \bar{\psi}_{silj} + \bar{\psi}_{sjil} + \bar{\psi}_{sjli} + \bar{\psi}_{slij} \\ + \bar{\psi}_{slji})] = \sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)\bar{\psi}_{sijl} < 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que (4.27) *implique que,*

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)\left\{\begin{bmatrix}\bar{\psi}_{11s} & G(x)T(x^+)\bar{A}_i(x)\\ * & -\bar{P}_i(\hat{x})\end{bmatrix}\right.$$
$$\left. + sym\ \left\{\begin{bmatrix}G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x)\\ 0\end{bmatrix}U^{-1}(x)\begin{bmatrix}0 & N_j(x)\bar{C}_{2l}(x)\end{bmatrix}\right\}\right\} < 0 \tag{4.28}$$

Par l'utilisation du Lemme 1.9
$W = U^{-1}(x)\begin{bmatrix}0 & N_j(x)\bar{C}_{2l}(x)\end{bmatrix}$,
$Q = \begin{bmatrix}G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x)\\ 0\end{bmatrix}$ *et* $T = \begin{bmatrix}\bar{\psi}_{11s} & G(x)T(x^+)\bar{A}_i(x)\\ * & -\bar{P}_i(\hat{x})\end{bmatrix}$

Et en définissant $K_j(x) = U^{-1}(x)N_j(x)$*, nous pouvons garantir que* (4.28) *est équivalent à*

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)\begin{bmatrix}\bar{\psi}_{11s} & G(x)T(x^+)\bar{A}_{ijl}(x)\\ * & -\bar{P}_i(\hat{x})\end{bmatrix} < 0$$

ce qui est équivalent à (4.15).

Soit

$$T = \begin{bmatrix}-P_s(\hat{x}) & \Psi_{12} & 0 & 0\\ * & \Psi_{22i} & G(x)T(x^+)\bar{E}_i(x) & \bar{C}_{1i}^T(x)H^T(x)\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{F}_i^T(x)H^T(x)\\ * & * & * & \Psi_{44}\end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix}0\\ G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x)\\ 0\\ H(x)\bar{D}_i(x)\end{bmatrix},$$
$$W = U^{-1}(x)\begin{bmatrix}0 & N_j(x)\bar{C}_{2l}(x) & 0 & 0\end{bmatrix},$$

en appliquant le Lemme 1.9, l'inégalité dans (4.26) *conduit à*

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)$$
$$\left\{\begin{bmatrix}-P_s(\hat{x}) & \Psi_{12} & 0 & 0\\ * & \Psi_{22i} & G(x)T(x^+)\bar{E}_i(x) & \bar{C}_{1i}^T(x)H^T(x)\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{F}_i^T(x)H^T(x)\\ * & * & * & \Psi_{44}\end{bmatrix}\right. \tag{4.29}$$
$$\left. + sym\ \left\{\begin{bmatrix}0\\ G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x)\\ 0\\ H(x)\bar{D}_i(x)\end{bmatrix}U^{-1}(x)\begin{bmatrix}0 & N_j(x)\bar{C}_{2sl}(x) & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\right\} < 0$$

En définissant $K_j(x) = U^{-1}(x)N_j(x)$, *nous pouvons vérifier que* (4.29) *est équivalent à*

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)$$
$$\left\{\begin{bmatrix} -P_s(\hat{x}) & \Psi_{12i} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22i} & G(x)T(x^+)\bar{E}_i(x) & \bar{C}_{1i}^T(x)H^T(x) \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{F}_i^T(x)H^T(x) \\ * & * & * & \Psi_{44} \end{bmatrix}\right.$$
$$\left. + \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sym\{G(x)T(x^+)\bar{B}_i(x)K_j(x)\bar{C}_{2l}(x)\} & 0 & \bar{C}_{2l}^T(x)K_j^T(x)\bar{D}_i^T(x)H^T(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H(x)\bar{D}_i(x)K_j(x)\bar{C}_{2l}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right\} < 0 \tag{4.30}$$

A partir de (4.30), la condition (4.14) *est obtenue.*

La preuve est terminée.

Théorème 4.3 *[Chaibi 2019a] Étant donné le scalaire* $\xi > 0$, *le système flou en boucle fermée* (4.8) *est robustement stable par la commande* H_∞ *de performance* $\gamma > 0$ *s'il existe des matrices symétriques polynomiales définies positives* $\bar{P}_i(\hat{x})$ *et* $Q(x)$, *matrices symétriques* $P_i(\hat{x})$ *et matrices* $G(x)$, $U(x)$ *et* $N_j(x)$ *pour* $i, j = 1, 2, ..., r$ *tels que les conditions suivantes soient satisfais*

$$condition \;\; SOS \;\; (4.10)$$
$$condition \;\; SOS \;\; (4.11)$$

$$-\nu_6^T(\Upsilon_{siii} + \varepsilon_i(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i, s = 1, 2, ..., r \tag{4.31}$$
$$-\nu_6^T(\Upsilon_{siij} + \Upsilon_{siji} + \Upsilon_{sjii} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i \neq j = 1, 2, ..r \tag{4.32}$$
$$-\nu_6^T(\Upsilon_{sijl} + \Upsilon_{silj} + \Upsilon_{sjil} + \Upsilon_{sjli} + \Upsilon_{slij} + \Upsilon_{slji} + \varepsilon_{sijl}(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; 1 \leq i < j < l \leq r \tag{4.33}$$

$$-\nu_7^T(\bar{\Upsilon}_{siii} + \varepsilon_i(x)I)\nu_7 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i, s = 1, 2, ...r \tag{4.34}$$
$$-\nu_7^T(\bar{\Upsilon}_{siij} + \bar{\Upsilon}_{siji} + \bar{\Upsilon}_{sjii} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_7 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i \neq j = 1, 2, ..r \tag{4.35}$$
$$-\nu_7^T(\bar{\Upsilon}_{sijl} + \bar{\Upsilon}_{silj} + \bar{\Upsilon}_{sjil} + \bar{\Upsilon}_{sjli} + \bar{\Upsilon}_{slij} + \bar{\Upsilon}_{slji} + \varepsilon_{sijl}(x)I)\nu_7 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; 1 \leq i < j < l \leq r \tag{4.36}$$

où

$$\Upsilon_{sijl} = \begin{bmatrix} -P_s(\hat{x}) & \Upsilon_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Upsilon_{22il} & \Upsilon_{23i} & \Upsilon_{24i} & \Upsilon_{25ijl} & \Upsilon_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \Upsilon_{33i} & \Upsilon_{34i} & \Upsilon_{35i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Upsilon_{44} & \Upsilon_{45i} & 0 & \Upsilon_{46} & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon_{55i} & 0 & 0 & \Upsilon_{58j} \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_x I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_z I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_y I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.37}$$

$$\bar{\Upsilon}_{sijl} = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{11s} & G(x)T(x^+)A_i(x) & \xi G(x)T(x^+)B_i(x) & G(x)T(x^+)X_x & 0 \\ * & \bar{\Upsilon}_{22il} & \bar{\Upsilon}_{23ijl} & 0 & 0 \\ * & * & R + \xi^2\varepsilon_x Y_{Bi}^T Y_{Bi} & 0 & N_j(x)X_y \\ * & * & * & -\varepsilon_x I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_y I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{12} &= \Sigma_2 - G^T(x) \\
\Upsilon_{22il} &= \Sigma_{3i} + G(x)T(x^+)A_i(x) + A_i^T(x)T^T(x^+)G^T(x) + \varepsilon_x Y_{Ai}^T Y_{Ai} \\
&\quad + \varepsilon_z Y_{C1i}^T Y_{C1i} + \varepsilon_y Y_{C2l}^T Y_{C2l} \\
\Upsilon_{23i} &= G(x)T(x^+)E_i(x) + \varepsilon_x Y_{Ai}^T Y_{Ei} + \varepsilon_z Y_{C1i}^T Y_{Fi} \\
\Upsilon_{24i} &= C_{1i}^T(x)H^T(x) \\
\Upsilon_{25ijl} &= \xi G(x)T(x^+)B_i(x) + C_{2l}^T(x)N_j^T(x) + \xi(\varepsilon_x Y_{Ai}^T Y_{Bi} + \varepsilon_z Y_{C1i}^T Y_{Di}) \\
\Upsilon_{26} &= G(x)T(x^+)X_x \\
\Upsilon_{33i} &= -\gamma^2 I + \varepsilon_x Y_{Ei}^T Y_{Ei} + \varepsilon_z Y_{Fi}^T Y_{Fi} \\
\Upsilon_{34i} &= F_i^T(x)H^T(x) \\
\Upsilon_{35i} &= \xi(\varepsilon_x Y_{Ei}^T Y_{Bi} + \varepsilon_z Y_{Fi}^T Y_{Di}) \\
\Upsilon_{44} &= I - H(x) - H^T(x) \\
\Upsilon_{45i} &= \xi H(x)D_i(x) \\
\Upsilon_{46} &= H(x)X_z \\
\Upsilon_{55i} &= R + \xi^2(\varepsilon_x Y_{Bi}^T Y_{Bi} + \varepsilon_z Y_{Di}^T Y_{Di}) \\
\Upsilon_{58j} &= N_j(x)X_y \\
\bar{\Upsilon}_{11s} &= \bar{P}_s(\hat{x}) - G(x) - G^T(x) \\
\bar{\Upsilon}_{22il} &= -\bar{P}_i(\hat{x}) + \varepsilon_x Y_{Ai}^T Y_{Ai} + \varepsilon_y Y_{C2l}^T Y_{C2l} \\
\bar{\Upsilon}_{23ijl} &= C_{2l}^T(x)N_j^T(x) + \varepsilon_x \xi Y_{Ai}^T Y_{Bi}
\end{aligned}$$

les gains de la commande par SOF sont donnés par $K_j(x) = U^{-1}(x)N_j(x)$.

Preuve 4.3 *Les conditions de la SOS* (4.31)-(4.33) *peuvent être réécrites sous les formes*

suivantes :

$$\sum_{s=1}^{r} h_s(k+1)[\sum_{i=1}^{r} h_i^3(k)\Upsilon_{siii} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{r} h_i^2(k)h_j(k)(\Upsilon_{siij} + \Upsilon_{siji} + \Upsilon_{sjii}) + \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{l=j+1}^{r} h_i(k)h_j(k)h_l(k)(\Upsilon_{sijl} + \Upsilon_{silj} + \Upsilon_{sjil} + \Upsilon_{sjli} + \Upsilon_{slij} + \Upsilon_{slji})] = \sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} h_s(k+1)h_i(k)h_j(k)h_l(k)\Upsilon_{sijl} < 0$$

qui est vérifié si

$$\begin{aligned}\Upsilon_{sijl} = \bar{\bar{\Upsilon}}_{sijl} &+ \varepsilon_x^{-1}\begin{bmatrix}0\\G(x)T(x^+)X_x\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\G(x)T(x^+)X_x\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T + \varepsilon_x\begin{bmatrix}0\\Y_{Ai}^T\\Y_{Ei}^T\\0\\\xi Y_{Bi}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\Y_{Ai}^T\\Y_{Ei}^T\\0\\\xi Y_{Bi}^T\end{bmatrix}^T\\ &+ \varepsilon_z^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\H(x)X_z\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\H(x)X_z\\0\end{bmatrix}^T + \varepsilon_z\begin{bmatrix}0\\Y_{C1i}^T\\Y_{Fi}^T\\0\\\xi Y_{Di}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\Y_{C1i}^T\\Y_{Fi}^T\\0\\\xi Y_{Di}^T\end{bmatrix}^T\\ &+ \varepsilon_y^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\N_j(x)X_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\N_j(x)X_y\end{bmatrix}^T + \varepsilon_y\begin{bmatrix}0\\Y_{C2l}^T\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\Y_{C2l}^T\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T < 0\end{aligned} \tag{4.39}$$

en utilisant le Lemme 1.8, nous obtenons

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Upsilon}}_{sijl} &+ sym\{\begin{bmatrix}0\\G(x)T(x^+)X_x\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Delta(k)\begin{bmatrix}0\\Y_{Ai}^T\\Y_{Ei}^T\\0\\\xi Y_{Bi}^T\end{bmatrix}^T\} + sym\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\H(x)X_z\\0\end{bmatrix}\Delta(k)\begin{bmatrix}0\\Y_{C1i}^T\\Y_{Fi}^T\\0\\\xi Y_{Di}^T\end{bmatrix}^T\}\\ &+ sym\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\N_j(x)X_y\end{bmatrix}\Delta(k)\begin{bmatrix}0\\Y_{C2l}^T\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T\} < 0\end{aligned} \tag{4.40}$$

où

$$\bar{\bar{\Upsilon}}_{sijl} = \begin{bmatrix} -P_s(\hat{x}) & \Psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & \bar{\bar{\Upsilon}}_{22i} & \bar{\bar{\Upsilon}}_{23i} & C_{1i}^T(x)H^T(x) & \bar{\bar{\Upsilon}}_{25ijl} \\ * & * & -\gamma^2 I & F_i^T(x)H^T(x) & 0 \\ * & * & * & \Upsilon_{44} & \xi H(x)D_i(x) \\ * & * & * & * & R \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Upsilon}}_{22i} &= \Sigma_{3i} + sym\{G(x)T(x^+)A_i(x)\} \\ \bar{\bar{\Upsilon}}_{23i} &= G(x)T(x^+)E_i(x) \\ \bar{\bar{\Upsilon}}_{25ijl} &= \xi G(x)T(x^+)B_i^T(x) + C_{2l}^T(x)N_j^T(x) \end{aligned}$$

(4.40) *se réduit à* (4.26)*. De la même manière, nous pouvons montrer que* (4.38) *se réduit à* (4.27)*.*

La preuve est terminée.

Corollaire 4.1 *[Chaibi 2019a] Le système flou en boucle fermée* (4.8) *est robustement stable avec une commande H_∞ de performance $\gamma > 0$ s'il existe un scalaire connu ξ, des matrices symétriques définies positives $P_i(\hat{x})$ et les matrices polynomiales, $G(x)$, $U(x)$ et $N_j(x)$ pour $i, j = 1, 2, ..., r$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{aligned} &condition \;\; SOS \;\; (4.10) \\ &condition \;\; SOS \;\; (4.11) \end{aligned}$$

$$-\nu_6^T(\Lambda_{siii} + \varepsilon_i(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i, s = 1, 2, ..., r \tag{4.41}$$

$$-\nu_6^T(\Lambda_{siij} + \Lambda_{siji} + \Lambda_{sjii} + \varepsilon_{ij}(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \;\; i \neq j = 1, 2, ..., r \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} -\nu_6^T(\Lambda_{sijl} + \Lambda_{silj} + \Lambda_{sjil} + \Lambda_{sjli} + \Lambda_{slij} + \Lambda_{slji} + \varepsilon_{sijl}(x)I)\nu_6 \;\; est\ une \;\; SOS \\ 1 \leq i < j < l \leq r \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\Lambda_{sijl} = \begin{bmatrix} -P_s(\hat{x}) & G^T(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Lambda_{22il} & \Upsilon_{23i} & \Upsilon_{24i} & \Upsilon_{25ijl} & \Upsilon_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \Upsilon_{33i} & \Upsilon_{34i} & \Upsilon_{35i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Upsilon_{44} & \Upsilon_{45i} & 0 & \Upsilon_{47} & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon_{55i} & 0 & 0 & \Upsilon_{58} \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_x I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_z I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_y I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.44}$$

$$\Lambda_{22il} = -P_i(\hat{x}) + G(x)T(x^+)A_i(x) + A_i^T(x)T^T(x^+)G^T(x) + \varepsilon_x Y_{Ai}^T Y_{Ai} + \varepsilon_z Y_{C1i}^T Y_{C1i} + \varepsilon_y Y_{C2l}^T Y_{C2l}$$

les gains de la commande par SOF sont donnés par $K_j(x) = U^{-1}(x)N_j(x)$

Preuve 4.4 *Le corollaire 4.1 se réduit directement à partir des conditions (4.31) - (4.33) du Théorème 4.3 en posons* $Q(x) = 0$ *et* $P_i(\hat{x}) > 0$.

Remarque 4.5 *Le Théorème 4.3 présente une technique de conception de la commande* H_∞ *polynomiale floue par SOF à fréquence finie, qui peut réduire le conservatisme introduit par les méthodes de fréquence entière.*

4.4 Exemples de simulation

Afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée, nous présentons trois exemples illustratifs. Les résultats de la simulation montrent que l'approche proposée à des FF présente des avantages évidents par rapport à celles développées pour des EF.

Exemple 4.1 *Pour montrer le mérite de la méthode proposée, une commande* H_∞ *par SOF pour le modèle de mappage Henon est donnée par [Chang 2015b],*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -0.1x_1^2(k) - 0.2x_2(k) + 0.01\sigma_1 x_2(k) + 1.4 + u^*(k) + 0.1\omega(k) \\ x_2(k+1) &= 0.3x_1(k) \\ z(k) &= 0.2x_1(k) + 1.4 + u^*(k) + 0.1\omega(k) \\ y(k) &= 0.1x_1^2(k) - 0.01\sigma_2 x_2(k) \end{aligned} \tag{4.45}$$

où $|\sigma_i| \leq 1$, $i = 1, 2$ *représente les termes d'incertitude.*
Supposons que $x_1(k) \in [-d_k \;\; d_k]$ *et* $d_k > 0$.

le système non linéaire (4.45) peut être représenté par le système flou T–S comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1d_k & -0.2 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -0.1d_k & -0.2 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = B_1,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = E_1, \; C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \; C_{21} = \begin{bmatrix} -0.1d_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 0.1d_k & 0 \end{bmatrix}, \; D_1 = D_2 = 1, \; F_1 = F_2 = 0.1, \; X_x = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_{A1} = Y_{A2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}, ; \; X_y = -0.1, \; Y_{C21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Tableau 4.2 – Les valeurs de γ et les gains de la commande par SOF pour l'Exemple 4.1.

Méthodes	d_k	γ_{min} $(d_k = 20)$	K_1 $(d_k = 20)$	K_2 $(d_k = 20)$
[Chang 2015b] Théorème 2	$d_k = 20$	1,0	0,6740	0,6747
[Chaibi 2019a] Corollaire 4.1 2d = 0	25	0.985	3.296	5.75
Corollaire 4.1 2d = 2	32	0.328	$0,09081 + 0.7635x_2^2$	$0,1275 + 0,3094x_2^2$
[Chaibi 2019a] Théorème 4.3 MF $\frac{\pi}{6} \leq \lvert\theta\rvert \leq \frac{\pi}{3}$ $2d = 0$	35	0.17	0.1892	0.1467
Théorème 4.3 MF $\frac{\pi}{6} \leq \lvert\theta\rvert \leq \frac{\pi}{3}$ $2d = 2$	40	0.168	$0.116 + 0.9615x_2^2$	$0,03964 + 0.6319x_2^2$

Où les fonctions d'appartenance sont prises comme celles utilisées dans [Chang 2015b]

$$\begin{cases} h_1(k) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{x_1(k)}{d_k}) \\ h_2(k) = 1 - h_1(k) \end{cases}$$

Les intervalles de faisabilité pour d_k sont indiqués dans le Tableau 4.2 pour la technique proposée et pour ceux de la littérature. Pour simplifier la comparaison, nous avons rapporté dans le Tableau 4.2, les valeurs de γ_{min} et la commande pour le même $d_k = 20$. D'après les résultats figurant dans le Tableau 4.2, nous pouvons observer que les intervalles de faisabilité obtenus par les théorèmes proposés dans ce chapitre sont plus grands que les résultats donnés par [Chang 2015b]. En utilisant le Théorème 4.3 dans le cas de MF nous pouvons voir que le γ_{min} obtenu est plus petit que celui obtenu dans [Chang 2015b]. Nous constatons également que l'augmentation du degré de fonction polynomiale de Lyapunov de $2d = 0$ à $2d = 2$ réduit le niveau de γ_{min} et améliore ainsi les performances. En général, nous obtenons de meilleurs résultats en augmentant les degrés de la fonction polynomiale de Lyapunov.

En choisissant le degré $2d = 2$ pour le cas de MF, nous obtenons les résultats suivants : $d_k = 40$, $\gamma_{min} = 0,169$ et les gains de la commande H_∞ par SOF.

$$K_1 = 1,019 + 0,0001124x_2(k)^2, \quad K_2 = 0,918 + 0,0001054x_2(k)^2$$

Considérons les conditions initiales $x(0) = [-1 \ 2]^T$, les courbes représentant les trajectoires d'état pour le système en boucle fermée sont illustrées à la figure 4.1 et les résultats de la simulation de la commande $u(k)$ sont représentés à la figure 4.2. La figure 4.1 permet de confirmer que le système en boucle fermée (4.8) est robustement

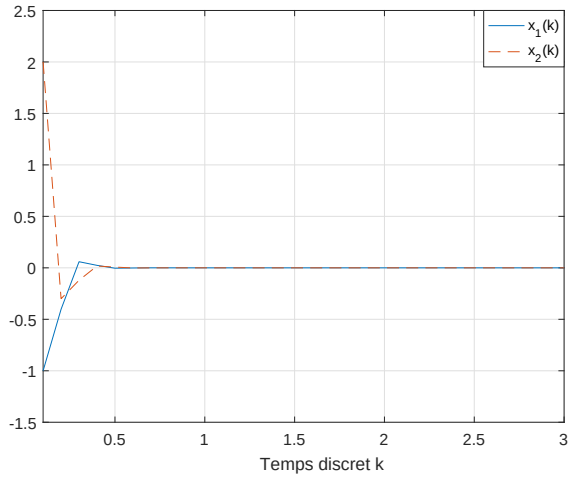


FIGURE 4.1 – Évolution des états de la boucle fermée pour l'Exemple 4.1

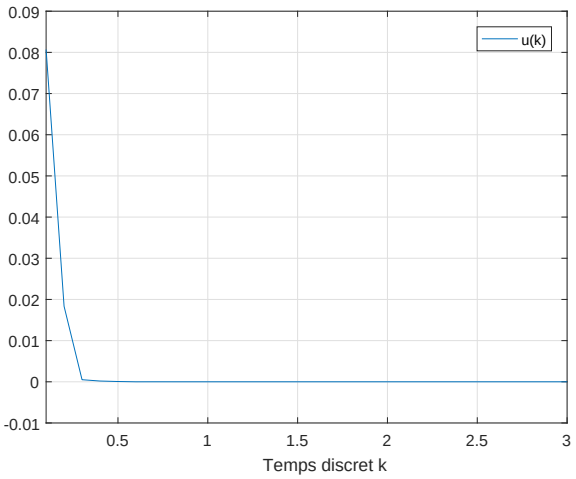


FIGURE 4.2 – Évolution de la commande pour l'Exemple 4.1

stable. Avec des conditions initiales nulles et l'entrée de perturbation sous la forme $\omega(k) = e^{-0.3k}\sin(2k)$*, le rapport (ratio)* $\rho(k) = \sqrt{z^T(k)z(k)/w^T(k)w(k)}$ *est tracé sur la figure 4.3. Il est clair que le rapport (ratio) tend vers une valeur constante de* $0,093$*, qui est inférieur à la valeur optimale garantie par* $(2d = 2)$ $\gamma_{min} = 0,169$*. À partir des résultats de la simulation, nous pouvons constater que la commande robuste* H_∞ *par SOF présentée dans ce chapitre est efficace.*

Exemple 4.2 *Nous considérons un modèle inspiré d'un système pratique pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée. Nous prenons le modèle de camion-remorque non linéaire [Chang 2015b] représenté par la figure 4.4, dont l'équation dynamique est :*

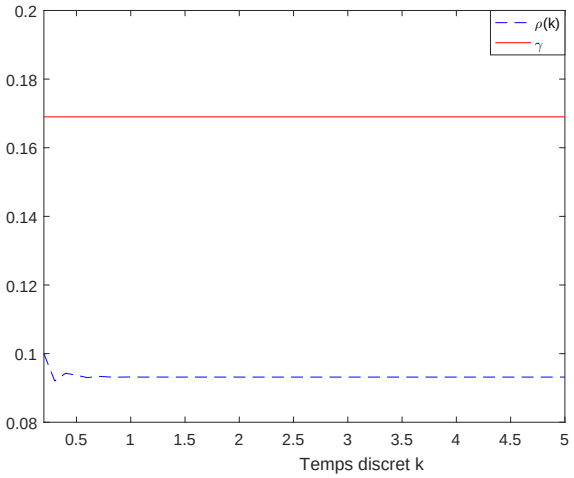


FIGURE 4.3 – Le rapport $\rho(k) = \sqrt{z^T(k)z(k)/w^T(k)w(k)}$ pour l'Exemple 4.1

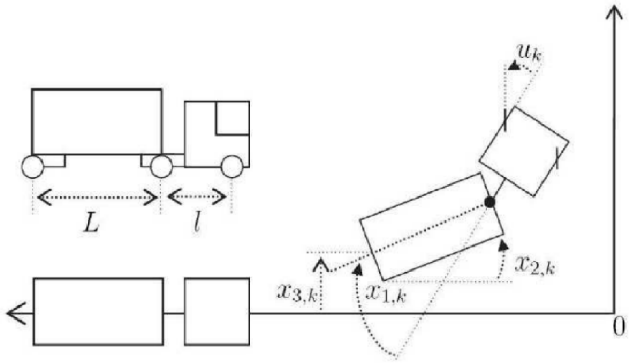


FIGURE 4.4 – Camion remorque.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 - \dfrac{vt}{L})x_1(k) + \dfrac{vt}{l}u(k) \\ x_2(k+1) = (\dfrac{vt}{L})x_1(k) + x_2(k) + 0,2\omega(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + vt\sin(\theta_k) + 0.1\omega(k) \\ z(k) = 0,001x_3(k) + \dfrac{vt}{l}u(k) \\ y(k) = 7x_1(k) - 2x_2(k) + 0,03x_3(k) \end{cases} \tag{4.46}$$

où $\theta_k = x_2(k) + \frac{nt}{2L}x_1(k)$.

Le modèle de camion-remorque non linéaire (4.46) *peut être décrit par le modèle*

T–S suivant

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(\varsigma(x(k)))\Big((A_i + \Delta A_i)x(k) + B_i u(k) + E_i \omega(k)\Big) \\ z(k) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(\varsigma(x(k)))(C_{1i}x(k) + D_i u(k) + F_i \omega(k)) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{2} h_i(\varsigma(x(k)))C_{2i}x(k) \end{aligned} \tag{4.47}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-\frac{vt}{L} & 0 & 0 \\ \frac{vt}{L} & 1 & 0 \\ \frac{(vt)^2}{2L}d_1 & vtd_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1-\frac{vt}{L} & 0 & 0 \\ \frac{vt}{L} & 1 & 0 \\ \frac{(vt)^2}{2L}d_2 & vtd_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{vt}{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \; X_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0023 \end{bmatrix}, \quad Y_{A1} = Y_{A2} = \begin{bmatrix} \frac{(vt)}{2L} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,001 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \frac{(vt)}{l}, \quad F_1 = F_2 = 0,$$

$$C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \frac{0.01}{\pi}$$

où $t = 2s$, $l = 2,8$, $L = 5,5$, $v = -1$ *et* $x(k) = [x_1(k)\ x_2(k)\ x_3(k)]^T$.

Pour θ_k *autour de* $\theta_k = 0$ *et* $\pm 179.997\pi/180$.

Les fonctions d'appartenance sont

$$\begin{cases} h_1(\theta_k) = \dfrac{\sin(\theta_k)}{\theta_k} \\ h_2(\theta_k) = 1 - h_1(\theta_k) \end{cases}$$

Maintenant, en résolvant le problème d'optimisation de Théorème 4.3, pour $\xi = 0.3$*, les résultats obtenus de* γ_{min} *pour le cas du moyenne fréquence (MF) et pour les approches à des EF existants dans [Lo 2003] et [Chang 2015b], sont montrés dans le Tableau 4.3. Dans ce dernier, nous pouvons constater qu'en utilisant la méthode décrite dans ce chapitre, les valeurs de* γ_{min} *peuvent être améliorées.*

En se basant sur des conditions de la SOS dans le Théorème 4.3 pour le cas de MF, nous obtenons la valeur minimale d'atténuation des perturbations H_∞, $\gamma_{min} = 0,1035$ *pour* $2d = 2$ *et les gains de la commande* H_∞ *par SOF.*

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.2616 + 0.004164x_2(k)^2 - 0,000412x_3(k)^2 \\ K_2 &= 0.2223 + 0.009036x_2(k)^2 - 0,0006202x_3(k)^2 \end{aligned}$$

Tableau 4.3 – Les valeurs de γ pour l'Exemple 4.2.

Méthodes	γ_{min}
Théorème 2 [Lo 2003]	4.3712
Corollaire 1 [Chang 2015b]	2.1554
Corollaire 2 [Chang 2015b]	2.0197
Corollaire 4.1 [Chaibi 2019a] $2d = 0$	0.289
Théorème 4.3 MF [Chaibi 2019a] $\frac{\pi}{6} \leq \lvert\theta\rvert \leq \frac{\pi}{3}$ $2d = 0$	0.1265
Théorème 4.3 MF [Chaibi 2019a] $\frac{\pi}{6} \leq \lvert\theta\rvert \leq \frac{\pi}{3}$ $2d = 2$	0.1035

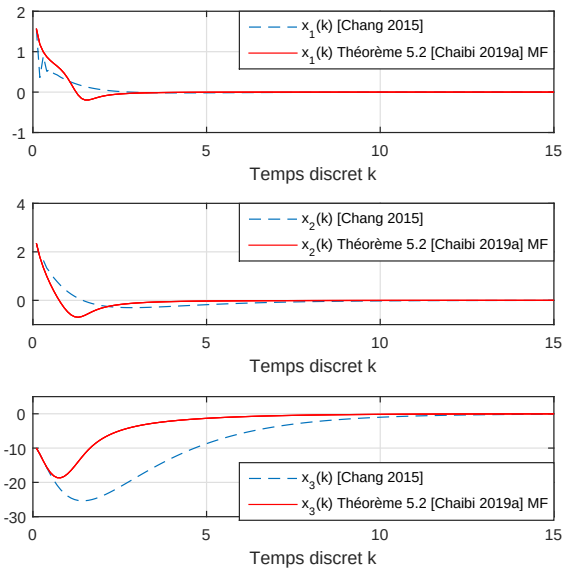


FIGURE 4.5 – Réponses d'état du système en boucle fermée (4.8) pour l'Exemple 4.2

Supposons que la condition initiale est $x(0) = [0.5\pi \quad 0.75\pi \quad -10]^T$ *et la perturbation externe* $\omega(k) = 0$. *La Figure 4.5 montre l'évolution comparative pour les trajectoires des états du système non linéaire en boucle fermée* (4.8) *obtenue par le Théorème 4.3 dans le cas de MF et par la commande proposée dans [Chang 2015b] dans le cas des EF, tandis que les signaux de commande sont affichés dans la Fig. 4.6.*

En résumé, d'après les figures de simulation 4.5 - 4.6, nous pouvons déduire que

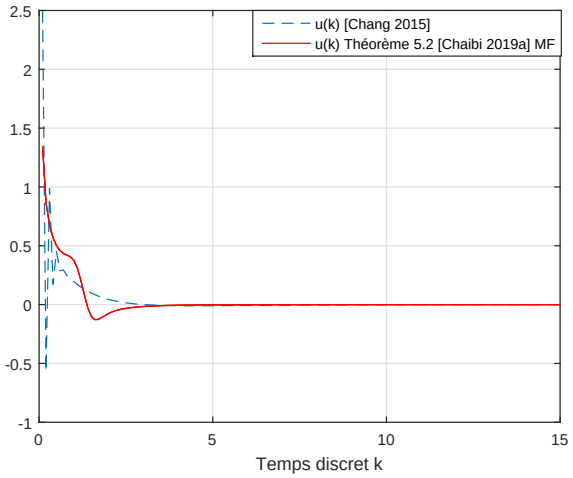


FIGURE 4.6 – Évolution de la commande du système en boucle fermée (4.8) pour l'Exemple 4.2

le système en boucle fermée est stable et offre une valeur minimale d'atténuation de perturbation par rapport aux résultats existants. Cela montre que la méthode proposée est efficace pour commander de tels systèmes pratiques.

Exemple 4.3 *Dans cet exemple, nous considérons le modèle polynomial flou suivant avec deux règles floues sous la forme de* (4.8)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,13x_1(k) & -0,26 \\ 0,39 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,16x_1(k) & -0,32 \\ 0,48 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = B_1, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = E_1, \quad C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} -0,2x_1(k) & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 0.2x_1(k) & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = 1, \quad F_1 = F_2 = 0,1, \quad X_x = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_{A1} = Y_{A2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad X_y = -0,1, \quad Y_{C21} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \end{bmatrix} Y_{C11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'appartenance dans cet exemple sont données comme suit :

$$\begin{cases} h_1(k) = \dfrac{1 - \frac{sin(x_2(k))}{x_2(k)}}{1.2175} \\ h_2(k) = 1 - h_1(k) \end{cases}$$

Définissons $\xi = 0,24$, puis nous résolvons les conditions de la SOS dans le Théorème 4.3, la valeur minimale de performance H_∞ du FF $\frac{\pi}{6} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{3}$ est $\gamma_{min} = 0.53$ et les gains de la commande correspondantes sont

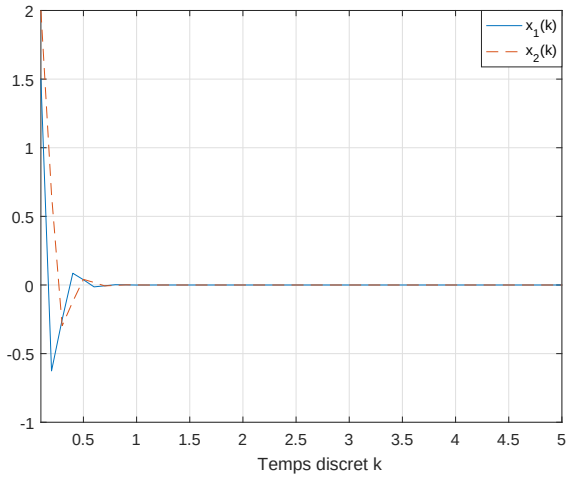


FIGURE 4.7 – Évolution des états de la boucle fermée dans l'Exemple 4.3

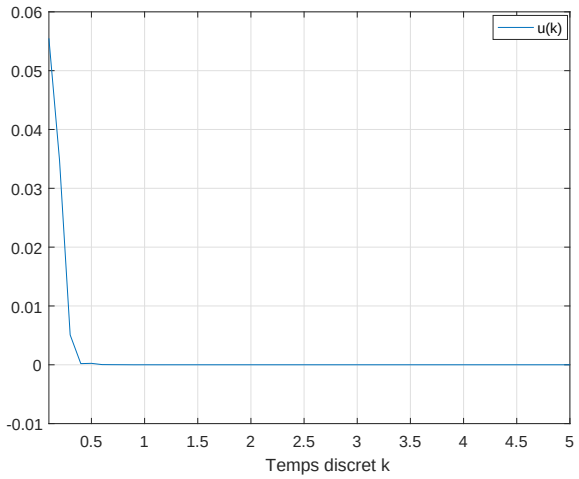


FIGURE 4.8 – Évolution de la commande pour l'Exemple 4.3

$$K_1(x) = -0,09054x_1^2(k) + 0,01617x_2^2(k) + 4,014$$
$$K_2(x) = -0,0171x_1^2(k) - 0,02886x_2^2(k) + 0,3564;$$

Les figures 4.7 et 4.8 illustrent la réponse de l'état et l'évolution de la commande du système polynomial flou T–S en boucle fermée, respectivement, à partir d'une condition initiale $x(0) = [1.5 \;\; 2]^T$ et $\omega(k) = 0$. En résumé, à partir des résultats des figures 4.7 et 4.8, nous pouvons conclure que le système en boucle fermée est robustement stable.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a étudié le problème de la conception de la commande H_∞ par SOF pour les systèmes polynomiaux flous T–S incertains dans un champ de fréquence finie. En utilisant le Lemme GKYP et la fonction polynomiale de Lyapunov, des nouvelles conditions d'existence de la commande H_∞ par SOF sont proposées afin de surmonter aux inconvénients induits par les études précédentes. Quelques exemples numériques ont été donnés pour démontrer les avantages de l'approche proposée.

Chapitre 5

Commande des systèmes Takagi-Sugeno 2-D discrets par l'approche des sommes des carrés

5.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, les systèmes bidimensionnels ont suscité beaucoup d'attention en raison de leurs applications utiles dans plusieurs domaines techniques modernes tels que la commande de processus (processus thermiques, absorption de gaz, chauffage de flux d'eau, etc.), le filtrage numérique multidimensionnel, le traitement d'images. (amélioration, suppression de données, etc.) ; voir par exemple [Barry 1976, Lu 1992, Gałkowski 2003]. Des conditions suffisantes pour un filtrage robuste H_∞ ont été étudiées dans [Boukili 2016], pour les systèmes de (Roesser) en temps discret à deux dimensions utilisant des matrices homogènes dépendantes de paramètres polynomiaux de degré arbitraire et les auteurs de [El-Kasri 2013] traitent le problème parallèle avec des retards variables dans le temps. Cependant, les résultats précédemment mentionnés étaient uniquement pour des systèmes 2–D linéaires. La plupart des systèmes 2–D actuels sont non linéaires et les résultats précédemment mentionnés ne sont pas applicables dans ce cas. Nous cherchons dans ce chapitre à étudier les systèmes non linéaires 2–D qui peuvent être représentés à l'aide des modèles T–S. Divers modèles pour les systèmes à deux dimensions ont été suggérés dans [Benzaouia 2016] pour la résolution des problèmes complexes dans différents domaines, tels que le filtrage robuste H_∞ pour des systèmes T–S et la stabilisation des systèmes T–S avec atténuation de perturbation stochastique. Des conditions de stabilisation ont été développées dans [Ding 2011] en utilisant des conditions de stabilisation non quadratiques et la fonction de Lyapunov homogène dépendante de paramètres polynomiaux. Le problème de filtrage H_∞ pour les systèmes T–S à deux dimensions décrit par le modèle Fornasini-Marchesini (FM) a été résolu dans [Boukili 2014] par l'utilisation de la fonction de Lyapunov et en ajoutant des matrices dépendantes de paramètres d'optimisation (slack). Des conditions suffisantes sous forme d'LMI ont également été étudiées dans [Boukili 2015] en considérant l'effet des perturbations stochastiques.

L'idée principale utilisée dans ce chapitre se base sur l'approche de la somme des carrés (SOS) [Prajna 2004b], qui permet de traiter la stabilité des systèmes polyno-

miaux pour une classe de système plus large que celle obtenue par l'approche LMI, ce qui signifie que l'approche de la SOS est moins restrictive que LMI. Les conditions de la SOS peuvent être résolues numériquement à l'aide de l'outil standard SOSTOOLS, [Prajna 2004b]. Les techniques de la SOS ont principalement été appliquées aux systèmes non linéaires 1–D en temps continu : par exemple, la stabilité des systèmes polynomiaux avec retard a été présentée dans [Siala 2013] à l'aide d'une nouvelle fonction polynomiale de Lyapunov-Krasovskii et les conditions de stabilité pour les systèmes polynomiaux en temps continu ont été étudiées dans [Guelton 2011], en utilisant des fonctions polynomiales de Lyapunov. Nous mentionnons aussi une technique efficace pour construire la fonction de Lyapunov pour des systèmes non linéaires multidimensionnels en temps continu dans [Shaker 2014]. Jusqu'à présent, un peu de méthodes ont été proposées pour traiter le système T–S bidimensionnel à l'aide de l'approche de la SOS : nous pouvons simplement citer [Chaibi 2016], où une condition de stabilisation du système T–S bidimensionnel discret basée sur les fonctions polynomiales de Lyapunov a été fournie.

Il convient de noter que dans les systèmes 2–D, l'information circule dans deux directions différentes, la synthèse de la commande des systèmes T–S bidimensionnels est plus complexe, en particulier lorsqu'un modèle polynomial est considéré. Ainsi, ce chapitre se concentre sur la conception de la commande polynomiale floue T–S pour le système 2–D non linéaire de type (Roesser) ; c'est un problème plus complexe que les problèmes parallèles étudiés dans la littérature, tels que ceux de [Xie 2010a]. Ainsi, ce chapitre fournit une méthodologie basée sur la SOS pour résoudre la stabilisation des systèmes polynomiaux 2–D de type (Roesser) en temps discret. Nous dérivons d'abord une condition de stabilisation, basée sur la multifonction polynomiale de Lyapunov. Ensuite, une condition de stabilisation non quadratique est déduite en utilisant les techniques de relaxation. Les conditions de stabilisation proposées sont représentées en terme de SOS et sont résolues numériquement par SOSTOOLS [Prajna 2004a]. Nous soulignons que l'approche de stabilisation abordée dans ce chapitre est plus générale que les approches d'LMI existantes pour les systèmes T–S à 2–D .

5.2 Formulation du problème

Nous considérons dans ce chapitre les systèmes 2-D non linéaires discrets décrits comme suit :

$$x^{+}(k,l) = \mathcal{Z}(x(k,l)) + \mathcal{S}(x(k,l))u(k,l) \tag{5.1}$$

$$x^{h}(0,l) = f(l), \qquad x^{v}(k,0) = g(k) \tag{5.2}$$

avec

$$x(k,l) = \begin{bmatrix} x^{h}(k,l) \\ x^{v}(k,l) \end{bmatrix}, x^{+}(k,l) = \begin{bmatrix} x^{h}(k+1,l) \\ x^{v}(k,l+1) \end{bmatrix},$$

où $x^h(.) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v(.) \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont l'état horizontal et l'état vertical, respectivement ; $u(.) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande ; $\mathcal{Z}(.)$ et $\mathcal{S}(.)$ sont des fonctions non linéaires satisfaisant $\mathcal{Z}, \mathcal{S} \in \mathbb{C}$; k, l sont deux entiers dans $\mathbb{Z}^+$; enfin, $f(l)$, $g(k)$ sont les conditions aux limites dans les directions horizontale et verticale, respectivement.

Le système T–S à 2-D suivant sera utilisé pour représenter le système discret non linéaire de type Roesser (5.1) :

Règle i : SI $\varsigma_1(k,l)$ EST M_{i1} ET,..., ET $\varsigma_s(k,l)$ EST M_{is}
ALORS

$$x^+(k,l) = A_i(x(k,l))\hat{x}(x(k,l)) + B_i(x(k,l))u(k,l) \tag{5.3}$$
$$x^h(0,l) = f(l), \qquad x^v(k,0) = g(k)$$

avec

$$A_i(x(k,l)) = \begin{bmatrix} A^i_{11}(x(k,l)) & A^i_{12}(x(k,l)) \\ A^i_{21}(x(k,l)) & A^i_{22}(x(k,l)) \end{bmatrix},$$
$$B_i(x(k,l)) = \begin{bmatrix} B^i_1(x(k,l)) \\ B^i_2(x(k,l)) \end{bmatrix}$$

où $i = 1, \ldots, r$, M_{is} sont les ensembles flous, $\varsigma_p(k)$, pour $p = 1, \ldots, s$, sont les variables de base, r est le nombre de règles SI-ALORS, $\hat{x}(x(k,l))$ est un vecteur de colonne dont les entrées sont toutes des monômes dans $x(k,l)$ et $A_i(x(k,l))$, $B_i(x(k,l))$ sont des matrices polynomiales dans $x(k,l)$, avec les dimensions appropriées.

Ces systèmes polynomiaux discrets T–S à 2-D peuvent également être exprimés sous une forme plus compacte, comme suit :

$$x^+(k,l) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(k,l))\{A_i(x(k,l))\hat{x}(x(k,l)) + B_i(x(k,l))u(k,l)\} \tag{5.4}$$

où

$$h_i(\varsigma(k,l)) = \frac{w_i(\varsigma(k,l))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(k,l))}, \; w_i(\varsigma(k,l)) = \prod_{j=1}^{s} M_{ij}(\varsigma(k,l))$$

avec $M_{ij}(\varsigma(k,l))$ est le degré d'appartenance de $\varsigma_j(k,l)$ dans M_{ij} et $w_i(\varsigma(k,l))$ représente le poids de la i-ème règle. Dans ce chapitre, nous supposons que $w_i(\varsigma(k,l)) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} w_i(\varsigma(k,l)) > 0$. Par conséquent, nous obtenons $h_i(\varsigma(k,l)) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(\varsigma(k,l)) = 1$.

Certaines conditions de stabilisation pour les systèmes discrets polynomiaux à 2-D dans (5.4) seront ultérieurement étudiées à l'aide de l'approche de la SOS, qui est maintenant introduite.

Pour simplifier les calculs, les notations suivantes seront adoptées :

$$h_i = h_i(\varsigma(k,l)), \quad M_z(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{r} h_i M_i(x(k,l)),$$
$$M_z^{-1}(\tilde{x}) = (\sum_{i=1}^{r} h_i M_i(x(k,l)))^{-1}$$

Nous considérerons $T(x(k,l))$ qui est une matrice polynomiale définie par $\hat{x}(x(k,l)) = T(x(k,l))x(k,l)$.

5.2.1 La commande par la multifonction polynomiale de Lyapunov

Dans [Tanaka 2008], une loi de commande PDC et une fonction polynomiale de Lyapunov sont proposées pour 1–D afin d'obtenir des conditions de stabilisation moins restrictives. Dans ce chapitre, nous étendons la loi de commande PDC utilisée dans la littérature pour les systèmes polynomiaux flous T–S à 1–D aux systèmes à 2-D étudiés dans ce chapitre. Cette commande à 2–D peut être exprimée comme suit :

Règle i : SI $\varsigma_1(k,l)$ EST M_{i1} ET,..., ET $\varsigma_s(k,l)$ EST M_{is}
ALORS

$$u(k,l) = F_i(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l))$$

avec $i = 1,\ldots,r$ et $F_i(\tilde{x})$ sont des matrices polynomiales de dimensions appropriées à déterminer.

L'ensemble de la commande à 2-D peut être représenté par

$$u(k,l) = \sum_{i=1}^{r} h_i F_i(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) = F_z(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \tag{5.5}$$

le système en boucle fermée est donné par

$$\begin{aligned} x^+(k,l) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j\{A_i(\tilde{x}) + B_i(\tilde{x})F_j(\tilde{x})\}\hat{x}(x(k,l)) \\ &= (A_z(\tilde{x}) + B_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))\hat{x}(x(k,l)) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Théorème 5.1 *[Chaibi 2019b] Le système polynomial flou T–S (5.6) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices polynomiales symétriques $X_1^j(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $X_2^j(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ et des matrices polynomiales $K_1^j(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{m_1\times n_1}$, $K_2^j(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}$, où $\varepsilon_1^i(\tilde{x}) > 0$, $\varepsilon_2^i(\tilde{x}) > 0$ pour $(\tilde{x} \neq 0)$ et $\varepsilon_1^{ij}(\tilde{x}) \geq 0$, $\varepsilon_2^{ij}(\tilde{x}) \geq 0$ pour tout $\tilde{x}$ tel que les conditions de la SOS suivantes soient satisfaites :*

$$\nu_1^T(X_1^i(\tilde{x}) - \varepsilon_1^i(\tilde{x})I)\nu_1 \qquad est\ une\ SOS\ \ i = 1, \ldots, r \tag{5.7}$$

$$\nu_1^T(X_2^i(\tilde{x}) - \varepsilon_2^i(\tilde{x})I)\nu_1 \qquad est\ une\ SOS\ \ i = 1, \ldots, r \tag{5.8}$$

$$\nu_2^T\Omega_{ii}^{mn}(\tilde{x})\nu_2 \qquad est\ une\ SOS\ \ i, m, n = 1, \ldots, r \tag{5.9}$$

$$\nu_2^T(\Omega_{ij}^{mn}(\tilde{x}) + \Omega_{ji}^{mn}(\tilde{x}))\nu_2 \ \ est\ une\ SOS \tag{5.10}$$

$$i < j \quad i, j, m, n = 1, \ldots, r$$

avec ν_1 et ν_2 sont des vecteurs de dimensions appropriées, indépendants de $x(k, l)$ et

$$\Omega_{ij}^{mn}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \Omega_{ij11}(\tilde{x}) & * & * & * \\ 0 & \Omega_{ij22}(\tilde{x}) & * & * \\ \Omega_{ij31}(\tilde{x}) & \Omega_{ij32}(\tilde{x}) & \Omega_{ij33}^{m}(\tilde{x}) & * \\ \Omega_{ij41}(\tilde{x}) & \Omega_{ij42}(\tilde{x}) & 0 & \Omega_{ij44}^{n}(\tilde{x}) \end{bmatrix} > 0 \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij11}(\tilde{x}) &= X_1^j(\tilde{x}) - \varepsilon_1^{ij}(\tilde{x})I \\
\Omega_{ij22}(\tilde{x}) &= X_2^j(\tilde{x}) - \varepsilon_2^{ij}(\tilde{x})I \\
\Omega_{ij31}(\tilde{x}) &= T_1(\tilde{x}^+)A_{11}^i(\tilde{x})X_1^j(\tilde{x}) + T_1(\tilde{x}^+)B_1^i(\tilde{x})K_1^j(\tilde{x}) \\
\Omega_{ij32}(\tilde{x}) &= T_1(\tilde{x}^+)A_{12}^i(\tilde{x})X_2^j(\tilde{x}) + T_1(\tilde{x}^+)B_1^i(\tilde{x})K_2^j(\tilde{x}) \\
\Omega_{ij33}^{m}(\tilde{x}) &= X_1^m(x(k+1, l)) - \varepsilon_1^{ij}(\tilde{x})I \\
\Omega_{ij41}(\tilde{x}) &= T_2(\tilde{x}^+)A_{21}^i(\tilde{x})X_1^j(\tilde{x}) + T_2(\tilde{x}^+)B_2^i(\tilde{x})K_1^j(\tilde{x}) \\
\Omega_{ij42}(\tilde{x}) &= T_2(\tilde{x}^+)A_{22}^i(\tilde{x})X_2^j(\tilde{x}) + T_2(\tilde{x}^+)B_2^i(\tilde{x})K_2^j(\tilde{x}) \\
\Omega_{ij44}^{n}(\tilde{x}) &= X_2^n(x(k, l+1)) - \varepsilon_2^{ij}(\tilde{x})I
\end{aligned}$$

Preuve 5.1 *Considérons la multifonction polynomiale de Lyapunov suivante :*

$$V(x(k, l)) = \hat{x}^T(x(k, l))P_z(\tilde{x})\hat{x}(x(k, l)) \tag{5.12}$$

où $P_z(\tilde{x})$ est une matrice polynomiale dans $x(k, l)$ telle que

$$P_z(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} P_1^z(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & P_2^z(\tilde{x}) \end{bmatrix} > 0$$

$$\lambda_{min}(P_z(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k, l))\|_2^2 \leq V(x(k, l)) \leq \lambda_{max}(P_z(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k, l))\|_2^2$$

où $\lambda_{min}(.)$ et $\lambda_{max}(.)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale d'une matrice.

Notons que si $P_z(\tilde{x})$ est une matrice constante et que $\hat{x}(x(k, l)) = x(k, l)$, alors (5.12) est réduit à la multifonction de Lyapunov $x^T(k, l)P_z x(k, l)$ utilisée dans la littérature : donc (5.12) est une représentation plus générale et moins restrictives que les conditions

développés sous forme d'LMI.

La variation de (5.12) *est donnée par*

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k,l)) &= \hat{x}^{+T}(x(k,l))P_z(\tilde{x}^+)\hat{x}^+(x(k,l)) - \hat{x}^T(x(k,l))P_z(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \\ &= \hat{x}^T(x(k,l))[(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))^T P_z(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x})) \\ &- P_z(\tilde{x})]\hat{x}(x(k,l)) \\ &= -\hat{x}^T(x(k,l))Q_{1z}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l))\end{aligned} \tag{5.13}$$

où

$$-Q_{1z}(\tilde{x}) = (\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))^T P_z(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x})) - P_z(\tilde{x})$$

et

$$\tilde{A}_z(\tilde{x}) = T(\tilde{x}^+)A_z(\tilde{x}), \quad \tilde{B}_z(\tilde{x}) = T(\tilde{x}^+)B_z(\tilde{x})$$
$$T(\tilde{x}^+) = \begin{bmatrix} T_1(\tilde{x}^+) & 0 \\ 0 & T_2(\tilde{x}^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(x(k+1,l) & 0 \\ 0 & T_2(x(k,l+1)) \end{bmatrix}$$

Notons que $Q_{1z}(\tilde{x})$ *sont des matrices polynomiales symétriques définies positives et* $\lambda_{min}(Q_{1z}(\tilde{x})) > 0$*, donc*

$$\hat{x}^T(x(k,l))Q_{1z}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \geq \lambda_{min}(Q_{1z}(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k,l))\|_2^2$$

Ainsi, $\Delta V(x(k,l))$ *est borné comme suit :*

$$\Delta V(x(k,l)) \leq -\lambda_{min}(Q_{1z}(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k,l))\|_2^2, \ \forall\|\hat{x}(x(k,l))\|_2 < \eta_{(N)}$$

$\Delta V(x(k,l))$ *est négatif si* $-Q_{1z}(\tilde{x}) < 0$

$$-Q_{1z}(\tilde{x}) = [(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))^T P_z(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x})) - P_z(\tilde{x})] < 0 \tag{5.14}$$

par la multiplication des deux côtés de (5.14) *par* $P_z^{-1}(\tilde{x})$*, nous obtenons* (5.15) *où* $P_z^{-1}(\tilde{x}) = X_z(\tilde{x})$ *et* $K_z(\tilde{x}) = F_z(\tilde{x})X_z(\tilde{x})$*, pour* $i = 1, \ldots, r$ *:*

$$[X_z(\tilde{x})(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))^T X_z^{-1}(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})F_z(\tilde{x}))X_z(\tilde{x}) - X_z(\tilde{x})] < 0 \tag{5.15}$$

en appliquant le complément Schur, nous avons alors

$$\Omega_z^{mn}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} X_z(\tilde{x}) & (\tilde{A}_z(\tilde{x})X_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x}))^T \\ * & X_z(\tilde{x}^+) \end{bmatrix} > 0 \tag{5.16}$$

où

$$\Omega_z^{mn}(\tilde{x}) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))h_n(\varsigma(k,l+1))h_i h_j \Omega_{ij}^{mn}(\tilde{x})$$

$$X_z(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} X_1^z(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & X_2^z(\tilde{x}) \end{bmatrix}, X_z(\tilde{x}^+) = \begin{bmatrix} X_1^z(\tilde{x}^+) & 0 \\ 0 & X_2^z(\tilde{x}^+) \end{bmatrix}$$

$$X_1^z(\tilde{x}^+) = \sum_{m=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))X_1^m(x(k+1,l))$$

$$X_2^z(\tilde{x}^+) = \sum_{n=1}^{r} h_n(\varsigma(k,l+1))X_2^n(x(k,l+1))$$

et $\Omega_{ij}^{mn}(\tilde{x})$ *sont définis dans* (5.11).

5.2.2 La commande d'un système polynomial par la loi de commande non PDC

Afin d'obtenir une commande moins restrictive pour les systèmes T–S bidimensionnels discrets polynomiaux, une loi de commande non PDC est utilisée, de la forme suivante [Chaibi 2016] :

$$u(k,l) = K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \tag{5.17}$$

où $K_z(\tilde{x})$ et $Y_z(\tilde{x})$ sont des matrices polynomiales de dimensions appropriées à déterminer

$$K_z(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} K_1^z(\tilde{x}) & K_2^z(\tilde{x}) \end{bmatrix}, \; Y_z(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Y_1^z(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & Y_2^z(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

le système en boucle fermée de (5.4) et (5.17) est alors comme suite :

$$x^+(k,l) = (A_z(\tilde{x}) + B_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x}))\hat{x}(x(k,l)) \tag{5.18}$$

Théorème 5.2 *[Chaibi 2019b] Le système à 2-D* (5.18) *est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques polynomiales* $P_1^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $P_2^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ *et les matrices polynomiales* $K_1^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{m_1\times n_1}$, $K_2^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}$, $Y_1^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $Y_2^i(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $Z_{ii}^{mn}(\tilde{x})$, $Z_{ij}^{mn}(\tilde{x}) = (Z_{ji}^{mn})^T(\tilde{x})$ *tels que* (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) *et* (5.23) *soient satisfaits, où* $\varepsilon_1^i(\tilde{x})$, $\varepsilon_2^i(\tilde{x})$, $\varepsilon_1^{ij}(\tilde{x})$ *et* $\varepsilon_2^{ij}(\tilde{x})$ *sont des polynômes non négatifs tels que* $\varepsilon_1^i(\tilde{x}) > 0$, $\varepsilon_2^i(\tilde{x}) > 0$ *pour* $(\tilde{x} \neq 0)$ *et* $\varepsilon_1^{ij}(\tilde{x}) \geq 0$, $\varepsilon_2^{ij}(\tilde{x}) \geq 0$ *pour tout* $\tilde{x}$.

$$\nu_1^T(P_1^i(\tilde{x}) - \varepsilon_1^i(\tilde{x})I)\nu_1 \qquad \textit{est une SOS} \tag{5.19}$$

$$\nu_1^T(P_2^i(\tilde{x}) - \varepsilon_2^i(\tilde{x})I)\nu_1 \qquad \textit{est une SOS} \tag{5.20}$$

$$v_2^T(T_{ii}^{mn}(\tilde{x}) - Z_{ii}^{mn}(\tilde{x}))v_2 \ est\ une\ SOS \ \ i,m,n = 1,\ldots,r \tag{5.21}$$

$$v_2^T(T_{ij}^{mn}(\tilde{x}) + T_{ji}^{mn}(\tilde{x}) - Z_{ij}^{mn}(\tilde{x}) - Z_{ji}^{mn}(\tilde{x}))v_2 \qquad est\ une\ SOS \tag{5.22}$$

$$i < j, \quad i,j,m,n = 1,\ldots,r.$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{12}^{mn}(\tilde{x}) & \ldots & Z_{1r}^{mn}(\tilde{x}) \\ Z_{21}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{22}^{mn}(\tilde{x}) & \ldots & Z_{2r}^{mn}(\tilde{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{r1}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{r2}^{mn}(\tilde{x}) & \ldots & Z_{rr}^{mn}(\tilde{x}) \end{bmatrix} > 0 \tag{5.23}$$

$m,n = 1,\ldots,r.$

avec v_1 et v_2 sont des vecteurs indépendants de $x(k,l)$.

$$T_{ij}^{mn}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} T_{ij11}(\tilde{x}) & * & * & * \\ 0 & T_{ij22}(\tilde{x}) & * & * \\ T_{ij31}(\tilde{x}) & T_{ij32}(\tilde{x}) & T_{ij33}^{m}(\tilde{x}) & * \\ T_{ij41}(\tilde{x}) & T_{ij42}(\tilde{x}) & 0 & T_{ij44}^{n}(\tilde{x}) \end{bmatrix} > 0 \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
T_{ij11}(\tilde{x}) &= P_1^j(\tilde{x}) - \varepsilon_1^i(\tilde{x})I \\
T_{ij22}(\tilde{x}) &= P_2^j(\tilde{x}) - \varepsilon_2^i(\tilde{x})I \\
T_{ij31}(\tilde{x}) &= T_1(\tilde{x}^+)A_{11}^i(\tilde{x})Y_1^j(\tilde{x}) + T_1(\tilde{x}^+)B_1^i(\tilde{x})K_1^j(\tilde{x}) \\
T_{ij32}(\tilde{x}) &= T_1(\tilde{x}^+)A_{12}^i(\tilde{x})Y_2^j(\tilde{x}) + T_1(\tilde{x}^+)B_1^i(\tilde{x})K_2^j(\tilde{x}) \\
T_{ij33}^m(\tilde{x}) &= Y_1^m(x(k+1,l)) + Y_1^{mT}(x(k+1,l)) \\
&\quad - P_1^m(x(k+1,l)) - \varepsilon_1^{ij}(\tilde{x})I \\
T_{ij41}(\tilde{x}) &= T_2(\tilde{x}^+)A_{21}^i(\tilde{x})Y_1^j(\tilde{x}) + T_2(\tilde{x}^+)B_2^i(\tilde{x})K_1^j(\tilde{x}) \\
T_{ij42}(\tilde{x}) &= T_2(\tilde{x}^+)A_{22}^i(\tilde{x})Y_2^j(\tilde{x}) + T_2(\tilde{x}^+)B_2^i(\tilde{x})K_2^j(\tilde{x}) \\
T_{ij44}^n(\tilde{x}) &= Y_2^n(x(k,l+1)) + Y_2^{nT}(x(k,l+1)) \\
&\quad - P_2^n(x(k,l+1) - \varepsilon_2^{ij}(\tilde{x})I
\end{aligned}$$

Preuve 5.2 *Considérons la fonction polynomiale de Lyapunov suivante [Chaibi 2016] :*

$$V(x(k,l)) = \tilde{x}^T(x(k,l))Y_z^{-T}(\tilde{x})P_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \tag{5.25}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\hat{x}^T(x(k,l))v_{1min}Y_z^{-T}(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) &\leq V(x(k,l)) \\
&\leq \hat{x}^T(x(k,l))v_{1max}Y_z^{-T}(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l))
\end{aligned} \tag{5.26}$$

où

$$v_{1min} = \lambda_{min_z}(P_z(\tilde{x})), \quad v_{1max} = \lambda_{max_z}(P_z(\tilde{x}))$$

Comme $(Y_z^{-T}(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})) = Y_z(\tilde{x})Y_z^T(\tilde{x})$ *avec*

$$\nu_{2min} = \lambda_{min_z}(Y_z(\tilde{x})Y_z^T(\tilde{x})), \quad \nu_{2max} = \lambda_{max_z}(Y_z(\tilde{x})Y_z^T(\tilde{x}))$$

(5.26) *devient*

$$\nu_{1min}\nu_{2max}^{-1}\|\hat{x}(x(k,l))\|^2 \leq V(x(k,l)) \leq \nu_{1max}\nu_{2min}^{-1}\|\hat{x}(x(k,l))\|^2$$

ce qui garantit que $V(x(k,l))$ *est une fonction polynomiale de Lyapunov. Alors, la variation de* (5.25) *est donnée par*

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k,l)) &= \hat{x}^T(x(k,l))[(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x}))^T Y_z^{-T}(\tilde{x}^+)P_z(\tilde{x}^+)Y_z^{-1}(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) \\ &\quad + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})) - Y_z^{-T}(\tilde{x})P_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})]\hat{x}(x(k,l)) \\ &= -\hat{x}^T(x(k,l))Q_{2z}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l))\end{aligned} \tag{5.27}$$

où

$$\begin{aligned}-Q_{2z}(\tilde{x}) &= [(\tilde{A}_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x}))^T Y_z^{-T}(\tilde{x}^+)P_z(\tilde{x}^+)Y_z^{-1}(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x}) \\ &\quad + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})) - Y_z^{-T}(\tilde{x})P_z(\tilde{x})Y_z^{-1}(\tilde{x})]\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$Y^z(\tilde{x}^+) = \begin{bmatrix} Y_1^z(\tilde{x}^+) & 0 \\ 0 & Y_2^z(\tilde{x}^+) \end{bmatrix}, \quad P^z(\tilde{x}^+) = \begin{bmatrix} P_1^z(\tilde{x}^+) & 0 \\ 0 & P_2^z(\tilde{x}^+) \end{bmatrix}$$

$$Y_1^z(\tilde{x}^+) = \sum_{m=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))Y_1^m(x(k+1,l))$$
$$Y_2^z(\tilde{x}^+) = \sum_{n=1}^{r} h_n(\varsigma(k,l+1))Y_2^n(x(k,l+1))$$

$$P_1^z(\tilde{x}^+) = \sum_{m=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))P_1^m(x(k+1,l))$$
$$P_2^z(\tilde{x}^+) = \sum_{n=1}^{r} h_n(\varsigma(k,l+1))P_2^n(x(k,l+1))$$

et $Q_{2z}(\tilde{x})$ *sont des matrices symétriques polynomiaux, définies positives.*

$$\hat{x}^T(x(k,l))Q_{2z}(\tilde{x})\hat{x}(x(k,l)) \geq \lambda_{min}(Q_{2z}(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k,l))\|_2^2$$

Ainsi, $\Delta V(x(k,l))$ est borné comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k,l)) \leq & -\lambda_{min}(Q_{2z}(\tilde{x}))\|\hat{x}(x(k,l))\|_2^2, \\ & \forall \|\hat{x}(x(k,l))\|_2 < \eta_{(N)}\end{aligned}$$

Notons que dans le système à 2-D, les informations sont propagées dans deux directions indépendantes ; par conséquent, $h_i(\varsigma(k+1,l))$ et $h_j(\varsigma(k,l+1))$ sont deux fonctions d'appartenance différentes.

En multipliant le côté droit de (5.28) par $Y_z(\tilde{x})$ et le côté gauche par $Y_z^T(\tilde{x})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&(Y_z^T(\tilde{x})\tilde{A}_z^T(\tilde{x}) + K_z^T(\tilde{x})\tilde{B}_z^T(\tilde{x}))Y_z^{-T}(\tilde{x}^+)P_z(\tilde{x}^+)Y_z^{-1}(\tilde{x}^+) \\ &\times(\tilde{A}_z(\tilde{x})Y_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x})) - P_z(\tilde{x}) < 0.\end{aligned} \tag{5.29}$$

En utilisant le Lemme 1.12, où $A = Y_z^{-1}(\tilde{x}^+)(\tilde{A}_z(\tilde{x})Y_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x}))$, (5.29) peut être exprimé par

$$T_z(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} P_z(\tilde{x}) & * \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22}\end{bmatrix} > 0 \tag{5.30}$$

où

$$\begin{aligned}\Upsilon_{21} &= \tilde{A}_z(\tilde{x})Y_z(\tilde{x}) + \tilde{B}_z(\tilde{x})K_z(\tilde{x}) \\ \Upsilon_{22} &= Yz(\tilde{x}^+) + Y_z^T(\tilde{x}^+) - P_z(\tilde{x}^+)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_z(\tilde{x}) = &\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))h_n(\varsigma(k,l+1))(\sum_{i=1}^{r} h_i^2 T_{ii}^{mn}(\tilde{x}) \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j>i}^{r} h_i h_j (T_{ij}^{mn}(\tilde{x}) + T_{ji}^{mn}(\tilde{x})))\end{aligned}$$

où $T_{ij}^{mn}(\tilde{x})$ sont définis dans (5.24)

Si les conditions (5.22) et (5.23) sont satisfaites, les conditions suivantes sont également satisfaites :

$$\begin{aligned}T_z(\tilde{x}) \geq &\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))h_n(\varsigma(k,l+1)) \\ &\times(\sum_{i=1}^{r} h_i^2 Z_{ii}^{mn}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j>i}^{r} h_i h_j (Z_{ij}^{mn}(\tilde{x}) + Z_{ji}^{mn}(\tilde{x}))) \\ &= \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} h_m(\varsigma(k+1,l))h_n(\varsigma(k,l+1))\theta^T Z^{mn}(\tilde{x})\theta\end{aligned} \tag{5.31}$$

où $\theta^T = [h_1 I \;\; h_2 I \;\; \dots \;\; h_r I]$
et

$$Z^{mn}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Z_{11}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{12}^{mn}(\tilde{x}) & \dots & Z_{1r}^{mn}(\tilde{x}) \\ Z_{21}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{22}^{mn}(\tilde{x}) & \dots & Z_{2r}^{mn}(\tilde{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{r1}^{mn}(\tilde{x}) & Z_{r2}^{mn}(\tilde{x}) & \dots & Z_{rr}^{mn}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

Remarque 5.1 *La faisabilité des conditions de la SOS développées est influencée par les polynômes* $\varepsilon_i^1(x)$, $\varepsilon_i^2(x)$, $\varepsilon_{ij}^1(x)$ *et* $\varepsilon_{ij}^2(x)$ *; donc, en pratique, la structure polynomiale de* $\varepsilon_i^1(x)$, $\varepsilon_i^2(x)$, $\varepsilon_{ij}^1(x)$ *et* $\varepsilon_{ij}^2(x)$ *doit être soigneusement sélectionnée.*

Remarque 5.2 *Notons que les études précédentes sur les modèles polynomiaux flous, [Tanaka 2007, Tanaka 2008], indiquent que l'inconvénient majeur des résultats de la SOS est la complexité du calcul numérique. En fait, lorsque le degré* $2d$ *augmente, la complexité de calcul augmente et le temps de calcul requis augmente aussi. Néanmoins, l'approche de la SOS présente un avantage évident en tant qu'une généralisation des approches existantes du système flou T–S, car elle représente plus efficacement les systèmes non linéaires. En fait, l'approche de la SOS utilisée dans ce chapitre est moins restrictive que l'approche LMI utilisée auparavant dans la littérature [Xie 2010b].*

5.3 Résultats de simulation

Exemple 5.1 *Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante [Xie 2010b]*

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + a_0 \sin^2(q(x,t)) + b f(x,t))$$

avec les conditions initiales et les conditions aux limites

$$q(x,0) = q_1(x), \quad q(t,0) = q_2(t)$$

$q(x,t)$ *est la fonction d'état,* a_0, a_1, a_2, b *sont des coefficients réels et* $f(x,t)$ *est la fonction d'entrée. Si nous définissons*

$$x_c^h(x,t) = \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} - a_2 q(x,t)$$
$$x_c^v(x,t) = q(x,t)$$

nous obtenons alors le modèle 2-D suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^h(x,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial x_c^v(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \sin^2(x_c^v(x,t)) \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c^h(x,t) \\ x_c^v(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u_c(x,t)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$x_c^h(0,t) = \dot{q}_2(t) - a_2 q_2(t)$$
$$x_c^v(x,t) = q_1(x)$$

Considérons les deux règles suivantes obtenues pour $\sin^2(x_c^v(x,t))$ *:*
SI $\sin^2(x_c^v(x,t))$ *est environ 0, ALORS*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^h(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_c^v(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = A_1^c \begin{bmatrix} x_c^h(x,t) \\ x_c^v(x,t) \end{bmatrix} + B_1^c u_c(x,t)$$

SI $\sin^2(x_c^v(x,t))$ *est environ* ∓ 1*, ALORS*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^h(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_c^v(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = A_2^c \begin{bmatrix} x_c^h(x,t) \\ x_c^v(x,t) \end{bmatrix} + B_2^c u_c(x,t)$$

avec

$$A_1^c = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, B_1^c = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^c = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 + a_0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, B_2^c = B_1^c$$

Les fonctions d'appartenance sont données par :

$$h_1(x,t) = 1 - \sin^2(x_c^v(x,t)),\ h_2(x,t) = \sin^2(x_c^v(x,t))$$

Le système T–S bidimensionnel est discrétisé avec des intervalles d'échantillonnage T_1 *et* T_2 *correspondant aux variables x et t, respectivement, avec les paramètres de système indiqués dans [Xie 2010b, Xie 2010a] et [Xie 2015]. Nous obtenons le système suivant :*

SI $\sin^2(x^v(k,l))$ *est environ 0, ALORS*

$$\begin{bmatrix} x^h(k+1,l) \\ x^v(k,l+1) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x^h(k,l) \\ x^v(k,l) \end{bmatrix} + B_1 u(k,l)$$

SI $\sin^2(x^v(k,l))$ *correspond à peu près à* ∓ 1*, ALORS*

$$\begin{bmatrix} x^h(k+1,l) \\ x^v(k,l+1) \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x^h(k,l) \\ x^v(k,l) \end{bmatrix} + B_2 u(k,l)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 + a_1 T_1 & a_1 a_2 T_1 \\ T_2 & 1 + a_2 T_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} bT_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 + a_1 T_1 & (a_1 a_2 + a_0) T_1 \\ T_2 & 1 + a_2 T_2 \end{bmatrix}, B_2 = B_1$$

Les fonctions d'appartenance deviennent alors :

$$h_1(k,l) = 1 - \sin^2(x^v(k,l)), \quad h_2(k,l) = \sin^2(x^v(k,l))$$

Nous pouvons nous référer à [Li 2001] pour plus de discussions sur la discrétisation du modèle flou T–S en temps continu ; voir aussi les articles traitant de l'opérateur delta, comme [Yang 2010].

Pour la simulation numérique, nous considérons les paramètres suivants : $a_1 = -3$, $a_0 = -2$, $b = -1$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 0.8$.

Les intervalles de faisabilité possibles pour a_2 *sont indiqués dans le Tableau 5.1, pour la technique proposée comparés avec d'autres résultats de la littérature. Dans le Tableau 5.1, nous pouvons observer que les intervalles obtenus par nos théorèmes proposés 5.1 et 5.2 sont plus grands que les résultats obtenus avec [Xie 2010b], [Xie 2010a] et [Chaibi 2016].*

Tableau 5.1 – Intervalles de faisabilité pour a_2

Méthodes	Intervalles de faisabilité
PDC [Xie 2010b]	$[-1.990, \quad -0,512]$
Théorème 1 de [Xie 2010b]	$[-2.012, \quad -0,494]$
Corollaire 2 [Xie 2010b]	$[-2.292, \quad -0,212]$
Théorème 2 non-PDC de [Xie 2010b]	$[-2.492, \quad -0,014]$
Théorème 1 PDC de [Chaibi 2016]	$[-2.499, \quad -0,018]$
Théorème 2 non-PDC de [Chaibi 2016]	$[-2,65, \quad -0,01]$
Théorème 1 de [Xie 2010a] avec $g = 2$	$[-2.502, \quad -0,013]$
Théorème 2 de [Xie 2010a] avec $g = d = 2$	$[-2.561, \quad -0,012]$
Théorème 3 de [Xie 2010a] avec $g = d = 2$	$[-2.566, \quad -0,011]$
Théorème 5.1 PDC [Chaibi 2019b] avec $2d = 2$	$[-2.525, \quad -0,001]$
Théorème 5.2 non-PDC [Chaibi 2019b] avec $2d = 2$	$[-2.743, \quad -0,001]$

Par exemple, nous choisissons $a_2 = -2.4$, *puis nous résolvons les conditions en* (5.19)-(5.23) *avec le solveur SOSTOOLS nous trouvons la solution réalisable suivante :*

$$K_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} K_1^1(\tilde{x}) & K_2^1(\tilde{x}) \end{bmatrix}, K_2(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} K_1^2(\tilde{x}) & K_2^2(\tilde{x}) \end{bmatrix},$$
$$Y_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Y_1^1(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & Y_2^1(\tilde{x}) \end{bmatrix}, Y_2(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Y_1^2(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & Y_2^2(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

$$K_1^1(\tilde{x}) = -7.5365.10^{-6} x^h(k,l)^2 - 435,36 x^v(k,l)^2$$
$$K_2^1(\tilde{x}) = 0.000070999 x^h(k,l)^2 + 14012.0 x^v(k,l)^2$$
$$K_1^2(\tilde{x}) = -7.2643.10^{-6} x^h(k,l)^2 - 433,25 x^v(k,l)^2$$
$$K_2^2(\tilde{x}) = 0.000051495 x^h(k,l)^2 + 10150.0 x^v(k,l)^2$$

$$Y_1^1(\tilde{x}) = 7.0585.10^{-6}x^h(k,l)^2 + 427,83x^v(k,l)^2$$
$$Y_2^1(\tilde{x}) = 0.000010406x^h(k,l)^2 + 1945.4x^v(k,l)^2$$
$$Y_1^2(\tilde{x}) = 7.1543.10^{-6}x^h(k,l)^2 + 428,39x^v(k,l)^2$$
$$Y_2^2(\tilde{x}) = 0.000010334x^h(k,l)^2 + 1951.3x^v(k,l)^2$$

Certaines simulations sont maintenant discutées avec les conditions aux limites suivantes

$$x^h(0,l) = 0,2, \quad 0 \leq l \leq 30$$
$$x^v(k,0) = 0,3, \quad 0 \leq k \leq 30$$
$$x^h(0,l) = 0,05, \quad x^v(k,0) = 0,1, \quad i,j > 30$$

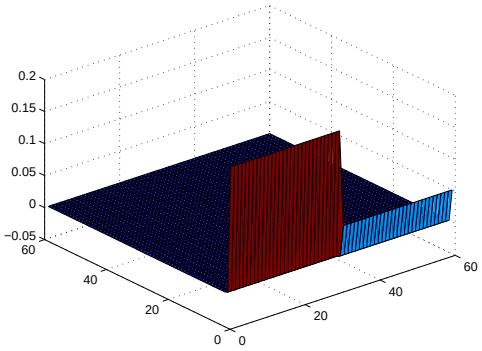


FIGURE 5.1 – État horizontal $x^h(k,l)$ pour $a_2 = -2,4$ en utilisant la commande proposée.

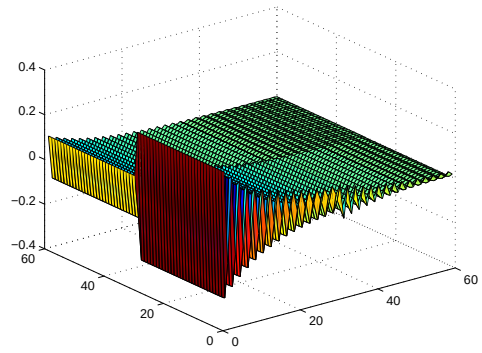


FIGURE 5.2 – État vertical $x^v(k,l)$ pour $a_2 = -2,4$ en utilisant la commande proposée.

Les figures 5.1et 5.2 montrent les évolutions des deux états $x^h(k,l)$ et $x^v(k,l)$, respectivement : il est clair que le système polynomial discret T–S à 2-D (5.4) avec la commande polynomiale (5.17) est asymptotiquement stable.

Remarque 5.3 *Le même système peut être étudié avec la saturation. En fait, des systèmes bidimensionnels saturés ont déjà été étudiés dans [Gao 2014] pour un système Fornasini-Marchesini T–S, avec une sinusoïde utilisée dans l'exemple. Les systèmes 2-D saturés pour le modèle Roesser ont également été traités dans [Hmamed 2010], où la fonction de saturation est symétrique. Notons que nous avons déjà traité le problème de la stabilisation des systèmes flous T–S en temps discret non linéaire avec une saturation d'actionneur dans [Naamane 2017] pour (1–D), où la sinusoïde a été utilisée dans l'exemple et nous considérerons le Problème T–S à deux dimensions en tant que perspective de travail.*

Pour un polynôme $X(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, la complexité du calcul de la décomposition SOS dépend de deux facteurs : le nombre de variables et le degré du polynôme $(2d+1)n_d^2$.

Le nombre des variables (N.V) et le nombre d'LMI / SOS sont indiqués dans le Tableau 5.2. Notons qu'avec cette technique, lorsque le nombre des variables ou le degré du polynôme sont augmentés, le conservatisme du résultat diminue, mais la complexité de calcul augmente.

Tableau 5.2 – Nombre des variables et nombre de (LMI / SOS), avec $n_1 = n_2 = n_d$ et $m_1 = m_2 = m_d$

Méthodes	N.V	Nombre de (LMI / SOS)
Théorème 1 PDC dans [Xie 2010b]	$n_d(n_d+1) + 2m_d n_d r$ $+16n_d^2 r + n_d(4n_d+1)r(r+1)$	$r + \frac{r}{2}(r-1) + 1$
Théorème 1 PDC [Chaibi 2019b] pour degré 2d	$(2d+1)[n_d(n_d+1)r + 2n_d m_d r]$	$2r + r^3 + \frac{r^3}{2}(r-1)$
Théorème 2 NON-PDC dans [Xie 2010b]	$n_d(n_d+1)r + 2m_d n_d r$ $+2n_d^2 r + 16n_d^2 r^3$ $+n_d(4n_d+1)r^3(r+1)$	$r^3 + \frac{r^3}{2}(r-1) + r^2$
Théorème 2 NON-PDC [Chaibi 2019b] pour le degré 2d	$(2d+1)[n_d(n_d+1)r + 2m_d n_d r$ $+2n_d^2 r + 16n_d^2 r^3$ $+n_d(4n_d+1)r^3(r+1)]$	$2r + r^3 + \frac{r^3}{2}(r-1) + r^2$

Exemple 5.2 *Considérons le système non linéaire en temps discret suivant représenté par le modèle de Roesser polynomial flou T–S à 2-D avec les deux règles floues suivantes :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.675 \\ 0.75x^h(k,l) & 0.325 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.36x^v(k,l) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.105 \\ 0.75x^h(k,l) & 0.325 \end{bmatrix}, B_2 = B_1$$

Les fonctions d'appartenance sont données comme suit :

$$h_1(k,l) = 1 - \sin^2(x^v(k,l)), \quad h_2(k,l) = \sin^2(x^v(k,l))$$

En résolvant la condition de conception de la SOS dans le Théorème 5.2, la stabilité asymptotique est assurée pour le système polynomial flou à deux dimensions ci-dessus.

Les gains de la commande polynomiale floue correspondantes sont données par :

$$K_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} K_1^1(\tilde{x}) & K_2^1(\tilde{x}) \end{bmatrix}, K_2(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} K_1^2(\tilde{x}) & K_2^2(\tilde{x}) \end{bmatrix},$$

$$Y_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Y_1^1(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & Y_2^1(\tilde{x}) \end{bmatrix}, Y_2(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} Y_1^2(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & Y_2^2(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_1^1(\tilde{x}) &= 0.45443x^v(k,l) + 3.4487.10^{-18} \\
K_2^1(\tilde{x}) &= 1627.9x^v(k,l) - 1.0845.10^{-15} \\
K_1^2(\tilde{x}) &= 0.45512x^v(k,l) + 1.4207.10^{-17} \\
K_2^2(\tilde{x}) &= 253,6x^v(k,l) - 1.4194.10^{-17} \\
Y_1^1(\tilde{x}) &= 6.0479.10^{-6}x^h(k,l)^2 + 6,6041x^v(k,l)^2 \\
Y_2^1(\tilde{x}) &= 0,0040157x^h(k,l)^2 + 8681,2x^v(k,l)^2 \\
Y_1^2(\tilde{x}) &= 3.9496.10^{-6}x^h(k,l)^2 + 6,609x^v(k,l)^2 \\
Y_2^2(\tilde{x}) &= 0,0037871x^h(k,l)^2 + 8693,1x^v(k,l)^2
\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}
&x^h(0,l) = 0,2, \quad 0 \le l \le 30 \\
&x^v(k,0) = 0,3, \quad 0 \le k \le 30 \\
&x^h(0,l) = 0,05, \quad x^v(k,0) = 0,1, \quad i,j > 30
\end{aligned}$$

Les Figures 5.3-5.4 affichent la trajectoire des variables d'état du système $x^h(k,l)$ et

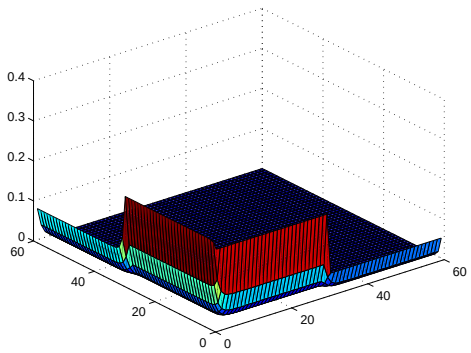


FIGURE 5.3 – Trajectoire de l'état du système polynomial 2-D $x^h(k,l)$.

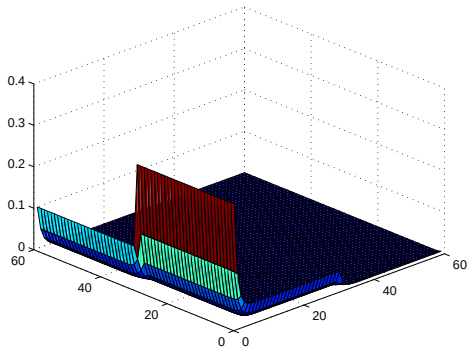


FIGURE 5.4 – Trajectoire de l'état du système polynomial 2-D $x^v(k,l)$.

$x^v(k,l)$, respectivement. Les résultats de la simulation sur les Fig. 5.3-5.4 montrent que le système polynomial discret T–S à 2-D est asymptotiquement stable. Par conséquent, l'efficacité de l'approche proposée a été illustrée dans l'exemple numérique.

5.4 Conclusion

La stabilisation d'un système non linéaire à deux dimensions a été résolue dans ce chapitre en utilisant l'approche de somme des carrés. Plus précisément, la stabilisation des systèmes discrets à 2–D pouvant être décrits en terme de modèle polynomial flou de type Roesser, a été étudiée à l'aide de la loi de commande PDC. Premièrement, une condition de stabilisation basée sur la multifonction polynomiales de Lyapunov a été dérivée. Deuxièmement, une condition de stabilisation non quadratique a été développée en utilisant une technique de relaxation. Ces conditions sont formulées en terme de la SOS, afin de les rendre numériquement exploitables. Deux exemples numériques ont été fourni pour montrer l'efficacité des résultats proposés.

Conclusion générale

Cette thèse s'est focalisé sur l'analyse et la conception de la commande pour les systèmes non linéaires. Les conditions de stabilisation ont été formulées en terme d'LMI et de la SOS et ont été proposées à l'aide des commandes par retour d'état et par retour de sortie statique. Ainsi, la commande H_∞ par retour de sortie statique à fréquence finie a été traitée dans le chapitre 2. Des résultats moins restrictifs ont été obtenus en utilisant le Lemme GKYP. La synthèse des commandes requises est donnée sous forme d'LMI et des exemples pratiques sont fournis pour illustrer les résultats. Notre approche permet de concevoir la commande H_∞ par SOF sans aucune contrainte d'égalité et évite la bilinéarité de la commande, ce qui représente un avantage par rapport à certaines méthodes. Au chapitre 3 Les conditions de stabilité et de stabilisation sont formulées pour les systèmes polynomiaux T–S en temps continu, ces conditions étant exprimées sous forme de la SOS. Des conditions de stabilité et de stabilisation sont obtenues, en se basant sur multifonction polynomiales de Lyapunov et sur l'utilisation des propriétés de la dérivée temporelle des fonctions d'appartenance. L'approche abordée dans le chapitre 3 est plus générale que celle basée sur les approches LMI existantes dans la littérature pour la commande des systèmes flous T–S. La commande par SOF a été également étudiée : la synthèse et la conception de la commande ont été traitées pour les systèmes non linéaires décrits par les modèles polynomiaux T–S. De la même manière, la conception de la commande H_∞ par SOF pour les systèmes polynomiaux flous T–S incertains a été proposée au chapitre 4 en temps discret dans un champ de fréquence finie. Des résultats moins restrictifs ont été obtenus en utilisant le Lemme GKYP et la fonction polynomiale de Lyapunov, sans transformation matricielle et sans contraintes d'égalité. Enfin, ces méthodologies de conception ont été illustrées par leur application à la stabilisation d'un camion remorque non linéaire et du modèle de mappage Henon. Le chapitre 5 a étudié la stabilisation de la classe des systèmes discrets 2–D qui pouvant être décrits en terme de modèles polynomiaux flous de type Roesser (qui représentent une vaste classe des systèmes non linéaires). La multifonction polynomiale de Lyapunov a été considérée pour obtenir des conditions de stabilisation suffisantes pour cette classe de systèmes. En outre, la commande non-PDC a également été utilisée pour les systèmes polynomiaux flous T–S à 2-D, afin d'obtenir des conditions de stabilisation moins restrictives. Ces conditions de conception sont formulées en terme de la SOS, afin de les rendre numériquement exploitables. Deux exemples numériques ont été fourni pour montrer l'efficacité des résultats proposés.

Tous les résultats développés dans cette thèse ont été illustrés à l'aide des exemples numériques pour montrer l'efficacité de la méthodologie proposée à différents problèmes. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats de la littérature et nous avons démontré que les approches fournies donnent des résultats moins restrictifs. Nous

pensons que cette thèse ouvrira plusieurs pistes de recherche intéressantes, les résultats fournis pouvant être étendus à d'autres problèmes énumérés ci-dessous :

1. Analyse et synthèse de la commande robuste H_∞ par retour de sortie statique soumise à la saturation des actionneurs à l'aide de la SOS.
2. Conception de la commande tolérante au défaut basée sur le retour de sortie dynamique pour les systèmes polynomiaux flous T–S.
3. Détection de défaut dans le domaine des fréquences finies pour les systèmes polynomiaux flous T–S.
4. La commande robuste H_∞ basée sur l'observateur pour le système de pompage photovoltaïque par la SOS.

Bibliographie

[Abbaszadeh 2009] Masoud Abbaszadeh et Horacio J Marquez. *LMI optimization approach to robust H_∞ observer design and static output feedback stabilization for discrete-time nonlinear uncertain systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal, vol. 19, no. 3, pages 313–340, 2009. (Cité en page 29.)

[Agulhari 2010] CM Agulhari, RCLF Oliveira et PLD Peres. *Robust H_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains*. In Proc. 2010 Amer. Control Conf., pages 4677–4682, 2010. (Cité en page 2.)

[Ahmida 2016] Fatima Ahmida et El Houssaine Tissir. *Stabilization of switched T-S Fuzzy systems with additive time varying delays*. In Proceedings of the Mediterranean Conference on Information & Communication Technologies 2015, pages 401–408. Springer, 2016. (Cité en page 3.)

[Baldi 2016] Simone Baldi. *An iterative Sum-of-Squares optimization for static output feedback of polynomial systems*. In Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on, pages 3892–3897. IEEE, 2016. (Cité en pages 69 et 76.)

[Barry 1976] PE Barry, R Gran et CR Waters. *Two dimensional filtering-a state estimator approach*. In 1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes, pages 613–618. IEEE, 1976. (Cité en page 93.)

[Benzaouia 2016] Abdellah Benzaouia, Abdelaziz Hmamed et Fernando Tadeo. *Two-dimensional systems*. Studies in Systems Decision and Control, vol. 28, 2016. (Cité en page 93.)

[Boukili 2014] Bensalem Boukili, Abdelaziz Hmamed, Abdellah Benzaouia et Ahmed El Hajjaji. *H_∞ filtering of two-dimensional T-S fuzzy systems*. Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 33, no. 6, pages 1737–1761, 2014. (Cité en pages 2 et 93.)

[Boukili 2015] Bensalem Boukili, Abdelaziz Hmamed, Abdellah Benzaouia*et al.* *H_∞ State Control for 2D Fuzzy FM Systems with Stochastic Perturbation*. Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 34, no. 3, pages 779–796, 2015. (Cité en pages 2 et 93.)

[Boukili 2016] Bensalem Boukili, Abdelaziz Hmamed et Fernando Tadeo. *Robust H_∞ Filtering for 2-D Discrete Roesser Systems*. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, vol. 27, no. 5, pages 497–505, 2016. (Cité en page 93.)

[Boyd 1994] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron et Venkataramanan Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory, volume 15. Siam, 1994. (Cité en page 27.)

[Cao 2014] Kairui Cao, Xiao Zhi Gao, Thanos Vasilakos et Witold Pedrycz. *Analysis of stability and robust stability of polynomial fuzzy model-based control systems using a sum-of-squares approach*. Soft Computing, vol. 18, no. 3, pages 433–442, 2014. (Cité en pages ix, 3, 24, 28, 45, 53, 57, 59 et 60.)

[Chadli 2002] Mohammed Chadli, Didier Maquin et José Ragot. *An LMI formulation for output feedback stabilization in multiple model approach*. In Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on, volume 1, pages 311–316. IEEE, 2002. (Cité en pages 2 et 3.)

[Chaibi 2016] Redouane Chaibi, AbdelAziz Hmamed et Fernando Tadeo. *Stabilization of discrete-time 2-D T-S Fuzzy system via a sum of squares (SOS) approach*. In 5th International Conference on Systems and Control (ICSC), 2016, pages 109–114. IEEE, 2016. (Cité en pages 45, 69, 71, 94, 99, 100 et 105.)

[Chaibi 2017a] Redouane Chaibi et AbdelAziz Hmamed. *Static output feedback control problem for polynomial fuzzy systems via a sum of squares (SOS) approach*. In 2017 Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV), pages 1–6. IEEE, 2017. (Cité en pages 29, 38, 62, 65, 69, 71 et 76.)

[Chaibi 2017b] Redouane Chaibi, AbdelAziz Hmamed Lessi, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. *Stability conditions for polynomial T–S fuzzy systems using a sum of squares approach*. In Electrical and Information Technologies (ICEIT), 2017 International Conference on, pages 1–5. IEEE, 2017. (Cité en page 45.)

[Chaibi 2018] Redouane Chaibi, Ismail ErRachid, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. *Finite-Frequency Static Output Feedback H_∞ Control of Continuous-Time T–S Fuzzy Systems*. Journal of Circuits, Systems and Computers, vol. 28, no. 2, page 1950023, 2018. (Cité en pages 32, 34, 40 et 43.)

[Chaibi 2019a] Redouane Chaibi, Ismail ErRachid, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. *Robust FF H_∞ SOF Control For Uncertain Fuzzy Systems Via a SOS Approach*. soumi optimal control application, pages 1–20, 2019. (Cité en pages 69, 74, 76, 79, 82, 84 et 88.)

[Chaibi 2019b] Redouane Chaibi, Abdelaziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. *Control of Discrete 2-D Takagi–Sugeno Systems via a Sum-of-Squares Approach*. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, vol. 30, no. 2, pages 137–147, 2019. (Cité en pages 96, 99, 105 et 107.)

[Chaibi 2019c] Redouane Chaibi, AbdelAziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. *Stabilization of Polynomial Fuzzy Systems Using Multiple Polynomial Lyapunov Functions*. In The 14th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis ACD 2017, pages 1–5. IEEE, 2019. (Cité en pages 47 et 51.)

[Chang 2003] Wook Chang, Jin Bae Park, Young Hoon Joo et Guanrong Chen. *Static output-feedback fuzzy controller for Chen's chaotic system with uncertainties*. Information Sciences, vol. 151, pages 227–244, 2003. (Cité en pages 10 et 29.)

[Chang 2009] Xiao-Heng Chang et Guang-Hong Yang. *Relaxed stability condition and state feedback H_∞ controller design for T-S fuzzy systems*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 7, no. 1, pages 139–144, 2009. (Cité en page 3.)

[Chang 2010] Shun-Chang Chang. *Synchronization and controlling chaos in a permanent magnet synchronous motor*. Journal of Vibration and Control, vol. 16, no. 12, pages 1881–1894, 2010. (Cité en page 42.)

[Chang 2011] Xiao-Heng Chang et Guang-Hong Yang. *Relaxed results on stabilization and state feedback H_∞ control conditions for T–S fuzzy systems*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 7, no. 4, pages 1753–1764, 2011. (Cité en page 1.)

[Chang 2015a] Xiao-Heng Chang, Ju H Park et Jianping Zhou. *Robust static output feedback H_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties*. Systems & Control Letters, vol. 85, pages 23–32, 2015. (Cité en pages 29 et 38.)

[Chang 2015b] Xiao-Heng Chang, Liang Zhang et Ju H Park. *Robust static output feedback H_∞ control for uncertain fuzzy systems*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 273, pages 87–104, 2015. (Cité en pages 27, 29, 38, 71, 72, 73, 83, 84, 85, 87 et 88.)

[Chen 2016] Jian Chen, Chong Lin, Bing Chen et Dong Zhang. *Stabilisation of T-S fuzzy systems via static output feedback : An iterative method*. In Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese, pages 3710–3715. IEEE, 2016. (Cité en pages 2, 29, 32 et 71.)

[Chibani 2018] Ali Chibani, Mohammed Chadli, Steven X Ding et Naceur Benhadj Braiek. *Design of robust fuzzy fault detection filter for polynomial fuzzy systems with new finite frequency specifications*. Automatica, vol. 93, pages 42–54, 2018. (Cité en page 73.)

[Choi 2009] Han Ho Choi. *Output feedback stabilization of uncertain fuzzy systems using variable structure system approach*. Fuzzy sets and systems, vol. 160, no. 19, pages 2812–2823, 2009. (Cité en page 1.)

[de Oliveira 1999] Maurício C de Oliveira, Jacques Bernussou et José C Geromel. *A new discrete-time robust stability condition*. Systems & control letters, vol. 37, no. 4, pages 261–265, 1999. (Cité en page 28.)

[De Souza 2000] Carlos E De Souza et Alexandre Trofino. *An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems*. International Journal of Control, vol. 73, no. 8, pages 696–703, 2000. (Cité en page 29.)

[Ding 2010] Baocang Ding. *Stabilization of Takagi–Sugeno model via nonparallel distributed compensation law*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 18, no. 1, pages 188–194, 2010. (Cité en page 1.)

[Ding 2011] Dawei Ding, Xiaoli Li, Xiangpeng Xie et Dexin Liu. *Relaxed stabilization conditions for discrete-time 2-D T-S fuzzy systems*. In Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese, pages 3459–3464. IEEE, 2011. (Cité en page 93.)

[Du 2002] Chungling Du et Lihua Xie. h_∞ control and filtering of two-dimensional systems, volume 278. Springer Science & Business Media, 2002. (Cité en page 2.)

[El-Kasri 2013] Chakir El-Kasri, Abdelaziz Hmamed, El Houssaine Tissir et Fernando Tadeo. *Robust H_∞ filtering for uncertain two-dimensional continuous systems with time-varying delays*. Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 24, no. 4, pages 685–706, 2013. (Cité en page 93.)

[Errachid 2017] Ismail Errachid et Abdelaziz Hmamed. *Stability and Robust Stabilization of 2-D Continuous Systems in Roesser Model Based on GKYP Lemma*. International Journal of Power Electronics and Drive Systems (IJPEDS), vol. 8, no. 3, pages 990–1001, 2017. (Cité en pages 30 et 69.)

[Errachid 2018] Ismail Errachid, **Redouane Chaibi**, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. *Observer-based H_∞ control with finite frequency specifications for discrete-time T–S fuzzy systems*. International Journal of Systems Science, vol. 49, no. 16, pages 3307–3319, 2018. (Cité en page 69.)

[Fang 2006] Chun-Hsiung Fang, Yung-Sheng Liu, Shih-Wei Kau, Lin Hong et Ching-Hsiang Lee. *A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T–S fuzzy control systems*. IEEE Transactions on fuzzy systems, vol. 14, no. 3, pages 386–397, 2006. (Cité en pages 2, 38, 44, 63 et 71.)

[Faria 2011] Flávio A Faria, Geraldo N Silva, Vilma A Oliveira et Rodrigo Cardim. *Improving the stability conditions of T-S fuzzy systems with fuzzy Lyapunov functions*. IFAC Proceedings Volumes, vol. 44, no. 1, pages 10881–10886, 2011. (Cité en pages ix, 3, 50, 51, 53 et 54.)

[Feng 2004] Gang Feng. *Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 12, no. 1, pages 22–28, 2004. (Cité en page 1.)

[Feng 2006] Gang Feng. *A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 14, no. 5, pages 676–697, 2006. (Cité en pages 1 et 76.)

[Feng 2010] Gang Feng. Analysis and synthesis of fuzzy control systems : A model-based approach. CRC press, 2010. (Cité en page 1.)

[Gahinet 1994] Pascal Gahinet et Pierre Apkarian. *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*. International journal of robust and nonlinear control, vol. 4, no. 4, pages 421–448, 1994. (Cité en page 27.)

[Gałkowski 2003] Krzysztof Gałkowski, Eric Rogers, Wojciech Paszke et David H Owens. *Linear repetitive process control theory applied to a physical example*. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 13, pages 87–99, 2003. (Cité en page 93.)

[Gao 2014] Jingbo Gao et Weiqun Wang. *H_∞ control For 2-D fuzzy FMII system with actuator saturation*. In Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese, pages 4435–4439. IEEE, 2014. (Cité en page 107.)

[Gassara 2017] Hamdi Gassara, Fatma Siala, Ahmed El Hajjaji et Mohamed Chaabane. *Local stabilization of polynomial fuzzy model with time delay : SOS approach*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 15, no. 1, pages 385–393, 2017. (Cité en page 1.)

[Guelton 2009] Kevin Guelton, Tahar Bouarar et Noureddine Manamanni. *Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems-A descriptor redundancy approach*. Fuzzy sets and systems, vol. 160, no. 19, pages 2796–2811, 2009. (Cité en page 29.)

[Guelton 2011] Kevin Guelton, Noureddine Manamanni, Darius L Koumba-Emianiwe et Cuong Duong Chinh. *SOS stability conditions for nonlinear systems based on a polynomial fuzzy Lyapunov function*. In 18th IFAC World Congress, Milano (Italy), volume 28, pages 12777–12782, 2011. (Cité en page 94.)

[Guelton 2013] Kevin Guelton, Noureddine Manamanni, Chinh-Cuong Duong et Darius L Koumba-Emianiwe. *Sum-of-Squares Stability Analysis of Takagi-Sugeno Systems Based on Multiple Polynomial Lyapunov Functions.* International Journal of Fuzzy Systems, vol. 15, no. 1–8, 2013. (Cité en pages 3, 45, 46, 49, 54 et 56.)

[Hmamed 2009] Abdelaziz Hmamed, Ahmed El Hajjaji et Abdellah Benzaouia. *Stabilization of discrete-time 2D TS fuzzy systems by state feedback control*. In 2009 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, pages 1–6. IEEE, 2009. (Cité en page 19.)

[Hmamed 2010] Abdelaziz Hmamed, Fouad Mesquine, Fernando Tadeo, Mohamed Benhayoun et Abdellah Benzaouia. *Stabilization of 2D saturated systems by state feedback control*. Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 21, no. 3, pages 277–292, 2010. (Cité en page 107.)

[Iwasaki 2005] Tetsuya Iwasaki et Shinji Hara. *Generalized KYP lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 1, pages 41–59, 2005. (Cité en pages 15, 16 et 32.)

[Jarvis-Wloszek 2003] Zachary Jarvis-Wloszek, Ryan Feeley, Weehong Tan, Kunpeng Sun et Andrew Packard. *Some controls applications of sum of squares programming*. In 42nd IEEE international conference on decision and control (IEEE Cat. No. 03CH37475), volume 5, pages 4676–4681. IEEE, 2003. (Cité en page 20.)

[Jeung 2014] Eun Tae Jeung et Kap Rai Lee. *Static output feedback control for continuous-time T-S fuzzy systems : an LMI approach*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 12, no. 3, pages 703–708, 2014. (Cité en pages ix, 2, 10, 27, 29, 31, 38, 63, 65, 66, 67 et 71.)

[Johansson 1999] Mikael Johansson, Anders Rantzer et K-E Arzen. *Piecewise quadratic stability of fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 7, no. 6, pages 713–722, 1999. (Cité en page 1.)

[Kau 2007] Shih-Wei Kau, Hung-Jen Lee, Ching-Mao Yang, Ching-Hsiang Lee, Lin Hong et Chun-Hsiung Fang. *Robust H_∞ fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties*. Fuzzy sets and systems, vol. 158, no. 2, pages 135–146, 2007. (Cité en pages 1, 2, 10, 11, 12, 13 et 14.)

[Kim 2000] Euntai Kim et Heejin Lee. *New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 8, no. 5, pages 523–534, 2000. (Cité en pages 9 et 10.)

[Kim 2016] Han Sol Kim, Jin Bae Park et Young Hoon Joo. *Relaxed stability conditions for the Takagi–Sugeno fuzzy system using a polynomial non-quadratic Lyapunov function*. IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 13, pages 1590–1599, 2016. (Cité en page 3.)

[Krug 2013] Matthias Krug, Shakir Saat et Sing Kiong Nguang. *Robust H_∞ static output feedback controller design for parameter dependent polynomial systems : an iterative sums of squares approach*. Journal of the Franklin Institute, vol. 350, no. 2, pages 318–330, 2013. (Cité en pages 69 et 76.)

[Lam 2009] HK Lam. *Stability analysis of T-S fuzzy control systems using parameter-dependent Lyapunov function*. IET control theory & Applications, vol. 3, no. 6, pages 750–762, 2009. (Cité en page 1.)

[Lee 2009] Ho Jae Lee*et al.* *Robust stabilization of T-S fuzzy systems : fuzzy static output feedback under parametric uncertainty*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 7, no. 5, pages 731–736, 2009. (Cité en pages 40, 43 et 44.)

[Li 2001] Zhong Li, Jin Bae Park et Young Hoon Joo. *Chaotifying continuous-time T-S fuzzy systems via discretization*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, vol. 48, no. 10, pages 1237–1243, 2001. (Cité en page 105.)

[Li 2002] Zhong Li, Jin Bae Park, Young Hoon Joo, Bo Zhang et Guanrong Chen. *Bifurcations and chaos in a permanent-magnet synchronous motor*. IEEE Tran-

sactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, vol. 49, no. 3, pages 383–387, 2002. (Cité en page 40.)

[Lo 2003] Ji-Chang Lo et Min-Long Lin. *Robust H_∞ nonlinear control via fuzzy static output feedback*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, vol. 50, no. 11, pages 1494–1502, 2003. (Cité en pages 87 et 88.)

[Lo 2004] Ji-Chang Lo et Min-Long Lin. *Observer-based robust H_∞ control for fuzzy systems using two-step procedure*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 12, no. 3, pages 350–359, 2004. (Cité en page 1.)

[Lu 1992] Wu-Sheng Lu. Two-dimensional digital filters, volume 80. CRC Press, 1992. (Cité en page 93.)

[Ma 2016] Yuechao Ma, Menghua Chen et Xiuling Hu. *Exponential stability and stabilization of uncertain T–S fuzzy system with time-varying delay*. Journal of the Chinese Institute of Engineers, vol. 39, no. 3, pages 324–330, 2016. (Cité en page 1.)

[Márquez 2017] Raymundo Márquez, Thierry Marie Guerra, Miguel Bernal et Alexandre Kruszewski. *Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi–Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 306, pages 48–62, 2017. (Cité en page 46.)

[Marszalek 1984] Wieslaw Marszalek. *Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations*. Applied Mathematical Modelling, vol. 8, no. 1, pages 11–14, 1984. (Cité en page 2.)

[Mehdi 2004] Driss Mehdi, EK Boukas et Olivier Bachelier. *Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems*. IMA Journal of mathematical control and information, vol. 21, no. 1, pages 1–13, 2004. (Cité en page 2.)

[Mozelli 2009a] Leonardo A Mozelli, Reinaldo M Palhares et Gustavo SC Avellar. *A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems*. Information Sciences, vol. 179, no. 8, pages 1149–1162, 2009. (Cité en page 50.)

[Mozelli 2009b] Leonardo A Mozelli, Reinaldo M Palhares, FO Souza et Eduardo MAM Mendes. *Reducing conservativeness in recent stability conditions of T-S fuzzy systems*. Automatica, vol. 45, no. 6, pages 1580–1583, 2009. (Cité en pages 1 et 50.)

[Naamane 2017] Khadija Naamane, **Redouane Chaibi**, El Houssaine Tissir et Abdelaziz Hmamed. *Stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with saturating actuators*. In Advanced Technologies for Signal and Image Processing (ATSIP), 2017 International Conference on, pages 1–5. IEEE, 2017. (Cité en pages 1 et 107.)

[Nachidi 2007] Meriem Nachidi, Fernando Tadeo, Abdelaziz Hmamed et Abdellah Benzaouia. *Static output-feedback stabilization for time-delay Takagi-Sugeno fuzzy systems*. In Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on, pages 1634–1639. IEEE, 2007. (Cité en page 2.)

[Nachidi 2008] Meriem Nachidi, Abdellah Benzaouia, Fernando Tadeo et Mustapha Ait Rami. *LMI-Based Approach for Output-Feedback Stabilization for Discrete-Time Takagi–Sugeno Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 16, no. 5, pages 1188–1196, 2008. (Cité en pages 2 et 29.)

[Nguang 2011] SK Nguang, Shakir Saat et Matthias Krug. *Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems : an iterative sums of squares approach*. IET control theory & applications, vol. 5, no. 9, pages 1079–1084, 2011. (Cité en page 45.)

[Nguyen 2017] Anh-Tu Nguyen, Kazuo Tanaka, Antoine Dequidt et Michel Dambrine. *Static output feedback design for a class of constrained Takagi–Sugeno fuzzy systems*. Journal of the Franklin Institute, vol. 354, no. 7, pages 2856–2870, 2017. (Cité en page 29.)

[Owens 2000] DH Owens, N Amann, E Rogers et M French. *Analysis of linear iterative learning control schemes-a 2D systems/repetitive processes approach*. Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 11, no. 1-2, pages 125–177, 2000. (Cité en page 2.)

[Parrilo 2000] Pablo A Parrilo. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2000. (Cité en page 21.)

[Peaucelle 2000] D Peaucelle, D Arzelier, O Bachelier et J Bernussou. *A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty*. Systems & control letters, vol. 40, no. 1, pages 21–30, 2000. (Cité en page 28.)

[Petersen 1987] Ian R Petersen. *A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems*. Systems & Control Letters, vol. 8, no. 4, pages 351–357, 1987. (Cité en page 27.)

[Prajna 2004a] Stephen Prajna, Antonis Papachristodoulou et Pablo A Parrilo. *SOSTOOLS : sum of squares optimization toolbox for MATLAB–user's guide*. Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, Pasadena, CA, vol. 91125, 2004. (Cité en pages 22, 46, 55 et 94.)

[Prajna 2004b] Stephen Prajna, Antonis Papachristodoulou et Fen Wu. *Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization : A Lyapunov-based approach*. In Control conference, 2004. 5th asian, volume 1, pages 157–165. IEEE, 2004. (Cité en pages 21, 93 et 94.)

[Qiu 2010] Jianbin Qiu, Gang Feng et Huijun Gao. *Fuzzy-Model-Based Piecewise H_∞ Static-Output-Feedback Controller Design for Networked Nonlinear Systems*.

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 18, no. 5, pages 919–934, 2010. (Cité en page 2.)

[Rogers 1992] Eric Rogers et David H Owens. Stability analysis for linear repetitive processes. Springer-Verlag, 1992. (Cité en page 2.)

[Saifia 2012] Dounia Saifia, Mohammed Chadli, Salim Labiod et Thierry Marie Guerra. *Robust H_∞ static output feedback stabilization of T-S fuzzy systems subject to actuator saturation*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 10, no. 3, pages 613–622, 2012. (Cité en pages 29, 40, 43 et 44.)

[Shaker 2014] Hamid Reza Shaker et Fatemeh Shaker. *Lyapunov stability for continuous-time multidimensional nonlinear systems*. Nonlinear Dynamics, vol. 75, no. 4, pages 717–724, 2014. (Cité en page 94.)

[Shor 1987] Naum Z Shor. *Class of global minimum bounds of polynomial functions*. Cybernetics and Systems Analysis, vol. 23, no. 6, pages 731–734, 1987. (Cité en page 21.)

[Siala 2013] Fatma Siala, Hamdi Gassara, Mohamed Chaabane et Ahmed El Hajjaji. *Stability analysis of polynomial fuzzy systems with time-delay via sum of squares (SOS) approach*. In Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2013 14th International Conference on, pages 197–200. IEEE, 2013. (Cité en page 94.)

[Sulikowski 2004] Bartlomiej Sulikowski, Krzysztof GałKowski, Eric Rogers et David H Owens. *Output feedback control of discrete linear repetitive processes*. Automatica, vol. 40, no. 12, pages 2167–2173, 2004. (Cité en page 2.)

[Sulikowski 2006] Bartlomiej Sulikowski, Krzysztof Galkowski, Eric Rogers et David H Owens. *PI control of discrete linear repetitive processes*. Automatica, vol. 42, no. 5, pages 877–880, 2006. (Cité en page 2.)

[Syrmos 1997] Vassilis L Syrmos, Chaouki T Abdallah, Peter Dorato et Karolos Grigoriadis. *Static output feedback–a survey*. Automatica, vol. 33, no. 2, pages 125–137, 1997. (Cité en pages 2 et 29.)

[Takagi 1985] Tomohiro Takagi et Michio Sugeno. *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, no. 1, pages 116–132, 1985. (Cité en pages 1, 7 et 18.)

[Tanaka 2003] Kazuo Tanaka, Tsuyoshi Hori et Hua O Wang. *A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems*. IEEE Transactions on fuzzy systems, vol. 11, no. 4, pages 582–589, 2003. (Cité en pages 47 et 50.)

[Tanaka 2004] Kazuo Tanaka et Hua Wang. Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach. John Wiley & Sons, 2004. (Cité en pages 1, 7, 8 et 9.)

[Tanaka 2007] Kazuo Tanaka, Hiroto Yoshida, Hiroshi Ohtake et Hua O Wang. *Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach*. In Intelligent Control, 2007. ISIC 2007. IEEE 22nd International Symposium on, pages 160–165. IEEE, 2007. (Cité en pages 20, 61, 63 et 103.)

[Tanaka 2008] Kazuo Tanaka, Hiroshi Ohtake et Hua O Wang. *An SOS-based stable control of polynomial discrete fuzzy systems*. In American Control Conference, 2008, pages 4875–4880. IEEE, 2008. (Cité en pages 3, 25, 71, 72, 96 et 103.)

[Tanaka 2009] Kazuo Tanaka, Hiroto Yoshida, Hiroshi Ohtake et Hua O Wang. *A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol. 17, no. 4, pages 911–922, 2009. (Cité en pages 3, 20, 25, 45, 50, 53 et 71.)

[Tian 2009] Engang Tian, Dong Yue et Yijun Zhang. *Delay-dependent robust H_∞ control for T–S fuzzy system with interval time-varying delay*. Fuzzy sets and systems, vol. 160, no. 12, pages 1708–1719, 2009. (Cité en page 1.)

[Tong 2007] Shaocheng Tong, Wei Wang et Lianjiang Qu. *Decentralized robust control for uncertain T–S fuzzy large-scale systems with time-delay*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 3, no. 3, pages 657–672, 2007. (Cité en page 1.)

[Wang 2009] Zidong Wang, Daniel WC Ho, Yurong Liu et Xiaohui Liu. *Robust H_∞ control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements*. Automatica, vol. 45, no. 3, pages 684–691, 2009. (Cité en page 1.)

[Wang 2013] Heng Wang, Li-Yuan Peng, He-Hua Ju et Yu-Long Wang. *H_∞ state feedback controller design for continuous-time T-S fuzzy systems in finite frequency domain*. Information Sciences, vol. 223, pages 221–235, 2013. (Cité en pages 16 et 30.)

[Wang 2017] Gang Wang, Changzheng Chen et Shenbo Yu. *Robust non-fragile finite-frequency H_∞ static output-feedback control for active suspension systems*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 91, pages 41–56, 2017. (Cité en pages 30 et 69.)

[Wei 2015] Qiang Wei, Xing-Yuan Wang et Xiao-Peng Hu. *Inverse optimal control for permanent magnet synchronous motor*. Journal of vibration and control, vol. 21, no. 4, pages 801–807, 2015. (Cité en page 42.)

[Wu 2005] Huai-Ning Wu et Hong-Yue Zhang. *Reliable mixed L_2/H_∞ fuzzy static output feedback control for nonlinear systems with sensor faults*. Automatica, vol. 41, no. 11, pages 1925–1932, 2005. (Cité en pages 39, 40 et 44.)

[Xiaodong 2003] Liu Xiaodong et Zhang Qingling. *New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T–S fuzzy systems via LMI*. Automatica, vol. 39, no. 9, pages 1571–1582, 2003. (Cité en page 1.)

[Xie 2010a] X Xie et H Zhang. *Convergent stabilization conditions of discrete-time 2D T-S fuzzy systems via improved homogeneous polynomial techniques*. Acta Automatica Sinica, vol. 36, no. 9, pages 1305–1311, 2010. (Cité en pages 94, 104 et 105.)

[Xie 2010b] Xiang-Peng Xie et Hua-Guang Zhang. *Stabilization of discrete-time 2-D T-S fuzzy systems based on new relaxed conditions*. Acta Automatica Sinica, vol. 36, no. 2, pages 267–273, 2010. (Cité en pages 19, 103, 104, 105 et 107.)

[Xie 2015] Xiang-Peng Xie, Zhi-Wen Zhang et Song-Lin Hu. *Control synthesis of Roesser type discrete-time 2-DT-S fuzzy systems via a multi-instant fuzzy state-feedback control scheme*. Neurocomputing, vol. 151, pages 1384–1391, 2015. (Cité en pages 1 et 104.)

[Yang 2010] Hongjiu Yang, Yuanqing Xia, Jiqing Qiu et Jinhui Zhang. *Filtering for a class of discrete-time systems with time-delays via delta operator approach*. International Journal of Systems Science, vol. 41, no. 4, pages 423–433, 2010. (Cité en page 105.)

[Yang 2015] Jun Yang, Wen-Pin Luo, Yong-Hu Wang et Chun-Sheng Duan. *Improved stability criteria for T–S fuzzy systems with time-varying delay by delay-partitioning approach*. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 13, no. 6, pages 1521–1529, 2015. (Cité en page 1.)

[Ye 2016] Dan Ye et Nana Diao. *Dynamic output feedback H_∞ control for discrete-time polynomial-fuzzy-model-based systems using piecewise Lyapunov function*. In Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese, pages 3755–3760. IEEE, 2016. (Cité en page 69.)

[Yu 2012] Gwo-Ruey Yu, Lun-Wei Huang et Chih-Yung Cheng. *The SOS-based extended design of polynomial fuzzy control*. In IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), pages 2463–2468. IEEE, 2012. (Cité en page 49.)

[Yu 2016] Gwo-Ruey Yu, Yu-Chia Huang et Chih-Yung Cheng. *Robust H_∞ controller design for polynomial fuzzy control systems by sum-of-squares approach*. IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 14, pages 1684–1695, 2016. (Cité en page 69.)

[Zhang 2010] Guo Zhang et Mingli Song. *Static output feedback control for discrete-time fuzzy bilinear system*. Journal of Systems Engineering and Electronics, vol. 21, no. 2, pages 296–299, 2010. (Cité en page 29.)

[Zhang 2014] Hui Zhang, Rongrong Wang, Junmin Wang et Yang Shi. *Robust finite frequency H_∞ static-output-feedback control with application to vibration active control of structural systems*. Mechatronics, vol. 24, no. 4, pages 354–366, 2014. (Cité en page 30.)

[Zhong 2017] Zhixiong Zhong, Chong Chen, Yanling Wei et Zhenhua Shao. *Fuzzy model-based decentralized robust piecewise static output feedback control for discrete-time large-scale nonlinear systems*. International Journal of General Systems, vol. 46, no. 3, pages 287–312, 2017. (Cité en pages 2, 10, 29 et 71.)