Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur Zeghal Ahmed, professeur à la faculté des sciences et techniques de Béni-Mellal, mon directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à ce travail en étant toujours très disponible.

Je remercie également Monsieur El Maroufy Hamid, professeur à la faculté des sciences et techniques de Béni-Mellal, d'abord pour son co-encadrement de cette thèse et pour sa gentillesse, sa disponibilité et ces conseils.

J'adresse un remerciement chaleureux à Monsieur Melliani Said, professeur à faculté des Sciences et Techniques de Béni-Mellal d'avoir accepter de présider ce jury.

Monsieur Bouslous Hammadi, professeur à la faculté des sciences semlalia de Marrakech, Monsieur Bouikhalene Belaide, professeur à la faculté polydisciplinaire de Béni-Mellal, Monsieur Hilal Khalid et Monsieur Chabi Mohamed professeurs à la faculté des sciences et Techniques de Béni-Mellal d'avoir accepté de rapporter cette thèse et du soin avec lequel ils se sont acquitté de cette tâche, en dépit du temps dont ils disposaient.

Monsieur Ouhinou Aziz, professeur à la faculté des sciences et Techniques de Béni-Mellal a accepté de faire partie de mon jury. C'est un grand honneur pour moi de le remercier.

Table des matières

Introduction générale

Plusieurs phénomènes biologiques et physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. L'étude de ces équations forme l'un des sujets importants de la recherche scientifique actuelle. Les équations de transport sont des modèles mathématiques pour décrire, entre autre,

• La dynamique de particules en interaction avec la matière (neutrons dans un matériau fissile, photons dans une atmosphère ou stellaire, électrons et trous dans un semi-conducteur...)

• L'évolution de certaines populations d'organismes vivants (dynamique de populations structurées...)

Nous nous intéressons à l'étude de deux équations de transport intervenant, respectivement, en biologie cellulaire et en neutronique. Le travail présenté ici se compose de trois chapitres, le premier chapitre est un chapitre de préliminaires. Le deuxième chapitre traite des résultats d'existence, dans les espaces L_1 des fonctions sommables, pour une classe d'équations non-linéaires intervenant en dynamique de populations cellulaires avec des vitesses de maturation non bornées. Quant au troisième chapitre, il est consacré aux résultats d'existence pour une équation non-linéaire du transport neutronique en géométrie non bornée.

Après cette introduction sommaire, nous présentons une description plus détaillée des différents chapitres. Enfin nous signalons que chaque chapitre de cette thèse, utilise ces propres notations.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence pour une classe d'équations non-linéaires intervenant en dynamique de populations cellulaires généralisant un modèle linéaire dû à Rotenberg [50] :

$$v\frac{\partial\psi}{\partial\mu}(\mu,v)+\lambda\psi(\mu,v)+\sigma(\mu,v,\psi(\mu,v))=\int_0^{+\infty}\zeta(\mu,v,v')f(\mu,v,\psi(\mu,v'))\,dv', \qquad (0.0.1)$$

où $\mu\in[0,1]$ et $v,v'\in[0,+\infty)$.

Cette équation modélise l'évolution d'une population cellulaire où la fonction $\psi(\mu,v)$ représente la densité de population cellulaire. Chaque cellule de cette population est distinguée par son degré de maturité μ et sa vitesse de maturation $v\geq 0$. La positivité des vitesses de maturation est dûe au fait qu'une cellule ne peut ce rajeunir.

La division d'une cellule mère donne naissance à des cellules filles. Le degré de maturité μ est défini tel que $\mu=0$ à la naissance (cellules filles) et $\mu=1$ à la mitose (cellules mères). Les fonctions $\sigma(\mu,v,\psi(\mu,v))$ et $f(\mu,v',\psi(\mu,v'))$ sont non-linéaires.

Le modèle linéaire correspondant à l'équation (0.0.1) a été étudié dans plusieurs articles (voir par exemple, M. Rotenberg [50], C. Van der Mee et Zweifel [52], M. Boulanouar [10], [11] et [12], A. Dehici, A. Jeribi et K. Latrach [21], A. Jeribi K. Latrach et H. Megdiche [31], ...). L'approche de Rotenberg utilise essentiellement l'approximation de Fokker-Planck de l'équation pour laquelle il a obtenu des solutions numériques. Mais, dans son introduction, il a souligné que la formulation non-linéaire semble être la plus adéquate pour son modèle.

Nous supposons que la loi de reproduction biologique de transition est modélisée par les conditions aux limites non-linéaires suivantes :

$$\psi_{|\Gamma_0} = \mathbf{K}(\psi_{|\Gamma_1}), \tag{0.0.2}$$

où $\Gamma_0 = \{0\} \times [0, +\infty)$, $\Gamma_1 = \{1\} \times [0, +\infty)$, $\psi_{|\Gamma_0}$ et $\psi_{|\Gamma_1}$ sont les traces de ψ sur des espaces convenables et $\mathbf{K}$ est un opérateur frontière *non-linéaire*. Notons que $\mathbf{K}$ généralise, en particulier, les différentes lois de reproduction (linéaires) considérées dans M. Boulanouar [10]-[12], W. Greenberg et al [30], J.L. Lebowitz et S.I. Robinow [44], Rotenberg [50] et C. Van der Mee et P. Zweifel [52].

En effet, dans [50] Rotenberg a supposé qu'il y a une corrélation entre la vitesse de maturation des cellules mères v' et celles des cellules filles v. Cette corrélation est gouvernée par une loi de reproduction biologique, décrite mathématiquement par les conditions aux limites de type Lebowitz-Rubinow [44]

$$v\psi(0, v) = p \int_0^{+\infty} k(v, v')\psi(1, v')v'dv', \tag{0.0.3}$$

où p est le nombre moyen de cellules filles issues de la division d'une cellule mère. Il est aussi possible (voir Rotenberg [50]) qu'une cellule fille hérite intégralement de la vitesse de maturation de sa mère, ce qui donne la loi de reproduction à mémoire parfaite

$$\psi(0, v) = p\psi(1, v). \tag{0.0.4}$$

On peut aussi trouver dans la littérature une combinaison des conditions aux limites (0.0.3) et (0.0.4) (voir par exemple, Greenberg et al [30]).

$$\psi(0, v) = p_1\psi(1, v) + \frac{p_2}{v} \int_0^{+\infty} k(v, v')\psi(1, v')v'dv'. \tag{0.0.5}$$

Le problème non-linéaire (0.0.1)-(0.0.2) à été étudié par K. Latrach et A. Zeghal [42] dans le cas où les vitesses de maturation sont finies. Plusieurs théorèmes d'existence ont été obtenus par ces auteurs dans l'espace $L^1([0, 1] \times [0, c]; d\mu dv)$. Leur démarche consiste à transformer le problème en une équation de point fixe faisant intervenir un opérateur faiblement compact. La preuve utilise essentiellement la caractérisation des ensembles faiblement compacts dans les espaces L^1.

Le cas non-linéaire où des vitesses de maturation des cellules peuvent être infinies n'a pas été traité. Cette hypothèse introduit des difficultés mathématiques, et la démarche de [42] n'est plus applicable. Nos résultats d'existence sont obtenus via l'introduction d'une mesure de non faible compacité et l'utilisation d'un théorème récent de point fixe [39]. Ces résultats généralisent ceux de K. Latrach et A. Zeghal [42].

Notons que notre analyse permet aussi d'étendre les résultats d'existence obtenus dans K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [41], pour un modèle de prolifération cellulaire structuré en âge et en longueur de cycle infini.

Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème aux limites suivant :

$$v.\nabla_x\psi(x,v) + \sigma(x,v,\psi(x,v)) + \lambda\psi(x,v) = \int_V \kappa(x,v,v')f(x,v',\psi(x,v'))d\mu(v'), \qquad (0.0.6)$$

où $(x,v) \in D \times V$. Dans tout ce chapitre, D est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ assez régulier et μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\mu(\{0\}) = 0$. Nous notons par V le support de μ, V étant l'espace des vitesses admissibles. Cette équation décrit le transport des particules (neutrons, photons, les molécules de gaz, ...) dans le domaine D. La fonction $\psi(x,v)$ représente la densité du nombre (où de probabilité) des particules situées au point x et animées de la vitesse v. Quant aux fonctions $\sigma(.,.,.)$ et $\kappa(.,.,.)$, elles désignent, respectivement, la fréquence de collision et le noyau de diffusion.

Les conditions aux limites sont modélisées par

$$\psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+}), \qquad (0.0.7)$$

où $\psi_{|\Gamma_-}$ (resp. $\psi_{|\Gamma_+}$) est la restriction de ψ sur Γ_- (resp. Γ_+). Le sous-ensemble Γ_- (resp. Γ_+) est la partie rentrante (resp. sortante) du bord de l'espace de phases $D \times V$, i.e.

$$\Gamma_+ = \{(x,v) \in \partial D \times V \text{ et } v.n(x) > 0\},$$

$$\Gamma_- = \{(x,v) \in \partial D \times V \text{ et } v.n(x) < 0\}.$$

Quant à H, il désigne un opérateur linéaire borné abstrait d'un espace de fonctions définies sur Γ_+ vers un autre espace de fonctions définies sur Γ_-.

L'équation (0.0.7) est une généralisation d'une majorité de conditions aux limites classiques connues dans la littérature.

Conditions aux limites absorbantes

Le flux entrant de neutrons est égal à zéro, i.e. aucun neutron ne rentre dans D, soit

$$\psi_{|\Gamma_-} = 0, \text{ pour } (x,v) \in \Gamma_-. \tag{0.0.8}$$

Conditions aux limites de réflexions spéculaires

$$\psi(x,v) = \psi(x, v - 2(n(x).v)n(x)), \text{ pour } (x,v) \in \Gamma_-. \tag{0.0.9}$$

Conditions aux limites de réflexions diffuses

On impose la condition suivante sur le flux entrant

$$\psi(x,v) = \iota \int_{v'.n(x)>0} \psi(x,v')d\nu(v'), \text{ pour } (x,v) \in \Gamma_-. \tag{0.0.10}$$

La quantité ι est un albédo qui mesure le degré de réflexion de sorte que $0 \leq \iota \leq 1$. Pour d'autres types de conditions aux limites, (voir G. Bell, S. Glasstone [9], C. Cercignani [15], J. J. Duderstadt et W. R. Martin [25]).

L'objectif de ce chapitre est de compléter l'analyse effectuée dans les travaux K. Latrach [35],[37], K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] et K. Latrach et A. Zeghal [43], où plusieurs résultats d'existence pour les problèmes aux limites (0.0.6) et (0.0.7) ont été obtenus dans les espaces L^1 avec V borné, qui est une hypothèse fondamentale dans ces articles.

Plus précisément, nous nous plaçons dans le cas où " *l'espace des vitesses est non-borné* ", ce qui constitue visiblement une nouveauté. Cette situation introduit des difficultés mathématiques supplémentaires.
En effet, notre problème (0.0.6) et (0.0.7) sera transformé en une équation de point fixe

$$A\psi + B\psi = \psi,$$

où A et B sont des opérateurs non-linéaires.

Dans le travail K. Latrach et A. Zeghal [43], l'application B est une contraction, mais l'opérateur A n'est ni compact ni faiblement compact et donc l'approche utilisée dans K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] ne s'applique pas. Cependant, une étude de l'opérateur A montre qu'il peut s'écrire sous forme d'une composition de deux opérateurs : le premier est un opérateur non-linéaire continu qui envoie les ensembles relativement faiblement compacts dans les ensembles relativement faiblement compacts, tandis que le second est un opérateur linéaire continu de Dunford-Pettis. Cette observation avec les théorèmes 3.2.1 et 1.2.3 permettent de résoudre le problème (0.0.6)-(0.0.7). Cette étude utilise un résultat dû à Mokhtar-Kharroubi [47], qui se base sur le fait que V *est borné*.

Pour surmonter cette difficulté dans notre cas où V *n'est pas borné*, en décomposant l'espace L^1 et en approchant l'opérateur A par des opérateurs de Dunford-Pettis, qui est une classe fermée, nous montrons que ce dernier est un opérateur de Dunford-Pettis. Nous achevons notre étude par l'introduction d'une mesure de non-faible compacité adaptée à notre problème, et l'utilisation d'un théorème du point fixe récent intervenant des opérateurs faiblement compacts dans des espaces de Banach non-réflexifs.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de présenter des résultats, connus dans la littérature, que nous utiliserons à travers cette thèse. Afin de tenir ce chapitre dans une taille raisonnable, nous n'avons présenté que les énoncés. Des références, avec parfois des commentaires, sont précisées à la fin de chaque résultat.

1.1 La faible compacité

Nous noterons par Ω le sous-ensemble mesurable non nécessairement borné de $\mathbb{R}^N$ (N $\geq$ 1). Nous commençons par la caractérisation de Dunford et Pettis des ensembles faiblement compacts dans $L_1(\Omega, d\nu)$ que nous utiliserons, à plusieurs reprises, par la suite.

Théorème 1.1.1. (Théorème de Dunford et Pettis). *Soit $\mathcal{O}$ une partie non vide de $L^1(\Omega, d\nu)$. Alors $\mathcal{O}$ est faiblement compacte si, et seulement si, elle est bornée et, pour toute suite décroissante de parties mesurables $(E_n)_n$ de Ω telles que $\bigcap_{n\geq 0} E_n = \emptyset$, nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f(x)d\nu(x) = 0, \ \textit{uniformément pour tout } f \in \mathcal{O}.$$

Pour une démonstration de ce théorème voir, par exemple, N. Dunford et J.T.Schwarz [26, Théorème 9, p. 292].

Le Théorème suivant a été montré par J. Dieudonné [24].

Théorème 1.1.2. *Une partie non vide et bornée $\mathcal{O}$ de $L^1(\Omega;\, d\nu)$ est relativement faiblement compacte si, et seulement si,*

(a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\nu(A) \leq \delta$ implique $\displaystyle\int_A |f| d\nu < \varepsilon$, pour tout $f \in \mathcal{O}$,

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $C \subset \Omega$ tel que $\displaystyle\int_{\Omega\setminus C} |f| d\nu < \varepsilon$, pour tout $f \in \mathcal{O}$.

Dans le cas où Ω est borné, l'assertion (b) n'est plus nécessaire. Ce résultat est dû à N. Dunford et B.J. Pettis (voir N. Dunford et J.T. Schwarz [26, p. 294], B. Beauzamy [8, p. 162]).

Soit M un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X. L'enveloppe convexe de M, que nous notons co(M), est l'ensemble de toutes les combinaisons $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ d'éléments $x_i \in M$ de sorte que $0 \leq a_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Autrement dit, co(M) est le plus petit sous-ensemble convexe contenant M. L'enveloppe convexe fermé de M, $\overline{co}(M)$, désigne la fermeture de co(M).

Les résultats suivants sont nécessaires pour la preuve des théorèmes d'existence dans les chapitres 2 et 3.

Théorème 1.1.3. (Théorème de Krein et Šmulian). *L'enveloppe convexe fermé d'un sous-ensemble faiblement compact d'un espace de Banach est lui même faiblement compact.*

Pour la preuve, voir N. Dunford et J.T. Schwartz [26, p. 434]. □

Le reste de cette section est consacrée à la propriété de Dunford-Pettis. Commençons d'abord par les définitions suivantes.

Définition 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ un opérateur (non nécessairement linéaire). Nous disons que A est faiblement compact s'il envoie les ensembles bornés de X dans des ensembles relativement faiblement compacts de Y.*

Définition 1.1.2. *Soit X un espace de Banach. On dit que X possède la propriété de Dunford-Pettis si, pour toute suite $(x_n)_n$ dans X qui converge faiblement vers 0 et toute suite $(x_n^*)_n$ dans X^* (l'espace dual de X) qui converge faiblement vers 0, la suite $(x_n^*(x_n))_n$ converge vers 0.*

La proposition suivante est une caractérisation des espaces de Banach possédant la propriété de Dunford-Pettis (voir, par exemple, Fabian et al [27, p. 596]).

Proposition 1.1.1. *Soit X un espace de Banach. Alors les assertions suivantes sont équivalantes :*

1. *X a la propriété de Dunford-Pettis,*
2. *Tout opérateur linéaire et faiblement compact de X dans un espace de Banach quelconque Y envoie les ensembles faiblement compacts de X dans les ensembles compacts de Y.*

Le résultat suivant joue un rôle important dans les résultats d'existence (voir chapitres 2 et 3).

Théorème 1.1.4. (Théorème de Dunford et Pettis). *Tout espace L_1 possède la propriété de Dunford-Pettis.*

Pour la preuve de ce théorème, voir le livre de N. Dunford et J.T. Schwarz [26, Théorème 12, p. 508]. Le terme " Propriété de Dunford-Pettis" a été introduite pour la première fois par A. Grothendieck (voir J. Diestel et J.J. Uhl [23, p. 177]). Nous signalons que cette propriété est importante, seulement, dans des espaces de Banach non réflexifs. Plusieurs caractérisations des espaces de Banach possédant la propriété de Dunford-Pettis sont dûes à Grothendieck. Il a établit que $\mathcal{C}(\Omega)$ possède la propriété de Dunford-Pettis pour tout compact Ω (voir, par exemple, N. Dunford et J.T. Schwartz [26, p. 494]). Pour un plus de détails (voir par exemple Diestel [22], D. Alipantis et O. Burkinshaw [1]). Nous finissons cette section par

Théorème 1.1.5. (Théorème de Eberlein-Šmulian). *Soit M une partie non-vide d'un espace de Banach X. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) M est faiblement sequentiellement compact, i.e. toute suite de M admet une sous-suite qui converge faiblement dans X.
(ii) La fermeture faible de M est faiblement compacte.

Pour la preuve voir Dunford et Schwartz [26, p. 430].

1.2 Théorèmes de points fixes

La théorie des points fixes concerne la recherche et l'étude des conditions, qui permettent l'existence d'un, ou de plusieurs points fixes pour l'application $A : X \to X$, i.e. les points x de X pour lesquels, $A(x) = x$. Des problèmes d'existence pour ce type d'équations interviennent fréquemment en analyse non-linéaire.

Nous commençons d'abord par énoncer le principe de l'application contractante de Banach et de Picard :

Théorème 1.2.1. (Principe de l'application contractante de Banach).

Soient (X, d) un espace métrique complet, et $A : X \to X$ une contraction, i.e. une application qui a la propriété suivante : il existe une constante $\gamma \in [0, 1)$ telle que $d(A(x), A(y)) \leq \gamma d(x, y)$ pour tout x, $y \in X$.

Alors A admet un point fixe unique x_*, et la suite $x_n = A^n(x)$ converge vers x_*, pour tout $x \in X$.

Pour la preuve, voir A. Zeidler [55, pp. 17–18].

Un autre résultat principal de la théorie des points fixes, est le théorème de point fixe de Schauder. Afin de présenter ce théorème, nous commençons d'abord par définir les applications compactes.

Définition 1.2.1. *Soient $\mathcal{M}$ un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X, et $A : \mathcal{M} \to X$ une application. Nous dirons que A est compacte si A envoie les sous-ensembles bornés de $\mathcal{M}$ dans les ensembles relativement compacts de X.*

Théorème 1.2.2. (Théorème de point fixe de Schauder).
Soient $\mathcal{M}$ un sous-ensemble non vide fermé, borné et convexe d'un espace de Banach X, et $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ une application continue et compacte. Alors A admet au moins un point fixe.

Pour la preuve de ce théorème, voir A. Zeidler [55, pp. 57–58]. Notons que, contrairement au Théorème 1.2.1, le présent théorème n'affirme pas l'unicité. Dans le cas où X est un espace de Banach de dimension finie, le Théorème 1.2.2 est connu sous le nom du Théorème de point fixe de Brouwer.

Le théorème suivant, dû à Krasnosel'skii, peut être considéré comme une combinaison du théorème de point fixe de Schauder et celui de Banach. Krasnosel'skii a été motivé par l'observation que la solution d'une équation différentielle perturbée peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes émanant d'un opérateur compact et d'une contraction.

Théorème 1.2.3. (Théorème de point fixe de Krasnosel'skii).

Soient $\mathcal{M}$ un sous-ensemble non vide fermé, borné et convexe d'un espace de Banach X, et A et B deux applications de $\mathcal{M}$ dans X vérifiant les propriétés suivantes :

(ii) A est une application continue et compacte.

(ii) B est une contraction.

(iii) $A\mathcal{M} + B\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, i.e. $Ax + By \in \mathcal{M}$ pour tout x, $y \in \mathcal{M}$.

Alors $A + B$ admet au moins un point fixe dans $\mathcal{M}$

Pour la preuve de ce théorème, voir A. Zeidler [55, p. 501] ou D.R. Smart [51].

1.3 Opérateurs de Nemytskii ou de Superposition

Dans ce qui suit, nous allons présenter certaines propriétés d'une classe importante d'opérateurs intervenant en analyse non-linéaire. Il s'agit des opérateurs de Nemytskii ou de superposition dans les espaces $L^1(\Omega)$ avec Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$.

Nous commençons par deux définitions.

Définition 1.3.1. *Soit Ω un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^N$. ON dit que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{C} \ni (t,u) \to f(t,u) \in \mathbb{C}$ est une fonction de Carathéodory si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) l'application $t \to f(t,u)$ est mesurable sur Ω pour tout $u \in \mathbb{C}$,

(ii) l'application $u \to f(t,u)$ est continue sur $\mathbb{C}$ pour presque tout $t \in \Omega$.

Définition 1.3.2. *Soit f une fonction de Carathéodory définie sur $\Omega \times \mathbb{C}$. On définit l'opérateur $\mathcal{N}_f$, sur l'ensemble des fonctions ψ mesurables sur Ω, par :*

$$(\mathcal{N}_f\psi)(t) = f(t,\psi(t)) \text{ pour presque tout } t \in \Omega.$$

L'opérateur composition $\mathcal{N}_f$ est appelé opérateur de Nemytskii (ou de superposition) engendré par f. Dans les espaces L_p, l'opérateur de Nemytskii a été largement étudié (voir par exemple J. Appell [3], J. Appell et P.P. Zabreiko [5], S.N. Chow et J.K. Hale [18], M.A. Krasnosel'skii [33] et M.A. Krasnosel'skii et al [34] pour plus de détails). Cependant, nous rappelons le résultat suivant dû à M. A. Krasnosel'skii, qui joue un rôle fondamental dans la théorie de ces opérateurs dans les espaces L_1 et dans nos résultats d'existence.

Théorème 1.3.1. *Soit $\mathcal{N}_f : L_1(\Omega) \to L_1(\Omega)$. Alors $\mathcal{N}_f$ est continu et envoie les ensembles bornés dans les ensembles bornés. De plus, il existe une constante $\eta > 0$ et une fonction positive*

$h \in L_1(\Omega)$ *qui vérifient la condition suivante*

$$|f(t,u)| \leq h(t) + \eta|u| \text{ pour presque tout } t \in \Omega \text{ et tout } u \in \mathbb{C}. \tag{1.3.1}$$

La preuve de ce théorème est disponible dans Krasnosel'skii [33, pp. 20–32] (voir aussi O. Kavian [32, p. 61] pour le cas où $f(t,u) = f(u)$). Bien entendu, la condition (1.3.1) est suffisante pour que l'opérateur de Nemytskii soit borné (dans les ensembles bornés) et continu de $L_1(\Omega)$ dans $L_1(\Omega)$ (voir, O. Kavian [32, Lemme 16.1, p. 60]).

Remarque 1.3.1. Une autre propriété importante, qui est la faible continuité de l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ engendré par f : i.e. l'image d'une suite faiblement convergente par $\mathcal{N}_f$ est une suite faiblement convergente. " *Il est surprenant de voir que seulement les fonctions linéaires engendrent les opérateurs de Nemytskii faiblement continus.* " Plus précisément, l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est faiblement continu si, et seulement si, $f(t,u) = a(t) + b(t)u$, avec $a \in L_1(\Omega)$ et $b \in L_\infty(\Omega)$ (voir, par exemple, J. Appell [3, Théorème 2.6]).

Dans le but de travailler dans une large classe d'opérateurs de Nemytskii, nous montrons que $\mathcal{N}_f$ envoie les suites faiblement convergentes de L_1 dans les ensembles faiblement compacts de L_1, ce qui servira à la preuve de nos résultats d'existence des chapitres 2 et 3. □

Chapitre 2

Résultats d'existence pour une version non-linéaire du modèle de Rotenberg

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence dans les espaces L_1 des f onctions intégrables pour une classe d'équations non-linéaires intervenant en dynamique de populations cellulaires généralisant un modèle linéaire de M. Rotenberg [50].

Ce modèle décrit l'évolution d'une population cellulaire. Chaque cellule de cette population est distinguée par son degré de maturité $\mu \in [0,1]$ et sa vitesse de maturation v. La division d'une cellule mère donne naissance à des cellules filles. Le degré de maturité est défini tel que $\mu = 0$ à la naissance (cellules filles) et $\mu = 1$ à la mitose (cellules mères).

Dans ce chapitre, *la vitesse de maturité peut être infinie*, i.e. $v \in [0, +\infty)$. Cette hypothèse introduit des difficultés mathématiques, qui seront surmontées par l'introduction d'une mesure de non-faible compacité adaptée au problème, et l'utilisation d'un théorème récent de point fixe (Théorème 2.3.1) intervenant des opérateurs faiblement compacts sur des espaces de Banach non réflexifs .

2.1 Introduction

Dans [50], M. Rotenberg a introduit l'équation intégro-différentielle suivante, décrivant l'évolution d'une population cellulaire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\mu,v) = -v\frac{\partial \psi}{\partial \mu}(t,\mu,v) - \sigma(\mu,v)\psi(t,\mu,v) + \int_0^c \kappa(\mu,v,v')\psi(t,\mu,v')\,dv'. \qquad (2.1.1)$$

Chaque cellule de cette population est distinguée par son degré de maturité $\mu \in [0,1]$, et sa vitesse de maturation $v \in [0,c]$, avec $c > 0$. Le degré de maturité est défini tel que $\mu = 0$ à la naissance (cellules filles) et $\mu = 1$ à la mitose (cellules mères). Dans ce modèle, $\psi(t,\mu,v)$ est la densité de population cellulaire ayant μ comme degré de maturité et v comme vitesse de maturation au temps t.
Le noyau $\kappa(\mu,v,v')$ est le taux de transition qui spécifie le passage des cellules de la vitesse de maturation v' à la vitesse v, tandis que $\sigma(\mu,v)$ représente la section efficace totale de transition.
Dans l'introduction de son papier, Rotenberg a souligné que la formulation non-linéaire semble être la plus adéquate pour son modèle. En fait, les cellules considérées par l'étude sont en contact avec un milieu nutritif qui ne fait pas partie de la formulation mathématique du problème.

Les fluctuations de la concentration des nutriments et d'autres effets dépendant de la densité, tel que le contact d'inhibition de croissance, rendent la section efficace σ et le taux de transition κ dépendant de la densité de population, créant ainsi un problème non-linéaire.

D'autre part, les bornes biologiques à $\mu = 0$ et $\mu = 1$ sont fixées et couplées tout au long de la mitose. Ici les phénomènes aux bords (la division cellulaire) se produisent à l'intérieur du système considéré. Ce phénomène suggère que lors de la mitose, les cellules filles et les cellules mères sont liées par une loi de reproduction biologique non-linéaire.

En raison du fait qu'une cellule ne peut se rajeunir, la vitesse de maturation ne peut être que positive.
Dans K. Latrach et A. Zeghal [42], une version stationnaire non-linéaire modifiée du modèle de M. Rotenberg a été établie. Le taux de transition et la section efficace totale ont été supposés dépendre de la densité de la population. Plus précisément, les auteurs ont étudié le problème non-linéaire suivant :

$$v\frac{\partial\psi}{\partial\mu}(\mu,v)+\lambda\psi(\mu,v)+\sigma(\mu,v,\psi(\mu,v))=\int_0^c \kappa(\mu,v,v',\psi(\mu,v'))\,dv', \tag{2.1.2}$$

où $\sigma(.,.,.)$ et $\kappa(.,.,.,.)$ sont des fonctions non-linéaires de ψ et λ est un nombre complexe.

Dans K. Latrach et A. Zeghal [42], plusieurs théorèmes d'existence pour l'équation (2.1.2) ont été obtenus dans l'espace $L^1([0,1]\times[0,c],d\mu\,dv)$ (qui est la formulation adéquate du problème).

En fait, le problème (2.1.2) est transformé en une équation de point fixe intervenant un opérateur non-linéaire faiblement compact. La preuve utilise essentiellement la caractérisation des ensembles faiblement compacts dans les espaces L^1.

En ce qui concerne les travaux précédents dans cette direction, nous rappelons que K. Latrach [36], a présenté des résultats d'existence établis pour des équations stationnaires de transport neutronique découlant de la théorie cinétique des gaz, qui décrivent l'interaction des molécules de gaz avec des parois pleines délimitant la région où le gaz s'écoule. L'analyse a été effectuée dans le contexte des espaces L^p, $1<p<\infty$. Les conditions aux limites ont été supposées linéaires, car, contrairement aux modèles biologiques, dans la dynamique des gaz raréfiés, le contexte non-linéaire pour les conditions aux limites n'a pas de signification physique (voir par exemple C. Cercignani, [15] ou K. Latrach [35]).

Récemment, M. Boulanouar [11] et [12] a étudie le modèle linéaire $(2.1.1)$ avec des vitesses de maturation infinies. Il a montré que cette équation est gouvernée par un semi-groupe fortement continu.

Malgré ces travaux, nous remarquons que le cas non-linéaire où les vitesses de maturation des cellules peuvent être infinies ($c = \infty$), n'a pas été traité. L'objectif principal ici est de combler cette lacune. En effet, nous nous intéressons aux résultats d'existence pour le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + \lambda\psi(\mu, v) + \sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v')f(\mu, v, \psi(\mu, v))\, dv' \\ \psi_{|\Gamma_0} = \mathbf{K}(\psi_{|\Gamma_1}) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

dans l'espace $L^1([0, 1] \times [0, +\infty); d\mu\, dv)$ où $\Gamma_0 = \{0\} \times [0, +\infty)$ et $\Gamma_1 = \{1\} \times [0, +\infty)$, $\psi_{|\Gamma_0}$ (resp. $\psi_{|\Gamma_1}$) désigne la restriction de ψ sur Γ_0 (resp. sur Γ_1) et $\mathbf{K}$ est un opérateur non-linéaire d'un espace de fonctions appropriées sur Γ_0 vers un autre espace similaire sur Γ_1, couvrant en particulier les différentes lois de reproduction considérées dans M. Boulanouar [10], [11], [12], W. Greenberg et al [30], J.L. Lebwitz et S.I. Robinow [44], M. Rotenberg [50], C. Van der Mee et P. Zweifel [52].

Notre analyse sera effectuée en supposant que la fonction $\kappa(., ., ., .)$ est de la forme

$$\xi(\mu, v, v')f(\mu, v', \psi(\mu, v')),$$

où $f(., ., .)$ est une fonction mesurable sur $[0, 1] \times [0, +\infty) \times \mathbb{C}$ qui définit un opérateur de superposition borné (ou de Nemytskii), tandis que la fonction $\zeta(., ., .)$ est définie sur $[0, 1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ et satisfait les conditions de la Définition $2.2.1$.

Nous organisons ce chapitre comme suit :

Dans la section 2.2, nous introduisons le cadre fonctionnel du problème et nous établissons des résultats préliminaires utiles pour notre étude. Dans la Section 2.3, nous introduisons une mesure de non-faible compacité et nous faisons appel à un théorème de point fixe de type Krasnoselskii établi dans K. Latrach et M.A. Taoudi [39] et qui joue un rôle crucial dans la démonstration du Théorème 2.4.2.

Dans la section 2.4, nous présentons nos résultats d'existence : théorèmes 2.4.1 et 2.4.2. Notre premier résultat est établi dans le cas où $\sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) = \sigma(\mu, v)\psi(\mu, v)$ est un opérateur de multiplication. Le problème aux limites général (2.1.3) (i.e. $\sigma(.,.,.)$ est une fonction non-linéaire de ψ) sera discuté dans le théorème 2.4.2. La preuve du théorème 2.4.2 est technique. Elle nécessite la linéarité (ou simplement l'additivité) de l'opérateur de transition **K**. Nous transformons d'abord le problème (2.1.3) en un problème de point fixe intervenant deux opérateurs non-linéaires dépendant du paramètre λ, c'est à dire,

$$\psi = A_1(\lambda)(\psi) \; + \; A_2(\lambda)(\psi),$$

et nous montrons que $A_1(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$ satisfont les hypothèses du théorème 2.3.1.
Des résultats d'existence des solutions positives sont présentés dans la section 2.5. Nos résultats obtenus s'étendent à un modèle de prolifération cellulaire structuré en âge et longueur de cycle infini (voir section 2.6).
Notons que le problème de Cauchy régi par l'équation linéaire (2.1.1), avec différentes conditions aux limites linéaires et une donnée initiale a été largement étudié au cours des dernières décennies. Nous nous référons, par exemple, aux travaux [10, 11, 12, 21, 30, 31, 38, 50, 52] avec leurs références.

De plus, récemment, l'équation (2.1.1) avec différentes conditions aux limites non-linéaires, où le taux de transition et la section efficace totale ont été supposés dépendre de la densité, a été étudiée dans J. Garcia-Falset, K. Latrach et A. Zeghal [28].

2.2 Notations et résultats préliminaires

2.2.1 Cadre fonctionnel du problème et formulation abstraite de la résolvante

Dans cette section, nous fixons quelques notations et nous introduisons le cadre fonctionnel de notre problème.

Soit

$$\mathcal{X} := L^1(\Omega; d\mu dv),$$

où $\Omega = [0,1] \times [0,+\infty)$. Nous notons par $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ les espaces suivants

$$\mathcal{Y} = L^1(\{0\} \times [0,+\infty); vdv) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} = L^1(\{1\} \times [0,+\infty); vdv).$$

L'espace de Sobolev partiel $\mathcal{W}(\Omega)$ est défini par

$$\mathcal{W}(\Omega) = \left\{ \psi \in \mathcal{X} \text{ tel que } v\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \in \mathcal{X} \text{ et } v\psi \in \mathcal{X} \right\}.$$

Nous savons (voir, R. Dautray et J.L. Lions [19] et W. Greenberg et al [30]) que toute fonction $\psi \in \mathcal{W}(\Omega)$ a des traces sur les bornes $\{0\}$ et $\{1\}$ appartenant, respectivement, aux espaces $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$. En outre, l'application trace $\gamma_0 : \psi \to \psi(0,.)$ (respectivement, $\gamma_1 : \psi \to \psi(1,.)$) est une application linéaire continue de $\mathcal{W}(\Omega)$ à valeurs dans $\mathcal{Y}$ (respectivement dans $\mathcal{Z}$).

Tout au long de ce chapitre, nous noterons $\psi^0(v) = \psi(0,v) \in \mathcal{Y}$ et $\psi^1(v) = \psi(1,v) \in \mathcal{Z}$, et nous identifions $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ à l'espace

$$\mathbf{Y} := L^1([0,+\infty);\ vdv).$$

Soit $\mathbf{K}$ l'opérateur suivant

$$\begin{cases} \mathbf{K} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y} \\ \qquad u \longrightarrow \mathbf{K}(u). \end{cases}$$

Nous supposons que $\mathbf{K}$ est Lipschitzien, i.e.

(A1) Il existe une constante $\alpha \in (0,1)$ telle que

$$\|\mathbf{K}(f_1) - \mathbf{K}(f_2)\|_{\mathbf{Y}} \leq \alpha \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{Y}} \text{ pour tout } f_1, f_2 \in \mathbf{Y}.$$

Nous définissons l'opérateur $S_{\mathbf{K}}$ en incluant les conditions aux limites dans son domaine

$D(S_{\mathbf{K}})$

$$\begin{cases} S_{\mathbf{K}} \,:\, D(S_{\mathbf{K}}) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \\ \qquad\quad \psi \longmapsto S_{\mathbf{K}}(\psi)(\mu,v) := -v\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}(\mu,v) - \sigma(\mu,v)\psi(\mu,v) \\ D(S_{\mathbf{K}}) = \{\psi \in \mathcal{W}(\Omega) \text{ telle que } \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1)\}, \end{cases}$$

où $\sigma(.,.) \in L_\infty(\Omega)$.

Nous considérons l'équation résolvante pour $S_{\mathbf{K}}$

$$(\lambda - S_{\mathbf{K}})(\psi) = \varphi,$$

où φ est une fonction donnée de $\mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et l'inconnu ψ doit être cherché dans $D(S_{\mathbf{K}})$.

Soit $\underline{\sigma}$ le réel défini par

$$\underline{\sigma} = \text{ess-inf}\{\sigma(\mu,v),\ (\mu,v) \in \Omega\}.$$

Pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -\underline{\sigma}$, la solution est formellement donnée par

$$\psi(\mu,v) = \psi(0,v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds} + \frac{1}{v}\int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds}\varphi(\mu',v)d\mu'. \tag{2.2.1}$$

Par conséquence, pour $\mu = 1$, nous obtenons

$$\psi(1,v) = \psi(0,v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^1(\lambda+\sigma(s,v))ds} + \frac{1}{v}\int_0^1 e^{\frac{-1}{v}\int_{\mu'}^1(\lambda+\sigma(s,v))ds}\varphi(\mu',v)d\mu'. \tag{2.2.2}$$

Pour obtenir une formulation abstraite des équations (2.2.1) et (2.2.2), nous définissons les opérateurs suivants qui dépendent du paramètre λ :

$$\begin{cases} P_\lambda : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y} \\ u \longmapsto (P_\lambda u)(v) := u(v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^1(\lambda+\sigma(s,v))ds}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_\lambda : \mathbf{Y} \to \mathcal{X} \\ u \longmapsto (Q_\lambda u)(\mu,v) := u(v)e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu(\lambda+\sigma(s,v))ds}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_\lambda : \mathcal{X} \to \mathbf{Y} \\ g \longmapsto (\Pi_\lambda g)(v) := \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^1 (\lambda+\sigma(s,v))ds} g(\mu', v) d\mu'; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Xi_\lambda : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ g \longmapsto (\Xi_\lambda g)(\mu, v) := \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^\mu (\lambda+\sigma(s,v))ds} g(\mu', v) d\mu' \ . \end{cases}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > -\underline{\sigma}$. Pour $u \in \mathbf{Y}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|P_\lambda u\|_{\mathbf{Y}} &= \int_0^{+\infty} \left| u(v) e^{-\frac{1}{v}\int_0^1 (\lambda+\sigma(s,v))ds} \right| v dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} |u(v)| v dv \\ &= \|u\|_{\mathbf{Y}} \, . \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})} \leq 1.$$

De même, pour $u \in \mathbf{Y}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda u\|_{\mathcal{X}} &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| u(v) e^{-\frac{1}{v}\int_0^\mu (\lambda+\sigma(s,v))ds} \right| d\mu dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-\frac{\mu(Re(\lambda)+\underline{\sigma})}{v}} |u(v)| d\mu dv \\ &= \int_0^{+\infty} v \frac{(1 - e^{-\frac{Re(\lambda)+\underline{\sigma}}{v}})}{\mathrm{Re}(\lambda) + \underline{\sigma}} |u(v)| dv \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda) + \underline{\sigma}} \|u\|_{\mathbf{Y}} \, . \end{aligned}$$

Par conséquence

$$\|Q_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathcal{X})} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda) + \underline{\sigma}}.$$

Maintenant, soit $g \in \mathcal{X}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Pi_\lambda g\|_{\mathbf{Y}} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \left| \int_0^1 e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^1 (\lambda+\sigma(s,v))ds} g(\mu',v)d\mu' \right| vdv \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 |g(\mu',v)|d\mu' dv \\
&= \|g\|_{\mathcal{X}}\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathbf{Y})} \leq 1.$$

De même, pour $g \in \mathcal{X}$, nous avons grâce au Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{X}} &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{v} \int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^\mu (\lambda+\sigma(s,v))ds} g(\mu',v)d\mu' \right| d\mu dv \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{v} \int_0^\mu e^{-\frac{1}{v}(\mu-\mu')(Re(\lambda)+\underline{\sigma})} |g(\mu',v)|d\mu' \right) d\mu dv \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{v} \left(\int_{\mu'}^1 e^{-\frac{1}{v}(\mu-\mu')(Re(\lambda)+\underline{\sigma})} |g(\mu',v)|d\mu \right) d\mu' dv \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)+\underline{\sigma}} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{1}{v}(1-\mu')(Re(\lambda)+\underline{\sigma})} \right) |g(\mu',v)|d\mu' dv \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)+\underline{\sigma}} \|g\|_{\mathcal{X},}
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|\Xi_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)+\underline{\sigma}}.$$

Maintenant, puisque ψ doit satisfaire les conditions aux limites, alors l'équation (2.2.2) s'écrit sous la forme :

$$\psi^1 = \mathbf{\Theta}_\lambda(\psi^1) + \Pi_\lambda(\varphi), \tag{2.2.3}$$

où l'opérateur $\mathbf{\Theta}_\lambda = P_\lambda \mathbf{K}$ est défini de $\mathbf{Y}$ dans lui même.

Soient $u_1,\ u_2 \in \mathbf{Y}$. Puisque $\|P_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})} \leq 1$, en utilisant $(A1)$, nous obtenons

$$\|\mathbf{\Theta}_\lambda(u_1) - \mathbf{\Theta}_\lambda(u_2)\|_{\mathbf{Y}} \leq \ \alpha \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{Y}}\,.$$

Soit $f \in \mathbf{Y}$. Considérons l'équation suivante

$$u = \mathbf{\Theta}_\lambda(u) + f, \tag{2.2.4}$$

où u est la fonction inconnue. Donc, nous pouvons définir l'opérateur $\mathbf{A}_{(\lambda,f)}$ de $\mathbf{Y}$ dans lui même par

$$\mathbf{A}_{(\lambda,f)}(u) = \mathbf{\Theta}_\lambda(u) + f \text{ pour tout } u \in \mathbf{Y}.$$

Il est clair que

$$\left\|\mathbf{A}_{(\lambda,f)}(\varphi_1) - \mathbf{A}_{(\lambda,f)}(\varphi_2)\right\|_{\mathbf{Y}} \leq \alpha \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{\mathbf{Y}}.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > -\underline{\sigma}$, l'opérateur $\mathbf{A}_{(\lambda,f)}$ est une contraction sur $\mathbf{Y}$ et par conséquence, le problème $(2.2.4)$ admet une solution unique $u = u(\lambda, f)$. D'autre part, soit $\mathbf{J}_\lambda$ l'opérateur défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_\lambda : & \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y} \\ & f \to \mathbf{J}_\lambda(f) := u, \end{cases}$$

où u est la solution unique de $(2.2.4)$.

Lemme 2.2.1. *Supposons que la condition $(A1)$ est vérifiée. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > -\underline{\sigma}$, l'opérateur $\mathbf{J}_\lambda$ est continu sur $\mathbf{Y}$ et envoie les ensembles bornés dans les ensembles bornés.*

Preuve. Par définition de $\mathbf{J}_\lambda$, l'équation $(2.2.4)$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{J}_\lambda(f) = \mathbf{\Theta}_\lambda \mathbf{J}_\lambda(f) + f.$$

Donc, pour $f_1,\ f_2 \in \mathbf{Y}$, nous avons

$$\|\mathbf{J}_\lambda(f_1) - \mathbf{J}_\lambda(f_2)\|_{\mathbf{Y}} \leq (1-\alpha)^{-1} \|f_1 - f_2\|_{\mathbf{Y}}. \tag{2.2.5}$$

De plus, en choisissant $f_1 = f$ et $f_2 = 0$ dans (2.2.5), nous obtenons

$$\|\mathbf{J}_\lambda(f)\|_{\mathbf{Y}} \leq (1-\alpha)^{-1} \|f\|_{\mathbf{Y}} + \|\mathbf{J}_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}}. \tag{2.2.6}$$

Ce qui achève la preuve. □

Lemme 2.2.2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous supposons que la condition $(A1)$ est vérifiée. Alors, si $Re(\lambda) > -\underline{\sigma}$, l'opérateur $(\lambda - S_{\mathbf{K}})$ est inversible et*

$$(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1} = Q_\lambda \mathbf{K} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda + \Xi_\lambda. \tag{2.2.7}$$

De plus $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}$ est continu et envoie les ensembles bornés dans les ensembles bornés.

Preuve. Puisque $\mathrm{Re}(\lambda) > -\underline{\sigma}$, la solution du problème (2.2.3) est donnée par $\psi^1 = \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda(\varphi)$. D'autre part, l'équation $(2.2.1)$ s'écrit sous la forme $\psi = Q_\lambda \mathbf{K} \psi^1 + \Xi_\lambda \varphi$. En substituant ψ^1 dans l'expression de ψ, nous obtenons $\psi = Q_\lambda \mathbf{K} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda(\varphi) + \Xi_\lambda(\varphi)$. Ce qui montre que $(\lambda - S_{\mathbf{K}})$ est inversible et

$$(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1} = Q_\lambda \mathbf{K} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda + \Xi_\lambda.$$

Le deuxième point du Lemme est une conséquence immédiate du Lemme 2.2.1. □

2.2.2 Un résultat de faible compacité

Pour suivre notre analyse , nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

$$(A2) \qquad \kappa(\mu, v, v', \psi(\mu, v')) = \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v')),$$

où f est une fonction mesurable définie par

$$\begin{cases} f : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \qquad (t, u) \to f(t, u). \end{cases}$$

La fonction $\zeta(.,.,.)$ est mesurable de $\Omega \times [0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$. Elle définit l'opérateur de collision linéaire B

$$\begin{cases} B : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ \qquad \psi \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') \psi(\mu, v') dv'. \end{cases}$$

Nous observons que l'opérateur B n'agit que sur la vitesse v'. Par ailleurs, μ peut être considéré comme un paramètre défini sur $[0,1]$. Ainsi, nous pouvons considérer B comme un opérateur défini sur $L^1([0,+\infty);\ dv)$ et qui dépend du paramètre $\mu \in [0,1]$.

Définition 2.2.1. *Nous disons que B est un opérateur de collision régulier sur $\mathcal{X}$ si, pour presque tout $\mu \in [0,1]$, l'opérateur*

$$\varphi \in L^1([0,+\infty); dv) \to \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v')\varphi(v')dv' \in L^1([0,+\infty); dv)$$

est faiblement compact sur $L^1([0,+\infty); dv)$ et la famille de ces opérateurs sur $L^1([0,+\infty); dv)$ indexée par $\mu \in [0,1]$ est collectivement faiblement compacte.

Nous rappelons maintenant une caractérisation utile d'opérateurs de collision réguliers et positifs.

Lemme 2.2.3. [45, B. Lods] *Soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un opérateur de collision positif et régulier. Alors, il existe une suite $(B_n)_n$ de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ telle que*

1. *$0 \leq B_n \leq B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est dominé par un opérateur de rang un dans $\mathcal{L}(L^1([0,+\infty); dv))$;*
3. *$\lim_{n\to\infty} \|B - B_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = 0$.*

Remarque 2.2.1. i) Le deuxième point du Lemme précédent indique que chaque opérateur B_n est dominé par un opérateur défini sur $\mathcal{X}$ et qui agit comme suit

$$\varphi \in \mathcal{X} \to f_n(v) \int_0^{+\infty} \varphi(\mu, v')dv', \tag{2.2.8}$$

où f_n est une fonction positive, bornée sur $[0,+\infty)$ et à support compact.

ii) Évidemment, le théorème 1.1.1 ou 1.1.2 montre que si B est un opérateur de collision régulier , alors $|B|$ l'est aussi, où

$$\varphi \to (|B|\varphi)(\mu, v) = \int_V |\zeta(\mu, v, v')|\varphi(\mu, v')dv'.$$

$\square$

Maintenant, nous pouvons montrer le résultat suivant, qui jouera un rôle crucial dans la preuve des résultats principaux de ce chapitre.

Proposition 2.2.1. *Soient B un opérateur de collision régulier et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si la condition $(A1)$ est vérifiée et Re$(\lambda) > -\underline{\sigma}$, alors l'opérateur $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B$ est faiblement compact sur $\mathcal{X}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que Re$(\lambda) > -\underline{\sigma}$. Selon le Lemme 2.2.2, il suffit de montrer la faible compacité des opérateurs $Q_\lambda \mathbf{K} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda B$ et $\Xi_\lambda B$. Dans une première étape, nous montrons la faible compacité des opérateurs $\Pi_\lambda B$ et $\Xi_\lambda B$ sur $\mathcal{X}$.
En effet, d'après le Lemme 2.2.2 et (2.2.8), il suffit d'établir la faible compacité de $\Xi_\lambda B$ et de $\Pi_\lambda B$ dans le cas où B est l'opérateur défini sur $\mathcal{X}$ par

$$B(\psi)(\mu, v) = \int_0^{+\infty} \theta(v)\psi(\mu, v')dv',$$

avec θ est une fonction positive bornée sur $[0, +\infty)$ et à support compact (donc $\theta \in L_1([0, +\infty); dv)$). Nous remarquons que $\Pi_\lambda B$ s'écrit sous la forme $\Lambda_\lambda \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ et Λ_λ sont donnés par

$$\begin{cases} \Lambda_\lambda : L^1([0,1]; d\mu) \longrightarrow \mathbf{Y}, \\ \qquad\qquad \varphi \longrightarrow \Lambda_\lambda(\varphi)(v) := \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_0^1 \theta(v) e^{-\frac{1}{v}\int_{\mu'}^1 (\lambda + \sigma(s,v))ds} \varphi(\mu')d\mu', \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{R} : \mathcal{X} \longrightarrow L^1([0,1]; d\mu), \\ \quad \varphi \longrightarrow \mathbf{R}(\varphi)(\mu) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(\mu, v)dv. \end{cases}$$

Nous affirmons que Λ_λ est faiblement compact. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout sous-ensemble borné $\mathcal{E}$ de $L^1([0,1]; d\mu)$, $\mathcal{O} := \Lambda_\lambda(\mathcal{E})$ est faiblement compact dans $\mathbf{Y}$.

En effet, soient $\mathcal{E}$ une partie bornée de $L^1([0,1];d\mu)$ et $\varphi \in \mathcal{E}$. Un simple calcul montre que

$$\int_A |\Lambda_\lambda(\varphi)(v)|vdv \leq \|\varphi\|_{L^1([0,1];d\mu)} \int_A |\theta(v)|dv,$$

pour toute partie mesurable A de $[0,+\infty)$. Par conséquence,

$$\int_A |\Lambda_\lambda(\varphi)(v)|vdv \to 0 \quad \text{quand} \quad |A| \to 0, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{E},$$

où $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A. D'autre part, pour $T > 0$, nous posons $C = [0,T]$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^+\setminus C} |\Lambda_\lambda(\varphi)(v)|vdv = \int_T^{+\infty} |\Lambda_\lambda(\varphi)(v)|vdv \leq \|\varphi\|_{L^1([0,1];d\mu)} \int_T^{+\infty} |\theta(v)|dv.$$

Puisque θ est une fonction bornée sur $[0,+\infty)$ et à support compact, nous déduisons via le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que $\lim\limits_{T\to+\infty} \int_T^{+\infty} |\theta(v)|dv = 0.$
Autrement dit,

$$\lim_{T\to+\infty} \int_T^{+\infty} |\Lambda_\lambda(\varphi)(v)|vdv = 0, \text{ pout tout } \varphi \in \mathcal{E}.$$

En utilisant le théorème 1.1.2, nous concluons que $\mathcal{O}$ est faiblement compact. Ce qui assure notre affirmation.

Les mêmes arguments précédents entrainent la faible compacité de $\Xi_\lambda B$.

Puisque Q_λ est un opérateur linéaire borné, nous avons à montrer la faible compacité de l'opérateur $\mathbf{KJ}_\lambda \Pi_\lambda B$. En effet, soit $\mathcal{I}$ une partie bornée de $\mathcal{X}$. En utilisant $(A1)$ et (2.2.6), nous remarquons que

$$\int_A |\mathbf{KJ}_\lambda(f)(v)|vdv \leq \int_A \Big(|\mathbf{K}(0)(v)| + \alpha|\mathbf{J}_\lambda(0)(v)|\Big)vdv + \alpha\Big(1-\alpha\Big)^{-1} \int_A |f(v)|vdv,$$

pour toute partie mesurable A de $\mathbb{R}^+$ et $f \in (\Pi_\lambda B)(\mathcal{I})$.
D'autre part,

$$\int_T^{+\infty} |\mathbf{KJ}_\lambda(f)(v)|vdv \leq \int_T^{+\infty} \Big(|\mathbf{K}(0)(v)| + \alpha|\mathbf{J}_\lambda(0)(v)|\Big)vdv + \alpha\Big(1-\alpha\Big)^{-1} \int_T^{+\infty} |f(v)|vdv,$$

pour tout réel $T > 0$ et $f \in (\Pi_\lambda B)(\mathcal{I})$.
En appliquant de nouveau le théorème 1.1.2 et le fait que $(\Pi_\lambda B)(\mathcal{I})$ est faiblement compact, nous obtenons la faible compacité de $\mathbf{KJ}_\lambda \Pi_\lambda B$. Ce qui achève la preuve. □

2.3 Une mesure de non-faible compacité sur $\mathcal{X}$

Soient $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ l'ensemble non vide des parties bornées de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ la partie de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ composée de tous les sous-ensembles faiblement compacts de $\mathcal{X}$.

Inspiré des travaux de J. Banas et Z. Knap [6], nous définissons la fonction $\omega\ :\ \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\omega(M) = \omega_1(M) + \omega_2(M), \qquad \forall\, M \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{2.3.1}$$

où

$$\omega_1(M) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left(\int_D |\psi(\mu, v)| d\mu dv\ :\ |D| < \varepsilon \right) \right\}, \tag{2.3.2}$$

et

$$\omega_2(M) = \lim_{T \to +\infty} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left(\int_0^1 \int_T^{+\infty} |\psi(\mu, v)| d\mu dv \right) \right\}, \tag{2.3.3}$$

où $|D|$ est la mesure de Lebesgue de D.
La fonction ω satisfait les conditions suivantes

Lemme 2.3.1. *Soient M, M_1 et M_2 trois éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) *si $M_1 \subseteq M_2$, alors $\omega(M_1) \leq \omega(M_2)$;*

(2) $\omega(M_1 \cup M_2) = \max\{\omega(M_1), \omega(M_2)\}$ *;*

(3) $\omega(\lambda M) = |\lambda| \omega(M)$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(4) $\omega(M_1 + M_2) \leq \omega(M_1) + \omega(M_2)$;

(5) $\omega(M) = 0$ *si, et seulement si,* $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$*, où* $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ *est la fermeture faible de* M ;

(6) $\omega(co(M)) = \omega(M)$;

(7) $\omega(\overline{M}^w) = \omega(M)$.

Preuve. Les assertions (1), (2), (3) et (4) sont immédiates.

(5) Le faite que $\omega(M) = 0$ implique $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ est une conséquence du théorème 1.1.2. Supposons que $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$. Il résulte du théorème 1.1.2 (a) que $\omega_1(M) = 0$. Montrons que $\omega_2(M) = 0$.

Soit $E_n = [0, 1] \times [T_n, +\infty)$ avec $(T_n)_n$ est une suite croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Il est claire que $(E_n)_n$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\geq 0} E_n = \emptyset$. Il résulte du théorème 1.1.1 que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\psi\in M} \int_0^1 \int_{T_n}^{+\infty} |\psi(\mu, v)| d\mu dv = 0,$$

et par conséquent, $\omega_2(M) = 0$.

(6) Puisque $M \subset \text{co}(M)$, en utilisant $1)$ nous obtenons $\omega(M) \leq \omega(\text{co}(M))$. Pour prouver l'inégalité inverse, soit D une partie mesurable quelconque de Ω telle que $|D| < \varepsilon$.

Pour $\psi \in co(M)$, il existe $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $a_i \geq 0$ et $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\varphi_i \in M$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \text{ et } \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_D |\psi(\mu, v)| d\mu dv &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i \int_D |\varphi_i(\mu, v)| d\mu dv \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sup_{1\leq i\leq n} \int_D |\varphi_i(\mu, v)| d\mu dv \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} \int_D |\varphi_i(\mu, v)| d\mu dv \leq \sup_{\varphi\in M} \int_D |\varphi(\mu, v)| d\mu dv.\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\psi\in co(M)} \int_D |\psi(\mu, v)| d\mu dv \leq \sup_{\varphi\in M} \int_D |\varphi(\mu, v)| d\mu dv.$$

Ce qui montre que $\omega_1(co(M)) \leq \omega_1(M)$.

Nous notons également que, pour tout $T > 0$, et en utilisant des calculs similaires, nous montrons que

$$\sup_{\psi \in co(M)} \int_0^1 \int_T^{+\infty} |\psi(\mu, v)| d\mu dv \leq \sup_{\varphi \in M} \int_0^1 \int_T^{+\infty} |\varphi(\mu, v)| d\mu dv.$$

Par passage à la limite quand T tend vers $+\infty$, nous obtenons $\omega_2(co(M)) \leq \omega_2(M)$.

Alors,

$$\omega(co(M)) \leq \omega(M).$$

(7) Nous observons d'abord que l'inclusion $M \subset \overline{M}^w$ et (1) entrainent que $\omega(M) \leq \omega(\overline{M}^w)$.

Inversement, en utilisant (1), l'inclusion $M \subset \overline{M}^w \subset \overline{co}(M)$ entraine que $\omega(\overline{M}^w) \leq \omega(\overline{co}(M))$.

Donc, il reste à montrer que $\omega(M) = \omega(\overline{M})$ (la fermeture forte).

De (1) nous avons déjà l'inégalité $\omega(M) \leq \omega(\overline{M})$. En suite, pour $\psi \in \overline{M}$, il existe une suite $(\psi_n)_n$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \psi_n = \psi$. Alors

$$\begin{aligned} \int_D |\psi(\mu, v)| d\mu dv &\leq \int_D |\psi(\mu, v) - \psi_n(\mu, v)| d\mu dv + \int_D |\psi_n(\mu, v)| d\mu dv \\ &\leq \|\psi - \psi_n\|_{\mathcal{X}} + \omega_1(M). \end{aligned}$$

Puisque, pour n assez grand, $\|\psi - \psi_n\|_{\mathcal{X}}$ est assez petit, nous concluons que $\omega_1(\overline{M}) \leq \omega_1(M)$.

De la même façon, nous montrons que $\omega_2(\overline{M}) \leq \omega_2(M)$ et donc $\omega(\overline{M}) = \omega(M)$. D'autre part, l'utilisation de (6) montre que $\omega(\overline{co}(M)) = \omega(co(M)) = \omega(M)$ et par conséquent

$$\omega(M) \leq \omega(\overline{M}^w) \leq \omega(M).$$

Nous avons ainsi terminé la preuve. □

Lemme 2.3.2. *Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de parties non vides et faiblement fermées de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \omega(M_n) = 0$. Alors, l'intersection $\bigcap_{n \geq 1} M_n$ est non vide et elle est relativement faiblement compacte.*

Preuve. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de parties non vides et faiblement fermées de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega(M_n) = 0$. Nous choisissons une suite $(\psi_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in M_n$ et nous posons $\widetilde{M_n} := \{\psi_k \ : \ k \geq n\}$. Il est clair que $(\widetilde{M_n})_n$ est une suite décroissante de parties non vides. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{M_n} \subset M_n$ et $\widetilde{M_1}\backslash\widetilde{M_n}$ est un ensemble fini, nous avons

$$\omega(\widetilde{M_1}) = \omega(\widetilde{M_n}) \leq \omega(M_n).$$

D'où, $\omega(\widetilde{M_1}) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \omega(M_n) = 0$ et donc $\widetilde{M_1}$ est relativement faiblement compact. Donc, $(\psi_n)_n$ converge faiblement vers une fonction ψ.
Puisque, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, M_n est faiblement fermé, alors $\psi \in \bigcap\limits_{n\geq 0} M_n$. Ceci termine la preuve. □

Soit J un opérateur non-linéaire de $\mathcal{X}$ dans lui même. Dans ce qui suit, nous allons utiliser la condition suivante :

$$(A3) \qquad \begin{cases} \text{Si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans } \mathcal{X}, \text{ alors} \\ (Jx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite fortement convergente dans } \mathcal{X}. \end{cases}$$

Pour plus d'informations sur $(A3)$ nous nous référons au chapitre 3, paragraphe 3.2.4. Nous rappelons maintenant le résultat suivant requis dans la suite.

Théorème 2.3.1. [39] *Soit $\mathcal{M}$ une partie non vide bornée fermée et convexe d'un espace de Banach X. Supposons que $\mathbf{A} : \mathcal{M} \to X$ et $\mathbf{B} : X \to X$ sont des opérateurs tels que*

1. $\mathbf{A}$ *est continu et satisfait $(A3)$,*
2. *il existe $\eta \in [0, 1)$ tel que $\omega(\mathbf{A}S + \mathbf{B}S) \leq \eta\omega(S)$ pour tout $S \subset \mathcal{M}$,*
3. $\mathbf{B}$ *est une contraction stricte,*
4. $\mathbf{A}\mathcal{M} + \mathbf{B}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

Alors, il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que $\mathbf{A}x + \mathbf{B}x = x$.

Remarque 2.3.1. 1) Ce théorème est une généralisation du Théorème 2.3 [40, p. 261]. Il faut noter que dans ce théorème ω est la mesure de faible non-compacité de F.S. De Blasi [20]. Elle est définie par :

$$w(M) = \text{inf}\{\mathbf{r} > 0 : \text{il existe un ensemble } N \in \mathcal{W}(\mathcal{X}) \text{ tel que } M \subset N + B_{\mathbf{r}}\},$$

où $B_{\mathbf{r}}$ est la boule de centre 0 et de rayon $\mathbf{r} > 0$.
La mesure de non-faible compacité de De Blasi vérifie les propriétés des Lemmes $2.3.1$ et $2.3.2$. Une lecture attentive des démonstrations du Théorème 2.3 [40] et du Théorème $2.3.1$, montre que ces derniers restent valables pour toute mesure de non-faible compacité qui vérifie les propriétés des Lemmes $2.3.1$ et $2.3.2$.

2) Dans le cas où $X = L^1(\Omega)$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie, J. Appell et E. De Pascale [4] ont montré que la mesure de De Blasi est donnée par

$$\omega(M) = \omega_1(M),$$

où $\omega_1(M)$ est la mesure donnée par $(2.3.2)$.
Question ouverte : *Trouver le lien entre la mesure de De Blasi et la mesure donnée par* $(2.3.1)$.

$\square$

Remarque 2.3.2. Soient X un espace de Banach et ω une mesure de non-faible compacité sur X, i.e. une application $\omega : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés des Lemmes $2.3.1$ et $2.3.2$.
Pour tout opérateur linéaire borné U dans X et, pour tout $M \in \mathcal{B}(X)$, nous avons

$$\omega(U(M)) \leq \|U\|\omega(M),$$

où $\|U\|$ désigne la norme de U. $\square$

2.4 Les résultats principaux

Nous considérons d'abord le cas où $\sigma(\mu, v, \psi(\mu, v))$ est un opérateur de multiplication, c'est à dire

$$\sigma(\mu, v, \psi(\mu, v)) := \sigma(\mu, v)\, \psi(\mu, v),$$

où $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^{\infty}(\Omega; d\mu\, dv)$.

En outre, nous supposons que

$$(A4) \quad \begin{cases} f \text{ satisfait les conditions de Carathéorodory et} \\ \text{l'opérateur de Nemytskii } \mathcal{N}_f \text{ envoie } \mathcal{X} \text{ dans lui même.} \end{cases}$$

Lemme 2.4.1. *Si la condition $(A4)$ est satisfaite, alors $\mathcal{N}_f$ envoie les ensembles relativement faiblement compacts de $\mathcal{X}$ dans les ensembles relativement faiblement compacts de $\mathcal{X}$.*

Preuve. Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente dans $\mathcal{X}$. Alors $\mathbf{Z} := \{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble relativement faiblement compact de $\mathcal{X}$. D'après le Théorème $1.3.1$, il existe une constante $b > 0$ et une fonction $0 \leq\ a(.,.) \in \mathcal{X}$ telles que

$$|f(x, \xi, \psi_n(x, \xi))| \leq a(x, \xi) + b|\psi_n(x, \xi)|.$$

Donc, pour toute partie mesurable A de Ω, nous avons

$$\int_A |\mathcal{N}_f\psi(\mu, v)|d\mu dv \leq \int_A |a(\mu, v)|d\mu dv + b\int_A |\psi(\mu, v)|d\mu dv \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{Z}.$$

Par ailleurs

$$\lim_{|A|\to 0} \int_A |\mathcal{N}_f\psi(\mu, v)|d\mu dv \longrightarrow 0 \text{ quand } |A| \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{Z},$$

où $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue de A.

Ensuite, soient $(T_m)_m$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{m\to+\infty} T_m = +\infty$ et Δ une partie compacte de $[0,1]$. Pour tout $\psi \in \mathbf{Z}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{T_m}^{+\infty}\int_{\Delta} |\mathcal{N}_f\psi(\mu,v)|d\mu dv &\le \int_{T_m}^{+\infty}\int_{\Delta} |a(\mu,v)|d\mu dv + b\int_{T_m}^{+\infty}\int_{\Delta} |\psi(\mu,v)|d\mu dv \\
&\le \int_{T_m}^{+\infty}\int_{0}^{1} |a(\mu,v)|d\mu dv + b\int_{T_m}^{+\infty}\int_{0}^{1} |\psi(\mu,v)|d\mu dv \\
&\le \int_{T_m}^{+\infty} \|a(\cdot,v)\|_{L^1([0,1],d\mu)}dv + b\int_{T_m}^{+\infty} \|\psi(\cdot,v)\|_{L^1([0,1],d\mu)}dv.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\psi \in \mathbf{Z}$, nous déduisons que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{T_n}^{+\infty}\int_{\Delta} |\mathcal{N}_f\psi(\mu,v)|d\mu dv = 0.$$

En appliquant le Théorème 1.1.2, nous concluons que $\mathcal{N}_f(\mathbf{Z})$ est relativement faiblement compact. Ce qui achève la démonstration. $\square$

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le Lemme suivant.

Lemme 2.4.2. *Soient B un opérateur de collision régulier et $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que Re$(\lambda) > -\underline{\sigma}$. On suppose que la condition $(A1)$ est vérifiée. Alors l'opérateur $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B$ envoie les ensembles faiblement compacts de $\mathcal{X}$ dans les ensembles compacts de $\mathcal{X}$.*

Preuve. Soit W un ensemble faiblement compact de $\mathcal{X}$. Puisque $\mathcal{X}$ possède la propriété de Dunford-Pettis (Théorème $1.1.4$) et les opérateurs linéaires $\Xi_\lambda B$ et $\Pi_\lambda B$ sont faiblement compacts, nous concluons via la proposition 1.1.1 que les ensembles $\Xi_\lambda B(W)$ et $\Pi_\lambda B(W)$ sont compacts. Par conséquence, grâce à la continuité des opérateurs $Q_\lambda\mathbf{K}$ et $\mathbf{J}_\lambda$, $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B(W)$ est un ensemble compact de $\mathcal{X}$. $\square$

Soit $\mathbf{r} > 0$. Nous notons par $B_{\mathbf{r}}$ l'ensemble

$$B_{\mathbf{r}} = \{\psi \in \mathcal{X} : \ \|\psi\|_{\mathcal{X}} \le \mathbf{r}\}.$$

Théorème 2.4.1. *Supposons que les hypothèses $(A1)$, $(A2)$ et $(A4)$ sont satisfaites et que B est un opérateur de collision régulier. Alors, pour tout $\mathbf{r} > 0$, il existe un réel $\lambda_0 > 0$ tel que pour* *tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \lambda_0$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v) + (\lambda + \sigma(\mu, v))\psi(\mu, v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi(\mu, v'))dv', \\ \\ \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

admet au moins une solution dans $B_{\mathbf{r}}$.

Preuve. Soit λ un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > -\underline{\sigma}$. Alors d'après le Lemme 2.2.2, $(\lambda - S_{\mathbf{K}})$ est inversible et donc le problème (2.4.1) s'écrit sous la forme

$$\psi = \mathcal{P}(\lambda)(\psi), \qquad \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1),$$

où $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1} B\mathcal{N}_f$.

Soit $\mathbf{r} > 0$. Nous montrons d'abord que, pour λ bien choisi, l'opérateur $\mathcal{P}(\lambda)$ est continu et laisse invariant $B_{\mathbf{r}}$.

Il est clair que $\mathcal{P}(\lambda)$ est continu. D'autre part, puisque f satisfait $(A4)$, alors, d'après le Théorème 1.3.1, il existe une constante $b > 0$ et une fonction $0 \leq a(\cdot, \cdot) \in \mathcal{X}$ telles que

$$|f(\mu, v, \psi(\mu, v))| \leq a(\mu, v) + b|\psi(\mu, v)| \text{ pour p.p. } (\mu, v), \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{X}. \tag{2.4.2}$$

Soit $\psi \in B_{\mathbf{r}}$. Il résulte de $(A1)$, (2.2.6) et (2.2.7) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\lambda)(\psi)\|_{\mathcal{X}} &\leq \|(Q_\lambda \mathbf{K} \mathbf{J}_\lambda \Pi_\lambda B\mathcal{N}_f)(\psi)\|_{\mathcal{X}} + \|(\Xi_\lambda B\mathcal{N}_f)(\psi)\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{K}(0)\|_{\mathbf{Y}} + \alpha \|\mathbf{J}_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}}}{\mathrm{Re}(\lambda) + \underline{\sigma}} + \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \big(\|a\|_{\mathcal{X}} + br\big)\big(1 + \alpha(1-\alpha)^{-1}\big)}{\mathrm{Re}(\lambda) + \underline{\sigma}} \\ &= \Theta(\mathrm{Re}(\lambda)), \end{aligned}$$

où

$$\Theta(t) := \frac{\|\mathbf{K}(0)\|_{\mathbf{Y}} + \alpha\|\mathbf{J}_\lambda(0)\|_{\mathbf{Y}}}{t + \underline{\sigma}} + \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}(\|a\|_{\mathcal{X}} + br)(1 + \alpha(1-\alpha)^{-1})}{t + \underline{\sigma}}.$$

Il est clair que, $\Theta(\cdot)$ est une fonction continue strictement décroissante pour $t > 0$ et satisfait $\lim\limits_{t\to+\infty} \Theta(t) = 0$. Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\Theta(\lambda_0) \leq \mathbf{r}$, et donc $\|\mathcal{P}(\lambda)(\psi)\|_{\mathcal{X}} \leq \mathbf{r}$, pour tout λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \lambda_0$. Cela montre que $\mathcal{P}(\lambda)$ laisse invariante la boule $B_{\mathbf{r}}$.

Soit λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_0$. On note $\mathcal{C}_\lambda := \overline{co}(\mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}))$, l'enveloppe convexe fermé de $\mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}})$. Puisque $B_{\mathbf{r}}$ est une partie fermée convexe de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) \subset B_{\mathbf{r}}$ nous avons $\mathcal{C}_\lambda \subset B_{\mathbf{r}}$ et par suite $\mathcal{P}(\lambda)(\mathcal{C}_\lambda) \subset \mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) \subset \overline{co}(\mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}})) = \mathcal{C}_\lambda$. D'où $\mathcal{P}(\lambda)$ envoie $\mathcal{C}_\lambda$ dans lui même.
En outre, sachant que $\mathcal{N}_f(B_{\mathbf{r}})$ est une partie bornée de $\mathcal{X}$, il résulte de la proposition 2.2.1 que $\mathcal{P}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) = [(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B](\mathcal{N}_f(B_{\mathbf{r}}))$ est faiblement compact. En appliquant le Théorème de Krein-Šmulian (théorème 1.1.3), nous concluons que $\mathcal{C}_\lambda$ est faiblement compact.
D'autre part, d'après les lemmes 2.4.1 et 2.4.2, $\mathcal{P}(\lambda)(\mathcal{C}_\lambda)$ est une partie compacte de $\mathcal{X}$.
Donc, le résultat découle du Théorème du point fixe de Schauder (Théorème 1.2.2). $\square$

Maintenant, notre but est de montrer un résultat d'existence pour le problème aux limites non-linéaire général (2.1.3).
Quand nous traitons ce problème, des difficultés techniques interviennent, et pour les surmonter, nous introduisons l'hypothèse suivante

$(A5)$ **K** est un opérateur linéaire borné défini de $\mathbf{Y}$ dans lui même et, pour $\mathbf{r} > 0$,

$$|\sigma(\mu, v, \psi_1(\mu, v)) - \sigma(\mu, v, \psi_2(\mu, v))| \leq |\rho(\mu, v)|\,|\psi_1(\mu, v) - \psi_2(\mu, v)| \quad (\psi_1,\ \psi_2 \in\ B_{\mathbf{r}})$$

où $\rho \in L_\infty(\Omega;\ d\mu dv)$ et $\mathcal{N}_{-\sigma}$ envoie $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$.

Nous notons que, d'après le théorème 1.3.1, il existe une fonction $0 \leq \widetilde{a}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{X}$ et une constante $\widetilde{b} > 0$ telles que, pour tout $(\mu, v) \in [0,1] \times [0, +\infty)$, nous avons

$$|\sigma(\mu, v, \psi(\mu, v))| \leq \widetilde{a}(\mu, v) + \widetilde{b}|\psi(\mu, v)|. \tag{2.4.3}$$

Nous définissons l'opérateur $\widetilde{S}_{\mathbf{K}}$ de $D(\widetilde{S}_{\mathbf{K}}) \subseteq \mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ par

$$\begin{cases} D(\widetilde{S}_{\mathbf{K}}) = \{\psi \in \mathcal{W}(\Omega);\ \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1)\}, \\ D(\widetilde{S}_{\mathbf{K}}) \ni \psi \longrightarrow \widetilde{S}_{\mathbf{K}}(\psi)(x,v) := -v\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,v). \end{cases}$$

Puisque $\mathbf{K}$ est linéaire, $\widetilde{S}_{\mathbf{K}}$ est un opérateur linéaire, fermé et à domaine dense dans $\mathcal{X}$. De plus, des calculs simples montrent que l'ensemble résolvant $\rho(\widetilde{S}_{\mathbf{K}})$ de $\widetilde{S}_{\mathbf{K}}$ contient le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$, et pour tout λ appartenant à ce demi-plan nous avons

$$(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_\lambda^0 \mathbf{K}(P_\lambda^0 \mathbf{K})^n \Pi_\lambda^0 + \Xi_\lambda^0,$$

où P_λ^0, Q_λ^0, Π_λ^0 et Ξ_λ^0 sont des opérateurs linéaires bornés provenant de P_λ, Q_λ, Π_λ et Ξ_λ en considérant $\sigma(.,.) = 0$ (la fonction nulle de $\mathcal{X}$).
Leurs normes sont, respectivement, majorées, par 1, $\dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}$, 1 et $\dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Les observations ci-dessus conduisent à l'estimation

$$\left\| (\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}. \tag{2.4.4}$$

Remarque 2.4.1. Il convient de noter que les mêmes arguments que dans les preuves de la Proposition 2.2.1 et le Lemme 2.4.2 montrent que si l'opérateur B est régulier, alors l'opérateur linéaire borné $(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1}B$ envoie les ensembles faiblement compacts de $\mathcal{X}$ dans les ensembles compacts de $\mathcal{X}$. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit* $\mathbf{K}$ *un opérateur linéaire borné vérifiant* $\|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})} < 1$. *Supposons que les conditions* $(A2)$, $(A4)$ *et* $(A5)$ *sont satisfaites et que l'opérateur de collision* B *est régulier. Alors pour tout* $\mathbf{r} > 0$, *il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que, pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que Re*$(\lambda) > \lambda_0$, *le problème aux limites*

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu,v) + \lambda\psi(\mu,v) + \sigma(\mu,v,\psi(\mu,v)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \zeta(\mu,v,v') f(\mu,v,\psi(\mu,v))\, dv' \\ \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1) \end{cases} \tag{2.4.5}$$

admet au moins une solution dans $B_{\mathbf{r}}$.

Preuve. Soit λ un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Il est clair que $\lambda \in \rho(\widetilde{S}_K)$, et donc le problème (2.4.5) sécrit sous la forme

$$\psi = \widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\psi), \quad \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1),$$

où $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda) = (\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} B\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{H}(\lambda) = (\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} B\mathcal{N}_{-\sigma}$.

Affirmation : *Il existe $\eta \in [0,1)$ tel que $\omega(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \eta\, \omega(M)$ pour tout ensemble $M \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Pour voir ceci, soient $M \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ et A une partie mesurable de Ω de mesure finie. En utilisant la remarque 2.3.2 et les estimations (2.4.2) et (2.4.4), nous obtenons pour tout $\psi \in M$

$$\begin{aligned}
\int_A \left|\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(\psi)(\mu,v)\right| d\mu dv &= \int_A \left|(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} B\mathcal{N}_f(\psi)(\mu,v)\right| d\mu dv \\
&\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \int_A |\mathcal{N}_f(\psi)(\mu,v)| d\mu dv \\
&\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \Big(\int_A a(\mu,v) d\mu dv + b \int_A |\psi(\mu,v)| d\mu dv \Big).
\end{aligned}$$

Ce qui mène, en utilisant (a) du théorème 1.1.2, à

$$\omega_1(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M)) \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\, b}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\, \omega_1(M).$$

D'autre part, en utilisant (2.4.3) et (2.4.4) et en raisonnant comme précédemment, nous obtenons pour tout $\psi \in M$

$$\begin{aligned}
\int_A |\mathcal{H}(\lambda)(\psi)(\mu,v)|\, d\mu dv &= \int_A \left|(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(\mu,v)\right| d\mu dv \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \int_A |\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(\mu,v)| d\mu dv \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \Big(\int_A \widetilde{a}(\mu,v) d\mu dv + \widetilde{b} \int_A |\psi(\mu,v)| d\mu dv \Big)
\end{aligned}$$

et par suite grâce au théorème 1.1.2

$$\omega_1(\mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{\widetilde{b}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\, \omega_1(M).$$

Maintenant, soient $\psi \in M$ et $T > 0$. Un simple calcul mène à

$$\int_0^1 \int_T^\infty \left|\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(\psi)(\mu, v)\right| d\mu dv = \int_0^1 \int_T^{+\infty} \left|(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} B \mathcal{N}_f(\psi)(\mu, v)\right| d\mu dv$$
$$\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\Big(\int_0^1 \int_T^{+\infty} |a(\mu, v)| d\mu dv + b \int_0^1 \int_T^{+\infty} |\psi(\mu, v)| d\mu dv\Big),$$

et par suite grâce au théorème 1.1.2 (b)

$$\omega_2(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M)) \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\ b}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\omega_2(M).$$

Un calcul similaire pour $\psi \in M$ et $T > 0$ montre que

$$\int_0^1 \int_T^{+\infty} |\mathcal{H}(\lambda)(\psi)(\mu, v)|\, d\mu dv = \int_0^1 \int_T^{+\infty} \left|(\lambda - \widetilde{S}_{\mathbf{K}})^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi)(\mu, v)\right| d\mu dv$$
$$\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\Big(\int_0^1 \int_T^{+\infty} |\widetilde{a}(\mu, v)| d\mu dv + \widetilde{b} \int_0^1 \int_T^{+\infty} |\psi(\mu, v)| d\mu dv\Big),$$

et par conséquence (voir Théorème 1.1.2 (b))

$$\omega_2(\mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{\widetilde{b}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\,\omega_2(M).$$

Donc, pour toute partie bornée M de $\mathcal{X}$, nous avons

$$\begin{aligned}\omega(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) &= \omega_1(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) + \omega_2(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \\ &\leq \omega_1(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M)) + \omega_2(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M)) + \omega_1(\mathcal{H}(\lambda)(M)) + \omega_2(\mathcal{H}(\lambda)(M)) \\ &\leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\ b + \widetilde{b}}{\mathrm{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}\,\omega(M).\end{aligned}$$

En prenant par exemple, $\lambda_1 := 2\dfrac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\ b + \widetilde{b}}{1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})}}$, nous concluons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_1$

$$\omega(\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(M) + \mathcal{H}(\lambda)(M)) \leq \frac{1}{2}\,\omega(M),$$

ce qui montre notre affirmation.

Ensuite, en utilisant la remarque 2.4.1 et en résonnant comme dans la dernière partie de la démonstration du théorème 2.4.1, nous montrons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$\text{Re}(\lambda) > 0$, l'opérateur $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)$ envoie les ensembles faiblement compacts de $\mathcal{X}$ dans les ensembles compacts de $\mathcal{X}$. *Par conséquence, $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)$ satisfait la condition $(A3)$.*

Maintenant, nous allons montrer que, pour des nombres complexes appropriés λ,$\mathcal{H}(\lambda)$ *est une contraction stricte sur $\mathcal{X}$*. En effet, soient $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{X}$ et λ un nombre complexe tel que $\text{Re}(\lambda) > 0$. En utilisant $(A5)$ et l'estimation $(2.4.4)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}(\lambda)(\psi_1) - \mathcal{H}(\lambda)(\psi_2)\|_{\mathcal{X}} &\leq \frac{1}{\text{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \|\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_1) - \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_2)\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \frac{\|\rho\|_\infty}{\text{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})} \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{X}} .\end{aligned}$$

Soit $\lambda_2 := \dfrac{2\,\|\rho\|_\infty}{1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})}}$. D'après l'estimation précédente, il est claire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\lambda) > \lambda_2$, *l'opérateur $\mathcal{H}(\lambda)$ est une contraction stricte sur $\mathcal{X}$.*

Soit $\mathbf{r} > 0$. *Notre objectif maintenant est de montrer que, pour des nombres complexes appropriés λ, nous avons $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) \subset B_{\mathbf{r}}$.*

En effet, pour tout ψ, φ dans $B_{\mathbf{r}}$, nous obtenons

$$\left\|\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\varphi)\right\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} M(\mathbf{r}) + M'(\mathbf{r})}{\text{Re}(\lambda)(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}$$

où $M(\mathbf{r})$ (resp. $M'(\mathbf{r})$) désigne la borne supérieure de $\mathcal{N}_f$ dans $B_{\mathbf{r}}$ (resp. de $\mathcal{N}_{-\sigma}$).
Soit $\lambda_3 := \dfrac{\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} M(\mathbf{r}) + M'(\mathbf{r})}{\mathbf{r}(1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y})})}$. Il est clair que, pour tout complexe λ, tel que $\text{Re}(\lambda) \geq \lambda_3$,

$$\left\|\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\varphi)\right\|_{\mathcal{X}} \leq \mathbf{r}.$$

Ce qui montre que, pour $\text{Re}(\lambda) > \lambda_3$, $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}) \subset B_{\mathbf{r}}$.

Ensuite, soit $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Il est clair que, pour tout λ tel que $\text{Re}(\lambda) > \lambda_0$, les opérateurs $\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)$ et $\mathcal{H}(\lambda)$ vérifient les hypothèses du théorème 2.3.1. Par conséquence, le problème aux limites (2.4.5) admet au moins une solution ψ dans $B_{\mathbf{r}}$, pour tout nombre complexe λ tel que $\text{Re}(\lambda) > \lambda_0$. Ceci achève la preuve. $\square$

Corollaire 2.4.1. *Les résultats du théorème* 2.4.2 *restent vrais si nous remplaçons l'hypothèse* $\mathbf{K}$ *est linéaire par* $\mathbf{K}$ *est additif, i.e.*

$$\mathbf{K}(f_1 + f_2) = \mathbf{K}(f_1) + \mathbf{K}(f_2) \textit{ pour tout } f_1, f_2 \in \mathbf{Y}. \tag{2.4.6}$$

Preuve. Nous commençons par montrer que $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}$ est un opérateur additif. Pour cela, montrons que $\mathbf{J}_\lambda$ est additif. En effet, soient f_1 et $f_2 \in \mathbf{Y}$. Nous posons $u_1 = \mathbf{J}_\lambda(f_1)$ et $u_2 = \mathbf{J}_\lambda(f_2)$. Alors

$$u_1 = \mathbf{\Theta}_\lambda(u_1) + f_1 \text{ et } u_2 = \mathbf{\Theta}_\lambda(u_2) + f_2.$$

Puisque P_λ est linéaire et $\mathbf{K}$ est un opérateur additif, alors $\mathbf{\Theta}_\lambda = P_\lambda\mathbf{K}$ est additif.
Donc $u_1 + u_2 = \mathbf{\Theta}_\lambda(u_1 + u_2) + f_1 + f_2$. Ce qui donne

$$\mathbf{J}_\lambda(f_1 + f_2) = u_1 + u_2 = \mathbf{J}_\lambda(f_1) + \mathbf{J}_\lambda(f_2),$$

et puisque les opérateurs Q_λ, Π_λ et Ξ_λ sont linéaires et $\mathbf{K}$ et $\mathbf{J}_\lambda$ sont additifs, alors d'après l'équation (2.2.7), $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}$ est aussi additif.
Maintenant, le problème (2.4.5) s'écrit sous la forme

$$\psi = \mathcal{P}_\lambda(\psi) + \mathcal{H}(\lambda)(\psi), \quad \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1),$$

où $\mathcal{P}_\lambda = (\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{H}(\lambda) = (\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B\mathcal{N}_{-\sigma}$.
Le reste de la preuve est similaire à celui du théorème 2.4.2. $\square$

2.5 Existence des solutions positives

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'existence des solutions positives du problème aux limites (2.4.1).
Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach réticulés munis, respectivement, des cônes positifs X_1^+ et X_2^+, et $T : X_1 \to X_2$ un opérateur. Nous disons que l'opérateur T est positif, si $T(X_1^+) \subset X_2^+$ (voir D. Aliprantis et O. Burkinshaw [2]).

Notons que les espaces fonctionnels $\mathcal{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des espaces de Banach réticulés. Leurs cônes positifs sont, respectivement, $\mathcal{X}^+$ et $\mathbf{Y}^+$. Si $\mathbf{r} > 0$, l'ensemble $B^+_{\mathbf{r}}$ désigne $B_{\mathbf{r}} \cap \mathcal{X}^+ = \{\psi \in B_{\mathbf{r}}$ tel que $\psi \geq 0$ p. p. $\}$.

Proposition 2.5.1. *Supposons que les hypothèses $(A1)$, $(A2)$ et $(A4)$ sont satisfaites et $\mathbf{B}$ un opérateur de collision régulier. Si les opérateurs $\mathbf{K}$, B et $\mathcal{N}_f$ sont positifs, alors pour tout $\mathbf{r} > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout complexe λ avec Re$(\lambda) > \lambda_0$, le problème aux limites (2.4.1) admet au moins une solution dans $B^+_{\mathbf{r}}$.*

Preuve. Soit λ un réel positif tel que $\lambda > -\underline{\sigma}$
Affirmation : $(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1}B$ *laisse invariant* $\mathcal{X}^+$.
En effet, pour tout $\lambda > 0$, les opérateurs P_λ, Q_λ, Π_λ et Ξ_λ, sont positifs. D'après (2.2.7), il suffit d'établir que $\mathbf{J}_\lambda$ est positif, i.e. $\mathbf{J}_\lambda(\mathbf{Y}^+) \subseteq \mathbf{Y}^+$. Pour cela, soit $f \in \mathbf{Y}^+$, et considérons la suite définie sur $\mathbf{Y}$ par

$$u_0 = 0, \ u_{n+1} = \ \mathbf{A}_{(\lambda,f)}(u_n) = P_\lambda \mathbf{K} u_n + f.$$

Puisque $f \in \mathbf{Y}^+$, en utilisant la positivité de $P_\lambda\mathbf{K}$, nous observons par récurrence que $u_n \in \mathbf{Y}^+$. De plus, puisque l'opérateur $\mathbf{A}_{(\lambda,f)}$ est une contraction, il découle du théorème 1.2.1 que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\mathbf{J}_\lambda(f)$, le point fixe de $\mathbf{A}_{(\lambda,f)}$. Donc $\mathbf{J}_\lambda(f) \in \mathbf{Y}^+$. Ce qui achève notre affirmation.

Le reste de la preuve est similaire à celui du théorème 2.4.1. Il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}$ et de remplacer l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda := \overline{co}(\mathcal{P}_\lambda(B_{\mathbf{r}}))$ par $\mathcal{C}^+_\lambda := \mathcal{C}_\lambda \cap B^+_{\mathbf{r}}$. $\square$

Proposition 2.5.2. *Supposons que les hypothèses $(A1)$, $(A2)$ et $(A4)$ sont vérifiées. En plus des hypothèses de la Proposition 2.5.1, supposons qu'il existe $\tau > 0$ et $0 \neq \psi_0 \in B^+_{\mathbf{r}}$ tels que*

(i) $\psi_0 \notin ker(B)$, où $ker(B)$ est le noyau de B,
(ii) $\mathcal{N}_f\psi \geq \tau\psi_0$ pour tout $\psi \in B^+_{\mathbf{r}}$.

Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$: il existe $\eta > 0$ tel que le problème aux limites

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}(\mu,v) + (\lambda+\sigma(\mu,v))\psi(\mu,v) = \eta\displaystyle\int_0^{+\infty}\zeta(\mu,v,v')f(\mu,v',\psi(\mu,v'))dv', \\ \\ \psi^0 = \mathbf{K}(\psi^1), \end{cases}$$

admet au moins une solution $\psi^* \in B_{\mathbf{r}}$ qui vérifie $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$.

Preuve. Raisonnons comme dans la démonstration du théorème 2.4.1 et de la proposition 2.5.1. Alors, il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ l'opérateur $\mathcal{P}(\lambda)$ laisse invariant l'ensemble $B_{\mathbf{r}}^+$.

Notons d'abord que

$$\inf\{\|\mathcal{P}(\lambda)\psi\|\,,\ \psi \in B_{\mathbf{r}}^+\} > 0.$$

En effet, puisque $\mathcal{N}_f$ vérifie (ii), il résulte de (2.2.7) et de la positivité de $Q_\lambda\mathbf{K}\mathbf{J}_\lambda\Pi_\lambda$, que

$$\mathcal{P}(\lambda)(\psi) \geq \tau(\Xi_\lambda B\psi_0) \text{ pour tout } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

En utilisant l'hypothèse (i), nous obtenons $B\psi_0 \geq 0$ et $B\psi_0 \neq 0$.

Puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, il résulte de la positivité de Ξ_λ et du fait que $\Xi_\lambda = (\lambda - S_0)^{-1}$ que

$$\mathcal{P}(\lambda)(\psi) \geq \tau(\Xi_\lambda B\psi_0) \geq 0 \text{ et } \Xi_\lambda B\psi_0 \neq 0.$$

Alors

$$\|\mathcal{P}(\lambda)(\psi)\| \geq \tau\,\|\Xi_\lambda B\psi_0\| > 0 \text{ pour tout } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

Par conséquence, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, nous définissons l'opérateur $\mathcal{G}(\lambda)$ sur $B_{\mathbf{r}}^+$ par

$$\mathcal{G}(\lambda)(\psi) = r\frac{\mathcal{P}(\lambda)(\psi)}{\|\mathcal{P}(\lambda)(\psi)\|} \quad \text{pour tout } \psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

Soit $\widehat{C}_\lambda := \overline{co}(\mathcal{G}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}^+))$. Puisque $B_{\mathbf{r}}^+$ est un sous-ensemble fermé et convexe de $\mathcal{X}^+$, alors $\widehat{C}_\lambda \subset B_{\mathbf{r}}^+$. Ce qui implique que $\mathcal{G}_\lambda$ laisse invariant $\widehat{C}_\lambda$.

De plus, en utilisant les mêmes arguments du théorème 2.4.1, nous montrons que $\mathcal{G}(\lambda)(\widehat{C}_\lambda)$ est compact. Nous concluons grâce au Théorème 1.2.2 que $\mathcal{G}(\lambda)$ admet au moins un point fixe ψ^* dans $\widehat{C}_\lambda$ et qui vérifie $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$. Si nous posons $\eta = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathcal{P}(\lambda)(\psi^*)\|}$, nous obtenons

$$(\lambda - S_{\mathbf{K}})^{-1} B\mathcal{N}_f(\psi^*) = \eta^{-1}\psi^*.$$

Donc, $\psi^* \in D(S_{\mathbf{K}}) \cap B^+_{\mathbf{r}}$ (puisque $\widehat{C}_\lambda \subseteq B^+_{\mathbf{r}}$), et

$$v\frac{\partial \psi^*}{\partial \mu}(\mu, v) + (\lambda + \sigma(\mu, v))\psi^*(\mu, v) = \eta \int_0^{+\infty} \zeta(\mu, v, v') f(\mu, v', \psi^*(\mu, v'))dv'.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

2.6 Extension des résultats d'existence à un modèle de prolifération cellulaire structuré en âge et longueur de cycle

Nous pouvons étendre les résultats de ce chapitre pour une autre classe d'équations non-linéaires intervenant en dynamique de populations modélisant l'évolution d'une population cellulaire structurée en âge et longueur de cycle

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}(a, l) + \lambda\psi(a, l) + \sigma(a, l, \psi(a, l)) = \int_{l_1}^{l_2} \kappa(a, l, l') f(a, l', \psi(a, l'))\chi_\Delta(a, l)dl',$$

où χ_Δ est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\Delta := \{(a, l)/\, 0 < a < l \text{ et } l_1 < l < +\infty\},$$

avec $0 < l_1 < \infty$.

Cette équation provient d'un modèle de prolifération linéaire, structuré en âge avec des propriétés héréditaires, proposé à l'origine par J.L. Lebowitz et S.I. Rubinow [44]. Les cellules mères et les cellules filles sont reliées par une loi de reproduction modélisée par les conditions aux limites

$$\psi(0, l) = (\mathbf{K}\psi)(l, l),$$

où $\mathbf{K}$ est un opérateur non-linéaire modélisant la transition des cellules mères de longueur de cycle l aux cellules filles de longueur de cycle l, couvrant les différentes lois de reproduction considérées dans la littérature. Des résultats d'existence ont été obtenus dans le cas où Δ est borné (voir K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [41]). Nous pouvons étendre ces résultats avec les mêmes techniques développées dans ce chapitre au cas où la longueur du cycle devient infinie.

Chapitre 3

Résultats d'existence pour une équation non-linéaire intervenant en transport neutronique

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème non-linéaire aux limites intervenant en transport neutronique. Nous discutons des résultats d'existence dans les espaces L^1 dans le cas où *l'espace des vitesses admissibles est non-borné*, ce qui constitue visiblement une nouveauté. Nos résultats obtenus sont une généralisation des travaux [36], [37] , [40] et [43]. Notre analyse utilise le concept des opérateurs de Dunford-Pettis, l'introduction d'une mesure de non-faible compacité adaptée au problème et un théorème récent du point fixe de type Darbo.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons discuter des résultats d'existence pour le problème aux limites suivant

$$v.\nabla_x\psi(x,v)+\sigma(x,v,\psi(x,v))+\lambda\psi(x,v)=\int_V\kappa(x,v,v')f(x,v',\psi(x,v'))d\mu(v'), \tag{3.1.1}$$

où $(x, v) \in D \times V$. Dans tout ce chapitre, D est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ assez régulier et μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\mu(\{0\}) = 0$. Nous notons par V le support de μ, V étant l'espace des vitesses admissibles. Cette équation décrit le transport des particules (neutrons, photons, les molécules de gaz, ...) dans le domaine D. La fonction $\psi(x, v)$ représente la densité du nombre (où de probabilité) des particules situées au point x et animées de la vitesse v. Quant aux fonctions $\sigma(., ., .)$ et $\kappa(., ., .)$, elles désignent, respectivement, la fréquence de collision et le noyau de diffusion.

Les conditions aux limites sont modélisées par :

$$\psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+}), \tag{3.1.2}$$

où $\psi_{|\Gamma_-}$ (resp. $\psi_{|\Gamma_+}$) est la restriction de ψ sur Γ_- (resp. Γ_+) avec Γ_- (resp. Γ_+) est la partie rentrante (resp. sortante) du bord de l'espace de phase $D \times \mathbb{R}^N$ et H est un opérateur linéaire borné, d'un éspace adéquat de fonctions définies sur Γ_+ dans un autre espace de fonctions définies sur Γ_-.

Les conditions aux limites classiques connues (conditions aux limites absorbantes, de réflexions spéculaires, de réflexions diffuses, conditions aux limites mixtes ou périodiques) sont des exemples particuliers de notre étude.

L'équation de transport a été considérée dans différentes disciplines de la physique mathématique pour décrire le processus de transport des particules. Ainsi, dans la théorie cinétique des gaz, où on doit décrire les interactions des molécules du gaz avec les parois solides, qui délimitent la région où le gaz s'écoule, le problème théorique est de relier la fonction de distribution de molécules laissant une surface solide à la distribution des molécules qui arrivent à la même surface. Cependant, les conditions aux limites qui décrivent cette interaction sont très complexes, car la réaction des molécules du gaz avec les parois solides est compliquée. Cela est dû, principalement, au manque de connaissance de la structure des couches de la surface des parois solides, et par conséquence, de l'interaction effective des molécules du gaz avec les parois (voir, par exemple, C. Cerciguani [15]).

D'un point de vu mathématique, l'interaction gaz/surface détermine les conditions aux limites $(3.1.2)$ qui complètent l'équation $(3.1.1)$. Ces conditions aux limites prennent la forme d'un opérateur frontière reliant les flux rentrant et sortant.

L'objectif de ce chapitre est de compléter l'analyse effectuée dans les travaux K. Latrach [35],[37], K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] et K. Latrach et A. Zeghal [43], où plusieurs résultats d'existence pour les problèmes aux limites $(3.1.1)$ et $(3.1.2)$ ont été obtenus dans les espaces L^1 avec V borné, qui est une hypothèse fondamentale dans ces articles.

Plus précisément, nous nous plaçons dans le cas où *l'espace des vitesses est non-borné*, ce qui constitue visiblement une nouveauté. Cette situation introduit des difficultés mathématiques supplémentaires.
En effet, notre problème (3.1.1) et (3.1.2) sera transformé au problème de point fixe suivant

$$A\psi + B\psi = \psi$$

où A et B sont des opérateurs non-linéaires.

Notons que dans *le cas mono-dimensionnelle et V est bornée*, l'opérateur A n'est pas compact, mais, il est seulement faiblement compact. Alors l'approche basée sur le Théorème du point fixe de Krasnoselskii ne s'applique pas. Précisons qu'avant la publication du papier K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] plusieurs auteurs C.S. Barroso [7] et D. O'Regan [48, 49], qui s'intéressent aux équations intervenant en physique mathématique et dans la bio-mathématique établissent des théorèmes de points fixes de type Krasnoselskii pour la topologie faible, où l'opérateur A est supposé faiblement continu (où séquentiellement faiblement continu) et faiblement compact. Ces résultats ne peuvent pas être appliqués à la résolution du problème puisque A n'est pas faiblement continu. Pour cela, les auteurs Latrach, Taoudi et Zeghal [40] ont établis une nouvelle version du Théorème de point fixe de Krasnoselskii impliquant la somme d'un opérateur continu, faiblement compact et une contraction.

Dans le travail K. Latrach et A. Zeghal [43], le problème est considéré dans *l'espace* L^1 *avec* V *est un borné de* $\mathbb{R}^N$. Malheureusement, l'application B est une contraction, mais A n'est ni compact ni faiblement compact et donc l'approche utilisée dans K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] ne s'applique pas. Cependant, une étude de l'opérateur A montre qu'il peut s'écrire sous forme d'une composition de deux opérateurs, le premier est un opérateur non-linéaire continu qui envoie les ensembles relativement faiblement compacts dans les ensembles relativement faiblement compacts, tandis que le second est un opérateur linéaire continu de Dunford-Pettis. Cette observation avec les Théorèmes 3.2.1 et $1.2.3$ permettent de résoudre le problème $(3.1.5)$-$(3.1.2)$. Cette étude utilise un résultat dû à M. Mokhtar-Kharroubi [47], qui se base sur le fait que V *est borné*.

Pour surmonter cette difficulté dans notre cas où V *n'est pas borné*, en décomposant l'espace L^1 et en approchant l'opérateur A par des opérateurs de Dunford-Pettis, qui est une classe fermée, nous montrons que ce dernier est un opérateur de Dunford-Pettis. Nous achevons notre étude par l'introduction d'une mesure de non-faible compacité adaptée à notre problème, et l'utilisation d'un Théorème du point fixe récent intervenant des opérateurs faiblement compacts dans des espaces de Banach non-réflexifs.

Pour conclûre cette introduction, nous nous donnons brièvement le contenu de ce chapitre. Nous commençons avec une partie préliminaire (Section 2) où nous fixons les différentes notations et nous introduisons les espaces fonctionnels. Ainsi, nous définissons l'opérateur d'advection et nous présentons quelques résultats préliminaires requis dans la suite. Les résultats d'existence du problème $(3.1.1)$-$(3.1.2)$ est le sujet de la section 3. Nous considérons d'abord le cas où $\sigma(x, v, \psi(x, v))$ est un opérateur de multiplication, c'est-à-dire, $\sigma(x,v,\psi(x,v)) = \sigma(x,v)\,\psi(x,v)$. Dans ces conditions, nous établissons l'existence des solutions du problème $(3.1.1)$-$(3.1.2)$, pour une large classe de fonctions $f(.,.,.)$ et de noyaux de diffusion $\kappa(.,.,.)$ (théorème 3.3.1). La preuve repose sur le lemme 3.3.2 et le théorème 3.2.1 (une nouvelle version du théorème de Darbo pour la mesure de non-faible compacité).

Nous notons aussi, sous des conditions suffisantes, l'existence des solutions positives non triviales (corollaire 3.3.2). Le problème aux limites général (1.1)-(1.2) (i.e. $\sigma(.,.,.)$ est une fonction non-linéaire de $\psi(.,.)$) est discuté dans le théorème 3.3.2.

Nous transformons d'abord notre problème en une équation de point fixe intervenant deux opérateurs qui dépendent du paramètre λ, i.e., $\psi = \widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)\psi + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)\psi$.

La preuve du théorème 3.3.2 consiste à montrer que les opérateurs $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ vérifient les conditions du théorème $1.2.3$.

3.2 Notations et résultats Préliminaires

Le but de cette section est de présenter les différentes notations et certains résultats préliminaires dont nous avons besoin par la suite.

3.2.1 Cadre fonctionnel du problème et formulation abstraite de la résolvante

Soient D un sous-ensemble ouvert, borné et assez régulier de $\mathbb{R}^N$ et μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\mu(\{0\}) = 0$. Nous notons par V le support de μ, V étant l'espace des vitesses.
Pour $(x,v) \in \overline{D} \times \overline{V}$, on pose

$$t^{\pm}(x,v) = \sup\{t > 0,\ x \pm sv \in D,\ 0 < s < t\}.$$

Nous désignons par :

$$\Gamma_\pm = \{(x,v) \in \partial D \times V,\ \pm v.n(x) \geq 0\}$$

où $n(x)$ est la normale sortante unitaire en $x \in \partial D$.

Alors, pour $(x,v) \in \Gamma_\pm$, nous avons $t^\pm(x,v) = 0$, $t^\mp(x,v) > 0$, et $x \mp t^\mp(x,v)v \in \Gamma_\mp$.

Comme indiqué dans l'introduction, tout au long de ce chapitre, on suppose que $\mathbb{R}^N$ est le support de la mesure μ, i.e. $V = \mathbb{R}^N$.

Nous introduisons les espaces fonctionnels suivants

$$W = \Big\{\psi \in \mathsf{X} \text{ tel que } v.\nabla_x\psi \in \mathsf{X}\Big\}$$

où

$$\mathsf{X} := L^1(D \times \mathbb{R}^N;\ dxd\mu(v)).$$

L'espace L_1 approprié pour les traces est défini comme suit

$$L^{1,\pm} := L^1(\Gamma_\pm;\ |v.n(x)|d\gamma_x d\mu(v)),$$

$d\gamma_x$ étant la mesure de Lebesgue sur ∂D.

Nous pouvons définir les traces $\psi_{|\Gamma_\pm}$ sur $\Gamma_\pm$ pour $\psi \in W$. En général, ces traces n'appartiennent pas à $L^{1,\pm}$. Les traces sont seulement dans $L^{1,\pm}_{\text{loc}}$, ou plus précisément dans un espace L^1 avec poids (voir M. Cessenat [16, 17], R. Dautray et J.J. Lions [19] et W. Greenberg et al [30])

$$L^1_{\widehat{t}}(\Gamma_\pm) := L^1\left(\Gamma_\pm; \widehat{t}(x,v)|v.n(x)|d\gamma_x d\mu(v)\right),$$

où

$$\widehat{t}(x,v) = \min(t^-(x,v), 1).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\Gamma_+} |f_+(x,v)|\,|\widehat{t}(x,v)|\,|v.n(x)|d\gamma_x d\mu(v) + \int_{\Gamma_-} |f_-(x,v)|\,|\widehat{t}(x,v)|\,|v.n(x)|d\gamma_x d\mu(v)$$
$$\leq C\left(\|f\|_{L^1(D\times\mathbb{R}^N)} + \left\|v\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^1(D\times\mathbb{R}^N)}\right), \forall f \in W.$$

Nous définissons

$$\widetilde{W} = \left\{\psi \in W,\ \psi_{|\Gamma-} \in L^{1,-}\right\} \subseteq W.$$

Nous avons l'identité suivante

$$\widetilde{W} = \{\psi \in W,\ \psi_{|\Gamma-} \in L^{1,-}\} = \{\psi \in W,\ \psi_{|\Gamma+} \in L^{1,+}\}.$$

Soit H l'opérateur aux limites borné suivant :

$$H\ :\ L^{1,+} \to L^{1,-}, \quad H \in \mathcal{L}(L^{1,+}, L^{1,-}).$$

L'opérateur d'advection T_H est défini par

$$\begin{cases} T_H\psi(x,v) = -v.\nabla_x\psi(x,v) - \sigma(x,v)\psi(x,v) \\ D(T_H) = \left\{\psi \in \widetilde{W} \text{ tel que } \psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+})\right\}, \end{cases}$$

où la fréquence de collision est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$

$$\sigma(.,.) \in L^\infty(D \times \mathbb{R}^N).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, nous considérons le problème aux limites suivant (Formulation abstraite de la résolvante)

$$\begin{cases} \lambda\psi(x,v) + v.\nabla_x\psi(x,v) + \sigma(x,v)\psi(x,v) = \phi(x,v) \\ \psi_{|\Gamma_-} = H(\psi_{|\Gamma_+}) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où ϕ est une fonction dans X, et la fonction inconnue ψ doit être cherchée dans $D(T_H)$.

Soit λ^* le réel défini par

$$\lambda^* := \lim_{t\to\infty} \inf_{\{(x,v)\in D\times V;\ t\leq\tau(x,v)\}} \frac{1}{t}\int_0^t \sigma(x-sv,v)ds.$$

Il est à noter, d'après J. Voigt [53, Théorème 1.1] (voir aussi [54]), que le réel λ^* est la borne spectrale de l'opérateur T_H. Ainsi, pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -\lambda^*$, la solution de l'équation $(3.2.1)$ est donnée formellement par

$$\begin{aligned}\psi(x,v) \quad &= \quad \psi(x-t^-(x,v)v,v)e^{-\int_0^{t^-(x,v)}(\lambda+\sigma(x-sv,v))ds} \\ &\qquad + \int_0^{t^-(x,v)} e^{-\int_0^s(\lambda+\sigma(x-\tau v,v))d\tau}\phi(x-sv,v)ds.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

De plus, pour $(x,v)\in\Gamma_+$, l'équation (3.2.2) devient

$$\begin{aligned}\psi^+(x,v) \quad &= \quad \psi^-(x,v)e^{-\int_0^{\tau(x,v)}(\lambda+\sigma(x-sv,v))ds} \\ &\qquad + \int_0^{\tau(x,v)} e^{-\int_0^s(\lambda+\sigma(x-\tau v,v))d\tau}\phi(x-sv,v)ds,\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où $\tau(x,v) = t^+(x,v)+t^-(x,v)$, $\psi^+ = \psi_{|\Gamma+}$ et $\psi^- = \psi_{|\Gamma-}$.

Pour donner la formulation abstraite de (3.2.2), nous définissons les opérateurs suivants qui dépendent du paramètre λ

$$M_\lambda : L_1^- \longrightarrow L_1^+,\quad u\to M_\lambda u := u\, e^{-\displaystyle\int_0^{\tau(x,v)}(\lambda+\sigma(x-sv,v))ds};$$

$$B_\lambda : L_1^- \longrightarrow \mathsf{X},\quad u\to B_\lambda u := u e^{-\displaystyle\int_0^{t^-(x,v)}(\lambda+\sigma(x-sv,v))ds};$$

$$\begin{cases} G_\lambda : \mathsf{X}\longrightarrow L_1^+, \\ \phi\to G_\lambda\phi = \displaystyle\int_0^{\tau(x,v)} e^{-\int_0^s(\lambda+\sigma(x-\tau v,v))d\tau}\phi(x-sv,v)ds; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} C_\lambda : \mathsf{X}\longrightarrow \mathsf{X}, \\ \phi\to C_\lambda\phi = \displaystyle\int_0^{t^-(x,v)} e^{-\int_0^s(\lambda+\sigma(x-\tau v,v))d\tau}\phi(x-sv,v)ds. \end{cases}$$

Des calculs simples montrent que ces opérateurs sont bornés sur leurs espaces respectifs. En effet, nous montrons que les normes de B_λ et C_λ sont majorées par $(\mathrm{Re}(\lambda)+\lambda^*)^{-1}$.

De plus, les normes des opérateurs $M_\lambda u = [B_\lambda u]_{|\Gamma_+}$ et $G_\lambda \phi = [C_\lambda \phi]_{|\Gamma_+}$ sont majorées par 1.

Remarque 3.2.1. Pour $\lambda > -\lambda^*$, les opérateurs bornés M_λ, B_λ, G_λ et C_λ sont positifs (dans le sens des espaces de Banach réticulés). □

En utilisant ces opérateurs, et le fait que ψ doit satisfaire les conditions aux limites, l'équation. $(3.2.3)$ devient

$$\psi^+ = M_\lambda H \psi^+ + G_\lambda \phi.$$

La solution de cette équation se réduit à inverser $\mathcal{P}_\lambda := I - M_\lambda H$. Donc, si $\{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1}$ existe (en particulier si $\|M_\lambda H\| < 1$), alors

$$\psi^+ = \{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1} G_\lambda \phi. \tag{3.2.4}$$

D'autre part, l'équation (3.2.2) s'écrit sous la forme

$$\psi = B_\lambda H \psi^+ + C_\lambda \phi.$$

Substituons (3.2.4) dans l'équation précédente nous obtenons

$$\psi = B_\lambda H \{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1} G_\lambda \phi + C_\lambda \phi.$$

Ainsi

$$(\lambda - T_H)^{-1} = B_\lambda H \{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1} G_\lambda + C_\lambda. \tag{3.2.5}$$

Lemme 3.2.1. *Soit $\|H\| < 1$. Alors pour tout λ tel que Re$(\lambda) > -\lambda^*$, nous avons*

$$\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re(\lambda) + \lambda^*}. \tag{3.2.6}$$

Preuve. Selon le Lemme 2.2 et la remarque 2.2 dans K. Latrach [37], si $\|H\| < 1$, alors pour tout λ qui satisfait Re$(\lambda) > -\lambda^*$, on obtient le résultat désiré. □

3.2.2 Opérateurs de collision réguliers

Définition 3.2.1. *Nous disons que K est un opérateur de collision régulier sur* X *si, pour presque tout $x \in D$, l'opérateur*

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}^N; d\mu(v)) \to \int_{\mathbb{R}^N} \kappa(x,v,v')\phi(v')d\mu(v') \in L^1(\mathbb{R}^N; d\mu(v))$$

est faiblement compact sur $L^1(\mathbb{R}^N; d\mu(v))$ et la famille de ces opérateurs sur $L^1(\mathbb{R}^N; d\mu(v))$ indexée par $x \in D$, est collectivement faiblement compacte.

Remarque 3.2.2. Evidemment, le Théorème 1.1.1 ou 1.1.2 montre que si K est un opérateur de collision régulier, alors $|K|$ l'est aussi où $|K|$ est défini sur X par

$$\phi \to (|K|\phi)(x,v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\kappa(x,v,v')|\phi(v')d\mu(v').$$

□

Nous rappelons ici la caractérisation suivante concernant les opérateurs de collision réguliers et positifs.

Lemme 3.2.2. (B. Lods [45]) *Soit $K \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$ un opérateur de collision régulier et positif. Alors, il existe une suite $(K_n)_n$ de $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ telle que*

1. $0 \le K_n \le K$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$;
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, K_n *est dominé par un opérateur de rang un sur* $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N; d\mu(v)))$;
3. $\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0$.

L'item (2) du Lemme signifie que chaque opérateur K_n est dominé par un opérateur sur X qui agit comme suit

$$\phi \in X \to f_n(v) \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x,v')d\mu(v') \tag{3.2.7}$$

où f_n est une fonction positive bornée sur V et à support compact.

3.2.3 Une mesure de non-faible compacité

D'une façon analogue au chapitre 2, nous définissons la fonction $\gamma : \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to [0, \infty)$ par

$$\gamma(M) = \gamma_1(M) + \gamma_2(M)$$

où

$$\gamma_1(M) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left[\int \int_E |\psi(x,v)| dx d\mu(v), \ |E| \leq \varepsilon \right] \right\} \tag{3.2.8}$$

$$\gamma_2(M) = \lim_{m \to +\infty} \left\{ \sup_{\psi \in M} \left[\int_D \int_{|v| \geq m} |\psi(x,v)| dx d\mu(v) \right] \right\}, \tag{3.2.9}$$

où $|E|$ est la mesure de E et $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ est l'ensemble non vide de parties bornées de X.

Nous montrons, maintenant, que $\gamma(.)$ est une mesure de non-faible compacité sur X.

Lemme 3.2.3. *Soient M, M_1 et M_2 trois éléments de $\mathcal{B}(\mathsf{X})$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées*

(1) *Si $M_1 \subseteq M_2$, alors $\gamma(M_1) \leq \gamma(M_2)$;*

(2) $\gamma(M_1 \cup M_2) = \max\{\gamma(M_1), \gamma(M_2)\}$ *;*

(3) $\gamma(\lambda M) = |\lambda| \omega(M)$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(4) $\gamma(M_1 + M_2) \leq \gamma(M_1) + \gamma(M_2)$ *;*

(5) $\gamma(M) = 0$ *si, et seulement si, $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(X)$, où $\overline{M}^w \in \mathcal{W}(X)$ est la fermeture faible de M ;*

(6) $\gamma(co(M)) = \gamma(M)$ *;*

(7) $\gamma(\overline{M}^w) = \gamma(M)$ *;*

(8) *Si $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de parties non-vides et faiblement fermées de $\mathcal{B}(X)$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n(M_n) = 0$, alors $\bigcap_{n \geq 1} M_n$ est non-vide et elle est relativement faiblement compacte.*

Preuve. Les assertions (1), (2), (3) et (4) sont immédiates.

5) Le faite que $\gamma(M) = 0$ implique $\overline{M}^w \in \mathcal{W}$ est une conséquence du Théorème 1.1.2. Supposons que $\overline{M}^w \in \mathcal{W}$. Il résulte du Théorème 1.1.2 (1) que $\gamma_1(M) = 0$. Montrons que $\gamma_2(M) = 0$.
Soit $E_n = D \times \{|v| \geq T_n\}$ où $(T_n)_n$ est une suite croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Il est clair que $(E_n)_n$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\geq 0} E_n = \emptyset$. Il résulte du Théorème 1.1.1 que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\psi\in M} \int_D \int_{\{|v|\geq T_n\}} |\psi(\mu, v)| d\mu dv = 0,$$

et par conséquence $\gamma_2(M) = 0$.

6) Puisque $M \subset \mathrm{co}(M)$, en utilisant 1) nous obtenons $\gamma(M) \leq \gamma(\mathrm{co}(M))$. Pour prouver l'inégalité inverse, soit A une partie mesurable quelconque de $D \times \mathbb{R}^N$ telle que $\mu(A) < \varepsilon$. Pour $\psi \in co(M)$, il existe une famille de réels $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $a_i \geq 0$ et une famille de fonctions $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\phi_i \in M$ telles que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ et $\psi = \sum_{i=1}^n a_i\phi_i$.
Nous avons

$$\begin{aligned}\int_A |\psi(x, v)| dx d\mu(v) &\leq \sum_{i=1}^n a_i \int_A |\phi_i(x, v)| dx d\mu(v) \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i \sup_{1\leq i\leq n} \int_A |\phi_i(x, v)| dx d\mu(v) \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} \int_A |\phi_i(x, v)| dx d\mu(v) \leq \sup_{\phi\in M} \int_A |\phi(x, v)| dx d\mu(v).\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\psi\in co(M)} \int_A |\psi(x, v)| dx d\mu(v) \leq \sup_{\phi\in M} \int_A |\phi(x, v)| dx d\mu(v).$$

Ce qui montre que $\gamma_1(co(M)) \leq \gamma_1(M)$.
Notons que, pour tout $T > 0$, des calculs similaires montrent que

$$\sup_{\psi\in co(M)} \int_D \int_{|v|>T} |\psi(x, v)| dx d\mu(v) \leq \sup_{\phi\in M} \int_D \int_{|v|>T} |\phi(x, v)| dx d\mu(v).$$

Par passage à la limite quand T tend vers $+\infty$, nous obtenons $\gamma_2(co(M)) \leq \gamma_2(M)$.

Alors,

$$\gamma(co(M)) \leq \gamma(M).$$

7) Nous observons d'abord que l'inclusion $M \subset \overline{M}^w$ et (1) entrainent que $\gamma(M) \leq \gamma(\overline{M}^w)$.

Inversement, en utilisant (1), l'inclusion $M \subset \overline{M}^w \subset \overline{co}(M)$ entraine que $\gamma(\overline{M}^w) \leq \gamma(\overline{co}(M))$. Donc, il reste à montrer que $\gamma(M) = \gamma(\overline{M})$ ($\overline{M}$ est la fermeture forte de M). De (1) nous avons déjà l'inégalité $\gamma(M) \leq \gamma(\overline{M})$. En suite, pour $\psi \in \overline{M}$, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans M telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n = \psi$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble A de $D \times \mathbb{R}^N$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_A |\psi(x,v)|dxd\mu(v) &\leq \int_A |\psi(x,v) - \psi_n(x,v)|dxd\mu(v) + \int_A |\psi_n(x,v)|dxd\mu(v)\\ &\leq \|\psi - \psi_n\|_{\mathsf{X}} + \gamma_1(M).\end{aligned}$$

Puisque, pour n assez grand, $\|\psi - \psi_n\|_{\mathsf{X}}$ est assez petit, nous concluons que $\gamma_1(\overline{M}) \leq \gamma_1(M)$.
De la même façon, nous montrons que $\gamma_2(\overline{M}) \leq \gamma_2(M)$ et donc $\gamma(\overline{M}) = \gamma(M)$.
D'autre part, l'utilisation de (6) montre que $\gamma(\overline{co}(M)) = \gamma(co(M)) = \gamma(M)$, et par conséquence

$$\gamma(M) \leq \gamma(\overline{M}^w) \leq \gamma(M).$$

Nous avons ainsi montré (7).

(8) Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles non-vides et faiblement fermés de $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega(M_n) = 0$. Soit $(\psi_n)_n$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in M_n$. On pose $\widetilde{M_n} := \{\psi_k \ : \ k \geq n\}$. Il est clair que $(\widetilde{M_n})_n$ est une suite décroissante d'ensembles non-vides. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{M_n} \subset M_n$ et $\widetilde{M_1} \backslash \widetilde{M_n}$ est un ensemble fini, nous avons

$$\gamma(\widetilde{M_1}) = \gamma(\widetilde{M_n}) \leq \gamma(M_n).$$

Alors $\gamma(\widetilde{M_1}) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma(M_n) = 0$, et donc $\widetilde{M_1}$ est relativement faiblement compact. Par conséquence, $(\psi_n)_n$ converge faiblement vers la fonction ψ, et $\psi \in \bigcap\limits_{n\geq 0} M_n$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est faiblement fermé. Ce qui achève la preuve. $\square$

3.2.4 Un théorème de point fixe de type Darbo

On commence ce paragraphe par définir une γ-contraction, où γ est une mesure de non-faible compacité.

Définition 3.2.2. *Soit X un espace de Banach. Nous disons que l'application $f : M \subseteq X \to X$ est une γ-contraction si elle laisse invariant $\mathcal{B}(M)$ l'ensemble des parties bornées de M, et il existe une constante $\beta \in [0, 1)$ telle que $\gamma(f(V)) \leq \beta\gamma(V)$ pour tout ensemble borné $V \subseteq M$.*

Soit J un opérateur non-linéaire qui agit de X dans lui même. Dans ce qui suit, nous allons utiliser les deux conditions suivantes :

$$(\mathcal{A}1) \quad \begin{cases} \text{Si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans X, alors} \\ (Jx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une sous-suite qui converge fortement dans X.} \end{cases}$$

$$(\mathcal{A}2) \quad \begin{cases} \text{Si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans X, alors} \\ (Jx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une sous-suite qui converge faiblement dans X.} \end{cases}$$

Remarque 3.2.3. 1) Notons d'abord que l'hypothèse $(\mathcal{A}1)$ n'assure pas la compacité de J même s'il est linéaire. Nous savons qu'une application linéaire compacte d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y envoie les suites faiblement convergentes dans des suites convergentes en norme. La réciproque est vraie si X est réflexif. Si X n'est pas réflexif, cette réciproque n'est pas vraie même si Y est réflexif. En effet, soit J l'injection de l_1 dans l_2. Il est clair que J n'est pas compacte. Cependant, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de

l_1 qui converge faiblement vers x, alors d'après N. Dunford et J.T. Schwartz [26, Corollaire 14, p. 296], $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x en norme dans l_1. En utilisant la continuité de J, nous remarquons que $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers Jx dans l_2.

2) La condition $(\mathcal{A}1)$ est vraie pour la classe des opérateurs linéaires faiblement compacts agissant sur des espaces de Banach possédant la propriété Dunford-Pettis (voir Chapitre 1). En effet, si X est un espace de Banach qui a la propriété de Dunford-Pettis, alors tout opérateur faiblement compact d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y envoie les suites faiblement convergentes de X dans des suites convergentes en norme dans Y.

3) On rappelle aussi (voir chapitre 1) que les opérateurs de Nemytskii ne sont pas, en général, faiblement continus. Ainsi, les opérateurs qui vérifient $(\mathcal{A}1)$ ou $(\mathcal{A}2)$ ne sont pas nécessairement faiblement continus.

4) Tout application γ-contraction vérifie $(\mathcal{A}2)$.

5) La condition $(\mathcal{A}2)$ est vraie pour tout opérateur linéaire borné L et, pour tout $M \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$, nous avons

$$\gamma(L(M)) \leq \|L\|\gamma(M).$$

$\square$

Nous terminons ce paragraphe en rappelant une nouvelle version du Théorème de point fixe de Darbo pour une mesure de non-faible compacité.

Théorème 3.2.1. [40, K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal] *Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble non-vide, fermé, borné, et convexe d'un espace de Banach X. Supposons que $\mathbf{A} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est une application continue qui vérifie $(\mathcal{A}1)$.*

Si $\mathbf{A}$ est une γ-contraction, alors il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que $\mathbf{A}x = x$.

3.3 Les résultats d'existence

Le but de cette section est d'appliquer les théorèmes 3.2.1 et 1.2.3 pour discuter les résultats d'existence pour les problèmes aux limites $(3.1.1)-(3.1.2)$ dans les espaces L_1 avec V *non-borné*.

3.3.1 Le cas où $\sigma(.,.)$ est un opérateur de multiplication

Nous considérons d'abord le cas où $\sigma(x,v,\psi(x,v))$ est un opérateur de multiplication, i.e.

$$\sigma(x,v,\psi(x,v)) := \sigma(x,v)\,\psi(x,v)$$

où $\sigma(\cdot,\cdot) \in L^\infty(D\times\mathbb{R}^N; dxd\mu(v))$. En outre, nous supposons que

$(\mathcal{A}3)$ $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ est une fonction de Carathéodory et $\mathcal{N}_f$ agit de X dans lui même.

Lemme 3.3.1. *Supposons que l'hypothèse* $(\mathcal{A}3)$ *est vérifiée, alors* $\mathcal{N}_f$ *satisfait* $(\mathcal{A}2)$.

Preuve. Soient $M \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ et f une fonction qui vérifie $(\mathcal{A}3)$, alors d'après le théorème 1.3.1, il existe une constante $\eta > 0$ et une fonction $h(.) \in \mathsf{X}^+$ (le cône positif de X) telles que

$$|f(x,v,\psi)| \le h(x,v) + \eta|\psi|,$$

pour tout $\psi \in M$. Par conséquence,

$$\int_E |(\mathcal{N}_f\psi)(x,v)|dxd\mu(v) \le \int_E h(x,v)dxd\mu(v) + \eta\int_E |\psi(x,v)|dxd\mu(v),$$

pour tout sous-ensemble mesurable E de $D\times\mathbb{R}^N$.

D'après (3.2.8), nous obtenons grâce au théorème 1.1.2

$$\gamma_1(\mathcal{N}_f(M)) \le \eta\,\gamma_1(M). \tag{3.3.1}$$

Soit m un réel positif. Pour tout $\psi \in M$, nous avons

$$\int_D \int_{|v|\geq m} |(\mathcal{N}_f\psi)(x,v)|dxd\mu(v) \leq \int_D \int_{|v|\geq m} h(x,v)dxd\mu(v) + \eta \int_D \int_{|v|\geq m} |\psi(x,v)|dxd\mu(v).$$

Ce qui entraine, d'après $(3.2.9)$ et le théorème $1.1.2$, que

$$\gamma_2(\mathcal{N}_f(M)) \leq \eta\, \gamma_2(M). \tag{3.3.2}$$

D'après $(3.3.1)$ et $(3.3.2)$, nous avons

$$\gamma(\mathcal{N}_f(M)) \leq \eta\, \gamma(M). \tag{3.3.3}$$

Maintenant, selon l'item (5) du lemme 3.2.3 et le théorème $1.1.5$, nous concluons que $\mathcal{N}_f$ satisfait $(\mathcal{A}2)$. $\square$

Remarque 3.3.1. Soit λ un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > -\lambda^*$. Nous remarquons que l'opérateur C_λ n'est rien d'autre que la résolvante de l'opérateur T_0 (l'opérateur d'advection avec les conditions aux limites rentrantes nulles) que nous noterons par T. Alors $C_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$. Donc si $H \neq 0$ et $\|H\| < 1$, il résulte de (3.2.5) que la résolvante de T_H est une perturbation de $(\lambda - T)^{-1}$, i.e.

$$(\lambda - T_H)^{-1} = B_\lambda H \left\{\mathcal{P}_\lambda\right\}^{-1} G_\lambda + (\lambda - T)^{-1}.$$

$\square$

Dans la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes

$(\mathcal{A}4)$ pour tout $e \in S^{N-1}$, $\mu\Big\{v \in \mathbb{R}^N,\ v \cdot e = 0\Big\} = 0$, où S^{N-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

Cette hypothèse signifie que les hyperplans de $\mathbb{R}^N$ (à travers l'origine) sont de mesure μ-nulle.

$(\mathcal{A}5)$ H est faiblement compact et satisfait $\|H\| < 1$.

Remarque 3.3.2. 1) L'hypothèse $\|H\| < 1$ dans $(\mathcal{A}5)$ est utilisée pour assurer l'existence de l'inverse de $\mathcal{P}_\lambda = I - M_\lambda H$. Mais, comme il est indiqué dans Latrach et Zeghal [43, Remark 2.2], cette hypothèse n'est pas nécessaire, et elle peut être remplacée par une puissance de $M_\lambda H$ est compacte.
2) Notons que l'opérateur $K(\lambda - T)^{-1}$ n'est pas faiblement compact sur X même pour un opérateur de collision régulier et V est borné (voir Golse et al [29, p. 123]). La faible compacité de $(\lambda - T)^{-1}K$ sur X est un problème ouvert (voir M. Mokhtar-Kharroubi [46, Chapitre 4]), donc l'approche utilisée dans K. Latrach, M.A. Taoudi et A. Zeghal [40] ne permet pas de résoudre le problème $(3.1.1) - (3.1.2)$.

Cependant, par l'adaptation de la preuve de F. Glose et al [29, Proposition 3] (voir aussi M. Mokhtar Kharroubi [47, Proposition 1]) nous montrons le résultat suivant qui jouera un rôle majeur dans la démonstration des résultats principaux de ce chapitre.

Lemme 3.3.2. *Soit K un opérateur de collision régulier dans* X *ayant un noyau positif. Si l'hypothèse $(\mathcal{A}4)$ est vérifiée, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que Re$(\lambda) > -\lambda^*$, l'image d'un faiblement compact de* X *par $(\lambda - T)^{-1}K$ est un compact de* X *(i.e. $(\lambda - T)^{-1}K$ est un opérateur de Dunford-Pettis).*
Si de plus, la condition $(\mathcal{A}5)$ est vérifiée, alors l'image d'un faiblement compact de X *par $(\lambda - T_H)^{-1}K$ est un compact de* X *(i.e. $(\lambda - T_H)^{-1}K$ est un opérateur de Dunford-Pettis).*

Preuve. Montrons que $(\lambda - T)^{-1}K$ est un opérateur de Dunford-Pettis.

Soit $\mathcal{O}$ une partie faiblement compacte de X.

Pour $m > 0$ et $\psi \in \mathcal{O}$, on pose

$$\psi_m^1 = \psi\chi_{(|\psi|<m)} \quad \text{et} \quad \psi_m^2 = \psi\chi_{(|\psi|\geq m)}.$$

Clairement, nous avons

$$\lim_{m\to+\infty} \|(\lambda - T)^{-1}K\psi - (\lambda - T)^{-1}K\psi_m^1\| = \lim_{m\to+\infty} \|(\lambda - T)^{-1}K\psi_m^2\|.$$

Puisque

$$\|(\lambda - T)^{-1}K\psi_m^2\| \leq \|(\lambda - T)^{-1}K\| \int_D dx \int_{|v'|\geq m} |\psi(x, v')|dv',$$

nous obtenons grâce au théorème 1.1.2 que

$$\lim_{m\to+\infty} \|(\lambda - T)^{-1}K\psi - (\lambda - T)^{-1}KE_m\psi\| = 0,$$

uniformément pour tout $\psi \in \mathcal{O}$, où

$$E_m : \psi \in \mathsf{X} \longmapsto \psi\chi_{\{v\in\mathbb{R}^N \text{ tel que } |v|<m\}}.$$

Sachant que la classe des opérateurs faiblement compacts est fermée, il suffit de montrer que $(\lambda - T)^{-1}KE_m$ est un opérateur de Dunford-Pettit sur X.

Maintenant, puisque E_m envoie continûment X dans $L^1(D \times V_m)$, où $V_m = \{v \in \mathbb{R}^N, |v| < m\}$, il suffit de montrer que $(\lambda - T)^{-1}K$ est un opérateur de Dunford-Pettis sur $L^1(D \times V)$, où V est un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ avec $\mu(V) < +\infty$. Ceci est montré dans K. Latrach et A. Zeghal [43, Lemme 2.3]. Ainsi, nous avons montré que $(\lambda - T)^{-1}K$ est un opérateur de Dunford-Pettis.

Supposons maintenant que $(\mathcal{A}5)$ est vérifiée. Puisque

$$(\lambda - T_H)^{-1}K = B_\lambda H \{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1} G_\lambda K + (\lambda - T)^{-1}K,$$

il suffit de montrer que $B_\lambda H \{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1} G_\lambda K$ est un opérateur de Dunford-Pettis. Ceci est une conséquence de la Proposition 1.1.1, puisque H est faiblement compact, les opérateurs B_λ, $\{\mathcal{P}_\lambda\}^{-1}$, G_λ et K sont linéaires et X possède la propriété de Dunford-Pettis (voir théorème 1.1.4). □

Pour $r > 0$, nous notons par B_r l'ensemble

$$B_r := \{\psi \in \mathsf{X} \,:\, \|\psi\| \leq r\}.$$

Maintenant, nous pouvons montrer notre premier résultat d'existence.

Théorème 3.3.1. *Soit K un opérateur de collision régulier sur X ayant un noyau positif. Supposons que les hypothèses $(\mathcal{A}3)$, $(\mathcal{A}4)$ et $(\mathcal{A}5)$ sont vérifiées. Alors, pour tout $r > 0$, il existe λ_r tel que, pour tout λ complexe qui vérifie $Re(\lambda) > \lambda_r$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} \lambda\, \psi(x,v) + v.\nabla_x \psi(x,v) + \sigma(x,v)\psi(x,v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \kappa(x,v,v')f(x,v',\psi(x,v'))dv', \\ \psi^- = H(\psi^+) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

admet au moins une solution dans B_r.

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > -\lambda^*$ et $r > 0$. Il est clair que $\lambda \in \rho(T_H)$ (l'ensemble résolvante de T_H) et le problème $(3.3.4)$ s'écrit sous la forme :

$$\psi = \mathbf{A}(\lambda)\psi, \quad \psi^- = H(\psi^+)$$

où $\mathbf{A}(\lambda) = (\lambda - T_H)^{-1}K\mathcal{N}_f$.

Il résulte des hypothèses précédentes que $\mathbf{A}(\lambda)$ est continu. Puisque que $\mathcal{N}_f$ laisse invariant les ensembles bornés, nous notons par $\mathcal{M}_r$ la borne supérieure de $\mathcal{N}_f$ dans B_r. Soit $\psi \in B_r$. En utilisant l'estimation $(3.2.6)$ et le fait que K est un opérateur linéaire borné, nous obtenons

$$\|\mathbf{A}(\lambda)\psi\| \leq \frac{\|K\|\,\mathcal{M}_r}{\mathrm{Re}(\lambda) + \lambda^*}.$$

Soit

$$\lambda_1 := \frac{\|K\|\mathcal{M}_r}{r} - \lambda^*.$$

Il est évident que le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(\lambda) \geq \lambda_1\}$ est contenu dans l'ensemble résolvant de T_H et, pour tout λ appartenant à ce demi-plan, $\mathbf{A}(\lambda)$ envoie B_r dans lui-même.

L'opérateur $\mathbf{A}(\lambda)$ est une γ-contraction.

En effet, en utilisant l'équation (3.3.3), (Item 5) de la remarque 3.2.3 et l'estimation (3.2.6) nous obtenons, pour tout $M \subset B_r$,

$$\gamma(\mathbf{A}(\lambda)M) \leq \frac{\eta\|K\|}{\mathrm{Re}(\lambda) + \lambda^*}\gamma(M),$$

où η et la constante qui figure dans le Théorème 1.3.1.

Soit λ_2 un réel tel que $\alpha := \dfrac{\eta\|K\|}{\lambda_2 + \lambda^*} < 1$. Alors, pour tout λ complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_2$ nous avons $\dfrac{\eta\|K\|}{\mathrm{Re}(\lambda) + \lambda^*} \leq \alpha$.

Posons $\lambda_r = \max(\lambda_1, \lambda_2)$. Il est clair que, pour tout λ complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_r$, $\mathbf{A}(\lambda)$ est une γ-contraction.

L'opérateur $\mathbf{A}(\lambda)$ *satisfait la condition* $(\mathcal{A}1)$.

En effet, soit $(\phi_n)_n$ une suite faiblement convergente dans X. Puisque $\mathcal{N}_f$ satisfait $(\mathcal{A}2)$ (Lemme 3.3.1), alors $(\mathcal{N}_f\phi_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente qu'on note $(\mathcal{N}_f\phi_{n_k})_k$. Soit Φ sa limite faible. Puisque l'ensemble $L_\Phi := \{(\mathcal{N}_f\phi_{n_k}),\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\Phi\}$ est faiblement compact et K est régulier, il résulte du Lemme 3.3.2 que $(\lambda - T_H)^{-1}KL_\Phi$ est une partie compacte de X et par suite $(\mathbf{A}(\lambda)\phi_{n_k})_k$ admet une sous-suite fortement convergente dans X. Ce qui montre que, pour tout complexe λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \lambda_r$, $\mathbf{A}(\lambda)$ vérifie la condition $(\mathcal{A}1)$.

Maintenant le Théorème 3.2.1, achève la démonstration. $\square$

Notons que X est un espace de Banach réticulé, son cône positif sera noté par X^+.

Soit $r > 0$. Nous définissons l'ensemble B_r^+ par :

$$B_r^+ := B_r \cap \mathsf{X}^+.$$

Nous nous intéressons à l'existence des solutions positives pour le problème aux limites (3.3.4). Il est clair que (voir remarque 3.2.1), si $\lambda > -\lambda^*$ et H est positif (au sens réticulé), alors $(\lambda - T_H)^{-1}$ est un opérateur positif sur X.

Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, et si $\mathcal{N}_f(\mathsf{X}^+) \subseteq \mathsf{X}^+$ et K est positif, alors $(\lambda - T_H)^{-1} K \mathcal{N}_f$ laisse le cône positif X^+ invariant.

Raisonnons comme dans la preuve du Théorème 3.3.1 et remplaçons B_r par B_r^+ nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 3.3.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.3.1 sont satisfaites. Si $\mathcal{N}_f(\mathsf{X}^+) \subseteq \mathsf{X}^+$, et K et H sont positifs, alors, pour tout $r > 0$, il existe $\lambda_r > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_r$, le problème (3.3.4) admet au moins une solution dans B_r^+.*

Le résultat suivant assure l'existence des solutions positives non triviales.

Corollaire 3.3.2. *Soit $r > 0$ et supposons que les hypothèses du corollaire 3.3.1 sont satisfaites. De plus, on suppose qu'il existe une constante $\vartheta > 0$ et une fonction $0 \neq \psi_0 \in B_r^+$ telles que*

(i) $\psi_0 \notin$ ker(K) où ker(K) désigne le noyau de K,

(ii) $\mathcal{N}_f \psi \geq \vartheta \psi_0$ pour tout $\psi \in B_r^+$.

Alors il existe $\lambda_r > 0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_r$, il existe $\tau_\lambda > 0$ tel que le problème

$$\begin{cases} \lambda\, \psi(x,v) + v.\nabla_x \psi(x,v) + \sigma(x,v)\psi(x,v) = \tau_\lambda \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \kappa(x,v,v') f(x,v',\psi(x,v'))dv', \\ \psi^- = H(\psi^+) \end{cases}$$

admet au moins une solution $\psi^* \in B_r^+$ qui vérifie $\|\psi^*\| = r$.

La démonstration est similaire à celle de la proposition $2.5.2$ □

3.3.2 Le cas général : Problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2)

Ce paragraphe est consacré à l'existence des solutions pour le problème aux limites général (3.1.1)-(3.1.2). Nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

Pour tout $r > 0$, la fonction $\sigma(.,.,.)$ vérifie

$(\mathcal{A}6)$ $|\sigma(x,v,\psi_1(x,v)) - \sigma(x,v,\psi_2(x,v))| \leq |\rho(x,v)|\,|\psi_1 - \psi_2| \ \ \forall\,\psi_1,\,\psi_2 \in B_r,$

$\sigma(\cdot,\cdot,\cdot)$ est une fonction de Carathéodory et $\mathcal{N}_{-\sigma}$ envoie X dans lui même,

où $\rho(.,.) \in L^\infty(D \times \mathbb{R}^N;\, dx\, d\mu(v))$.

Nous définissons l'opérateur d'advection $\widetilde{T}_H$ par

$$\begin{cases} \widetilde{T}_H : D(\widetilde{T}_H) \subseteq \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X} \\ \qquad\qquad \psi \longrightarrow \widetilde{T}_H\psi(x,v) = -v.\nabla_x\psi(x,v) \\ D(\widetilde{T}_H) = \{\psi \in \widetilde{W} \text{ tel que } \psi^- = H(\psi^+)\}. \end{cases}$$

Observons que $\widetilde{T}_H$ s'obtient à partir de T_H en prenant $\sigma(.,.) \equiv 0$. Il est claire que $\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subseteq \rho(\tilde{T}_H)$ (l'ensemble résolvante de $\tilde{T}_H$) et, pour tout λ complexe, tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, nous avons

$$\|(\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}. \tag{3.3.5}$$

D'autre part, un raisonnement similaire à la preuve du lemme 3.3.2 mène au

Lemme 3.3.3. *Soit K un opérateur de collision régulier dans X ayant un noyau positif. Supposons que $(\mathcal{A}4)$ et $(\mathcal{A}5)$ sont vérifiées. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que Re$(\lambda) > 0$, $(\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}K$ envoie les ensembles faiblement compacts de X dans les ensembles compacts de X.*

Il est évident que, pour tout λ appartenant au demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$, le problème (3.1.1)-(3.1.2) s'écrit sous la forme

$$\psi = \widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)\psi + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)\psi, \quad \psi^- = H(\psi^+),$$

où $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}K\mathcal{N}_f$ et $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda) = (\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}\mathcal{N}_{-\sigma}$. Il est clair que les opérateurs $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ sont continus.

Théorème 3.3.2. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{A}3)$, $(\mathcal{A}4)$, $(\mathcal{A}5)$ et $(\mathcal{A}6)$ sont vérifiées. De plus nous supposons que K est un opérateur de collision régulier X ayant un noyau positif. Alors, pour tout $r > 0$, il existe un réel $\lambda_r > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant Re$(\lambda) > \lambda_r$, le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution dans B_r.*

Preuve. Soit $r > 0$ et choisissons ψ, ϕ dans B_r. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, des calculs simples utilisant les hypothèses $(\mathcal{A}3)$-$(\mathcal{A}6)$ et l'estimation (3.3.5) donnent

$$\|\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)\phi + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)\psi\| \leq \frac{\|K\|\overline{\mathcal{M}}_r + \overline{\mathcal{N}}_r}{\mathrm{Re}(\lambda)},$$

où $\overline{\mathcal{M}}_r$ (resp. $\overline{\mathcal{N}}_r$) désigne la borne supérieure de $\mathcal{N}_f$ (resp. $\mathcal{N}_{-\sigma}$) sur B_r.

Soit λ_1 le réel défini par

$$\lambda_1 := \frac{\|K\|\overline{\mathcal{M}}_r + \overline{\mathcal{N}}_r}{r}.$$

Il est clair que, pour tout λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \lambda_1$, nous avons $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)B_r + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)B_r \subseteq B_r$.

Nous pouvons alors définir $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties non-vides fermées bornées et convexes de X par

$$M_0 = B_r \quad \text{et} \quad M_{n+1} = \overline{co}(\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(M_n) + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)(M_n)).$$

Évidemment, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathbf{B}(\mathsf{X})$. D'autre part, selon le Théorème 1.3.1, il existe une fonction $0 \leq g \in \mathcal{X}^+$ et une constante $\zeta > 0$ telle que

$$|\sigma(x, v, \psi(x, v))| \leq g(x, v) + \zeta|\psi(x, v)|, \text{ pour p.p. } (x, v), \text{ pour tout } \psi \in \mathsf{X}.$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le lemme 3.3.1, les propriétés de $\gamma(\cdot)$ et l'item 5) de la Remarque 3.2.3 nous obtenons

$$\begin{aligned}\gamma(M_{n+1}) &= \gamma(\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(M_n) + \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)(M_n)) \\ &\leq \gamma(\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(M_n)) + \gamma(\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)(M_n)) \\ &\leq \frac{1}{\text{Re}(\lambda)}(\eta\|K\| + \zeta)\gamma(M_n).\end{aligned}$$

Soit λ_2 un réel non nul tel que

$$\beta := \frac{1}{\lambda_2}(\eta\|K\| + \zeta) < 1.$$

Il résulte de la dernière estimation que, pour tout λ complexe tel que Re$(\lambda) \geq \lambda_2$, $\gamma(M_{n+1}) \leq \beta\gamma(M_n)$. Ce qui implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(M_n) \leq \beta^n\gamma(M_0)$ et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(M_n) = 0$. Grâce à l'item 8) du Lemme 3.2.3, nous concluons que $\mathcal{M} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ est un sous-ensemble non vide convexe et faiblement compact de X.

Il est évident que $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathcal{M}) + \widetilde{\mathbf{B}}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Affirmation : *L'opérateur* $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)$ *satisfait la condition* $(\mathcal{A}1)$.

En effet, la preuve est analogue à celle de l'opérateur $\mathbf{A}(\lambda)$ dans la démonstration du théorème 3.3.1, il suffit de remplacer le lemme 3.3.2 par le lemme 3.3.3.

Affirmation : *L'ensemble* $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(\mathcal{M})$ *est compact.*

En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{M}$ est faiblement compact, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite faiblement convergente, notée $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Du fait que $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)$ satisfait $(\mathcal{A}1)$, nous concluons que $(\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite fortement convergente. Ce qui montre la compacité de $\widetilde{\mathbf{A}}(\lambda)(\mathcal{M})$.

Maintenant, notre objectif est de montrer que $\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ *est une contraction.*

En effet, soient $\psi_1,\ \psi_2 \in$ X et λ tels que Re$(\lambda) > 0$. En utilisant $(\mathcal{A}6)$ et l'estimation (3.3.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)(\psi_1) - \widetilde{\mathbf{B}}(\lambda)(\psi_2)\| &= \|(\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_1) - (\lambda - \widetilde{T}_H)^{-1}\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_2)\| \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\|\mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_1) - \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_2)\| \\ &\leq \frac{\|\rho\|_\infty}{\mathrm{Re}(\lambda)}\|\psi_1 - \psi_2\|.\end{aligned}$$

Soit λ_3 un réel non nul tel que $\frac{\|\rho\|_\infty}{\lambda_3} < 1$. Alors, l'opérateur $\widetilde{\mathbf{B}}$ est une contraction, pour tout nombre complexe λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_3$.

Posons maintenant $\lambda_r = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Les étapes ci-dessus montrent que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_r$, les conditions du théorème $1.2.3$ sont satisfaites et par conséquent le problème aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution dans B_r.

$\square$

Bibliographie

Bibliographie

[1] D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Dunford-Pettis operator on Banach lattices*, Transactions of the American Mathematical Society. **274** (1982) 227–238.

[2] D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press. Orlando, New York, San Diego, London, 1985.

[3] J. Appell, *The superposition operator in function spaces - a survey*, Expositiones Mathematicae. **6** (1988) 209–270.

[4] J. Appell, E. De Pascale, *Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. **B(6) 3** (1984) 497–515.

[5] J. Appell, P. P. Zabreiko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[6] J. Banas, Z. Knap, *Measure of weak noncompactness and nonlinear integral equations of convolution type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **146** (1990) 353–362.

[7] C. S. Barroso, *Krasnosel'skii's fixed point theorem for weakly continuous maps*, Nonlinear Analysis. **55** (2003) 25–31.

[8] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North- Holland, Amsterdam, Second revised edition, 1985.

[9] G. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, Reinhold, (1970).

[10] M. Boulanouar, *A mathematical study for a Rotenberg model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **265** (2002) 371–394.

[11] M. Boulanouar, *Transport equations in cell population dynamics I*, Electronic Journal of Differential Equations. **144** (2010) 1–20.

[12] M. Boulanouar, *Transport equations in cell population dynamics II*, Electronic Journal of Differential Equations. **145** (2010) 1–20.

[13] M. Boumhamdi, K. Latrach, A. Zeghal, *Existence results for a nonlinear version of Rotenberg model with infinite maturation velocities*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **38** (2015) 1795–1807.

[14] M. Boumhamdi, K. Latrach, A. Zeghal, *Existence results for a nonlinear transport equation with unbounded admissible velocities space*, Mediterranean Journal of Mathematics. (Published Online) (2016) 1–17.

[15] C. Cercignani, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum, New York, 1990.

[16] M. Cessenat, *Théorème de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I **299** (1984) 831–834.

[17] M. Cessenat, *Théorème de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I **300** (1985) 89–92.

[18] S. N. Chow, J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*. Springer Verlag, New York, 1982.

[19] R. Dautray, J. L. Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique, Vol. 9, Masson, Paris, 1988.

[20] F. S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in Bnach spaces*, Bulletin mathématiques de la Société des sciences mathématiques de Roumanie. **265** (2002) 371–394.

[21] A. Dehici, A. Jeribi, K. Latrach, *Spectral analysis of a transport operator arising in growing cell populations*, Acta Applicandae Mathematicae. **92** (2006) 37-62.

[22] J. Diestel, *A survey of results related to Dunford-Pettis property*, Contemporary Mathematics. Vol. 2, proceedings of the conference on Integration, Topology and Geometry in Linear Spaces, Vol 2, American Mathematical Society. Providence, RI, pp. 15-60. (1980).

[23] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys **15**, American Mathematical Society. Providence, RI, (1977).

[24] J. Dieudonné, *Sur les espaces de Khöthe*, Journal d'Analyse Mathématique. **1** (1951) 81–115.

[25] J. J. Duderstadt, W. R. Martin, *Transport Theory*, New-York, Wiley, 1979.

[26] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Intersciences, New York, 1958.

[27] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Spaces Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011.

[28] J. Garcia-Falset, K. Latrach, A. Zeghal, *Existence and uniqueness results for a nonlinear evolution equation arising in growing cell populations*, Nonlinear Analysis. **97** (2014) 210–227.

[29] F. Golse, P. L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, Journal of Functional Analysis. **76** (1988) 110–125.

[30] W. Greenberg, C. Van der Mee, V. Protopopescu, *Boundary Value Problems in Abstract Kinetic Theory*, Birkhäuser, 1987.

[31] A. Jeribi, K Latrach, H. Megdiche, *Time asymptotic behavior of the solution to a Cauchy problem governed by a transport operator*, Journal of Integral Equations and Applications. **17** (2005) 121-139.

[32] O. Kavian, *Introduction à la Théorie de des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Mathématiques et Applications, Vol. 13, Springer–Verlag, Paris, 1993.

[33] M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, London, 1964.

[34] M. A. Krasnosel'skii et al, *Integral Operators in Space of Summable Functions*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

[35] K. Latrach, *Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry*, Transport Theory and Statistical Physics. **22** (1993) 39–64.

[36] K. Latrach, *On a nonlinear stationary problem arising in transport theory*, Journal of Mathematical Physics. **37** (1996) 1336–1348.

[37] K. Latrach, *Compactness results for transport equations and applications*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. **11** (2001) 1181–1202.

[38] K. Latrach, H. Megdiche, *Time asymptotic behaviour for Rotenberg's model with Maxwell boundary conditions*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. **29** (2011) 305–321.

[39] K. Latrach, M. A. Taoudi, *Existence results for a generalized nonlinear Hammerstein equation on L^1-spaces*, Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications. **66** (2007) 2325–2333.

[40] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal, *Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations*, Journal of Differential Equations. **221** (2006) 256-271

[41] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal, *On the solvability of a nonlinear boundary value problem arising in the theory of growing cell populations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **28** (2005) 991-1006

[42] K. Latrach, A. Zeghal, *Existence results for a boundary value problem arising in growing cell populations*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. **13** (2003) 1–17.

[43] K. Latrach, A. Zeghal, *Existence results for a nonlinear transport equation in bounded geometry on L^1-spaces*, Applied Mathematics and Computation. **219** (2012) 1163–1172.

[44] J. L. Lebwitz, S. I. Robinow, *Time asymptotic behaviour for Rotenberg's model with Maxwell boundary conditions*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. **29** (2011) 305–321.

[45] B. Lods, *On linear kinetic equations involving unbounded cross-sections*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **27** (2004) 1049–1075.

[46] M. Mokhtar-Kharroubi, *Mathematical Topics in Neutron Transport Theory*. New Aspects, Series on advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 46, World Scientific, 1997.

[47] M. Mokhtar-Kharroubi, *Homogenization of boundary value problems and spectral problems for eutron transport in locally periodic media*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. **14** (2004) 47–78.

[48] D. O'Regan, *Fixed-point theory for weakly sequentially continuous mappings*, Mathematical and Computer Modelling. **27** (1998) 1–14.

[49] D. O'Regan, *Weak solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Applied Mathematics Letters. **12** (1999) 101–105.

[50] M. Rotenberg, *Transport theory for growing cell populations*, Journal of Theoretical Biology. **103** (1983) 181–199.

[51] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[52] C. Van der Mee, P. Zweifel, *A Fokker-Plank equation for growing cell populations*, Journal of Mathematical Biology. **25** (1987) 61-72.

[53] J. Voigt, *Positivity in time dependent linear transport theory*, Acta Applicandae Mathematicae. **2** (1984) 311-331.

[54] J. Voigt, *Spectral properties of the neutron transport equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **106** (1985) 140-153.

[55] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I* : Fixed–Point Theorems, Springer–Verlag, New York, 1993.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude de quelques équations aux dérivées partielles non-linéaires intervenant dans la modélisation de certains phénomènes biologiques et du transport neutronique. Elle est composée de deux parties.

La première partie traite des résultats d'existence dans les espaces L_1 des fonctions sommables pour une classe d'équations non-linéaires intervenant en dynamique de populations cellulaires généralisant un modèle linéaire de Rotenberg. Ce modèle décrit l'évolution d'une population cellulaire structurée en degré de maturité $\mu \in [0,1]$ et vitesse de maturité $v \geq 0$. La division d'une cellule mère donne naissance à des cellules filles. Lors de la mitose, les cellules filles et les cellules mères sont liées par une loi de reproduction non-linéaire, couvrant en particulier les différentes lois considérées dans la littérature.

Dans cette partie, *la vitesse de maturité est supposée infinie, i.e.* $v \in [0, +\infty)$. Cette hypothèse introduit certaines difficultés mathématiques, qui seront surmontées essentiellement, par l'introduction d'une mesure de non-faible compacité adaptée au problème, et l'utilisation d'un théorème récent du point fixe intervenant des opérateurs faiblement compacts sur des espaces de Banach non réflexifs.

Quant à la deuxième partie, elle est consacrée à l'étude d'un problème aux limites intervenant en transport neutronique. Nous discutons des résultats d'existence dans les espaces L^1, où *l'espace des vitesses admissibles V est non borné*. Nos résultats obtenus sont des généralisations des travaux Latrach [36], [37], Latrach, Taoudi et Zeghal [40] et Latrach et Zeghal [42].

Abstract

The aim of this thesis is the study of some nonlinear partial differential equations arising in some biological phenomena and neutron transport theory. It is composed of two parts. The first part deals with existence results in the L_1 spaces of integrable functions for a class of nonlinear equations arising in growing cell populations derived from a linear model introduced by Rotenberg. This model describes the evolution of a cell population structured by the degree of maturity $\mu \in [0, 1]$ and the maturation velocity $v \geq 0$. The division of a mother cell gives rise to daughter cells. During mitosis, dauther cells and mother cells are related by a nonlinear reproduction law, covering in particular the different laws considered in the literature.

In this part, *the maturation velocity is allowed to be infinite, i.e.* $v \in [0, +\infty)$. This hypothesis introduced some mathematical difficulties, which are overcomed essentially by the introduction of a measure of noncompacteness adapted to the problem, and the use of a recent fixed point theorem involving weakly compact operators on non reflective Banach spaces.

The second part is devoted to the study of a nonlinear boundary value problem arising in neutron transport theory. We discuss existence results in the L_1 spaces, where *the space of admissible velocity V is unbounded*. Our results are generalizations of Latrach [34], [35] Latrach, Taoudi and Zeghal [38] and Latrach and Zeghal [40] works.