N d'ordre : 513/23

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation Doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présenté par

HAMID LMOU

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques

Étude de l'équation et l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin

---

Soutenue le Vendredi 16 Juin 2023 à 11h30 devant la commission d'examen :

Pr. LALLA SAADIA CHADLI	FST, USMS Béni Mellal	Président, Rapporteur
Pr. ELHOUSSINE AZROUL	FS, USMBA Fès	Rapporteur
Pr. MOSTAFA EL MOUMNI	FS, UCD El Jadida	Rapporteur
Pr. ABDELAZIZ QAFFOU	EST, USMS Béni Mellal	Examinateur
Pr. ABDERRAHMANE RAJI	FST, USMS Béni Mellal	Examinateur
Pr. AHMED KAJOUNI	EST, USMS Béni Mellal	Co-Encadrant
Pr. KHALID HILAL	FST, USMS Béni Mellal	Encadrant

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens tout d'abord à remercier ALLAH (mon Dieu) tout puissant qui m'a donné la capacité, la force et la patience afin de parvenir à ce niveau.

Je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur, le Professeur **Khalid HILAL**, qui m'a honoré par la confiance qu'il m'a accordée, par sa gentillesse, sa disponibilité permanente, son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'il m'a donnée.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements à mon Co-directeur de thèse, le Professeur **Ahmed KAJOUNI**, pour son aide capitale, sa disponibilité, son inconditionnelle patience et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodiguée et ses conseils qui m'ont accompagné.

Mes remerciements s'adressent a Madame **Lalla Saadia CHADLI** Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal, qui a accepté de présider le jury de thèse et aussi de rapporter ce travail.

Je remercie aussi Monsieur **ELhoussine AZROUL** Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès, qui a bien voulu rapporter ce travail, pour ses remarques, ses orientations et et surtout d'avoir fait le déplacement pour être présent dans le jury de thèse.

Je remercie également Monsieur **Mostafa EL MOUMNI** Professeur Habilité à la Faculté des Sciences, Université Chouaib Doukkali, El Jadida, qui a bien voulu rapporter ce travail, pour ses remarques, ses orientations et et surtout d'avoir fait le déplacement pour être présent dans le jury de thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur **Abdelaziz QAFFOU** Professeur Habilité à l'École Supérieure de Technologie, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal, à qui a bien voulu être examinateur et pour être présent dans le jury de thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur **Abderrahmane RAJI** Professeur Habilité à la Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal, à qui a bien voulu être examinateur et pour être présent dans le jury de thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS)", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Dédicace

Cette thèse est dédiée à

- Ma mère
- Mon père
- Mes soeurs
- Mon frère
- Ma fiancée
- Mon enseignante Houria ARROUBI

Publications et Conférences

Liste des Publications

❶ Khalid Hilal, Ahmed Kajouni, & **Hamid Lmou** (2021). Existence results for a neutral functionnal integrodifferential inclusion with finite delay. **The International Journal on Optimization and Applications**.

❷ Khalid Hilal, Ahmed Kajouni, & **Hamid Lmou** (2022). Boundary Value Problem for the Langevin Equation and Inclusion with the Hilfer Fractional Derivative. **International Journal of Differential Equations**.

❸ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. On a Class of Fractional Langevin Inclusion with Multi-point Boundary Conditions. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**.

❹ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. A New Result for ψ-Hilfer Fractional Pantograph-Type Langevin Equation and Inclusions. **Journal of mathematics**.

❺ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence and stability results for a coupled system of Hilfer fractional Langevin equation with non local integral boundary value conditions. **FILOMAT**.

❻ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence and uniqueness results for Hilfer Langevin fractional pantograph differential equations and inclusions. **International Journal of Difference Equations**.

Liste des Articles Soumis

❶ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence results for ψ-Hilfer hybrid fractional differential equation and inclusions.

❷ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence result for ψ-Hilfer-type hybrid fractional differential Langevin inclusion.

❸ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence results for a ψ-Hilfer-type fractional differential Langevin inclusion.

❹ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Topologial degree method for a new class of ψ-Hilfer-type fractional differential equation.

❺ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Topological degree method for a new class of ψ-Hilfer fractional differential Langevin equation.

❻ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Topological degree method for a class of ψ-Caputo fractional differential Langevin equation

❼ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence and uniqueness results for a ψ-Hilfer-type fractional differential equation using topological degree method

❽ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. p-Laplacian operator for a new class of ψ-Caputo fractional diefferential equation.

❾ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. p-Laplacian operator for a ψ-Caputo fractional diefferential Langevin equation.

❿ **Hamid Lmou**, Khalid Hilal, Ahmed Kajouni. Existence result for a fractional differential Langevin equation involving the ψ-Caputo generalized proportional fractional derivative.

Liste des Conférences

① ″Existence results for a neutral functionnal integrodifferential inclusion with finite delay″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. The International Conference On PDE & Applications, Modeling and Simulation (ICPAMS'21). June 2-3, 2021, Beni Mellal, Morocco.

② ″Existence results for a neutral functionnal integrodifferential inclusion with unbounded delay″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. The International Conference on Mathematics and Data Sience (ICMDS), October 28-30, 2021, Khouribga, Morocco.

③ ″Existence and uniqueness results for Hilfer Langevin fractional pantograph differential equations and inclusions″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. The 4th International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science (ICRAMCS), March 24-26, 2022, Casablanca, Morocco.

④ ″Boundary value problem for the Langevin equation and inclusion with the Hilfer fractionnal derivative″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. International Conference on Fractional Calculus (ICMDS-2021), 18-19, January, 2022, University of Hyderabad, India.

⑤ ″Existence results for a ψ-Hilfer-type fractional differential Langevin inclusion.″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. The 1st International E-Conference of Diferential Equations and Applications (IE-CDEA), September 24-25, 2021, Fez, Morocco.

⑥ ″Existence and uniqueness results for Hilfer Langevin fractional pantograph differential equation and inclusion″, co-authored with Khalid Hilal and Ahmed Kajouni. International Conference on New Trends in Applied Mathematics (ICNTAM), 19-21, May, 2022, Sultan Moulay Sliman University.

Notations et Abréviations

p.p.	Presque partout.
$\mathcal{AC}\big([a,b]\big)$	L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
$\mathcal{C}^n\big([a,b]\big)$	$=\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ n$-fois dérivable et continue $\}$.
$\mathcal{AC}^n\big([a,b]\big)$	L'espace des fonctions f dérivables et absolument continues sur $[a,b]$.
$\mathcal{R}e(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe z.
$\Gamma(.)$	La fonction Gamma d'Euler.
$B(.,.)$	La fonction Bêta.
$E_\alpha(.)$	La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$E_{\alpha,\beta}(.)$	La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	L'espace euclidien de dimension N.
Ω	Domaine borné et régulier de frontière $\partial\Omega$.
${}^{RL}I^\alpha f$	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
${}^{GL}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald- Letnikov d'ordre α de la fonction f.
${}^{RL}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
${}^{C}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de la fonction f.
${}^{H}D^{\alpha,\beta} f$	La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre α et de paramètre β de la fonction f.
${}^{RL}I^{\alpha;\psi} f$	L'intégrale fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
${}^{RL}D^{\alpha;\psi} f$	La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f.
${}^{C}D^{\alpha;\psi} f$	La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo d'ordre α de la fonction f.
${}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi} f$	La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer d'ordre α et de paramètre β de la fonction f.
S_G	L'ensemble des sélections de G.
$\vartheta(.)$	La mesure de Kuratowski de non-compacité.
ϕ_p	L'opérateur p-Laplacian.
$\mathcal{L}[.](s)$	Transformée de Laplace.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires ont connu récemment une grande attention, grâce à l'intérêt que présente la dérivation fractionnaire dans la modélisation de certains phénomènes physiques qui présentent des termes à mémoire dans leurs structures, et aussi elle ouvre des champs riches d'applications mathématiques qui font l'objet de divers travaux de recherche.

Cette thèse a pour objet de contribuer dans cette théorie, en introduisant au départ quelques éléments de base du calcul fractionnaire, analyse multivoque et quelques concepts préliminaires. Ensuite, dans le chapitre 2 la question d'existence de la solution d'une inclusion différentielle fractionnaire de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Caputo est discutée en utilisant le théorème de point fixe de Leray-Schaëfer. Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution pour une équation fractionnaire de Langevin via la dérivée fractionnaire de Hilfer en se basant sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii et le théorème du point fixe de Banach, puis nous avons illustré ce résultat par un exemple d'application, et aussi nous avons étudié la version d'inclusion de ce problème. Le chapitre 4 est dédié à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité d'un système couplé composé de deux équations différentielles fractionnaires de Langevin. Le chapitre 5 est une contribution qui porte sur l'inclusion différentielle fractionnaire hybride afin d'étendre ses résultats en étudiant l'inclusion différentielle fractionnaire hybride de Langevin avec la dérivée fractionnaire ψ-Hilfer et aussi présenter un exemple d'application. Dans le chapitre 6, en se basant sur la méthode de degré topologique nous avons élaboré l'existence et l'unicité de la solution pour une équation différentielle fractionnaire, afin d'élargir ces résultat en étudiant une équation différentielle fractionnaire via la dérivée fractionnaire ψ-Hilfer. Finalement nous avons traité l'opérateur p-Laplacien pour une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo, en donnant un exemple d'application.

Mots clés : Équation de Langevin, Inclusion fractionnaire de Langevin, Dérivée fractionnaire de Hilfer, Systèmes couplés, Méthode de degré topologique, inclusion différentielle fractionnaire hybride, Dérivée fractionnaire ψ-Caputo, Dérivée fractionnaire ψ-Hilfer, Opérateur p-Laplacian.

AMS classification : 26A33, 34A08, 39B82, 34K37, 34B10, 34A12.

Abstract

Fractional differential equations have recently received a lot of attention, due to the interest of fractional derivation in the modeling of some physical phenomena that present memory expressions in their structures, and also it is a wide field of mathematical applications that is the object of various research works.

The purpose of this thesis is to contribute to this theory, introducing at first some basic elements of fractional calculus, multivariate analysis and some preliminary concepts. Thereafter, in chapter 2 the question of existence of the solution of a Caputo fractional differential Langevin inclusion is investigated using the Leray-Schaëfer fixed point theorem. In chapter 3, we study the existence and uniqueness of the solution for a Hilfer fractional diferential Langevin equation based on the Krasnoselskii fixed point theorem and the Banach fixed point theorem, then we illustrate this result by an example, and also we study the inclusion version of this problem. Chapter 4 is dedicated to the study of the existence, uniqueness and stability of a coupled system made of two fractional differential Langevin equations. Chapter 5 is a contribution on the hybrid fractional differential inclusion in order to extend this results by studying the hybrid ψ-Hilfer-type fractional differential Langevin inclusion and also we present an example. In chapter 6, based on the topological degree method we will study the existence and uniqueness of the solution for a fractional differential equation, in order to extend these results by studying a fractional differential equation via ψ-Hilfer fractional derivative. Finally we treat the p-Laplacian operator for a ψ-Caputo-type fractional differential equation, an example is given.

Keywors : Langevin equation, Fractional Langevin inclusion, Hilfer fractional derivative, Coupled systems, Topological degree method, Hybrid fractional differential inclusions, ψ-Caputo fractional derivative, ψ-Hilfer fractional derivative, p-Laplacian operator.

AMS classification : 26A33, 34A08, 39B82, 34K37, 34B10, 34A12.

Table des matières

Introduction Générale

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17^{ieme} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{ieme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.
La première tentative sérieuse de donner une définition logique à la dérivée fractionnaire est due à Liouville qui a publié neufs documents sur ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leur apparition comme celle de Grunwald (1867-1872), Letnikov (1868- 1872), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), (voir l'aperçu historique qui suit).
A cette époque il n'y avait pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une théorie abstraite ne contient que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications a commencé à apparaitre depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, la biologie, la mécanique, etc (Voir les ouvrages de [43], [16]).

Aperçu historique

Nous nous appuyons sur les ouvrages [39, 66] pour couvrir la période de 1695 à 1974 présentée dans la figure 1

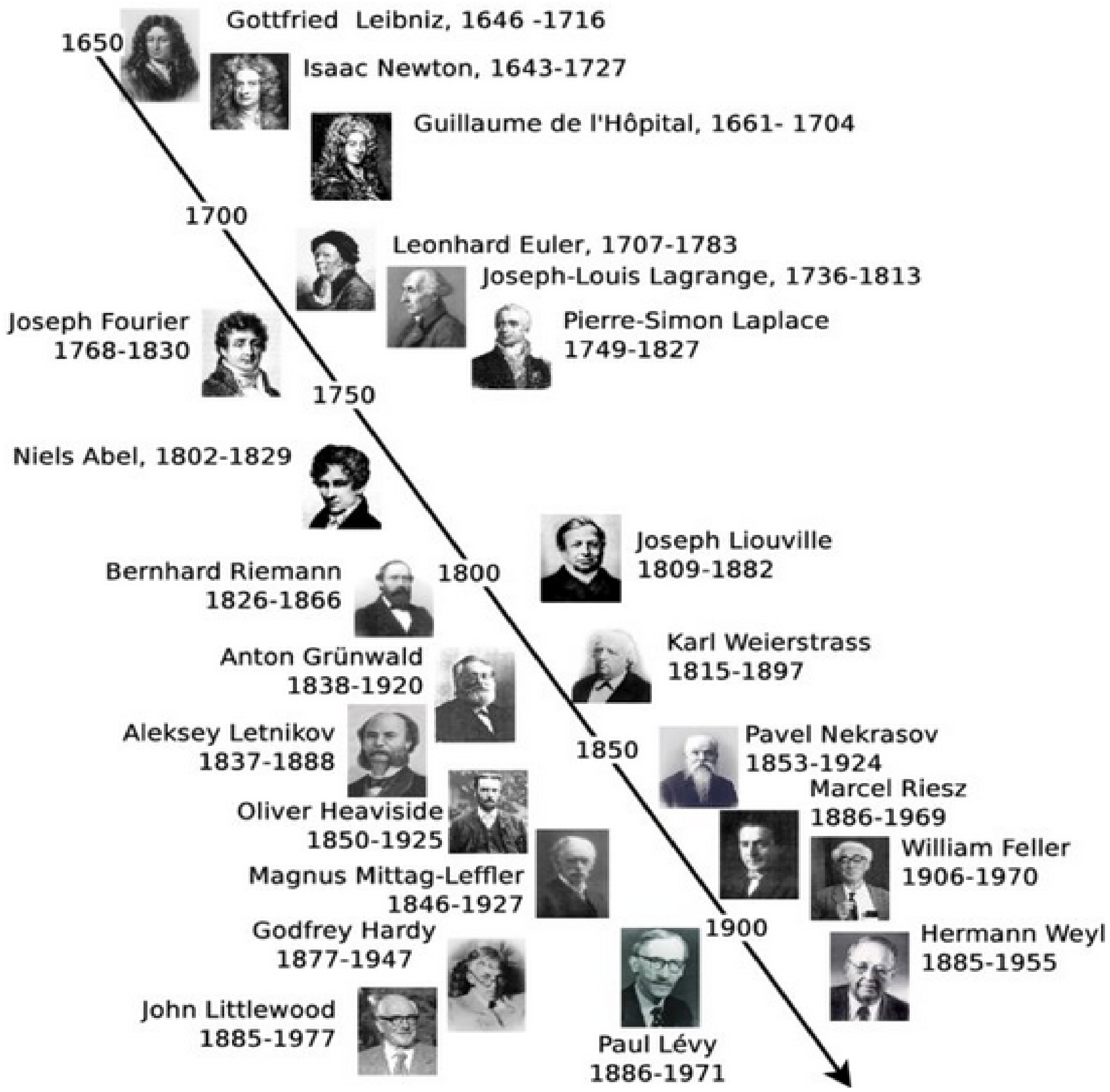

FIGURE 1 – Histoire du calcul fractionnaire.

1695
L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions à $n > 0$ et introduit la notation $d^{\frac{1}{2}}h$. Il écrit notamment que $d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx : x}$. Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées d'ordres généraux.
1730
Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [31] où il

introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^{β}, avec $\beta > 0$. En effet pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m > 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}. \tag{0.0.1}$$

Le terme de droite de (0.0.1) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}. \tag{0.0.2}$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier, qui grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel en composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos(p(x-\alpha))d\alpha dp. \tag{0.0.3}$$

Il remarque ensuite que la dérivée $n^{\text{ième}}$ $(n \in \mathbb{N})$ du terme en cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(p(x-\alpha)) = p^n\cos[(p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}]. \tag{0.0.4}$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $\cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (0.0.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)p^u\cos[(p(x-\alpha)+\frac{u\pi}{2}]d\alpha dp. \tag{0.0.5}$$

1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}, \tag{0.0.6}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, il propose de l'étendre pour $\alpha > 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax}. Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \tag{0.0.7}$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}, \tag{0.0.8}$$

afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (0.0.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\beta-1}e^{-xu}du,$$

a l'aide de (0.0.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-xu}du,$$

donc

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{-\alpha-\beta}. \tag{0.0.9}$$

Même si (0.0.2) et (0.0.9) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique.

Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

- avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

- alors qu'avec celle de Liouville

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$,

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{\text{Euler}} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-y)^{-\alpha}y^\beta dy,$$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{\text{Liouville}} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha}y^\beta dy.$$

Comme il est signalé dans [39] ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

1847

A partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

1867-68

Grünwald et Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h.

1869

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparait pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy $(n \in \mathbb{N})$, on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}}dz,$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite ${}_aI_x^\alpha$:

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy,$$

1892

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t). \tag{0.0.10}$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x,t) = T_0 \exp(-axp^{\frac{1}{2}}).$$

Il suppose ensuite que $p^{\frac{1}{2}}T_0 = T_0\sqrt{\pi t}$ ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre 1/2 de T_0. En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (0.0.10).

1917

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

1927

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire

$$D_+^\alpha f(x) = c\int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $\Delta_t^l f(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de f.

1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire I_a^α sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$, I_a^α est un opérateur borné de L^p dans L^q, où $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p-\alpha}$.

1937

la définition suivante :

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\| x-y \|^{n-\alpha}}dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

1970

Dans [66] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée 1/2 du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimiques, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [66] , ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

1974

Cette année-là se tient à l'université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

Domaines d'applications du calcul fractionnaire :

Au cours des dernières années, les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans de nombreux domaines de la physique, la mécanique des fluides, l'électrochimie, la viscoélasticité, la théorie du contrôle non-linéaire, systèmes biologiques non-linéaires, l'hydrodynamique et d'autres domaines des sciences et de l'ingénierie...

Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces problèmes. Il existe donc un intérêt marqué pour le développement de méthodes de résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire. Les solutions exactes de ces problèmes sont parfois trop compliquées à atteindre par les techniques classiques.

Dans la partie suivante on donne quelque Domaines d'applications.

Applications en automatique :

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [68, 69], Chen et al. [18] et Caponetto et al. [15] ont montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs d'ordre fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje, Montseny et Matsuda et Fuji (1993) ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués [63]. En 1991, Alain Oustaloup introduit la commande CRONE (abréviation de Commande Robuste d'ordre Non Entier). Cette dernier permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaire de temps invariant (LTI : Linear Time Invariant), incertains, mono-variables (SISO : Single Input Single Output) ou multi-variables (MIMO : Multiple Input Multiple Output). La stratégie CRONE a été appliquée à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension d'automobile, robot-cueilleur, charrue éléctro-hydrolique, batterie pour voitures, etc.
Le contrôleur proposé par Oustaloup [67] est donné par la forme suivant :

$$C_m(s) = C_0\left(\frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h}\right)^m \tag{0.0.11}$$

Avec C_0, $\omega_b > 0$, $\omega_h > 0$, et $m > 0$ sont des paramètres du régulateur, m étant non entier.
Le schéma fonctionnel de contrôleur CRONE montré dans la figure suivante
Les performances obtenues sont intéressantes dans le cas de la commande CRONE puisqu'il ne s'agit pas seulement de maintenir la stabilité comme dans le cas de l'approche (robustesse de la stabilité), mais encore mieux, de satisfaire des considérations de robustesse plus

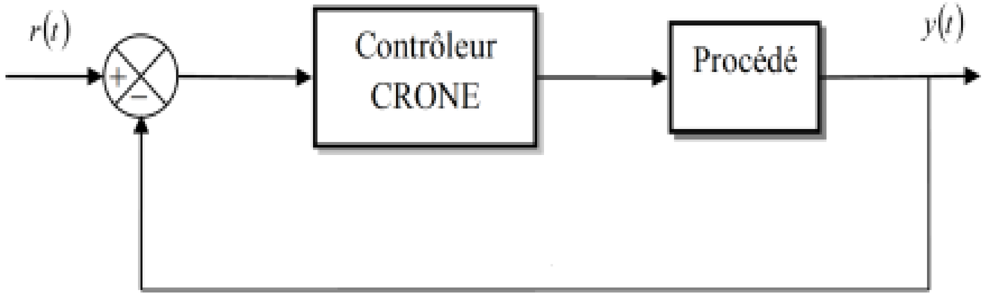

FIGURE 2 – Boucle de commande par régulateur CRONE.

sévères : il s'agit de la robustesse du degré de stabilité et du coup, l'objectif est le maintien de la performance dynamique nominale fixée par le facteur d'amortissement nominal.

Application en génie électrique :

La dérivée fractionnaire procure un excellent moyen pour la description des dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température,...). à titre d'exemple, grâce à des données expérimentales, Schmidt et Drumheller [74] montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé $(LiN_2H_5S0_4)$ et en procédant à des mesures que sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction de diélectrique $\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon"$ sont très grandes $\varepsilon \approx \varepsilon \approx 10^6$ et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$ (avec $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon" \in \mathbb{R}$). Dans [74, 64], nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé :

$$\varepsilon = \varepsilon' \omega^{\frac{-1}{2}}(1-j) = \varepsilon'\sqrt{2}(j\omega)^{\frac{-1}{2}} \text{ avec } j = \sqrt{-1}. \tag{0.0.12}$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon}. \tag{0.0.13}$$

Où C_e est une constante. En substituant la relation (0.0.12) dans (0.0.13), on a

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon' \sqrt{2}(j\omega)^{\frac{-1}{2}}}. \tag{0.0.14}$$

Qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}}, \ \ avec \ \ K = \frac{1}{\sqrt{2}C_e\varepsilon'}. \tag{0.0.15}$$

Où encore, en fonction de la variable de Laplace S

$$Z = \frac{K}{S^{\frac{1}{2}}}. \tag{0.0.16}$$

L'équation (0.0.16) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme de "Fractor", par analogie au terme anglais "Capacitor", pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance. La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

Applications en physique :

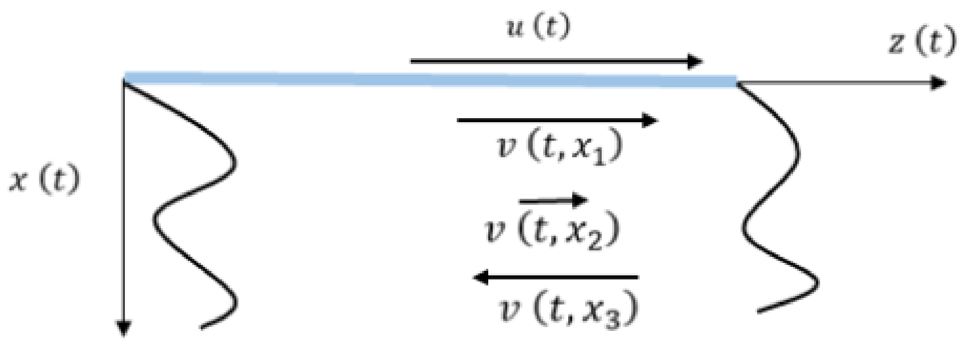

FIGURE 3 – Mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide.

Considérons le mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide. (voir figure 3). Le mouvement de la plaque est unidirectionnel suivant l'axe z. La direction normale à la plaque est repérée par la coordonnée x. Les deux variables $u(t)$ et $v(t; x)$ désignent respectivement, la vitesse de la plaque et la vitesse des particules du fluide situés à la distance x de la plaque.

L'équation du mouvement du fluide est une équation de diffusion de la forme

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{0.0.17}$$

où ρ est la densité du fluide, μ la viscosité, ν est le profil de la vitesse transversale du fluide, laquelle est une fonction du temps t et de la distance x.

$$\begin{array}{lll} \nu(0,x) & = 0 & \text{pour } x < 0, \\ \nu(t,0) & = & u(t) \text{ pour } x = 0, \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \nu(t,x) & = 0 & \text{pour } t > 0 \end{array} .$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (0.0.17), on obtient,

$$\rho\hat{\nu}(s,x) = s\mu\frac{\partial^2\hat{\nu}(s,x)}{\partial x^2}, \tag{0.0.18}$$

$$\widehat{\nu}(s,0) = \widehat{\nu}(s). \tag{0.0.19}$$

La solution formelle de (0.0.18) est

$$\hat{\nu}(s,x) = c_1(s)exp(-x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}) + c_2(s)exp(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}). \tag{0.0.20}$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites $\hat{\nu}(s;0) = \hat{u_p}(s)$, on obtient

$$\hat{\nu}(s,x) = \hat{u_p}(s)exp(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}), \tag{0.0.21}$$

donc,

$$\nu(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\frac{\mu}{\rho}}}\int_0^t \tau^{\frac{-3}{2}}exp(\frac{\mu x^2}{4\rho\tau})u_p(t-\tau)d\tau. \tag{0.0.22}$$

Car pour, $x > 0$,

$$\mathcal{L}\{\frac{x}{2\sqrt{\pi\frac{\mu}{\rho}}}t^{\frac{-3}{2}}exp(\frac{\mu x^2}{4\rho t})\} = exp(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}). \tag{0.0.23}$$

D'une part, on vérifie bien que (0.0.22) est une solution de l'équation différentielle (0.0.17), d'autre part, à partir de (0.0.21), on en déduit,

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}s^{\frac{1}{2}}\hat{\nu}(s,x) = \frac{\partial\hat{\nu}(s,x)}{\partial x},$$

en particulier,

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}s^{\frac{1}{2}}\hat{u_p}(s) = \frac{\partial\hat{\nu}(s,0)}{\partial x}.$$

Si on définit comme variable de sortie

$$y(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\frac{\partial\hat{\nu}(s,0)}{\partial x}, \tag{0.0.24}$$

on obtient le transfert suivant

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}}\hat{u}_p(s). \tag{0.0.25}$$

Ce qui nous permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

Le problème de tautochrone :

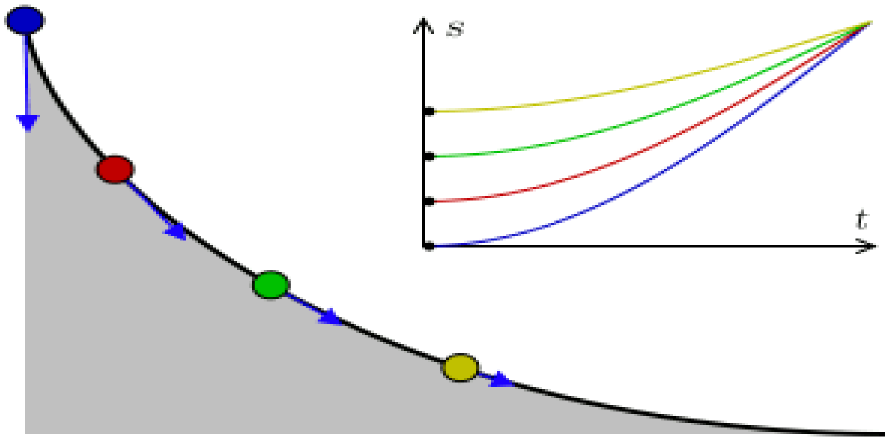

FIGURE 4 – Le problème de tautochrone

Le problème est le suivant : trouver une courbe dans le plan (x, y) tel que le temps nécessaire pour qu'une particule glisse le long de la courbe jusqu'à son point le plus bas est indépendante de son placement initial sur la courbe ; supposons que le champ de gravité est homogène et il n'y a pas de frottement. Fixons le point le plus bas d'une courbe à l'origine et la position d'une courbe dans le quadrant positif du plan. Indiquons par (x, y) le point initial et (x^*, y^*) tout point intermédiaire entre $(0, 0)$ et (x, y).

Selon la loi de conservation de l'énergie, nous pouvons écrire

$$\frac{m}{2}(\frac{d\sigma}{dt})^2 = mg(y - y^*),$$

où σ est la longueur le long de la courbe mesurée à partir de l'origine, m la masse de la particule, g l'accélération gravitationnelle.

On considère le cas où $\frac{d\sigma}{dt} < 0$ et $\sigma = \sigma(y^*(t))$, la loi de conservation de l'énergie devient alors,

$$\sigma' \frac{dy^*}{dt} = -\sqrt{2g(y - y^*)},$$

en intégrant de $y^* = y$ à $y^* = 0$, et de $t = 0$ à $t = T$. Après quelques calculs, on obtient l'équation intégrale :

$$\int_0^y \frac{\sigma'(y^*)}{\sqrt{y - y*}} dy^* = \sqrt{2g}T.$$

Ici, on peut facilement reconnaître la dérivée fractionnaire de Caputo et écrire

$$^{C}D^{\frac{1}{2}}\sigma(y) = \frac{\sqrt{2g}T}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Notons que T est le temps de la descente, donc c'est une constante. En appliquant l'intégral d'ordre $\frac{1}{2}$ des deux côtés de l'équation , on obtient le relation entre la longueur le long de la courbe et la position initiale dans la direction y.

Équation de Langevin :

Une équation de la forme $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} + \eta(t)$ est appelée une équation de Langevin, introduite par Paul Langevin en 1908 [47], où m représente la masse d'une grosse particule brownienne, supposée animée à l'instant t d'une vitesse $\frac{dx}{dt}$, est soumise à deux forces bien distinctes

- une force de frottement fluide du type $-k\frac{dx}{dt}$, où k est une constante positive
- une force complémentaire, notée $\eta(t)$, qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide environnantes. Langevin écrit à propos de cette force supplémentaire qu' *elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter* , au XXI^{e} siècle une telle force est appelé un bruit blanc gaussien [45, 21].

Pour l'élimination du bruit, les mathématiciens ont utilisé des équations différentielles d'ordre fractionnaire, qui permettent également de réduire ses effets par rapport aux équations différentielles d'ordre entier. Il est donc très important d'étudier l'équation de Langevin avec des différentes type de dérivées fractionnaires, qui est l'objectif principale de ce travaille.

Organisation de la thèse :

Cette thèse, se compose de sept chapitres, présente des résultats d'existence et d'unicité de la solutions pour l'équation et l'inclusion de Langevin via différente type de dérivées fractionnaires, Caputo, ψ-Caputo, Hilfer, ψ-Hilfer. Nous allons présenter, d'une manière détaillée le contenu de chacun d'eux.

Le premier chapitre est entièrement consacré aux préliminaires mathématiques issues du calcule fractionnaire et de l'analyse multivoque.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin donné par la forme suivante

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}+\lambda)x(t) \in \mathcal{G}(t,x(t)), \quad 0<t<1, \\ \\ x(0)=0,\ {}^{C}D^{\beta}x(0)=0,\ x(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i x(\eta_i)+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds. \end{cases}$$

Où ${}^{C}D^{\alpha}$ et ${}^{C}D^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in (0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est le paramètre de dissipation, $\mu_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ et $\eta_i \in (0,1), i=1,...,n$ tels que $n \in \mathbb{N}$ avec $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\eta_i^{\beta+1} \neq 1$ et $\mathcal{G} : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction bornée, fermée, convexe ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$). Nous prouvons l'existence de la solution en utilisant le théorème de point fixe de Leray-schauder.

Le troisième Chapitre présente les résultats d'existences et d'unicité pour une équation et inclusion différentielle fractionnaire de Langevin de la forme

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda)x(t)=f(t,x(t)), \quad a\leq t\leq b, \\ x(a)=0 \quad , \qquad x(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(x))(\eta), \quad a<\eta<b. \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha_i,\beta_i}, i=1,2$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α_i, $0<\alpha_i<1$ et de paramètre β_i, $0\leq\beta_i\leq 1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$, I^{ν_i} est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\nu_i>0$, $\mu_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$ et $f:[a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue. En se basant sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour le résultat d'existence et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach, finalement on va donner un exemple pour défendre notre résultat. Dans le même chapitre, nous étendons le résultat obtenu dans le premier chapitre pour étudier l'existence de la solution pour la version d'inclusion de la forme

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda)x(t)\in F(t,x(t)), \quad a\leq t\leq b, \\ x(a)=0,\ x(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(x))(\eta),\ a<\eta<b. \end{cases}$$

Où $F : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction bornée, fermée, convexe ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$).

L'objectif de **quatrième chapitre** est d'exploiter les résultats de troisième chapitre pour étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de système couplé donné par

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2} + \lambda_1)x(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad t \in [a, b], \\ {}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2} + \lambda_2)y(t) = g(t, x(t), y(t)), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = 0 \quad , \quad x(b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(I^{\nu_i}(y))(\eta_i), \\ y(a) = 0 \quad , \quad y(b) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(I^{\sigma_j}(x))(\xi_j). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha_i,\beta_i}, {}^{H}D^{p_i,q_i}, i = 1, 2$ représente les dérivées fractionnaires de Hilfer d'ordre α_i, p_i, telle que $0 < \alpha_i, p_i < 1$ et de paramètre β_i, q_i, telle que $0 \leq \beta_i, q_i \leq 1$, $i = 1, 2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, I^{ν_i}, I^{σ_j} sont les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre ν_i et σ_j respectivement $\nu_i, \sigma_j > 0$, η_i, $\xi_j \in [a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, $\mu_i, \omega_j \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. En se basant sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder on va prouver le résultat d'existence et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach, afin de traité la stabilité de Ulam-Hyers (U-H), et de Ulam-Hyers généralisé (U-H-G).

Dans la première partie du **cinquième chapitre**, l'attention est portée sur l'étude de la version hybride pour l'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire suivante

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\left(\dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}\right) \in G(t, x(t)), \quad t \in J := [a, b] \\ x(a) = 0 \quad , \qquad x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}$ la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre α, $1 < \alpha \leq 2$ et de paramètre β, $0 \leq \beta \leq 1$, $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $a < \eta_1 < ... < \eta_n < b$, $f \in C\big(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$ et $G : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$.

Dans la deuxième partie en combinant les résultats obtenus dans les chapitres précédents avec les résultats de la première partie, on va établir le résultat d'existence pour l'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire de Langevin, avec une dérivée fractionnaire plus générale que les premières nommé la dérivé fractionnaire ψ-Hilfer, donné sous la forme

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}\left({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi}\left[\dfrac{x(t)}{f(t, x(t))}\right] + \mu x(t)\right) \in G(t, x(t)), t \in J \\ x(a) = 0\,,\ x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{p_j,q_j;\psi}, j = 1,2$ est la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre p_j, $0 < p_j \leq 1$ et de paramètre q_j, $0 \leq q_j \leq 1$, $j = 1,2$, $J = [a,b]$, $a \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$, $a < \eta_1 < ... < \eta_n < b$, $f \in C\big(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ et $G : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. En se basant sur le théorème de point fixe hybride de Dhage on prouve l'existence de la solution, affin d'illustrer notre résultat par un exemple.

Le sixième chapitre, la première partie est dédié à l'étude d'une équation différentielle fractionnaire avec une dérivé fractionnaire ψ-Hilfer, en se basant sur la méthode de degré topologique pour établir le résultat d'existence pour le problème

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\Big[\,{}^{H}D^{p,q;\psi}u(t)\Big] = h(t,u(t)), \quad t \in \Lambda := [a,b] \\ u(a) = 0 \quad , \qquad u(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \iota_i u(\kappa_i). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}$ et ${}^{H}D^{p,q;\psi}$ sont les dérivées fractionnaires de ψ-Hilfer d'ordre α, p, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < p \leq 1$ et de paramètre β, q, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ respectivement, $a \geq 0$, $\iota_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$, $a\iota_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$, $a < \kappa_1 < ... < \kappa_n < b$, $h \in \mathcal{C}\big(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$.
Dans la deuxième partie on élargit les résultats obtenus dans la première partie, en étudiant l'équation différentielle fractionnaire de Langevin suivante

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi} + \lambda)w(\tau) = g(\tau, w(\tau)),\ \tau \in \Upsilon := [a,b], \\ w(a) = 0\ ,\ w(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\beta_i;\psi} w(\kappa_i). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{p_j,q_j;\psi}$, est la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre p_j, $0 < p_j \leq 1$, et de paramètre q_j, $0 \leq q_j \leq 1$, $j = 1,2$, $a \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $I^{\beta_i;\psi}$ est l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre $\beta_i > 0$, $\iota_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$, $a < \kappa_1 < ... < \kappa_n < b$, $g \in \mathcal{C}\big(\Upsilon \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$. Le résultat d'existence est obtenu en appliquant la méthode de degré topologique, finalement, nous attachons notre étude par un exemple.

Finalement dans **Le septième chapitre**, on s'intéresse à étudier l'opérateur p-Laplacien pour une équation différentielle fractionnaire avec la dérivé fractionnaire de ψ-Caputo, de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\Psi}\left(\phi_p\Big[\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\Big]\right) = h(\tau,u(\tau)),\ \tau \in \Lambda := [a,b], \\ u(a) = \mu u(\xi)\ ,\ \ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(a) = 0\ ,\ \ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(b) = \kappa\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\eta). \end{cases}$$

Où ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\Psi}$ et ${}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}$ représentent les dérivées fractionnaires de Ψ-Caputo d'ordre α, $0 < \alpha \leq 2$, et β, $0 < \beta \leq 1$, respectivement, $a \geq 0$, $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\eta, \xi \in \Lambda$, $h \in \mathcal{C}\big(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$ et $\phi_p(\tau)$ est l'opérateur p-Laplacien ($\phi_p(\tau) = |\tau|^{p-2}\tau$, $p > 1$). En se basant sur le théorème de point fixe de Banach on montre l'existence et l'unicité de la solution, et on illustre ce résultat par un exemple.

Finalement nous terminons notre travail par une conclusion générale, où la validité et la fiabilité d'une telle recherche est mise en exergue, aussi nous proposons quelques perspectives sur le sujet.

Structure de la thèse :

Le contenu de cette thèse fait l'objet des articles suivant :

Chapitre 2 : est l'objet de l'article [54] publié dans le journal "Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática" .

Chapitre 3 : est l'objet de l'article [35] publié dans le journal " International Journal of Differential Equations" et de l'article [51] publié dans le journal "Journal of mathematics".

Chapitre 4 : est l'objet de l'article [52] publié dans le journal "FILOMAT".

Chapitre 5 : est l'objet de l'article [55] soumis dans le journal "The Scientific Bulletin :Series A Applied Mathematics and Physics" et de l'article [56] soumis dans le journal "Journal of partial differential equations".

Chapitre 6 :est l'objet de l'article [57] soumis dans le journal "Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal" et de l'article [58] soumis dans le journal "Kragujevac Journal of Mathematics"

Chapitre 7 :est l'objet de l'article [59] soumis dans le journal "CUBO, A Mathematical Journal "

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des définitions, notations, propriétés de différente type de dérivées d'ordre fractionnaires, de Caputo, ψ-Caputo, Hilfer, ψ-Hilfer. De plus, nous présentons quelques résultats fondamentaux de l'analyse multivoque nécessaires pour étudier les inclusion différentielles fractionnaires.

1.1 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

1.1.1 Fonctions spéciales

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

La fonction Gamma :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.1.1 *[70] Pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$. *La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z < 1$.

Théorème 1.1.2 *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1- La fonction Γ *s'étend (en une fonction holomorphe) à* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$ *tout entier .*

2- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, *on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.1.2}$$

et plus généralement,

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z). \tag{1.1.3}$$

3- *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.1.4}$$

Pour plus d'informations sur la fonction $Gamma$, voir [10]

La Fonction Bêta :

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.3 *[70] La fonction Bêta est définie par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \tag{1.1.5}$$

avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(w) > 0$ *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)};\ \mathrm{Re}(z) > 0\ ,\ \mathrm{Re}(w) > 0. \tag{1.1.6}$$

D'après 1.1.6 on a

$$B(z,w) = B(w,z)\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\ ,\ \mathrm{Re}(w) > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler :

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction à été introduite par G .M. Mittag-Leffler [62].

Définition 1.1.4 *[70] Pour* $z \in \mathbb{C}$, *la fonction Mittag-Leffler* $E_\alpha(z)$ *est définit comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad \alpha > 0. \tag{1.1.7}$$

Cette fonction a été généralisée par Agarwal [9] pour deux paramètres et elle est définie par le développement en série entière suivant

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.1.8}$$

- *Pour* $\beta = 1$, *on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.*
- *Pour* $\alpha = \beta = 1$, *on retrouve la fonction exponentielle :*

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \tag{1.1.9}$$

1.1.2 Transformée de Laplace :

Définition 1.1.5 *S'il existe deux constantes positives* M *et* T *telles que* $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ *pour* $t > T$ *(c'est à dire que f est d'ordre exponentiel* α *) alors la fonction* F *de la variable complexe* s *définie par :*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \tag{1.1.10}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f.

Propriété 1.1.6

1- *A partir de la transformée* F, *on peut avoir* f *à l'aide de la transformée de Laplace inverse*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds, \ c = Re(s).$$

2- *La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions* f *et* g *est donnée par la formule suivante :*

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t); s) = F(s)G(s).$$

3- *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre* n *d'une fonction* f *est*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0). \tag{1.1.11}$$

Exemple 1.1.7

$$\mathcal{L}\{t^\alpha; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}, \ \alpha > 0. \tag{1.1.12}$$

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(\pm\lambda t^\alpha); s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp \lambda}, \ \alpha > 0. \tag{1.1.13}$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\pm\lambda t^\alpha); s\} = \frac{1}{s^\alpha \mp \lambda}, \ \alpha > 0. \tag{1.1.14}$$

1.1.3 Intégration et dérivation fractionnaire

Dans cette partie nous donnons un aperçu sur le calcul fractionnaire. On se restreint aux approches des dérivées fractionnaires les plus populaires et les plus pratiques : l'approche de Riemann-Liouville, Caputo, ψ-Caputo, Hilfer et celle de ψ-Hilfer ainsi que leurs propriétés principales [42].

Intégrale fractionnaire :

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition de l'intégrale fractionnaire.

Intégrale de Riemann-Liouville : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, on note par I^1 la primitive de f qui s'annule en a qui est donnée par :

$$\forall t \in [a, b], \quad (I^1 f)(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Par itération, on obtient la seconde primitive de f :

$$\begin{aligned}(I^2 f)(t) &= (I^1 \circ^{RL} I^1 f)(t), \\ &= \int_a^t \Big(\int_a^s f(\tau) d\tau \Big) ds,\end{aligned}$$

et d'après le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}(I^2 f)(t) &= \int_a^t \Big(\int_\tau^t ds \Big) f(\tau) d\tau, \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que la $n^{\text{ième}}$ itération de I^1 est donnée par :

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \tag{1.1.15}$$

Remarque 1.1.8

- *La fonction* $I^n f$ *est l'unique fonction qui vérifie :*

$$\begin{cases} (I^n f)^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \le k \le n-1, \\ (I^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

- *La* $n^{\text{ième}}$ *itération de l'intégrale* I^1 *est appelée aussi intégrale à gauche d'ordre* n *de* f*, la dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche* $(s \le t)$ *de* f.
- *La formule (1.1.15) est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma* $\Gamma(n) = (n-1)!$*; Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.1.15) pourrait avoir un sens même quand* n *prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :*

Définition 1.1.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}^{RL}I^{\alpha}$ défini sur $L^1([a,b])$ par :*

$$ {}^{RL}I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{1.1.16}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α, où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1.1).

On peut écrire ${}^{RL}I^{\alpha}$ sous la forme suivante :

$$ {}^{RL}I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s)ds\,, \quad t \in [a,b].$$

En écrivons l'intégrale $\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$ sous la forme :

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(t-s)\phi_2(s)ds,$$

où

$$\phi_1(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & 0 < s < b-a, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Et

$$\phi_2(s) = \begin{cases} f(s), & a < s < b, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

On obtient

$$ {}^{RL}I^{\alpha}f \in L^1([a,b]),$$

en effet, ϕ_1 et ϕ_2 sont deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.1.10 *[28] Soit $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$, l'intégrale ${}^{RL}I^{\alpha}f(t)$ existe pour tout $t \in [a,b]$ et la fonction ${}^{RL}I^{\alpha}f \in L^1([a,b])$.*

Exemple 1.1.11 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(t) = C,$$

on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} C ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_a^t C, \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} C. \end{aligned}$$

Ainsi

$$ {}^{RL}I^{\alpha}\Big(C\Big) = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} C.$$

Exemple 1.1.12 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(t) = (t-a)^p, \text{ avec } p > -1,$$

on a :

$$^{RL}I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^p ds. \tag{1.1.17}$$

En effectuant le changement de variable $s = a + (t-a)u$, *on obtient*

$$^{RL}I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+p} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^p du.$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.1.5) puis la relation (1.1.6), on arrive à

$$\begin{aligned} ^{RL}I^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+p}B(p+1,\alpha), \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^p$ *est donnée par*

$$^{RL}I^{\alpha}(t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p}. \tag{1.1.18}$$

Proposition 1.1.13 *[70, 43] soient* $\alpha, \ \beta \ \in \mathbb{C}, \ (\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \mathrm{Re}(\beta) > 0)$, *pour toute fonction* $f \in L^1([a,b]), \ a > 0$ *on a*

$$^{RL}I^{\alpha}\left(^{RL}I^{\beta}f(t)\right) = {}^{RL}I^{\alpha+\beta}f(t) = {}^{RL}I^{\beta}\left({}^{RL}I^{\alpha}f(t)\right), \tag{1.1.19}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$. *Si de plus* $f \in \mathcal{C}([0,T])$, *alors cette identité est vraie* $\forall t \in [a,b]$.

Preuve. Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$ on a :

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}\left({}^{RL}I^{\beta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} \, {}^{RL}I^{\beta}f(t-s)ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} \int_0^{t-s} (t-s-u)^{\beta-1}f(u)duds. \end{aligned}$$

Comme $\begin{cases} 0 \leq s \leq t-a & , \\ 0 \leq u \leq t-s & , \end{cases}$ alors $\begin{cases} a \leq u \leq t & , \\ 0 \leq s \leq t-u & . \end{cases}$

Par suite, on obtient

$$^{RL}I^{\alpha}\left(^{RL}I^{\beta}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u)du \int_0^{t-u} s^{\alpha-1}(t-u-s)^{\beta-1}ds.$$

En posant $s = \tau(t-u)$ on trouve

$$\begin{aligned}
{}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\beta}f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(u)du\int_0^1 (\tau(t-u))^{\alpha-1}(t-u-\tau(t-u))^{\beta-1}(t-u)d\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)du\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)duB(\alpha,\beta),\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1}f(u)du,\\
&= {}^{RL}I^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.1.14 *[70, 43] Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :*

$$\Big[{}_aI^{\alpha}(\lim_{k\to+\infty} f_k)\Big](t) = \lim_{k\to+\infty} {}_aI^{\alpha}f_k(t). \tag{1.1.20}$$

Preuve. Soit $f_k \longrightarrow f$ simplement convergente et pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
|{}_aI^{\alpha}f_k(t) -{}_a I^{\alpha}f(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}|f_k(s)-f(s)|ds,\\
&\leq \frac{\|f_k(s)-f(s)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}ds,\\
&\leq \frac{\|f_k(s)-f(s)\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha},\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_k(s)-f(s)\|_\infty(b-a)^{\alpha} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

• ***Intégrale fractionnaire à droite :***

On peut remarquer que l'intégrale

$$({}_bI_t^1 f)(t) = \int_b^t f(s)ds = -\int_t^b f(s)ds,$$

est aussi une primitive de f, qui s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f.

A partir de la relation

$$\int_b^t (t-s)^{n-1}f(s)ds = (-1)^n\int_t^b (s-t)^{n-1}f(s)ds,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$({}_bI_t^n f)(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_t^b (s-t)^{n-1} f(s)ds.$$

Et de même que l'intégrale fractionnaire à gauche, La fonction ${}_bI_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_bI_t^n f)^{(k)}(b) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ ({}_bI_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

Définition 1.1.15 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_bI_t^\alpha$ défini sur $L^1([a,b])$ par :*

$$ {}_bI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{1.1.21}$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.

On signale ici que la plupart des travaux sur cette théorie utilisent souvent les définitions "à gauche", et que les définitions "à droite" sont rarement utilisées car elles sont anti-causales (vue qu'elles dépendent du futur des fonctions car le s dépasse t).

Dérivation fractionnaire :

Nous présentons dans cette partie les approches les plus fréquemment utilisées dans les applications : approches de Grunwald-letnikov, de Riemann-Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés. Nous signalons que ces approches ne sont pas toutes équivalentes.

Approche de Grünwald-Letnikov :

Cette définition se base sur l'obtention des dérivées par des différences finies. (Pour plus de détails voir [28, 29, 66]).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Notons T_h l'opérateur de translation à gauche défini comme suit :

$$T_h f(t) = f(t-h).$$

On a donc

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(id - T_h)f(t).$$

Ainsi $T_h^2 f(t) = f(t-2h)$, (en notant $T_h^2 = T_h \circ T_h$)
par suite,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}(id - T_h)\right)^2 f(t), \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}(id - 2T_h + T_h^2) f(t), \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)). \end{aligned}$$

Et par la formule de Newton, on obtient la dérivée $n^{ième}$ de f

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n}(id - T_h)^n f(t), \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} id^{n-k}(-T_h)^k f(t), \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Une généralisation naturelle de cette formule consiste à définir la dérivée d'ordre α non entier, (avec $0 \leq n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) par

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} f(t-kh).$$

Comme

$$(-1)^k \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1),$$

et que pour $\alpha > 0$ non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(1-\alpha)...(k-\alpha-1).$$

On obtient ainsi, la formule de Grünwald-Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier.

Définition 1.1.16 *Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald- Letnikov d'ordre α est définie par*

$$^{GL}D^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh), \tag{1.1.22}$$

et

$$^{GL}D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \to 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh). \tag{1.1.23}$$

Il est à noter que la relation (1.1.22), due à Liouville (1832), puis Grünwald (1863) et Letnikov (1868), est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire, et que dans cette relation les nombres $\Gamma(-\alpha+k)$ ne sont pas nuls et que la dérivée fractionnaire d'ordre α pour $0<\alpha<1$ dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre $\alpha=1$) qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

Remarque 1.1.17

Si f est de classe C^n , alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$^{GL}D^{\alpha}f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds, \tag{1.1.24}$$

$$^{GL}D^{-\alpha}f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(s)ds. \tag{1.1.25}$$

Exemple 1.1.18

1- *Soit α non entier avec $0\leq n-1<\alpha<n$ et $f(t)=C$ une fonction constante, on a*

$$\begin{aligned}^{GL}D^{\alpha}f(t)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds,\\&=\frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$^{GL}D^{\alpha}C=\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}C.$$

En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est nulle ni constante.

2- *Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, de la fonction* $g(t)=(t-a)^p$

Soit α non entier et $0\leq n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. Pour la convergence de l'intégrale (1.1.24) *on a besoin que $p>n-1$.*

On a $g^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,...,n-1$ et $g^{(n)}(t)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-n}$, d'où

$$^{GL}D^{\alpha}(t-a)^p=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{p-n}ds.$$

En posant $s=a+\tau(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}^{GL}D^{\alpha}(t-a)^p&=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}\int_0^1(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{p-n}ds,\\&=\frac{\Gamma(p+1)B(n-\alpha,p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha},\\&=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}.\end{aligned}$$

D'où
$$ {}^{GL}D^{\alpha}(t-a)^{p} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}. \tag{1.1.26} $$

En particulier
$$ {}^{GL}D^{\alpha}(t-a)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1). $$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier*** [69]

Soit $m \in \mathbb{N}$ et α non entier, on a :

$\star$ $\dfrac{d^m}{dt^m}\Big({}^{GL}D^{\alpha}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{m+\alpha}f(t)$.

$\star$ ${}^{GL}D^{\alpha}\Big(\dfrac{d^m}{dt^m}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{m+\alpha}f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k-m}}{\Gamma(-\alpha+k-m+1)}$.

Cas particulier : Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; m-1$, on a
$$ {}^{GL}D^{\alpha}\Big(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\Big) = \frac{d^m}{dt^m}\Big({}^{GL}D^{\alpha}f(t)\Big). $$

C'est à dire que la dérivation fractionnaire et la dérivation usuelle, commutent dans ce cas .

- ***Composition avec les dérivées d'ordres fractionnaires*** [69]

$\triangleright$ Dans le but de calculer ${}^{GL}D^{p}\Big({}^{GL}D^{q}f(t)\Big)$, on sépare les deux cas : $q < 0$ et $q > 0$.

Dans le cas où $q < 0$ et $p < 0$, on applique l'intégration d'ordre $-p > 0$ à l'intégration d'ordre $-q > 0$, et dans le cas où $q < 0$ et $p > 0$, c'est la dérivation fractionnaire d'ordre $p > 0$ qu'on applique à l'intégration d'ordre $-q > 0$ et de même pour les deux autres cas.

$\triangleright$ Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors
$$ {}^{GL}D^{p}\Big({}^{GL}D^{q}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{p+q}f(t) $$

$\triangleright$ Si $0 \le m-1 < q < m$ et $p < 0$ alors
$$ {}^{GL}D^{p}\Big({}^{GL}D^{q}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{p+q}f(t). $$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; m-2$.

$\triangleright$ Si $0 \le m-1 < q < m$ et $0 \le n-1 < p < n$, alors
$$ {}^{GL}D^{p}\Big({}^{GL}D^{q}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{q}\Big({}^{GL}D^{p}f(t)\Big) = {}^{GL}D^{p+q}f(t). $$

si et seulement si $f^{k}(a) = 0$ pour $k = 0; 1; ...; r-2$ avec $r = max(m, n)$.

Approche de Riemann-Liouville :

La manipulation des dérivées fractionnaires au sens de Grüwald-Letnikov définie comme limite d'une différence d'ordre factionnaire, n'est pas commode. L'expression de la Remarque 1.1.17 est bien meilleure grâce à la présence de l'intégrale dedans; pour se débarrasser du terme non intégrale dans cette expression, on le considère comme un cas particulier de l'expression intégro-différentielle suivante :

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds. \tag{1.1.27}$$

C'est à dire

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Big(I^{n-\alpha}f(t)\Big), \tag{1.1.28}$$

avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette expression est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire ; elle est appelée : définition de Riemann-Liouville.

Évidemment, l'expression de la dérivée fractionnaire de Grüwald-Letnikov de la Remarque 1.1.17 obtenue sous l'hypothèse que la fonction $f(t)$ doit être n-fois continûment différentiable, peut être obtenue à partir de cette expression sous la même hypothèse en faisant des intégrations par parties et différentiations répétées.

De plus, si on considère une classe de fonctions $f(t)$ admettant (n) dérivées continues pour $t \geq 0$, alors la définition de Grünwald-Letnikov de la Remarque 1.1.17 est équivalente à la définition 1.1.27 de Riemann-Liouville.

Remarque 1.1.19 *Par ce fait et de point de vue purement mathématique, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Grüwald-Letnikov est réduite ; cependant, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Riemann-Liouville est très importante car le caractère de la majorité des processus dynamiques est assez régulier et ne présente pas des discontinuités.*

Ceci caractérise et surtout distingue la propre utilisation de ces deux approches de dérivation fractionnaires dans les applications.

On peut signaler donc, que la définition de Riemann-Liouville donne une excellente opportunité pour affaiblir les conditions sur la fonction f(t). A savoir, il suffit de demander l'intégrabilité de la fonction $f(t)$ *et alors l'intégrale* (1.1.27) *existe pour* $t > a$ *.*

Exemple 1.1.20

1- *Soit* α *non entier avec* $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f(t) = C$ *une fonction constante, on a :* ${}^{RL}D^{\alpha}C = {}^{GL}D^{\alpha}C$ *et donc*

$$ {}^{RL}D^{\alpha}C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}C, $$

2- *Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, de la fonction* $g(t) = (t-a)^p$.

Soit α *non entier et* $0 \leq n-1 < \alpha < n$ *et* $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

$$ {}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^p ds. $$

A l'aide de la fonction Bêta et en posant $s = a + \tau(t-a)$, *on a :*

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+p}\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^p d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^p d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}B(n-\alpha, p+1), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha+p+1)}(t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned} $$

Par suite,

$$ {}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}. $$

La seule restriction pour $f(t) = (t-a)^p$ *est son intégrabilité à savoir :* $p > -1$

3- *Pour* $\alpha = p = \frac{1}{2}$ *on a donc :* ${}^{RL}D^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\frac{3}{2})$.

• ***Composition à droite avec l'intégrale fractionnaire***[69]

Pour $\alpha > 0$ et $t > a$, on a :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\alpha}f(t)\Big) = f(t). \tag{1.1.29} $$

C'est à dire que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire. En effet,
on sépare les cas suivants :

▷ Cas où $\alpha = k \in \mathbb{N}^*$.

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{k}\Big({}^{RL}I^{k}f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-s)^{k-1}f(s)ds, \\ &= \frac{d}{dt}\int_a^t f(s)ds, \\ &= f(t). \end{aligned} $$

▷ Cas où $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$

On sait que

$$^{RL}I^{n-\alpha}\Big({}^{RL}I^{\alpha}f(t)\Big) = ^{RL} I^{n}f(t),$$

et que

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Big(I^{n-\alpha}f(t)\Big).$$

On a alors,

$$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\alpha}f(t)\Big) &= \frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{RL}I^{n-\alpha}({}^{RL}I^{\alpha}f(t))\Big), \\ &= \frac{d^n}{dt^n} {}^{RL}I^{n}f(t), \\ &= f(t). \end{aligned}$$

• ***Composition à gauche avec l'intégrale fractionnaire*** [69]

Pour $n-1 \leq \alpha < n$ et si $^{RL}D^{\alpha}f(t)$ est intégrable, alors :

$$^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} [\, {}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.1.30}$$

En effet,

On sait que :

$$\begin{aligned} ^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\, {}^{RL}D^{\alpha}f(s)ds, \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}\, {}^{RL}D^{\alpha}f(s)ds\Big). \end{aligned}$$

Puisque $^{RL}D^{\alpha}f(t)$ est intégrable, alors toutes les dérivées fractionnaires $^{RL}D^{\alpha-k}f(t)$, $(k = 1, 2, ..., n)$ sont bornées en $t = a$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_a^t (t-s)^{\alpha}\, {}^{RL}D^{\alpha}f(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\Big(I_t^{n-\alpha}f(s)\Big)ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}I_t^{n-\alpha}f(s)ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\Big({}^{RL}I^{n-\alpha}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}I^{n-\alpha}f(s)ds - \sum_{k=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}, \\ &=^{RL} I^{\alpha-n+1}\Big({}^{RL}I^{n-\alpha}f(t)\Big) - \sum_{k=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}, \\ &=^{RL} I^{1}f(t) - \sum_{k=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) &={}^{RL} I^{1}f(t)-\sum_{k=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha-k+2)},\\
&= f(t)-\sum_{k=1}^{n}[\,{}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Cas prticulier :

Pour $0<\alpha<1$ on a :

$$
{}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big)=f(t)-[\,{}^{RL}D^{\alpha-1}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},
$$

par conséquent

$$
{}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big)=f(t)-\Big[\,{}_{a}I_{t}^{1-\alpha}f(t)\Big]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
$$

• ***Composition à droite avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.***[69]

Pour $\alpha\geq 0$ et $\beta\geq 0$, on a :

$$
{}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\beta}f(t)\Big)={}^{RL} D^{\alpha-\beta}f(t), \tag{1.1.31}
$$

où f est une fonction continue, et que ${}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)$ existe si $\alpha\geq\beta$. (si $\alpha-\beta<0$, alors : ${}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)= {}^{RL}I^{\beta-\alpha}f(t)$).

En effet,

— Si $\beta\geq\alpha\geq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\beta}f(t)\Big) &={}^{RL} D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\alpha}\,{}^{RL}I^{\beta-\alpha}f(t)\Big),\\
&={}^{RL} I^{\beta-\alpha}f(t).
\end{aligned}
$$

— Si $\alpha>\beta\geq 0$, on a :

Pour n et m deux entiers tels que : $0\leq n-1\leq\alpha<n$ et $0\leq m-1\leq\alpha-\beta<m$,

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}I^{\beta}f(t)\Big) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\Big({}^{RL}I^{n-\alpha}({}^{RL}I^{\beta}f(t))\Big),\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\Big({}^{RL}I^{n-\alpha+\beta}f(t)\Big),\\
&= \frac{d^{m}}{dt^{m}}\Big({}^{RL}I^{m-\alpha+\beta}f(t)\Big),\\
&={}^{RL} D^{\alpha-\beta}f(t).
\end{aligned}
$$

• ***Composition à gauche avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.*** [69]

Pour $0\leq m-1\leq\beta<m$, on a :

$$
{}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big)={}^{RL} D^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{m}[\,{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{1.1.32}
$$

En effet,

De même que ce qui précède, deux cas se posent :

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta, & (\text{on utilise la relation : } {}^{RL}I^{\alpha} \circ {}^{RL}I^{\beta} = {}^{RL} I^{\alpha+\beta}), \\ \alpha \leq \beta, & (\text{on utilise la relation : (1.1.31)}). \end{cases}$$

Par la relation : (1.1.30) on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) &= {}^{RL} D^{\beta-\alpha}\Big({}^{RL}I^{\beta}\, {}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big), \\ &= {}^{RL} D^{\beta-\alpha}\Big(f(t) - \sum_{k=1}^{m} [\,{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)}\Big), \end{aligned}$$

et d'après (1.1.26), on obtient

$${}^{RL}D^{\beta-\alpha}\Big(\frac{(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)}\Big) = \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Par suite,

$${}^{RL}I^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = {}^{RL} D^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{k=1}^{m} [\,{}^{RL}D^{\beta-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

- ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :*** [69]

Pour $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^k}{dt^k}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) = {}^{RL} D^{k+\alpha}f(t), \tag{1.1.33}$$

$${}^{RL}D^{\alpha}\Big(\frac{d^k}{dt^k}f(t)\Big) = {}^{RL} D^{k+\alpha}f(t) - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{i}(a)(t-a)^{i-\alpha-k}}{\Gamma(i-\alpha-k+1)}. \tag{1.1.34}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma((n+k)-(\alpha+k))}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-s)^{(n+k)-(\alpha+k)-1}f(s)ds \\ &= {}^{RL} D^{\alpha+k}f(t). \end{aligned}$$

$(\,n+k-1 \leq \alpha+k < n+k\,)$.

Pour la deuxième relation, on a :

$${}^{RL}D^{\alpha}g(t) = {}^{RL} D^{\alpha+k}\Big({}^{RL}I^{k}g(t)\Big).$$

De plus,

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^{k}f^{(k)}(t) &= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^t (t-s)^{k-1}f(k)(s)ds, \\ &= f(t) - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i}}{\Gamma(i+1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}\Big(\frac{d^k}{dt^k}f(t)\Big) &={}^{RL} D^{\alpha}f^k(t),\\
&={}^{RL} D^{\alpha+k}\Big({}^{RL}I^k f^k(t)\Big),\\
&={}^{RL} D^{\alpha+k}\Big(f(t)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)}\Big),\\
&={}^{RL} D^{\alpha+k}f(t)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i-\alpha-n+1)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.21 *Comme ce qui se passe avec la dérivée de Grüwald-Letnikov, la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivation usuelle (d'ordre entière) ne commutent que si :* $f^{(i)}(a)=0$ *pour* $i=0,1,2,...,n-1$.

- ***Composition des dérivées fractionnaires.***[69]

Pour $n-1\leq\alpha<n$ et $m-1\leq\beta<m$, on a :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) ={}^{RL} D^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{i=1}^{m}[{}^{RL}D^{\beta-i}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(-\alpha-i+1)}, \tag{1.1.35}$$

$$ {}^{RL}D^{\beta}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) ={}^{RL} D^{\beta+\alpha}f(t)-\sum_{i=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-i}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(-\beta-i+1)}. \tag{1.1.36}$$

En effet,

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = \frac{d^m}{dt^m}\Big(I^{m-\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big).$$

En introduisant la relation (1.1.32), on obtient

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = \frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{RL}D^{\alpha+\beta-n}f(t)-\sum_{i=1}^{m}[{}^{RL}D^{\beta-i}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{n-\alpha-i}}{\Gamma(n-\alpha-i+1)}\Big).$$

Par suite

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) ={}^{RL} D^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{i=1}^{m}[{}^{RL}D^{\beta-i}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(-\alpha-i+1)}\Big).$$

De même :

$$ {}^{RL}D^{\beta}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) ={}^{RL} D^{\beta+\alpha}f(t)-\sum_{i=1}^{n}[{}^{RL}D^{\alpha-i}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(-\beta-i+1)}\Big).$$

En général, les opérateurs de dérivation fractionnaire, au sens de Riemann-Liouville, ne

commutent pas.
Mais, on a la propriété essentielle suivante :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\Big({}^{RL}D^{\beta}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\beta}\Big({}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\alpha+\beta}f(t), \tag{1.1.37} $$

si et seulement si

$$ \begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha-i}f(t)]_{t=a} = 0, & \text{i=1,2,...,n,} \\ {}^{RL}D^{\beta-i}f(t)]_{t=a} = 0, & \text{i=1,2,...,m.} \end{cases} $$

Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov :

Il existe une relation entre les approches, de différentiation d'ordre réel arbitraire, de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov.
Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle $[a,T]$ telle que $f^{(n)}$ est intégrable sur $[a,T]$
.
Pour tout α tel que $0 < \alpha < n$, la dérivée ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$, au sens de Riemann-Liouville, existe et coïncide avec la dérivée ${}^{GL}D^{\alpha}f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov.
Si $0 \leq n-1 \leq \alpha < n \leq m$, on a :

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = {}^{GL}D^{\alpha}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds. \end{aligned} \tag{1.1.38} $$

En effet, la deuxième égalité vient de la relation (1.1.24).
Pour la première égalité, on a :

$$ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds $$

$$ = \frac{d^n}{dt^n}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds\Big]. $$

Après intégration par parties, on retrouve la forme de la dérivée ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$ au sens de Riemann-Liouville.

— Si f est continue et f' est intégrable sur un intervalle $[a,T]$ alors pour tout α $(0 < \alpha < 1)$, les deux dérivées de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov existent et peuvent s'écrire sous la forme :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = {}^{GL}D^{\alpha}f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds. \tag{1.1.39} $$

— D'après la relation (1.1.38), l'existence de la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ entraîne l'existence de la dérivée d'ordre tout β tel que $0 < \beta < \alpha$.
C'est à dire que pour une fonction f continue admettant une dérivée intégrable, la dérivée de Riemann-Liouville (Grünwald-Letnikov) ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$ existe et est intégrable, alors pour tout β tel que $0 < \beta < \alpha$ la dérivée ${}^{RL}D^{\beta}f(t)$ existe aussi et est intégrable.
En effet, on sait que

$$ {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = \frac{d}{dt}\Big({}^{RL}I^{1-\alpha}f(t)\Big), $$

et donc si on note par $g(t) = {}^{RL}I^{1-\alpha}f(t)$, on aura ${}^{RL}D^{\alpha}f(t) = g'(t)$ et $g'(t)$ par hypothèse est intégrable.
Puisque $0 < 1+\beta-\alpha < 1$, on en déduit par la formule (1.1.39), que ${}^{RL}D^{1+\beta-\alpha}f(t)$ existe et intégrable.
Et donc par la formule (1.1.31), on a :

$$ {}^{RL}D^{1+\beta-\alpha}f(t) \;=\; {}^{RL}D^{1+\beta-\alpha}\Big({}^{RL}I^{1-\alpha}f(t)\Big) = {}^{RL}D^{\beta}f(t). $$

— La relation entre les définitions de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville a aussi une autre conséquence qui est très importante pour la formulation des problèmes appliqués, la manipulation avec des dérivées fractionnaires et la formulation du sens physique des problèmes à valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

— Sous les mêmes hypothèses sur la fonction f ($f(t)$ est $(n-1)$-fois continument différentiable et sa $n^{\text{ième}}$ dérivée est intégrable dans $[a;T]$) et sur α ($n-1 \leq \alpha < n$) la condition :

$$ \Big[{}^{RL}D^{\alpha}f(t)\Big]_{t=a} \;=\; 0, \tag{1.1.40} $$

est équivalente aux conditions :

$$ f^{(i)}(a) \;=\; 0 \quad ; \quad i = 0,1,...,n-1. \tag{1.1.41} $$

En effet, si les conditions (1.1.41) sont vérifiés, alors en faisant tendre t vers a dans (1.1.38), on obtient immédiatement (1.1.40). D'autre part, si la condition (1.1.40) est vérifié, alors en multipliant par la suite les deux membres de (1.1.38) par $(t-a)^{\alpha-j}$ pour $j = m-1, m-2, ..., 0$ et en prenant les limites quand $t \to a$ nous obtenons $f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m-2)}(a) = 0$, ... ,$f'(a) = 0$, $f(a) = 0$.
Par suite, (1.1.40) a lieu si et seulement si (1.1.41) est vérifié.
De l'équivalence des conditions (1.1.40) et (1.1.41), il vient immédiatement que si,

pour un certain $\alpha > 0$, la dérivée α-ème de f(t) est égale à zéro en la borne $t = a$, alors toutes les dérivées d'ordre β avec $(0 < \beta < \alpha)$ sont aussi égales à zéro en $t = a$:

$$\left[{}^{RL}D^{\beta}f(t)\right]_{t=a} = 0.$$

Approche de Caputo :

La première et la plus importante remarque a propos de cette approche est qu'elle prévoit la formulation des conditions initiales pour des problèmes aux valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous une forme faisant apparaître seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$, comme $y'(a)$; $y''(a)$; etc...

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaire autorisant l'utilisation des conditions initiales interopérables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$; $f'(a)$; etc...

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$, par exemple

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to a} {}^{RL}D^{\alpha-1}f(t) = b_1,\\
&\lim_{t\to a} {}^{RL}D^{\alpha-2}f(t) = b_2,\\
&\qquad\dots\\
&\lim_{t\to a} {}^{RL}D^{\alpha-n}f(t) = b_n,
\end{aligned}$$

où $b_j, j = 1, 2, ..., n$ sont des constantes données.

Malgré le fait que des problèmes avec des telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir, par exemple, solutions données dans [42]), leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales : c'est un conflit entre la théorie athématique bien établie et les besoins pratiques.

Pour remédier à ce problème M.Caputo a proposé la définition suivante :

Pour $\alpha \geq 0$ (avec $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\dfrac{d^n f}{dt^n} \in L^1([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds. \tag{1.1.42}$$

C'est à dire que

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}I^{n-\alpha}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big). \tag{1.1.43}$$

Remarque 1.1.22
Si $\alpha \to n$*, alors* ${}^{C}D^{\alpha}f(t)$ *coincide avec* $\dfrac{d^n}{dt^n}f(t)$
(Sous des conditions naturelles sur la fonction f*)*
En effet,
supposons que la fonction f *admet* $(n+1)$ *dérivées bornées continues dans* $[a,T]$ *pour tout* $T > a$.
Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n} {}^{C}D^{\alpha}f(t) &= \lim_{\alpha\to n}\Big(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n+1)}(s)ds\Big),\\
&= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s)ds,\\
&= f^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

L'approche de Caputo fournit donc, une interpolation entre les dérivées d'ordre entier.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées au sens de Caputo accepte la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.
i.e., contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure $t = a$.

Exemple 1.1.23

1- *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle*

$${}^{C}D^{\alpha}C = 0.$$

par contre, la dérivée d'une constante au sens de Riemann-Liouville ne l'est pas.

2 *Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, de la fonction* $g(t) = (t-a)^p$.
Soit α *non entier et* $0 \le n-1 < \alpha < n$ *et* $p > n-1$ *alors :*

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}g^{(n)}(s)ds,\\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1-n)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{p-n}ds.
\end{aligned}$$

Et par le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$*, on a :*

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1-n)}(t-a)^{p-\alpha}\int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1}s^{p-n}ds,\\
&= \frac{\Gamma(p+1)B(n-\alpha,p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1-n)}(t-a)^{p-\alpha},\\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1-n)\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$ {}^{C}D^{\alpha}(t-a)^{p} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}. $$

• ***Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :***

Pour $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et f une fonction telle que ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$ et ${}^{C}D^{\alpha}f(t)$ existent.

Alors

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}. \tag{1.1.44} $$

Par conséquent,

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, alors

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t). $$

• ***Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :***

Si f est continue, alors

$$ {}^{C}D^{\alpha}\, {}^{RL}I^{\alpha}f(t) = f(t), \tag{1.1.45} $$

et

$$ {}^{RL}I^{\alpha}\, {}^{C}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}. \tag{1.1.46} $$

Ainsi, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse droit.

Dérivée fractionnaire séquentielle

Le but général des approches de dérivation fractionnaire citées au paravant est la généralisation de l'intégration et de la différentiation d'ordre entier. Cependant, il y'a aussi une autre approche qui est moins connue, mais qui peut être de grande importance pour plusieurs applications. Cette approche est basée sur l'observation que, en fait, une différentiation du n-ème ordre est tout simplement une série de différentiations de premier ordre

$$ \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} \quad ... \quad \frac{d}{dt}}_{n-\text{fois}} f(t). \tag{1.1.47} $$

Par le fait de remplacer la dérivée d'ordre premier $\frac{d}{dt}$ par la dérivée D^α d'ordre non entier α avec : $0 < \alpha < 1$ et par analogie à (1.1.47), on peut écrire

$$D^{n\alpha}f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \;\ldots\; D^\alpha}_{n-\text{fois}} f(t). \tag{1.1.48}$$

Dans le cas où la dérivée fractionnaire utilisée dans (1.1.48) est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ${}^{RL}D^\alpha$, K.S. Miller et B. Ross ont appelé cette différentiation généraliser différentiation séquentielle et ont considéré des équations différentielles avec dérivées fractionnaires séquentielles du type (1.1.48) dans leur livre [61], en prenant au lieu de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville celle de Caputo où bien celle de Grunwald-Letnikov, on obtient d'autres formules des dérivées fractionnaires séquentielles.
Dans (1.1.48), si on remplace chaque dérivée de premier ordre dans (1.1.47) par des dérivées fractionnaires d'ordres qui ne sont pas nécessairement égaux, on obtient l'expression plus générale suivante :

$$D^{\alpha}f(t) = \underbrace{D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \;\ldots\; D^{\alpha_n}}_{n-\text{fois}} f(t), \tag{1.1.49}$$

avec : $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,
appelée aussi dérivée fractionnaire séquentielle.
L'opérateur D^α dans (1.1.49) peut désigner l'opérateur de différentiation de Riemann-Liouville, de Caputo ou tout autre mutation.

Remarque 1.1.24
La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont des cas particuliers de la dérivée séquentielle (1.1.49) .

En effet,
la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire comme

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} \;\ldots\; \frac{d}{dt}}_{n-\text{fois}} I^{n-\alpha}f(t),$$

et la dérivée fractionnaire de Caputo peut elle aussi s'écrire sous la forme

$$^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}I^{n-\alpha} \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} \;\ldots\; \frac{d}{dt}}_{n-\text{fois}} f(t).$$

On peut enfin constater que à cause de la relation

$$^{RL}I^{\alpha}\left({}^{RL}I^{\beta}f(t)\right) = {}^{RL}I^{\alpha+\beta}f(t) = {}^{RL}I^{\beta}\left({}^{RL}I^{\alpha}f(t)\right),$$

la considération des opérateurs séquentiels d'intégrales n'aura pas d'intérêts.

Dérivation fractionnaire à droite :

Dans tous les approches considérées au paravant, la borne inférieure a est fixée et la borne supérieure t est variable. Il est aussi possible de considérer des dérivées fractionnaires en faisant varier la borne inférieure t tout en fixant la borne supérieure b.
La dérivée fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle $[a, b]$, ${}_aD^{\alpha}f(t)$, est appelée dérivée fractionnaire à gauche.
Et donc la dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle $[a, b]$ est appelée dérivée fractionnaire à droite.
La première différence entre ces deux dérivées est que sur l'intervalle $[a, t]$ on s'intéresse au passé de $f(t)$, mais sur l'intervalle $[t, b]$ et puisque içi $s \geq t$ alors on s'intéresse au futur de $f(t)$.
Comme pour les dérivées fractionnaires à gauhe, la notion des dérivées fractionnaires à droite peut être introduite pour n'importe quelle mutation de différentiation fractionnaire : Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ou Caputo .
Pour $n - 1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche est définie par :

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds.$$

La dérivée à droite, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par [42] :

$$^{RL}D^{\alpha}f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dt}\right)^n\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds.$$

Les dérivées à droite de Caputo et de Grünwald-Letnikov peuvent être définies de la même manière.

Remarque 1.1.25 (Pourquoi les dérivées fractionnaires à droite)

Si on suppose que t est le temps et que $f(t)$ décrit un certain processus dynamique qui évolue en temps. Si on prend $s < t$, où t est le moment présent, alors l'état $f(s)$ du processus $f(t)$ appartient au passé du processus ; si on prend $s > t$, $f(s)$ appartient au futur du processus de f.
De ce point de vue, la dérivée à gauche est une opération exécutée dans les états passés du processus f et la dérivée à droite est une opération exécutée dans les états futurs du processus f.
Comme on n'est pas informé de la dépendance de l'état présent de n'importe quel processus sur les résultats de son évolution dans le futur, la plupart des travaux sur les dérivées fractionnaires considèrent seulement les dérivées à gauche.

1.1.4 Propriétés des dérivées fractionnaires :

Linéarité :

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha\Big(\lambda f(t)+\mu g(t)\Big) = \lambda D^\alpha f(t)+\mu D^\alpha g(t), \tag{1.1.50}$$

où D^α désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans cette thèse.

Cette propiété découle directement des définitions de ces dérivées. Par exemple, pour la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^\alpha\Big(\lambda f(t)+\mu g(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{ds^n}\Big(\lambda f(s)+\mu g(s)\Big)ds,\\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{ds^n}f(s)ds,\\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{ds^n}g(s)ds,\\
&= \lambda\, {}^{C}D^\alpha f(t)+\mu\, {}^{C}D^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

Règle de Leibnitz :

Pour n entier, la règle bien connue de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions f et g est donnée par :

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big(f(t)g(t)\Big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t).$$

Si on remplace l'entier n par un réel α, alors la dérivée d'ordre entier $g^{(n-k)}(t)$ sera remplacer par la dérivée d'ordre fractionnaire $D^{(\alpha-k)}g(t)$, et la généralisation de cette formule nous donne :

$$D^\alpha\Big(f(t)g(t)\Big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t) - R_n^\alpha(t), \tag{1.1.51}$$

où $n \geq \alpha+1$ et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}g(s)ds\int_s^t (s-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau,$$

où D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Remarque 1.1.26

1- La somme dans la relation (1.1.51) peut être considérée comme une somme partielle de séries infinies et $R_n^\alpha(t)$ comme un reste de ces séries.

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^\alpha(t) = 0$, en effet :
En utilisant les deux changements de variables suivants : $\tau = s + \zeta(t-s)$ et $s = a + \eta(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} R_n^\alpha(t) &= \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} g(s) ds \int_0^1 (s-\tau)^n f^{(n+1)}(s+\zeta(t-s))\zeta^n d\zeta, \\ &= \frac{(-1)^n (t-a)^{n-\alpha+1}}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \int_0^1 H_a(t,\zeta,\eta) d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

avec $H_a(t,\zeta,\eta) = g(a+\eta(t-a)) f^{(n+1)}(a+(t-a)(\zeta+\eta-\zeta\eta))$.
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^\alpha(t) = 0$.

3- Si $g(s)$ et $f(s)$ avec toutes leurs dérivées sont continues dans $[a,t]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire prend la forme suivante :

$$D^\alpha\Big(f(t)g(t)\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t).$$

On peut donc remarquer que cette propriété est spécialement utile pour le calcul de la dérivée fractionnaire d'un produit d'une fonction g continue et d'une fonction polynomiale f aussi continue et de même pour ses derivées.

1.1.5 Différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville d'une intégrale dépendante d'un paramètre

Dans ce paragraphe, on donnera une propriété analogue à la propriété qui suit, de la différentiation d'une intégrale dépendante d'un paramètre avec la limite supérieure dépendante du même paramètre.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t G(t,s)ds = \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} ds + \lim_{s\to t^-} G(t,s).$$

On considère l'intégrale $\int_0^t G(t,s)ds$ dépendante du paramètre t et telle que la limite supérieure dépend aussi de ce paramètre, pour $0 \le \alpha < 1$, on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha \int_0^t G(t,s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \Big(\int_0^\tau G(\tau,s)ds\Big) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_s^\tau (t-\tau)^{-\alpha} G(\tau,s) d\tau, \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t \widetilde{G}(t,s) ds, \end{aligned}$$

où $\widetilde{G}(t,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^t (t-\eta)^{-\alpha} G(\eta,s) d\eta$.

D'aprés la propriété de dérivation entière d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on a :

$$^{RL}D^{\alpha} \int_0^t G(t,s)ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{G}(t,s)ds + \lim_{s \to t^-} \widetilde{G}(t,s).$$

Par suite :

$$^{RL}D^{\alpha} \int_0^t G(t,s)ds = \int_0^t {}_sD_R^{\alpha} G(t,s)ds + \lim_{s \to t^-} {}_sD_R^{\alpha-1} G(t,s). \tag{1.1.52}$$

1.1.6 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires

La transformée de Laplace joue un rôle important dans la résolution des équations différentielle d'ordre entier, donc il est utile de prolonger cette notion au cas des équations différentielles fractionnaires. On donnera la définition de la transformée des approches déjà citées.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Commençons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ définie par la formule (1.1.16).

Cette formule peut s'écrire comme une convolution des deux fonctions :

$\phi(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$ comme suit :

$$^{RL}I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \tag{1.1.53}$$

La transformée de Laplace de la fonction $\phi(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ est

$$\Phi(s) = \mathcal{L}(t^{\alpha-1}; s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire :

$$\mathcal{L}\{ {}^{RL}I^{\alpha} f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s).$$

Maintenant, pour le calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous écrivons cette dérivée sous la forme suivante :

$${}_0D_R^{\alpha} f(t) = g^{(n)}(t),$$

avec :

$$g(t) = {}_0I_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds.$$

Par la formule (1.1.11) de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier, on a :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_R^{\alpha} f(t); s\} = \mathcal{L}\{g^{(n)}(t); s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0).$$

D'aprés ce qui précéde, la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = {}_0I_t^{n-\alpha} f(t)$ est donnée par :

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s).$$

Donc

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_R^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0).$$

Comme $g(t) = {}_0I_t^{n-\alpha} f(t)$, il s'ensuit que

$$g^{(n-k-1)}(t) = {}_0D_R^{\alpha-k-1} f(t).$$

Par suite,

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_R^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_R^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \quad (1.1.54)$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

Dans le but d'établir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, Nous utiliserons la dérivée donnée par la formule (1.1.43) :

$${}^{C}D^{\alpha} f(t) = {}^{RL}I^{n-\alpha} \Big(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \Big) = {}^{RL}I^{n-\alpha} g(t),$$

où $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} = g(t)$.

Par l'utilisation de la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_c^{\alpha} f(t); s\} = s^{-(n-\alpha)} G(s),$$

où

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

Par suite, on obtient la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_c^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (1.1.55)$$

Remarque 1.1.27

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction $f(t)$ et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour les quelles une certaine interprétation physique existe (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale ...) , on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.
Par contre, l'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est limitée, ceci est due à l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.
Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov :
On commence par le cas où $0 \leq \alpha < 1$, par la formule (1.1.24) on a :

$$ {}^{GL}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds. $$

En utilisant la transformée de Laplace de la convolution de la fonction polynôme et de la dérivée d'ordre entier, on obtient :

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^{GL}D_0^{\alpha} f(t); s\} &= \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{1}{s^{1-\alpha}}(sF(s) - f(0)), \\ &= s^{\alpha} F(s). \end{aligned} $$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha > 1$ n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non-intégrables dans la somme de la formule (1.1.24).

1.2 La dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Hilfer

Définition 1.2.1 *[38] La dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α et de paramètre β d'une fonction $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ (également connue sous le nom de la dérivée fractionnaire généralisée de Riemann-Liouville) est définie par*

$$ {}^{H}D^{\alpha,\beta} f(t) = I^{\beta(n-\alpha)} D^n I^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(t), \tag{1.2.1} $$

où $n - 1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$, $t > a$, $D := \left(\frac{d}{dt}\right)$.

Remarque 1.2.2 *Lorsque $\beta = 0$, la dérivée fractionnaire de Hilfer correspond à la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :*

$$ {}^{H}D^{\alpha,0} f(t) = D^n I^{(n-\alpha)} f(t). \tag{1.2.2} $$

Lorsque $\beta = 1$, la dérivée fractionnaire de Hilfer correspond à la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$ {}^{H}D^{\alpha,1} f(t) = I^{(n-\alpha)} D^n f(t). \tag{1.2.3} $$

Lemme 1.2.3 *[38] Soit* $f \in L^1(a,b)$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$, *et* $I^{(1-\beta)(n-\alpha)}f \in AC^k([a,b])$ *alors*

$$\left(I^{\alpha H}D^{\alpha,\beta}f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-(n-\alpha)(1-\beta)}}{\Gamma(k-(n-\alpha)(1-\beta)+1)} \cdot \lim_{t \to +a} \frac{d^k}{dt^k}\left(I^{(1-\beta)(n-\alpha)}f\right)(t). \quad (1.2.4)$$

1.3 L'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens ψ :

1.3.1 L'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville :

Définition 1.3.1 *[6] Soit* α *un réel strictement positif,* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $\psi \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ *une fonction croissante tel que* $\psi' \neq 0$, *pour tous* $t \in [a,b]$ *L'intégrale fractionnaire au sens de* ψ*-Riemann-Liouville d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(t)(\Psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}f(s)ds. \quad (1.3.1)$$

Définition 1.3.2 *[6] Soit* α *un réel strictement positif,* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $\psi \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ *une fonction croissante tel que* $\psi' \neq 0$, *pour tous* $t \in [a,b]$ *la dérivée fractionnaire au sens de* ψ*-Riemann-Liouville d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t) &= f_{\Psi}^{[n]}(t) I_{a^+}^{n-\alpha;\psi}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} f_{\Psi}^{[n]}(t) \int_a^t \Psi'(t)(\psi(t)-\Psi(s))^{n-\alpha-1}ds, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

où $f_{\psi}^{[n]}(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$, $n-1 \leq \alpha < n$, : $n = [\alpha]+1$ *avec* $[\alpha]$ *désigne la partie entière du nombre réel* α.

1.3.2 La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo :

Définition 1.3.3 *[6] Soit* α *un réel strictement positif,* $f, \psi \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ *deux fonctions telles que* ψ *est croissante et* $\psi' \neq 0$, *pour tous* $t \in [a,b]$ *, La dérivée fractionnaire au sens de* ψ*-Caputo de d'ordre* α *de la fonction* f *est donnée par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha;\psi} f_{\psi}^{[n]}(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \psi'(t)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1} f_{\psi}^{[n]}(s)ds, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

où $f_{\psi}^{[n]}(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$, $n-1 \leq \alpha < n$, : $n = [\alpha]+1$ *avec* $[\alpha]$ *désigne la partie entière du nombre réel* α.

Lemme 1.3.4 *[6] Soit $\alpha, \beta > 0$. Nous avons alors la propriété suivante du semi groupe donnée par*

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi} I_{a^+}^{\beta;\psi} f(t) = I_{a^+}^{\alpha+\beta;\psi} f(\tau), t > a. \tag{1.3.4}$$

Proposition 1.3.5 *[6] Soit $\alpha > 0, \upsilon > 0$ et $t \in [a, b]$. Alors*

(i) $I_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\upsilon-1} = \dfrac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon + \alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\upsilon+\alpha-1}$.

(ii) ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\upsilon-1} = \dfrac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon - \alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\upsilon-\alpha-1}$.

(iii) ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(t) - \psi(a))^{k} = 0, \ \forall k < n \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.3.6 *[6] Si $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $n - 1 < \alpha < n$, alors pour tout $t \in [a, b]$ on a*

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi} ({}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\psi} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_{\psi}^{[k]}(a)}{k!} (\psi(t) - \psi(a))^{k}, \tag{1.3.5}$$

où $f_{\psi}^{[k]}(t) := \left(\dfrac{1}{\psi'(t)} \dfrac{d}{dt}\right)^{k} f(t)$.

Remarque 1.3.7 *La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo généralise les dérivées fractionnaires bien connues, pour différentes valeurs de la fonction ψ telles que*

- ⋆ *Si $\psi(t) = t$, on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo.*
- ⋆ *Si $\psi(t) = \log(t)$, on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.*
- ⋆ *Si $\psi(t) = t^{\rho}$, on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola.*

1.3.3 La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer :

Définition 1.3.8 *[43] Soit $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ un intervalle tel que $-\infty \leq a < b\infty$ et $f, \psi \in \mathcal{C}^n([a, b], R)$ deux fonctions tel que ψ est croissante et $\psi'(t) \neq 0$, pour tous $t \in I$. La dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer ${}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(.)$ d'ordre α et de paramètre $0 \leq \beta \leq 1$, d'une fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) &= I_{a^+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t), \\ &= I_{a^+}^{\delta-\alpha;\psi} D_{a^+}^{\delta;\psi} f(t), \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

où $n - 1 < \alpha < n, n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α, avec $\delta = \alpha + \beta(n - \alpha)$.

Proposition 1.3.9 *[43] Soit $a \geq 0, \upsilon > 0$ et $t > a$, alors*

(i) $I_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(s) - \psi(a))^{\upsilon-1}(t) = \dfrac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon + \alpha)} (\psi(s) - \psi(a))^{\upsilon+\alpha-1}(t)$.

(ii) ${}^{H}D_{a^+}^{\alpha;\psi} (\psi(s) - \psi(a))^{\upsilon-1}(t) = \dfrac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon + \alpha)} (\psi(s) - \psi(a))^{\upsilon-\alpha-1}(t), n - 1 < \alpha < n, \upsilon > n$.

Lemme 1.3.10 *[43] Soit* $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $n-1<\alpha<n$, $0\le\beta\le 1$ *et* $\delta=\alpha+\beta(n-\alpha)$, *donc pour tout* $t\in[a,b]$ *on a*

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}({}^H D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\delta-k}}{\Gamma(\delta-k+1)} f_{\psi}^{[n-k]} I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a), \tag{1.3.7}$$

où, $f_{\psi}^{[n-k]}(t) := \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{d\tau}\right)^{n-k} f(t)$.

Remarque 1.3.11 *La dérivée fractionnaire de* ψ*-Hilfer généralise les dérivées fractionnaires bien connues (dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville,* ψ*-Riemman-Liouville, Caputo,* ψ*-Caputo, Hilfer, Hilfer-Hadamard, Katugampola), pour différentes valeurs de la fonction* ψ *et de paramètre* β*, telles que*

- ⋆ *Si* $\psi(t)=t$, *et* $\beta=1$ *on obtient la dérivée fractionnaire de Caputo.*
- ⋆ *Si* $\beta=1$ *on obtient la dérivée fractionnaire de* ψ*-Caputo.*
- ⋆ *Si* $\psi(t)=t$, *et* $\beta=0$ *on obtient la dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville.*
- ⋆ *Si* $\beta=0$ *on obtient la dérivée fractionnaire de* ψ*-Riemman-Liouville.*
- ⋆ *Si* $\psi(t)=t$, *on obtient la dérivée fractionnaire de Hilfer.*
- ⋆ *Si* $\psi(t)=\log(t)$, *on obtient la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard.*
- ⋆ *Si* $\psi(t)=t^{\rho}$, *on obtient la dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola.*

1.4 Quelques éléments d'analyse multivoque :

Dans notre étude, certains éléments d'analyse multivoque seront utilisés. Il est donc utile de rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales de multifonctions (dit aussi correspondances).

Soit X un espace de Banach muni d'une norme $\|\ .\ \|$ et $\mathcal{C}(J,X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de J dans X muni de la norme :

$$\|x\| = \sup_{t\in J} \|\ x(t)\ \|\ .$$

On définit :

$$\mathcal{P}_f(X) = \{A\subset X | A \ \text{ est non-vide et a une propriété f}\}.$$

$$\mathcal{P}_{bd}(X) = \{A\subset \mathcal{P}(X) | A\ \text{ est borné}\}$$

$$\mathcal{P}_{cl}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) | A \text{ est fermé}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) | A \text{ est convexe}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) | A \text{ est compact}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cl,bd}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) | A \text{ est fermé et borné}\}.$$

On rappelle quelque notion qu'on va utiliser dans la suite

Définition 1.4.1 *Une multifonction (ou application multivoque)* G *sur un espace* X *est une correspondance qui associe à tout élément* $x \in X$ *un sous ensemble* $G(x)$ *de* X*. On notera* $G : X \to \mathcal{P}(X)$*.*

- Une application multivoque $G : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est à valeurs convexes (fermées) si $G(x)$ est convexe (fermé) pour tout $x \in X$.
- Une application multivoque G a un graphe fermé si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $y_n \longrightarrow y$, avec $y_n \in G(x_n)$, alors $y \in G(x)$.

Définition 1.4.2 *Soit* $G : X \to \mathcal{P}(X)$ *Une application multivoque*

- G *est dite semi-continue supérieurement en* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* X *avec* $G(x_0) \subset U$*, il existe un ouvert* V *de* x_0 *tel que pour tout* $x \in V$ *, on a que* $G(x) \subset U$*.*
- G *est dite semi-continue inférieurement au point* $x_0 \in X$ *si l'ensemble* $\{x \in X : G(x) \subset U \neq \emptyset\}$ *est ouvert pour tout ouvert* $U \in X$ *.*
- G *est dite continue, si elle est semi-continue supérieure et inférieure sur* X*.*
- *Une application multivoque* G *admet un point fixe s'il existe* x *dans* X *tel que* $x \in G(x)$*.*

Définition 1.4.3 *Une application multivoque* $G : J \to \mathcal{P}_f(X)$ *est dite mesurable, si, pour tout* $y \in X$*, la fonction* $t \to d(y, G(t)) = \inf\{|y - x| : x \in G(t)\}$ *est mesurable.*

Définition 1.4.4 *Une application multivoque mesurable* $G : J \to \mathcal{P}_{cp}(X)$ *est dite intégrablement bornée, s'il existe une fonction* $h \in L^1(J, R)$*, telle que* $\|v\| \leq h(t)$*, i.e.* $t \in J$*, pour tout* $v \in G(t)$*.*

On définit l'ensemble des sélections de G par :

$$S_{G,x} = \{v \in L^1(J, X)|v(t) \in G(t, x(t)), p, p\ t \in J\}.$$

Alors, nous avons les définitions et les lemmes dus à [27].

Définition 1.4.5 *Une application multivoque* $G : J \times X \to \mathcal{P}_{bd,cl}(\mathbb{R})$ *est dite de Carathéodory si*

(i) $t \to G(t, x)$ *est mesurable pour chaque* $x \in X$*,*

(ii) $x \to G(t, x)$ *est semi-continue supérieurement presque pour tout* $t \in J$*.*

Définition 1.4.6 *Une application multivoque de type Carathéodory* $G(t, x)$ *est dite* L^1_X*-Carathéodory, s'il existe une fonction* $h \in L^1(J, R)$*, telle que*

$$\|G(t, x)\| \leq h(t), \qquad p.p, t \in J$$

pour tout $x \in X$*.*

Lemme 1.4.7 *Soit* X *un espace de Banach.* $G : J \times X \to \mathcal{P}_{bd,cl}(X)$ *est* L^1*-Carathéodory, alors,* $S_{G,x} \neq \emptyset$*, pour tout* $x \in X$*.*

Lemme 1.4.8 *Soit* X *un espace de Banach,* G *une application multivoque de type Carathéodory avec* $S_{G,x} \neq \emptyset$ *et soit* $\mathcal{L} : L^1(J, X) \to C(J, X)$ *une application linéaire continue. Alors, l'opérateur,*

$$\mathcal{L} \circ S_{G,x} : \mathcal{C}(J, X) \to \mathcal{P}_{bd,cl}(\mathcal{C}(J, X)),$$

est un opérateur à graphe fermé dans $\mathcal{C}(J, X) \times \mathcal{C}(J, X)$*.*

Théorème 1.4.9 ***(Théorème d'Arzelà-Ascoli)*** *Soit* $\mathcal{C}(X)$ *l'espace normé des fonctions réelles continues sur un espace métrique compact* X *muni de la norme* $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$*. Pour qu'une famille* $A \subset \mathcal{C}(X)$ *soit relativement compacte, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit :*

- ***Uniformément bornée :***

$$\exists C \ : \ |f(x)| \leq C, \ \forall f \in A, \ \forall x \in X.$$

- ***Equicontinue :***

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall f \in A.$$

Définition 1.4.10 *[20] La mesure de non-compacité de Kuratowski est l'application* $\vartheta : \Gamma_X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par :*

$$\vartheta(B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \textit{ peut être couverte par un nombre fini d'ensembles de diamètre} \leq \varepsilon\} \tag{1.4.1}$$

Proposition 1.4.11 *[20] La mesure de Kuratowski de non-compacité* ϑ *satisfait aux propriétés suivantes*

1- $\vartheta(A) = 0$ *si et seulement si* A *est relativement compact,*

2- $A \subset B \longrightarrow \vartheta(A) \leq \vartheta(B)$*,*

3- $\vartheta(A) = \vartheta(\overline{A}) = \vartheta(\text{conv}(A))$*, où* $\overline{A}$ *et* $\text{conv}(A)$ *désignent respectivement la fermeture et l'enveloppe convexe de* A*,*

4- $\vartheta(A + B) \leq \vartheta(A) + \vartheta(B)$*,*

5- $\vartheta(kA) = |k|\vartheta(A), \ : k \in \mathbb{R}$*,*

Définition 1.4.12 *[20] Soit* $\mathcal{F} : A \longrightarrow X$ *une application continue bornée. On dit* $\mathcal{F}$ *est* ϑ*-Lipschitz s'il existe* $l \geq 0$ *tel que*

$$\vartheta(\mathcal{F}(B)) < l\vartheta(B), \text{ pour chaque } B \subset A. \tag{1.4.2}$$

De plus, si $l < 1$*, alors* $\mathcal{F}$ *est une* ϑ*-contraction stricte.*

Définition 1.4.13 *[20] $\mathcal{F} : A \longrightarrow X$ est appelé ϑ-condensation si*

$$\vartheta(\mathcal{F}(B)) < \vartheta(B), \tag{1.4.3}$$

pour tout sous-ensemble borné et non pré-compact B de A, avec $\vartheta(B) > 0$.

Définition 1.4.14 *[20] On dit que $\mathcal{F} : A \longrightarrow X$ est Lipschitzienne s'il existe $l > 0$ tel que*

$$\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\| \leq l\|u - v\|, \text{pour tous } u, v \in A, \tag{1.4.4}$$

De plus, si $l < 1$, alors $\mathcal{F}$ est une contraction stricte.

Proposition 1.4.15 *[40, 20] Si $\mathcal{F}, \mathcal{Y} : A \longrightarrow X$, sont des opérateurs ϑ-Lipschitz avec les constantes l_1 et l_2 respectivement, alors $\mathcal{F} + \mathcal{Y} : A \longrightarrow X$ est un opérateur ϑ-Lipschitz avec la constante $l_1 + l_2$.*

Proposition 1.4.16 *[40, 20] Si $\mathcal{F} : A \longrightarrow X$, est compact, alors $\mathcal{F}$ est un opérateur ϑ-Lipschitz avec la constante $l = 0$.*

Proposition 1.4.17 *[40, 20] Si $\mathcal{F} : A \longrightarrow X$, est un opérateur Lipschitz avec une constante l, alors $\mathcal{F}$ est un opérateur ϑ-Lipschitz avec la même constante l.*

Théorème 1.4.18 *[40, 20] Soit $\mathcal{W} : A \longrightarrow X$ une ϑ-condensation et*

$$\Upsilon_\epsilon = \{u \in X : u = \epsilon \mathcal{W} u;\ 0 \leq \epsilon \leq 1\}. \tag{1.4.5}$$

Si Υ_ϵ est un ensemble borné dans X, alors il existe $r > 0$, tel que $\Upsilon_\epsilon \in \mathcal{B}_r(0)$, alors le degré

$$\deg\big(I - \epsilon\mathcal{W}, \mathcal{B}_r(0), 0\big) = 1, \ \ pour \ \ tout \ \ \epsilon \in [0, 1]. \tag{1.4.6}$$

Par conséquent, $\mathcal{W}$ admet au moins un point fixe et l'ensemble des points fixes de $\mathcal{W}$ est inclut dans $\mathcal{B}_r(0)$.

Lemme 1.4.19 *[17]*
Soit $\phi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un opérateur p-laplacien définit par $\phi_p(u) = |u|^{p-2}u$, alors on a

— *Si $1 < p < 2$ et $u \neq 0$ alors $(\phi_p(u))' = (p-1)|u|^{p-2}$.*

— *Si $1 < p < 2$, $uv > 0$ et $|u|, |v| \geq l > 0$, alors*

$$|\phi_p(u) - \phi_p(v)| \leq (p-1)l^{p-2}|u - v|.$$

— *Si $p > 2$, et $|u|, |v| \leq L$, alors*

$$|\phi_p(u) - \phi_p(u)| \leq (p-1)L^{p-2}|u - v|.$$

— *ϕ_p est inversible tel que $\phi_p^{-1} = \phi_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

1.5 Résultats de la théorie du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des méthodes très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe. Ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions des problèmes posés.

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom du théorème de l'application contractante) est un théorème qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante définie sur un espace complet dans lui même, et on rencontre son utilisation dans de nombreuses applications, ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions pour les équations différentielles ou les équations intégrales .

Théorème 1.5.1 *[76] Soit* $(M; d)$ *un espace métrique complet et soit* $T : M \to M$ *une application contractante avec la constante de contraction k ; alors* T *admet un unique point fixe* $x \in M$ *.*

De plus : Si $x_0 \in M$ *et* $x_n = T(x_{n+1})$*,*
on a : $x = \lim_n x_n$ *et* $d(x_n, x) < k^n(1-k)^{-1}d(x_1, x_0) \quad , \quad n \geq 1$ *.*
x *étant le point fixe de* T

Remarque :

• Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) et l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.
En effet, soit x l'unique point fixe de T^p, $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$. Ce qui veut dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité on a : $T(x) = x$.

• Si T est une contraction juste dans un voisinage d'un point donné.
Dans ce cas on a le résultat suivant :
Soit $(M; d)$ un espace métrique complet et soit $T : B \to M$ une application telle que :

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad , \quad \forall x, y \in B \quad \text{et} \quad k < 1,$$

où

$$B = \{x \in M / d(x, z) < \varepsilon\} \quad , \quad z \in M \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0.$$

Si

$$d(z, T(z)) < \varepsilon(1-k),$$

alors T possède un unique point fixe $x \in B$

1.5.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.5.2 *[85] Soit E un espace de Banach, K un convexe fermé bornée de E et $T : K \longrightarrow K$ un opérateur continue et compact, alors T admet au moins un point fixe dans K.*

1.5.3 Théorème du point fixe de Leray-Schaëfer

Théorème 1.5.3 *Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$ un opérateur complètement continue si l'ensemble $\Delta_\varepsilon = \{x \in E; x = \varepsilon Tx; \varepsilon \in (0,1)\}$, est bornée alors T possède au moins un point fixe.*

1.5.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

On a vu plus haut deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le principe de l'application contractante de Banach, Krasnoselskii a combiné ces deux théorème (voir [44, 75, 80])

Théorème 1.5.4 *[44] Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U ; V sont deux applications de D dans X telles que :*
U est une contraction et V est compacte et continue avec : $Ux + Vy \in D$, $\forall x, y \in D$.
Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Vx = x$.

1.5.5 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.5.5 *[20] Soit $T : E \to E$ un opérateur complètement continu (i.e. sa restriction à tout borné de E est un compact). et soit $\Upsilon_\varepsilon = \{x \in E : x = \varepsilon Tx \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$.*
Alors,

(i) T admet au moins un point fixe,

ou bien

(ii) Υ_ε est non borné

1.5.6 Théorème du point fixe hybride de Dhage

Il est connu que le premier théorème du point fixe hybride est du à Krasnoselskii [44]qui a combiné entre le théorème de point fixe de Banach et le théorème de point fixe de Schauder.

Ce théorème a plusieurs applications dans les équations intégrales non linéaires dans un espace de Banach ; et que de nombreuses tentatives ont été faites pour améliorer et affaiblir les hypothèses de ce théorème de point fixe (voir [14]). L'étude des équations intégrales non linéaires dans une algèbre de Banach a été initié par Dhage dans son travail [23] et qui a introduit d'autres théorèmes de points fixes (voir [24], [25]).

Théorème 1.5.6 *[26] Soit X une algèbre de Banach et $\mathcal{A} : X \longrightarrow X$ un opérateur et $\mathcal{B} : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ un opérateur multivoque satisfaisant :*

(a) $\mathcal{A}$ est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz k,

(b) $\mathcal{B}$ est compact et semi-continu supérieurement,

(c) $2Mk < 1$, où $M = \|\mathcal{B}(X)\|$.

Alors soit

(i) l'opérateur inclusion $x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$ admet une solution, ou

(ii) l'ensemble $\Omega_\lambda = \{u \in X | \lambda u \in \mathcal{A}u\mathcal{B}u, \quad \lambda > 1\}$ est non borné.

Chapitre 2

Étude de l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin via la dérivée fractionnaire de Caputo

2.1 Résultats d'existence pour une classe d'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin avec des conditions au limites multipoints

2.1.1 Motivation

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n (ordinaire) à l'ordre non entier (fractionnaire). Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont utilisé le calcul fractionnaire comme moyen de décrire les phénomènes naturels dans différents domaines tels que la physique, la biologie, la finance, l'économie et la bio-ingénierie ([34, 46, 71, 84, 87]). Avec le développement récent et exceptionnel des équations différentielles fractionnaires, l'équation de Langevin a été traitée et considérée comme une partie du calcul fractionnaire (voir [32, 33]). Dans, [72] Salem et Alghamdi ont étudié une équation différentielle fractionnaire de Langevin, à l'aide de théorème de point fixe de Krasnoselskii les auteurs prouvent l'existence de la solution, et pour l'unicité ils ont utilisé le principe de contraction de Banch. Dans ce chapitre, en se basant sur le travaille motionné ci dessus, on s'intéresse a l'étude de sa version d'inclusion en élargissant les résultats obtenue à une inclusion différentielle fractionnaire de Langevin avec des conditions aux limites multipoints via la dérivé fractionnaire de Caputo de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}+\lambda)x(t)\in\mathcal{G}(t,x(t)), \quad 0\leq t\leq 1 \\ \\ x(0)=0,\ {}^{C}D^{\beta}x(0)=0,\ x(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i x(\eta_i)+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ et ${}^{C}D^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre $\alpha\in(1,2]$, $\beta\in(0,1]$, $\lambda\in\mathbb{R}$ est le paramètre de dissipation, $\mu_i,\gamma_i\in\mathbb{R}$ et $\eta_i\in(0,1), i=1,...,n$ tels que $n\in\mathbb{N}$ avec $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\eta_i^{\beta+1}\neq 1$ et $\mathcal{G}:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction bornée, fermée, convexe ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$). Nous prouvons l'existence de la solution en utilisant le théorème de point fixe de Leray-Schaëfer.

2.1.2 Construction de la solution

Avant de commencer l'étude de l'existence de la solution, on donne quelque notions qu'on va utiliser durant toute cette partie, pour cela on définit la construction de la solution du problème (2.1.1) comme suit :

Lemme 2.1.1 *Soit $g\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors une fonction $x\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}+\lambda)x(t)=g(t), \quad 0<t<1 \\ x(0)=0, \quad {}^{C}D^{\beta}x(0)=0, \quad x(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i x(\eta_i)+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

si et seulement si x une solution de l'équation intégrale suivante

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &+\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\left[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\right. \\ &+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &\left.+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α et la relation (1.1.46), on obtient

$${}^{C}D^{\beta}x(t)=I^{\alpha}g(t)-\lambda x(t)+a_0+a_1t. \tag{2.1.4}$$

Avec a_0 et a_1 des constantes, de plus on applique l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre β et la relation (1.1.46) et (1.1.18), l'équation (2.1.4) devient :

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s)ds+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}a_0+\frac{t^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}a_1+a_2. \tag{2.1.5}$$

En utilisant les conditions aux limites $x(0) = 0$ et ${}^{C}D^{\beta}x(0) = 0$, dans (2.1.5) on obtient respectivement $a_0 = 0$ et $a_2 = 0$, et en utilisant $x(1) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x(\eta_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds$ et $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \eta_i^{\beta+1}$ on arrive à :

$$\begin{aligned} a_1 =& \frac{\Gamma(\beta+2)}{1-\omega}\left[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\right. \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i - s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &\left.+ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

En substituant les valeurs de a_0, a_1, et a_2, dans (2.1.5) on obtient l'équation intégrale (2.1.3).

2.1.3 Résultat de l'existence

Définition 2.1.2 *Une fonction* $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *est dite une solution intégrale du problème* (2.1.1), *s'il existe une fonction* $g \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ *avec* $g(t) \in \mathcal{G}(t, x(t))$ *p.p* $t \in [0,1]$ *telle que*

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &+ \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\left[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\right. \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i - s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &\left.+ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Supposons que :

(H_1)- $\mathcal{G} : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une L^1-Carathéodory et a des valeurs compactes et convexes non vides, et pour chaque $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{G},x} = \{g \in L^1([0,1],X) : g(t) \in G(t,x(t)); \quad t \in [0,1]\},$$

est non vide.

(H_2)- $\|\mathcal{G}(t,x)\| := \sup\{|g| : g \in \mathcal{G}(t,x)\} \leq p(t)\Psi(\|x\|)$ pour tout $t \in J$ et tout $x \in \mathcal{C}([0,1],X)$, où $p \in L^1([0,1],\mathbb{R}^+)$ et $\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction continue, bornée et strictement croissante.

(H_3)- Il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$\frac{\|p\|_\infty \Psi(\|x\|_\infty)\Phi}{1-\Omega} < \frac{\|p\|_\infty \Psi(M)\Phi}{1-\Omega}.$$

Où

$$\Phi = \frac{|1-\omega| + 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i| \eta_i^{\beta+\alpha}}{|1-\omega|\Gamma(\beta+\alpha+1)}.$$

Et

$$\Omega = \frac{|1-\omega||\lambda| + |\lambda|\big(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i|\eta_i^{\beta}\big) + \Gamma(\beta+1)\sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_i|\eta_i}{|1-\omega|\Gamma(\beta+1)}.$$

Avec $\Omega < 1$.

On arrive à énoncer le théorème d'existence de la solution du problème (2.1.1).

Théorème 2.1.3 *Supposons que les hypothèses* $(H1) - (H3)$ *sont vérifiées, alors le problème (2.1.1) admet au moins une solution intégrale définie sur* J.

Preuve. D'après (2.1.7), on introduire l'opérateur multivoque $\mathcal{N} : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}([0,1],\mathbb{R})$ définit par

$$\mathcal{N}(x) := \left\{ h \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : h(t) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} g(s)ds \\ -\dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)ds \\ +\dfrac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} x(s)ds \\ -\dfrac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} g(s)ds \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)^{\beta+\alpha-1} g(s)ds \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\eta_i} (\eta_i - s)^{\beta-1} x(s)ds \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds \Bigg] \end{array} \right. \right\}.$$

Pour $g \in \mathcal{S}_{G,x}$.

Maintenant, on va prouver que l'opérateur multivoque $\mathcal{N}$ satisfait les conditions du Théorème 1.5.3 (Point fixe de Leray-Schaëfer).

Étape 1 : $\mathcal{N}(x)$ est convexe pour chaque $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

En effet, si $h_1, h_2 \in \mathcal{N}(x)$, alors il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$ tels que pour tout $t \in [0,1]$ nous avons :

$$\begin{aligned}
h_j(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} g_j(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g_j(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g_j(s)ds - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds\Bigg],
\end{aligned}$$

pour $j = 1, 2$. Soit $0 \leq k \leq 1$ alors, pour chaque $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
kh_1(t) + (1-k)h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1}\Big[kg_1(s) + (1-k)g_2(s)\Big]ds \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds + \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}\Big[kg_1(s) + (1-k)g_2(s)\Big]ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}\Big[kg_1(s) + (1-k)g_2(s)\Big]ds \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds + \sum_{i=1}^n \gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds\Bigg],
\end{aligned}$$

en utilisant la convexité de $\mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$, on obtient $kg_1 + (1-k)g_2 \in \mathcal{N}(x)$, alors $\mathcal{N}(x)$ est convexe pour chaque $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Étape 2 : $\mathcal{N}(x)$ est bornée.

En effet, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive l telle que pour chaque $h \in \mathcal{N}(x)$; $x \in \mathbf{B}_q = \{x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R} : \|x\|_\infty \leq q\}$ on a $\|h\|_\infty \leq l$.

Si $h \in \mathcal{N}(x)$ alors il existe $g \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$, tel que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds + \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Big[h_1(t) + h_2(t)\Big],$$

où

$$h_1(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds + \sum_{i=1}^n \gamma_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds,$$

et

$$h_2(g) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds,$$

alors

$$|h(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1}|g(s)|ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}|x(s)|ds + \frac{t^{\beta+1}}{|1-\omega|}\Big[|h_1(t)|+|h_2(t)|\Big],$$

avec

$$\begin{aligned}
|h_1(x)| &\leq \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\|x\|_\infty ds + \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda||\mu_i|}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}\|x\|_\infty ds \\
&+ \sum_{i=1}^n |\gamma_i|\int_0^{\eta_i}\|x\|_\infty ds \\
&\leq \|x\|_\infty\left(\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}ds + \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda||\mu_i|}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}ds + \sum_{i=1}^n |\gamma_i|\int_0^{\eta_i} ds\right) \\
&\leq \frac{\|x\|_\infty}{\Gamma(\beta+1)}\left(|\lambda| + |\lambda|\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^\beta + \Gamma(\beta+1)\sum_{i=1}^n |\gamma_i|\eta_i\right) \\
&\leq \frac{q}{\Gamma(\beta+1)}\left(|\lambda| + |\lambda|\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^\beta + \Gamma(\beta+1)\sum_{i=1}^n |\gamma_i|\eta_i\right) \\
&\leq \frac{q}{\Gamma(\beta+1)}\left(|\lambda| + |\lambda|\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^\beta + \Gamma(\beta+1)\sum_{i=1}^n |\gamma_i|\eta_i\right),
\end{aligned}$$

implique que

$$|h_1(x)| \leq \frac{q}{\Gamma(\beta+1)}\left(|\lambda| + |\lambda|\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^\beta + \Gamma(\beta+1)\sum_{i=1}^n |\gamma_i|\eta_i\right), \tag{2.1.8}$$

et

$$\begin{aligned}
|h_2(g)| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}\|g(s)\|ds + \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}\|g(s)\|ds, \\
&\leq \frac{\|g(s)\|}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}ds + \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}ds\right), \\
&\leq \frac{\|g(s)\|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}\left(1+\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta+\alpha}\right), \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\Psi(\|x\|_\infty)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}\left(1+\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta+\alpha}\right), \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\Psi(q)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}\left(1+\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta+\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Implique que

$$|h_2(g)| \leq \frac{\|p\|_\infty\Psi(q)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}\left(1+\sum_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta+\alpha}\right), \tag{2.1.9}$$

d'après (2.1.8) et (2.1.9) on obtient

$$
\begin{aligned}
|h(t)| &\leq \frac{\|g(s)\|}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} ds + \frac{|\lambda| \|x\|_\infty}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{|1-\omega|} \Bigg[|h_1(t)| + |h_2(t)| \Bigg], \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\|x\|_\infty) t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{|\lambda| \|x\|_\infty t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{t^{\beta+1}}{|1-\omega|} \Bigg[|h_1(x)| + |h_2(g)| \Bigg], \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(q) t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{|\lambda| q t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{|1-\omega|} \Bigg[\frac{q}{\Gamma(\beta+1)} \left(|\lambda| + |\lambda| \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^\beta + \Gamma(\beta+1) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \eta_i \right) \\
&+ \frac{\|p\|_\infty \Psi(q)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} \left(1 + \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^{\beta+\alpha} \right) \Bigg], \\
&\leq \|p\|_\infty \Psi(q) \frac{|1-\omega| + 1 + \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^{\beta+\alpha}}{|1-\omega| \Gamma(\beta+\alpha+1)} \\
&+ q \frac{|1-\omega||\lambda| + |\lambda| \big(1 + \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^\beta\big) + \Gamma(\beta+1) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \eta_i}{|1-\omega| \Gamma(\beta+1)},
\end{aligned}
$$

puis

$$
\|h\|_\infty \leq \|p\|_\infty \Psi(q) \Phi + q\Omega := l. \tag{2.1.10}
$$

Où

$$
\Phi = \frac{|1-\omega| + 1 + \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^{\beta+\alpha}}{|1-\omega| \Gamma(\beta+\alpha+1)}.
$$

Et

$$
\Omega = \frac{|1-\omega||\lambda| + |\lambda| \big(1 + \sum_{i=1}^n |\mu_i| \eta_i^\beta\big) + \Gamma(\beta+1) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \eta_i}{|1-\omega| \Gamma(\beta+1)}.
$$

Étape 3 : $\mathcal{N}$ est équicontinue.

Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$; $t_1 < t_2$, et $x \in \mathbf{B}_q$ où $\mathbf{B}_q$, comme ci-dessus, est un ensemble borné de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$; pour chaque $x \in \mathbf{B}_q$ et $h \in \mathcal{N}(x)$; il existe $g \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$ tel que :

$$
\begin{aligned}
|h(t_2)-h(t_1)| &\leq \Big|\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}x(s)ds\Big| \\
&+ \Big|\frac{t_2^{\beta+1}-t_1^{\beta+1}}{1-\omega}\Big[h_1(x)+h_2(g)\Big]\Big|, \\
&\leq \Big|\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{t_2}\Big[(t_2-s)^{\beta+\alpha-1}-(t_1-s)^{\beta+\alpha-1}\Big]g(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\Big| + \Big|\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2}\Big[(t_2-s)^{\beta-1}-(t_1-s)^{\beta-1}\Big]x(s)ds \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds\Big| + \frac{t_2^{\beta+1}-t_1^{\beta+1}}{|1-\omega|}\Big[|h_1(x)|+|h_2(g)|\Big].
\end{aligned}
$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, cela implique que $\mathcal{N}(x)$ est équicontinue. Il s'ensuit donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli que $\mathcal{N} : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))$ est relativement compact alors $\mathcal{N}$ est complètement continu.

Étape 4 : $\mathcal{N}$ admet un graph fermé.

Soient $x_n \longrightarrow x_*$, $h_n \in \mathcal{N}(x_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$, on va prouver que $h_* \in \mathcal{N}(x_*)$.
Si $h_n \in \mathcal{N}(x_n)$, alors il existe $g_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x_n}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$
\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\beta+\alpha-1}g_n(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_n(s)ds \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_n(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\beta+\alpha-1}g_n(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g_n(s)ds - \sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_n(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_n(s)ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

On doit prouver qu'il existe $g_* \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x_*}$, tel que

$$
\begin{aligned}
h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\beta+\alpha-1}g_*(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_*(s)ds \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_*(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\beta+\alpha-1}g_*(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g_*(s)ds - \sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_*(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_*(s)ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\Bigg(h_n(t)+&\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_n(s)ds+\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_n(s)ds\\&-\sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_n(s)ds+\sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_n(s)ds\Bigg]\Bigg)\\&-\Bigg(h_*(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_*(s)ds+\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_*(s)ds\\&-\sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_*(s)ds+\sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_*(s)ds\Bigg]\Bigg)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,.\end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}:L^1([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

$$g\longrightarrow\mathcal{L}(g)(t).$$

Où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds-\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\\-\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds\Bigg].\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.4.8 ; $\mathcal{L}\circ\mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$ admet un graphe fermé alors on obtient :

$$\begin{aligned}h_n(t)+&\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_n(s)ds+\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_n(s)ds\\&-\sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_n(s)ds+\sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_n(s)ds\Bigg]\in\Upsilon\Big(\mathcal{S}_{\mathcal{G},x_n}\Big).\end{aligned}$$

Or $x_n\longrightarrow x_*$, et $h_n\longrightarrow h_*$ implique que

$$\begin{aligned}h_*(t)+&\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_*(s)ds+\frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}x_*(s)ds\\&-\sum_{i=1}^n\gamma_i\int_0^{\eta_i}x_*(s)ds+\sum_{i=1}^n\frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_*(s)ds\Bigg]\in\Upsilon\Big(\mathcal{S}_{G,x_*}\Big).\end{aligned}$$

Il en résulte que $g_* \in \mathcal{S}_{\mathcal{G},x}$ tel que

$$\begin{aligned}
h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} g_*(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x_*(s)ds \\
&+ \frac{t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x_*(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g_*(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g_*(s)ds - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x_*(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_0^{\eta_i} x_*(s)ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\mathcal{N}$ admet un graph fermé.

Étape 5 : L'ensemble $\Lambda := \{x \in X : \rho x \in \mathcal{N}x \quad \text{pour} \quad \rho > 1\}$ est borné.

Soit $x \in \Lambda$, alors $\rho x \in \mathcal{N}(x)$, donc il existe $g \in \mathcal{S}_{G,x}$ tel que :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\rho^{-1}}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} g(s)ds - \frac{\rho^{-1}\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&+ \frac{\rho^{-1}t^{\beta+1}}{1-\omega}\Bigg[\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}x(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\Gamma(\beta+\alpha)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta+\alpha-1}g(s)ds - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda\mu_i}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\eta_i}(\eta_i-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_0^{\eta_i} x(s)ds\Bigg],
\end{aligned}$$

en utilisant $(H_1)-(H_3)$ et (H_5) on obtient

$$\|x\|_\infty \leq \|p\|_\infty \Psi(\|x\|_\infty)\Phi + \|x\|_\infty \Omega,$$

où

$$\Phi = \frac{|1-\omega| + 1 + \sum\limits_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta+\alpha}}{|1-\omega|\Gamma(\beta+\alpha+1)},$$

et

$$\Omega = \frac{|1-\omega||\lambda| + |\lambda|\big(1+\sum\limits_{i=1}^n |\mu_i|\eta_i^{\beta}\big) + \Gamma(\beta+1)\sum\limits_{i=1}^n |\gamma_i|\eta_i}{|1-\omega|\Gamma(\beta+1)}.$$

Or $\Omega < 1$.

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty - \|x\|_\infty\Omega &\leq \|p\|_\infty \Psi(\|x\|_\infty)\Phi \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(\|x\|_\infty)\Phi}{1-\Omega} \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty \Psi(M)\Phi}{1-\Omega} := K.
\end{aligned}$$

Or K ne dépend que de p et Ψ, ce qui implique que L'ensemble $\Lambda := \{x \in X : \rho x \in \mathcal{N}x \quad \text{pour } \rho > 1\}$ est borné, d'après le Théorème 1.5.3 l'opérateur multivoque $\mathcal{N}$ admet au moins une solution. Finalement le problème (2.1.1) admet au moins une solution définit sur J.

Chapitre 3

Problème au limite pour l'équation et l'inclusion de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Hilfer

3.1 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Hilfer

3.1.1 Motivation

Il existe plusieurs définitions des intégrales et dérivées d'ordre fractionnaires, les définitions les plus connues étant celles de Riemann-Liouville et Caputo. Hilfer [38] introduit la généralisation de ces dérivés sous le nom de la dérivé fractionnaire de Hilfer d'ordre α et de paramètre β, tel que Lorsque $\beta = 0$, la dérivée fractionnaire de Hilfer correspond à la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, d'autre part lorsque $\beta = 1$, la dérivée fractionnaire de Hilfer correspond à la dérivée fractionnaire de Caputo (voir [11, 53]). Dans cette section, en se basant sur le résultat obtenue dans le deuxième chapitre, nous utilisons la dérivée fractionnaire de Hilfer qui généralise la dérivé fractionnaire de Caputo, en considérant le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2} + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad a \le t \le b, \\ x(a) = 0 \quad , \qquad x(b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (I^{\nu_i}(x))(\eta), \quad a < \eta < b. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha_i,\beta_i}, i = 1, 2$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α_i, $0 < \alpha_i < 1$ et de paramètre β_i, $0 \le \beta_i \le 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, I^{ν_i} est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\nu_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ et $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. En utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii on obtient le résultat d'existence pour le problème (3.1.1) et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach, finalement on va donner un exemple pour défendre notre résultat.

Remarque 3.1.1

- *Lorsque* $\beta_1 = 0$ *et* $\beta_2 = 0$*, le problème* (3.1.1) *réduit à un problème avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.*
- *Lorsque* $\beta_1 = 1$ *et* $\beta_2 = 1$*, le problème* (3.1.1) *réduit à un problème avec la dérivée fractionnaire de Caputo.*

3.1.2 Construction de la solution

Lemme 3.1.2 *Soit* $a \geq 0$, $0 < \alpha_i < 1$, $0 \leq \beta_i \leq 1$, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i - \alpha_i\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, *et* $h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$*. Alors la fonction* x *est une solution du problème au limite :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2} + \lambda)x(t) = h(t), \quad a \leq t \leq b, \\ x(a) = 0 \quad , \qquad x(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i(I^{\nu_i}(x))(\eta)ds, \quad a < \eta < b, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

si et seulement si x *une solution de l'équation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) \\ - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

où

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(\eta-a)^{\gamma_1+\alpha_2+\nu_i-1}}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2+\nu_i)} - \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \neq 0. \tag{3.1.4}$$

Preuve. On appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α_1 et le Lemme 1.2.3 aux deux côtés de (3.1.2) on obtient

$${}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}x(t) + \lambda x(t) = I^{\alpha_1}h(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1)}(t-a)^{\gamma_1-1}, \tag{3.1.5}$$

avec c_0 une constante et $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1\beta_1 > 0$.En suite en appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α_2 et le Lemme 1.2.3 aux deux côtés de (3.1.5) on obtient

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma_2)}(t-a)^{\gamma_2-1}. \tag{3.1.6}$$

En utilisant la conditions aux limites $x(a) = 0$ dans (3.1.6), on obtient que $c_1 = 0$. Nous obtenons alors

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}. \tag{3.1.7}$$

En utilisant la conditions aux limites $x(b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (I^{\nu_i}(x))(\eta)$, dans (3.1.7) on obtient que

$$c_0 = \frac{1}{\Lambda}\left[I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \right]. \tag{3.1.8}$$

Avec Λ est donné par (3.1.4), par suite en substituant la valeur de c_0 dans (3.1.5) on arrive à la solution intégrale donner par (3.1.3).

Inversement, on suppose que x est une solution de l'équation intégrale (3.1.3). On appliquant la dérivée fractionnaire ${}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}$ pour les deux cotés de (3.1.3), par suite On appliquant la dérivée fractionnaire ${}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}$, on obtient

$${}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}\left({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}\right)x(t) = h(t) - \lambda {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}x(t),$$

implique que

$${}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2} + \lambda)x(t) = h(t), \quad a \le t \le b.$$

Maintenant on montre que x satisfait les conditions aux limites, pour cela on a $x(a) = 0$, et d'après (3.1.3) on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_i (I^{\nu_i}(x))(\eta) = & \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{(\eta-a)^{\gamma_1+\alpha_2+\nu_i-1}}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2+\nu_i)} \\ & \times \frac{1}{\Lambda}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) \\ & + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \Bigg],\end{aligned}$$

On utilisant (3.1.4) donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_i (I^{\nu_i}(x))(\eta) = & \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) + \left(1 + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\right) \\ & \times \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) \\ & + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \Bigg], \\ = & I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}h(b) \\ & - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}h(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \Bigg], \\ = & x(b).\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve.

3.1.3 Existence et unicité de la solution pour le problem (3.1.1)

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (3.1.1), en se basant sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach.

D'après Lemme 3.1.2, nous définissons l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}x)(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}f(t,x(t)) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b,x(b)) \\ - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}f(\eta,x(\eta)) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

on va montrer que le problème (3.1.1) admet une solution si et seulement si l'opérateur $\mathcal{A}$ admet un point fixe. Pour simplifier les calcules, nous utilisons les notations suivantes

$$\Omega_1 = \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\right], \tag{3.1.10}$$

et

$$\Omega_2 = |\lambda|\left\{\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\right]\right\}, \tag{3.1.11}$$

avec Λ est donné par (3.1.4)

Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Krasnoselskii

Le premier résultat est un résultat d'existence, basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii 1.5.4.

Théorème 3.1.3 *Supposons que :*

(H_1)- $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue telle que* $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$
$\forall (t,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}$, *avec* $\varphi \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$.

(H_2)- $\Omega_2 < 1$, *avec* Ω_2 *est donné par* (3.1.11).

Alors le problème (3.1.1) *admet une solution intégrale définie sur* $[a,b]$.

Preuve. On va montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (3.1.9), satisfait les hypothèses de théorème du point fixe de Krasnoselskii 1.5.4, pour cella nous divisons l'opérateur $\mathcal{A}$ en une somme de deux opérateurs $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $\mathcal{B}_\rho = \{x \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}); \|x\| \leq \rho\}$ avec $\rho \geq \dfrac{\|\varphi\|\Omega_1}{1-\Omega_2}$ et $\sup_{t\in[a,b]}\varphi(t) = \|\varphi\|$ où :

$$(\mathcal{A}_1x)(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}f(t,x(t)) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\left[I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b,x(b)) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}f(\eta,x(\eta))\right], \tag{3.1.12}$$

et

$$(\mathcal{A}_2x)(t) = -\lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\left[-\lambda I^{\alpha_2}x(b) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta)\right]. \tag{3.1.13}$$

Pou tout $x, y \in \mathcal{B}_\rho$ on a

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{A}_1x)(t) + (\mathcal{A}_2y)(t)\right| &\leq \sup_{t\in[a,b]}\Bigg\{ I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,x(t))| + |\lambda|I^{\alpha_2}|y(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x(b))| + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}|f(\eta,x(\eta))| \\
&+ |\lambda|I^{\alpha_2}|y(b)| + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{\alpha_2+\nu_i}|y(\eta)|\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \|\varphi\|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \left[\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\right]\Bigg\} \\
&+ \|y\||\lambda|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \left[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\right]\Bigg\}, \\
&\leq \|\varphi\|\Omega_1 + \rho\Omega_2, \\
&\leq \rho,
\end{aligned}$$

donc $\|\mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2y\| \leq \rho$, ce qui implique que $\mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2y \in \mathcal{B}_\rho$.

De plus pour tout $x, y \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{A}_2x)(t) + (\mathcal{A}_2y)(t)\right| &\leq |\lambda|I^{\alpha_2}|x(t) - y(t)| + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \left[|\lambda|I^{\alpha_2}|x(b) - y(b)| + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{\alpha_2+\nu_i}|x(\eta) - y(\eta)|\right], \\
&\leq |\lambda|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \left[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\right]\Bigg\}\|x-y\|, \\
&\leq \Omega_2\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Cela montre que $\|\mathcal{A}_2x + \mathcal{A}_2y\| \leq \Omega_2\|x - y\|$, alors en utilisant (H_2), donc $\mathcal{A}_2$ est une contraction.
L'opérateur $\mathcal{A}_1$ est continu, puisque f est continu. Il est uniformément borné sur $\mathcal{B}_\rho$ comme :

$$\|\mathcal{A}_1x\| \leq \Omega_1\|\varphi\|. \tag{3.1.14}$$

Il reste à montrer que $\mathcal{A}_1$ est compact, en effet posons $\sup_{(t,x)\in[a,b]\times\mathcal{B}_\rho}|f(t,x)| = \bar{f} < \infty$, et pour tout $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|(\mathcal{A}_1x)(t_2) - (\mathcal{A}_1x)(t_1)\Big| &= \Big|I^{\alpha_1+\alpha_2}f(t_2, x(t_2)) + \frac{(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b, x(b)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}f(\eta, x(\eta))\Bigg] - I^{\alpha_1+\alpha_2}f(t_1, x(t_1)) \\
&\quad - \frac{(t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b, x(b)) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}f(\eta, x(\eta))\Bigg]\Bigg|, \\
&\leq \frac{\bar{f}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\Bigg|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}ds\Big) \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}ds\Bigg| + \frac{(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} - (t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\bar{f}\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \bar{f}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\Bigg],
\end{aligned}$$

le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro comme $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$, indépendamment de $x\ dans\mathcal{B}_\rho$. Alors $\mathcal{A}_1$ est équicontinue et donc $\mathcal{A}_1$ est relativement compact sur $\mathcal{B}_\rho$. D'après le théorème d'Arzelá-Ascoli 1.4.9, $\mathcal{A}_1$ est compact sur $\mathcal{B}_\rho$. Il s'ensuit par le théorème du point fixe de Krasnoselskii 1.5.4, que le problème (3.1.1) admet au moins une solution intégrale définie sur $[a, b]$.

Résultat d'unicité

Pour traiter l'unicité de la solution du problème (3.1.1), on se base sur le principe de contraction de Banach comme un deuxième résultat donner par le theorem suivant.

Théorème 3.1.4 *Supposons que* $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$, $L > 0$, *pour chaque* $t \in [a, b]$ *et* $x, y \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Si $L\Omega_1 + \Omega_2 < 1$, *où* Ω_1, Ω_2 *sont respectivement donnés par* (3.1.10) *et* (3.1.11), *alors le problème* (3.1.1) *admet une solution unique définie sur* $[a, b]$.

Preuve. Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ défini en (3.1.9), le problème (3.1.1) est alors transformé en un problème de point fixe $x = \mathcal{A}x$. En utilisant le principe de contraction de Banach 1.5.1, nous montrerons que $\mathcal{A}$ admet un point fixe unique.

On fixe $\sup_{t\in[a,b]} = |f(t,0)| = M < \infty$, et on choisit $r > 0$ tel que

$$r \geq \frac{M\Omega_1}{1 - L\Omega_2 - \Omega 1}. \tag{3.1.15}$$

On montre que $\mathcal{A}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$, avec $\mathcal{B}_r = \{x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}); \|x\| \leq r)\}$. En effet pour tout $x \in \mathcal{B}_r$ on a

$$\begin{aligned}
\big|(\mathcal{A}x)(t)\big| &\leq \sup_{t\in[a,b]}\Bigg\{ I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,x(t))| + |\lambda| I^{\alpha_2}|x(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x(b))| + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}|f(\eta,x(\eta))| \\
&\quad + |\lambda| I^{\alpha_2}|x(b)| + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| I^{\alpha_2+\nu_i}|x(\eta)| \Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \Big(L\|x\| + M\Big)\Bigg\{ \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)} \Bigg]\Bigg\} \\
&\quad + \|x\||\lambda|\Bigg\{ \frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)} \Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \Big(L\|x\| + M\Big)\Omega_1 + \|x\|\Omega_2, \\
&\leq \Big(Lr + M\Big)\Omega_1 + r\Omega_2, \\
&< r,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{A}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$.

Ensuite, soit $x, y \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\big|(\mathcal{A}x)(t) - (\mathcal{A}y)(t)\big| &\leq \Bigg\{ \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)} \Bigg]\Bigg\} L\|x-y\| \\
&\quad + |\lambda|\Bigg\{ \frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)} \Bigg]\Bigg\}\|x-y\|, \\
&\leq \Big(L\Omega_1 + \Omega_2\Big)\|x-y\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique, $\|(\mathcal{A}x)(t)-(\mathcal{A}y)(t)\| \leq \Big(L\Omega_1+\Omega_2\Big)\|x-y\|$. Comme $L\Omega_1+\Omega_2<1$, $\mathcal{A}$ est une contraction. Par conséquent, de théorème du point fixe de Banach 1.5.1, l'opérateur $\mathcal{A}$ admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème (3.1.1).

3.1.4 Exemple

Exemple 3.1.5 *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{7},\frac{2}{7}}(D^{\frac{5}{7},\frac{4}{7}}+\frac{1}{13})x(t)=\frac{2}{4t+31}\left(\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\right)+\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}\leq t\leq\frac{5}{4},\\ x\Big(\frac{1}{4}\Big)=0 \quad , \qquad x\Big(\frac{5}{4}\Big)=\frac{3}{8}I^{\frac{2}{3}}x\Big(\frac{3}{4}\Big)+\frac{5}{8}I^{\frac{4}{3}}x\Big(\frac{3}{4}\Big)+\frac{7}{8}I^{\frac{5}{3}}x\Big(\frac{3}{4}\Big). \end{cases} \tag{3.1.16}$$

Où $\alpha_1=\frac{3}{7}$, $\alpha_2=\frac{5}{7}$, $\beta_1=\frac{2}{7}$, $\beta_2=\frac{4}{7}$, $\lambda=\frac{1}{13}$, $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{5}{4}$, $n=3$, $\mu_1=\frac{3}{8}$, $\mu_2=\frac{5}{8}$, $\mu_3=\frac{7}{8}$, $\nu_1=\frac{2}{3}$, $\nu_2=\frac{4}{3}$, $\nu_3=\frac{5}{3}$ et $\eta=\frac{3}{4}$.
Pour tout $(t,x)\in[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]\times\mathbb{R}_+$, nous définissons $f(t,x(t))=\frac{2}{4t+31}\left(\frac{x(t)}{1+x(t)}\right)+\frac{1}{4}$.

f est une fonction continue, de plus pour tout $t\in[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$ et pour chaque $x,y\in\mathbb{R}_+$ nous avons

$$\begin{aligned}|f(t,x)-f(t,y)| &\leq \frac{2}{4t+31}\left|\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\right|\\ &\leq \frac{1}{16}|x-y|.\end{aligned}$$

Avec ces valeurs ci-dessus, on obtient $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\beta_1=\frac{29}{49}$, $\gamma_2=\alpha_2+\beta_2-\alpha_2\beta_2=\frac{43}{49}$, $|\Lambda|\simeq 0.1566055\neq 0$, $\Omega_1=8.3617056$, $\Omega_2=0.1298368$ et $L=\frac{1}{16}$.
Donc $L\Omega_1+\Omega_2=\frac{1}{16}\times 8.3617056+0.1298368\simeq 0,6524434<1$, d'après le Théorème 3.1.4, le problème (3.1.16) admet une solution unique définie sur $[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$.

3.2 Résultats d'existence pour l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Hilfer

3.2.1 Motivation

L'objectif de cette section est d'étudier la version d'inclusion pour le problème (3.1.1), et aussi d'étendre les résultats obtenus dans le premier chapitre pour le problème inclusion (2.1.1), en étudiant un type de dérivée fractionnaire plus général que la première. En effet, on va établir un résultat d'existence en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour le problème inclusion suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda)x(t) \in F(t,x(t)), \quad a \leq t \leq b, \\ x(a)=0, \; x(b)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(x))(\eta), \; a<\eta<b. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Où $F : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction bornée, fermée, convexe ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensemble non vides de $\mathbb{R}$).

3.2.2 Construction de la solution

On définit la solution du problème (3.2.1) comme suit :

Définition 3.2.1 *Une fonction $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est appelée une solution du problème (3.2.1) s'il existe une fonction $v \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t,x(t))$ pour tout $t \in [a,b]$ tel que ${}^{C}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}+\lambda)x(t) = v(t)$ et $x(a)=0, \quad x(b)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(x))(\eta)$. On a l'équation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} x(t) = {} & I^{\alpha_1+\alpha_2}v(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}v(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}v(\eta) \\ & + \lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta)\Bigg], \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

avec Λ est donné par (3.1.4).

Pour tout $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on définit l'ensemble des sélections de F par

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F},x} := \left\{v \in L^1([a,b],\mathbb{R}) : v \in F(t,x(t)) \quad \text{on} \quad [a,b]\right\}. \tag{3.2.3}$$

Supposons que :

(H_3)- $F : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une L^1-Carathéodory et a des valeurs compactes et convexes non vides, et pour chaque x fixé dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F},x} = \{v \in L^1([a,b],X) : v(t) \in F(t,x(t)); \quad t \in [a,b]\},$$

est convexe non vide.

(H_4)- $\|\mathcal{F}(t,x)\| := \sup\{|v| : v \in \mathcal{F}(t,x)\} \leq p(t)\Psi(\|x\|)$ pour tout $t \in [a,b]$ et tout $x \in \mathcal{C}([a,b],X)$, où $p \in L^1([a,b],\mathbb{R}^+)$ et $\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction continue et strictement croissante.

(H_5)- Il existe un nombre $M > 0$ tel que :

$$\frac{(1-\Omega_2)M}{\|p\|\Psi(M)\Omega_1} > 1,$$

où Ω_1 et Ω_2 sont données respectivement par (3.1.10) et (3.1.11).

3.2.3 Existence de la solution pour le problem (3.2.1)

Dans cette partie on va donner notre résultat d'existence pour la version inclusion du problème (3.2.1), qu'est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder 1.5.5.

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses* $(H_2)-(H_5)$ *sont vérifiées, alors le problème (3.2.1) admet au moins une solution définie sur* $[a,b]$.

Preuve. D'après (3.2.2) et pour transformer le problème (3.2.1) en un problème de point fixe, on introduire l'opérateur multivoque $\mathcal{A} : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}([a,b],\mathbb{R})$ définit par

$$\mathcal{A}(x) := \left\{ h \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) : h(t) = \left\{ \begin{array}{l} I^{\alpha_1+\alpha_2}v(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \dfrac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\ \times \left[I^{\alpha_1+\alpha_2}v(b) - \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}v(\eta) \right. \\ \left. +\lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \right]; \quad t \in [a,b], \quad v \in \mathcal{S}_{F,x} \end{array} \right. \right\}.$$

Maintenant, on va prouver que l'opérateur multivoque $\mathcal{A}$ satisfait les conditions de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder 1.5.5, pour cela on va donner la démonstration dans plusieurs étape

Étape 1 : $\mathcal{A}(x)$ est convexe pour chaque $x \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

En effet, si $h_1, h_2 \in \mathcal{N}(x)$, alors il existe $v_1, v_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F},x}$ tels que pour tout $t \in [a,b]$ nous avons :

$$h_j(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}v_j(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}v_j(b)$$
$$- \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}v_j(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta) \Bigg],$$

pour $j = 1, 2$. Soit $0 \leq k \leq 1$ alors, pour chaque $t \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}
kh_1(t) + (1-k)h_2(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}\Big[kv_1(s) + (1-k)v_2(s)\Big] - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
\times \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}\Big[kv_1(s) + (1-k)v_2(s)\Big] - \lambda I^{\alpha_2}x(b) \\
- \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}\Big[kv_1(\eta) + (1-k)v_2(\eta)\Big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta)\Bigg],
\end{aligned}$$

en utilisant la convexité de $\mathcal{S}_{\mathcal{F},x}$, on obtient $kv_1 + (1-k)v_2 \in \mathcal{A}(x)$, alors $\mathcal{A}(x)$ est convexe pour chaque $x \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Étape 2 : $\mathcal{A}(x)$ est bornée.

En effet, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive l telle que pour chaque $h \in \mathcal{A}(x)$; $x \in \mathbf{B}_q = \{x \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R} : \|x\|_\infty \leq q\}$ on a $\|h\|_\infty \leq l$.

Si $h \in \mathcal{A}(x)$ alors il existe $v \in \mathcal{S}_{F,x}$, tel que pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned}
h(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}v(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}v(b) \\
- \lambda I^{\alpha_2}x(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}v(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i}x(\eta)\Bigg],
\end{aligned}$$

alors pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned}
\big|h(x)(t)\big| &\leq \sup_{t\in[a,b]}\Bigg\{I^{\alpha_1+\alpha_2}|v(t)| + |\lambda| I^{\alpha_2}|x(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2}|v(b)| + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}|v(\eta)| \\
&+ |\lambda| I^{\alpha_2}|x(b)| + |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| I^{\alpha_2+\nu_i}|x(\eta)|\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\Bigg]\Bigg\} \\
&+ \|x\||\lambda|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Omega_1 + \|x\|\Omega_2, \\
&\leq \|p\|\Psi(\rho)\Omega_1 + \rho\Omega_2,
\end{aligned}$$

implique que

$$\|h\| \leq \|p\|\Psi(\rho)\Omega_1 + \rho\Omega_2 := l. \tag{3.2.4}$$

Où Ω_1 et Ω_2 sont donné respectivement par (3.1.10) et (3.1.11).

Étape 3 : $\mathcal{A}$ est équicontinue.

Soient $t_1, t_2 \in [a, b]$; $t_1 < t_2$, et $x \in \mathbf{B}_q$ où $\mathbf{B}_q$, comme ci-dessus, est un ensemble borné de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, pour chaque $x \in \mathbf{B}_q$ et $h \in \mathcal{A}(x)$; il existe $\nu \in \mathcal{S}_{F,x}$ tel que :

$$\begin{aligned}
\left|h(t_2) - h(t_1)\right| \leq{} & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left|\int_a^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\right)\nu(s)ds\right. \\
& + \left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\nu(s)ds\right| \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha_2)}\left|\int_a^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_2-1}\right)x(s)ds\right. \\
& + \left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_2-1}x(s)ds\right| + \frac{(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} - (t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
& \times \left[\|\nu(s)\|\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \|\nu(s)\|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\right. \\
& + \left.\|x(b)\||\lambda|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \|x(\eta)\||\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\right], \\
\leq{} & \frac{\|p\|\Psi(\rho)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left|\int_a^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\right)ds\right. \\
& + \left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}ds\right| \\
& + \frac{\rho|\lambda|}{\Gamma(\alpha_2)}\left|\int_a^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_2-1}\right)ds\right. \\
& + \left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_2-1}ds\right| + \frac{(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} - (t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
& \times \left[\|p\|\Psi(\rho)\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \|p\|\Psi(\rho)\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\nu_i+1)}\right. \\
& + \left.\rho|\lambda|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \rho|\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta-a)^{\alpha_2+\nu_i}}{\Gamma(\alpha_2+\nu_i+1)}\right],
\end{aligned}$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, cela implique que $\mathcal{A}(x)$ est équicontinue. Il s'ensuit donc par l'application de théorème d'Arzelà-Ascoli que $\mathcal{A} : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))$ est relativement compact alors $\mathcal{N}$ est complètement continue.

Étape 4 : $\mathcal{A}$ admet un graph fermé.

Soient $x_n \longrightarrow x_*$, $h_n \in \mathcal{A}(x_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$, on va prouver que $h_* \in \mathcal{A}(x_*)$.

Si $h_n \in \mathcal{A}(x_n)$, alors il existe $v_n \in \mathcal{S}_{F,x_n}$ tel que pour chaque $t \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned} h_n(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2} v_n(t) - \lambda I^{\alpha_2} x_n(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2} v_n(b) \\ - \lambda I^{\alpha_2} x_n(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i} v_n(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_n(\eta) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On doit prouver qu'il existe $v_* \in \mathcal{S}_{\mathcal{F},x_*}$, tel que pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned} h_*(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2} v_*(t) - \lambda I^{\alpha_2} x_*(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2} v_*(b) \\ - \lambda I^{\alpha_2} x_*(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i} v_*(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_*(\eta) \Bigg], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Bigg\| \Bigg(h_n(t) + \lambda I^{\alpha_2} x_n(t) - \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[-\lambda I^{\alpha_2} x_n(b) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_n(\eta) \Bigg] \Bigg) \\ - \Bigg(h_*(t) + \lambda I^{\alpha_2} x_*(t) - \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[-\lambda I^{\alpha_2} x_*(b) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_*(\eta) \Bigg] \Bigg) \Bigg\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire :

$$\mathcal{L} : L^1([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

$$g \longrightarrow \mathcal{L}(v)(t).$$

Où

$$\mathcal{L}(v)(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2} v(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2} v(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i} v(\eta) \Bigg].$$

D'après le Lemme 1.4.8; $\mathcal{L} \circ \mathcal{S}_{F,x}$ admet un graphe fermé alors on obtient :

$$\Bigg(h_n(t) + \lambda I^{\alpha_2} x_n(t) - \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[-\lambda I^{\alpha_2} x_n(b) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_n(\eta) \Bigg] \Bigg) \in \Upsilon\Big(\mathcal{S}_{F,x_n}\Big).$$

Or $x_n \longrightarrow x_*$, et $h_n \longrightarrow h_*$ implique que

$$\Bigg(h_*(t) + \lambda I^{\alpha_2} x_*(t) - \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[-\lambda I^{\alpha_2} x_*(b) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_*(\eta) \Bigg] \Bigg) = \Upsilon(v_*) \in \Upsilon\Big(\mathcal{S}_{F,x_*}\Big).$$

Il en résulte que $v_* \in \mathcal{S}_{\mathcal{F},x}$ tel que

$$\begin{aligned} h_*(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2} v_*(t) - \lambda I^{\alpha_2} x_*(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \Bigg[I^{\alpha_1+\alpha_2} v_*(b) \\ - \lambda I^{\alpha_2} x_*(b) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_1+\alpha_2+\nu_i} v_*(\eta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{\alpha_2+\nu_i} x_*(\eta) \Bigg]. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\mathcal{A}$ admet un graph fermé.

Étape 5 : $\mathcal{A}$ admet un point fixe.

Nous montrons que (ii) du Théorème 1.5.5 n'est pas possible. En effet si $x \in \theta\mathcal{A}x$ pour $\theta \in]0, 1]$, alors il existe $v \in \mathcal{S}_{\mathcal{F},x}$ tel que $x(t) = \theta h(t)$ implique $|x(t)| \leq |h(t)|$, d'après l'étape 2 on a

$$\|x\| \leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Omega_1 + \|x\|\Omega_2,$$

donc

$$(1-\Omega_2)\|x\| \leq \|p\|\Psi(\|x\|). \tag{3.2.6}$$

Si (ii) du Théorème 1.5.5 est vrai alors il existe $\theta \in]0, 1]$ et $x \in \partial\mathcal{B}_M$ avec $x \in \theta\mathcal{A}$ ce qui signifie que x est solution de (3.2.1) avec $\|x\| = M$ alors d'après (3.2.6) on a :

$$(1-\Omega_2)M \leq \|p\|\Psi(M), \tag{3.2.7}$$

donc

$$\frac{(1-\Omega_2)M}{\|p\|\Psi(M)} \leq 1, \tag{3.2.8}$$

ce qui contredit (H_5). Par conséquent, d'après le Théorème 1.5.5 $\mathcal{A}$ admet un point fixe nous déduisons que notre problème (3.2.1) admet au moins une solution définit sur $[a, b]$.

Chapitre 4

Résultats d'existence et de stabilité pour un système couplé d'équation différentielle fractionnaire de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Hilfer

4.1 Existence et unicité de la solution d'un système couplé d'équation fractionnaire de Langevin avec la dérivée fractionnaire de Hilfer

4.1.1 Motivation

De nombreux articles ont étudié les systèmes couplés pour les équations différentielles fractionnaires, voir [78, 8, 4]. Récemment, Wongcharoen et al [81] ont étudié les résultats d'existence et d'unicité de la solution pour un système couplé donné par

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta}x(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad t \in [a, b], \\ {}^{H}D^{p,q}y(t) = g(t, x(t), y(t)), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = 0 \quad , \quad x(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i(I^{\chi_i}(y))(\theta_i), \\ y(a) = 0 \quad , \quad y(b) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \tau_j(I^{\sigma_j}(x))(\kappa_j). \end{cases}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha,\beta}, {}^{H}D^{p,q}$, sont la dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α, p, telle que $1 < \alpha, p < 2$ et de paramètre β, q, tel que $0 < \beta, q < 1$, $a \geq 0$, I^{χ_i}, I^{σ_j} sont les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre χ_i et σ_j respectivement $\chi_i, \sigma_j > 0$, $\theta_i, \kappa_j \in]a, b[$, $i = 1, 2, ..., n$, $\imath = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, $\eta_i, \tau_j \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Les auteurs ont prouvé les résultats d'existence et d'unicité en utilisant, l'alternative non linéaire de Leray-schauder, le théorème du point fixe de Krasnoselskii, et le théorème du point fixe de Banach. Motivés par les travaux ci-dessus, nous étudions les critères d'existence et d'unicité de la solution pour le système couplé suivant :

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda_1)x(t)=f(t,x(t),y(t)), \quad t\in[a,b],\\ {}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2}+\lambda_2)y(t)=g(t,x(t),y(t)), \quad t\in[a,b],\\ x(a)=0 \quad , \quad x(b)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(y))(\eta_i),\\ y(a)=0 \quad , \quad y(b)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j(I^{\sigma_j}(x))(\xi_j). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha_i,\beta_i}$, ${}^{H}D^{p_i,q_i}$, $i=1,2$ représente les dérivées fractionnaires de Hilfer d'ordre α_i, p_i, telle que $0<\alpha_i, p_i<1$ et de paramètre β_i, q_i, telle que $0\leq\beta_i, q_i\leq 1$, $i=1,2$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$, I^{ν_i}, I^{σ_j} sont les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre ν_i et σ_j respectivement $\nu_i,\sigma_j>0$, $\eta_i,\xi_j\in]a,b[$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$, $\mu_i,\omega_j\in\mathbb{R}$ et $f,g:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. En se basant sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder on étudie le résultat d'existence et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach, de plus on traite la stabilité au sens de Ulam-Hyers (U-H), et aussi au sens de Ulam-Hyers généralisé (U-H-G).

4.1.2 Construction de la solution

Lemme 4.1.1 *Soit* $a\geq 0$, $0<\alpha_1,\alpha_2,p_1,p_2<1$, $0\leq\beta_1,\beta_2,q_1,q_2\leq 1$, *et* $\gamma_i=\alpha_i+\beta_i-\alpha_i\beta_i>0$, $\delta_i=p_i+q_i-p_iq_i>0$, *avec* $i=1,2$, *et* $h_1,h_2\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. *Alors la solution du système couplé d'équations différentielles fractionnaires de Langevin de la forme :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda_1)x(t)=h_1(t), \quad t\in[a,b],\\ {}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2}+\lambda_2)y(t)=h_2(t), \quad t\in[a,b],\\ x(a)=0 \quad , \quad x(b)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(y))(\eta_i),\\ y(a)=0 \quad , \quad y(b)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j(I^{\sigma_j}(x))(\xi_j), \end{cases} \tag{4.1.2}$$

est équivalent aux équations intégrales

$$\begin{aligned}
x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(t) - \lambda_1 I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[\Phi_4\Bigg(&-I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(b)\\
&- \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}h_2(\eta_i) + \lambda_1 I^{\alpha_2}x(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}y(\eta_i)\Bigg)\\
&+ \Phi_2\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}h_1(\xi_j) - I^{p_1+p_2}h_2(b) - \sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}x(\xi_j)\\
&+ \lambda_2 I^{p_2}y(b)\Bigg)\Bigg],
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

et

$$\begin{aligned}
y(t) = I^{p_1+p_2}h_2(t) - \lambda_2 I^{p_2}y(t) + \frac{(t-a)^{\delta_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[\Phi_1\Bigg(&\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}h_1(\xi_j)\\
- I^{p_1+p_2}h_2(b) - \lambda_1\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2}y(b)\Bigg) &+ \Phi_3\Bigg(-I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(b)\\
+ \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}h_2(\eta_i) + \lambda_1 I^{\alpha_2}x(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}y(\eta_i)\Bigg)\Bigg]&.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Où

$$\Phi_1 = \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}, \tag{4.1.5}$$

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\frac{(\eta_i-a)^{\delta_1+p_2+\nu_i-1}}{\Gamma(\delta_1+p_2+\nu_i)}, \tag{4.1.6}$$

$$\Phi_3 = \sum_{j=1}^{m}\omega_j\frac{(\xi_j-a)^{\gamma_1+\alpha_2+\sigma_j-1}}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2+\sigma_j)}, \tag{4.1.7}$$

$$\Phi_4 = \frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{\Gamma(\delta_1+p_2)}, \tag{4.1.8}$$

$$\Lambda = \Phi_1\Phi_4 - \Phi_2\Phi_3 \neq 0. \tag{4.1.9}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α_1 aux deux côtés de la première equation de (4.1.2), nous obtenons, en utilisant le Lemme 1.2.3, le résultat suivant

$${}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}x(t) + \lambda x(t) = I^{\alpha_1}h_1(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1)}(t-a)^{\gamma_1-1}, \tag{4.1.10}$$

où c_0 constant et $\gamma_1 = \alpha_1+\beta_1-\alpha_1\beta_1$. En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α_2 aux deux côtés de (4.1.10), nous obtenons, en utilisant le Lemme 1.2.3

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(t) - \lambda_1 I^{\alpha_2}x(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma_2)}(t-a)^{\gamma_2-1}, \tag{4.1.11}$$

En utilisant la condition aux limites $x(a) = 0$ dans (4.1.11) on obtient que $c_1 = 0$, alors

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(t) - \lambda_1 I^{\alpha_2}x(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}. \tag{4.1.12}$$

De la même manière, pour y, en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p_1 et p_2, respectivement, pour la deuxième équation de (4.1.2), on obtient

$$y(t) = I^{p_1+p_2}h_2(t) - \lambda_2 I^{p_2}y(t) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta_1+p_2)}(t-a)^{\delta_1+p_2-1} + \frac{d_1}{\Gamma(\delta_2)}(t-a)^{\delta_2-1}, \tag{4.1.13}$$

où d_0, d_1 sont des constantes, et en utilisant la condition aux limites $y(a) = 0$ dans (4.1.13) on obtient que $d_1 = 0$, alors

$$y(t) = I^{p_1+p_2}h_2(t) - \lambda_2 I^{p_2}y(t) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta_1+p_2)}(t-a)^{\delta_1+p_2-1}, \tag{4.1.14}$$

en utilisant les conditions aux limites $x(b) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(I^{\nu_i}(y))(\eta_i)$ et $y(b) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j(I^{\sigma_j}(x))(\xi_j)$ dans (4.1.13) et (4.1.14), on obtient le système

$$\begin{cases} \Phi_1 c_0 - \Phi_2 d_0 = \Omega_1, \\ -\Phi_2 c_0 + \Phi_4 d_0 = \Omega_2, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

où

$$\Omega_1 = -I^{\alpha_1+\alpha_2}h_1(b) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}h_2(\eta_i) + \lambda_1 I^{\alpha_2}x(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}y(\eta_i), \tag{4.1.16}$$

$$\Omega_2 = \sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}h_1(\xi_j) - I^{p_1+p_2}h_2(b) - \sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2}y(b). \tag{4.1.17}$$

En résolvant le système (4.1.15) on obtient

$$c_0 = \frac{\Phi_4\Omega_1 + \Phi_2\Omega_2}{\Phi_1\Phi_4 - \Phi_2\Phi_3}, \quad d_0 = \frac{\Phi_1\Omega_2 + \Phi_3\Omega_1}{\Phi_1\Phi_4 - \Phi_2\Phi_3}. \tag{4.1.18}$$

En substituant la valeur de c_0, et d_0 dans (4.1.13) et (4.1.14), respectivement, on obtient les solutions intégrales (4.1.3) et (4.1.4).

4.1.3 Existence et unicité de la solution pour le système couplé (4.1.1)

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité de la solution pour le système couplé (4.1.1), en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder 1.5.5 et pour l'unicité on applique le théorème du point fixe de Banach 1.5.1.

D'après le Lemme 4.1.1, on définit l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}\times\mathcal{K}$ par

$$\mathcal{A}(x,y)(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1(x,y)(t) \\ \mathcal{A}_2(x,y)(t) \end{pmatrix}, \tag{4.1.19}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(x,y)(t) &= I^{\alpha_1+\alpha_2}f(t,x(t),y(t)) - \lambda_1 I^{\alpha_2}x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\ &\times \Bigg[\Phi_4\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b,x(b),y(b))) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i)) \\ &+ \lambda_1 I^{\alpha_2}x(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}y(\eta_i)\Bigg) + \Phi_2\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j)) \\ &- I^{p_1+p_2}g(b,x(b),y(b)) - \sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2}y(b)\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(x,y)(t) &= I^{p_1+p_2}g(t,x(t),y(t)) - \lambda_2 I^{p_2}y(t) + \frac{(t-a)^{\delta_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \Bigg[\Phi_1\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j)) - I^{p_1+p_2}g(b,x(b),y(b)) \\ &- \lambda_1\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2}y(b)\Bigg) + \Phi_3\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b,x(b),y(b)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i)) + \lambda_1 I^{\alpha_2}x(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}y(\eta_i)\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Pour simplifier les calculs, nous utilisons les notations suivantes :

$$X_1 = |\lambda_1|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[|\Phi_4|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + |\Phi_2|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\Bigg]\Bigg\}, \tag{4.1.22}$$

$$Y_1 = |\lambda_2|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[|\Phi_4|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)} + |\Phi_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg]\Bigg\}, \tag{4.1.23}$$

$$F_1 = \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg(1 + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}|\Phi_4|\Bigg) + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}|\Phi_2|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}, \tag{4.1.24}$$

$$G_1 = \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg(|\Phi_4|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)} + |\Phi_2|\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\Bigg), \tag{4.1.25}$$

$$X_2 = |\lambda_1|\Bigg\{\frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[|\Phi_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\omega_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)} + |\Phi_3|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Bigg]\Bigg\}, \tag{4.1.26}$$

$$Y_2 = |\lambda_2|\Bigg\{\frac{(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[|\Phi_1|\frac{(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + |\Phi_3|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\Bigg]\Bigg\}, \tag{4.1.27}$$

$$F_2 = \frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg(|\Phi_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\omega_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)} + |\Phi_3|\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg), \tag{4.1.28}$$

$$G_2 = \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\left(1+\frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}|\Phi_1|\right)+\frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}|\Phi_3|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}, \tag{4.1.29}$$

$\mathcal{K} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Résultat d'existence

Le premier résultat est un résultat d'existence, basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder 1.5.5.

Théorème 4.1.2 *Supposons que* $f, g : [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *sont des fonctions continues, et il existe* $M_i, \overline{M}_i \geq 0$, $i = 1,2,3$, *tel que, pour* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x(t),y(t))| \leq M_1 + M_2|x| + M_3|y|, \tag{4.1.30}$$

$$|g(t,x(t),y(t))| \leq \overline{M}_1 + \overline{M}_2|x| + \overline{M}_3|y|, \tag{4.1.31}$$

si

$$K_1 = (F_1+F_2)M_2 + (G_1+G_2)\overline{M}_2 + (X_1+X_2) < 1, \tag{4.1.32}$$

$$K_2 = (F_1+F_2)M_3 + (G_1+G_2)\overline{M}_3 + (Y_1+Y_2) < 1, \tag{4.1.33}$$

alors, le système couplé (4.1.1) *admet au moins une solution sur* $[a,b]$.

Preuve. L'opérateur $\mathcal{A}$ définit en (4.1.19) est continu, grâce a la continuité des fonctions f et g. On va montrer que l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}\times\mathcal{K}$ est complètement continu. En effet Soit $\mathcal{B}_r = \{(x,y) \in \mathcal{K}\times\mathcal{K} : \|(x,y)\| \leq r\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_r$, il existe des nombres réels positifs $\bar{f}$ et $\bar{g}$ tels que $|f(t,x(t),y(t)| \leq \bar{f}$ et $|g(t,x(t),y(t)| \leq \bar{g}$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_r$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{A}_1(x,y)\right\| \leq \sup_{t\in[a,b]}\Bigg\{ & I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,x(t),y(t))| + |\lambda_1|I^{\alpha_2}|x(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
& \times\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x(b),y(b))| + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_1+q_2+\nu_i}|g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i))| \\
& + |\lambda_1|I^{\alpha_2}|x(b)| + |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_2+\nu_i}|y(\eta_i)|\Bigg) \\
& + |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}|f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j))| + I^{p_1+p_2}|g(b,x(b),y(b))| \\
& + \sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_2+\sigma_j}|x(\xi_j)| + |\lambda_2|I^{p_2}|y(b)|\Bigg)\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\bar{f} + |\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\bar{f} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\bar{g} \\
&+ |\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| + |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|y\|\Bigg) \\
&+ |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\bar{f} + \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\bar{g} \\
&+ |\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|x\| + |\lambda_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{p_2+1}\|y\|\Bigg)\Bigg], \\
&\leq F_1\bar{f} + X_1\|x\| + G_1\bar{g} + Y_1\|y\|,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$
\|\mathcal{A}_1(x,y)\| \leq F_1\bar{f} + X_1\|x\| + G_1\bar{g} + Y_1\|y\|. \tag{4.1.34}
$$

De même, on a

$$
\|\mathcal{A}_2(x,y)\| \leq F_2\bar{f} + X_2\|x\| + G_2\bar{g} + Y_2\|y\|. \tag{4.1.35}
$$

De (4.1.34) et (4.1.35), il s'ensuit que

$$
\|\mathcal{A}(x,y)\| \leq [F_1+F_2]\bar{f} + [G_1+G_2]\bar{g} + [X_1+X_2]r + [Y_1+Y_2]r. \tag{4.1.36}
$$

Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est uniformément borné.

Ensuite, nous montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est complètement continu. En effet soit $t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_1 < t_2$ alors pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_r$ nous avons

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x(t_2),y(t_2)) - \mathcal{A}_1(x(t_1),y(t_1))\Big| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\Bigg|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \\
&- (t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\Big)f(s,x(s),y(s))ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}f(s,x(s),y(s))ds\Bigg| \\
&+ \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\alpha_2)}\Bigg|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_2-1} - (t_1-s)^{\alpha_2-1}\Big)x(s)ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_2-1}x(s)ds\Bigg| + \frac{|(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1} - (t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[|\Phi_4|\Bigg(I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x(b),y(b))| + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_1+q_2+\nu_i}|g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i))| \\
&+ |\lambda_1|I^{\alpha_2}|x(b)| + |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_2+\nu_i}|y(\eta_i)|\Bigg) \\
&+ |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}|f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j))| + I^{p_1+p_2}|g(b,x(b),y(b))|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_2+\sigma_j}|x(\xi_j)|+|\lambda_2|I^{p_2}|y(b)|\Bigg)\Bigg],\\
&\leq \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\left|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}-(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\Big)ds\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}ds\right|\right)\\
&+\frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\alpha_2)}\left|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_2-1}-(t_1-s)^{\alpha_2-1}\Big)x(s)ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_2-1}x(s)ds\right|\\
&+\frac{\left|(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}-(t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}\right|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\overline{f}+|\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\|\\
&+\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\overline{g}+|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|y\|\Bigg)\\
&+|\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\overline{f}+\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\overline{g}\\
&+|\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|x\|+|\lambda_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{p_2+1}\|y\|\Bigg)\Bigg],\\
&\leq \frac{\overline{f}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\left|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}-(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\Big)ds\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}ds\right|\right)\\
&+\frac{r|\lambda_1|}{\Gamma(\alpha_2)}\left(\left|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{\alpha_2-1}-(t_1-s)^{\alpha_2-1}\Big)ds\right|+\left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_2-1}ds\right|\right)\\
&+\frac{\left|(t_2-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}-(t_1-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}\right|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\overline{f}+|\lambda_1|\frac{r(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\\
&+\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\overline{g}+|\lambda_2|r\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\Bigg)\\
&+|\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\overline{f}+\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\overline{g}\\
&+|\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{r(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}+|\lambda_2|\frac{r(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Par le même procédé, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Big|\mathcal{A}_2(x(t_2),y(t_2))-\mathcal{A}_2(x(t_1),y(t_1))\Big| &\leq \frac{\overline{g}}{\Gamma(p_1+p_2)}\Bigg(\Big|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{p_1+p_2-1} \\
&- (t_1-s)^{p_1+p_2-1}\Big)ds\Big| + \Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{p_1+p_2-1}ds\Big|\Bigg) \\
&+ \frac{r|\lambda_2|}{\Gamma(p_2)}\Bigg(\Big|\int_a^{t_1}\Big((t_2-s)^{p_2-1}-(t_1-s)^{p_2-1}\Big)ds\Big| + \Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{p_2-1}ds\Big|\Bigg) \\
&+ \frac{\big|(t_2-a)^{\delta_1+p_2-1}-(t_1-a)^{\delta_1+p_2-1}\big|}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[|\Phi_1|\Bigg(\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\overline{g}+|\lambda_2|\frac{r(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} \\
&+ \sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\overline{f}+|\lambda_1|r\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\Bigg) \\
&+ |\Phi_3|\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\overline{g}+\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\overline{f} \\
&+ |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{r(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}+|\lambda_1|\frac{r(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$ le côté droit des deux inégalités ci-dessus tend vers zéro, implique que $\mathcal{A}(x,y)$ est équicontinu. Il s'ensuit donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli que $\mathcal{A}(x,y)$ est relativement compact alors $\mathcal{A}(x,y)$ est complètement continu.

Reste à montrer que l'ensemble $\mathfrak{M}(\mathcal{A})=\{(x,y)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}\mid \mathcal{A}(x,y)=\theta\mathcal{A}(x,y);0<\theta<1\}$ est borné. En effet, pour tout $(x,y)\in\mathfrak{M}$, avec $(x,y)=\theta\mathcal{A}(x,y)$, et pour tout $t\in[a,b]$, on a

$$
\begin{cases}
x(t)=\theta\mathcal{A}_1(x,y)(t), \\
y(t)=\theta\mathcal{A}_2(x,y)(t).
\end{cases}
\tag{4.1.37}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\left|x(t)\right| \leq{}& \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\left(M_1+M_2|x|+M_3|y|\right)+|\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| \\
&+\frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\times\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\left(M_1+M_2|x|+M_3|y|\right) \\
&+\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2|x|+\overline{M}_3|y|\right)+|\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| \\
&+|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|y\|\Bigg)+|\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)} \\
&\times\left(M_1+M_2|x|+M_3|y|\right)+\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2|x|+\overline{M}_3|y|\right) \\
&+|\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|x\|+|\lambda_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{p_2+1}\|y\|\Bigg)\Bigg], \\
\leq{}& F_1\left(M_1+M_2|x|+M_3|y|\right)+G_1\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2|x|+\overline{M}_3|y|\right)+X_1\|x\|+Y_1\|y\|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\|x\| \leq \left(F_1M_1+G_1\overline{M_1}\right)+\left(F_1M_2+G_1\overline{M}_2+X_1\right)\|x\|+\left(F_1M_3+G_1\overline{M}_3+Y_1\right)\|y\|. \tag{4.1.38}
$$

De même en trouve

$$
\|y\| \leq \left(F_2M_1+G_1\overline{M}_1\right)+\left(F_2M_2+G_2\overline{M}_2+X_2\right)\|x\|+\left(F_2M_3+G_2\overline{M}_3+Y_2\right)\|y\|, \tag{4.1.39}
$$

impliquent que

$$
\begin{aligned}
\|x\|+\|y\| \leq (F_1+F_2)M_1+(G_1+G_2)\overline{M}_1+\Big[&(F_1+F_2)M_2+(G_1+G_2)\overline{M}_2 \\
+(X_1+X_2)\Big]\|x\|+\Big[&(F_1+F_2)M_3+(G_1+G_2)\overline{M}_3+(Y_1+Y_2)\Big]\|y\|,
\end{aligned}
$$

ainsi, nous obtenons

$$
\|(x,y)\| \leq \frac{(F_1+F_2)M_1+(G_1+G_2)\overline{M}_1}{\min\left(1-K_1;1-K_2\right)}. \tag{4.1.40}
$$

Avec K_1 et K_2 sont donnée respectivement par (4.1.32) et (4.1.33). D'après (4.1.40) l'ensemble $\mathfrak{M}$ est borné, par conséquent, en appliquant le Théorème 1.5.5, l'opérateur $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe. Par conséquent, nous déduisons que Le problème (4.1.1) a au moins une solution définit sur $[a, b]$.

Résultat d'unicité

Pour traiter l'unicité de la solution pour notre système (4.1.1), nous utilisons le principe de contraction de Banach 1.5.1.

Théorème 4.1.3 *Supposons que* $f, g : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues. De plus, nous supposons que :*

$(H_1)-$ *Il existe des constantes* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 > 0$ *telles que, pour tout* $t \in [a, b]$ *et* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1)| \leq \mathcal{L}_1\Big(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\Big), \tag{4.1.41}$$

$$|g(t, x_2, y_2) - g(t, x_1, y_1)| \leq \mathcal{L}_2\Big(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\Big). \tag{4.1.42}$$

Si

$$\Big(F_1 + F_2\Big)\mathcal{L}_1 + \Big(G_1 + G_2\Big)\mathcal{L}_2 + \Big(X_1 + X_2\Big) + \Big(Y_1 + Y_2\Big) < 1. \tag{4.1.43}$$

Alors, le problème (4.1.1) *admet une solution unique définit sur* $[a, b]$

Preuve. Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans (3.1.9). Le système couplé (4.1.1) est alors transformé en un problème de point fixe $(x, y)(t) = \mathcal{A}(x, y)(t)$. En utilisant le principe de contraction de Banach, nous montrerons que $\mathcal{A}$ admet un point fixe unique.

On pose $\sup_{t\in[a,b]} = |f(t, 0, 0)| = L_1 < \infty$, et $\sup_{t\in[a,b]} = |g(t, 0, 0)| = L_2 < \infty$ et choisissons $r > 0$ tel que

$$r \geq \frac{(F_1 + F_2)L_1 + (G_1 + G_2)L_2}{1 - \Big[\Big(F_1 + F_2\Big)\mathcal{L}_1 + \Big(G_1 + G_2\Big)\mathcal{L}_2 + \Big(X_1 + X_2\Big) + \Big(Y_1 + Y_2\Big)\Big]}. \tag{4.1.44}$$

Maintenant, nous montrons que $\mathcal{A}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$, où $\mathcal{B}_r = \{(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} : \|(x, y)\| \leq r\}$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}_r$, $t \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned} |f(t, x(t), y(t))| &\leq |f(t, x(t), y(t)) - f(t, 0, 0)| + |f(t, 0, 0)|, \\ &\leq \mathcal{L}_1(|x(t)| + |y(t)|) + L_1, \\ &\leq \mathcal{L}_1(\|x\| + \|y\|) + L_1, \\ &\leq \mathcal{L}_1 r + L_1, \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

de même on a

$$|g(t, x(t), y(t))| \leq \mathcal{L}_2(\|x\| + \|y\|) + L_2 \leq \mathcal{L}_2 r + L_2. \tag{4.1.46}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}_1(x,y)(t)\right| \leq & \sup_{t\in[a,b]}\Bigg\{ I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,x(t),y(t))| + |\lambda_1| I^{\alpha_2}|x(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
& \times \Bigg[|\Phi_4| \Bigg(I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x(b),y(b))| + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| I^{p_1+q_2+\nu_i}|g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i))| \\
& + |\lambda_1| I^{\alpha_2}|x(b)| + |\lambda_2| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| I^{p_2+\nu_i}|y(\eta_i)| \Bigg) \\
& + |\Phi_2| \Bigg(\sum_{j=1}^{m} |\omega_j| I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}|f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j))| + I^{p_1+p_2}|g(b,x(b),y(b))| \\
& + \sum_{j=1}^{m} |\omega_j| I^{\alpha_2+\sigma_j}|x(\xi_j)| + |\lambda_2| I^{p_2}|y(b)| \Bigg) \Bigg] \Bigg\}, \\
\leq & \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big(\mathcal{L}_1 r + L_1\Big) + |\lambda_1| \frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
& \times \Bigg[|\Phi_4| \Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big(\mathcal{L}_1 r + L_1\Big) + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\Big(\mathcal{L}_2 r + L_2\Big) \\
& + |\lambda_1| \frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x\| + |\lambda_2| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|y\| \Bigg) \\
& + |\Phi_2| \Bigg(\sum_{j=1}^{m} |\omega_j| \frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\Big(\mathcal{L}_1 r + L_1\Big) + \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\Big(\mathcal{L}_2 r + L_2\Big) \\
& + |\lambda_1| \sum_{j=1}^{m} |\omega_j| \frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|x\| + |\lambda_2| \frac{(b-a)^{p_2}}{p_2+1}\|y\| \Bigg) \Bigg], \\
\leq & \Big(F_1\mathcal{L}_1 + G_1\mathcal{L}_2 + X_1 + Y_1\Big) r + F_1 L_1 + G_1 L_2,
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\left\|\mathcal{A}_1(x,y)\right\| \leq \Big(F_1\mathcal{L}_1 + G_1\mathcal{L}_2 + X_1 + Y_1\Big) r + F_1 L_1 + G_1 L_2. \tag{4.1.47}
$$

Identiquement, on obtient

$$
\left\|\mathcal{A}_2(x,y)\right\| \leq \Big(F_2\mathcal{L}_1 + G_2\mathcal{L}_2 + X_2 + Y_2\Big) r + F_2 L_1 + G_2 L_2. \tag{4.1.48}
$$

En utilisant (4.1.44) on arrive à

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{A}(x,y)\right\| \leq & \Big[\Big(F_1+F_2\Big)\mathcal{L}_1 + \Big(G_1+G_2\Big)\mathcal{L}_2 + \Big(X_1+X_2\Big) + \Big(Y_1+Y_2\Big)\Big] r \\
& + (F_1+F_2)L_1 + (G_1+G_2)L_2 \leq r,
\end{aligned} \tag{4.1.49}
$$

ce qui implique que $\mathcal{A}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$.

Ensuite, nous montrerons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est une contraction, en effet pour tout $x_1, y_2 \in \mathbb{R}$

et pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x_2,y_2)(t)-\mathcal{A}_1(x_1,y_1)(t)\Big| \leq I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,x_2(t),y_2(t))-f(t,x_1(t),y_1(t))| \\
&+|\lambda_1|I^{\alpha_2}|x_2(t)-x_1(t)|+\frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(b,x_2(b),y_2(b))-f(b,x_1(b),y_1(b))| \\
&+\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_1+q_2+\nu_i}|g(\eta_i,x_2(\eta_i),y_2(\eta_i))-g(\eta_i,x_1(\eta_i),y_1(\eta_i))| \\
&+|\lambda_1|I^{\alpha_2}|x_2(b)-x_1(b)|+|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_2+\nu_i}|y_2(\eta_i)-y_1(\eta_i)|\Bigg) \\
&+|\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}|f(\xi_j,x_2(\xi_j),y_2(\xi_j))-f(\xi_j,x_1(\xi_j),y_1(\xi_j))| \\
&+I^{p_1+p_2}|g(b,x_2(b),y_2(b))-g(b,x_1(b),y_1(b))| \\
&+\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_2+\sigma_j}|x_2(\xi_j)-x_1(\xi_j)|+|\lambda_2|I^{p_2}|y_2(b)-y_1(b)|\Bigg)\Bigg], \\
&\leq\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\mathcal{L}_1\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big)+|\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x_2-x_1\| \\
&+\frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\times\Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\mathcal{L}_1\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big) \\
&+|\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|x_2-x_1\|+|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|y_2-y_1\|\Bigg) \\
&+|\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1\Big(\|x_2-x_1\| \\
&+\|y_2-y_1\|\Big)+\frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\mathcal{L}_2\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big) \\
&+|\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|x_2-x_1\|+|\lambda_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{p_2+1}\|y_2-y_1\|\Bigg)\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq\Big(F_1\mathcal{L}_1+G_1\mathcal{L}_2+X_1+Y_1\Big)\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big),
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$\Big\|\mathcal{A}_1(x_2,y_2)(t)-\mathcal{A}_1(x_1,y_1)(t)\Big\| \leq \Big(F_1\mathcal{L}_1+G_1\mathcal{L}_2+X_1+Y_1\Big)\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big). \quad (4.1.50)$$

Identiquement, on a

$$\Big\|\mathcal{A}_2(x_2,y_2)(t)-\mathcal{A}_1(x_1,y_1)(t)\Big\| \leq \Big(F_2\mathcal{L}_1+G_2\mathcal{L}_2+X_2+Y_2\Big)\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big). \quad (4.1.51)$$

D'après (4.1.50) et (4.1.51) on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(x_2,y_2)-\mathcal{A}(x_1,y_1)\| \leq &\Big[\Big(F_1+F_2\Big)\mathcal{L}_1+\Big(G_1+G_2\Big)\mathcal{L}_2+\Big(X_1+X_2\Big)\\ &+\Big(Y_1+Y_2\Big)\Big]\Big(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\Big).\end{aligned} \tag{4.1.52}$$

Comme $\Big(F_1+F_2\Big)\mathcal{L}_1+\Big(G_1+G_2\Big)\mathcal{L}_2+\Big(X_1+X_2\Big)+\Big(Y_1+Y_2\Big)<1$, alors $\mathcal{A}$ est un opérateur de contraction. Donc, d'après le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur $\mathcal{A}$ a un point fixe unique qui est en effet une solution unique du système (4.1.1) sur $[a,b]$.

4.2 Analyse de stabilité pour le système (4.1.1)

Dans cette section, on s'intéresse à étudier la stabilité au sens de Ulam-Hyers (U-H), et au sens de Ulam-Hyers généralisé (U-H-G) de la solution pour le système couplé (4.1.1). Soit $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$, on considère les inégalités suivantes

$$\Big|{}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda_1)\tilde{x}(t)-f(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))\Big|\leq\varepsilon_1,\quad t\in[a,b], \tag{4.2.1}$$

$$\Big|{}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2}+\lambda_2)\tilde{y}(t)-g(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))\Big|\leq\varepsilon_2,\quad t\in[a,b], \tag{4.2.2}$$

et $\tilde{x}(b)=x(b)$, $\tilde{y}(b)=y(b)$.

Définition 4.2.1 *[1, 32] Le système couplé (4.1.1) est dit (U-H) stable s'il existe $\lambda=(\lambda_f,\lambda_g)>0$, tel que pour chaque $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$ et pour chaque solution $(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ des inégalités (4.2.1), (4.2.2), il existe $(x,y)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ solution du système couplé (4.1.1) on a*

$$\|(\tilde{x},\tilde{y})-(x,y)\|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\leq\lambda\varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Définition 4.2.2 *[1, 32] Le système couplé (4.1.1) est dit (U-H-G) stable s'il existe $\varphi=(\varphi_f,\varphi_g)\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ avec $\varphi(0)=(\varphi_f(0),\varphi_g(0))=(0,0)$, tel que pour chaque $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$ et pour chaque solution $(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ des inégalités (4.2.1), (4.2.2), il existe $(x,y)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ solution du système couplé (4.1.1) on a*

$$\|(\tilde{x},\tilde{y})-(x,y)\|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\leq\varphi(\varepsilon). \tag{4.2.4}$$

Remarque 4.2.3 *Une fonction $(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ est une solution des inégalités (4.2.1), (4.2.2) si et seulement s'il existe une fonction $(h_1,h_2)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ telle que*

i- $|h_1(t)|\leq\varepsilon_1$ *et* $|h_2(t)|\leq\varepsilon_2$.

ii- *for* $t\in[a,b]$

$$\begin{cases}{}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2}+\lambda_1)\tilde{x}(t)=f(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))+h_1(t),\\ {}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2}+\lambda_2)\tilde{y}(t)=g(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))+h_2(t).\end{cases} \tag{4.2.5}$$

Pour simplifier les calculs, nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\mathcal{L}_1 + |\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\\ &\times \Bigg[|\Phi_4|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2 + |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1\\ &+ |\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\mathcal{L}_1 + \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\\ &\times \Bigg[|\Phi_4|\Bigg(|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2\Bigg)\\ &+ |\Phi_2|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1\Bigg],\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

$$C_1 = \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}. \tag{4.2.8}$$

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\mathcal{L}_2 + |\lambda_2|\frac{(b-a)^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\\ &\times \Bigg[|\Phi_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1 + |\Phi_3|\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2\\ &+ |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned}B_2 &= \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\mathcal{L}_2 + \frac{(b-a)^{\delta_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta_1+p_2)}\\ &\times \Bigg[|\Phi_1|\Bigg(|\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)} + \sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1\Bigg)\\ &+ |\Phi_3|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2\Bigg],\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$C_2 = \frac{(b-a)^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}. \tag{4.2.11}$$

Théorème 4.2.4 *Supposons que* (H_1) *est vérifié, si* $A_1 > 1, A_2 > 1$, *et* $1 - \dfrac{B_1B_2}{(1-A_1)(1-A_2)} \neq 0$ *alors le système* (4.1.1) *est (U-H) stable sur* $[a,b]$ *et par conséquent (U-H-G) stable, où* $A_i, B_i, i = 1,2$ *sont donnés par* (4.2.6) − (4.2.10).

Preuve. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, et $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ satisfait les inégalités (4.2.1), (4.2.2), et $(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ est l'unique solution du problème (4.1.1) avec les conditions $\tilde{x}(b) = x(b)$, $\tilde{y}(b) = y(b)$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha_1+\alpha_2} f(t, x(t), y(t)) - \lambda_1 I^{\alpha_2} x(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\ &\times \Bigg[\Phi_4\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2} f(b, x(b), y(b))) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i} g(\eta_i, x(\eta_i), y(\eta_i)) \\ &+ \lambda_1 I^{\alpha_2} x(b) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_2+\nu_i} y(\eta_i)\Bigg) + \Phi_2\Bigg(\sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j} f(\xi_j, x(\xi_j), y(\xi_j)) \\ &- I^{p_1+p_2} g(b, x(b), y(b)) - \sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j} x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2} y(b)\Bigg)\Bigg], \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

et

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{p_1+p_2} g(t, x(t), y(t)) - \lambda_2 I^{p_2} y(t) + \frac{(t-a)^{\delta_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \Bigg[\Phi_1\Bigg(\sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j} h_1(\xi_j) - I^{p_1+p_2} g(b, x(b), y(b)) \\ &- \lambda_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j} x(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2} y(b)\Bigg) + \Phi_3\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2} f(b, x(b), y(b)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i} g(\eta_i, x(\eta_i), y(\eta_i)) + \lambda_1 I^{\alpha_2} x(b) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_2+\nu_i} y(\eta_i)\Bigg)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Puisque, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ satisfait les inégalités (4.2.1), (4.2.2), d'après la remarque 4.2.3 on a

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha_1,\beta_1}({}^{H}D^{\alpha_2,\beta_2} + \lambda_1)\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + h_1(t), & t \in [a, b], \\ {}^{H}D^{p_1,q_1}({}^{H}D^{p_2,q_2} + \lambda_2)\tilde{y}(t) = g(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) + h_2(t), & t \in [a, b], \\ \tilde{x}(a) = x(a) \quad , \quad \tilde{x}(b) = x(b), \\ \tilde{y}(a) = y(a) \quad , \quad \tilde{y}(b) = y(b), \end{cases} \tag{4.2.14}$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= I^{\alpha_1+\alpha_2} f(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) - \lambda_1 I^{\alpha_2} \tilde{x}(t) + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\ &\times \Bigg[\Phi_4\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2} f(b, \tilde{x}(b), \tilde{y}(b))) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i} g(\eta_i, \tilde{x}(\eta_i), \tilde{y}(\eta_i)) \\ &+ \lambda_1 I^{\alpha_2} \tilde{x}(b) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i I^{p_2+\nu_i} \tilde{y}(\eta_i)\Bigg) + \Phi_2\Bigg(\sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j} f(\xi_j, \tilde{x}(\xi_j), \tilde{y}(\xi_j)) \\ &- I^{p_1+p_2} g(b, \tilde{x}(b), \tilde{y}(b)) - \sum_{j=1}^{m} \omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j} \tilde{x}(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2} \tilde{y}(b)\Bigg)\Bigg] + I^{\alpha_1+\alpha_2} h_1(t), \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= I^{p_1+p_2}g(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) - \lambda_2 I^{p_2}\tilde{y}(t) + \frac{(t-a)^{\delta_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\delta_1+p_2)} \\
&\times \Bigg[\Phi_1\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}f(\xi_j,\tilde{x}(\xi_j),\tilde{y}(\xi_j)) - I^{p_1+p_2}g(b,\tilde{x}(b),\tilde{y}(b)) \\
&- \lambda_1\sum_{j=1}^{m}\omega_j I^{\alpha_2+\sigma_j}\tilde{x}(\xi_j) + \lambda_2 I^{p_2}\tilde{y}(b)\Bigg) + \Phi_3\Bigg(- I^{\alpha_1+\alpha_2}f(b,\tilde{x}(b),\tilde{y}(b)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_1+p_2+\nu_i}g(\eta_i,\tilde{x}(\eta_i),\tilde{y}(\eta_i)) + \lambda_1 I^{\alpha_2}\tilde{x}(b) - \lambda_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i I^{p_2+\nu_i}\tilde{y}(\eta_i)\Bigg)\Bigg] \\
&+ I^{p_1+p_2}h_2(t).
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

D'autre part, pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{x}(t)-x(t)\right| &\leq I^{\alpha_1+\alpha_2}|f(t,\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) - f(t,x(t),y(t))| \\
&+ |\lambda_1|I^{\alpha_2}|\tilde{x}(t)-x(t)| + \frac{(t-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \\
&\times \Bigg[|\Phi_4|\Bigg(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_1+q_2+\nu_i}|g(\eta_i,\tilde{x}(\eta_i),\tilde{y}(\eta_i)) - g(\eta_i,x(\eta_i),y(\eta_i))| \\
&+ |\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|I^{p_2+\nu_i}|\tilde{y}(\eta_i)-y(\eta_i)|\Bigg) \\
&+ |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}|f(\xi_j,\tilde{x}(\xi_j),\tilde{y}(\xi_j)) - f(\xi_j,x(\xi_j),y(\xi_j))| \\
&+ |\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|I^{\alpha_2+\sigma_j}|\tilde{x}(\xi_j)-x(\xi_j)|\Bigg)\Bigg] + I^{\alpha_1+\alpha_2}|h_1(t)| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\mathcal{L}_1\Big(\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} + \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}}\Big) + |\lambda_1|\frac{(b-a)^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \\
&+ \frac{(b-a)^{\gamma_1+\alpha_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} \times \Bigg[|\Phi_4|\Bigg(|\lambda_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_2+\nu_i+1)}\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\eta_i-a)^{p_1+p_2+\nu_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\nu_i+1)}\mathcal{L}_2\Big(\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} + \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}}\Big)\Bigg) \\
&+ |\Phi_2|\Bigg(\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\sigma_j+1)}\mathcal{L}_1\Big(\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \\
&+\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}}\Big) + |\lambda_1|\sum_{j=1}^{m}|\omega_j|\frac{(\xi_j-a)^{\alpha_2+\sigma_j}}{\Gamma(\alpha_2+\sigma_j+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}}\Bigg)\Bigg] + \frac{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\varepsilon_1 \\
&\leq A_1\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} + B_1\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} + C_1\varepsilon_1,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{C_1}{1-A_1}\varepsilon_1 + \frac{B_1}{1-A_1}\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}}. \tag{4.2.17}$$

Où A_1, B_1, C_1 sont respectivement donnés par (4.2.6), (4.2.7) et (4.2.8).

De la même manière, on a

$$\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{C_2}{1-A_2}\varepsilon_2 + \frac{B_2}{1-A_2}\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}}. \tag{4.2.18}$$

Où A_2, B_2, C_2 sont respectivement donnés par (4.2.9), (4.2.10) et (4.2.11).

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} \|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} - \dfrac{B_1}{1-A_1}\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \leq \dfrac{C_1}{1-A_1}\varepsilon_1. \\ \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} - \dfrac{B_2}{1-A_2}\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \leq \dfrac{C_2}{1-A_2}\varepsilon_2. \end{cases} \tag{4.2.19}$$

Alors (4.2.19) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{B_1}{1-A_1} \\ -\dfrac{B_2}{1-A_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \\ \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \dfrac{C_1}{1-A_1}\varepsilon_1 \\ \dfrac{C_2}{1-A_2}\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.20}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \\ \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta} & \dfrac{B_1}{\Delta(1-A_1)} \\ \dfrac{B_2}{\Delta(1-A_2)} & \dfrac{1}{\Delta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{C_1}{1-A_1}\varepsilon_1 \\ \dfrac{C_2}{1-A_2}\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.21}$$

avec $\Delta = 1 - \dfrac{B_1B_2}{(1-A_1)(1-A_2)} \neq 0$, donc (4.2.21) devient

$$\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{C_1}{\Delta(1-A_1)}\varepsilon_1 + \frac{B_1C_2}{\Delta(1-A_1)(1-A_2)}\varepsilon_2. \tag{4.2.22}$$

$$\|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{B_2C_1}{\Delta(1-A_1)(1-A_2)}\varepsilon_1 + \frac{C_2}{\Delta(1-A_2)}\varepsilon_2. \tag{4.2.23}$$

Ce qui conduit à

$$\|\tilde{x}-x\|_{\mathcal{K}} + \|\tilde{y}-y\|_{\mathcal{K}} \leq \frac{C_1(1-A_2)+B_2C_1}{\Delta(1-A_1)(1-A_2)}\varepsilon_1 + \frac{C_2(1-A_1)+B_1C_2}{\Delta(1-A_1)(1-A_2)}\varepsilon_2, \tag{4.2.24}$$

pour $\varepsilon = max(\varepsilon_1;\varepsilon_2)$ et $\lambda = \dfrac{C_1(1-A_2)+B_2C_1+C_2(1-A_1)+B_1C_2}{\Delta(1-A_1)(1-A_2)}$, on obtient

$$\|(\tilde{x},\tilde{y})-(x,y)\|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}} \leq \lambda\varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Cela prouve que le système couplé (4.1.1), est (U-H) stable.

De plus, en posant $\varphi(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$ avec $\varphi(0) = 0$ on obtient

$$\|(\tilde{x},\tilde{y})-(x,y)\|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}} \leq \varphi(\varepsilon), \tag{4.2.26}$$

on déduit aussi que le système couplé (4.1.1), est (U-H-G) stable.

Chapitre 5

Étude d'inclusion différentielle fractionnaire hybride de Langevin avec la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer

5.1 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle fractionnaire hybride avec la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer

5.1.1 Motivation

Les équations différentielles hybrides peuvent être considérées comme des perturbations quadratiques d'équations différentielles non linéaires. Ces dernières années, elles ont l'objet d'un intérêt croissant en raison de sa vaste applicabilité dans plusieurs domaines. Pour plus de détails sur les équations différentielles hybrides, voir [22, 43, 86]. Hilal et Kajouni [37] ont discuté le problème aux limites suivants pour une équation différentielle hybride d'ordre fractionnaire via la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} D^{\alpha}\Big(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big) = g(t,x(t)), \quad t \in J = [0,T] \\ a\dfrac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\dfrac{x(T)}{f(T,x(T))} = c, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}\big(J\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$, $g : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et a, b, c sont des constantes réelles avec $a+b \neq 0$.

Motivés par les travaux ci-dessus, nous étudions les critères d'existence de la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\big(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\big) \in G(t,x(t)), \quad t \in J := [a,b] \\ x(a) = 0 \quad , \qquad x(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}$ la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre α, $1 < \alpha \leq 2$ et de paramètre β, $0 \leq \beta \leq 1$, $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $a < \eta_1 < ... < \eta_n < b$, $f \in C\big(J\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$ et $G : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. nous discutons le résultat d'existence en utilisant le théorème de point fixe hybride de Dhage.

Remarque 5.1.1
- *Si $\psi(t) = t$, et $\beta = 1$ le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de Caputo.*
- *Si $\beta = 1$ le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo.*
- *Si $\psi(t) = t$, et $\beta = 0$ le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville.*
- *Si $\beta = 0$ ole problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de ψ-Riemman-Liouville.*
- *Si $\psi(t) = t$, le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de Hilfer.*
- *Si $\psi(t) = \log(t)$, le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard.*
- *Si $\psi(t) = t^{\rho}$, le problème hybride (5.1.1) se réduit à un problème hybride avec la dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola.*

5.1.2 Construction de la solution

Lemme 5.1.2 *Soit $a \geq 0$, $1 < \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta > 0$, et $y \in \mathbb{C}(J, \mathbb{R})$. Alors la fonction x est une solution du problème suivant*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = y(t),\ t \in J := [a,b] \\ x(a) = 0\,, \quad x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases} \tag{5.1.2}$$

si et seulement si x est une solution de l'équation intégral

$$x(t) = f(t,x(t))\left[I^{\alpha;\psi}y(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\left(f(b,x(b))I^{\alpha;\psi}y(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}y(\eta_i)\right)\right], \tag{5.1.3}$$

avec

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \neq 0 \tag{5.1.4}$$

Preuve. Le problème (5.1.1), peut s'écrire sou la forme suivante

$$I_{a^+}^{\gamma-\alpha;\psi} D_{a^+}^{\gamma;\psi}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = y(t). \tag{5.1.5}$$

Avec $\gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta > 0$, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α aux deux côtés de (5.1.5), on obtient en utilisant le Lemme 1.3.10

$$\frac{x(t)}{f(t, x(t))} = I^{\alpha;\psi}y(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma)}((\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1} + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma-1)}((\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-2}, \tag{5.1.6}$$

où c_0, c_1 sont des constantes. En utilisant la condition aux limites $x(a) = 0$ dans (5.1.6), nous obtenons que $c_1 = 0$. Alors

$$\frac{x(t)}{f(t, x(t))} = I^{\alpha;\psi}y(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma)}((\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}. \tag{5.1.7}$$

En utilisant la condition limite aux limites $x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i)$ dans (5.1.7) on trouve

$$c_0 = \frac{1}{\Lambda}\left[f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}y(b) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}y(\eta_i)\right]. \tag{5.1.8}$$

En substituant la valeur de c_0 dans (5.1.6) on obtient la solution intégrale (5.1.3).

5.1.3 Existence de la solution pour le problème (5.1.1)

Dans cette section, nous traitons l'existence de la solution du problème (5.1.1), en utilisant le théorème du point fixe hybride de Dhage 1.5.6 et pour simplifier les calculs, nous utilisons la notation suivante

$$\Phi = \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{\gamma-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma)}\left[\widehat{f}\frac{(\psi(b) - \psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \widehat{f}\sum_{i=1}^{n} |\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i) - \psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right], \tag{5.1.9}$$

où $\widehat{f} = \max(|f(b, x(b))|; |f(\eta_i, x(\eta_i))|)$, $i = 1, ..., n$.

Définition 5.1.3 *Une fonction* $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ *est dite solution du problème* (5.1.1) *si,* $x(a) = 0$, $x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i)$ *et il existe une fonction* $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ *avec* $v \in G(t, x(t))$ *p.p, sur* J *telle que*

$$x(t) = f(t, x(t))\left[I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big)\right]. \tag{5.1.10}$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on définit l'ensemble des sélections de G par

$$\mathcal{S}_{G,x} := \big\{v \in L^1([a, b], \mathbb{R}) : v \in G(t, x(t));\ t \in [a, b]\big\}. \tag{5.1.11}$$

On suppose que

$(H_1)-$ La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue et il existe une fonction bornée φ telle que $\varphi(t) > 0$, pour tout $t \in J$ et

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \varphi(t)|x(t) - y(t)|,$$

pour tout $t \in J$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

$(H_2)-$ $G : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est L^1-Carathéodory et a des valeurs convexes non vides, et pour chaque $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}_{G,x} = \{v \in L^1(J, X) : v(t) \in G(t, x(t)); \quad t \in J\}$$

est convexe et non vide.

$(H_3)-$ $|G(t, x)| := \sup\{|v| : v \in G(t, x)\} \leq p(t)\Psi(|x|)$ pour tout $t \in J$ et tout $x \in \mathcal{C}(J, X)$, où $p \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et $\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty)$ est une fonction continue, bornée et strictement croissante.

$(H_4)-$ $\|\varphi\|\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi < \frac{1}{2}$; (où Φ est donné par (5.1.9)).

Le résultat d'existence suivant est basé sur le théorème du point fixe hybride de Dhage.

Théorème 5.1.4 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$, *le problème* (5.1.1) *admet au moins une solution définie sur* J

Preuve. D'après le lemme 5.1.2, et afin de transformé le problème (5.1.1) en un problème de point fixe, on introduit l'opérateur multivoque $\mathcal{H} : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$ définit par

$$\mathcal{H}x := \left\{ h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : h(t) = \begin{cases} f(t, x(t)) \Bigg[I^{\alpha;\psi} v(t) + \dfrac{(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)} \\ \times \Big(f(b, x(b)) I^{\alpha;\psi} v(b) \\ - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\eta_i, x(\eta_i)) I^{\alpha;\psi} v(\eta_i) \Big) \Bigg]; t \in J, \quad v \in \mathcal{S}_{G,x} \end{cases} \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons deux opérateurs, $\mathcal{A} : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)),$$

et, $\mathcal{B} : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$ par

$$\mathcal{B}(x) = \Big\{ k \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : k(t) = I^{\alpha;\psi} v(t) + \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)} \Big(f(b, x(b)) I^{\alpha;\psi} v(b) \\ - \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\eta_i, x(\eta_i)) I^{\alpha;\psi} v(\eta_i); v \in \mathcal{S}_{G,x} \Big\}.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{H}$ s'écrit comme $\mathcal{H}x = \mathcal{A}x\mathcal{B}x$. Ensuite, nous allons montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont les conditions du théorème de point fixe hybride de Dhage.

Étape 1 : $\mathcal{A}$ est Lipschitzien sur $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$

Soit $x, y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, pour tout $t \in [a, b]$, et d'après (H_1) on a

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \leq |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq |\varphi(t)||x(t) - y(t)|. \tag{5.1.12}$$

Il s'ensuit que

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \|\varphi\|\|x - y\|. \tag{5.1.13}$$

Étape 2 : $\mathcal{B}x$ est convexe pour tout $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

En effet, si $k_1, k_2 \in \mathcal{B}x$, alors il existe $v_1, v_2 \in \mathcal{S}_{G,x}$ tels que pour chaque $t \in J$ nous avons :

$$k_j(t) = I^{\alpha;\psi}v_j(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}v_j(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v_j(\eta_i)\Big), \tag{5.1.14}$$

Pour $j = 1, 2$. Soit $0 \leq \lambda \leq 1$ alors, pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}\lambda k_1(t) - (1-\lambda)k_2(t) &= I^{\alpha;\psi}\big(\lambda v_1(t) - (1-\lambda)v_2(t)\big) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)} \\ &\quad \times \Big(f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}\big(\lambda v_1(b) - (1-\lambda)v_2(b)\big) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}\big(\lambda v_1(\eta_i) - (1-\lambda)v_2(\eta_i)\big)(\eta_i)\Big).\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de $\mathcal{S}_{G,x}$, on obtient $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in \mathcal{B}x$ ce qui implique que $\mathcal{B}$ est convexe.

Étape 3 : $\mathcal{B}$ est borné.

En effet, pour $\rho > 0$, soit $\mathbf{B}_\rho = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \|x\| \leq \rho\}$ est une boule fermée de $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, alors pour tout $k \in \mathcal{B}(x)$ et $x \in \mathbf{B}_\rho$ il existe $v \in \mathcal{S}_{G,x}$, tel que :

$$k(t) = I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big), \tag{5.1.15}$$

donc

$$\begin{aligned}\|k\| &\leq \sup_{t\in J}\Big|I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b, x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i, x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big)\Big|, \\ &\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma)} \\ &\quad \times \Bigg[\widehat{f}\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \widehat{f}\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg]\Bigg\}, \\ &\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Phi, \\ &\leq \|p\|\Psi(\rho)\Phi,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|k\| \leq \|p\|\Psi(\rho)\Phi, \tag{5.1.16}$$

avec Φ est donné par (5.1.9), finalement $\mathcal{B}$ est borné.

Étape 4 : $\mathcal{B}$ est equicontinu.

Soit $\tau_1, \tau_2 \in J; \tau_1 < \tau_2$, et $x \in \mathbf{B}_\rho$, où $\mathbf{B}_\rho$ comme ci-dessus alors pour tout $x \in \mathbf{B}_\rho$ et $k \in \mathcal{B}x$, il existe $\nu \in \mathcal{S}_{G,x}$ alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|k(\tau_2)-k(\tau_1)\right| \leq \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|\int_a^{\tau_1}\psi'(s)\Big((\psi(\tau_2)-\psi(s))^\alpha-(\psi(\tau_1)-\psi(s))^\alpha\Big)\nu(s)ds \\
& +\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi'(s)(\psi(\tau_2)-\psi(s))^\alpha\nu(s)ds\Big| \\
& +\frac{|(\psi(\tau_2)-\psi(a))^{\gamma_1+\alpha_2-1}-(\psi(\tau_1)-\psi(a))^{\gamma-1}|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma)} \\
& \times\left[\|\nu(s)\|\widehat{f}\frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\|\nu(s)\|\widehat{f}\sum_{i=1}^n|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right], \\
\leq \; & \frac{\|p\|\Psi(\rho)}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|\int_a^{\tau_1}\psi'(s)\Big((\psi(\tau_2)-\psi(s))^\alpha-(\psi(\tau_1)-\psi(s))^\alpha\Big) \\
& +\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi'(t)(\psi(\tau_2)-\psi(s))^\alpha\Big| \\
& +\frac{\|p\|\Psi(\rho)|(\psi(\tau_2)-\psi(a))^{\gamma-1}-(\psi(\tau_1)-\psi(a))^{\gamma-1}|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma)} \\
& \times\left[\widehat{f}\frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\widehat{f}\sum_{i=1}^n|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right],
\end{aligned}$$

Comme $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, cela implique que $\mathcal{B}x$ est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, nous déduisons que $\mathcal{B} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est compact, par conséquent, $\mathcal{B}$ est complètement continu. Ensuite, pour prouver que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est semi-continu supérieurement, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ admet un graphe fermé.

Étape 5 : $\mathcal{B}$ admet un graphe fermé.

Soit $x_n \longrightarrow x_*$, $k_n \in \mathcal{B}(x_n)$ tel que $k_n \longrightarrow k_*$, on va montrer que $k_* \in \mathcal{B}(x_*)$. En effet Pour $k_n \in \mathcal{B}(x_n)$ alors il existe $\nu_n \in \mathcal{S}_{G,x_n}$ tel que pour tout $t \in J$, on a

$$k_n(t)=I^{\alpha;\psi}\nu_n(t)+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x_n(b))I^{\alpha;\psi}\nu_n(b)-\sum_{i=1}^n\omega_i f(\eta_i,x_n(\eta_i))I^{\alpha;\psi}\nu_n(\eta_i)\Big). \tag{5.1.17}$$

Nous devrions prouver qu'il existe $\nu_* \in \mathcal{S}_{G,x_*}$ tel que pour chaque $t \in J$ nous avons

$$k_*(t)=I^{\alpha;\psi}\nu_*(t)+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x_*(b))I^{\alpha;\psi}\nu_*(b)-\sum_{i=1}^n\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{\alpha;\psi}\nu_*(\eta_i)\Big), \tag{5.1.18}$$

On a

$$\|k_n(t)-k_*(t)\| = \|I^{\alpha;\psi}(v_n(t)-v_*(t)) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x(b))I^{\alpha;\psi}(v_n(b)-v_*(b)) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}(v_n(\eta_i)-v_*(\eta_i))\Big)\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Considérons l'opérateur défini par

$$\mathcal{L} : L^1(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$$

$$v \longrightarrow \Xi(v)(t).$$

avec

$$\mathcal{L}(v)(t) = I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big).$$

D'après le Lemme 1.4.8, $\mathcal{L}\circ\mathcal{S}_G$ a un graphique fermé.
Alors on a $k_n(t)\in\mathcal{L}\Big(\mathcal{S}_{G,x_n}\Big)$, puisque $x_n \longrightarrow x_*$, il s'ensuit qu'il existe $v_*\in\mathcal{S}_{G,x_*}$ tel que pour tout $t\in J$

$$k_*(t) = I^{\alpha;\psi}v_*(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x_*(b))I^{\alpha;\psi}v_*(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v_*(\eta_i)\Big). \tag{5.1.19}$$

En conséquence, nous déduisons que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est compact et semi-continu supérieurement.

Étape 6 : Montrons que $2Ml<1$.

D'après l'étape 3, nous obtenons

$$M := \|\mathcal{B}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))\| = \sup\{|\mathcal{B}(x)| : x\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R})\} \leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Phi,$$

il s'ensuit en utilisant (H_4) :

$$\|\varphi\|\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi < \frac{1}{2}, \tag{5.1.20}$$

ce qui implique que $2Ml<1$, où $l=\|\varphi\|$.

Finalement toutes les conditions du théorème 1.5.6 sont satisfaites, pour terminer la preuve il reste à prouver que l'ensemble $\Delta=\{x\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : \theta x\in\mathcal{A}x\mathcal{B}x, \theta>1\}$ est borné (c'est-à-dire que (ii) du théorème 1.5.6 n'est pas possible).

Étape 7 : $\Delta=\{x\in X : \theta x\in\mathcal{A}x\mathcal{B}x), \theta>1\}$ est borné.

Soit $x\in\Delta$, alors $\theta x\in\mathcal{A}x\mathcal{B}x$ pour $\theta>1$, donc il existe $v\in\mathcal{S}_{G,x}$ telle que

$$x(t) = \theta^{-1}f(t,x(t))\left[I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big)\right]. \tag{5.1.21}$$

Posons $F_0 = \sup_{t\in J}|f(t,0)| > 0$, et pour tout $t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \theta^{-1}\Big|f(t,x(t)\Big|\Big|I^{\alpha;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma)}\Big(f(b,x(b))I^{\alpha;\psi}v(b) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{\alpha;\psi}v(\eta_i)\Big)\Big|, \\
&\leq \Bigg(\|\varphi\|\|x\| + F_0\Bigg)\|p\|\Psi(\|x\|)\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma)} \\
&\quad \times \Bigg[\widehat{f}\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \widehat{f}\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg]\Bigg\} \\
&\leq \Big(\|\varphi\|\|x\| + F_0\Big)\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi, \\
&\leq \|\varphi\|\|x\|\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi + F_0\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi,
\end{aligned}$$

ceci implique

$$\|x\| \leq \frac{F_0\|p\|\Psi(\|x\|)}{1-\|\varphi\|\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi}. \tag{5.1.22}$$

On en conclut que Δ est borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. S'il n'est pas borné, en divisant l'inégalité ci-dessus par $\delta := \|x\|$ avec $\delta \longrightarrow +\infty$, alors on obtient

$$1 \leq \frac{F_0\|p\|\Psi(\delta)}{\delta(1-\|\varphi\|\|p\|\Psi(\delta)\Phi)}, \tag{5.1.23}$$

d'après (H_3), en utilisant le fait que Ψ est borné alors il existe $M > 0$ tel que $\Psi(\delta) \leq M$, donc on obtient

$$1 \leq \lim_{\delta\to+\infty}\frac{F_0\|p\|M}{\delta(1-\|\varphi\|\|p\|M\Phi)} = 0, \tag{5.1.24}$$

ce qui est une contradiction, alors l'ensemble Δ est borné, d'après le Théorème 1.5.6 on déduit que l'opérateur $\mathcal{H}$ admet au moins un point fixe qui représente la solution du problème (5.1.1) sur J.

5.2 Résultat d'existence pour l'inclusion différentielle fractionnaire hybride de Langevin avec la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer

5.2.1 Motivation

Motivés par les travaux mentionnés dans la première partie, dans cet partie nous étendons le résultat obtenue dans la première partie, en considérant une nouvelle classe d'inclusion différentielle fractionnaire hybride de Langevin avec la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer de la forme suivante

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}\left({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t)}\right] + \mu x(t)\right) \in G(t,x(t)), t \in J, \\ x(a) = 0\,,\ x(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Où ${}^{H}D^{p_j,q_j;\psi}, j = 1, 2$ est la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre p_j, $0 < p_j \leq 1$ et de paramètre q_j, $0 \leq q_j \leq 1$, $j = 1, 2$, $J = [a, b]$, $a \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $a < \eta_1 < ... < \eta_n < b$, $f \in \mathcal{C}\big(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ et $G : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multifonction et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. nous discutons le résultat d'existence en utilisant le théorème de point fixe hybride de Dhage, puis un exemple est fourni pour illustrer notre résultat principale.

Remarque 5.2.1 *La dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer généralise les dérivées fractionnaires bien connues (dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville, ψ-Riemman-Liouville, Caputo, ψ-Caputo, Hilfer, Hilfer-Hadamard, Hilfer-Katugampola), pour différentes valeurs de la fonction ψ et de paramètre p_i, $i = 1, 2$.*

5.2.2 Construction de la solution

Lemme 5.2.2 *Soit $a \geq 0$, $0 < p_i < 1$, $0 \leq q_i \leq 1$, $\gamma_i = p_i + q_i - p_i q_i > 0$, $i = 1, 2$ et $w \in C(J, \mathbb{R})$. Alors la fonction x est une solution du problème :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}\left({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] + \mu x(t)\right) = w(t); t \in J \\ x(a) = 0\,,\ x(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i). \end{cases} \tag{5.2.2}$$

si et seulement si x est une solution de l'équation intégrale

$$x(t) = f(t,x(t))\Bigg\{ I^{p_1+p_2;\psi}w(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}w(b) - \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}w(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg]\Bigg\}, \tag{5.2.3}$$

avec

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Gamma(\gamma_1+p_2)} - f(b,x(b))\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Gamma(\gamma_1+p_2)} \neq 0. \tag{5.2.4}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre p_1 aux deux côtés de (5.2.2), on obtient en utilisant Lemme 1.3.10

$$^{H}D^{p_2,q_2;\psi}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] + \mu x(t) = I^{p_1;\psi}w(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1)}((\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1-1}, \tag{5.2.5}$$

où c_0 est une constant et $\gamma_1 = p_1+q_1-p_1q_1$. Ensuite, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre p_2 aux deux côtés de (5.2.5), on obtient.

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))} = I^{p_1+p_2;\psi}w(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\gamma_1+p_2)}((\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1} + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma_2)}((\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_2-1}. \tag{5.2.6}$$

En utilisant les conditions aux limites dans (5.2.6), nous obtenons que $c_1 = 0$ et

$$c_0 = \frac{1}{\Lambda}\Bigg[f(b,x(b))I^{p_1+\alpha_2;\psi}w(b) - \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}w(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg].$$

En substituant la valeur de c_0 et c_1 dans (5.2.6) on obtient la solution (5.2.3).

5.2.3 Existence de la solution pour le problème (5.2.1)

Dans cette section, nous traitons l'existence de la solution du problème (5.2.1), en utilisant le théorème du point fixe hybride de Dhage et pour simplifier les calculs, nous utilisons les notations suivantes

$$\Phi_1 = \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\Bigg], \tag{5.2.7}$$

et

$$\Phi_2 = |\mu|\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg]\Bigg\}, \tag{5.2.8}$$

avec $\widehat{f} = max\big(|f(b,x(b))|, |f(\eta_i,x(\eta_i)|\big), i = 1, ..., n.$

Définition 5.2.3 *Une fonction* $x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ *est dite solution du problème* (5.2.1) *si,* $x(a) = 0$ $x(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x(\eta_i)$ *et il existe une fonction* $v \in L^1(J,\mathbb{R})$ *avec* $v \in G(t,x(t))$ *p.p sur* J *telle que*

$$x(t) = f(t,x(t))\Bigg\{I^{p_1+p_2;\psi}v(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v(b) - \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg]\Bigg\}. \tag{5.2.9}$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, on définit l'ensemble des sélections de G par

$$\mathcal{S}_{G,x} := \big\{v \in L^1(J,\mathbb{R}) : v \in G(t,x(t)); \in J\big\}. \tag{5.2.10}$$

On suppose que

$(H_1)-$ La fonction $f : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ est continue et il existe une fonction bornée φ telle que $\varphi(t) > 0$, pour tout $t \in J$ et

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \varphi(t)|x(t)-y(t)|,$$

pour tout $t \in J$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

$(H_2)-$ $G : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est L^1-Carathéodory et a des valeurs convexes non vides, et pour chaque $x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}_{G,x} = \{v \in L^1(J,X) : v(t) \in G(t,x(t)); \quad t \in J\},$$

est convexe et non vide.

$(H_3)-$ $\|G(t,x)\| := \sup\{|v| : v \in G(t,x)\} \leq p(t)\Psi(|x|)$ pour tout $t \in J$ et tout $x \in \mathcal{C}(J,X)$, où $p \in L^1(J,\mathbb{R}^+)$ et $\Psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction continue, bornée et strictement croissante.

$(H_4)-$ $\|\varphi\|\big(\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1 + \Phi_2\big) < \dfrac{1}{2}$; (où Φ_1 et Φ_2 sont données par (5.2.7) et (5.2.8)).

Théorème 5.2.4 *Sous les hypothèses* $(H_1)-(H_4)$, *le problème* (5.2.1) *admet au moins une solution définie sur* J

Preuve. D'après le lemme 5.2.2, et afin de transformé le problème (5.2.1) en un problème de point fixe, on introduit l'opérateur multivoque $\mathcal{H} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ définit par

$$\mathcal{H}x := \left\{ h \in \mathcal{C} : h(t) = \begin{cases} f(t,x(t))\Big\{ I^{p_1+p_2;\psi}v(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) \\ + \dfrac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Big[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v(b) - \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) \\ - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Big]\Big\}, \\ t \in J; v \in \mathcal{S}_{G,x} \end{cases} \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons deux opérateurs, $\mathcal{A} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}x(t) = f(t,x(t)),$$

et, $\mathcal{B} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ par

$$\mathcal{B}(x)) = \Big\{ k \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : k(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Big[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v(b)$$
$$- \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Big]; v \in \mathcal{S}_{G,x}\Big\}.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{H}$ s'écrit comme $\mathcal{H}x = \mathcal{A}x\mathcal{B}x$. Ensuite, nous allons montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont les conditions du théorème de point fixe hybride de Dhage.

Étape 1 : $\mathcal{A}$ est Lipschitzien sur $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$

Soit $x, y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, pour tout $t \in [a,b]$, et d'après (H_1) on a

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \leq |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq |\varphi(t)||x(t) - y(t)|. \tag{5.2.11}$$

Il s'ensuit que

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \|\varphi\|\|x - y\|. \tag{5.2.12}$$

Étape 2 : $\mathcal{B}x$ est convexe pour tout $x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.

En effet, si $k_1, k_2 \in \mathcal{B}x$, alors il existe $v_1, v_2 \in \mathcal{S}_{G,x}$ tels que pour chaque $t \in J$ nous avons :

$$k_j(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v_j(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Big[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v_j(b)$$
$$- \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v_j(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Big].$$

Pour $j = 1, 2$. Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ alors, pour tout $t \in J$ on a

$$
\begin{aligned}
\lambda k_1(t) + (1-\alpha)k_2(t) &= I^{p_1+p_2;\psi}(\lambda v_1(t) - (1-\alpha)v_2(t)) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) \\
&+ \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi} \times (\alpha v_1(b) - (1-\alpha)v_2(b)) - \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) \\
&- \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}(\alpha v_1(\eta_i) - (1-\alpha)v_2(\eta_i)) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg].
\end{aligned}
$$

En utilisant la convexité de $\mathcal{S}_{G,x}$, on obtient $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \in \mathcal{B}(x)$ ce qui implique que $\mathcal{B}$ est convexe.

Étape 3 : $\mathcal{B}$ est borné.

En effet, pour $\rho > 0$, soit $\mathbf{B}_\rho = \{x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : \|x\| \leq \rho\}$ est une boule fermée de $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, alors pour tout $k \in \mathcal{B}(x)$ et $x \in \mathbf{B}_\rho$ il existe $v \in \mathcal{S}_{G,x}$, tel que :

$$
\begin{aligned}
k(t) &= I^{p_1+p_2;\psi}v(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v(b) \\
&- \mu f(b,x(b))I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg].
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\big|k(t)\big| &\leq \sup_{t\in J}\Bigg\{I^{p_1+p_2;\psi}|v(t)| + |\mu|I^{p_2;\psi}|x(t)| + \frac{\widehat{f}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\
&\times \Bigg[I^{p_1+p_2;\psi}|v(b)| + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|I^{p_1+p_2;\psi}|v(\eta_i)| \\
&+ |\mu|I^{p_2;\psi}|x(b)| + |\mu|\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|I^{p_2;\psi}|x(\eta_i)|\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\
&\times \Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\Bigg]\Bigg\} \\
&+ \|x\||\mu|\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\
&\times \Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg]\Bigg\}, \\
&\leq \|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1 + \|x\|\Phi_2, \\
&\leq \|p\|\Psi(\rho)\Phi_1 + \rho\Phi_2,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$
\|k\| \leq \|p\|\Psi(\rho)\Phi_1 + \rho\Phi_2, \tag{5.2.13}
$$

où Φ_1 et Φ_2 sont données respectivement par (5.2.7) et (5.2.8), finalement $\mathcal{B}$ est borné.

Étape 4 : $\mathcal{B}$ est equicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in J; t_1 < t_2$, et $x \in \mathbf{B}_\rho$, où $\mathbf{B}_\rho$ comme ci-dessus alors pour tout $x \in \mathbf{B}_\rho$ et $k \in \mathcal{B}x$, il existe $\nu \in \mathcal{S}_{G,x}$ alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\Big|k(t_2)-k(t_1)\Big| \leq & \frac{1}{\Gamma(p_1+p_2)}\Big|\int_a^{t_1}\psi'(s)\Big((\psi(t_2)-\psi(s))^{p_1+p_2-1} \\
& -(\psi(t_1)-\psi(s))^{p_1+p_2-1}\Big)\nu(s)ds+\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{p_1+p_2-1}\nu(s)ds\Big| \\
& +\frac{|\mu|}{\Gamma(p_2)}\Big|\int_a^{t_1}\psi'(s)\Big((\psi(t_2)-\psi(s))^{p_2-1}-(\psi(t_1)-\psi(s))^{p_2-1}\Big)x(s)ds \\
& +\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{p_2-1}x(s)ds\Big| \\
& +\frac{|(\psi(t_2)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}-(\psi(t_1)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\
& \times\Bigg[\|\nu(s)\|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}+\|\nu(s)\|\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} \\
& +\|x(b)\||\mu|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\|x(\eta_i)\||\mu|\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg], \\
\leq & \frac{\|p\|\Psi(\rho)}{\Gamma(p_1+p_2)}\Big|\int_a^{t_1}\psi'(s)\Big((\psi(t_2)-\psi(s))^{p_1+p_2-1} \\
& -(\psi(t_1)-\psi(s))^{p_1+p_2-1}\Big)ds+\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{p_1+p_2-1}ds\Big| \\
& +\frac{\rho|\mu|}{\Gamma(p_2)}\Big|\int_a^{t_1}\psi'(s)\Big((\psi(t_2)-\psi(s))^{p_2-1}-(\psi(t_1)-\psi(s))^{p_2-1}\Big)ds \\
& +\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{p_2-1}ds\Big| \\
& +\frac{|(\psi(t_2)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}-(\psi(t_1)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}|}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\
& \times\Bigg[\|p\|\Psi(\rho)\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}+\|p\|\Psi(\rho)\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} \\
& +\rho|\mu|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\rho|\mu|\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\Bigg].
\end{aligned}$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, cela implique que $\mathcal{B}x$ est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, nous déduisons que $\mathcal{B} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est compact, par conséquent, $\mathcal{B}$ est complètement continu. Ensuite, il reste de prouver que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est semi-continu supérieurement, pour ceci on montre que $\mathcal{B}$ admet un graphe fermé.

Étape 5 : $\mathcal{B}$ admet un graphe fermé.

Soit $x_n \longrightarrow x_*$, $k_n \in \mathcal{B}(x_n)$ tel que $k_n \longrightarrow k_*$, on va montrer que $k_* \in \mathcal{B}(x_*)$. En effet Pour $k_n \in \mathcal{B}(x_n)$ alors il existe $v_n \in \mathcal{S}_{G,x_n}$ tel que pour tout $t \in J$, on a

$$k_n(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v_n(t) - \mu I^{p_2;\psi}x_n(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x_n(b))I^{p_1+p_2;\psi}v_n(b)$$

$$-\mu f(b,x_n(b))I^{p_2;\psi}x_n(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_n(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v_n(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_n(\eta_i))I^{p_2;\psi}x_n(\eta_i)\Bigg].$$

Nous devrions prouver qu'il existe $v_* \in \mathcal{S}_{G,x_*}$ tel que pour chaque $t \in J$ nous avons

$$k_*(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v_*(t) - \mu I^{p_2;\psi}x_*(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x_*(b))I^{p_1+p_2;\psi}v_*(b)$$

$$-\mu f(b,x_*(b))I^{p_2;\psi}x_*(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v_*(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{p_2;\psi}x_*(\eta_i)\Bigg].$$

On a

$$\|k_n(t) - k_*(t)\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Considérons l'opérateur défini par

$$\mathcal{L} : L^1(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$$

$$v \longrightarrow \mathcal{L}(v)(t).$$

Avec

$$\mathcal{L}(v)(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Big(f(b,x(b))I^{p_1+p_2;\psi}v(b)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v(\eta_i)\Big),$$

d'après le Lemme 1.4.8, $\mathcal{L}\circ\mathcal{S}_G$ a un graphique fermé.

Alors on a $k_n(t) \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{S}_{G,x_n}\Big)$, puisque $x_n \longrightarrow x_*$, il s'ensuit qu'il existe $v_* \in \mathcal{S}_{G,x_*}$ tel que pour tout $t \in J$

$$k_*(t) = I^{p_1+p_2;\psi}v_*(t) - \mu I^{p_2;\psi}x_*(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x_*(b))I^{p_1+p_2;\psi}v_*(b)$$

$$-\mu f(b,x_*(b))I^{p_2;\psi}x_*(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{p_1+p_2;\psi}v_*(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x_*(\eta_i))I^{p_2;\psi}x_*(\eta_i)\Bigg].$$

En conséquence, nous déduisons que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est compact et semi-continu supérieurement.

Étape 6 : Montrons que $2Ml < 1$.

D'après l'étape 3, nous obtenons

$$M := \|\mathcal{B}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))\| = \sup\{|\mathcal{B}(x)| : x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})\} \leq \|p\|\Psi(\rho)\Phi_1 + \rho\Phi_2,$$

il s'ensuit en utilisant (H_4) :

$$\|\varphi\|\Big(\|p\|\Psi(\rho)\Phi_1 + \rho\Phi_2\Big) < \frac{1}{2}, \tag{5.2.14}$$

où $l = \|\varphi\|$, ce qui implique que $2Ml < 1$.

Finalement toutes les conditions du théorème 1.5.6 sont satisfaites, pour terminer la preuve il reste à prouver que l'ensemble $\Delta = \{x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : \theta x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x, \theta > 1\}$ est borné (c'est-à-dire que (ii) du théorème 1.5.6 n'est pas possible).

Étape 7 : $\Delta = \{x \in X : \theta x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x), \theta > 1\}$ est borné.

Soit $x \in \Delta$, alors $\theta x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$ pour $\theta > 1$, donc il existe $\nu \in \mathcal{S}_{G,x}$ telle que

$$\begin{aligned} x(t) = \theta^{-1} f(t,x(t))\Bigg\{ & I^{p_1+p_2;\psi}\nu(t) - \mu I^{p_2;\psi}x(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{\Lambda\Gamma(\gamma_1+p_2)}\Bigg[f(b,x(b)) I^{p_1+p_2;\psi}\nu(b) \\ & - \mu f(b,x(b)) I^{p_2;\psi}x(b) - \sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i)) I^{p_1+p_2;\psi}\nu(\eta_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i f(\eta_i,x(\eta_i)) I^{p_2;\psi}x(\eta_i)\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned}$$

Posons $\bar{f} = \sup_{t\in J}|f(t,0)| > 0$, et pour tout $t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned} \big|x(t)\big| \leq \big|f(t,x(t))\big|\Bigg\{ & I^{p_1+p_2;\psi}|\nu(t)| + |\mu| I^{p_2;\psi}|x(t)| + \frac{\widehat{f}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)} \\ & \times\Bigg[I^{p_1+p_2;\psi}|\nu(b)| + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i| I^{p_1+p_2;\psi}|\nu(\eta_i)| \\ & + |\mu| I^{p_2;\psi}|x(b)| + |\mu|\sum_{i=1}^{n}|\omega_i| I^{p_2;\psi}|x(\eta_i)|\Bigg]\Bigg\}, \\ \leq & \left(\|\varphi\|\|x\| + \bar{f}\right)\|p\|\Psi(\|x\|) \\ & \times\left\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)}\right. \\ & \left.\times\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}\right]\right\} \\ & + \|x\||\mu|\left\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{\widehat{f}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma_1+p_2-1}}{|\Lambda|\Gamma(\gamma_1+p_2)}\right. \\ & \left.\times\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\omega_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}\right]\right\} \\ \leq & \left(\|\varphi\|\|x\| + \bar{f}\right)\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1 + \|x\|\Phi_2, \end{aligned}$$

ceci implique

$$\|x\| \leq \frac{\bar{f}\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1}{1-\Phi_2-\|\varphi\|\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1} := L. \tag{5.2.15}$$

On conclut que Δ est borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. S'il n'est pas borné, en divisant l'inégalité ci-dessus par $\delta := \|x\|$ avec $\delta \longrightarrow +\infty$, alors on obtient

$$1 \leq \frac{\bar{f}\|p\|\Psi(\delta)\Phi_1}{\delta\big(1-\Phi_2-\|\varphi\|\|p\|\Psi(\delta)\Phi_1\big)}, \tag{5.2.16}$$

d'après (H_3), en utilisant le fait que Ψ est borné alors il existe $N>0$ tel que $\Psi(\delta) \leq N$, donc on obtient

$$1 \leq \lim_{\delta\to+\infty} \frac{\bar{f}\|p\|\mathcal{L}\Phi_1}{\delta\big(1-\Phi_2-\|\varphi\|\|p\|\mathcal{L}\Phi_1\big)} = 0, \tag{5.2.17}$$

ce qui est une contradiction, alors l'ensemble Δ est borné, d'après le Théorème 1.5.6 on déduit que l'opérateur $\mathcal{H}$ admet au moins un point fixe qui représente la solution du problème (5.2.1) sur J.

5.2.4 Exemple

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\frac{3}{5},\frac{2}{3};\frac{e^t}{6}}\left[{}^{H}D^{\frac{2}{5},\frac{1}{3};\frac{e^t}{6}}\left(\dfrac{x(t)}{\sin x(t)+2}\right)+\dfrac{1}{9}x(t)\right] \in \left[\dfrac{|x(t)|^5}{5(|x(t)|^5+2)}+\dfrac{t+1}{10};\dfrac{|\sin x(t)|}{5(|\sin x(t)|+1)}+\dfrac{t}{5}\right], t\in[0,1] \\ x(0)=0 \quad , \qquad x(1)=\dfrac{3}{8}x(\dfrac{1}{3})+\dfrac{5}{8}x(\dfrac{1}{2}). \end{cases} \tag{5.2.18}$$

Avec $p_1=\dfrac{3}{5}$, $q_1=\dfrac{2}{3}$, $p_2=\dfrac{2}{5}$, $q_2=\dfrac{1}{3}$, $a=0$, $b=1$, $J:=[0,1]$, $\mu=\frac{1}{9}$, $n=2$, $\omega_1=\dfrac{3}{8}$, $\omega_2=\dfrac{5}{8}$, $\eta_1=\dfrac{1}{3}$, $\eta_2=\dfrac{1}{2}$ et $\psi(t)=\dfrac{e^t}{6}$.
Posons $G:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R})$ une multifonction définit par

$$(t,x)\longrightarrow G(t,x)=\left[\frac{|x|^5}{5(|x|^5+2)}+\frac{t+1}{10};\frac{|\sin x|}{5(|\sin x|+1)}+\frac{t}{5}\right].$$

Pour tout $v\in G(t,x)$ on a

$$|v|\leq \max\left\{\frac{|x|^5}{5(|x|^5+2)}+\frac{t+1}{10};\frac{|\sin x|}{5(|\sin x|+1)}+\frac{t}{5}\right\}\leq\frac{2}{5}.$$

Ainsi,

$$\|G(t,x)\|=\sup\{|v|:v\in G(t,x)\}\leq\frac{2}{5}=p(t)\Psi(\|x\|),\ \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Avec $p(t)=1$, $\Psi(\|x\|)=\dfrac{2}{5}$.
Ici $f(t,x)=\sin x+2$. Par conséquent, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, nous avons

$$|f(t,x)-f(t,y)|=|\sin x-\sin y|<|x-y|=\varphi(t)|x-y|,$$

où $\varphi(t)=1$ pour tout $t\in[0,1]$.

Nous obtenons $\gamma_1 = p_1 + q_1 - p_1 \times q_1 = \dfrac{13}{15}$, $|\Lambda| \simeq 0.46833393$, $\Phi_1 = 0.92632246$, $\Phi_2 = 0.123557112$.

Donc

$$\begin{aligned}\|\varphi\|\big(\|p\|\Psi(\|x\|)\Phi_1 + \Phi_2\big) &= 1 \times 1 \times \big(\frac{2}{5} \times 0.92632246 + 0.123557112\big),\\ &= 0.49624025 < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, toutes les conditions du théorème 5.2.4 sont satisfaites, donc le problème (5.2.18) admet au moins une solution définie sur $[0, 1]$.

Chapitre 6

Résultat d'existence pour une équation différentielle fractionnaire de Langevin de type ψ-Hilfer en utilisant la méthode de degré topologique

6.1 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec une dérivé fractionnaire de ψ-Hilfer

6.1.1 Motivation

Il existe plusieurs définitions des intégrales et dérivées fractionnaires, les plus connues sont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, Hilfer [38] introduit la généralisation de ces dérivées fractionnaires sous le nom de la dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α et de paramètre $\beta \in [0, 1]$, pour plus de détails sur la dérivée fractionnaire de Hilfer et la dérivée fractionnaire ψ-Hilfer, nous renvoyons les lecteurs aux articles [5, 36, 51, 77]. De plus, des versions distinctes de théorèmes de point fixe sont couramment utilisées pour prouver l'existence et l'unicité des solutions pour diverses classes d'équations différentielles fractionnaires, Isaia [40] a prouvé un nouveau théorème de point fixe qui a été obtenu via la théorie de degré topologique pour les opérateurs de condensation. Ce théorème du point fixe a été utilisé par les chercheurs pour établir l'existence de solutions pour plusieurs classes d'équations différentielles non linéaires [3, 12, 41, 30]. Dans [13], Baitiche et al ont discuté l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire, en utilisant la méthode de degré topologique. Motivés par les travaux mentionnés, nous combinons leurs idées pour étudier le résultat d'existence et d'unicité pour le problème de la forme

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\left[{}^{H}D^{p,q;\psi}u(t)\right] = h(t,u(t)), \quad t \in \Lambda := [a,b], \\ u(a) = 0 \quad , \qquad u(b) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i u(\kappa_i). \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Où ${}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}$ et ${}^{H}D^{p,q;\psi}$ sont les dérivées fractionnaires de ψ-Hilfer d'ordre α, p, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < p \leq 1$ et de paramètre β, q, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ respectivement, $a \geq 0$, $\iota_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $a < \kappa_1 < ... < \kappa_n < b$, $h \in \mathcal{C}\big(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$.

6.1.2 Construction de la solution

Lemme 6.1.1 *Soit* $a \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $\delta = \alpha + \beta - \alpha\beta > 0$ *et* $y \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$. *Alors la fonction* u *est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi}\left[{}^{H}D^{p,q;\psi}u(t)\right] = y(t), \quad t \in \Lambda := [a,b], \\ u(a) = 0\,, \; u(b) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i u(\kappa_i), \; a < \kappa_i < b, \end{cases} \tag{6.1.2}$$

si et seulement si u *est une solution de l'équation intégrale*

$$u(t) = I^{\alpha+p;\psi}y(t) + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{\Theta\Gamma(\delta+p)}\Big(I^{\alpha+p;\psi}y(b) - \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\alpha+p;\psi}y(\kappa_i)\Big), \tag{6.1.3}$$

où

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \iota_i \frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{\Gamma(\delta+p)} - \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{\Gamma(\delta+p)} \neq 0. \tag{6.1.4}$$

Preuve. Le problème (6.1.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$I^{\delta-\alpha;\psi}D^{\delta;\psi}\left[{}^{H}D^{p,q;\psi}u(t)\right] = y(t). \tag{6.1.5}$$

Où $\delta = \alpha + \beta - \alpha\beta > 0$, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α aux deux côtés de (6.1.5), nous obtenons en utilisant le Lemme 1.3.10

$${}^{H}D^{p,q;\psi}u(t) = I^{\alpha;\psi}y(t) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta)}((\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}, \tag{6.1.6}$$

où d_0 est une constante. Ensuite, l'équation (6.1.6) peut s'écrire comme suit

$$I^{\eta-p;\psi}D^{\eta;\psi}u(t) = I^{\alpha;\psi}y(t) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta)}((\psi(t)-\psi(a))^{\delta-1}, \tag{6.1.7}$$

où $\eta = p + q - pq > 0$, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre p aux deux côtés de (6.1.7), nous obtenons en utilisant le Lemme 1.3.10

$$u(t) = I^{\alpha+p;\psi}y(t) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta+p)}((\psi(t)-\psi(a))^{\delta+p-1} + \frac{d_1}{\Gamma(\eta)}((\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1}, \tag{6.1.8}$$

où d_1 est une constante. En utilisant les conditions aux limites dans (6.1.8), nous obtenons que $d_1 = 0$ et

$$d_0 = \frac{1}{\Theta}\left[I^{\alpha+p;\psi}y(b) - \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\alpha+p;\psi}y(\kappa_i)\right]. \tag{6.1.9}$$

En substituant les valeurs de d_0 et d_1 dans (6.1.8) on obtient l'équation intégrale (6.1.3).

6.1.3 Existence et unicité de la solution pour le problème (6.1.1)

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (6.1.1), en se basant sur la méthode de degré topologique et aussi sur le théorème du point fixe de Banach. Pour simplifier les calculs, nous utilisons la notation suivante

$$\Phi = \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)}\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| \frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\right]. \tag{6.1.10}$$

Où Θ est donné par (6.1.4).

Résultat d'existence via la méthode de degré topologique :

Supposons que

(H_1) Pour tout $t \in \Lambda$ et $\forall u, v \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ il existe une constante $\mathcal{L}_h > 0$ telle que

$$|h(t,u) - h(t,v)| \leq \mathcal{L}_h |u - v|. \tag{6.1.11}$$

(H_2) Pour tout $t \in \Lambda$ et $\forall u \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ il existe deux constantes $\mathcal{K}_h, \mathcal{N}_h > 0$ et $\gamma \in (0,1)$ telles que

$$|h(t,u)| \leq \mathcal{K}_h |u|^{\gamma} + \mathcal{N}_h \tag{6.1.12}$$

D'après le Lemme (6.1.1), nous définissons deux opérateurs $\mathcal{F}, \mathcal{Y} : \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{F}u(t) = I^{\alpha+p;\psi}h(t, u(t)),\ t \in \Lambda, \tag{6.1.13}$$

et

$$\mathcal{Y}u(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{\Theta\Gamma(\delta+p)}\Big(I^{\alpha+p;\psi}h(b, u(b)) - \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\alpha+p;\psi}h(\kappa_i, u(\kappa_i))\Big),\ t \in \Lambda. \tag{6.1.14}$$

Alors, l'équation intégrale (6.1.3) peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{W}u(t) = \mathcal{F}u(t) + \mathcal{Y}u(t),\ t \in \Lambda. \tag{6.1.15}$$

Théorème 6.1.2 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, alors le problème* (6.1.1) *admet au moins une solution* $u \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ *tant que* $\mathcal{L}_h\Phi < 1$. *De plus, l'ensemble des solutions du problème* (6.1.1) *est borné dans* $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$.

Afin de démontrer le théorème 6.1.2, on va prouver ses conditions sous forme de lemmes.

Lemme 6.1.3 $\mathcal{Y}$ *est* ϑ*-Lipschitz avec la constante* $\mathcal{L}_h\Phi$. *De plus,* $\mathcal{Y}$ *satisfait l'inégalité suivante*

$$\|\mathcal{Y}\| \leq \Phi\big(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma} + \mathcal{N}_h\big), \tag{6.1.16}$$

où Φ *est donnée par* (6.1.10).

Preuve. Soit $u, v \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$, donc pour tout $t \in \Lambda$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Y}u(t) - \mathcal{Y}v(t)| \leq & \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)}\Big[I^{\alpha+p;\psi}|h(b,u(b)) - h(b,v(b))| \\
& + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i| I^{\alpha+p;\psi}|h(\kappa_i,u(\kappa_i)) - h(\kappa_i,v(\kappa_i))|, \\
& \leq \frac{\mathcal{L}_h(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Lambda|\Gamma(\delta+p)}\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} \\
& + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\Bigg]\|u-v\|, \\
& \leq \mathcal{L}_h\Phi\|u-v\|.
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\mathcal{Y}u - \mathcal{Y}v\| \leq \mathcal{L}_h\Phi\|u-v\|.$$

Alors $\mathcal{Y}$ est Lipschitzien avec la constante $\mathcal{L}_h\Phi$ et d'après la Proposition 1.4.17, $\mathcal{Y}$ est ϑ-Lipschitzien avec la même constante $\mathcal{L}_h\Phi$. De plus pour tout $u \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ et en utilisant (H_2) on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Y}u(t)| \leq & \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)}\Big[I^{\alpha+p;\psi}|h(b,u(b))| + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i| I^{\alpha+p;\psi}|h(\kappa_i,u(\kappa_i))|\Big], \\
\leq & \frac{(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h)(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)}\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} \\
& + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\Bigg], \\
\leq & \Phi(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{Y}u\| \leq \Phi(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h).$$

Lemme 6.1.4 *$\mathcal{F}$ est continue et satisfait l'inégalité suivante*

$$\|\mathcal{F}u\| \leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\left(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right), \tag{6.1.17}$$

Preuve. Soit $u_n, u \in \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$ tel que u_n convergeant vers u dans $\mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$, implique qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\|u_n\| \leq \mu$ pour tout $n \geq 1$, de plus, on obtient $\|u\| \leq \mu$. En utilisant le fait que h est continu et (H_2), et pour tout $t \in \Lambda$ on obtient

$$\begin{aligned}|h(t,u_n(t)) - h(t,u(t))| &\leq |h(t,u_n(t))| + |h(t,u(t)|,\\ &\leq 2(\mathcal{K}_h\mu^{\gamma}+\mathcal{N}_h).\end{aligned}$$

La fonction $s \longrightarrow 2(\mathcal{K}_h\mu^{\gamma}+\mathcal{N}_h)$ est intégrable pour $s \in [0,t], t \in \Lambda$ en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous obtenons

$$\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| \leq I^{\alpha+p;\psi}|h(t,u_n(t)) - h(t,u(t))| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Ce qui implique que $\mathcal{F}$ est continue ; de plus pour tout $t \in \Lambda$on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}u(t)| &\leq I^{\alpha+p;\psi}|h(t,u(t))|,\\ &\leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\left(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{F}u\| \leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\left(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right).$$

Lemme 6.1.5 *$\mathcal{F}$ est compact, par conséquent $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitzienne avec une constante nulle.*

Preuve. Pour prouver que $\mathcal{F}$ est compact, on prend un ensemble borné $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_{\rho}$, il reste à prouver que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$. Pour cette raison, on considère $u \in \mathcal{M} \subset \mathcal{B}_{\rho}$ et en utilisant (6.1.17), nous obtenons

$$\|\mathcal{F}u\| \leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\left(\mathcal{K}_h\rho^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right) := \upsilon, \tag{6.1.18}$$

alors $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_{\upsilon}$, par conséquent $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est borné.
Soient $\tau_1, \tau_2 \in \Lambda$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et pour tout $u \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}u(\tau_2) - \mathcal{F}u(\tau_1)| &\leq I^{\alpha+p;\psi}|h(\tau_2,u(\tau_2)) - h(\tau_1,u(\tau_1))|,\\ &\leq \left(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha+p)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\psi'(s)(\psi(\tau_2)-\psi(s))^{\alpha+p-1}ds,\\ &\leq \left(\mathcal{K}_h\|u\|^{\gamma}+\mathcal{N}_h\right)\frac{(\psi(\tau_2)-\psi(\tau_1))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}.\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de la fonction ψ, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque τ_2 tend vers τ_1, ceci implique que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est équicontinu. Il s'ensuit, en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, que l'opérateur $\mathcal{F}$ est compact en conséquence de la Proposition 1.4.16 $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitz avec une constante nulle. Puisque toutes les conditions sont satisfaites, nous démontrons la validité de notre résultat principale.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{W}$, les opérateurs donnés par (6.1.13), (6.1.14), (6.1.15) respectivement. Ces opérateurs sont continus et bornés. De plus, en utilisant le lemme 6.1.3 , $\mathcal{Y}$ est ϑ-Lipschitz avec la constante $\mathcal{L}_h\Phi$, et en utilisant le Lemme 6.1.5, $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitz avec la constante zéro, donc $\mathcal{W}$ est une ϑ-contraction stricte avec la constante $\mathcal{L}_h\Phi$, enfin $\mathcal{W}$ est une ϑ-condensation car $\mathcal{L}_h\Phi < 1$.

Ensuite, en considérant l'ensemble suivant

$$\Delta_\epsilon = \{u \in X : u = \epsilon\mathcal{W}u, \text{for some } 0 < \epsilon \leq 1\}. \tag{6.1.19}$$

Il reste à montrer que l'ensemble Δ_ϵ est borné. En effet, pour tout $u \in \Delta_\epsilon$ on a $u = \epsilon\mathcal{W}u = \epsilon(\mathcal{F}u + \mathcal{Y}u)$, donc d'après le Lemme 6.1.4 et 6.1.3, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \epsilon\|\mathcal{F}u + \mathcal{Y}u\| \\
&\leq \|\mathcal{F}u\| + \|\mathcal{Y}u\| \\
&\leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\big(\mathcal{K}_h\|u\|^\gamma + \mathcal{N}_h\big) + \Phi\big(\mathcal{K}_h\|u\|^\gamma + \mathcal{N}_h\big) \\
&\leq \Big(\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\Big)\big(\mathcal{K}_h\|u\|^\alpha + \mathcal{N}_h\big),
\end{aligned}$$

alors l'ensemble Δ_ϵ est borné dans $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$. Si l'ensemble Δ_ϵ n'est pas borné, alors on suppose que $\chi := \|u\| \longrightarrow \infty$ donc

$$1 \leq \lim_{\chi \to +\infty} \frac{\Big(\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\Big)\big(\mathcal{K}_h\chi^\gamma + \mathcal{N}_h\big)}{\chi} = 0 \tag{6.1.20}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, en utilisant le théorème 1.4.18, $\mathcal{W}$ admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (6.1.1). De plus, l'ensemble des solutions du problème (6.1.1) est borné dans $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$.

Résultat d'unicité

dans cette partie on va traiter l'unicité de la solution du problème (6.1.1), en utilisant le principe de contraction de Banach.

Théorème 6.1.6 *Supposons que* (H_1) *est vérifiée. Si* $\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\right]\mathcal{L}_h < 1$ *alors le problème* (6.1.1) *admet une solution unique dans* $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$.

Preuve. Pour tout $u \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$, et $\forall t \in \Lambda$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{W}u(t) - \mathcal{W}v(t)| &\leq I^{\alpha+p;\psi}|h(t,u(t)) - h(t,v(t))| \\
&+ \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)}\Bigg[I^{\alpha+p;\psi}|h(b,u(b)) - h(b,v(b))| \\
&+ \sum_{i=1}^{n}|\iota_i| I^{\alpha+p;\psi}|h(\kappa_i,u(\kappa_i)) - h(\kappa_i,v(\kappa_i))|\Bigg], \\
&\leq \mathcal{L}_h \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}|u(t)-v(t)| + \frac{\mathcal{L}_h(\psi(b)-\psi(a))^{\delta+p-1}}{|\Theta|\Gamma(\delta+p)} \\
&\times \left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)}\right]|u(t)-v(t)|, \\
&\leq \left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\right]\mathcal{L}_h|u(t)-v(t)|,
\end{aligned}$$

implique que

$$\|\mathcal{W}u - \mathcal{W}v\| \leq \left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\right]\mathcal{L}_h\|u-v\|. \tag{6.1.21}$$

En utilisant le fait que $\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + \Phi\right]\mathcal{L}_h < 1$, alors $\mathcal{W}$ est une contraction, d'après le théorème du point fixe de Banach, on conclut que $\mathcal{W}$ admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (6.1.1).

6.2 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire de Langevin avec la dérivé fractionnaire ψ-Hilfer

6.2.1 Motivation

Dans cette section on va élargir le résultat obtenue dans la première partie pour étudier le résultat d'existence et d'unicité pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire de Langevin via la dérivé fractionnaire ψ-Hilfer suivante.

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi} + \lambda)w(\tau) = g(\tau, w(\tau)), \ \tau \in J := [a,b], \\ w(a) = 0\,,\ w(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\iota_i I^{\beta_i;\psi}w(\kappa_i). \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Où ${}^{H}D^{p_j,q_j;\psi}$, est la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer d'ordre p_j, $0 < p_j \leq 1$, et de paramètre q_j, $0 \leq q_j \leq 1, j = 1, 2$, $a \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $I^{\beta_i;\psi}$ est l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre $\beta_i > 0$, $\iota_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $a < \kappa_1 < ... < \kappa_n < b$, $g \in \mathcal{C}\big(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$. En se basant sur l'application de la méthode de degré topologique et le point fixe de Banach on prouve le résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème (6.2.1). Finalement on donne un exemple d'application.

6.2.2 Construction de la solution

Définition 6.2.1 *Une fonction $w \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ est dite une solution du problème (6.2.1), si w satisfait l'équation ${}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi}+\lambda)w(\tau) = g(\tau, w(\tau))$, p.p $\tau \in J$ et les conditions $w(a) = 0, w(b) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\beta_i;\psi} w(\kappa_i)$.*

Lemme 6.2.2 *Soit $a \geq 0$, $0 < p_j \leq 1$, $0 \leq q_j \leq 1$, $\delta_j = p_j + q_j - p_j q_j > 0$, $j = 1, 2$ et $h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors la fonction w est une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{p_1,q_1;\psi}({}^{H}D^{p_2,q_2;\psi} + \lambda)w(\tau) = h(\tau), \ \tau \in J := [a, b], \\ w(a) = 0\,, \ w(b) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{\beta_i;\psi} w(\kappa_i), \ a < \kappa_i < b, \end{cases} \tag{6.2.2}$$

si et seulement si w est une solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} w(\tau) = I^{p_1+p_2;\psi} h(\tau) - \lambda I^{p_2;\psi} w(\tau) + \frac{(\psi(\tau) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{\Delta \Gamma(\delta_1 + p_2)} \Bigg[I^{p_1+p_2;\psi} h(b) - \lambda I^{p_2;\psi} w(b) \\ - \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi} h(\kappa_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{p_2+\beta_i;\psi} w(\kappa_i) \Bigg], \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \iota_i \frac{(\psi(\kappa_i) - \psi(a))^{\delta_1+p_2+\beta_i-1}}{\Gamma(\delta_1 + p_2 + \beta_i)} - \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{\Gamma(\delta_1 + p_2)} \neq 0 \tag{6.2.4}$$

Preuve. Le problème (6.2.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$I^{\delta_1-p_1;\psi} D^{\delta_1;\psi} \Big[{}^{H}D^{p_2,q_2;\psi} + \lambda \Big] w(\tau) = h(\tau), \ \tau \in J. \tag{6.2.5}$$

Où $\delta_1 = p_1 + q_1 - p_1 q_1 > 0$, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre p_1 aux deux côtés de (6.2.5), nous obtenons en utilisant le Lemme 1.3.10

$${}^{H}D^{p_2,q_2;\psi} w(\tau) + \lambda w(\tau) = I^{p_1;\psi} h(\tau) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta_1)} ((\psi(\tau) - \psi(a))^{\delta_1-1}, \tag{6.2.6}$$

où d_0 est une constante. Ensuite, l'équation (6.2.6) peut s'écrire comme suit

$$I^{\delta_2-p_2;\psi} D^{\delta_2;\psi} w(\tau) = I^{p_1;\psi} h(\tau) - \lambda w(\tau) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta_1)} ((\psi(\tau) - \psi(a))^{\delta_1-1}, \tag{6.2.7}$$

où $\delta_2 = p_2 + q_2 - p_2 q_2 > 0$, en appliquant l'intégrale fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville d'ordre p_2 aux deux côtés de (6.2.7), nous obtenons en utilisant le Lemme 1.3.10

$$w(\tau) = I^{p_1+p_2;\psi} h(\tau) - \lambda I^{p_2;\psi} w(\tau) + \frac{d_0}{\Gamma(\delta_1 + p_2)} ((\psi(\tau) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1} + \frac{d_1}{\Gamma(\delta_2)} ((\psi(\tau) - \psi(a))^{\delta_2-1}, \tag{6.2.8}$$

où d_1 est une constante. En utilisant les conditions aux limites dans (6.2.8), nous obtenons que $d_1 = 0$ et

$$d_0 = \frac{1}{\Delta}\left[I^{p_1+p_2;\psi}h(b) - \lambda I^{p_2;\psi}w(b) - \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}h(\kappa_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \iota_i I^{p_2+\beta_i;\psi}w(\kappa_i)\right]. \quad (6.2.9)$$

En substituant les valeurs de d_0 et d_1 dans (6.2.8) on obtient l'équation intégrale (6.2.3).

6.2.3 Existence et unicité de la solution pour le problème (6.2.1)

Dans cette partie, nous traitons l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.2.1), en utilisant dans un premier temps la méthode de degré topologique comme un résultat d'existence, par suite en utilisant le principe de contraction de Banach, pour cela afin de simplifier les calculs, nous utilisons la notation suivante

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} \\ &+ \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_1+p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\beta_i+1)}\right], \quad (6.2.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_2 = |\lambda|\Bigg\{ &\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} \\ &+ \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_2+\beta_i+1)}\right]\Bigg\}. \quad (6.2.11)\end{aligned}$$

Résultat d'existence via la méthode de degré topologique :

Supposons que

(H_1) : Pour tout $\tau \in J$ et $\forall w, v \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ il existe une constante $\mathcal{L}_g > 0$ telle que

$$|g(\tau,w) - g(\tau,v)| \leq \mathcal{L}_g|w-v|. \quad (6.2.12)$$

(H_2) : Pour tout $\tau \in J$ et $\forall w \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ il existe deux constantes $\mathcal{K}_g, \mathcal{N}_g > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ telles que

$$|g(\tau,w)| \leq \mathcal{K}_g|w|^\alpha + \mathcal{N}_g. \quad (6.2.13)$$

D'après le Lemme (6.2.2), nous définissons deux opérateurs $\mathcal{F}, \mathcal{Y} : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}w(\tau) &= I^{p_1+p_2;\psi}g(\tau,w(\tau)) + \frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{\Delta\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \left[I^{p_1+p_2;\psi}g(b,w(b)) - \sum_{i=1}^{n}\iota_i I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}g(\kappa_i,w(\kappa_i))\right], \ \tau \in J, \quad (6.2.14)\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{Y}w(\tau) = -\lambda I^{p_2;\psi}w(\tau) + \frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{\Delta\Gamma(\delta_1+p_2)}\left[-\lambda I^{p_2;\psi}w(b) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\iota_i I^{p_2+\beta_i;\psi}w(\kappa_i)\right], \quad (6.2.15)$$

Alors, l'équation intégrale (6.2.3) peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{W}w(\tau) = \mathcal{F}w(\tau) + \mathcal{Y}w(\tau), \ \tau \in J. \quad (6.2.16)$$

Théorème 6.2.3 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiés, alors le problème* (6.2.1) *admet au moins une solution* $w \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ *tant que* $\Theta_2 < 1$*. De plus, l'ensemble des solutions du problème* (6.2.1) *est borné dans* $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$*.*

Afin de démontrer le théorème 6.2.3, on va prouver ses conditions sous forme de lemmes.

Lemme 6.2.4 $\mathcal{Y}$ *est* ϑ*-Lipschitz avec la constante* Θ_2*. Où* Θ_2 *est donnée par* (6.2.11)*.*

Preuve. Soit $w, v \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, donc pour tout $\tau \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Y}w(\tau)-\mathcal{Y}v(\tau)| &\leq |\lambda| I^{p_2;\psi}|w(\tau)-v(\tau)| + \frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[|\lambda| I^{p_2;\psi}|w(b)-v(b)| \\
&\quad + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\iota_i| I^{p_2+\beta_i;\psi}|w(\kappa_i)-v(\kappa_i)|\Bigg], \\
&\leq |\lambda|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}|w(\tau)-v(\tau)| + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)} \\
&\quad \times \Bigg[|\lambda|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}|w(b)-v(b)| \\
&\quad + |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_2+\beta_i+1)}|w(\kappa_i)-v(\kappa_i)|\Bigg], \\
&\leq |\lambda|\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)} \\
&\quad \times \Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_2+\beta_i+1)}\Bigg]\Bigg\}\|w-v\|, \\
&\leq \Theta_2\|w-v\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\mathcal{Y}w-\mathcal{Y}v\| \leq \Theta_2\|w-v\|.$$

Alors $\mathcal{Y}$ est Lipschitzien avec la constante Θ_2 et d'après la Proposition 1.4.17, $\mathcal{Y}$ est ϑ-Lipschitzien avec la même constante Θ_2.

Lemme 6.2.5 *$\mathcal{F}$ est continue et satisfait l'inégalité suivante*

$$\|\mathcal{F}w\| \leq \Theta_1\big(\mathcal{K}_g\|w\|^\alpha + \mathcal{N}_g\big), \tag{6.2.17}$$

avec Θ_1 *est donné par* (6.2.10)

Preuve. Soit $w_n, w \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ tel que w_n convergeant vers w dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, implique qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\|w_n\| \leq \mu$ pour tout $n \geq 1$, de plus, on obtient $\|w\| \leq \mu$. En utilisant le fait que g est continu et (H_2), et pour tout $\tau \in J$ on obtient

$$\begin{aligned}|g(\tau, w_n(\tau)) - g(\tau, w(\tau))| &\leq |g(\tau, w_n(\tau))| + |g(\tau, w(\tau)| \\ &\leq 2(\mathcal{K}_g\mu^\alpha + \mathcal{N}_g).\end{aligned}$$

La fonction $s \longrightarrow 2(\mathcal{K}_g\mu^\alpha + \mathcal{N}_g)$ est intégrable pour $s \in [0,\tau], \tau \in J$ en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous obtenons

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}w_n(\tau) - \mathcal{F}w(\tau)| \leq{}& I^{p_1+p_2;\psi}|g(\tau, w_n(\tau)) - g(\tau, w(\tau))| + \frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \Bigg[I^{p_1+p_2;\psi}|g(b, w_n(b)) - g(b, w(b))| \\ &+ \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}|g(\kappa_i, w_n(\kappa_i)) - g(\kappa_i, w(\kappa_i))| \Bigg] \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathcal{F}$ est continue ; de plus pour tout $\tau \in$ Jon a

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}w(\tau)| \leq{}& I^{p_1+p_2;\psi}|g(\tau, w(\tau))| + \frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \left[I^{p_1+p_2;\psi}|g(b, w(b))| + \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}|g(\kappa_i, w(\kappa_i))| \right], \\ \leq{}& \Bigg\{ \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)} \\ &\times \left[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)} + \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| \frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_1+p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\beta_i+1)} \right] \Bigg\} \big(\mathcal{K}_g\|w\|^\alpha + \mathcal{N}_g\big).\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{F}w\| \leq \Theta_1\big(\mathcal{K}_g\|w\|^\alpha + \mathcal{N}_g\big).$$

Lemme 6.2.6 *$\mathcal{F}$ est compact, par conséquent $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitzienne avec une constante nulle.*

Preuve. Pour prouver que $\mathcal{F}$ est compact, on prend un ensemble borné $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_\rho$, il reste à prouver que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Pour cette raison, on considère $w \in \mathcal{M} \subset \mathcal{B}_\rho$ et en utilisant (6.2.17), nous obtenons

$$\|\mathcal{F}w\| \leq \Theta_1 \left(\mathcal{K}_g \rho^\alpha + \mathcal{N}_g\right) := \upsilon, \tag{6.2.18}$$

alors $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_\upsilon$, par conséquent $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est borné.
Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et pour tout $w \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}w(\tau_2) - \mathcal{F}w(\tau_1)| &\leq I^{p_1+p_2;\psi}|g(\tau_2, w(\tau_2)) - g(\tau_1, w(\tau 1))| \\
&+ \frac{(\psi(\tau_2) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1} - \psi(\tau_1) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1 + p_2)} \\
&\times \left[I^{p_1+p_2;\psi}|g(b, w(b))| + \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}|g(\kappa_i, w(\kappa_i)|\right], \\
&\leq \frac{(\mathcal{K}_g \rho^\alpha + \mathcal{N}_g)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \Bigg| \int_a^{\tau_1} \psi'(s) \Big((\psi(\tau_2) - \psi(s))^{p_1+p_2-1} - \\
&(\psi(\tau_1) - \psi(s))^{p_1+p_2-1} \Big) ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \psi'(s)(\psi(\tau_2) - \psi(s))^{p_1+p_2-1} ds \Bigg| \\
&+ \frac{(\psi(\tau_2) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1} - \psi(\tau_1) - \psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1 + p_2)} \\
&\times \left[\frac{(\psi(b) - \psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1 + p_2 + 1)} + \sum_{i=1}^{n} |\iota_i| \frac{(\psi(\kappa_i) - \psi(a))^{p_1+p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_1 + p_2 + \beta_i + 1)} \right] (\mathcal{K}_g \rho^\alpha + \mathcal{N}_g),
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de la fonction ψ, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque τ_2 tend vers τ_1, ceci implique que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est équicontinu. Il s'ensuit, en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, que l'opérateur $\mathcal{F}$ est compact en conséquence de la Proposition 1.4.16 $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitz avec une constante nulle. Puisque toutes les conditions sont satisfaites, nous démontrons la validité de notre résultat principale.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{W}$, les opérateurs donnés par (6.2.17), (6.2.15), (6.2.16) respectivement. Ces opérateurs sont continus et bornés. De plus, en utilisant le lemme 6.2.4 , $\mathcal{Y}$ est ϑ-Lipschitz avec la constante Θ_2, et en utilisant le Lemme 6.2.6, $\mathcal{F}$ est ϑ-Lipschitz avec la constante zéro, donc $\mathcal{W}$ est une ϑ-contraction stricte avec la constante Θ_2, enfin $\mathcal{W}$ est une ϑ-condensation car $\Theta_2 < 1$.

Ensuite, en considérant l'ensemble suivant

$$\Lambda_\epsilon = \{w \in X : w = \epsilon \mathcal{W} w, \qquad 0 \leq \epsilon \leq 1\}. \tag{6.2.19}$$

Il reste à montrer que l'ensemble Λ_ϵ est borné. En effet, pour tout $w \in \Lambda_\epsilon$ on a $w = \epsilon\mathcal{W}w = \epsilon(\mathcal{F}w + \mathcal{Y}w)$, donc d'après le Lemme 6.2.5 et 6.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}\|w\| &= \epsilon\|\mathcal{F}w + \mathcal{Y}w\|,\\ &\leq \|\mathcal{F}w\| + \|\mathcal{Y}w\|,\\ &\leq \Theta_1\left(\mathcal{K}_g\|w\|^\alpha + \mathcal{N}_g\right) + \Theta_2\|w\|,\\ &\leq \frac{\Theta_1\left(\mathcal{K}_g\|w\|^\alpha + \mathcal{N}_g\right)}{1-\Theta_2},\end{aligned}$$

alors l'ensemble Λ_ϵ est borné dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Si l'ensemble Λ_ϵ n'est pas borné, alors on suppose que $\chi := \|w\| \longrightarrow \infty$ donc

$$1 \leq \lim_{\chi\to+\infty} \frac{\Theta_1\left(\mathcal{K}_g\chi^\alpha + \mathcal{N}_g\right)}{\chi(1-\Theta_2)} = 0 \tag{6.2.20}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, en utilisant le Théorème 1.4.18, $\mathcal{W}$ admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (6.2.1). De plus, l'ensemble des solutions du problème (6.2.1) est borné dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

Résultat d'unicité

dans cette partie on va traiter l'unicité de la solution du problème (6.1.1), en utilisant le principe de contraction de Banach.

Théorème 6.2.7 *Supposons que* (H_1) *est vérifié. Si* $\mathcal{L}_g\Theta_1 + \Theta_2 < 1$ *alors le problème* (6.2.1) *admet une solution unique dans* $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

Preuve. Pour tout $w \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, et $\forall\tau \in J$ on a

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{W}w(\tau)-\mathcal{W}v(\tau)| &\leq |\mathcal{F}w(\tau)-\mathcal{F}v(\tau)+\mathcal{Y}w(\tau)-\mathcal{Y}v(\tau)|,\\
&\leq |\mathcal{F}w(\tau)-\mathcal{F}v(\tau)|+|\mathcal{Y}w(\tau)-\mathcal{Y}v(\tau)|,\\
&\leq I^{p_1+p_2;\psi}|g(\tau,w(\tau))-g(\tau,v(\tau))|+\frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\\
&\times\Bigg[I^{p_1+p_2;\psi}|g(b,w(b))-g(b,v(b))|\\
&+\sum_{i=1}^{n}|\iota_i|I^{p_1+p_2+\beta_i;\psi}|g(\kappa_i,w(\kappa_i))-g(\kappa_i,v(\kappa_i))|\Bigg]\\
&+|\lambda|I^{p_2;\psi}|w(\tau)-v(\tau)|+\frac{(\psi(\tau)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\Bigg[|\lambda|I^{p_2;\psi}|w(b)-v(b)|\\
&+|\lambda|\sum_{i=1}^{n}|\iota_i|I^{p_2+\beta_i;\psi}|w(\kappa_i)-v(\kappa_i)|\Bigg],\\
&\leq\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}+\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\\
&\times\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2+1)}+\sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_1+p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_1+p_2+\beta_i+1)}\Bigg]\Bigg\}\mathcal{L}_g|w(\tau)-v(\tau)|\\
&+|\lambda|\Bigg\{\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\delta_1+p_2-1}}{|\Delta|\Gamma(\delta_1+p_2)}\\
&\times\Bigg[\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{p_2}}{\Gamma(p_2+1)}+\sum_{i=1}^{n}|\iota_i|\frac{(\psi(\kappa_i)-\psi(a))^{p_2+\beta_i}}{\Gamma(p_2+\beta_i+1)}\Bigg]\Bigg\}|w(\tau)-v(\tau)|,\\
&\leq(\mathcal{L}_g\Theta_1+\Theta_2)\|w-v\|,
\end{aligned}
$$

implique que

$$\|\mathcal{W}w-\mathcal{W}v\|\leq(\mathcal{L}_g\Theta_1+\Theta_2)\|w-v\|. \tag{6.2.21}$$

Où, Θ_1 et Θ_2 sont respectivement données par (6.2.10) et (6.2.11), en utilisant le fait que $\mathcal{L}_g\Theta_1+\Theta_2<1$, alors $\mathcal{W}$ est une contraction, d'après le théorème du point fixe de Banach, on conclut que $\mathcal{W}$ admet un unique point fixe unique qui est l'unique solution du problème (6.2.1).

6.2.4 Exemple

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\frac{1}{5},\frac{3}{5};\frac{e^{\tau}}{6}}\left[{}^{H}D^{\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{e^{\tau}}{6}}+\frac{1}{9}\right]w(\tau)=\frac{e^{-\tau}}{7+e^{\tau}}\left[\frac{|w(\tau)|}{1+|w(\tau)|}\right],\ 0\leq\tau\leq 1,\\ w(0)=0\,,\ \ w(1)=\frac{3}{8}I^{\frac{5}{2};\frac{e^{\tau}}{6}}w(\frac{1}{3})+\frac{5}{8}I^{\frac{7}{2};\frac{e^{\tau}}{6}}w(\frac{1}{2}). \end{cases} \tag{6.2.22}$$

Où, $p_1=\frac{1}{5}$, $p_2=\frac{2}{3}$, $q_1=\frac{3}{5}$, $q_2=\frac{1}{3}$, $\lambda=\frac{1}{9}$, $a=0$, $b=1$, $J=[0,1]$, $n=2$, $\iota_1=\frac{3}{8}$, $\iota_2=\frac{5}{8}$, $\beta_1=\frac{5}{2}$, $\beta_2=\frac{7}{2}$, $\kappa_1=\frac{1}{3}$, $\kappa_2=\frac{1}{2}$ et $\psi(\tau)=\frac{e^{\tau}}{6}$.

Pour tout $(\tau,w)\in J\times\mathbb{R}_+$, nous définissons $g(\tau,w)=\frac{e^{-\tau}}{7+e^{\tau}}(\frac{w}{1+w})$.
g est une fonction continue, de plus pour tout $\tau\in J$ et pour chaque $w,v\in\mathbb{R}_+$ nous avons

$$\begin{aligned} |g(\tau,w)-g(\tau,v)| &\leq \left|\frac{e^{-\tau}}{7+e^{\tau}}\right|\left|\frac{w-v}{(1+w)(1+v)}\right| \\ &\leq \frac{1}{8}|w-v|. \end{aligned}$$

Alors l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $\mathcal{L}_g=\frac{1}{8}>0$. De plus pou tout $\tau\in J$ et $w,v\in\mathbb{R}_+$ on a

$$\begin{aligned} |g(\tau,w)| &\leq \left|\frac{e^{-\tau}}{7+e^{\tau}}\right|\big(|w|+1\big) \\ &\leq \frac{1}{8}\big(|w|+1\big). \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H_2) est vérifiée avec $\mathcal{K}_g=\mathcal{N}_g=\frac{1}{8}>0$ et $\alpha=1$ de plus on a $\Theta_2=0.107986<1$. Finalement, toutes les conditions du théorème 6.2.3 sont satisfaites, par conséquent le problème (6.2.22) admet au moins une solution définie sur $[0,1]$.

Pour l'unicité on utilise les données données ci-dessus, on obtient $\delta_1=p_1+q_1-p_1q_1=\frac{3}{5}=0.6>0$, $|\Delta|\simeq 0.801289$, $\Theta_1=0,369497$, $\Theta_2=0,107986<1$, et $\mathcal{L}_g=\frac{1}{8}=0,125$.

Alors $\mathcal{L}_g\Theta_1+\Theta_2=0.125\times 0.369497+0.107986\simeq 0.154173<1$.

Par conséquent, d'après le Théorème 6.2.7, le problème (6.2.22) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Chapitre 7

L'opérateur p-Laplacien pour une équation différentielle fractionnaire de type ψ-Caputo

7.1 Résultat d'existence pour une equation différentielle fractionnaire avec une dérivé fractionnaire de ψ-Caputo

7.1.1 Motivation

Il existe plusieurs façons de définir les intégrales et dérivées fractionnaires, les plus connues sont l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo, dans [6] Almedia introduit la généralisation de la dérivée de Caputo sous le nom de la dérivée fractionnaire Ψ-Caputo, pour plus de détails voir [2, 73, 7]. Récemment, les équations différentielles avec l'opérateur p-Laplacien ont été couramment utilisées dans plusieurs domaines scientifiques, pour étudier ce genre de situations, dans [48] Leibenson a introduit l'équation avec l'opérateur p-Laplacienne comme suit

$$\left(\phi_p\big(u'(\tau)\big)\right)' = f(\tau, u(\tau), u'(\tau)).$$

Où $\phi_p(s) = |s|^{s-2}s$, $p > 1$, ϕ_p est inversible et son opérateur inverse est ϕ_q, avec $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaires avec l'opérateur p-Laplacien, on se réfère à [50, 60, 65, 83, 82].

Liu et al. [49] ont discuté les résultats d'existence et d'unicité d'un problème p-Laplacian opérateur pour une équation différentielle fractionnaire, en utilisant le théorème de point fixe de Banach. Dans [79], Su et al. Ont étudié les critères d'existence d'une solutions non négatives pour une équations différentielles fractionnaires non linéaires avec l'opérateur p-Laplacian, les résultats d'existences et d'unicité sont obtenus par l'application de l'alternative non linéaire de leray-Schauder et le point fixe de Banach.

Motivés par les travaux mentionnés, nous combinons leurs idées afin d'étudier le résultat d'existence pour le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\Psi}\left(\phi_p\left[{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\right]\right) = h(\tau,u(\tau)),\ \tau\in\Lambda:=[a,b], \\ u(a)=\mu u(\xi)\,,\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(a)=0\,,\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(b)=\kappa\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\eta). \end{cases} \tag{7.1.1}$$

Où ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\Psi}$ et ${}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}$ représentent les dérivées fractionnaires de Ψ-Caputo d'ordre α, $0<\alpha\leq 2$, et β, $0<\beta\leq 1$, respectivement, $a\geq 0$, $\mu,\kappa\in\mathbb{R}$, $\eta,\xi\in\Lambda$, $h\in\mathcal{C}\big(\Lambda\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ et $\phi_p(\tau)$ est l'opérateur p-Laplacien ($\phi_p(\tau)=|\tau|^{p-2}\tau$, $p>1$).

Remarque 7.1.1 ⋆ *Si $\psi(t)=t$, le problème (7.1.1) réduit à un problème avec la dérivée fractionnaire de Caputo.*

- ⋆ *Si $\psi(t)=\log(t)$, le problème (7.1.1) réduit à un problème avec la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.*
- ⋆ *Si $\psi(t)=t^{\rho}$, le problème (7.1.1) réduit à un problème avec la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola.*

7.1.2 Construction de la solution

Définition 7.1.2 *Une fonction $u\in\mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (7.1.1), si u satisfait l'équation ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha;\Psi}\left(\phi_p\left[{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\right]\right)=h(t,u(\tau))$ p,p Λ, et $u(a)=\mu u(\xi)\,,\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(a)=0\,,\ {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(b)=\kappa\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\eta)$.*

Lemme 7.1.3 *Soit $a\geq 0$, $0<\beta\leq 1$, $y\in\mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$ et $\mu\in\mathbb{R}$, tel que $\mu\neq 1$. Alors la fonction u est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)=y(\tau), \quad \tau\in\Lambda:=[a,b] \\ u(a)=\mu u(\xi),\ a<\xi<b, \end{cases} \tag{7.1.2}$$

si et seulement si u est une solution de l'équation intégral suivante

$$u(\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}\Psi'(s)(\Psi(\tau)-\Psi(s))^{\beta-1}y(s)ds + \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\beta)}\int_a^{\xi}\Psi'(s)(\Psi(\xi)-\Psi(s))^{\beta-1}y(s)ds. \tag{7.1.3}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale fractionnaire de Ψ-Riemann-Liouville d'ordre β aux deux côtés de (7.1.2), nous obtenons en utilisant le Lemma 1.3.6

$$u(\tau)=I_{a^+}^{\beta;\psi}y(\tau)+d_0, \tag{7.1.4}$$

où d_0 est une constante. Ensuite, en utilisant la condition aux limites $u(a) = \mu u(\xi)$ dans (7.1.4) nous obtenons

$$u(a) = d_0 = \mu I_{a^+}^{\beta;\Psi} h(\xi) + \mu d_0, \tag{7.1.5}$$

donc

$$d_0 = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\beta)} \int_{a^+}^{\xi} \Psi'(s)(\Psi(\xi) - \Psi(s))^{\beta-1} y(s) ds. \tag{7.1.6}$$

En substituant la valeur de d_0 dans (7.1.4), on obtient l'équation intégrale définie par

$$u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\tau} \Psi'(s)(\Psi(\tau) - \Psi(s))^{\beta-1} y(s) ds + \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\beta)} \int_a^{\xi} \Psi'(s)(\Psi(\xi) - \Psi(s))^{\beta-1} y(s) ds.$$

Lemme 7.1.4 *Soit $a \geq 0$, $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $w \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ et $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$, tels que $\mu \neq 1$. Alors la fonction u est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^C D_{a^+}^{\alpha;\Psi} \left(\phi_p \left[{}^C D_{a^+}^{\beta;\Psi} u(\tau) \right] \right) = w(\tau), \ \tau \in \Lambda := [a, b], \\ u(a) = \mu u(\xi), \ {}^C D_{a^+}^{\beta;\Psi} u(a) = 0, \ {}^C D_{a^+}^{\beta;\Psi} u(b) = \kappa {}^C D_{a^+}^{\beta;\Psi} u(\eta); \ \eta, \xi \in \Lambda, \end{cases} \tag{7.1.7}$$

si et seulement si u est une solution de l'équation intégral suivante

$$\begin{aligned} u(\tau) &= I_{a^+}^{\beta;\Psi} \phi_q \left(I_{a^+}^{\alpha;\Psi} w(\tau) + G_1 w(\tau) \right) + G_2 w(\tau) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\tau} \Psi'(s)(\Psi(\tau) - \Psi(s))^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \Psi'(\sigma)(\Psi(s) - \Psi(\sigma))^{\alpha-1} w(\sigma) d\sigma \right. \\ &\left. + G_1 w(s) \right) ds + G_2 w(\tau), \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

où

$$G_1 w(\tau) = \frac{\Psi(s) - \Psi(a)}{\Theta \Gamma(\alpha)} \left[\kappa^{p-1} \int_a^{\eta} \Psi'(s)(\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} w(s) ds - \int_a^b \Psi'(s)(\Psi(b) - \Psi(s))^{\alpha-1} w(s) ds \right], \tag{7.1.9}$$

$$G_2 w(\tau) = \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\beta)} \times \int_a^{\xi} \Psi'(s)(\Psi(\xi) - \Psi(s))^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \Psi'(\sigma)(\Psi(s) - \Psi(\sigma))^{\alpha-1} w(\sigma) d\sigma + G_1 w(s) \right) ds, \tag{7.1.10}$$

$$\Theta = (\Psi(b) - \Psi(a)) - \kappa^{p-1}(\Psi(\eta) - \Psi(a)) \neq 0. \tag{7.1.11}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale fractionnaire de Ψ-Riemann-Liouville d'ordre α aux deux côtés de (7.1.7), nous obtenons en utilisant le Lemme 1.3.6

$$\phi_p\left[\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\right] = I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + d_1 + d_2(\Psi(\tau) - \Psi(a)), \tag{7.1.12}$$

où $d_1,\ d_2$ sont des constantes. Ensuite, en utilisant la condition aux limites ${}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(a) = 0$ dans (7.1.12) nous obtenons

$$\phi_p\left[\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(a)\right] = \phi_p(0) = 0 = d_1,$$

il s'ensuit que

$$\phi_p\left[\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\right] = I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + d_2(\Psi(\tau) - \Psi(a)), \tag{7.1.13}$$

en utilisant la condition aux limites ${}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(b) = \kappa\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\eta)$, et les propriétés de ϕ_p dans (7.1.13) nous obtenons

$$I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(b) + d_2(\Psi(b) - \Psi(a)) = \kappa^{p-1}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\eta) + d_2\kappa^{p-1}(\Psi(\eta) - \Psi(a)), \tag{7.1.14}$$

puis

$$d_2 = \frac{\kappa^{p-1}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\eta) - I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(b)}{(\Psi(b) - \Psi(a)) - \kappa^{p-1}(\Psi(\eta) - \Psi(a))} = \frac{\kappa^{p-1}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\eta) - I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(b)}{\Theta}, \tag{7.1.15}$$

il s'ensuit que

$$\phi_p\left[\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau)\right] = I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + (\Psi(\tau) - \Psi(a))\frac{\kappa^{p-1}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\eta) - I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(b)}{\Theta}, \tag{7.1.16}$$

donc

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\beta;\Psi}u(\tau) &= \phi_q\left[I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + (\Psi(\tau) - \Psi(a))\frac{\kappa^{p-1}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\eta) - I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(b)}{\Theta}\right] \\ &= \phi_q\left[I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + G_1w(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{7.1.17}$$

En utilisant le Lemme 7.1.3 et en posant $y(\tau) = \phi_q\left[I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + G_1w(\tau)\right]$ nous obtenons

$$\begin{aligned} u(\tau) &= I_{a^+}^{\beta;\Psi}\phi_q\big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}w(\tau) + G_1w(\tau)\big) + G_2w(\tau), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}\Psi'(s)(\Psi(\tau) - \Psi(s))^{\beta-1}\phi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{s}\Psi'(\sigma)(\Psi(s) - \Psi(\sigma))^{\alpha-1}w(\sigma)d\sigma \\ &+ G_1w(s)\Bigg)ds + G_2w(\tau). \end{aligned}$$

7.1.3 Existence de la solution pour le problème (7.1.1)

Dans cette section, nous traitons l'existence de la solution du problème (6.2.1), en utilisant le théorème du point fixe de Leray-Schaëfer et pour simplifier les calculs, nous utilisons les notations suivantes

$$A = \frac{(\Psi(b)-\Psi(a))^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{|\mu|(\Psi(\xi)-\Psi(a))^{\beta}}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)}. \tag{7.1.18}$$

Et

$$B = \frac{(\Psi(b)-\Psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))}{|\Theta|\Gamma(\alpha+1)}\left[\kappa^{p-1}(\psi(\eta)-\psi(a))^{\alpha} + (\Psi(b)-\Psi(a))^{\alpha}\right]. \tag{7.1.19}$$

Avec Θ est donné par (7.1.11).

On suppose que

(H_1) : il existe des fonctions strictement positives $\gamma, \delta \in \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$ tel que pour tout $\tau \in \Lambda$ et pour tout $u \in \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$

$$|h(\tau,u)| \le \gamma(\tau) + \delta(\tau)|u|^{p-1} \tag{7.1.20}$$

(H_2) : $A^{p-1}B\|\delta\| < 1$, avec A, B sont donnés respectivement par (7.1.18), (7.1.19).

D'après le lemme 7.1.4 nous définissons l'opérateur $\mathcal{W} : \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}u(\tau) &= I_{a^+}^{\beta;\Psi}\phi_q\big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau,u(\tau)) + G_1h(\tau,u(\tau))\big) + G_2h(\tau,u(\tau)),\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}\Psi'(s)(\Psi(\tau)-\Psi(s))^{\beta-1}\phi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{s}\Psi'(\sigma)(\Psi(s)-\Psi(\sigma))^{\alpha-1}h(\sigma,u(\sigma))d\sigma\\
&+ \frac{\Psi(s)-\Psi(a)}{\Theta\Gamma(\alpha)}\Bigg[\kappa^{p-1}\int_a^{\eta}\Psi'(s)(\Psi(\eta)-\Psi(s))^{\alpha-1}h(s,u(s))ds\\
&- \int_a^{b}\Psi'(s)(\Psi(b)-\Psi(s))^{\alpha-1}h(s,u(s))ds\Bigg]\Bigg)ds + \frac{\mu}{(1-\mu)\Gamma(\beta)}\\
&\times \int_a^{\xi}\Psi'(s)(\Psi(\xi)-\Psi(s))^{\beta-1}\phi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{s}\Psi'(\sigma)(\Psi(s)-\Psi(\sigma))^{\alpha-1}h(\sigma,u(\sigma))d\sigma\\
&+ \frac{\Psi(s)-\Psi(a)}{\Theta\Gamma(\alpha)}\Bigg[\kappa^{p-1}\int_a^{\eta}\Psi'(s)(\Psi(\eta)-\Psi(s))^{\alpha-1}h(s,u(s))ds\\
&- \int_a^{b}\Psi'(s)(\Psi(b)-\Psi(s))^{\alpha-1}h(s,u(s))ds\Bigg]\Bigg)ds,
\end{aligned} \tag{7.1.21}$$

Théorème 7.1.5 *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites, alors le problème* (7.1.1) *admet au moins une solution* $u \in \mathcal{C}(\Lambda,\mathbb{R})$.

Pour démontrer le théorème 7.1.5, nous prouverons que l'opérateur $\mathcal{W}$ satisfait aux conditions du théorème 1.5.3 (théorème du point fixe de Schaefer).

Preuve. Considérons l'opérateur $\mathcal{W}$ définit par (7.1.21), on va montrer que est $\mathcal{W}$ complètement continue

Étape 1 :$\mathcal{W}$ est continue.

Soit $(u_n) \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$, en utilisant la continuité de la fonction h et ϕ_q on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} G_1 h(\tau, u_n(\tau)) = G_1 h(\tau, u(\tau))$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_1 h(\tau, u_n(\tau)) = G_2 h(\tau, u(\tau))$, de plus on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathcal{W}u_n(\tau) &= \lim_{n\to+\infty} \left(I_{a^+}^{\beta;\Psi} \phi_q \left(I_{a^+}^{\alpha;\Psi} h(\tau, u_n(\tau)) + G_1 h(\tau, u_n(\tau)) \right) + G_2 h(\tau, u_n(\tau)) \right), \\
&= I_{a^+}^{\beta;\Psi} \phi_q \left(I_{a^+}^{\alpha;\Psi} h(\tau, u(\tau)) + G_1 h(\tau, u(\tau)) \right) + G_2 h(\tau, u(\tau))), \\
&= \mathcal{W}u(\tau).
\end{aligned}$$

Cela montre que $\mathcal{W}$ est continu.

Étape 2 :$\mathcal{W}$ est borné.

On considère $\mathcal{N}$ un ensemble borné, tel que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}_\rho$. Montrant que $\mathcal{W}(\mathcal{N})$ est borné.En effet, pour tout $u \in \mathcal{N}$, on a $\|u\| \leq \rho$, en utilisant la continuité de la fonction h et (H_1), on obtient $|h(\tau, u)| \leq |\gamma| + |\delta|\rho^{p-1} := N_1$, alors pour tout $\tau \in \Lambda$, $u \in \mathcal{N}$ nous avons

$$\begin{aligned}
|I_{a^+}^{\alpha;\Psi} h(\tau, u(\tau)) + G_1 h(\tau, u(\tau))| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau \Psi'(s)(\Psi(\tau) - \Psi(s))^{\alpha-1} |h(s, u(s))| ds \\
& + \frac{\Psi(\tau) - \Psi(a)}{|\Theta|\Gamma(\alpha)} \left[\kappa^{p-1} \int_a^\eta \Psi'(s)(\Psi(\eta) - \Psi(s))^{\alpha-1} |h(s, u(s))| ds \right. \\
& \left. - \int_a^b \Psi'(s)(\Psi(b) - \Psi(s))^{\alpha-1} |h(s, u(s))| ds \right], \\
& \leq BN_1.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|G_2 h(\tau, u(\tau))| &\leq \frac{|\mu|}{|1-\mu|\Gamma(\beta)} \int_a^\xi \Psi'(s)(\Psi(\xi) - \Psi(s))^{\beta-1} \\
&\times \left| \phi_q \left(I_{a^+}^{\alpha;\Psi} h(\tau, u(\tau)) + G_1 h(\tau, u(\tau)) \right) \right| \\
&\leq \frac{|\mu|(\Psi(\xi) - \Psi(a))^\beta}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)} \left[BN_1 \right]^{q-1},
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{W}u(\tau)| &\leq \frac{(\Psi(b) - \Psi(a))^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \left[BN_1 \right]^{q-1} + \frac{|\mu|(\Psi(\xi) - \Psi(a))^\beta}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)} \left[BN_1 \right]^{q-1}, \\
&\leq A \left[BN_1 \right]^{q-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{W}u\| \leq A\left[BN_1\right]^{q-1},$$

ce qui montre que $\mathcal{W}$ est borné.

Étape 3 :$\mathcal{W}$ est equicontinu.

Soit $\tau_1, \tau_2 \in \Lambda$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et pour $u \in \mathcal{N}$, (voir que G_2u donné par (7.1.10) est indépendante de τ), alors on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{W}u(\tau_2) - \mathcal{W}u(\tau_1)| &= \Bigg| I_{a^+}^{\beta;\Psi}\phi_q\Big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau_2, u(\tau_2)) + G_1h(\tau_2, u(\tau_2)\Big) \\
&- I_{a^+}^{\beta;\Psi}\phi_q\Big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau_1, u(\tau_1)) + G_1h(\tau_1, u(\tau_1)\Big)\Bigg|, \\
&\leq \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau_1}\Psi'(s)\big[(\Psi(\tau_2) - \Psi(s))^{\beta-1} - (\Psi(\tau_1) - \Psi(s))^{\beta-1}\big] \\
&\times \phi_q\Big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(s, u(s)) + G_1h(s, u(s)\Big)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Psi'(s)(\Psi(\tau_2) - \Psi(s))^{\beta-1} \\
&\times \phi_q\Big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(s, u(s)) + G_1h(s, u(s)\Big)ds\Bigg|, \\
&\leq \frac{\left[BN_1\right]^{q-1}}{\Gamma(\beta)}\Big\{\int_a^{\tau_1}\Psi'(s)\Big|(\Psi(\tau_2) - \Psi(s))^{\beta-1} - (\Psi(\tau_1) - \Psi(s))^{\beta-1}\Big|ds \\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\Psi'(s)(\Psi(\tau_2) - \Psi(s))^{\beta-1}ds\Big\}, \\
&\leq \frac{\left[BN_1\right]^{q-1}}{\Gamma(\beta+1)}\Big\{2(\Psi(\tau_2) - \Psi(\tau_1))^{\beta} \\
&+ \Big|(\Psi(\tau_2) - \Psi(s))^{\beta} - (\Psi(\tau_1) - \Psi(s))^{\beta}\Big|\Big\}.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de la fonction Ψ, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque τ_2 tend vers τ_1, ceci implique que $\mathcal{W}(\mathcal{N})$ est équicontinu. D'après l'étape 2 et de l'étape 3 il découle en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli que l'opérateur $\mathcal{W}$ est relativement compact, par conséquent l'opérateur $\mathcal{W}$ est complètement continu.

Étape 4 :L'ensemble $\Delta_\varepsilon = \{u \in \mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R}) \mid u = \varepsilon\mathcal{W}u\,;\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$ est borné.

En utilisant (H_1), on a

$$\begin{aligned}
|I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau,u(\tau))+G_1h(\tau,u(\tau))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^\tau \Psi'(s)(\Psi(\tau)-\Psi(s))^{\alpha-1}|h(s,u(s))|ds \\
&+\frac{\Psi(\tau)-\Psi(a)}{|\Theta|\Gamma(\alpha)}\Bigg[\kappa^{p-1}\int_a^\eta \Psi'(s)(\Psi(\eta)-\Psi(s))^{\alpha-1}|h(s,u(s))|ds \\
&-\int_a^b \Psi'(s)(\Psi(b)-\Psi(s))^{\alpha-1}|h(s,u(s))|ds\Bigg], \\
&\leq B(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1}).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
|G_2h(\tau,u(\tau))| &\leq \frac{|\mu|}{|1-\mu|\Gamma(\beta)}\int_a^\xi \Psi'(s)(\Psi(\xi)-\Psi(s))^{\beta-1} \\
&\times\left|\phi_q\left(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau,u(\tau))+G_1h(\tau,u(\tau))\right)\right| \\
&\leq \frac{|\mu|(\Psi(\xi)-\Psi(a))^\beta}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)}[B(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1})]^{q-1},
\end{aligned}$$

pour tout $u\in\Delta_\varepsilon$ on a $u(\tau)=\varepsilon\mathcal{W}u(\tau)$ alors il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|u(\tau)| &\leq \left|I_{a^+}^{\beta;\Psi}\phi_q\big(I_{a^+}^{\alpha;\Psi}h(\tau,u(\tau))+G_1h(\tau,u(\tau))\big)\right|+\big|G_2h(\tau,u(\tau))\big|, \\
&\leq \frac{(\Psi(b)-\Psi(a))^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\left[B(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1})\right]^{q-1} \\
&+\frac{|\mu|(\Psi(\xi)-\Psi(a))^\beta}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)}\left[B(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1})\right]^{q-1}, \\
&\leq \left(\frac{(\Psi(b)-\Psi(a))^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{|\mu|(\Psi(\xi)-\Psi(a))^\beta}{|1-\mu|\Gamma(\beta+1)}\right)\left[B(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1})\right]^{q-1}, \\
&\leq AB^{q-1}\left(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1}\right)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Avec A et B sont respectivement donnés par (7.1.18) et (7.1.19). Ainsi, on a

$$\|u\|\leq AB^{q-1}\left(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1}\right)^{q-1},$$

donc

$$\|u\|^{p-1}\leq A^{p-1}B\left(\|\gamma\|+\|\delta\|\|u\|^{p-1}\right),$$

en utilisant (H_2), on obtient

$$\|u\|^{p-1}\leq\frac{A^{p-1}B\|\gamma\|}{1-A^{p-1}B\|\delta\|}:=\mathcal{M},$$

finalement on arrive a

$$\|u\| \leq \mathcal{M}^{q-1}.$$

Cela prouve que l'ensemble Δ_ε est borné dans $\mathcal{C}(\Lambda, \mathbb{R})$, en utilisant le théorème 1.5.3, donc $\mathcal{W}$ admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (7.1.1).

7.1.4 Exemple

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\frac{3}{2};\frac{e^\tau}{3}}\left(\phi_3\left[{}^{C}D_{0^+}^{\frac{2}{5};\frac{e^\tau}{3}}u(\tau)\right]\right) = \dfrac{5\tau^2}{\cos\tau} + \dfrac{1}{7+e^\tau}u^2(\tau),\ \tau \in \Lambda := [0,1], \\ u(0) = \frac{5}{8}u(\frac{2}{3}),\ \ {}^{C}D_{0^+}^{\frac{2}{5};\frac{e^\tau}{3}}u(a) = 0,\ \ {}^{C}D_{0^+}^{\frac{2}{5};\frac{e^t}{3}}u(1) = \frac{3}{8}\,{}^{C}D_{0^+}^{\frac{2}{5};\frac{e^\tau}{3}}u(\frac{1}{2}). \end{cases} \tag{7.1.22}$$

Avec $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{2}{5}$, $p = 3$, $q = \dfrac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\Lambda = [0,1]$, $\xi = \dfrac{2}{3}$, $\eta = \dfrac{1}{2}$, $\kappa = \dfrac{3}{8}$, $\mu = \dfrac{5}{8}$ et $\Psi(\tau) = \dfrac{e^\tau}{3}$.

Pour tout $\tau \in \Lambda = [0,1]$ on définit une fonction h par $h(\tau, u) = \dfrac{5\tau^2}{\cos\tau} + \dfrac{1}{7+e^\tau}u^2$, h est continue. De plus, pour tout $\tau \in \Lambda = [0,1]$ on pose $\gamma(\tau) = \dfrac{5\tau^2}{\cos\tau}$ et $\delta(\tau) = \dfrac{1}{7+e^\tau}$ tels que l'hypothèse (H_1) soit vérifiée. En utilisant les données ci-dessus, on obtient $|\Theta| = 0.6701$, $A = 1.378024$, $B = 1.138093$ et $\|\delta\| = \dfrac{1}{8} = 0.125$. Donc, $A^2B\|\delta\| = 1.378024^2 \times 1.138093 \times 0.125 = 0.270147 < 1$. Le problème (7.1.22) satisfait toutes les hypothèses du Théorème 7.1.5. Ainsi, le problème (7.1.22) admet au moins une solution définie sur $[0,1]$.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude fractionnaire pour l'équation et l'inclusion de Langevin via différente type de dérivé d'ordre fractionnaire (Caputo, ψ-Caputo, Hilfer, ψ-Hilfe). Après un rappel des éléments nécessaires sur le calcule fractionnaire et l'analyse multivoque, on a pu établir ces résultats :

1. L'existence de solution pour l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin via la dérivé fractionnaire de Caputo. Le résultat a été obtenus à l'aide de théorème de point fixe de Leray-Schaëfer.

2. L'existence et l'unicité de solutions une équation différentielle fractionnaire de Langevin via la dérivé fractionnaire de Hilfer qui généralise celle de Caputo lorsque le paramètre $\beta = 1$. Les résultats ont été obtenus à l'aide de théorème de point fixe de Krasnoselski et le théorème de point fixe de Banach, afin de traité la version d'inclusion en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray-Schaude. De plus on étudier aussi l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires.

3. L'étude de l'existence des solutions pour des problème fractionnaire de type Hybride en utilisant le théorème de point fixe de Dhage. En se basant sur la méthode de degré topologique on étudie l'équation différentielle fractionnaire avec la dérivé fractionnaire de ψ-Hilfer. Finalement, on se focalise sur l'opérateur p-Laplacien pour une equation différentielle fractionnaire de Langevin via la dérivé fractionnaire de ψ-Caputo.

L'ensemble de ces travaux peuvent être compléter par les perspectives suivantes

- $\star$ L'opérateur p-Laplacien pour une equation différentielle fractionnaire de Langevin via la dérivé fractionnaire de ψ-Hilfer.
- $\star$ Appliquer la dérivée d'ordre fractionnaire de Hilfer et ψ-Hilfer dans quelques modèles épidémiologiques.
- $\star$ Étendre nos résultats aux cas des dérivées fractionnaires d'ordre fractionnaire variable.
- $\star$ Laplacien fractionnaire pour une équation différentielle fractionnaire de Langevin.
- $\star$ Étudier l'équation et l'inclusion différentielle fractionnaire de Langevin dans le cas d'un retard fini et infini.

Bibliographie

[1] Abbas S., Benchohra M., Graef JR. :Implicit fractional differential and integral equations. Berlin : De Gruyter, 2018. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 26).

[2] Abdo M.S., Panchal S.K., Saeed A.M. : Fractional boundary value problem with ψ-Caputo fractional derivative, Proc.Indian Acad. Sci. (Math.Sci). 129 :65 (2019).

[3] Ali A., Samet B., Shah K., and Khan, R. A. : Existence and stability of solution to a coppled systems of differential equations of non-integer order, Bound. Value Probl.(2017), Paper No. 16, 13 pp.

[4] Aljoudi S., Ahmad B., Nieto J. J., Alsaedi A. : A coupled system of Hadamard type sequential fractional differential equations with coupled strip conditions. Chaos, Solitons and Fractals, 91, 39-46. (2016).

[5] Almalahi A., Panchal K. : Existence results of ψ-Hilfer integro-differential equations with fractional order in Banach space, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math, 19 (2020), 171-192.

[6] Almeida R. : A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 44, 460–481 (2017).

[7] Almeida R., Jleli M., Samet B. : A numerical study of fractional relaxation–oscillation equations involving ψ-Caputo fractional derivative. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matemàticas. 113(3), 1873-1891 (2019).

[8] Alsaedi A., Baleanu D., Etemad S., Rezapour S. : On coupled systems of time-fractional differential problems by using a new fractional derivative. Journal of Function Spaces, (2016).

[9] Agarwal R.P. : A propos d'une note de M. Pierre Humbert. C. R. Académie des Sciences 236, 2031-2032 (1953).

[10] Artin E. : Einfuhrung in die Theorie der Gamma funktion. Teubner, Leipzig (English translation : The Gamma Function. Publié en 1964 par Holt, Rinehart et Winston, New York) (1931).

[11] Asawasamrit S., Kijjathanakorn A., Ntouyas S. K., Tariboon J. : Nonlocal boundary value problems for Hilfer fractional differential equations, B. Korean Math. Soc., 55 (2018), 1639-1657.

[12] Bahadur Zada M., Shah K., and Khan R. A. : Existence theory to a coupled system of higher order fractional hybrid differential equations by topological degree theory, Int. J. Appl. Comput. Math., 4 (2018), Art. 102, 19 pp.

[13] Baitiche Z., Derbazi C., Benchohra M. : ψ–Caputo fractional differential equations with multi-point boundary conditions by Topological Degree Theory. Results in Nonlinear Analysis, 3(4), 167-178, (2020).

[14] Burton T.A. : A fixed point theorem of Krasnoselskii, Appl. Math. Lett. 11 (1998) 85-88.

[15] Caponetto R., Fortuna L., and Porto D. : Parameter tuning of a non integer order pid controller, in Proceedings of the fifteenth international symposium on mathematical theory of networks and systems, Notre Dame, Indiana, 2002.

[16] Caputo M. : Elasticita e dissipazione, Zanichelli, Bologna (1969).

[17] Chen T., and Liu W. : An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p-Laplacian operator, Applied Mathematics Letters.25(11) (2012) 1671-1675.

[18] Chen Y. Q. , Vinagre B. M., and Podlubny I. : Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives-an expository review, Nonlinear Dynamics, vol. 38, no. 1-4, pp. 155–170, 2004.

[19] Covitz H., and . Nadler S.B. : Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math. 8, 5-11, (1970).

[20] Deimling K. : Nonlinear Functional Analysis, New York, Springer-Verlag, (1985).

[21] Denisov S. I., Kantz H., Hänggi P. : Langevin equation with super-heavy-tailed noise. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 43(28), 285004, (2010).

[22] Dhage B.C., Lakshmikantham V. : Basic results on hybrid differential equations. Nonlinear Anal. Hybrid Syst.4, 414-424(2010).

[23] Dhage B.C. : On some variants of Schauder fixed point principle and applications to nonlinear integral equations, J. Math.Phys. Sci. 25 (1988) 603-611.

[24] Dhage B.C. : On a-condensing mappings in Banach algebras, Math. Student 63 (1994) 146-152.

[25] Dhage B.C. : On a fixed point theorem in Banach algebras with applications. Appl. Math. Lett. 18, 273-280 (2005).

[26] Dhage B.C. : Fixed point theorems in ordered Banach algebras and applications. Panam. Math. J. 9(4), 93-102 (1999).

[27] Dhage B. C. : Multivalued Operators and Fixed-Point Theorems in Banach Algebras II, Computers and Mathematics with Applications 48 (2004) 1461-1476.

[28] Diethelm K. : Fractional Differential Equations Theory and Numerical Treatment February 13, 2003.

[29] Dubois F., Galucio A. C. : Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications. Techniques de l'Ingénieur AF510 (2010).

[30] EL Mfadel A., Melliani S., Elomari M. : Existence results for nonlocal Cauchy problem of nonlinear $\psi-$ Caputo type fractional differential equations via topological degree methods. Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application, 6(2), 270-279, (2022).

[31] Euler L. : De progressionibus transcentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt. Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 36-57 (1738).

[32] Fazli H., Nieto J.J. : Fractional Langevin equation with anti-periodic boundary conditions, Chaos, Solitons and Fractals, 114 (2018), pp. 332-337.

[33] Fazli H., Sun H. G., and Nieto J. J : Fractional Langevin equation involving two fractional orders : existence and uniqueness, Mathematics. 8 (2020) 743.

[34] Hilal K., Ibnelazyz L., Guida K., and Melliani S. : Existence of mild solutions for an impulsive fractional integro-differential equations with non-local condition, in Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems, S. Melliani and O. Castillo, Eds., Studies in Fuzziness and Soft Computing. 2019, pp. 251-271.

[35] Hilal K., Kajouni A., Lmou H. : Boundary Value Problem for the Langevin Equation and Inclusion with the Hilfer Fractional Derivative. International Journal of Differential Equations, (2022)

[36] Hilal K., Kajouni A., Lmou H. : Boundary Value Problem for the Langevin Equation and Inclusion with the Hilfer Fractional Derivative. International Journal of Differential Equations, (2022).

[37] Hilal K., Kajouni A. : Boundary value problems for hybrid differential equations. Mathematical Theory and Modeling.2224-5804 (2015).

[38] Hilfer R. : Applications of Fractional Calculs in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[39] Hilfer R. : Threefold introduction to fractional derivatives. In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, Anomalous Transport : Foundations and Applications. Wiley-VCH (2008).

[40] Isaia F. : On a nonlinear integral equation without compactness, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 75 (2006), 233–240.

[41] Khan R.A., Shah K. : Existence and uniqueness of solutions to fractional order multi-point boundary value problems, Commun. Appl. Anal. 19 (2015), 515–526.

[42] Kilbas A.A., Marichev O.I., and Samko S.G. : Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[43] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in : North-Holland Mathematics Studies, vol. 204 , Elsevier, Amsterdam, (2006).

[44] Krasnoselskii M.A. : Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen (1964).

[45] Kobelev V., Romanov E. : Fractional Langevin equation to describe anomalous diffusion. Progress of Theoretical Physics Supplement, 139, 470-476, (2000).

[46] Lakshmikantham V., and Vatsala A. S. :Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. 69 (2008) 2677-2682.

[47] Langevin P. : Sur la theorie du mouvement brownien C. R. Acad. Sci. (Paris) 146 530–33 Lemons D S and Gythiel A 1997 Paul Langevin's 1908 paper 'On the theory of Brownian motion' Am. J. Phys. 65 1079-81 (Engl. Transl.) (1908).

[48] Leibenson L. S. : General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium, Izv. Akad. Nauk Kirg. SSSR., 9 (1983), 7–10.

[49] Liu X., Jia M., Xiang X. : On the solvability of a fractional differential equation model involving the p-Laplacian operator, Comput. Math. Appl., 64 (2012), 3267–3275.

[50] Liu X., Jia M. : The method of lower and upper solutions for the general boundary value problems of fractional differential equations with p-Laplacian, Adv. Differ. Equations., 2018 (2018), 1–15.

[51] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : A New Result for ψ-Hilfer Fractional Pantograph-Type Langevin Equation and Inclusions. Journal of Mathematics, (2022)

[52] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : Existence and stability results for a coupled system of Hilfer fractional Langevin equation with non local integral boundary value conditions. Filomat, (2023).

[53] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : Existence and uniqueness results for Hilfer Langevin fractional pantograph differential equations and inclusions.International Journal of Difference Equations.

[54] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : On a class of fractional Langevin inclusion with multipoint boundary conditions. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 41, 1-13. (2023).

[55] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : Existence results for ψ-Hilfer hybride fractional differential inclusions. soumit

[56] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : Existence result for ψ-Hilfer-type hybrid fractional differential Langevin inclusion.soumit

[57] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. : Existence and uniqueness results for a ψ-Hilfer-type fractional differential equation using topological degree method.soumit

[58] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. :Topological degree method for a new class of ψ-Hilfer fractional differential Langevin equation.soumit

[59] Lmou H., Hilal K., Kajouni A. :p-Laplacian operator for a new classe of ψ-Caputo fractional differential equation.soumit

[60] Mazón J. M., Rossi J. D., Toledo J. : Fractional p-Laplacian evolution equations. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 105(6), 810-844, (2016).

[61] Miller K. S., and Ross B. : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.

[62] Mittag-Leffler M. :Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. Acta Math., 29 :101-182, 1905.

[63] Montseny G. : Représentation diffusive. Hermès science publications, (2005).

[64] Mrani N. : Contribution á l'étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications. PhD thesis, PhD thesis, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc, 2004.

[65] Mukherjee T., Sreenadh K. : On Dirichlet problem for fractional p-Laplacian with singular non-linearity. Advances in Nonlinear Analysis, 8(1), 52-72. (2019).

[66] Oldham K.B., and Spanier J. : The Fractional Calculus. Academic Press, York and London (1974).

[67] Oustaloup A. : The crone control (la commande crone), Hermès, Paris, (1991).

[68] Podlubny I. :Fractional-order systems and pi/sup/spl lambda//d/sup/spl mu//-controllers, IEEE Transactions on automatic control, vol. 44, no. 1, pp. 208–214, (1999).

[69] Podlubny I. : Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier, 1998.

[70] Podlubny I. :Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, NY, USA, 1993.

[71] Rehman M., Khan R., and Asif N., Three point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations, Acta Mathematica Scientia. 31 (2011) 1337–1346.

[72] Salem A., and Alghamdi B. :Multi-strip and multi-point boundary conditions for fractional Langevin equation, Fractal and Fractional. 4 (2020) 18.

[73] Samet B., Aydi H. : Lyapunov-type inequalities for an anti-periodic fractional boundary value problem involving ψ-Caputo fractional derivative. Journal of inequalities and applications. 2018(1), 1-11 (2018).

[74] Schmidt V. H., Drumheller J. E., and Howell F. L. : Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate, Physical Review B, vol. 4, no. 12, p. 4582, 1971.

[75] Sehgal V.M., and Singh S.P. : On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convexspaces, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

[76] Smart D.R. : Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[77] Sousa J.V.D.C., Capelas de Oliveira E.C. : A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator, Differ. Equ. Appl. 11 (2019), 87-106.

[78] Su X. : Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations. Applied Mathematics Letters, 22(1), 64-69 (2009).

[79] Su Y., LiQ., Liu X. : Existence criteria for positive solutions of p-Laplacian fractional differential equations with derivative terms. Adv. Differ. Equ. 2013, 119 (2013)

[80] Sun Y.P., Sun Y. : Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, Electronic journal of differential equations (2004) 133.

[81] Wongcharoen A., Ntouyas S.K., Tariboon J. :On coupled systems for Hilfer fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions, Journal of Mathematics, vol. 2020, Article ID 2875152, 12 pages, 2020.

[82] Wu J., Zhang X., Liu L., Wu Y., Cui Y. : The convergence analysis and error estimation for unique solution of a p-Laplacian fractional differential equation with singular decreasing nonlinearity, Bound Value Probl., 2018 (2018), 1–15.

[83] Xie J., Duan L. : Existence of solutions for fractional differential equations with p-Laplacian operator and integral boundary conditions, J. Funct. Spaces., 2020 (2020), 1–7.

[84] Yang J., Ma J. C., Zhao v, and Ge Y. : Fractional multi-point boundary value problem of fractional differential equations, Mathematics in Practice and Theory. 41 (2011) 188-194.

[85] Zeidler E. : Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York, Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[86] Zhou Y., Jiao F., Jing L. : Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. TMA 71(2009)3249-3256.

[87] Zhou Z., and Qiao Y. :Solutions for a class of fractional Langevin equations with integral and anti-periodic boundary conditions, Boundary Value Problems 2018 (2018).