N d'ordre : ............/22

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques

**THÈSE**

Présentée par

# ACHRAF AZANZAL

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

*Discipline : Mathématiques*

*Formation Doctorale : Mathématiques Physiques Appliquées*

*Spécialité : Équations aux dérivées partielles (EDP)*

# Contribution à l'étude mathématique des classes d'équations aux dérivées partielles découlant de la mécanique des fluides

Thèse présentée et soutenue le **Lundi 19 Décembre 2022** devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Pr. KHALID HILAL | Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal | President/Rapporteur |
| Pr. ELHOUSSINE AZROUL | Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Fès | Rapporteur |
| Pr. MOSTAFA EL MOUMNI | Faculté des Sciences, El Jadida | Rapporteur |
| Pr. LALLA SAADIA CHADLI | Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal | Examinateur |
| Pr. AHMED KAJOUNI | Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal | Invité |
| Pr. CHAKIR ALLALOU | Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal | Co-encadrant |
| Pr. SAID MELLIANI | Faculté des Sciences et Techniques, Béni Mellal | Encadrant |

# Publications et Communications

## Liste des publications

❶ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani : Well-posedness, analyticity and time decay of the 3D fractional magneto-hydrodynamics equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces with variable exponent. **J Elliptic Parabol Equ.** DOI : 10.1007/s41808-022-00172-x.

❷ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani : Well-posedness and blow-up of solutions for the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. **J Elliptic Parabol Equ** 8 (2022), 23–48. https ://doi.org/10.1007/s41808-021-00140-x

❸ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Adil Abbassi : Well-posedness and analyticity for generalized Navier-Stokes equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. **J. Nonlinear Funct. Anal.** 2021 (2021), Article ID 24.

❹ **Achraf AZANZAL**, Adil Abbassi, Chakir Allalou : Existence of Solutions for the Debye-Hückel System with Low Regularity Initial Data in Critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. **Nonlinear Dynamics and Systems Theory**, 21 (2021), 367-380.

❺ **Achraf AZANZAL**, Adil Abbassi, Chakir Allalou : On the Cauchy problem for the fractional drift-diffusion system in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. International **Journal On Optimization and Applications**, 1(2021), 28.

❻ **Achraf AZANZAL** Adil Abbassi, Chakir Allalou : Gevrey Class Regularity for the 2D Subcritical Dissipative Quasi-geostrophic Equation in Critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. In : Melliani, S., Castillo, O. (eds) Recent Advances in Fuzzy Sets Theory, Fractional Calculus, Dynamic Systems and Optimization. ICPAMS 2021. **Lecture Notes in Networks and Systems**, vol 476. Springer, Cham (2023). https ://doi.org/10.1007/978-3-031-12416-7-5.

❼ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani : Global well-posedness, Gevrey class regularity and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier-Besov spaces. **Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.** DOI : 10.1007/s40590-022-00468-x.

❽ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani. Global well-posedness and asymptotic behavior for the 2D subcritical dissipative quasi-geostrophic equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. **Journal of Partial Differential Equations**. DOI : 10.4208/jpde.v36.n1.1.

## Liste des articles acceptés

❶ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani. Gevrey class regularity and stability for the Debye-Hückel system in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**.

❷ Fatima Ouidirne, **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Mohamed Oukessou. Sobolev-type Embedding in Besov-Morrey spaces with variable exponents. **Special Issue of the journal Advanced Mathematical Models and Applications.**

❸ Ftima Ouidirne, **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Mohamed Oukessou. Well-posedness and analyticity for the viscous primitive equations of geophysics in critical Fourier-Besov-Morrey Spaces with variable exponents. Int. J. Nonlinear Anal. Appl.

## Articles soumis pour publication

❶ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani. Existence, analyticity, long time decay and blow up of solutions for the parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in Lei–Lin spaces. Z. Angew. Math. Phys.

❷ **Achraf AZANZAL**, Chakir Allalou, Said Melliani. Global well-posedness, Gevrey class regularity for the Debye-Huckel system in variable Fourier-Besov-Morrey spaces. J. Evol. Equ.

## Liste des communications

① "Existence of Solutions for the Debye-Huckel System with Low Regularity Initial Data in Fourier-Morrey-Besov spaces". The 1st Conference in Applied Mathematics to Finance, Marketing and Economics ICAMFME20, EL JADIDA - Morocco, 26 - 27 November 2020.

② "On the Cauchy problem for the fractional drift-diffusion system in critical Fourier-Besov-Morrey spaces". Third Edition of the International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science ICRAMCS'2021, Morocco, March 26-27, 2021.

③ "Long time behavior of the solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces". The International Conference on PDE and Applications, Modeling and Simulation (ICPAMS). Béni Mellal, Morocco, June 2-3, 2021

④ "Global mild solutions of quasi-geostrophic equation". Nineteenth day of mathematics and applications (JMA21), 2021.

⑤ "Self-similar solutions and stability for global solutions for active scalar equations in Fourier-Besov-Morrey spaces". International Conference on Mathematics and Data Science held on October 28-30, 2021 (ICMDS'21).

⑥ "Algebra Properties in Fourier-Besov-Morrey Spaces and Their Applications". Fourth Edition of the International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science ICRAMCS 2022, March 24-25-26, 2022.

⑦ "On the 2D critical and supercritical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier-Besov-Morrey spaces". The 2nd editoin of the international congress on dynamical systems (ICDS), EL Jadida, Morocco 22-24 November, 2022

# Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur de thèse Monsieur **Said MELLIANI**, Doyen de la Faculté de Sciences et Techniques et directeur de laboratoire de "Mathématiques Appliqués et Calcul Scientifique (LMACS)" pour ses investissements dans ce travail durant toute la période de la thèse et par ses orientations, pour son aide appréciable, malgré ses préoccupations administratives et ses nombreuses charges.

Ma gratitude revient aussi au professeur **Mr. Chakir ALLALOU**, qui a toujours répondu patiemment à mes interrogations et m'a apporté maintes éclairages. Je lui serai éternellement reconnaissant pour sa présence, sa patience et sa prévenance.

Monsieur **KHALID HILAL**, je vous remercie d'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse et d'être président ce jury et pour vos discussion scientifiques, vos commentaires et vos suggestions.

Je remercie Monsieur **ELHOUSSINE AZROUL** et Monsieur **MOSTAFA EL MOUMNI** pour avoir accepté d'être rapporteurs, pour m'avoir aidé à améliorer cette thèse mais aussi pour m'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Madame **LALLA SAADIA CHADLI** pour le grand honneur qu'elle me fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur **AHMED KAJOUNI** d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

J'adresse tout mes respect à tout mes professeurs qui m'ont enseigné du primaire jusqu'à temps présent.

Je désire aussi remercier tous les membres du Laboratoire Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS), en particulier les professeurs, pour leur efficacité. Il fut agréable de profiter de leurs compétences pour faciliter mon travail au quotidien.

Mes derniers remerciements s'adressent à toute ma famille et en particulier à la personne qui compte pour moi toujours ma maman et à mon cher père pour leur éducation, leur

sacrifice et leur soutien constant inconditionnel tout le long de mes études secondaires et supérieurs et leur amour inconditionnel qui m'ont aidé à affronter les moments difficiles que j'ai rencontré. Aucun mot ne suffira à exprimer ma reconnaissance envers eux. À mes sœurs **HOUDA** et **NASSIMA** et mon frère **ABD ELHAMID** qui ont tous contribué à l'aboutissement de ce travail et qui m'ont apporté leur aide et qui m'ont soutenu tout au long de ces années d'études.

Achraf AZANZAL

# Abstract

The aim of this thesis is to study various problems of nonlinear partial differential equations arising from fluid dynamics of the parabolic and elliptic-parabolic type involving the fractional Laplacian operator, such as the Debye-Hackel system (DHS), quasi-geostrophic equations (QGE), generalized Navier-Stokes equations (grNVS) and magnetohydrodynamics (grMHD).

Using harmonic analysis tools such as decomposition of Littlewood-Paley and the equivalent integral equations and resorting to the bilinear-type fixed point theory, we obtain some results of existence, uniqueness, analyticity, stability and asymptotic behavior of the global solutions.

This work is based on a study in the theory of functional spaces, mainly concerns Fourier-Besov-Morrey spaces (classical and generalized) and their application to this partial differential equations $\big($(DHS),(QGE),(grNVS),(grMHD)$\big)$. These spaces generalize a class of functional spaces that have been known before as Fourier-Besov spaces, Lei-lin spaces, Hölder spaces, Hölder-Zygmund spaces, Sobolev spaces, Sobodekij spaces, Bessel potential spaces. In some sense, all these spaces are related to the usual Lebesgue space. The Fourier-Besov-Morrey space is constructed via a type of localization on Morrey spaces as well as the Littlewood-Paley decomposition.

**Keywords :** Debye-Hückel system, Quasi-géostrophiques, magnétohydrodynamiques , Navier-Stokes, Littlewood Paley, mild solution, existence, uniqueness, Analyticity, stability, asymptotic behaviour, Classical Fourier-Besov-Morrey spaces, Fourier-Besov-Morrey spaces with variable exponents, Lei-Lin spaces.

# Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de divers problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires découlant de la dynamique des fluides du type parabolique et elliptique-parabolique faisant intervenir l'opérateur Laplacian fractionnaire, comme les équations de Debye-Hückel (DHS), de quasi-géostrophiques (QGE), de Navier-Stokes généralisées (grNVS) et de la magnétohydrodynamiques généralisées (grMHD).

À l'aide de méthodes d'analyse harmonique basées sur la décomposition de Littlewood-Paley et en utilisant les équations intégrales équivalentes et en recourant à la théorie des points fixes de type bilinéaire, nous obtenons certains résultats d'existence, d'unicité, d'analyticité, de stabilité et de comportement asymptotique des solutions globales.

Ce travail est basé sur une étude dans la théorie des espaces fonctionnels, concerne principalement les espaces de Fourier-Besov-Morrey (classiques et généralisées) et leurs application sur ces équations aux dérivées partielles $\big($(DHS), (QGE), (grNVS), (grMHD)$\big)$. Ces espaces généralisent une classe d'espaces fonctionnels qui ont été connu avant comme les espaces de Fourier-Besov, les espaces de Lei-Lin, les espaces de Hölder, les espaces de Hölder-Zygmund, les espaces de Sobolev, les espaces de Sobodekij, les espaces potentiels de Bessel. Dans certain sens, tout ces espaces sont liés à l'espace de Lebesgue usuelle. L'espace de Fourier-Besov-Morrey est construit via une type de localisation sur les espaces de Morrey ainsi que la caractérisation de Littlewood-Paley.

**Mots clés :** Debye-Hückel, Quasi-géostrophiques, Magnétohydrodynamiques , Navier-Stokes, Existence, Unicité, Analyticité, Stabilité, Comportement Asymptotique, Espace de Fourier-Besov-Morrey classique, Espace de Fourier-Besov-Morrey a exposants variables, Espace de Lei-Lin.

# Notations & Abbreviations

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$$

deux fonctions vectorielles.

- $v_t$ : dérivée partielle de $v$ par rapport à t avec $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$.
- $\Delta v$ : Laplacien de $v$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + ...\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

- $(v \cdot \nabla)v$ : le terme bilinéaire

$$(v.\nabla)v = v_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v}{\partial x_3} + ...v_n\frac{\partial v}{\partial x_n}.$$

- $u \otimes v$ : produit tensoriel entre $v = (v_1, v_2, v_3, ...v_n)$ et $u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} (u_1v_1) & (u_2v_1) & (u_3v_1) & ... & (u_nv_1) \\ (u_1v_2) & (u_2v_2) & (u_3v_2) & ... & (u_nv_2) \\ (u_1v_3) & (u_2v_3) & (u_3v_3) & ... & (u_nv_3) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ (u_1v_n) & (u_2v_n) & (u_3v_n) & ... & (u_nv_n) \end{pmatrix}.$$

- $\nabla \cdot (u \otimes v)$ : divergence du produit tensoriel $u \otimes v$. On a :

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = \begin{pmatrix} \partial_1(u_1v_1) & \partial_2(u_2v_1) & \partial_3(u_3v_1) & ... & \partial_n(u_nv_1) \\ \partial_1(u_1v_2) & \partial_2(u_2v_2) & \partial_3(u_3v_2) & ... & \partial_n(u_nv_2) \\ \partial_1(u_1v_3) & \partial_2(u_2v_3) & \partial_3(u_3v_3) & ... & \partial_n(u_nv_3) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \partial_1(u_1v_n) & \partial_2(u_2v_n) & \partial_3(u_3v_n) & ... & \partial_n(u_nv_n) \end{pmatrix} = (\nabla.u)v + (u.\nabla)v.$$

- $\nabla p$ : le gradient de $p$, $p$ fonction scalaire.

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}, ...\frac{\partial p}{\partial x_n}\right).$$

- $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ : transformée de Fourier de f

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

- $\mathcal{F}^{-1}(f)$ : transformée inverse de Fourier de f

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

- $(-\Delta)^\alpha$ : désigne le Laplacien fractionnaire défini par :

$$\widehat{(-\Delta)^\alpha u(t}, \xi) = |\xi|^{2\alpha}\widehat{u(t,\xi)}.$$

- $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} \quad j = 1, 2, 3, .., n,$ où $i^2 = -1$.
- $g(D)f := \mathcal{F}^{-1}(g\widehat{f})$.
- $R_j = D_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \quad j = 1, 2, 3, .., n$ : les transformations de Riez.
- $\mathbb{P} = id - \nabla\Delta^{-1}\nabla$ : l'opérateur Leray-Hopff.
- $*$ : l'opérateur de convolution.
- $S(t) = \exp(t\Delta) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|x|}{4t}\right) *$ : semi-groupe de la chaleur.
- $\mathrm{supp}(f)$ support de la fonction $f : E \longrightarrow F$

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in E, \quad f(x) \neq 0_F\}}.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ : espace des fonctions de la classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ : espace des fonctions de la classe de Schwartz i.e $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ : est l'ensemble des distributions tempérées.
- $\mathcal{P}$ : désigne l'ensemble des polynômes de $n$ variables à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $V \lesssim W$ : signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $V \leq CW$.
- $A \sim B$ : signifie qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que $C_1B \leq A \leq C_2B$.
- $p'$ : désigne le conjugué de p vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ pour $1 \leq p \leq \infty$.
- $[p]$ : désigne la partie entière de p.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ : espace de Lebesgue, autrement dit, l'ensemble des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

- $\ell^q$ : l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que

$$\|(a_k)_k\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Si X est un espace de Banach

- $L^p(0,T;X) = \left\{ f : (0,T) \to X \text{ mesurable} \, ; \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$.
- $L^\infty(0,T;X) = \left\{ f : (0,T) \to X \text{ mesurable} \, ; ess - \sup_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_X < \infty \right\}$.
- $C^k([0,T];X)$ : espace des fonctions k-fois continûment différentiables de $[0,T] \to X$.
- $\mathcal{D}([0,T];X)$ : espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans $[0,T]$.

# Table des matières

# Introduction générale

Dans ce travail, nous étudions différentes équations aux dérivées partielles issues de la dynamique des fluides. Plus précisément, nous considérons les modèles suivants :

- Le système de Debye-Hücke, qui a été formulé par P. Debye et E. Hücke à la fin du dix-neuvième siècle comme modèle de base pour l'électrodiffusion des ions dans les électrolytes.
- Les équations quasi-géostrophiques bidimensionnelles, qui représentent l'évolution de la température de l'écoulement des fluides atmosphériques et océaniques sur la frontière bidimensionnelle d'un demi-espace tridimensionnel en rotation rapide.
- Les équations de Navier-Stokes généralisées qui donnent une description du mouvement des fluides, elles étudient donc la variation dans le temps et dans l'espace de certaines quantités physique.
- Les équations magnétohydrodynamiques (grMHD), qui décrivent le comportement macroscopique des fluides incompressibles électriquement conducteurs dans un champ magnétique, est une généralisation du système classique incompressible MHD ($\alpha$ = 1). La magnétohydrodynamique (MHD) est une branche des Sciences Physiques qui étudie le mouvement des fluides conducteurs de champs électromagnétiques (liquides ou gazeux). Ces fluides sont omniprésents dans l'univers et se présentent sous forme de gaz ionisés, appelés plasmas. Ils constituent plus de 99% de la matière connue dans l'univers, sous diverses formes : gaz des étoiles, vent solaire, aurores boréales etc. Le physicien Suédois Hannes Alfv'en a été le premier à utiliser le terme magnéto-hydrodynamique, en 1942 [5]. Il a reçu le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux sur le sujet.

La préoccupation première du mathématicien confronté à une équation aux dérivées partielles est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés et d'y démontrer l'existence et l'unicité de la solution, et de voir sous quelles conditions supplémentaires les solutions obtenues sont stables. L'analyticité de la solution est également un sujet important développé par plusieurs chercheurs (voir [94]). Dans cette thèse, nous allons démontrer la régularité Gevrey (l'analyticité des solutions) pour les équations aux dérivées partielles présenter ci-dessus. La technique de Gevrey nous permet d'éviter l'estimation récursive des dérivées d'ordre supérieur (toute dérivée d'ordre quelconque de la solution $(v, w)$ a le même comportement que $(v, w)$ dans un certain sens), voir [104]. Avant de rentrer dans le vif des démonstrations, nous présentons brièvement un aperçu de quelques résultats classiques de ces équations.

Le première chapitre est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base sur les espaces de Besov-Morrey $\mathcal{N}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$, les espaces de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{F}\mathcal{N}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$, et les espaces de Lei-Lin $\mathcal{X}^s$.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au problème de Cauchy pour le système de Debye-Hückel (DHS) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = -\nabla \cdot (v \nabla \phi) & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \partial_t w - \Delta w = \nabla \cdot (w \nabla \phi) & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \Delta \phi = v - w & \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) & \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où les fonctions inconnues $v = v(x, t)$ et $w = w(x, t)$ désignent respectivement les densités de l'électron et du trou dans les électrolytes, $\phi = \phi(x, t)$ désigne le potentiel électrique, $v_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les données initiales. Notons que la fonction $\phi$ est déterminée par l'équation de Poisson dans la troisième équation de (0.0.1), et qu'elle est donnée par

$$\phi = (-\Delta)^{-1}(w - v) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2}\mathcal{F}(w - v)). \tag{0.0.2}$$

Ainsi, le système (0.0.1) peut être réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = -\nabla \cdot \big(v \nabla (-\Delta)^{-1}(w - v)\big) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \partial_t w - \Delta w = \nabla \cdot \big(w \nabla (-\Delta)^{-1}(w - v)\big) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot v = \nabla \cdot w = 0 & \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) & \text{dans } \ \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.0.3}$$

W. Nernst et M. Planck ont introduit le système de Debye-Hückel à la fin du XIXe siècle comme modèle fondamental de la diffusion ionique dans un électrolyte [44]. Il peut également être obtenu à partir de la modélisation mathématique des semi-conducteurs [91], de la physique des plasmas [59], et de la chimiotaxie [39]. Le système (0.0.1) a été étudié de

manière approfondie dans divers espaces fonctionnels. Karch dans [75] a établi l'existence et l'unicité des solutions globales du système (0.0.1) pour des données initiales dans les espaces de Besov $B^s_{p,\infty}$ avec la condition $-1 < s < 0$ et $p = \frac{n}{s+2}$. Plus tard, Zhao et al. [106] ont établi le caractère bien posé global et local du système (0.0.1) dans l'espace critique de Besov $B^{-2+\frac{n}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ avec $2 \leq p < 2n$ et $1 \leq r \leq \infty$ (ce qui a amélioré les résultats correspondants de Karch obtenus dans [75]). Kurokiba et Ogawa dans [76] ont obtenu des résultats similaires pour les données initiales dans les espaces critiques de Lebesgue et de Sobolev. D'autres recherches connexes peuvent être consultées dans [80, 84]. Il faut noter que pour les équations de Navier-Stokes, il n'existe pas de résultat d'existence pour les données initiales dans un espace avec un indice de régularité $s < -1$. En fait, le terme non linéaire de (0.0.1) semble d'être plus étroitement lié à l'équation de la chaleur non linéaire quadratique ($\sim u^2$) qu'aux équations de Navier-Stokes ($\sim u \cdot \nabla u$). Ainsi, le système de Debye-Hückel a une meilleure propriété que les équations de Navier-Stokes en ce qui concerne l'existence des solutions.
Nous mentionnons ici que si $w$ est nul ($w = 0$), le système (0.0.1) devient le modèle célèbre de chimiotaxie de Keller-Segel :

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - \nabla \cdot (v \nabla \phi) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \Delta \phi = v & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Dans le papier [24], le caractère bien posé local du système (0.0.4) a été prouvé dans le cas tridimensionnel. Iwabuchi et Nakamura [65, 66] obtiennent la bien posée globale de (0.0.4) pour des petites données initiales dans l'espace critique $\dot{B}^{-2+\frac{n}{p}}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$.
Notre premier objectif dans ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions pour (0.0.1) avec des données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey. Ensuite, nous montrons l'analyticité des solutions du système (0.0.1) en utilisant la méthode d'estimation de Gevrey [9], qui a été introduite pour la première fois par Foias et Temam [54]. Depuis cela, la technique de la classe de Gevrey est devenue une approche importante dans l'étude de l'analyticité spatiale des solutions, qui a ensuite été développée par plusieurs chercheurs, notamment en ce qui concerne les équations de Navier-Stokes (NSE). Gruji et Kukavica [60] ont montré la régularité de Gevrey dans $L^p$ pour les NSE, Bae [18] a prouvé l'estimation de Gevrey de la solution pour les NSE dans l'espace critique de Lie-Lin $\mathcal{X}^{-1}$. Des études similaires sur l'analyticité des solutions pour les NSE peuvent être consultées dans Lemarie-Rieusset [77]. Biswas [25] a établi la régularité Gevrey des solutions d'une grande classe d'équations

dissipatives dans des espaces de type Besov. En 2016, Zhao [108] a prouvé que les solutions globales du système (0.0.1) sont analytiques dans les espaces de Besov $\dot{B}_{p,r}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < 2n$ et $1 \leq r \leq \infty$. Récemment, Cui et Xiao [42] ont établi la régularité Gevrey pour (0.0.1) dans l'espace de Fourier-Besov $\mathcal{F}B^s_{p,q}$. En nous inspirant de cela, nous établirons la régularité Gevrey pour le système (0.0.1) dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{F}\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}$ (plus large que les espaces de Fourier-Besov $\mathcal{F}B^s_{p,q}$, c'est-à-dire, $\mathcal{F}\mathcal{N}^s_{p,0,q} = \mathcal{F}B^s_{p,q}$ ). Le deuxième objectif de ce chapitre est la décroissance des normes de Fourier-Besov-Morrey des solutions. Enfin, nous prouvons le critère de blow-up de la solution locale du système de Debye-Hückel (0.0.1). Dans un sens approprié, nos résultats étendent/ complètent certains travaux antérieurs [42, 108, 109, 110, 51, 53].

Le troisième chapitre de la thèse est consacré à l'étude de l'existence des solutions de l'équation quasi-géostrophique dissipative, l'étude sera faite dans l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. L'équation sans dissipation a été introduite par Constantin, Majda, et Tabak en 1994 (voir [37]). Elle s'écrit de la façon suivante :

$$(QG) : \begin{cases} \partial_t\theta + K[\theta]\cdot\nabla\theta = 0, \quad x\in\mathbb{R}^2, t>0, \\ K[\theta] = \left(\partial_{x_2}\Lambda^{-1}\theta, -\partial_{x_1}\Lambda^{-1}\theta\right), \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \end{cases} \tag{0.0.5}$$

où $\Lambda^{-1}$ est un opérateur défini par une puissance fractionnaire de $-\Delta$ :

$$\Lambda^{-1}v = (-\Delta)^{-1/2}v, \quad \mathcal{F}(\Lambda^{-1}v) = \mathcal{F}((-\Delta)^{-1/2}v) = |\xi|^{-1}\mathcal{F}(v).$$

L'inconnue est $\theta : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est alors une fonction scalaire. Cette équation est un cas particulier d'équations d'évolutions décrivant la variation de température d'un fluide non homogène dans un demi-espace en rotation rapide (strongly rotating fluids) avec des petits nombres de Rossby et Ekman (voir [89]). La vitesse du fluide est modélisée par $K[\theta]$ et s'exprime en fonction des transformées de Riesz de $\theta$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K[\theta] &= \left(\partial_{x_2}\Lambda^{-1}\theta, -\partial_{x_1}\Lambda^{-1}\theta\right) \\ &= (-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta). \end{aligned}$$

Autrement dit, la vitesse $K[\theta]$ s'écrit comme la dérivée perpendiculaire d'une fonction de flot $\Psi$ :

$$K[\theta] = \nabla^{\perp}\Psi = \begin{bmatrix} -\partial_{x_2}\Psi \\ \partial_{x_1}\Psi \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $K[\theta]$ est de divergence nulle, c'est-à-dire $\nabla \cdot K[\theta] = 0$. Cette hypothèse traduit l'incompressibilité du fluide. La fonction de flot $\Psi$ est définie comme une convolution entre $\theta$ et un noyau singulier $K$ :

$$\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\theta(y)dy.$$

Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, le noyau $K$ n'est rien d'autre que le potentiel de Riesz d'ordre 1 défini par

$$K(y) = \frac{C}{|y|}, \text{ où } C > 0.$$

Ce qui implique (voir Stein [92])

$$\Psi = (-\Delta)^{-1/2}\theta.$$

L'intêret mathématique d'un tel modèle vient du fait que cette équation est étroitement liée à l'équation d'Euler 3D écrite en terme de vorticité ($\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$). Les équations d'Euler 3D pour un fluide incompressible de vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et de pression $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ s'écrivent

$$(\mathcal{E}_u) : \begin{cases} \partial_t u(x,t) + u.\nabla u + \nabla \pi = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Cette équation en terme de vorticité $w$ prend la forme suivante

$$(\mathcal{E}_w) : \begin{cases} \partial_t w(x,t) + u.\nabla w - w\nabla u = 0, \\ w = \mathrm{rot}(u), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Par ailleurs, en prenant la dérivée orthogonale $\nabla^\perp\theta = (-\partial_2\theta, \partial_1\theta)$ dans l'équation (QG) on obtient l'équation suivante

$$(\nabla^\perp QG) : \begin{cases} \partial_t \nabla^\perp\theta(x,t) + u.\nabla\nabla^\perp\theta - \nabla u \nabla^\perp\theta = 0, \\ \nabla^\perp\theta = \Lambda\theta, \\ \nabla^\perp\theta(0,x) = \nabla^\perp\theta_0(x). \end{cases}$$

C'est ainsi que Constantin, Majda et Tabak [37] ont remarqué que ces deux équations ont le même type de non linéarité et que la vorticité $w$ dans l'équation $\mathcal{E}_w$ joue un rôle analogue à $\nabla^\perp\theta$ dans le cas de l'équation $\nabla^\perp QG$. Ce lien peut s'interpréter autrement, les lignes de niveaux de $\theta$ sont analogues aux lignes de vortex de l'équation d'Euler 3D puisque $w$ est tangente aux lignes de vortex et $\nabla^\perp\theta$ est tangent aux lignes de niveaux de $\theta$. La seconde motivation est purement physique, elle est celle de l'étude de la frontogénèse correspondant la formation en temps fini de discontinuité du front de température à l'interface entre les courants chauds et les courants froids.

Etant donné que l'équation quasi-géostrophique ne possède aucun terme régularisant, il est naturel de chercher des solutions de régularité minimale. L'approche classique consiste à montrer l'existence de solutions faibles. Une solution $\theta$ est dite faible si elle vérifie l'équation (QG) au sens des distributions, dans ce cas, en multipliant l'équation (QG) par une fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, en intégrant par parties et en intégrant en temps $s \in [0,T]$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\theta(T,x)dx - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x)\theta_0(x)dx = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} K[\theta]\theta(x,s)\nabla\phi dxds.$$

L'existence de solutions faibles a été établie par Resnick en 1995 dans [90]. Il a démontré que pour tout $T > 0$ et pour toute donnée initiale $\theta_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, il existe une solution faible $\theta \in L^\infty\left([0,T], L^2\right)$. Montrer la régularité de ces solutions faibles est un problème très difficile et encore ouvert pour l'équation quasi-géostrophique sans dissipation. C'est une des raisons pour laquelle l'idée naturelle consistant à régulariser l'équation en y ajoutant un terme dissipatif a été longuement exploitée. Le modèle régularisé de l'équation quasi-géostrophique dissipative a été introduit par Constantin et Wu dans [29]. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$(QG)_\alpha : \begin{cases} \partial_t\theta + K[\theta]\cdot\nabla\theta + \mu\Lambda^{2\alpha}\theta = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ K[\theta] = \left(-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta\right), \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \end{cases}$$

où le réel $\alpha$ est un paramètre fixé, $\mu > 0$ est le coefficient dissipatif et l'opérateur $\Lambda^{2\alpha}$ est définie par :

$$\Lambda^{2\alpha}v = (-\Delta)^\alpha v, \quad \mathcal{F}(\Lambda^\alpha v) = \mathcal{F}((-\Delta)^\alpha v) = |\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(v).$$

Il est clair que le cas $\alpha$ petit est mathématiquement très intéressant à comprendre étant donné que dans le cas $\alpha$ petit, ou de façon équivalente quand la dissipation tend vers $0$ , l'équation quasi-géostrophique converge vers les équations de Navier-Stokes tridimensionnelle. Bien qu'artificiel, ce modèle est physiquement intéressant dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Le terme dissipatif étant alors de la forme $(-\Delta)^{1/2}\theta$, ce dernier modélise le pompage d'Ekman observable dans les courants marins par exemple. Ce phénomène apparaît lors de la compétition entre les vents qui soufflent à la surface des océans et la force de Coriolis (déviant l'eau à la surface des océans, vers la droite à l'hémisphère nord et vers la gauche à l'hémisphère sud) provoquant la remontée des eaux à la surface. Mathématiquement, la puissance $\alpha = \frac{1}{2}$ corresponds à l'indice pour lequel le terme non linéaire et la dissipation sont du même ordre (dans le sens où $K[\theta]$ et $(-\Delta)^{1/2}\theta$ sont deux opérateurs dérivant une fois). En utilisant la technique de De Giorgi [45], Caffarelli et Vasseur [27] ont démontré en 2006 que les solutions faibles construites par Resnick sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Plus précisement, ils étudient l'équation quasi-géostrophique sur $\mathbb{R}^n$ avec une vitesse $u \in L^\infty BMO$ qui est alors une équation de transport générale. Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ correspond donc à la régularisation minimale garantissant l'existence de solutions faibles globales régulières. Les remarques précédentes motivent la définition suivante :

**Définition 0.0.1** *On définit les 3 cas suivants :*

- *Le cas* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ *est le cas sur-critique*
- *Le cas* $\alpha = \frac{1}{2}$ *est le cas critique*
- *Le cas* $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ *est le cas sous-critique.*

Les travaux sur l'étude de l'équation quasi-géostrophique en particulier les questions mathématiques qui se posent naturellement lors de l'étude du problème de Cauchy à savoir les questions de régularité, d'existence, de blow-up, d'unicité, des solutions (fortes, faibles, mild...) ont fait l'objet ces dernières années de nombreux travaux. L'objectif principal étant de mieux comprendre les questions ouvertes sur l'équation d'Euler 3D. Lorsque l'on cherche à étudier les questions d'existence, globale ou locale, de solutions (fortes, faibles, mild) il est important de connaître le scaling de l'équation en question et de rechercher les espaces critiques (c'est-à-dire dont la norme est invariante par le changement d'échelle de l'équation). Dans le cas de l'équation quasi-géostrophique, nous avons le scaling suivant : si $\theta$ est une solution de $(QG)_\alpha$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ issue de la donnée initiale $\theta_0$ alors la fonction $\theta_\lambda(t, x) = \lambda^{2\alpha-1}\theta\left(\lambda^{2\alpha}t, \lambda x\right)$ est solution de $(QG)_\alpha$ issue de la donnée initiale $\theta_\lambda(0, x) = \lambda^{2\alpha-1}\theta_0(\lambda x)$ sur $\left(0, \lambda^{-2\alpha} \times \mathbb{R}^2\right)$. Donc $L^{\frac{2}{2\alpha-1}}$, $\dot{H}^{2-2\alpha}$, $\dot{B}^{1-2\alpha+\frac{2}{p}}_{p,q}$ où $p, q \in [1, \infty]$ et $\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}$ où $p, q \in [1, \infty]$ et $0 \leq \lambda < 2$ sont des espaces critiques pour (QG). A cet égard, il existe plusieurs articles sur l'existence global et local pour (QG) dans différents espaces critiques. Par exemple :

-Dans le cas sous critique, correspondant au cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, les questions d'existence globale et d'unicités sont bien comprises. Ce cas correspond aux valeurs de $\alpha$ pour lesquelles la dissipation est un opérateur qui dérive strictement plus qu'une fois, alors que le terme non linéaire contient exactement une dérivée. Constantin et Wu ont démontré dans [29] que pour toute donnée initiale régulière la solution restait régulière pour tout temps. On peut par exemple rappeler les résultats dans les espaces de Lebesgue $L^{\frac{2}{2\alpha-1}}$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$ par Carrillo and Ferreira [30], les espaces de Sobolev $\dot{H}^{2-2\alpha}$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$ par Ju [67]. En 2015, Benameur and Benhamed [21] ont prouvé l'existence globale de (QG) pour les petites données initiales

et l'existence locale pour les grandes données initiales dans l'espace critique de Lei-Lin $\mathcal{X}^s$ for $s = 1 - 2\alpha$, qui sont définis comme suit :
Soit $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{X}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) ; \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty \right\},$$

avec la norme

$$\|f\|_{\mathcal{X}^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| d\xi. \tag{0.0.6}$$

De plus, les auteurs de [21] ont montré un critère de blow-up de la solution locale de (QG) dans les espaces de Lei-Lin $\mathcal{X}^{1-2\alpha}$. D'autres résultats connexes peuvent être trouvés dans [21, 20, 56, 86]. Nous mentionnons que le travail [7] couvre la dissipation critique $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ dans le contexte du système de Boussinesq-Coriolis dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey. Rappelons qu'une des méthodes pour montrer l'existence et l'unicité de solutions faibles consiste à écrire le problème de Cauchy sous forme intégrale et de résoudre le nouveau problème par une méthode de point fixe, une telle solution est appelée solution mild. Plus précisément, on dit qu'une solution $\theta$ est une solution mild de l'équation $(QG)_\alpha$ si elle vérifie l'équation intégrale suivante

$$\theta(t) = S_\alpha(t)\theta_0 + B(\theta, \theta)(t), \tag{0.0.7}$$

où $S_\alpha := e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ désigne l'opérateur de semi-groupe de la chaleur fractionnaire, qui peut être considéré comme l'opérateur de convolution avec le noyau $k_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^{2\alpha}})$, et B est la forme bilinéaire suivante

$$B(\theta, g)(t) = -\int_0^t S_\alpha(t-\tau) \left(K[\theta] \cdot \nabla g\right)(\tau) d\tau. \tag{0.0.8}$$

-Dans le cas critique $\alpha = \frac{1}{2}$, l'un des premier résultat (valable aussi dans le cas sur critique $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ) a été celui de Resnick en 1995 [90] dans lequel il a démontré l'existence globale de solutions faibles avec données arbitrairement grandes dans $L^\infty \cap L^2$ et vérifiant une inégalité d'énergie de type "Leray". En 2006, Marchand [85] a étendu le résultat d'existence de solutions faibles de Resnick [90]. Il a démontré que pour toute donnée initiale $\theta_0 \in L^p$ avec $p > \frac{4}{3}$ et pour tout $t \in (0, T)$, il existe une solution faible globale vérifiant l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\theta(x,t)\|_p^p + pk \int_0^t \int \theta|\theta|^{p-2} \Lambda^{2\alpha}\theta dx ds \leq \|\theta_0\|_p^p.$$

Si $\theta_0 \in H^{-1/2}$ alors il existe une solution $\theta \in L^\infty\left((0,T), H^{-1/2}\right) \cap L^2, H^{\alpha-1/2})$ satisfaisant pour tout $t \in (0, T)$ l'inégalité d'énergie

$$\|\theta(x,t)\|_{H^{-1/2}} + pk \int_0^t \int \left|\Lambda^{\alpha-\frac{1}{2}}\theta\right|^2 dx ds \leq \|\theta_0\|^2_{H^{-1/2}}.$$

-Dans le cas sur-critique ($0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$). On a des résultats d'existence globale lorsque les données initiales sont petites ou existence locale lorsque les données intiales sont grandes. A. Córdoba et D. Córdoba ont montré dans [38] qu'il existe une solution globale si la donnée est dans l'espace de Sobolev $H^m$ où $m < 2$. Le reste de la littérature semble se restreindre aux résultats obtenus par Chae et Lee [31] dans lequel il démontre que si la donnée initiale est petite dans l'espace critique $B^{2-\alpha}_{2,1}$ alors il existe une unique solution globale. Ce résultat a été amélioré par Ju dans [67] où il montre qu'il suffit que la donnée initiale soit petite dans $H^s$ avec $s > 2 - \alpha$. On peut aussi citer les résultats de Wu [98, 97], dans le premier article [98], il démontre que si $r > 1, 1 < q < \infty$ et $\theta_0 \in C^r \cap L^q$ avec une condition de petitesse sur cette norme alors il existe une solution globale. Dans le second [97], il améliore encore la condition, il suffit d'avoir une donnée initiale dans l'espace de Besov $B^2_{2,\infty} \cap B^s_{2,\infty}$ avec $s > 2-\alpha$. Plus récemment, en 2007, Hmidi et Keraani ont montré dans [61] que si $p \in [1,\infty]$ et $s \geq s^p_c$, avec $s^p_c = 1 + \frac{2}{p} - \alpha$ et si $\theta_0 \in \mathcal{X}^s_p$ alors il existe un $T > 0$ et une solution $\theta$ appartenant à

$$C\left([0,T];\mathcal{X}^s_p\right) \cap L^1\left([0,T];\dot{B}^{s+\alpha}_{p,1}\right).$$

Où

$$\mathcal{X}^s_p = \begin{cases} B^s_{p,1}, & \text{si } p < \infty \\ B^s_{\infty,1} \cap \dot{B}^0_{\infty,1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, sous la condition de petitesse

$$\|\theta_0\|_{\dot{B}^{1-\alpha}_{\infty,1}} \leq \eta$$

la solution devient globale. Leur preuve est basée sur une approche langrangienne (en introduisant une équation de transport-diffusion un peu plus générale) ainsi qu'une estimation d'un commutateur et des techniques issues du calcul paradifférentiel comme celle de [3] ou [62]. Les techniques de calculs paradifférentiels ont aussi permis à Constantin et Wu [29] de montrer un résultat de propagation de régularité (en 2007 aussi). Ils ont montré que si $\theta$ est une solution faible de type Leray-Hopf, à savoir

$$\theta \in L^\infty\left([0,\infty);L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \cap L^2\left([0,\infty);\dot{H}^\alpha\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$$

et si $\delta$ et $t_0$ sont deux nombres vérifiant $\delta > 1 - 2\alpha$ et $0 < t_0 < t < \infty$, alors la condition

$$\theta \in L^\infty\left([t_0,t]\,;C^\delta\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$$

implique que

$$\theta \in C^\infty\left((t_0,t] \times \mathbb{R}^2\right).$$

D'autres résultats ont été obtenu par Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang [35]. Ils ont montré que si $(\alpha, p, q) \in (0, 1] \times [2, \infty) \times [1, \infty)$ et si $\theta_0 \in B^{\sigma}_{p,q}$ avec $\sigma = \frac{2}{p} + 1 - \alpha$, alors il existe un temps $T > 0$ tel que $\theta(t, x)$ vérifie

$$\theta(t, x) \in C\left([0, T); B^{\sigma}_{p,q}\right) \cap \widetilde{L}^1\left(0, T; \dot{B}^{\frac{2}{p}+1}_{p,q}\right),$$

où le temps d'existence locale est borné par

$$\sup\left\{T' > 0 : \left\|\left(1 - e^{-\kappa c_p 2^{2\alpha j} T'}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{j\sigma}\|\Delta_j \theta_0\|_{L^p}\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leqslant c\kappa\right\}.$$

Si $\|\theta_0\|_{\dot{B}^{\sigma}_{p,q}} \leqslant \epsilon\kappa$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors la solution devient globale.
Dans ce chapitre, en utilisant l'équation intégrale équivalente et en recourant à la théorie des points fixes de type bilinéaire, nous obtenons l'existence globale de solutions pour l'équation QG (0.0.5) avec dissipation sous-critique et critique pour les petites données initiales et l'existence locale pour les grandes données initiales dans les espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}$. D'autre part, nous montrons un critère de blow-up de la solution locale de l'équation QG (0.0.5). De plus, nous étudions la stabilité des solutions globales pour (0.0.5) (voir [14]).

Dans le quatrième chapitre, nous étudions le problème d'existence globale pour le système généralisé de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu(-\Delta)^{\alpha} u = Q(u, u) & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.0.9}$$

où $u = u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x), ..., u^n(t, x))$, $\mu$ est une constante. L'opérateur bilinéaire $Q$ désigne l'application de la forme

$$Q^j(u, v) = \sum_{k,l,m=1}^{n} q^{j,m}_{k,l} \partial_m(u^k v^l), \quad j = 1, ..., n,$$

où

$$q^{j,m}_{k,l}(f) := \sum_{a,b=1}^{n} \beta^{j,m,a,b}_{k,l} \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{\xi_a \xi_b}{|\xi|^2}\right)\widehat{f}(\xi)\right)$$

et $\beta^{j,m,a,b}_{k,l}$ sont des nombres réels.
Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont un cas particulier de (0.0.10), en prenant

$$Q_{NS} = -\frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{div}(u \otimes v) + \mathrm{div}(v \otimes u))$$

avec le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ défini par la transformée de Fourier comme suit

$$\widehat{(\mathbb{P}u)}^j(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j} - 1)\frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2}\widehat{u_k}(\xi),$$

où $\delta_{k,j} = 1$ si $k = j$ et $\delta_{k,j} = 0$ si $k \neq j$ ; ainsi l'équation s'écrit

$$\begin{cases} u_t + \mu(-\Delta)^\alpha u = -\mathbb{P}\mathrm{div}(u \otimes u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si nous définissons les données initiales $u_0$ comme étant un champ de vecteurs de divergence libre ($\nabla \cdot u_0 = 0$), le système ci-dessus correspond exactement aux équations de Navier-Stokes incompressibles fractionnelles.

Pour les équations de Navier-Stokes classiques ($\alpha = 1, Q = Q_{NS}$), l'existence de solutions et la régularité ont été établies localement dans le temps et globalement pour des petites données initiales dans divers espaces fonctionnels, par exemple [57, 58, 69, 71, 11].

Comme pour le cas généralisé ($\alpha \neq 1, Q = Q_{NS}$), Lions[83] a prouvé l'existence globale de solutions classiques en dimension 3 lorsque $\alpha \geq \frac{5}{4}$. Pour le cas important $\alpha < \frac{5}{4}$, Wu [100, 96] a étudié l'existence de solutions bien posées dans $\dot{B}_{p,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$. El Baraka et Toumlilin [49] obtiennent un résultat d'existence de solution global avec petites données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$. Inspirés par les travaux de Xiao [101] dans le cas classique $\alpha = 1$, Li et Zhai[81, 82] ont étudié (0.0.10) dans certains espaces critiques de type-Q pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, et Zhai [105] a montré l'existence de solutions dans $BMO^{-(2\alpha-1)}$ lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Yu et Zhai [103] ont prouvé le caractère bien posé dans le plus grand espace critique $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(2\alpha-1)}$ quand $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Zhou et Xiao [111] ont établie le caractère bien posé global pour les petites données initiales et le caractère bien posé local pour les grandes données initiales dans $F\dot{B}_{p,q}^{1-2\alpha+\frac{n}{p'}}$ lorsque $\frac{q'}{1+q'} < \alpha < \frac{q'}{1+q'}\min\{1+\frac{n}{p'}, 1+\frac{n}{2}\}$ pour $1 \leq p, q \leq \infty$ et lorsque $\frac{q'}{1+q'} < \alpha < \frac{q'}{1+q'}\min(1+\frac{n}{2p'})$ pour $1 \leq p, q \leq 2$. Les principaux résultats mentionnés dans ce chapitre étendent certains travaux dans les espaces de Fourier-Besov [110].

, nous étudions le problème d'existence globale pour le système généralisé de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu(-\Delta)^\alpha u = Q(u,u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.0.10}$$

où $u = u(t,x) = (u^1(t,x), u^2(t,x), ..., u^n(t,x))$, $\mu$ est une constante. L'opérateur bilinéaire $Q$ désigne l'application de la forme

$$Q^j(u,v) = \sum_{k,l,m=1}^{n} q_{k,l}^{j,m}\partial_m(u^k v^l), \quad j = 1, ..., n,$$

où

$$q_{k,l}^{j,m}(f) := \sum_{a,b=1}^{n} \beta_{k,l}^{j,m,a,b} \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{\xi_a \xi_b}{|\xi|^2}\right)\widehat{f}(\xi)\right)$$

et $\beta_{k,l}^{j,m,a,b}$ sont des nombres réels.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont un cas particulier de (0.0.10), en prenant

$$Q_{NS} = -\frac{1}{2}\mathbb{P}(\operatorname{div}(u \otimes v) + \operatorname{div}(v \otimes u))$$

avec le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ défini par la transformée de Fourier comme suit

$$\widehat{(\mathbb{P}u)^j}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,j} - 1)\frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2}\widehat{u_k}(\xi),$$

où $\delta_{k,j} = 1$ si $k = j$ et $\delta_{k,j} = 0$ si $k \neq j$ ; ainsi l'équation s'écrit

$$\begin{cases} u_t + \mu(-\Delta)^\alpha u = -\mathbb{P}\operatorname{div}(u \otimes u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si nous définissons les données initiales $u_0$ comme étant un champ de vecteurs de divergence libre ($\nabla \cdot u_0 = 0$), le système ci-dessus correspond exactement aux équations de Navier-Stokes incompressibles fractionnelles.

Pour les équations de Navier-Stokes classiques ($\alpha = 1, Q = Q_{NS}$), l'existence de solutions et la régularité ont été établies localement dans le temps et globalement pour des petites données initiales dans divers espaces fonctionnels, par exemple [57, 58, 69, 71, 11].

Comme pour le cas généralisé ($\alpha \neq 1, Q = Q_{NS}$), Lions[83] a prouvé l'existence globale de solutions classiques en dimension 3 lorsque $\alpha \geq \frac{5}{4}$. Pour le cas important $\alpha < \frac{5}{4}$, Wu [100, 96] a étudié l'existence de solutions bien posées dans $\dot{B}_{p,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$. El Baraka et Toumlilin [49] obtiennent un résultat d'existence de solution global avec petites données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$. Inspirés par les travaux de Xiao [101] dans le cas classique $\alpha = 1$, Li et Zhai[81, 82] ont étudié (0.0.10) dans certains espaces critiques de type-Q pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, et Zhai [105] a montré l'existence de solutions dans $BMO^{-(2\alpha-1)}$ lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Yu et Zhai [103] ont prouvé le caractère bien posé dans le plus grand espace critique $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(2\alpha-1)}$ quand $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Zhou et Xiao [111] ont établie le caractère bien posé global pour les petites données initiales et le caractère bien posé local pour les grandes données initiales dans $F\dot{B}_{p,q}^{1-2\alpha+\frac{n}{p'}}$ lorsque $\frac{q'}{1+q'} < \alpha < \frac{q'}{1+q'}\min\{1+\frac{n}{p'}, 1+\frac{n}{2}\}$ pour $1 \leq p, q \leq \infty$ et lorsque $\frac{q'}{1+q'} < \alpha < \frac{q'}{1+q'}\min(1+\frac{n}{2p'})$ pour $1 \leq p, q \leq 2$. Les principaux résultats mentionnés dans ce chapitre étendent certains travaux dans les espaces de Fourier-Besov [110].

Dans le dernier chapitre, nous considérons le problème de Cauchy pour les équations magnétohydrodynamiques incompressibles généralisées (grMHD) dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u + \mu(-\Delta)^\alpha u + \nabla\pi = (b \cdot \nabla)b & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ b_t + (u \cdot \nabla)b + \nu(-\Delta)^\alpha b = (b \cdot \nabla)u & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \nabla \cdot b = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = u_0, \ b|_{t=0} = b_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

où $u = (u_1, u_2, u_2)$ représente le champ de vitesse de l'écoulement, $b = (b_1, b_2, b_3)$ désigne le champ magnétique, $\pi$ désigne la fonction de pression, $\mu > 0$ désigne le coefficient de viscosité et $\nu > 0$ représente le coefficient de diffusivité, tandis que $u_0$ et $b_0$ sont respectivement la vitesse initiale et le champ magnétique initial avec divergence libre (c'est-à-dire $\nabla \cdot u_0 = 0$ et $\nabla \cdot b_0 = 0$). Pour simplifier et sans perte de généralité, nous ne considérons que le cas où $\mu = \nu = 1$.

Pour $\alpha = 1$, les équations magnétohydrodynamiques incompressibles généralisées expliquent mathématiquement pourquoi la terre possède un champ magnétique à grande échelle non nul dont la polarité s'inverse sur plusieurs centaines de siècles. Pour une explication plus détaillée, on peut se référer à [32] et à ses références. Notez que la première équation du système (0.0.11) exprime la conservation de la quantité de mouvement, la deuxième équation du système (0.0.11) illustre l'induction magnétique et la troisième équation du système (0.0.11) reflète la conservation de la masse.

Nous mentionnons que lorsque $b(x, t) = b_0(x) = 0$, le système (0.0.11) se réduit aux équations fractionnaires de Navier-Stokes qui contrôlent le mouvement des fluides (on peut les considérer comme la deuxième loi de Newton ($F = ma$) du mouvement des fluides) et qui ont été étudiées de manière approfondie dans un certain nombre d'espaces fonctionels. Leray [78] et Kato [72] ont étudié l'existence locale dans leurs travaux. Ensuite, dans [63] Hopf a établi l'existence globale des solutions faibles. L'existence globale de solutions fortes pour de petites données initiales est étudiée par de nombreux auteurs dans différents cadres fonctionels, par exemple l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$ par Fujita et Kato [55], espace de Lebesgue $L^3$ par Kato [68], espace $BMO^{-1}$ par Koch [73] et espace de Besov $B_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$ par Cannone [28]. L'analyse du système (0.0.11) nous aidera à mieux comprendre les équations de Navier-Stokes.

Rappelons que le système (0.0.11) possède la propriété de scaling qui signifie que si $(u, b, \pi)$ est une solution du système (0.0.11), alors le triplet $(u_\theta, b_\theta, \pi_\theta)$ où :

$$u_\theta(x, t) := \theta^{1-2\alpha} u(\theta^{-1}x, \theta^{-2\alpha}t), \quad b_\theta(x, t) := \theta^{1-2\alpha} b(\theta^{-1}x, \theta^{-2\alpha}t),$$

$$\pi_\theta := \theta^{2-4\alpha}\pi(\theta^{-1}x, \theta^{-2\alpha}t) \text{ pour } \theta \in \mathbb{R},$$

est aussi une solution du système (0.0.11) avec les données initiales

$$u_{0,\theta} := \theta^{1-2\alpha}u_0(\theta^{-1}x), \quad b_{0,\theta} := \theta^{1-2\alpha}b_0(\theta^{-1}x),$$

ce qui donne lieu à la notion d'espace critique pour (0.0.11). Cela signifie que les espaces fonctionnels conservent des normes invariantes sous le scaling ci-dessus. À cet égard, il existe une riche littérature sur le caractère bien posé global de (0.0.11) dans différents espaces critiques. Par exemple, Wang [99] a établi le caractère bien posé global dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^s$ avec $s \geq 3$, Lui et Zhao [79] obtiennent l'existence globale avec petites données initiales $(u_0, b_0)$ appartiennent aux espaces critiques de Fourier-Herz $B_p^{1-2\alpha}$ où $1 \leq p \leq 2$ et El-Baraka et Toumlilin [48, 46, 47] ont établi les résultats du caractère bien posé global avec petites données initiales appartenant aux espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}(\mathbb{R}^3)$. Récemment, Wang et Weihua ont montré dans [95] le caractère bien posé et la régularité Gevrey dans l'espace critique de Fourier-Besov à exposant variable.
Dans ce chapitre, nous établissons un résultat d'existence globale de solutions pour les équations (grMHD) avec petites données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey à exposants variables $\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}$ [12]. Les espaces d'intégrabilité variable, aussi appelés espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, ont été largement utilisés en l'analyse harmonique, voir [40, 41]. Hormis les considérations théoriques, les espaces fonctionnels à exposants variables ont des applications intéressantes en dynamique des fluides [4, 87], en traitement d'images [34] et en équations aux dérivées partielles [50].

# Chapitre 1

# Préliminaires pour l'analyse fonctionnelle linéaire et non linéaire

## Contents



## 1.1 Décomposition de Littelwood-Paley

Dans cette section, on rapelle la décomposition de Littelwood-Paley d'une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on commence par donner la définition des blocs dyadiques de la distribution $f$. On introduit deux fonctions tests, une première fonction test $\chi \in \mathcal{D}B(0,4/3)$ (identiquement égal à 1 dans $B(0,3/4)$), à partir de laquelle, on construit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de la manière suivante

$$\varphi(\xi) = \chi(\xi/2) - \chi(\xi).$$

Notons $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$, nous avons les identités suivantes

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Avec cette normalisation, $\varphi$ est une fonction radiale de $\mathcal{D}(C)$ où C est l'anneau centré en l'origine de rayon intérieur 3/4 et de rayon extérieur 8/3 et on définit les blocs dyadiques homogènes $\Delta_j$ par

$$\dot{\Delta}_j f := \varphi\left(2^{-j}D\right) f := \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-j}\cdot\right)\mathcal{F}f\right) = 2^{jn}h\left(2^j\cdot\right) * f.$$

avec $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, et les blocs dyadiques non-homogènes $\Delta_j$ par

$$\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f = 2^{jn}h\left(2^j\cdot\right) * f \quad \text{si} \;\; j \geq 0$$

et $\Delta_{-1}f := \chi(D)f := \mathcal{F}^{-1}(\chi\mathcal{F}f) = \tilde{h} * f$, où $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$.

De la même manière, on introduit aussi les opérateurs de troncature basse fréquence $\dot{S}_j$ par

$$\dot{S}_j f := \sum_{k\leq j-1} \dot{\Delta}_k f := \mathcal{F}^{-1}\left(\chi\left(2^{-j}\cdot\right)\mathcal{F}f\right) = 2^{jn}\tilde{h}\left(2^j\cdot\right) * f$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ et

$$S_j f := \sum_{k\leq j-1} \Delta_k f = 2^{jn}h\left(2^j\cdot\right) * f, j \in \mathbb{N}.$$

On appel décomposition de Littlewood-Paley de f l'égalité

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f. \tag{1.1.1}$$

Observez que cette décomposition dite homogène de Littlewood-Paley est valide modulo les polynômes $\mathcal{P}$. En effet, puisque la transformée de Fourier de tout polynôme est supportée en l'origine, l'identité (1.1.1) ne peut pas être appliquée aux polynômes. Cette restriction sur les basses fréquences est surmontée dans le cas de la décomposition non-homogène de Littlewood-Paley :

$$f = \sum_{j\geq -1} \Delta_j f,$$

où $\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $\Delta_{-1}f$ est un opérateur filtrant les basses fréquences, c'est-à-dire qu'il ne préserve que les fréquences dans une boule centrée en l'origine.

Par abus de langage, nous dirons la décomposition bien qu'elle n'est pas unique étant donné qu'il y a autant de décomposition de Littlewood-Paley que de choix de fonctions tests $\chi \in \mathcal{D}$. L'intérêt d'une telle décomposition vient du fait que l'opérateur de dérivation à de bonnes propriétés dans les estimations, plus précisément, on a les inégalités de Bernstein.

### 1.1.1 Inégalités de Bernstein

Tout au long de cette thèse, nous appelons une boule tout ensemble $\left\{\xi \in \mathbb{R}^d / |\xi| \leq R\right\}$ avec $R > 0$ et un anneau tout ensemble $\left\{\xi \in \mathbb{R}^d / 0 < r_1 \leq |\xi| \leq r_2\right\}$ avec $0 < r_1 < r_2$.

**Lemme 1.1.1** *Soient $\mathcal{C}$ un anneau et $B$ une boule. Il existe une constante $C$ telle que pour tout entier positif $k$, et pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et pour tout $u$ dans $L^p$, nous avons*

$$\operatorname{Supp} \widehat{u} \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1}\lambda^k \|u\|_{L^p} \leq \left\|D^k u\right\|_{L^p} \stackrel{déf}{=} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C^{k+1}\lambda^k \|u\|_{L^p},$$

$$\operatorname{Supp} \widehat{u} \subset \lambda B \Rightarrow \left\|D^k u\right\|_{L^q} \leq C^{k+1}\lambda^{k+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p}. \tag{1.1.2}$$

**Remarque 1.1.2** *La première inégalité dit que, pour une distribution tempérée dans $\mathbb{R}^n$ dont la transformée de Fourier est supportée dans un anneau de taille $\lambda$, dériver d'abord puis prendre la norme $L^p$ revient à appliquer une homothétie de rapport $\lambda$ sur la norme $L^p$. Dans le cadre fonctionnel $L^2$, cette propriété remarquable est une conséquence facile de l'action de la transformée de Fourier sur les dérivées et de la formule de Fourier-Plancherel. La preuve dans le cas général des espaces de Lebesgue $L^p$ utilise les inégalités de Young et le fait que la transformée de Fourier d'une convolution est le produit des transformées de Fourier. D'autre part, la deuxième inégalité nous dit que, pour une telle distribution, le passage de la norme $L^p$ à la norme $L^q$, avec $1 \leq p \leq q$, coûte $\lambda^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, qui doit être compris comme une injection de type Sobolev. Elle est démontrée, comme la première inégalité, en utilisant les inégalités de Young et la relation entre la transformée de Fourier et le produit de convolution.*

## 1.2 Calcul paradifférentiel et décomposition de Bony

Quand on analyse des problèmes non linéaires, il est essentiel de s'intéresser aux propriétés fonctionnelles du produit de deux distributions tempérées $u$ et $v$. Pour $u$ et $v$ deux distributions tempérées, nous avons la décomposition formelle suivante :

$$uv = \sum_{j,k} \Delta_j u \Delta_k v.$$

L'idée consiste à décomposer le produit $uv$ en trois parties : la première relative aux termes où les fréquences de $u$ sont grandes devant celles de $v$, la deuxième relative aux termes où les fréquences de $v$ sont grandes devant celles de $u$ et enfin la troisième relative aux termes où les fréquences de $u$ et de $v$ sont de taille comparable. Cela conduit à la définition suivante introduite pour la première fois par Jean-Michel Bony dans [26] :

**Définition 1.2.1** *Soient u et v deux distributions tempérées. On note*

$$\dot{T}_u v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j-1} u \dot{\Delta}_j v, \quad \dot{R}(u,v) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u \tilde{\Delta}_j v, \quad \tilde{\Delta}_j v = \sum_{|j'-j|\leq 1} \dot{\Delta}_{j'} v.$$

*Formellement, nous avons la décomposition de Bony suivante :*

$$uv = \dot{T}_u v + \dot{T}_v u + \dot{R}(u,v).$$

Bien entendu, il peut arriver que le produit $uv$ ne soit pas défini. Cependant, on peut retenir les principes suivants :

- Le paraproduit de deux distributions tempérées $u$ et $v$ est toujours défini. Ceci est dû au fait que le terme général du paraproduit est spectralement localisé dans les blocs dyadiques. De plus, la régularité de $\dot{T}_u v$ est principalement déterminée par la régularité de $v$. En particulier, $\dot{T}_u v$ ne peut pas être plus régulier que $v$.
- Le reste peut ne pas être défini. En général, il est défini dès que $u$ et $v$ appartiennent à des espaces fonctionnels dont la somme des indices de régularité est positive. Dans ce cas, l'exposant de régularité de $\dot{R}(u,v)$ est la somme des exposants de régularité de $u$ et v.

**Propriété 1.2.2** ***(Quasi-orthogonalité)*** *La définition de $\dot{\Delta}_j$ et de $\dot{S}_j$ permet de déduire facilement que*

$$\dot{\Delta}_j \dot{\Delta}_k f = 0, \quad \text{si } |j-k| \geq 2$$
$$\dot{\Delta}_j \left(\dot{S}_{k-1} f \dot{\Delta}_k f\right) = 0, \quad \text{si } |j-k| \geq 5.$$

## 1.3 Théorème du point fixe de Banach

Rappelons un théorème du point fixe de type bilinéaire, qui sera utilisé pour montrer l'existence d'une solution dans la suite.

**Lemme 1.3.1** *Soient $X$ un espace de Banach et $B : X \times X \longrightarrow X$ une application bilinéaire telle que $\|\cdot\|$ désignant la norme dans $X$, on ait, pour tout $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$,*

$$\|B(x_1, x_2)\| \leqslant \eta \|x_1\|_X \|x_2\|_X .$$

*Alors, si $0 < \varepsilon < \frac{1}{4\eta}$ et si $y \in X$ tels que $\|y\|_X \leq \varepsilon$, l'équation*

$$x = y + B(x,x) \tag{1.3.1}$$

*admet une solution $\bar{x}$ dans $X$ telle que*

$$\|\bar{x}\| \leqslant 2\|y\|. \tag{1.3.2}$$

*Cette solution est l'unique dans la boule $\bar{B}_\varepsilon = \{x \in X; \|x\| \leqslant 2\varepsilon\}$. En outre, la solution dépend continûment de $y$ dans le sens où : si $\|y'\|_X < \varepsilon, x' = y' + B(x', x')$, et $\|x'\|_X \leq 2\varepsilon$, alors*

$$\|\bar{x} - x'\|_X \leq \frac{1}{1 - 4\varepsilon\eta} \|y - y'\|_X . \tag{1.3.3}$$

*Pour démontrer ce résultat on considère la boule $B_R = \{x \in X; \|x\| \leqslant R\}$ de $X$, où $R$ est définie par*

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta\|y\|}}{2\eta},$$

*il est claire que R est solution de l'équation*

$$\|y\| + \eta R^2 = R$$

*et que*

$$R \leqslant 2\|y\|.$$

**Preuve.** Soit $(x_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = y + B(x_n, x_n) \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, on a $x_{n+1} \in B_R$ :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &\leqslant \|y\| + \|B(x_n, x_n)\| \leqslant \|y\| + \eta \|x_n\|^2 \\ &\leqslant \|y\| + \eta R^2 = R \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leqslant (2\eta R) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leqslant (2\eta R)^n \|x_1 - x_0\| . \end{aligned}$$

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p > q$

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &\leqslant \left[(2\eta R)^{p-1} + (2\eta R)^{p-2} + \ldots + (2\eta R)^q\right] \|x_1 - x_0\| \\ &= (2\eta R)^q \left[1 + (2\eta R)^2 + (2\eta R)^3 + \ldots + (2\eta R)^{p-q-1}\right] \|x_1 - x_0\| \\ &= (2\eta R)^q \left[\frac{1 - (2\eta R)^{p-q}}{1 - 2\eta R}\right] \|x_1 - x_0\| , \end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand $p$ et $q$ tend vers $\infty$, alors la suite est de Cauchy dans un espace de Banach $X$, donc elle est convergente vers un $\bar{x}$ et puisque $B_R$ est une boule fermée alors $\bar{x} \in B_R$ et vérifie la propriété (1.3.2).

$$\begin{aligned}\|\bar{x}\| &\leqslant \|y\| + \|B(\bar{x},\bar{x})\| \\ &\leqslant \|y\| + \eta\|\bar{x}\|^2 \leqslant \|y\| + \eta R^2 = R \leqslant 2\|y\|.\end{aligned}$$

L'unicité de la solution dans la boule $B_R$, soient $x$ et $y$ deux solutions de (1.3.1)

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|B(x,x) - B(y,y)\| \\ &\leqslant \|B(x-y,x)\| + \|B(y,x-y)\| \leqslant 2\eta R\|x-y\| \\ &< \|x-y\|.\end{aligned}$$

Donc $x = y$ dans la boule $B_R$.

## 1.4 Espaces de Lei-Lin $\mathcal{X}^s$

**Définition 1.4.1** *L'espace de Lei-Lin est défini par*

$$\mathcal{X}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{X}^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty \right\}.$$

Considérons des estimations linéaires pour le semigroupe $\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$.

**Lemme 1.4.2** *Soient* $I = [0,T)$, $s \in \mathbb{R}$ *et* $\rho \in [1,\infty]$. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{L^\rho(I,\mathcal{X}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leq C\|v_0\|_{\mathcal{X}^s},$$

*où* $v_0 \in \mathcal{X}^s$.

**Preuve.** Grâce à l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}v_0\|_{L^\rho(I,\mathcal{X}^{s+\frac{2}{\rho}})} &= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} e^{-t|\xi|^2} |\widehat{v_0}| d\xi \right)^\rho dt \right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^T \left( |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} e^{-t|\xi|^2} |\widehat{v_0}| \right)^\rho dt \right)^{\frac{1}{\rho}} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{v_0}| \left( \int_0^T |\xi|^2 e^{-t\rho|\xi|^2} dt \right)^{\frac{1}{\rho}} d\xi \\ &\leq C\|v_0\|_{\mathcal{X}^s}.\end{aligned}$$

**Lemme 1.4.3** *Soient* $I = [0, T)$, $s \in \mathbb{R}$, $\rho \in [1, \infty]$ *et* $\gamma \in ]0, 1]$. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-z)\Delta} h(z) dz \right\|_{L^\rho(I, \mathcal{X}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leq C \|h\|_{L^\gamma(I, \mathcal{X}^{s-2+\frac{2}{\gamma}})},$$

*pour tout* $h \in L^\gamma(I, \mathcal{X}^{s-2+\frac{2}{\gamma}})$.

**Preuve.** Posons $1 + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\gamma}$. La définition de l'espace $L^\rho(I, \mathcal{X}^{s+\frac{2}{\rho}})$, l'inégalité de Minkowski et l'inégalité de Young donnent

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} h(z) dz \right\|_{L^\rho(I, \mathcal{X}^{s+\frac{2}{\rho}})} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} \int_0^T \chi_{[0,t]} e^{-(t-z)|\xi|^2} |\widehat{h}(z)| dz d\xi \right\|_{L^\rho(I)} \\
&= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T \chi_{[0,t]} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} e^{-(t-z)|\xi|^2} |\widehat{h}(z)| dz d\xi \right)^\rho dt \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^T \left( \int_0^T \chi_{[0,t]} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} e^{-(t-z)|\xi|^2} |\widehat{h}(z)| dz \right)^\rho dt \right)^{\frac{1}{\rho}} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} \left\| e^{-t|\xi|^2} * |\widehat{h}| \right\|_{L^\rho(I)} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}} \left\| e^{-t|\xi|^2} \right\|_{L^{\rho_0}(I)} \left\| |\widehat{h}| \right\|_{L^\gamma(I)} d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+\frac{2}{\rho}-\frac{2}{\rho_0}} \left\| |\widehat{h}| \right\|_{L^\gamma(I)} d\xi \\
&\leq C \|h\|_{L^\gamma(I, \mathcal{X}^{s-2+\frac{2}{\gamma}})}.
\end{aligned}$$

## 1.5 Espaces de Besov $B^s_{p,q}$ et de Fourier-Besov $\mathcal{F}B^s_{p,q}$

Dans un premier temps, nous présentons la définition des espaces de Besov et de Fourier-Besov.

**Définition 1.5.1** *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$.

— *L'espace de Besov homogène*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}; \quad \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

*est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\dot{\Delta}_j u\|^q_{L^p} \right\}^{1/q} & \text{pour } q < \infty, \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p} & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

— *L'espace de Besov non-homogène*

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad \|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

*avec la norme*

$$\|u\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{j\geq 0} 2^{jqs} \|\Delta_j u\|^q_{L^p} \right\}^{1/q} & \text{pour } q < \infty, \\ \sup_{j\geq 0} 2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^p} & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

— *L'espace de Fourier-Besov homogène*

$$\mathcal{F}\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}; \quad \|u\|_{\mathcal{F}\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

*est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{\mathcal{F}\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\|^q_{L^p} \right\}^{1/q} & \text{pour } q < \infty, \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} \|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\|_{L^p} & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

— *L'espace de Fourier-Besov non-homogène*

$$\mathcal{F}\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \quad \|u\|_{\mathcal{F}\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

*avec la norme*

$$\|u\|_{\mathcal{F}\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{j\geq 0} 2^{jqs} \|\widehat{\Delta_j u}\|^q_{L^p} \right\}^{1/q} & \text{pour } q < \infty, \\ \sup_{j\geq 0} 2^{js} \|\widehat{\Delta_j u}\|_{L^p} & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Exemple 1.5.2** $vp\frac{1}{x} \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$ *dans les deux cas suivants :*

**1** $s = -\frac{1}{p'}$ , $1 \leq q \leq +\infty$ *et* $\|f\|_{B^{-1/p'}_{p,\infty}} \leq \sup_{j\geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}j} \|\Delta_j f\|_p$.

**2** $s < -\frac{1}{p'}$ , $1 \leq q \leq +\infty$, $q = +\infty$ *et* $\|f\|_{B^s_{p,\infty}} < \infty$.

*($vp\frac{1}{x}$ est la valeur principale de $\frac{1}{x}$)*

***Preuve :*** *Posons* $f(x) = vp\frac{1}{x}$. *Tout d'abord on a*

$$\mathcal{F}f(\xi) = -i\pi sgn\xi.$$

*En effet :*

*Soient* $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *on a*

$$\mathcal{F}(xg)(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}g(\xi),$$

*et*

$$\begin{aligned}\langle \widehat{xf}, \psi \rangle &= \langle f, x\widehat{\psi} \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} e^{ix0}\widehat{\psi}(0)dx \\ &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\widehat{\psi}(0) \\ &= 2\pi\psi(0) \\ &= 2\pi\langle \delta, \psi \rangle,\end{aligned}$$

*d'où*

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi) = 2\pi\delta.$$

*Puisque* $\delta = H'$, *en effet*

$$\langle H', \psi \rangle = -\langle H, \psi' \rangle = -\int_0^\infty \psi'(x)dx = \psi(0), \quad \forall \psi \in D(\mathbb{R}),$$

*où* $H$ *est la fonction de Heaviside. On déduit que*

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + a, \quad a \quad \text{constante}.$$

$f$ *est impaire donc* $\widehat{f}$ *est impaire (*$\mathcal{F}f(\xi) = -\mathcal{F}f(-\xi), \xi \in \mathbb{R}$*).*

*D'où*

$a = i\pi(H(\xi) + H(-\xi)) = i\pi$, *avec* $H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$.

*Donc*

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + i\pi = -i\pi \operatorname{sgn} \xi.$$

*Comme*

$$\operatorname{supp} \widehat{\Delta_j f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}/|\xi| \leq 2^j\},$$

*et d'après l'inégalité de Bernstein* (1.1.2)*, on obtient*

$$\|\Delta_j f\|_{L^p} \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\Delta_j f\|_{L^2}, \quad (p \geq 2). \tag{1.5.1}$$

*D'autre part on a :*

$$\begin{aligned}\|\Delta_j f\|_{L^2} &= (2\pi)^{\frac{-1}{2}}\|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^2}\\ &= (2\pi)^{\frac{-1}{2}}\|\varphi_j\hat{f}\|_{L^2}\\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{-1}{2}}\|\varphi_j\|_{L^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}2^{\frac{j}{2}}\|\varphi\|_{L^2}\\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}},\end{aligned}$$

*car* $\varphi \in D(\mathbb{R})$. *Ainsi*

$$\|\Delta_j f\|_{L^p} \leq c2^{j(1-\frac{1}{p})}, \quad c = c_1c_2 \text{ constante.}$$

*D'où*

$$2^{sj}\|\Delta_j f\|_p \leq c2^{j(s+\frac{1}{p\prime})}.$$

*La série* $\sum_{j\geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p\prime})q}, \quad 1 \leq q \leq +\infty$ *converge si* $s < -\dfrac{1}{p\prime}$.

**Exemple 1.5.3** $\delta \in \mathcal{F}B^{\frac{-n}{2}}_{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *avec* $\delta$ *est la masse de Dirac.*
*Soit* $f = \delta$, *donc* $\widehat{\Delta_k f} = 2^{kn}\varphi_k$, *d'où*

$$\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^2} = 2^{kn}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_k(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*En effectuant le changement de variable* $x = 2^k\xi$, *on obtient :*

$$\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^2} = 2^{-\frac{kn}{2}}\|\varphi\|_{L^2},$$

*donc*

$$2^{-k\frac{n}{2}}\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}.$$

*Par passage à la borne supérieure par rapport à* $k$, *on trouve*

$$\|\delta\|_{\mathcal{F}B^{\frac{-n}{2}}_{2,\infty}} = \|\varphi\|_{L^2} < \infty,$$

*ce qui montre que*

$$\delta \in \mathcal{F}B^{\frac{-n}{2}}_{2,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Remarque 1.5.4** *Notez que dans le cas p = q, on a* $\mathcal{X}^s = \mathcal{F}B^s_{p,p}$ *et les normes sont équivalentes :*

$$\|f\|_{\mathcal{F}B^s_{p,p}} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{sp}|\hat{f}(\xi)|^p d\xi\right)^{1/p}.$$

*En effet, pour simplifier supposons que* $s<0$ *(pour* $s<0$ *le raisonnement est analogue)*

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{\mathcal{F}B^s_{p,p}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsp}\left\|\varphi_j\hat{f}\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_j(\xi)|\xi|^{sp}|\hat{f}(\xi)|^p d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{sp}|\hat{f}(\xi)|^p d\xi,\end{aligned}$$

*où nous avons utilisé le fait que* $|\varphi_j(\xi)|^p \leqslant \varphi_j(\xi)$*,* $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \left[2^j, 2^{j+1}\right]$ *et*

$$\sum_j \varphi_j(\xi) \equiv 1 \ \ pour \ \ \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

*Pour obtenir la deuxième inégalité, notons que grâce à l'orthogonalité de* $\varphi_j$ *et que* $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$ *on a*

$$\left(\sum_j \varphi_j\right)^p = \left(\sum_j \varphi_j\right)^{[p]+1} \leqslant 3^{[p+1]}\sum_j \varphi_j^{[p+1]} \leqslant 3^{[p+1]}\sum_j \varphi_j^p.$$

*Ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{sp}|\hat{f}(\xi)|^p d\xi \leqslant 3^{[p+1]}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n} 2^{jsp}\left|\varphi_j\hat{f}(\xi)\right|^p d\xi = 3^{[p+1]}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsp}\left\|\varphi_j\hat{f}\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

*ce qui prouve l'équivalence de ces normes.*

## 1.6 Espaces de Besov-Morrey $\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}$

D'abord, nous rappelons la définition des espaces de Morrey $M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)$ qui sont un complément des espaces de Lebesgue $L^p$.

**Définition 1.6.1 ([70, 93])** *Pour* $1 \le p < \infty$ *et* $0 \le \lambda < n$*, l'espace de Morrey* $M^\lambda_p = M^\lambda_p(\mathbb{R}^n)$ *est défini par*

$$M^\lambda_p(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{M^\lambda_p} < \infty\right\},$$

*où*

$$\|f\|_{M^\lambda_p} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))},$$

*avec* $B(x_0,r)$ *est la boule dans* $\mathbb{R}^n$ *de centre* $x_0$ *et de rayon* $r$*. L'espace* $M^\lambda_p$ *muni de la norme* $\|.\|_{M^\lambda_p}$ *est un espace de Banach.*

* **(Inégalité de Hölder)** Si $1 \le p_1, p_2, p_3 < \infty$ et $0 \le \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 < n$ avec $\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ et $\frac{\lambda_3}{p_3} = \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}$, alors
$$\|fg\|_{M^{\lambda_3}_{p_3}} \le \|f\|_{M^{\lambda_1}_{p_1}}\|g\|_{M^{\lambda_2}_{p_2}}. \tag{1.6.1}$$

* (**Inégalité de Young**) Pour $1 \leq p < \infty$ et $0 \leq \lambda < n$,

$$\|\varphi * g\|_{M_p^\lambda} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|g\|_{M_p^\lambda}, \tag{1.6.2}$$

pour tout $\varphi \in L^1$ et $g \in M_p^\lambda$.

Lemme de type Bernstein dans les variables de Fourier dans les espaces de Morrey.

**Lemme 1.6.2 ([52])** *Soient* $1 \leq q \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < n$, $\frac{n-\lambda_1}{p} \leq \frac{n-\lambda_2}{q}$ *et que* $\gamma$ *soit un multi-indice. Si* $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset \{|\xi| \leq A2^j\}$*, alors il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* $f$ *et* $j$ *telle que*

$$\|(i\xi)^\gamma \widehat{f}\|_{M_q^{\lambda_2}} \leq C2^{j|\gamma|+j(\frac{n-\lambda_2}{q}-\frac{n-\lambda_1}{p})} \|\widehat{f}\|_{M_p^{\lambda_1}}. \tag{1.6.3}$$

**Définition 1.6.3** *(Espace de Besov-Morrey homogène)*
Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $0 \leq \lambda < n$, l'espace $\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}; \quad \|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

avec

$$\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\dot{\Delta}_j u\|^q_{M_p^\lambda} \right\}^{1/q} & \text{pour } q < \infty, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_{M_p^\lambda} & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.6.4** *[74] Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ *et* $0 \leq \lambda < n$*, alors nous avons l'inclusion suivante :*

$$\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q} \subset B^{s-n/p}_{\infty,q}. \tag{1.6.4}$$

Le lemme suivant est utile dans la suite.

**Lemme 1.6.5** *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $0 \leq \lambda < n$ *satisfont*

$$s < \frac{n}{p}, \quad \textit{ou} \quad s = \frac{n}{p} \quad \textit{et} \quad q = 1.$$

*Soit* $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *une suite de fonctions telles que* $\left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( 2^{ks} \|w_k\|_{M_p^\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$.

— *Si Supp* $\widehat{w}_k \subset B\left(0, 2^k A\right)$ *pour un certain* $A$ *positif et si de plus* $s$ *est positif alors* $u := \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k$ *appartient à* $\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}$ *et il existe une constante* $C$ *telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}} \leq C \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( 2^{ks} \|w_k\|_{M_p^\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Preuve.** D'après le lemme de Bernstein, on a $\|w_k\|_{M_p^\lambda} \leq C2^{-ks}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Comme s est positif, cela implique que $\sum_k w_k$ est une série convergente dans $M_p^\lambda$. Ensuite, nous avons

$$j > k+3 \Longrightarrow \Delta_j w_k = 0.$$

On écrit maintenant que

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\|_{M_p^\lambda} &= \left\| \sum_{k \geq j-3} \Delta_j w_k \right\|_{M_p^\lambda} \\ &\lesssim \sum_{k \geq j-3} \|w_k\|_{M_p^\lambda}. \end{aligned}$$

Donc, nous obtenons que

$$\begin{aligned} 2^{js} \|\Delta_j u\|_{M_p^\lambda} &\lesssim \sum_{k \geq j-3} 2^{(j-k)s} 2^{ks} \|w_k\|_{M_p^\lambda} \\ &\lesssim (a_l * b_k)_j, \end{aligned}$$

où $a_l = \chi_{\{l, l \leq 3\}} 2^{ls}$ et $b_k = 2^{ks} \|w_k\|_{M_p^\lambda}$. Alors, en utilisant l'inégalité de Young pour les séries, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}} &\lesssim \|a_l\|_{\ell^1} \|b_k\|_{\ell^q} \\ &\lesssim \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( 2^{ks} \|w_k\|_{M_p^\lambda} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

### 1.6.1 Résultats de continuité pour le paraproduit $\dot{T}_u v$ et le reste $\dot{R}(u, v)$ dans les espaces de Besov-Morrey

Les opérateurs de paraproduit et de reste bilinéaires possèdent des propriétés de continuité dans la plupart des espaces fonctionnels classiques. Dans cette section, nous nous concentrons sur les espaces de Besov-Morrey.

En ce qui concerne le paraproduit, nous avons les résultats suivants :

**Proposition 1.6.6** *Soient* $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ *et* $s \in \mathbb{R}$.

*i) Le paraproduit* $\dot{T}$ *est un opérateur bilinéaire continu de* $M_\infty^\lambda \times \mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}$ *à* $\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}$ *et il existe une constante* C *telle que*

$$\|\dot{T}_u v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}} \leq C \|u\|_{M_\infty^\lambda} \|v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}},$$

*si* $s < \frac{n}{p}$, *ou* $s = \frac{n}{p}$ *et* $q = 1$.

*ii) Si $\theta > 0$, $s-\theta < \frac{n}{p}$ (ou $s-\theta = \frac{n}{p}$ et $q=1$) et $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$ sont telles que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ alors $T$ est bilinéaire continu de $\mathcal{N}^{-\theta}_{\infty,0,q_1} \times \mathcal{N}^{s}_{p,\lambda,q_2}$ à $\mathcal{N}^{s-\theta}_{p,\lambda,q}$ et il existe une constante $C$ telle que*

$$\|\dot{T}_u v\|_{\mathcal{N}^{s-\theta}_{p,\lambda,q}} \leq C\|u\|_{\mathcal{N}^{-\theta}_{\infty,\lambda,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s}_{p,\lambda,q_2}}.$$

**Preuve.** Soit $w_k := \dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v$. Puisque la suite $(\mathcal{F}w_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est supportée dans les coquilles dyadiques. Par conséquent, grâce au Lemme 1.6.5, il suffit de montrer que

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{ks}\|w_k\|_{M^\lambda_p}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|u\|_{M^\lambda_\infty} \|v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}}.$$

En appliquant l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\|w_k\|_{M^\lambda_p} &= \left\|\dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} \\
&\leq \left\|\dot{S}_{k-1}u\right\|_{M^\lambda_\infty} \left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} \\
&\leq \left\|\tilde{h}\right\|_{L^1} \|u\|_{M^\lambda_\infty} \left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p}.
\end{aligned}$$

D'où

$$2^{ks}\|w_k\|_{M^\lambda_p} \lesssim \|u\|_{M^\lambda_\infty} 2^{ks} \left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p}.$$

Par conséquent,

$$\left\|2^{ks}\|w_k\|_{M^\lambda_p}\right\|_{\ell^q} \lesssim \|u\|_{M^\lambda_\infty} \|v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q}}.$$

On obtient ainsi le premier résultat.

Pour démontrer le second résultat, nous utilisons l'inégalité de Hölder dans les espaces de Morrey (1.6.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{k(s-\theta)}\|w_k\|_{M^\lambda_p} &= 2^{k(s-\theta)}\left\|\dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} \\
&\leq 2^{ks}\left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} 2^{-\theta k}\left\|\dot{S}_{k-1}u\right\|_{M^\lambda_\infty} \\
&\leq 2^{ks}\left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} \sum_{l\leq k-2} 2^{\theta(l-k)}2^{-\theta l}\left\|\dot{\Delta}_l u\right\|_{M^\lambda_\infty} \\
&\leq 2^{ks}\left\|\dot{\Delta}_k v\right\|_{M^\lambda_p} \left(\sum_{l\leq k-2} 2^{\theta(l-k)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta l q}\left\|\dot{\Delta}_l u\right\|^q_{M^\lambda_\infty}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Finalement, en prenant la norme $\ell^q(\mathbb{Z})$ et en utilisant l'inégalité de Hölder pour les séries, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|w_k\|_{\mathcal{N}^{s-\theta}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \sum_{i\geq 2} 2^{-i\theta}\|u\|_{\mathcal{N}^{-\theta}_{\infty,\lambda,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q_2}} \\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{-\theta}_{\infty,\lambda,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^s_{p,\lambda,q_2}},
\end{aligned}$$

où la condition $\theta > 0$ assure que la série $\sum_{i\geq 2} 2^{-i\theta}$ converge.

**Proposition 1.6.7** *Soient* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \leq \infty$ *et* $0 \leq \lambda, \lambda_1, \lambda_2 < n$. *Supposons que*

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \quad \frac{\lambda}{p} \leq \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2}, \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \quad \textit{et} \quad s_1 + s_2 > 0.$$

*Alors et il existe une constante* $C$ *telle que*

$$\|\dot{R}(u,v)\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2+N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{p,\lambda,q}} \leq C\|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p_1,\lambda_1,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p_2,\lambda_2,q_2}}.$$

**Preuve.** On note $w_k := \Delta_k u \widetilde{\Delta}_k v$. Par définition de l'opérateur du reste $\dot{R}$, nous avons

$$\dot{R}(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k u \tilde{\Delta}_k v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k.$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité de Hölder dans les espaces de Morrey (1.6.1), on a

$$2^{k(s_1+s_2)} \|w_k\|_{M^{\lambda}_p} \leq \left(2^{ks_1} \|\Delta_k u\|_{M^{\lambda_1}_{p_1}}\right) \left(2^{ks_2} \left\|\widetilde{\Delta}_k v\right\|_{M^{\lambda_2}_{p_2}}\right).$$

En appliquant l'inégalité de Hölder pour les séries, on trouve

$$\left\|2^{k(s_1+s_2)} \|w_k\|_{M^{\lambda}_p}\right\|_{\ell^q} \lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p_1,\lambda_1,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p_2,\lambda_2,q_2}}.$$

Par hypothèse $s_1 + s_2 > 0$, Lemme 1.6.5 donne

$$\begin{aligned}\|\dot{R}(u,v)\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{k(s_1+s_2)} \|w_k\|_{M^{\lambda}_p}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p_1,\lambda_1,q_1}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p_2,\lambda_2,q_2}}.\end{aligned}$$

## 1.6.2 Résultat de la continuité pour le produit

En combinant les Propositions 1.6.6 et 1.6.7, on obtient le résultat important suivant :

**Proposition 1.6.8** *Soient* $p \geq 2$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < n$ *et* $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ *sont tels que* $s_1 + s_2 > 0$ *et* $s_1 < \frac{n}{p}$. *Alors le produit est continu de* $\left(\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty} \cap \mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}\right)^2$ *à* $\mathcal{N}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}_{p,\lambda,q}$ *et on a*

$$\|uv\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}} + \|v\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty}} \|u\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}}.$$

**Preuve.** En vertu des Propositions 1.6.6 et 1.6.7 et l'inclusion (1.6.4), nous avons

$$\begin{aligned}\|T_u v\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1-\frac{n}{p}}_{\infty,0,\infty}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}} \\ &\lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}}.\end{aligned}$$

$$\|T_v u\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|v\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty}} \|u\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}}.$$

$$\left\|\dot{R}(u,v)\right\|_{\mathcal{N}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|u\|_{\mathcal{N}^{s_1}_{p,\lambda,\infty}} \|v\|_{\mathcal{N}^{s_2}_{p,\lambda,q}}.$$

Donc en appliquant la décomposition de Bony, on obtient la proposition.

## 1.7 Espaces de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}$

**Définition 1.7.1** *(Espace de Fourier-Besov-Morrey homogène)*
Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. L'espace $\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble de tous les fonctions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ tels que

$$\|u\|_{\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} = \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\|^q_{M^\lambda_p} \Big\}^{1/q} < +\infty, \tag{1.7.1}$$

avec des modifications appropriées lorsque $q = \infty$.
Il est à noter que l'espace $\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ équipé de la norme (1.7.1) est un espace de Banach. Puisque $M^0_p = L^p$, on a $\mathcal{FN}^{s}_{p,0,q} = \mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}$, $\mathcal{FN}^{s}_{1,0,q} = \mathcal{F}\dot{B}^{s}_{1,q} = \dot{B}^{s}_{q}$ et $\mathcal{FN}^{-1}_{1,0,1} = \chi^{-1}$ où $\dot{B}^{s}_{q}$ est l'espace de Fourier-Herz et $\chi^{-1}$ est l'espace de Lei-Lin.

**Lemme 1.7.2** *La dérivée $\partial^\alpha_\xi : \mathcal{FN}^{s+|\alpha|}_{p,\lambda,q} \to \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}$ est un opérateur borné.*

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha_\xi v\|_{\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}} &= \|\{2^{js}\varphi_j \widehat{\partial^\alpha_\xi v}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q(\mathcal{M}^\lambda_p)} \\
&= \|\{2^{js}\varphi_j |\xi|^\alpha \widehat{v}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q(\mathcal{M}^\lambda_p)} \\
&\lesssim \|\{2^{js}2^{j\alpha}\varphi_j \widehat{v}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q(\mathcal{M}^\lambda_p)} \\
&\lesssim \|v\|_{\mathcal{FN}^{s+|\alpha|}_{p,\lambda,q}},
\end{aligned} \tag{1.7.2}$$

où dans (1.7.2) nous avons utilisé le fait que $|\xi| \sim 2^j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

**Remarque 1.7.3** *Comme conséquence du Lemme 1.7.2, nous avons les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot f\|_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} &\lesssim \|f\|_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)+1}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}, \\
\|\Delta f\|_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} &\lesssim \|f\|_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)+2}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.
\end{aligned}$$

**Proposition 1.7.4** *[43]*
*Pour $p_2 \leq p_1$ et $s_2 \leq s_1$ satisfaisant $s_2 + \frac{n-\lambda_2}{p_2} = s_1 + \frac{n-\lambda_1}{p_1}$, nous avons l'injection continue*

$$\mathcal{FN}^{s_1}_{p_1,\lambda_1,r_1} \hookrightarrow \mathcal{FN}^{s_2}_{p_2,\lambda_2,r_2}$$

*pour tout $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$.*

**Remarque 1.7.5** *Si on considère que $q \in [1,2]$, alors $q \leq q\prime$ avec $q\prime$ est le conjugué de $q$. Par conséquent, la Proposition 1.7.4 entraîne*

$$\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q} \hookrightarrow \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q\prime}.$$

Maintenant, nous allons présenter la définition des espaces spatio-temporels mixtes.

**Définition 1.7.6** *Soient* $s \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q, \rho \leq \infty,\ 0 \leq \lambda < n$, *et* $I = [0, T),\ T \in (0, \infty]$. *La norme spatio-temporelle est définie par*

$$\|u(t,x)\|_{\mathcal{L}^{\rho}(I,\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q})} = \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jqs} \|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\|^{q}_{L^{\rho}(I,M^{\lambda}_{p})} \Big\}^{1/q},$$

*et* $\mathcal{L}^{\rho}(I, \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q})$ *désigne l'ensemble des distributions dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ *avec la norme* $\|.\|_{\mathcal{L}^{\rho}(I,\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q})}$ *est finie.*

En vertu de l'inégalité de Minkowski, nous avons

$$L^{\rho}\left(I; \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}\right) \hookrightarrow \mathcal{L}^{\rho}\left(I, \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}\right), \quad \text{si } \rho \leq q, \tag{1.7.3}$$

$$\mathcal{L}^{\rho}\left(I, \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}\right) \hookrightarrow L^{\rho}\left(I; \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}\right), \quad \text{si } \rho \geq q, \tag{1.7.4}$$

où

$$\|u(t,x)\|_{L^{\rho}\left(I;\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}\right)} := \left(\int_I \|u(\tau,\cdot)\|^{\rho}_{\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}} d\tau\right)^{1/\rho}.$$

Nous avons les estimations linéaires suivantes pour le semigroupe $\{e^{-(-\triangle)^{\alpha}t}\}_{t\geq 0}$ dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey.

**Lemme 1.7.7** *Soient* $T > 0,\ 0 \leq \lambda < n,\ 1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q, \rho \leq \infty,\ s \in \mathbb{R}$ *et* $u_0 \in \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\alpha}} u_0\|_{\mathcal{L}^{\rho}\left([0,T),\mathcal{FN}^{s+\frac{2\alpha}{\rho}}_{p,\lambda,q}\right)} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}}. \tag{1.7.5}$$

**Preuve.** Puisque $\mathrm{Supp}\varphi_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$, nous avons

$$\|\Delta_j \widehat{e^{-t(-\Delta)^{\alpha}}} u_0\|_{M^{\lambda}_{p}} \leq C e^{-2^{2\alpha j}t} \|\varphi_j \widehat{u_0}\|_{M^{\lambda}_{p}}.$$

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|\Delta_j \widehat{e^{-t(-\Delta)^{\alpha}}} u_0\|_{L^{\rho}([0,T),M^{\lambda}_{p})} \leq C\Big(\frac{1 - e^{-2^{2\alpha j}\rho T}}{2^{2\alpha j}\rho}\Big)^{\frac{1}{\rho}} \|\varphi_j \widehat{u_0}\|_{M^{\lambda}_{p}}.$$

Ainsi, on trouve

$$\|e^{-t(-\Delta)^{\alpha}} u_0\|_{\mathcal{L}^{\rho}\left([0,T),\mathcal{FN}^{s+\frac{2\alpha}{\rho}}_{p,\lambda,q}\right)} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}}.$$

**Lemme 1.7.8** *Soient* $0 < T \leq \infty,\ s \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda < n, 1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q, \rho, r \leq \infty$ *et* $f \in \mathcal{L}^{r}([0,T), \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q})$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\left\|\int_0^t e^{-(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau\right\|_{\mathcal{L}^\rho([0,T),\mathcal{FN}^s_{p,\lambda,q})} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{L}^r([0,T),\mathcal{FN}^{s-2\alpha-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{2\alpha}{r}}_{p,\lambda,q})}.$$

**Preuve** Posons $1+\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\tilde\rho}+\frac{1}{r}$. La définition de la norme spatio-temporelle de $\mathcal{L}^\rho([0,T),\mathcal{FN}^s_{p,\lambda,q})$ et l'inégalité de Young donnent

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int_0^t e^{-(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}f(\tau)d\tau\Big\|_{\mathcal{L}^\rho([0,T),\mathcal{FN}^s_{p,\lambda,q})}\\
&=\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\Big(\int_0^T\|\varphi_j\int_0^t\mathcal{F}(e^{-(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}f)(\tau)d\tau\|^\rho_{M_p^\lambda}dt\Big)^{\frac{q}{\rho}}\Big\}^{1/q}\\
&\leq\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\Big(\int_0^T\|\varphi_j\int_0^t e^{-|\xi|^{2\alpha}(t-\tau)}\hat f(\tau)d\tau\|^\rho_{M_p^\lambda}dt\Big)^{\frac{q}{\rho}}\Big\}^{1/q}\\
&\leq\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\Big(\int_0^T\|\varphi_j\int_0^t e^{-2^{2\alpha j}(t-\tau)}\hat f(\tau)d\tau\|^\rho_{M_p^\lambda}dt\Big)^{\frac{q}{\rho}}\Big\}^{1/q}\\
&\leq\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\Big(\int_0^T e^{-t\tilde\rho 2^{2\alpha j}}dt\Big)^{\frac{q}{\tilde\rho}}\|\varphi_j\hat f(\tau)\|^q_{L^r([0,T),M_p^\lambda)}\Big\}^{1/q}\\
&\leq C\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jq(s-2\alpha-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{2\alpha}{r})}\|\varphi_j\hat f(\tau)\|^q_{L^r([0,T),M_p^\lambda)}\Big\}^{1/q}\\
&\leq C\|f\|_{\mathcal{L}^r([0,T),\mathcal{FN}^{s-2\alpha-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{2\alpha}{r}}_{p,\lambda,q})}.
\end{aligned}$$

**Proposition 1.7.9** **1)** *Soient* $s\in\mathbb{R}$ *et* $0<q_1\leq q_2\leq\infty$. *Alors*

$$B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n).$$

**2)** *Soient* $-\infty<\sigma<s<\infty$ *et* $1\leq p,r,t\leq\infty$, *alors*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^\sigma_{p,t}(\mathbb{R}^n).$$

**3)** *Soient* $s\in\mathbb{R}$ *et* $0<p,q\leq\infty$. *Alors*

$$B^{s+\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),\quad(\alpha>0).$$

**4)** *Soient* $0<p_1<p_2\leq\infty$ *et* $s,t\in\mathbb{R}$ *(avec :* $s>t$ *) et tel que* $s-\frac{n}{p_1}=t-\frac{n}{p_2}$. *Alors*

$$B^s_{p_1,q}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^t_{p_2,q}(\mathbb{R}^n).$$

**5)** *Soient* $0<q\leq\infty, 1\leq p\leq\infty$ *et* $s\in[0,+\infty[$. *Alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

**6)** Si $1\leq p<\infty$, *alors*

$$B^0_{p,1}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

## 1.8 Cas particuliers

1. $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_2(\mathbb{R}^n)$ (espace de Bessel).

Soit $s \in \mathbb{R}$, alors on a $H^s_2$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f(\xi)(\cdot)\right],$$

soit une distribution régulière et

$$\|f\|_{H^s_2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f(\xi)(\cdot)\right]\right\|_2 < \infty.$$

2. $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$(L'espace de Lizorkin-Triebel).

Soit $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, l'espace $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\|\{2^{sj}\dot{\Delta}_j f\}_j\|_{\ell_p}\|_{L^p} < \infty.$$

3. $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n)$, tels que $s \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$.

Soient $p \in [1,\infty[$ et $s \in \mathbb{N}^*$, L'espace de Sobolev $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha$ avec $|\alpha| \leq s$, il est munit de la norme suivante

$$\|f\|_{W^s_p} = \sum_{|\alpha|\leq s}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$

4. $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n)$, tels que $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$.

$W^s_p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Slobodeckij. Soient $p \in [1,\infty[$, $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$,

tels que $s \in ]m, m+1[$. L'espace de Slobodeckij est l'espace de toutes les fonctions $f \in W^m_p(\mathbb{R}^n)$, telles que

$$\|f\|_{W^s_p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W^m_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m}\left(\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+(m+1-s)p}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

5. $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$, $\quad s \in \mathbb{N}$. $\quad \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Zygmund.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$\|f\|_{\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)} < \infty$, avec

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{C^{m-1}(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{h\neq 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha f(x+2h) - 2f\partial^\alpha(x+h) + \partial^\alpha f(x)|}{|h|}.$$

6. $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, avec $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, et $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Hölder.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $s \in ]m, m+1[$. L'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ x\neq y}} \sup \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-m}} < \infty.$$

7. $B^0_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^0_p(\mathbb{R}^n) = F^0_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

## 1.9 Espaces de Fourier-Besov-Morrey généralisés $\mathcal{FN}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q(\cdot)}$

L'espace d'intégrabilité variable, connus sous le nom d'espace de Lebesgue variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, ont été largement utilisés en l'analyse harmonique. Hormis les considérations théoriques, les espaces fonctionnels à exposant variable ont des applications intéressantes en dynamique des fluides, en traitement d'images et en équations aux dérivées partielles. Dans cette section, nous donnons un aperçu de l'analyse harmonique liée aux espaces fonctionnels à exposant variable.

**Définition 1.9.1** *([6]) Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ telles que*

$$0 < p_- = \operatorname{ess}\inf_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)\,,\ \operatorname{ess}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) = p_+ < \infty.$$

*L'espace de Lebesgue à exposants variables est définie par*

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ est mesurable}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

*avec la norme de Luxemburg-Nakano*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|f(x)|}{\lambda})^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

**Remarque 1.9.2** *Si $p(x) = cste$.*

$$\int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p} dx$$
$$= \frac{1}{\lambda^p}\int |f|^p \leq 1.$$

*On trouve*

$$\int |f|^p \leq \lambda^p \Longrightarrow \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda.$$

*Donc*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|f(x)|}{\lambda})^{p(x)} dx \leq 1\right\} = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}.$$

L'espace $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ est un espace de Banach. Puisque $L^{p(\cdot)}$ n'a pas les mêmes propriétés désirées que $L^p$. Ainsi, nous supposons les conditions standard suivantes pour garantir que l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood M est borné sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ :

(1) (Localement log-Hölder continue) Il existe une constante $C_{\log}(p)$ telle que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_{\log}(p)}{\log(e + |x-y|^{-1})}, \text{ pour tout } x,\ y \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq y.$$

(2) (Globalement log-Hölder continue) Il existe une constante $C_{\log}(p)$ et une constante indépendante de $x$ telle que

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C_{\log}(p)}{\log(e + |x|)}, \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

$C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaisant (1) et (2).

Maintenant, nous allons présenter la définition de l'espace de Morrey à exposant variable $\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}$.

**Définition 1.9.3** *([6]) Soient* $p(\cdot),\ \lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ *avec* $0 < p_- \leq p(x) \leq \lambda(x) \leq \infty$, *l'espace de Morrey à exposant variable* $\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)} := \mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}^n$ *telles que*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}} := \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, r>0} \|r^{\frac{n}{\lambda(x)} - \frac{n}{p(x)}} f \chi_{B(x_0,r)}\|_{L^{p(\cdot)}} < \infty.$$

*Selon la définition de la norme* $L^{p(\cdot)}$, $\|f\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}}$ *a aussi la forme suivante*

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}} := \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, r>0} \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(r^{\frac{n}{\lambda(x)} - \frac{n}{p(x)}} \frac{f}{\lambda}\chi_{B(x_0,r)}) \leq 1\right\}.$$

Nous présentons quelques lemmes importants.

**Lemme 1.9.4** *[6] Soit $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Pour toute fonction mesurable $f$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \rho_{p(\cdot)}(f\chi_{B(x,r)}) = \rho_{p(\cdot)}(f).$$

**Lemme 1.9.5** *[6] Si $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot)}_{p(\cdot)}} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$.*

**Définition 1.9.6** *([6]) Soient $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $\lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ avec $p(\cdot) \leq \lambda(\cdot)$. On définit l'espace $l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})$ comme l'ensemble des suites $\{h_j\}_{j\in Z}$ de fonctions mesurables dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\rho_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}(\gamma\{h_j\}_{j\in Z}) < \infty$ pour tout $\gamma > 0$. Pour $\{h_j\}_j \in l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})$ nous définissons*

$$\|\{h_j\}_{j\in Z}\|_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} := \inf\left\{\gamma > 0,\ \rho_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}(\{\frac{h_j}{\gamma}\}_{j\in Z}) \leq 1\right\} < \infty,$$

*où :*

$$\rho_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}(\{h_j\}_{j\in Z}) := \sum_{j\in Z} \inf\left\{\theta_j > 0,\ \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|r^{\frac{n}{\lambda(x)}-\frac{n}{p(x)}} h_j\chi_{B(x_0,r)}|}{\theta_j^{\frac{1}{q(x)}}})^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

*Notez que si $q_+ < \infty$ et $p(x) \leq q(x)$ , alors*

$$\rho_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0} \|(|r^{\frac{n}{\lambda(x)}-\frac{n}{p(x)}} f_i|\chi_{B(x_0,r)})^{q(\cdot)}\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}.$$

**Définition 1.9.7** *([2]) Soient $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ et $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < p_- \leq p(\cdot) \leq \infty$. L'espace de Fourier-Besov homogène à exposant variable $\mathcal{F}B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ est défini par l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{\mathcal{F}B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} := \|\{2^{js(\cdot)}\varphi_j\hat{f}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} < \infty.$$

**Définition 1.9.8** *([6]) Soient $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ et $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $\lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < p_- \leq p(x) \leq \lambda(x) \leq \infty$. L'espace homogène de Besov-Morrey à exposant variable $\mathcal{N}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q(\cdot)}$ est défini par l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{\mathcal{N}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q(\cdot)}} := \|\{2^{js(\cdot)}\Delta_j f\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} < \infty.$$

*L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S(\mathbb{R}^n) : (D^\alpha f)(0) = 0, \forall\alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

**Définition 1.9.9** *([2]) Soient $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ et $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $\lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < p_- \leq p(\cdot) \leq \lambda(\cdot) \leq \infty$. L'espace homogène de Fourier-Besov-Morrey à exposant variable $\mathcal{F}\mathcal{N}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q(\cdot)}$ est défini par l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{\mathcal{F}\mathcal{N}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q(\cdot)}} := \|\{2^{js(\cdot)}\varphi_j\hat{f}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^{q(\cdot)}(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} < \infty.$$

**Remarque 1.9.10** *On remarque que si* $\lambda(\cdot) = p(\cdot)$, *alors d'après le Lemme 1.9.5 on a* $\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{p(\cdot)} = L^{p(\cdot)}$. *Par conséquent,* $\mathcal{FN}_{p(\cdot),p(\cdot),q(\cdot)}^{s(\cdot)} = \mathcal{F}B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s(\cdot)}$.

**Définition 1.9.11** *([2]) Soient* $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot),\ q(\cdot),\ \lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $T \in (0, \infty)$ *et* $1 \leq q,\ \theta \leq \infty$. *Nous définissons l'espace homogène de Fourier-Besov-Morrey de type Chemin-Lerner à exposant variable* $\mathcal{L}^\theta([0,T]; \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)})$ *par*

$$\mathcal{L}^\theta\left([0,T]; \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}\right) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n);\ \|f\|_{\mathcal{L}^\theta\ ([0,T]; \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)})} < \infty \right\},$$

*avec la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\theta([0,T),\cdot \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)})} = \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|2^{js(\cdot)} \varphi_j \widehat{f}\|^q_{L^\theta([0,T); \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

**Lemme 1.9.12** *La dérivée* $\partial_\xi^\alpha : \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)+|\alpha|} \longrightarrow \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}$ *est un opérateur borné.*

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\partial_\xi^\alpha f\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}} &= \|\{2^{js(\cdot)} \varphi_j \widehat{\partial_\xi^\alpha f}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&= \|\{2^{js(\cdot)} \varphi_j |\xi|^\alpha \widehat{f}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&\lesssim \|\{2^{js(\cdot)} 2^{j|\alpha|} \varphi_j \widehat{f}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \qquad (1.9.1) \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)+|\alpha|}},
\end{aligned}$$

où dans (1.9.1) nous avons utilisé le fait que $|\xi| \sim 2^j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

**Lemme 1.9.13** *Soit* $g$ *une fonction régulière sur* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *qui est homogène de degré* $k$. *L'opérateur* $g(D)$ *est continu de* $\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}$ *à* $\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)-k}$.

**Preuve.** Soit $u \in \mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)-k}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|g(D)u\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)-k}} &= \|\{2^{j(s(\cdot)-k)} \varphi_j(\xi) \widehat{g(D)u}(\xi)\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&= \|\{2^{j(s(\cdot)-k)} \varphi_j(\xi) g(\xi) \widehat{u}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&= \|\{2^{j(s(\cdot)-k)} \varphi_j(\xi) |\xi|^k g\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) \widehat{u}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&\lesssim \|\{2^{j(s(\cdot)-k)} \varphi_j(\xi) 2^{jk} \widehat{u}\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{\lambda(\cdot)})} \\
&\leq C\|u\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{s(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

**Proposition 1.9.14** *Pour les espaces de Morrey à exposants variables, les inclusions suivantes sont établies.*

*(1) (Inégalité de Hölder )([2]) Soient* $p(\cdot),\ p_1(\cdot),\ p_2(\cdot),\ \lambda(\cdot),\ \lambda_1(\cdot),\ \lambda_2(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$*, tels que* $p(x) \leq \lambda(x),\ p_1(x) \leq \lambda_1(x),\ p_2(x) \leq \lambda_2(x),\ \dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{1}{p_1(x)} + \dfrac{1}{p_2(x)}$ *and* $\dfrac{1}{\lambda(x)} = \dfrac{1}{\lambda_1(x)} + \dfrac{1}{\lambda_2(x)}$*. Alors il existe une constante* $C$ *qui dépend uniquement de* $p_-$ *et* $p_+$ *telle que*

$$\|fg\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{\lambda_1(\cdot)}_{p_1(\cdot)}}\|g\|_{\mathcal{M}^{\lambda_2(\cdot)}_{p_2(\cdot)}},$$

*est valable pour chaque* $f \in \mathcal{M}^{\lambda_1(\cdot)}_{p_1(\cdot)}$ *et* $g \in \mathcal{M}^{\lambda_2(\cdot)}_{p_2(\cdot)}$*.*

*(2) ([2]) Soient* $p_0(\cdot),\ p_1(\cdot),\ \lambda_0(\cdot),\ \lambda_1(\cdot),\ q(\cdot) \in \mathcal{P}_0$*, et* $s_0(\cdot),\ s_1(\cdot) \in L^\infty \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $s_0(\cdot) > s_1(\cdot)$*. Si* $\dfrac{1}{q(\cdot)}$ *et* $s_0(x) - \frac{n}{p_0(x)} = s_1(x) - \frac{n}{p_1(x)}$ *sont localement log-Hölder continus, alors*

$$\mathcal{N}^{s_0(\cdot)}_{p_0(\cdot),\lambda_0(\cdot),q(\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{N}^{s_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),\lambda_1(\cdot),q(\cdot)}. \tag{1.9.2}$$

*(3) ([6]) Pour* $p(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, supposons que* $\Psi(x) = \sup\limits_{y \notin B(0,|x|)} |\psi(y)|$ *est intégrable. Alors*

$$\|f * \psi_\epsilon\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

*pour tout* $f \in \mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$*, où* $\psi_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon^n}\psi(\dfrac{1}{\epsilon})$ *et* $C$ *ne dépend que de* $n$*.*

À la fin de ce chapitre, on rappelle un résultat relatif à l'espace de Chemin-Lerner dont on va faire usage dans la suite, il permettra d'estimer le produit de deux fonctions dans cet espace.

**Proposition 1.9.15** *([2], Proposition 2.3) Soient* $I = (0, T]$*,* $s > 0$*,* $1 \leq \rho,\ \theta,\ \theta_1,\ \theta_2,\ q \leq \infty$*,* $p(\cdot),\ \lambda(\cdot),\ r(\cdot) \in C^{\log} \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$*,* $\frac{1}{\lambda(\cdot)} = \frac{1}{\lambda_1(\cdot)} + \frac{1}{\lambda_2(\cdot)}$*,* $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}$ *et* $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r(\cdot)} + \frac{1}{p(\cdot)}$*. Alors on a*

$$\begin{aligned}\|ub\|_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{N}^s_{\rho,\lambda(\cdot),q})} \lesssim & \|u\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}(I,\mathcal{M}^{\lambda_1(\cdot)}_{r(\cdot)})}\|b\|_{\mathcal{L}^{\theta_2}(I,\mathcal{N}^s_{p(\cdot),\lambda_2(\cdot),q})} \\ & + \|b\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}(I,\mathcal{M}^{\lambda_1(\cdot)}_{r(\cdot)})}\|u\|_{\mathcal{L}^{\theta_2}(I,\mathcal{N}^s_{p(\cdot),\lambda_2(\cdot),q})}.\end{aligned} \tag{1.9.3}$$

# Chapitre 2

# Système de Debye-Hückel

## Contents



## Introduction

On considère le système suivant dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - \nabla \cdot (v \nabla \phi) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \partial_t w = \Delta w + \nabla \cdot (w \nabla \phi) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \Delta \phi = v - w & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où les fonctions inconnues $v = v(x, t)$ et $w = w(x, t)$ désignent respectivement les densités de l'électron et du trou dans les électrolytes, $\phi = \phi(x, t)$ désigne le potentiel électrique, $v_0(x)$

et $w_0(x)$ sont les données initiales.

Rappelons que la fonction $\phi$ est déterminée par l'équation de Poisson dans la troisième équation de (2.0.1), et qu'elle est donnée par

$$\phi = (-\Delta)^{-1}(w-v) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2}\mathcal{F}(w-v)). \tag{2.0.2}$$

Donc, le système (2.0.1) peut être réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = -\nabla \cdot \left(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right) & \text{dans} \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \partial_t w - \Delta w = \nabla \cdot \left(w\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right) & \text{dans} \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = v_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.0.3}$$

Lorsque l'on cherche à étudier les questions d'existence, globale ou locale, de solutions (fortes, faibles, mild ou auto-similaires), il est important de connaître le scaling de l'équation en question et de rechercher les espaces critiques (c'est-à-dire dont la norme est invariante par le changement d'échelle de l'équation). Pour le système de Debye-Hückel (2.0.1) nous avons le scaling suivant : si $(v,w)$ est une solution de (2.0.1) avec les données initiales $(v_0,w_0)$ $\big(\phi$ peut être déterminé par $(v,w)\big)$, alors $(v_\gamma,w_\gamma)$ avec $(v_\gamma,w_\gamma)(x,t) := \left(\gamma^2 v, \gamma^2 w\right)\left(\gamma x, \gamma^2 t\right)$ est également une solution de (2.0.1) avec les données initiales

$$(v_{0,\gamma}, w_{0,\gamma})(x) := \left(\gamma^2 v_0, \gamma^2 w_0\right)(\gamma x) \tag{2.0.4}$$

$(\phi_\gamma$ peut être déterminé par $(v_\gamma,w_\gamma))$.

**Définition 2.0.1** *Tout espace de Banach $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont la norme est invariante sous le scaling* (2.0.4) *est appelé espace critique pour le système* (2.0.1)*, c'est-à-dire,*

$$\|(v_{0,\gamma}(x), w_{0,\gamma}(x))\|_E \approx \|(v_0(x), w_0(x))\|_E\,.$$

Tout au long de ce chapitre, nous utilisons $(v,w) \in X$ pour désigner $(v,w) \in X \times X$ pour un espace de Banach $X$ $\Big($le produit $X \times X$ sera muni de la norme usuelle $\|(v,w)\|_{X\times X} := \|v\|_X + \|w\|_X\Big)$, et $\|(v,w)\|_X$ pour désigner $\|(v,w)\|_{X\times X}$.

## 2.1 Étude du système (DHS) dans les espaces de Lei-Lin

Le premier résultat principal de cette section est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.1.1** *Soient* $n \geq 2, I = [0, T),\ \rho_0 > 2,\ (v_0, w_0) \in \mathcal{X}^{-2}$ et $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0'} = 1$. *Alors il existe* $T \geq 0$ *tel que le système* (2.0.1) *a une unique solution locale* $(v, w) \in Y_T$, *où*

$$Y_T = L^{\rho_0}(I, \mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}}) \cap L^{\rho_0'}(I, \mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0'}}),$$

*et*

$$(v, w) \in \mathcal{C}\left(I; \mathcal{X}^{-2}\right).$$

*De plus, il existe* $\beta \geq 0$ *tel que si* $(v_0, w_0)$ *satisfait à* $\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq \beta$, *alors l'affirmation ci-dessus est valide pour* $T = \infty$ *; c'est-à-dire que la solution* $(v, w)$ *est globale.*

En ce qui concerne l'analyticité spatiale de la solution de (2.0.1) , nous suivons la technique de la classe de Gevrey issue des travaux classiques de Foias et Temam [54] dans le cadre des équations de Navier-Stokes. Cette technique présente l'avantage évident de supprimer les estimations récursives des dérivées d'ordre supérieur.

**Théorème 2.1.2** *Il existe une constante positive* $\beta_0 > 0$ *telle que pour toute donnée initiale dans* $\mathcal{X}^{-2}$ *avec* $\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} < \beta_0$, *la solution globale du Théorème* 2.1.1 *est analytique dans le sens où*

$$\left\|(e^{\sqrt{t}|D|}v, e^{\sqrt{t}|D|}w)\right\|_{Y_T} \lesssim \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}},$$

*où* $e^{\sqrt{t}|D|}$ *est un multiplicateur de Fourier dont le symbole est donné par* $e^{\sqrt{t}|\xi|}$.

En tant qu'application de l'analyticité des solutions abordée dans le Théorème 2.1.2, nous pouvons obtenir les estimations de décroissance des solutions suivantes.

**Théorème 2.1.3** *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1.1, *la solution globale* $(v, w) \in Y_\infty$ *et* $\left(e^{\sqrt{t}|D|}v, e^{\sqrt{t}|D|}w\right) \in Y_\infty$ *obtenue à partir du Théorème* 2.1.2 *satisfait l'estimation de décroissance temporelle suivante :*

$$\left\|\Big(\Lambda v(t), \Lambda w(t)\Big)\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}},$$

*où* $\Lambda v = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} v$.

Le critère de blow-up des solutions est énoncé comme suit :

**Théorème 2.1.4** *Soit* $n \geq 2$. *Pour* $(v_0, w_0) \in \mathcal{X}^{-2}$, *nous désignons par* $T^*$ *le temps d'existence maximal de l'unique solution locale* $(v, w)$ *construite par le Théorème* 2.1.1 *(avec* $\rho_0 = \infty$*). Si* $T^* < \infty$, *alors*

$$\|(v, w)\|_{L^1([0,T^*),\mathcal{X}^0)} = \infty.$$

*Autrement dit, si*

$$\|(v, w)\|_{L^1([0,T^*),\mathcal{X}^0)} < \infty,$$

*alors* $(v, w)$ *est continu dans* $L^1\left([0, T_0), \mathcal{X}^0\right)$ *pour un certain* $T_0 > T$.

### 2.1.1 Estimations bilinéaires dans les espaces de Lei-Lin

Dans cette partie, nous allons établir quelques estimations cruciales dans la preuve du Théorème 2.1.1 et du Théorème 2.1.2.

**Lemme 2.1.5** *Soient* $I = [0, T)$, $f \in L^1(I, \mathcal{X}^0)$ *et* $g \in L^\rho(I, \mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})$. *Alors*

$$\|\nabla \cdot (f\nabla g)\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-2})} \leq \|f\|_{L^1(I,\mathcal{X}^0)}\|g\|_{L^\infty(I,\mathcal{X}^0)}. \tag{2.1.1}$$

**Preuve.** En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot (f\nabla g)\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-2})} &\leq \|f\nabla g\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-1})} \\
&\leq \|fg\|_{L^1(I,\mathcal{X}^0)} \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^0 |\widehat{fg}| d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f} * \widehat{g}| d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \|\widehat{f}\|_{L^1} \|\widehat{g}\|_{L^1} dt \\
&\leq \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}^0} \|g\|_{\mathcal{X}^0} dt \\
&\leq \|f\|_{L^1(I,\mathcal{X}^0)}\|g\|_{L^\infty(I,\mathcal{X}^0)}.
\end{aligned}$$

**Lemme 2.1.6** *Soient* $I = [0, T)$, $\rho_0 > 2$ *avec* $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0'} = 1$. *Alors*

$$\|\nabla \cdot (f\nabla g)\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-2})} \leq \|f\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \|g\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{\frac{2}{\rho_0'}})}, \tag{2.1.2}$$

*pour tout* $f \in L^{\rho_0}(I, \mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})$ *et* $g \in L^{\rho_0'}(I, \mathcal{X}^{\frac{2}{\rho_0'}})$.

**Preuve.** En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}
\|\nabla \cdot (f\nabla g)\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-2})} &\leq \|f\nabla g\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-1})} \\
&\leq \|fg\|_{L^1(I,\mathcal{X}^0)} \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^0 |\widehat{fg}| d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f} * \widehat{g}| d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\eta)||\widehat{g}(\xi - \eta)| d\eta d\xi dt \\
&\leq I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta|<|\xi-\eta|} |\widehat{f}(\eta)||\widehat{g}(\xi-\eta)| d\eta d\xi dt$$

$$I_2 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta|>|\xi-\eta|} |\widehat{f}(\eta)||\widehat{g}(\xi-\eta)| d\eta d\xi dt.$$

Il est clair que $I_1 = I_2$, il faut juste faire le changement de variable $\eta' = \xi - \eta$. Il suffit alors d'estimer $I_1$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta|<|\xi-\eta|} |\widehat{f}(\eta)||\widehat{g}(\xi-\eta)| d\eta d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta|<|\xi-\eta|} \frac{|\widehat{f}(\eta)|}{|\eta|^{2-\frac{2}{\rho_0}}} |\xi-\eta|^{\frac{2}{\rho_0'}} |\widehat{g}(\xi-\eta)| d\eta d\xi dt \\
&\leq \int_0^T \left\| |\xi|^{-2+\frac{2}{\rho_0}} |\widehat{f}| * |\xi|^{\frac{2}{\rho_0'}} |\widehat{g}| \right\|_{L^1} dt \\
&\leq \int_0^T \left\| |\xi|^{-2+\frac{2}{\rho_0}} |\widehat{f}| \right\|_{L^1} \left\| |\xi|^{\frac{2}{\rho_0'}} |\widehat{g}| \right\|_{L^1} dt \\
&\leq \int_0^T \|f\|_{\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}}} \|g\|_{\mathcal{X}^{\frac{2}{\rho_0'}}} dt \\
&\leq \|f\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \|g\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{\frac{2}{\rho_0'}})}.
\end{aligned}$$

### 2.1.2 Preuve du Théorème 2.1.1

Tout d'abord, nous allons prouver l'existence globale avec petites données initiales. Pour cela, nous choisissons $T = \infty$. Notons que l'espace $Y_T$ défini dans le Théorème 2.1.1 est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{Y_T} = \|v\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} + \|v\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0'}})}.$$

Nous considérons le système intégral équivalent donné dans (2.2.3)

$$(v(t), w(t)) = (e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0) + (B(v,\phi), B(w,\phi)).$$

Il résulte du Lemme 1.7.7 avec $s = -2$, $\alpha = 1$, et $\rho = \rho_0$ (ou $\rho = \rho'$) que

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}$$

et

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0'}})} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

Donc,

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{Y_\infty} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

De même,

$$\|e^{t\Delta}w_0\|_{Y_\infty} \lesssim \|w_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

Ainsi,

$$\|(e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0)\|_{Y_\infty} \leq C_0\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

En appliquant le Lemme 1.7.7 avec $s = -2$, $\alpha = 1$, $\rho = \rho_0$ et $\gamma = 1$, et le Lemme 2.1.6 avec $f = v$ et $g = (-\Delta)^{-1}(w - v)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|B(v, \phi)\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} &\lesssim \|\nabla \cdot (v\nabla(-\Delta)^{-1}(w - v))\|_{L^1(I,\mathcal{X}^{-2})} \\
&\lesssim \|v\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \|(-\Delta)^{-1}(w - v)\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{\frac{2}{\rho_0'}})} \\
&\lesssim \|v\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \|w - v\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0'}})} \\
&\lesssim \|(v, w)\|^2_{Y_\infty}.
\end{aligned}$$

De manière analogue, nous obtenons

$$\|B(v, \phi)\|_{L^{\rho_0'}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0'}})} \lesssim \|(v, w)\|^2_{Y_\infty}.$$

On obtient donc

$$\|B(v, \phi)\|_{Y_\infty} \lesssim \|(v, w)\|^2_{Y_\infty}.$$

Aussi,

$$\|B(w, \phi)\|_{Y_\infty} \lesssim \|(v, w)\|^2_{Y_\infty}.$$

Par conséquent,

$$\left\|\Big(B(v, \phi), B(w, \phi)\Big)\right\|_{Y_\infty} \leq C_1\|(v, w)\|^2_{Y_\infty}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $4C_1\varepsilon \leq 1$, on choisit la donnée initiale $(v_0, w_0) \in \mathcal{X}^{-2}$ de telle sorte que $C_0\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq \varepsilon$. Ainsi le Lemme 1.3.1 entraîne que le système (2.0.1) a une unique solution globale $(v, w) \in Y_\infty$ telle que $\|(v, w)\|_{Y_\infty} \leq 2\varepsilon$.

Pour l'existence locale, nous allons décomposer la donnée initiale $v_0$ en deux termes

$$\widehat{v_0} = \chi_{B(0,2^N)}\widehat{v}_0 + \chi_{B^C(0,2^N)}\widehat{v}_0 := \widehat{v_{0,1}} + \widehat{v_{0,2}},$$

où $N \in \mathbb{Z}^+$. De même, on décompose $w_0$ :

$$\widehat{w}_0 = \chi_{B(0,2^N)}\widehat{w}_0 + \chi_{B^C(0,2^N)}\widehat{w}_0 := \widehat{w_{0,1}} + \widehat{w_{0,2}}.$$

Puisque

$$\begin{cases} v_{0,2} \longrightarrow 0 \ \text{ in } \ \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q} \ \text{ when } \quad \delta \to +\infty, \\ w_{0,2} \longrightarrow 0 \ \text{ in } \ \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q} \ \text{ when } \quad \delta \to +\infty, \end{cases}$$

Il est facile de voir que si N est suffisamment grand, alors

$$C_0\|(v_{0,2}, w_{0,2})\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant un tel N et en le fixant, on obtient

$$\left\|\left(e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0\right)\right\|_{Y_T} \leq \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{Y_T} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.3}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{Y_T} \\ &= \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} + \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{L^{\rho'_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho'_0}})}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|\xi| \leq 2^N$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{L^{\rho_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho_0}})} \\ &= \left(\int_0^T \left(\int_{|\xi|\leq 2^N} |\xi|^{-2+\frac{2}{\rho_0}} e^{-t|\xi|^2}|\widehat{v_0}|d\xi\right)^{\rho_0} dt\right)^{\frac{1}{\rho_0}} \\ &\quad + \left(\int_0^T \left(\int_{|\xi|\leq 2^N} |\xi|^{-2+\frac{2}{\rho_0}} e^{-t|\xi|^2}|\widehat{w_0}|d\xi\right)^{\rho_0} dt\right)^{\frac{1}{\rho_0}} \\ &\leq 2^{\frac{2N}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}. \end{aligned}$$

De manière semblable,

$$\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{L^{\rho'_0}(I,\mathcal{X}^{-2+\frac{2}{\rho'_0}})} \leq 2^{\frac{2N}{\rho'_0}} T^{\frac{1}{\rho'_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

D'où, $\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{X_T} \leq 2^{\frac{2N}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} + 2^{\frac{2N}{\rho'_0}} T^{\frac{1}{\rho'_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$
Nous choisissons T suffisamment petit pour que

$$\begin{cases} 2^{\frac{2N}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{and} \\ 2^{\frac{2N}{\rho'_0}} T^{\frac{1}{\rho'_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Donc, si

$$T \leq \min\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2^{2+\frac{2N}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}}\right)^{\rho_0}, \left(\frac{\varepsilon}{2^{2+\frac{2N}{\rho'_0}} T^{\frac{1}{\rho'_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}}\right)^{\rho'_0} \right\},$$

alors $\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{Y_T} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour toute donnée initiale arbitraire $(v_0, w_0) \in \mathcal{X}^{-2}$, le système (2.0.1) a une unique solution locale telle que $\|(v, w)\|_{Y_T} \leq 2\varepsilon$.

### 2.1.3 Régularité Gevrey (l'analyticité des solutions)

Avant d'entamer la preuve du Théorème 2.1.2, il est utile de rappeler un lemme auxiliaire, que l'on invoquera à plusieurs reprises.

**Lemme 2.1.7** *[95] Soient $0 < s \leq t < \infty$ et $0 \leq \beta \leq 2$. Alors l'inégalité suivante est vérifiée*

$$t|a|^{\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{2}(t^2 - s^2)|a|^{\beta} - s|a-b|^{\frac{\beta}{2}} - s|b|^{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{1}{2} \tag{2.1.4}$$

*pour tout* $a,\ b \in \mathbb{R}^n$.

Posons $\widehat{V}(t,\xi) := e^{\sqrt{t}|\xi|}\widehat{v}(t,\xi)$, $\widehat{W}(t,\xi) := e^{\sqrt{t}|\xi|}\widehat{W}(t,\xi)$, et $\widehat{\Phi}(t) = e^{\sqrt{t}|\xi|}\widehat{\phi}(t) = \widehat{W}(t) - \widehat{V}(t)$. On voit alors que $(\hat{V},\hat{W})$ satisfait le système suivant :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\widehat{V}\\ \widehat{W}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}|\xi|} & 0\\ 0 & e^{\sqrt{t}|\xi|}\end{pmatrix} e^{-t|\xi|^2}\begin{pmatrix}\widehat{v_0}\\ \widehat{w_0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{\sqrt{t}|\xi|} & 0\\ 0 & e^{\sqrt{t}|\xi|}\end{pmatrix}\int_0^t e^{\sqrt{\tau}|\xi|-(t-\tau)|\xi|^2}\\ \xi\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\begin{pmatrix} e^{-\sqrt{\tau}|\xi-\eta|}\widehat{V}(\tau,\xi-\eta)e^{-\sqrt{\tau}|\eta|}\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\\ e^{-\sqrt{\tau}|\xi-\eta|}\widehat{W}(\tau,\xi-\eta)e^{-\sqrt{\tau}|\eta|}\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\end{pmatrix} d\eta\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

L'estimation (2.1.5) est borné et nous avons

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}\widehat{V}\\ \widehat{W}\end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} e^{\sqrt{t}|\xi|-t|\xi|^2}\widehat{v_0}\\ e^{\sqrt{t}|\xi|-t|\xi|^2}\widehat{w_0}\end{pmatrix}\right| + \Big|\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2}\\ &\qquad \xi\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{\tau}|\xi|-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2-\sqrt{\tau}(|\xi-\eta|+|\eta|)}\begin{pmatrix}\widehat{V}(\tau,\xi-\eta)\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\\ \widehat{W}(\tau,\xi-\eta)\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\end{pmatrix} d\eta\, d\tau\Big|\\ &\leq \left|\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{v_0}\\ e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2}\widehat{w_0}\end{pmatrix}\right| + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2}|\xi|\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\begin{pmatrix}\left|\widehat{V}(\tau,\xi-\eta)\right|\left|\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\right|\\ \left|\widehat{W}(\tau,\xi-\eta)\right|\left|\widehat{\nabla\Phi}(\tau,\eta)\right|\end{pmatrix} d\eta\, d\tau,\end{aligned}$$

où $e^{\sqrt{t}|\xi|-\frac{1}{2}t|\xi|^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}|\xi|-1\right)^2+\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}}$ et le Lemme 2.1.7 sont utilisés.

Le reste de la preuve est exactement similaire à la preuve du Théorème 2.1.1.

### 2.1.4 Estimation de décroissance des solutions

Comme application de l'analyticité des solutions discutée ci-dessus, nous allons prouver le Théorème 2.1.3.

**Preuve du Théorème 2.1.3**

En utilisant la définition de $\mathcal{X}^{-2}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda v(t)\|_{\mathcal{X}^{-2}} &= \left\|\Lambda e^{-\sqrt{t}|D|}e^{\sqrt{t}|D|}v(t)\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2}\left|\mathcal{F}\Big(\Lambda e^{-\sqrt{t}|D|}e^{\sqrt{t}|D|}v(t)\Big)\right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2}|\xi|e^{-\sqrt{t}|\xi|}\left|\mathcal{F}\Big(e^{\sqrt{t}|D|}v(t)\Big)\right| d\xi.
\end{aligned}$$

Supposons la fonction $K(y) = ye^{-\sqrt{t}y}$, où $y \geq 0$. De la dérivation de la fonction K, on peut déduire que $K(y) \leq K((\frac{y}{\sqrt{t}})) \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi,

$$\|\Lambda v(t)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}\left\|e^{\sqrt{t}|D|}v(t)\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}\|v_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

De même,

$$\|\Lambda w(t)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}\|w_0\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\Lambda v(t), \Lambda w(t)\Big)\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} &\lesssim t^{-\frac{1}{2}}\left\|\Big(e^{\sqrt{t}|D|}v(t), e^{\sqrt{t}|D|}w(t)\Big)\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} \\
&\lesssim t^{-\frac{1}{2}}\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}}.
\end{aligned}$$

### 2.1.5 Critère de blow-up

Nous présentons le lemme suivant qui sera utilisé dans la suite.

**Lemme 2.1.8** *Soient* $T > 0$, $s \in \mathbb{R}^n$ *et* $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Alors,*

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(f\nabla g)\|_{\mathcal{X}^s}dz \leq \int_0^t \|f\nabla g\|_{\mathcal{X}^{s+1}}dz, \tag{2.1.6}$$

$\forall t \in [0, T)$.

**Preuve.** On remarque que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(f\nabla g)\|_{\mathcal{X}^s}dz &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s e^{-(t-s)|\xi|^2}|\widehat{\nabla\cdot(f\nabla g)}|d\xi dz \\
&\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s+1}|\widehat{f\nabla g}|d\xi dz \\
&\leq \int_0^t \|f\nabla g\|_{\mathcal{X}^{s+1}}dz.
\end{aligned}$$

### 2.1.6 Preuve du Théorème 3.0.3

Dans cette section, nous allons prouver le Théorème 3.0.3. Soit $T^*$ le temps d'existence maximal de la solution $(v, w)$ dans $\mathcal{C}\left([0, T^*), \mathcal{X}^{-2}\right) \cap L^\infty\left([0, T^*); \mathcal{X}^{-2}\right) \cap L^1\left([0, T^*), \mathcal{X}^0\right)$.
Afin de montrer le critère de "blow-up" de la solution donnée par le Théorème 3.0.3, supposons que $T^* < \infty$ et que

$$\int_0^{T^*} \|(v, w)\|_{\mathcal{X}^0} < \infty. \tag{2.1.7}$$

Nous allons adapter les techniques contenues dans [21] pour établir le critère de blow-up des solutions avec le temps maximal d'existence est fini.
Soit $T^* < \infty$ le temps maximal d'existence des solutions du système (2.0.1) dans $\mathcal{C}\left([0, T^*), \mathcal{X}^{-2}\right) \cap L^\infty\left([0, T^*); \mathcal{X}^{-2}\right) \cap L^1\left([0, T^*), \mathcal{X}^0\right)$.
Par contradiction, supposons que $T^* < \infty$ et

$$\int_0^{T^*} \|(v, w)\|_{\mathcal{X}^0} < \infty, \tag{2.1.8}$$

alors on peut trouver $T_0 \in (0, T^*)$ de telle sorte que

$$\|(v, w)\|_{L^1([T_0, T^*); \mathcal{X}^0)} < \frac{1}{4}.$$

Pour $t \in [T_0, T^*)$ et $s \in [T_0, t]$, nous considérons explicitement le système intégral :

$$\begin{cases} v(s) = e^{s\Delta} v_0 - \displaystyle\int_{T_0}^{s} e^{(s-\tau)\Delta} \nabla \cdot \left(v \nabla (-\Delta)^{-1}(w - v)\right)(\tau) d\tau \\ w(s) = e^{s\Delta} w_0 + \displaystyle\int_{T_0}^{s} e^{(s-\tau)\Delta} \nabla \cdot \left(w \nabla (-\Delta)^{-1}(w - v)\right)(\tau) d\tau. \end{cases} \tag{2.1.9}$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à $\xi$, on obtient en suivant le même argument que celui utilisé pour prouver le Lemme 2.1.6. (avec $\rho_0 = \infty$), on trouve

$$\begin{aligned} &\|v(s)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \\ &\lesssim \|v(T_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} + \|v \nabla \phi\|_{L^1([T_0, s), \mathcal{X}^{-1})} \\ &\lesssim \|v(T_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} + \sup_{T_0 \le s \le t} \|(v(s), w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}} \|(v, w)\|_{L^1([T_0, s), \mathcal{X}^0)} \\ &\lesssim \|v(T_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} + \frac{1}{4} \sup_{T_0 \le s \le t} \|(v(s), w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\|w(s)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim \|w(T_0)\|_{\mathcal{X}^{-2}} + \frac{1}{4} \sup_{T_0 \le s \le t} \|(v(s), w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

Il s'ensuit que

$$\|(v(s),w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}} \lesssim \|(v(T_0),w(T_0))\|_{\mathcal{X}^{-2}} + \frac{1}{2}\sup_{T_0\leq s\leq t}\|(v(s),w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}}.$$

Par conséquent,

$$\sup_{T_0\leq s\leq t}\|(v(s),w(s))\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq 2\|(v(T_0),w(T_0))\|_{\mathcal{X}^{-2}}, \forall t\in[T_0,T^*).$$

Posons

$$N = \max\left(2\,\|(v(T_0),w(T_0))\|_{\mathcal{X}^{-2}}\,;\max_{t\in[0,T_0]}\|(v(t),w(t))\|_{\mathcal{X}^{-2}}\right).$$

Donc, nous déduisons que

$$\|(v(t),w(t))\|_{\mathcal{X}^{-2}} \leq N, \forall t\in[T_0,T^*). \tag{2.1.10}$$

Soit $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\kappa_n \nearrow T^*$, où $\kappa_n \in (0,T^*)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Nous voulons montrer que

$$\lim_{n,m\to\infty}\|(v,w)\,(\kappa_m)-(v,w)\,(\kappa_n)\|_{\mathcal{X}^{-2}} = 0. \tag{2.1.11}$$

Afin d'atteindre cet objectif, nous utilisons la forme intégrale de $(v,w)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
&(v,w)(\kappa_m)-(v,w)(\kappa_n)\\
&=\left([e^{\kappa_m\Delta}-e^{\kappa_n\Delta}]v_0,[e^{\kappa_m\Delta}-e^{\kappa_n\Delta}]w_0\right)\\
&\quad-\left(\int_{\kappa_n}^{\kappa_m}e^{(\kappa_m-z)\Delta}\nabla\cdot(v\nabla\phi)\;dz,\int_{\kappa_n}^{\kappa_m}e^{(\kappa_m-z)\Delta}\nabla\cdot(w\nabla\phi)\;dz\right)\\
&\quad-\left(\int_0^{\kappa_n}e^{(\kappa_n-z)\Delta}(e^{(\kappa_m-\kappa_n)\Delta}-1)\nabla\cdot(v\nabla\phi)\;dz,\int_0^{\kappa_n}e^{(\kappa_n-z)\Delta}(e^{(\kappa_m-\kappa_n)\Delta}-1)\nabla\cdot(w\nabla\phi)\;dz\right)\\
&:=\mathcal{E}_1(m,n)+\mathcal{E}_2(m,n)+\mathcal{E}_3(m,n).
\end{aligned}$$

Nous allons estimer $\mathcal{R}_1(m,n)$, $\mathcal{R}_2(m,n)$, et $\mathcal{R}_3(m,n)$. D'abord, nous avons

$$\begin{aligned}
\|[e^{\kappa_m\Delta}-e^{\kappa_n\Delta}]v_0\|_{\mathcal{X}^{-2}} &= \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\left|\left(e^{\kappa_m|\xi|^2}-e^{\kappa_n|\xi|^2}\right)\hat{v}_0\right|d\xi\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\left|\left(e^{\kappa_m|\xi|^2}-e^{T^*|\xi|^2}\right)\hat{v}_0\right|d\xi,
\end{aligned}$$

où $\kappa_n < T^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par conséquent, en utilisant le fait que $v_0\in\mathcal{X}^{-2}$, il découle du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|[e^{\kappa_m\Delta}-e^{\kappa_n\Delta}]v_0\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} = 0.$$

En suivant un argument similaire, on a

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|[e^{\kappa_m\Delta}-e^{\kappa_n\Delta}]w_0\right\|_{\mathcal{X}^{-2}} = 0.$$

D'où,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\mathcal{E}_1(m,n)\|_{\mathcal{X}^{-2}} = 0.$$

De plus, en utilisant le Lemme 2.1.8 et le Lemme 2.1.6, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\kappa_n}^{\kappa_m} \left\| e^{(\kappa_m - z)\Delta} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \right\|_{\mathcal{X}^{-2}} dz \\
&\lesssim \int_{\kappa_n}^{T^*} \|\nu \nabla \phi\|_{\mathcal{X}^{-1}} dz \\
&\lesssim \int_{\kappa_n}^{T^*} \|(\nu, w)\|_{\mathcal{X}^{-2}} \|(\nu, w)\|_{\mathcal{X}^{0}} dz \\
&\lesssim \|(\nu, w)\|_{L^2([\kappa_n, T^*)\mathcal{X}^{-2})} \|(\nu, w)\|_{L^2([\kappa_n, T^*)\mathcal{X}^{0})} .
\end{aligned}$$

En utilisant (3.4.2), l'inégalité de Hölder, et l'estimation (3.4.1), on aura

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa_n}^{\kappa_m} \left\| e^{(\kappa_m - z)\Delta} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \right\|_{\mathcal{X}^{-2}} dz &\lesssim \left( \int_{\kappa_n}^{T^*} \|(\nu, w)\|^2_{\mathcal{X}^{0}} dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(T^* - \kappa_n)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{\kappa_n}^{\kappa_m} \left\| e^{(\kappa_m - z)\Delta} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \right\|_{\mathcal{X}^{-2}} dz = 0.$$

De manière analogue, on déduit

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{\kappa_n}^{\kappa_m} \left\| e^{(\kappa_m - z)\Delta} \nabla \cdot (w \nabla \phi) \right\|_{\mathcal{X}^{-2}} dz = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\mathcal{E}_2(m,n)\|_{\mathcal{X}^{-2}} dz = 0.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
&\| \int_{0}^{\kappa_n} e^{(\kappa_n - z)\Delta} (e^{(\kappa_m - \kappa_n)\Delta} - 1) \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \ dz \|_{\mathcal{X}^{-2}} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2} \int_{0}^{\kappa_n} e^{-(\kappa_m - z)|\xi|^2} \left| (1 - e^{-(\kappa_m - \kappa_n)|\xi|^2}) \widehat{\nabla \cdot \nu \nabla \phi} \right| dz d\xi \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} \int_{0}^{T^*} \left| (1 - e^{-(T^* - \kappa_n)|\xi|^2}) \widehat{\nu \nabla \phi} \right| dz d\xi,
\end{aligned}$$

où $\kappa_n < T^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'hypothèse (3.4.1) et l'estimation (3.4.2) on obtient

$$\int_{0}^{T^*} \|\nu \nabla \phi\|_{\mathcal{X}^{-1}} dz < \infty.$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, nous déduisons

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\int_0^{\kappa_n} e^{(\kappa_n-z)\Delta}(e^{(\kappa_m-\kappa_n)\Delta}-1)\nabla\cdot(v\nabla\phi)\ dz\right\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

En outre, en procédant de manière analogue, on conclut que

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\int_0^{\kappa_n} e^{(\kappa_n-z)\Delta}(e^{(\kappa_m-\kappa_n)\Delta}-1)\nabla\cdot(w\nabla\phi)\ dz\right\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

Il en résulte que,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|\mathcal{E}_3(m,n)\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|(v,w)\,(\kappa_m)-(v,w)\,(\kappa_n)\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

Ceci implique que la suite $((v,w)(\kappa_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy à $T^*$ dans l'espace de Banach $\mathcal{X}^{-2}$. Alors, il existe un élément $(v^*,w^*)$ dans $\mathcal{X}^{-2}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\|(v,w)\,(\kappa_n)-(v^*,w^*)\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

Nous soulignons que les limites ci-dessus sont indépendantes de $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En d'autres termes,

$$\lim_{t\nearrow T^*}\|(v,w)\,(t)-(v^*,w^*)\|_{\mathcal{X}^{-2}}=0.$$

Maintenant, considérons le système (2.0.1) avec les données initiales $(v^*,w^*)$, au lieu de $(v_0,w_0)$.

$$\begin{cases}\partial_t v=\Delta v-\nabla\cdot(v\nabla\phi),\\ \partial_t w=\Delta w+\nabla\cdot(w\nabla\phi),\\ \Delta\phi=v-w,\\ \nabla\cdot v=\nabla\cdot w=0\\ v(x,0)=v^*,\quad w(x,0)=w^*.\end{cases}$$

Nous nous assurons, par le Théorème 2.1.1, l'existence et l'unicité de $(\mathcal{V},\mathcal{W})\in\mathcal{C}\left([0,t_0)\,,\mathcal{X}^{-2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ $(t_0>0)$ pour le système (2.0.1) . De ce fait,

$$(\tilde{v},\tilde{w})(t)=\begin{cases}(v,w)(t), & \text{si } t\in[0,T^*)\\ (\mathcal{V},\mathcal{W})\,(t-T^*) & \text{si} t\in[T^*,T^*+t_0]\,,\end{cases}$$

est une solution de (2.0.1) avec les données initiales $(v_0,w_0)$ sur l'intervalle $[0,T^*+t_0]$ ce qui contredit la maximalité de $T^*$.

## 2.2 Étude du système (DHS) dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey

Dans cette section, nous étudions le système (2.0.1) dans les espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{FN}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $s = -2 + \frac{n}{p'} + \frac{\lambda}{p}$. En s'inspirant du travail de [106] et en utilisant la méthode de localisation de Fourier et la théorie de Littlewood-Paley, nous obtenons un résultat d'existence d'une solution locale de (2.0.1) pour les grandes données initiales et d'une solution globale pour les petites données initiales appartiennent à $\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q} \times \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}$.

**Remarque 2.2.1** *L'espace $\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q} \times \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}$ est critique pour le système (2.0.1). En effet, soit $v_{0,\gamma}(\xi) = \gamma^2 v_0(\gamma\xi)$, alors sa transformée de Fourier est $\widehat{v_{0,\gamma}}(\xi) = \gamma^{2-n}\hat{v}_0\left(\gamma^{-1}\xi\right)$.*
*Soit*

$$f_j(\xi) \overset{déf}{=} \varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\widehat{v_{0,\gamma}}(\xi) = \varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\gamma^{2-n}\hat{v}_0\left(\gamma^{-1}\xi\right).$$

*Par un changement de variable, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\|f_j\|_{\mathcal{M}^\lambda_p} &= \gamma^{2-n}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\hat{v}_0\left(\gamma^{-1}\xi\right)\right\|_{\mathcal{M}^\lambda_p}\\
&= \gamma^{2-n}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\gamma^{-1}\xi\right)\widehat{v_0}\left(\gamma^{-1}\xi\right)\right\|_{L^p(B(x_0,r))}\\
&= \gamma^{2-n}\gamma^{\frac{n}{p}}\gamma^{\frac{-\lambda}{p}}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0}\left(\gamma^{-1}r\right)^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{v_0}(\eta)\right\|_{L^p(B(\gamma^{-1}x_0,\gamma^{-1}r))}\\
&= 2^{\left(2-\frac{n}{p'}-\frac{\lambda}{p}\right)\log_2\gamma}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{v_0}(\eta)\right\|_{\mathcal{M}^\lambda_p},
\end{aligned}$$

*il en résulte que*

$$\begin{aligned}
&\left\|\{2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|f_j(\xi)\|_{\mathcal{M}^\lambda_p}\}\right\|_{l^q}\\
&= \left\|\{2^{j(2-\frac{n}{p'}-\frac{\lambda}{p})}2^{\log_2\gamma(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\varphi_{j-[\log_2\gamma]}\widehat{v_0}(\xi)\|_{\mathcal{M}^\lambda_p}\}\right\|_{l^q}\\
&= \left\|\{2^{(\log_2\gamma-[\log_2\gamma])(2-\frac{n}{p'}-\frac{\lambda}{p})}2^{(j-\log_2\gamma)(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\varphi_{j-[\log_2\gamma]}\widehat{v_0}(\xi)\|_{\mathcal{M}^\lambda_p}\}\right\|_{l^q}\\
&\approx \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}
\end{aligned}$$

*et puisque*

$$\varphi_j(\xi)\widehat{v_{0,\gamma}}(\xi) = \sum_{|k-j|\le 2}\varphi_j(\xi)f_k(\xi),$$

*on obtient*

$$\|v_{0,\gamma}\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} \approx \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

*De façon similaire, nous avons*

$$\|w_{0,\gamma}\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} \approx \|w_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

*Par conséquent,*

$$\|(v_{0,\gamma}, w_{0,\gamma})\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} \approx \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

Maintenant, notre résultat principal dans cette section est énoncé ci-dessous.

**Théorème 2.2.2** *Soient* $n \geq 2, \rho_0 > 2,\quad \max\{n-(n-1)p, 0\} \leq \lambda < n,\ 1 \leq p < \infty,$ $q \in [1,\infty],\ (v_0, w_0) \in \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}$ et $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0'} = 1$. *Alors il existe* $T \geq 0$ *tel que le système* (2.0.1) *a une unique solution locale* $(v, w) \in X_T$, *où*

$$X_T = \mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0, T; \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0, T; \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q}\right),$$

*et*

$$(v, w) \in \mathcal{C}\left(0, T; \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right).$$

*De plus, il existe* $K \geq 0$ *tel que si* $(v_0, w_0)$ *satisfait* $\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq K$, *alors la conclusion ci-dessus est valable pour* $T = \infty$ *; c'est-à-dire la solution* $(v, w)$ *est globale.*

### 2.2.1 Estimations bilinéaires dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey

**Lemme 2.2.3** *Soient* $I = (0, T)$, *p*, *q* $\in [1,\infty]$, $\max\{n-(n-1)p, 0\} < \lambda < n$, $\rho_0 > 2$ *et* $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0'} = 1$. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}\|\nabla.(f\nabla g)\|_{\mathfrak{L}^1\left(I;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \leq C\Bigg[&\|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(I;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right)} \times \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(I;\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q}\right)} \\ &+ \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(I;\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right)} \times \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(I;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q}\right)}\Bigg]\end{aligned}$$

*pour tout* $f \in \mathfrak{L}^{\rho_0}\left(I; \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(I; \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q}\right)$
*and* $g \in \mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(I; \mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathfrak{L}^{\rho_0}\left(I; \mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q}\right).$

**Preuve.** En appliquant la décomposition du paraproduit de Bony et la propriété de quasi-orthogonalité pour la décomposition de Littlewood-Paley, pour un j fixe, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_j(f\nabla g) &= \sum_{|k-j|\le 4}\dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}f\dot{\Delta}_k\nabla g)+\sum_{|k-j|\le 4}\dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}\nabla g\dot{\Delta}_k f)\\ &+\sum_{k\ge j-3}\dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k f\widetilde{\dot{\Delta}}_k\nabla g)\\ &= I_j^1+I_j^2+I_j^3\,.\end{aligned}$$

Alors, grâce à l'inégalité triangulaire dans $M_p^\lambda$ et dans $l^q(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla.\,(f\nabla g)\|_{\mathfrak{L}^1\left(I;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)} &\le \|f\nabla g\|_{\mathfrak{L}^1\left(I;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\\ &\le \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{\dot{\Delta}_j(f\nabla g)}\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\ &\le \{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^1}\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\ &+\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^2}\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\ &+\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\ &:= J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey et l'inégalité de Bernstein (1.6.3) avec $|\gamma|=0$, on a

$$\left\|\varphi_j\hat{f}\right\|_{L^1}\le C2^{j(\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\left\|\varphi_j\hat{f}\right\|_{M_p^\lambda}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\widehat{I_j^1}\|_{L^1(I,M_p^\lambda)} &\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\widehat{(\dot{S}_{k-1}f\dot{\Delta}_k\nabla g)}\|_{L^1(I,M_p^\lambda)}\\ &\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\varphi_k\widehat{\nabla g}\|_{L^{\rho_0'}(I,M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}\|\varphi_l\hat{f}\|_{L^{\rho_0}(I,L^1)}\\ &\lesssim \sum_{|k-j|\le 4}2^k\|\varphi_k\hat{g}\|_{L^{\rho_0'}(I,M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}2^{(\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})l}\|\varphi_l\hat{f}\|_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)}\\ &\lesssim \sum_{|k-j|\le 4}2^k\|\varphi_k\hat{g}\|_{L^{\rho_0'}(I,M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}2^{(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0})l}2^{(2-\frac{2}{\rho_0})l}\|\varphi_l\hat{f}\|_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}})}\sum_{|k-j|\le 4}2^k\Big(\sum_{l\le k-2}2^{l(2-\frac{2}{\rho_0})q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\|\varphi_k\hat{g}\|_{L^{\rho_0'}(I,M_p^\lambda)}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}})}\sum_{|k-j|\le 4}2^{k(3-\frac{2}{\rho_0})}\|\varphi_k\hat{g}\|_{L^{\rho_0'}(I,M_p^\lambda)},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\rho_0 > 2$ dans la dernière inégalité.
Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$
\begin{aligned}
J_1 &\lesssim \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \Big( \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(3-\frac{2}{\rho_0})} \|\varphi_k\widehat{g}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big( \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{(j-k)(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} 2^{k(2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}-\frac{2}{\rho_0})} \|\varphi_k\widehat{g}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho'_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho'_0}}_{p,\lambda,q})},
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho'_0} = 1$.
De même, on obtient

$$
J_2 \lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho'_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho'_0}}_{p,\lambda,q})}.
$$

Pour $J_3$, on applique d'abord l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey, l'inégalité de Bernstein (1.6.3) ($|\gamma| = 0$) ainsi que l'inégalité de Hölder, pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{I^3_j}\|_{L^1(I,M^{\lambda}_p)} &\leq \sum_{k\geq j-3} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k f \widetilde{\dot{\Delta}}_k \nabla g})\|_{L^1(I,M^{\lambda}_p)} \\
&\leq \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \sum_{|l-k|\leq 1} \|\varphi_l\widehat{\nabla g}\|_{L^{\rho_0}(I,L^1)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \sum_{|l-k|\leq 1} 2^l 2^{l(\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\varphi_l\widehat{g}\|_{L^{\rho_0}(I,M^{\lambda}_p)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \Big( \sum_{|l-k|\leq 1} 2^{l(1-\frac{2}{\rho_0})q'} \Big)^{\frac{1}{q'}} \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \\
&\lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \sum_{k\geq j-3} 2^{k(1-\frac{2}{\rho_0})} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les séries, on trouve

$$
\begin{aligned}
J_3 &\lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \Big( \sum_{k\geq j-3} 2^{k(1-\frac{2}{\rho_0})} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big( \sum_{k\geq j-3} 2^{(j-k)(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})} 2^{k(\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}-\frac{2}{\rho_0})} \|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^{\rho'_0}(I,M^{\lambda}_p)} \Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho'_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho'_0}}_{p,\lambda,q})} \sum_{i\leq 3} 2^{i(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \\
&\lesssim \|g\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} \|f\|_{\mathfrak{L}^{\rho'_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho'_0}}_{p,\lambda,q})},
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé la condition $\lambda > n-(n-1)p$ pour nous assurer que la série $\sum\limits_{i\leq 3} 2^{i(-1+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}$ converge. Enfin, nous avons terminé la preuve du Lemme 2.2.3.

### 2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.2

Pour assurer l'existence de solutions globales et locales du système (2.0.1), nous utiliserons le Lemme 1.3.1 avec l'estimation linéaire et bilinéaire que nous avons établie. Soient $\rho_0 > 2$ un nombre réel quelconque et $\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0'} = 1$. Notons que l'espace $X_T$ défini dans le Théorème 2.2.2 est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{\mathcal{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}_{p,\lambda,q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^{\rho_0'}(I,\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}_{p,\lambda,q})}.$$

Pour $T > 0$ à déterminer plus tard. Étant donné $(v,w) \in X_T$, on définit $\mathfrak{F}(v,w) = (\bar{v},\bar{w})$ comme étant la solution du problème de valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\bar{v} - \Delta\bar{v} = -\nabla\cdot\left(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right), & \bar{v}(x,0) = v_0(x) \\ \partial_t\bar{w} - \Delta\bar{w} = \nabla\cdot\left(w\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right), & \bar{w}(x,0) = w_0(x). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Évidemment, $(v,w)$ est une solution de (2.0.1) si et seulement si c'est un point fixe de $\mathfrak{F}$.

**Lemme 2.2.4** *Soit $(v,w) \in X_T$. Alors $(\bar{v},\bar{w}) \in X_T$. De plus, il existe deux constantes $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$ telles que*

$$\|(\bar{v},\bar{w})\|_{X_T} \leq C_0 \|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} + C_1\|(v,w)\|^2_{X_T}. \tag{2.2.2}$$

**Preuve.** En vertu du principe de Duhamel, le système (2.0.3) est équivalent au système intégral suivant :

$$\begin{cases} \bar{v}(t) = e^{t\Delta}v_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\left(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right)(\tau)d\tau \\ \bar{w}(t) = e^{t\Delta}w_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\left(w\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right)(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On pose

$$B_1(v,w) := -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\left(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right)(\tau)d\tau,$$

$$B_2(v,w) := \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\left(w\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\right)(\tau)d\tau,$$

alors le système intégral équivalent (2.2.3) peut être réécrit comme suit

$$(\bar{v}(t),\bar{w}(t)) = (e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0) + (B_1(v,w), B_2(v,w)). \tag{2.2.4}$$

D'après le Lemme 1.7.7 avec $s = -2 + \frac{n}{p'} + \frac{\lambda}{p}$, $\alpha = 1$, $I = [0, \infty)$ et $\rho = \rho_0$ (ou $\rho_0'$), on obtient

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}$$

et

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}},$$

il en résulte que

$$\|e^{t\Delta}v_0\|_{X_T} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

De la même manière,

$$\|e^{t\Delta}w_0\|_{X_T} \lesssim \|w_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

Donc

$$\|(e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0)\|_{X_T} \leq C_0 \,\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}. \tag{2.2.5}$$

En appliquant le Lemme 1.7.8 avec $s = -2 + \frac{n}{p'} + \frac{\lambda}{p}$, $\alpha = 1$, $r = 1$, et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|B_1(v,w)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)}\\
&= \|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla\cdot\big(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\big)(\tau)d\tau\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)}\\
&\lesssim \|\nabla\cdot\big(v\nabla(-\Delta)^{-1}(w-v)\big)\|_{\mathfrak{L}^{1}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\\
&\lesssim \|v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \times \|(-\Delta)^{-1}(w-v)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)}\\
&\qquad + \|(-\Delta)^{-1}(w-v)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \times \|v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)}\\
&\lesssim \|v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \times \|w-v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)}\\
&\qquad + \|w-v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \times \|v\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)}\\
&\lesssim \left(\|(v,w)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}}\right)} \times \|(v,w)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)}\right)\\
&\lesssim \|(v,w)\|_{X_T}^2.
\end{aligned}$$

De manière analogue, nous obtenons

$$\|B_1(v,w)\|_{\mathfrak{L}^{\rho_0'}\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}}\right)} \lesssim \|(v,w)\|_{X_T}^2.$$

Ainsi, nous pouvons déduire

$$\|B_1(v,w)\|_{X_T} \lesssim \|(v,w)\|_{X_T}^2.$$

De même,

$$\|B_2(v,w)\|_{X_T} \lesssim \|(v,w)\|_{X_T}^2.$$

Et pour conclure,

$$\|(B_1(v,w),B_2(v,w))\|_{X_T} \leq C_1\|(v,w)\|_{X_T}^2. \tag{2.2.6}$$

En combinant (2.2.5) et (2.2.6), on obtient

$$\|(\bar{v},\bar{w})\|_{X_T} \leq C_0\left\|(v_0,w_0)\right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} + C_1\|(v,w)\|_{X_T}^2.$$

Le dernier lemme assure que $\mathfrak{F}$ est bien définie et qu'il fait correspondre $X_T$ à lui-même. Nous montrons d'abord l'existence globale avec petites données initiales. Pour cela, nous choisissons $T=\infty$.

D'après le Lemme 2.2.4, nous avons

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}(v,w)\|_{X_\infty} &\leq C_0\left\|(v_0,w_0)\right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} + C_1\|(v,w)\|_{X_\infty}^2\\ &\leq C_0\left\|(v_0,w_0)\right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} + 4C_1\varepsilon^2.\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon < \frac{1}{8\max\{C_0,C_1\}}$ pour tout $(v_0,w_0)\in\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$,
avec $\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} < \frac{\varepsilon}{8\max\{C_0,C_1\}}$, on obtient

$$\|\mathfrak{F}(v,w)\|_{X_\infty} < \varepsilon.$$

Pour conclure, en utilisant le Lemme 1.3.1, nous obtenons une solution globale unique pour des petites données initiales dans la boule fermée $\bar{B}(0,2\varepsilon)=\{x\in X_\infty \;:\; \|x\|_{X_\infty}\leq 2\varepsilon\}$.

Pour l'existence locale, on décompose la donnée initiale $v_0$ en deux termes

$$v_0 = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{B(0,\delta)}\hat{v}_0\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{B^C(0,\delta)}\hat{v}_0\right) := v_{0,1}+v_{0,2},$$

où $\delta=\delta\left(v_0\right)>0$ est un nombre réel. De même, on décompose $w_0$ :

$$w_0 = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{B(0,\delta)}\hat{w}_0\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{B^C(0,\delta)}\hat{w}_0\right) := w_{0,1}+w_{0,2}.$$

Puisque

$$\begin{cases} v_{0,2} \longrightarrow 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}} \ \text{ quand } \quad \delta \to +\infty, \\ w_{0,2} \longrightarrow 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}} \ \text{ quand } \quad \delta \to +\infty, \end{cases}$$

il existe $\delta$ assez grand tel que

$$C_0 \|(v_{0,2}, w_{0,2})\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc

$$\left\|\left(e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0\right)\right\|_{X_T} \leq \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{X_T} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.7}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{X_T} \\ &= \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}})} + \left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho_0'}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}})}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|\xi| \approx 2^j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on trouve

$$\begin{aligned} &\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}})} \\ &= \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0})q} \|\varphi_j \widehat{e^{t\Delta}v_{0,1}}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \\ &\quad + \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0})q} \|\varphi_j \widehat{e^{t\Delta}w_{0,1}}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \\ &= \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} 2^{j(\frac{2}{\rho_0})q} \|\varphi_j |\xi|^2 \chi_{B(0,\delta)} \widehat{v_0}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \\ &\quad + \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} 2^{j(\frac{2}{\rho_0})q} \|\varphi_j |\xi|^2 \chi_{B(0,\delta)} \widehat{w_0}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \\ &\lesssim \delta^{2+\frac{2}{\rho_0}} \Big( \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\varphi_j \widehat{v_0}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \\ &\quad + \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\varphi_j \widehat{w_0}\|^q_{L^{\rho_0}(I,M_p^\lambda)} \Big\}^{1/q} \Big) \\ &\lesssim \delta^{2+\frac{2}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho_0}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0}})} \leq C_2 \delta^{2+\frac{2}{\rho_0}} T^{\frac{1}{\rho_0}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

En procédant de la même manière on obtient,

$$\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho_0'}(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2}{\rho_0'}})} \leq C_2 \delta^{2+\frac{2}{\rho_0'}} T^{\frac{1}{\rho_0'}} \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

D'où, $\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{X_T} \leq C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0}}T^{\frac{1}{\rho_0}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}$

$$+C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0'}}T^{\frac{1}{\rho_0'}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

Nous choisissons T suffisamment petit pour que

$$\begin{cases} C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0}}T^{\frac{1}{\rho_0}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{and} \\ C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0'}}T^{\frac{1}{\rho_0'}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{cases}$$

Donc, si

$$T \leq \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}}\right)^{\rho_0}, \left(\frac{\varepsilon}{4C_2\delta^{2+\frac{2}{\rho_0'}}\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}}\right)^{\rho_0'}\right\},$$

Alors $\left\|\left(e^{t\Delta}v_{0,1}, e^{t\Delta}w_{0,1}\right)\right\|_{X_T} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ce résultat avec l'estimation (2.2.7) entraine $\left\|\left(e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}w_0\right)\right\|_{X_T} \leq \varepsilon$. Par conséquent, en appliquant à nouveau le Lemme 1.3.1, on obtient un point fixe de $\mathfrak{F}$ dans la boule fermée $\bar{B}(0,2\varepsilon) = \{x \in X_T : \|x\|_{X_T} \leq 2\varepsilon\}$. Ainsi, pour tout $(v_0,w_0) \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$, le système (2.0.1) a une solution locale unique dans $\bar{B}(0,2\varepsilon)$.

**Régularité** : On sait que si $(v,w) \in X_T \times X_T$ est une solution de (2.0.1), alors on peut montrer que

$$\nabla\cdot(v\nabla\phi),\ \ \nabla\cdot(w\nabla\phi) \in \mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right).$$

En utilisant la définition de l'espace de Fourier-Besov-Morrey, nous avons

$$\begin{aligned} &\|v(t_1)-v(t_2)\|^q_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} \\ &\leq \sum_{j\leq N}\left(2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\hat{v}_j(t_1)-\hat{v}_j(t_2)\|_{M_p^\lambda}\right)^q + 2\sum_{j>N}\left(2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\hat{v}_j(t)\|_{L^\infty(I,M_p^\lambda)}\right)^q, \end{aligned}$$

où $\hat{v}_j = \varphi_j\hat{v}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons N assez grand pour que

$$\sum_{j>N}2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\hat{v}_j(t)\|^q_{L^\infty(I,M_p^\lambda)} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Grâce à la formule de Taylor, il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\leq N}\left(2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\hat{v}_j(t_1)-\hat{v}_j(t_2)\|_{M_p^\lambda}\right)^q\\
&\lesssim |t_1-t_2|^q\sum_{j\leq N}2^{j(-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\left\|\widehat{(\partial_t u)}_j\right\|^q_{L^1\left(I,M_p^\lambda\right)}\\
&\lesssim |t_1-t_2|^q\times\|\partial_t u\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\\
&\lesssim |t_1-t_2|^q\times\left(\|\Delta v\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}+\|\nabla\cdot(v\nabla\phi)\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\right)\\
&\lesssim |t_1-t_2|^q\times\left(\|v\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}+\|\nabla\cdot(v\nabla\phi)\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\right)\\
&\lesssim |t_1-t_2|^q\times\left(\|v_0\|^q_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}+2\|\nabla\cdot(v\nabla\phi)\|^q_{\mathfrak{L}^1\left(0,T;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la continuité de $v$ par rapport au temps $t$. De même, on utilise la même technique pour obtenir la continuité de $w$ par rapport au temps $t$, donc $(v,w)\in C\left([0,T);\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)$.

## 2.3 Etude du système (DHS) dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey à exposants variables

Avant d'exposer nos résultats, on rappelle en premier lieu un lemme qui sera utilisé dans notre étude.

**Proposition 2.3.1** *([110]) Soient $1\leq p,q,r,r_1,r_2\leq\infty$ et $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ tels que $s_1<\frac{n}{p'}$, $s_2<\frac{n}{p'}$ et $s_1+s_2>\max\left\{\frac{n}{p'}-\frac{n}{p},0\right\}$, où $1/p+1/p'=1$. Alors pour $u\in\mathcal{F}B^{s_1}_{p,q}, v\in\mathcal{F}B^{s_2}_{p,q}$, on a*

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^r(0,T;\mathcal{F}B^{s_1+s_2-n/p'}_{p,q})}\leq C\|u\|_{\mathcal{L}^{r_1}(0,T;\mathcal{F}B^{s_1}_{p,q})}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_2}(0,T;\mathcal{F}B^{s_2}_{p,q})},\tag{2.3.1}$$

*où $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$.*

**Remarque 2.3.2** *Si on prend $p=2$, alors par l'identité de Plancherel l'estimation (2.3.1) devient*

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^r(0,T;\mathcal{FN}^{s_1+s_2-n/p'}_{2,2,q})}\leq C\|u\|_{\mathcal{L}^{r_1}(0,T;\mathcal{FN}^{s_1}_{2,2,q})}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_2}(0,T;\mathcal{FN}^{s_2}_{2,2,q})}.$$

### 2.3.1 Existence globale

Dans cette partie, nous utilisons le principe de contraction de Banach afin d'obtenir l'existence de solution globale du système (2.0.1).

Tout d'abord, nous considérons le problème de Cauchy de l'équation dissipative :

$$\begin{cases} u_t + \mu(-\Delta)^{\alpha} u = f(x,\ t) \text{ dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) \ = u_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

pour laquelle nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.3.3** *Soient* $I = [0,\ T),\ \ T \in (0,\ \infty],\ 1 \le \theta,\ \ q \le \infty,\ s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ *et* $p(\cdot)$, $p_1(\cdot),\ \lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ *telles que* $p_1(\cdot) \le p(\cdot),\ \ p(\cdot) \le \lambda(\cdot) < \infty$. *Supposons que* $u_0 \in \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$ *et* $f \in \mathcal{L}^{\theta}(I, \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})$. *Alors le problème de Cauchy* (2.3.2) *a une solution unique* $u \in \mathcal{L}^{\infty}(I; \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}) \cap \mathcal{L}^{\theta}(I; \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})$ *de telle sorte que pour tout* $\theta_1 \in [\theta,\ \infty]$,

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}(I, \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta_1}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} + \|f\|_{\mathcal{L}^{\theta}(I, \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})}. \tag{2.3.3}$$

*En outre, si* $q < \infty$, *alors* $u \in \mathcal{C}(I, \mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})$.

**Preuve.** D'après le Lemme 5 de Abidin [1, p7], on sait déjà que l'estimation linéaire (2.3.3) est établie. Dans ce qui suit, nous allons montrer la continuité de $u(t,x)$ en temps $t$ lorsque $q$ est fini $(q < \infty)$. Pour $t_1, t_2 \in I$,

$$\begin{aligned} &\|u\,(t_1) - u\,(t_2)\|^q_{\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \\ &\le \sum_{j \le K} \left\| 2^{j(s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)})} \left(\hat{u}_j\,(t_1) - \hat{u}_j\,(t_2)\,\right) \right\|^q_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}} \\ &+ 2 \sum_{j > K} \left\| 2^{j(s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)})} \hat{u}_j(t) \right\|^q_{L^{\infty}\left(I, \mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}\right)}, \end{aligned}$$

où $\widehat{u}_j = \varphi_j \widehat{u}$. Pour chaque petite constante $\varepsilon > 0$, prenons $K$ suffisamment grand pour que

$$\sum_{j > K} \left\| 2^{j(s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)})} \hat{u}_j(t) \right\|^q_{L^{\infty}\left(I, \mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}\right)} \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

En appliquant la formule de Taylor, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\leq K}\left\|2^{j(s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)})}\left(\hat{u}_j(t_1)-\hat{u}_j(t_2)\right)\right\|^q_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}}\\
&\lesssim |t_1-t_2|^{\frac{q}{\theta'}}2^{qK\left(2\alpha-\frac{2\alpha}{\theta}\right)}\sum_{j\leq K}\left\|2^{j(s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha)}(\widehat{\partial_t u})_j\right\|^q_{L^\theta\left(I,\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}\right)}\\
&\lesssim |t_1-t_2|^{\frac{q}{\theta'}}\times\|\partial_t u\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})}\\
&\lesssim |t_1-t_2|^{\frac{q}{\theta'}}\times\left(\|(-\Delta)^\alpha u\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})}+\|f\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})}\right)\\
&\lesssim |t_1-t_2|^{\frac{q}{\theta'}}\times\left(\|u\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})}+\|f\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q})}\right)\\
&\lesssim |t_1-t_2|^{\frac{q}{\theta'}}\times\left(\|u_0\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})}+2\|f\|^q_{\mathcal{L}^\theta(I,\mathcal{FN}^{s(\cdot)+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}-2\alpha}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})}\right),
\end{aligned}
$$

où l'estimation (2.3.3) est utilisée dans la dernière inégalité. Ainsi, on obtient la continuité de $u$ par rapport au temps $t$.

**Théorème 2.3.4** *Soient* $n>3$, $p(\cdot),\lambda(\cdot)\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)\cap C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $2<r\leq+\infty$, $2\leq p(\cdot)\leq 6$, $p(\cdot)\leq\lambda(\cdot)<\infty$ *et* $1\leq q<3$. *Alors, il existe une constante positive* $\sigma_0$ *telle que pour toute données initiales* $(v_0,w_0)\in\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$ *avec*

$$\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}\leq\sigma_0,$$

*le système* (2.0.1) *a une solution globale unique* $(v,w)\in\mathcal{Y}$, *où*

$$\mathcal{Y}:=\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)\cap\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q}\right)\cap\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}}_{2,2,q}\right).$$

*En outre,*

$$\|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}\lesssim\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

**Remarque 2.3.5**
— *Le Théorème 3.0.1 peut être considéré comme un complément aux résultats antérieurs correspondants au système de Debye-Hückel dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey classiques.*
— *On n'a pas pu montrer l'existence globale pour* (2.0.1) *dans le cas où* $2\leq n\leq 3$. *Il s'agit là d'une question ouverte.*

**Preuve du Théorème 3.0.1.** D'après le principe de Duhamel, la solution $(v, w)$ du système (2.0.1) peut être représentée comme suit

$$
\begin{aligned}
v &= \mathcal{S}(t)v_0 - \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)\nabla \cdot (v\nabla\phi)(\cdot,\tau)d\tau := \mathcal{Q}_1(v,w),\\
w &= \mathcal{S}(t)w_0 - \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)\nabla \cdot (w\nabla\phi)(\cdot,\tau)d\tau := \mathcal{Q}_2(v,w),
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{S}(t)u := e^{t\Delta}u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}(u))$.

Il est important de noter que l'espace $\mathcal{Y}$ défini dans le Théorème 3.0.1 est un espace de Banach équipé de la norme

$$
\|u\|_{\mathcal{Y}} = \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}}_{2,2,q})}.
$$

Posons

$$
B(v,\phi) := \int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)\nabla \cdot (v\nabla\phi)(\tau,x)d\tau.
$$

Nous définissons l'application G de la manière suivante :

$$
G(v,w) := (\mathcal{Q}_1(v,w), \mathcal{Q}_2(v,w)) = (v,w).
$$

Notez que $\mathcal{S}(t)v_0$ peut être considérée comme la solution de l'équation (2.3.2) avec $f = 0$. D'après le Lemme 2.3.3 et en tenant compte de l'hypothèse $p(\cdot) \geq 2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}(t)v_0\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},\\
&\|\mathcal{S}(t)v_0\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q}\right)} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},\\
&\|\mathcal{S}(t)v_0\|_{\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}}_{2,2,q}\right)} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.
\end{aligned}
$$

Donc, $\|\mathcal{S}(t)v_0\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$.

De même, $\|\mathcal{S}(t)w_0\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|w_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$. Ainsi

$$
\|(\mathcal{S}(t)v_0, \mathcal{S}(t)w_0)\|_{\mathcal{Y}} \leq C_1 \|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}. \tag{2.3.4}
$$

Nous avons l'estimation bilinéaire suivante

$$
\|B(v,\phi)\|_{\mathcal{Y}} \leq C_2\|(v,w)\|^2_{\mathcal{Y}}. \tag{2.3.5}
$$

En effet, soit $p^\star(\cdot) = \frac{6p(\cdot)}{6-p(\cdot)}$ et $s(\cdot) = -2 + \frac{n}{p'(\cdot)} + \frac{2}{r}$, en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Hausdorf-Young, l'inégalité de Young, l'inclusion (1.9.2) et la Proposition 2.3.1, nous aurons

$$
\begin{aligned}
&\|B(v,\phi)\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)} \qquad (2.3.6)\\
&= \left\|\int_0^t \mathcal{S}(t-\tau)\nabla\cdot(v\nabla\phi)d\tau\right\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t 2^{js(\cdot)}\varphi_j e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\mathcal{F}\big(\nabla\cdot(v\nabla\phi)\big)d\tau\right\|_{L^r\left(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)}\right)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t \left\|r^{\frac{-n}{p^\star(\cdot)}}2^{j(s(\cdot)+1)}\varphi_j e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\right\|_{L^{p^\star(\cdot)}}\|\mathcal{F}(v\nabla\phi)\|_{M^{\lambda(\cdot)}_6}d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t \left\|r^{\frac{-n}{p^\star(\cdot)}}2^{j(s(\cdot)+1)}\varphi_j e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\right\|_{L^{p^\star(\cdot)}}\|v\nabla\phi\|_{M^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{5}}}d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t 2^{j\left(-1+\frac{5n}{6}+\frac{2}{r}\right)}e^{-(t-\tau)2^{2j}}\left\|r^{\frac{-n}{p^\star(\cdot)}}2^{-nj\frac{1}{p^\star(\cdot)}}\varphi_j\right\|_{L^{p^\star(\cdot)}}\|\dot{\Delta}_j(v\nabla\phi)\|_{M^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{5}}}d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|2^{j\left(-3+\frac{5n}{6}+\frac{2}{r}\right)}\|\dot{\Delta}_j(v\nabla\phi)\|_{M^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{5}}}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}\left\|e^{-t2^{2j}}2^{2j}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q} \qquad (2.3.7)\\
&\lesssim \left\|\left\|2^{j\left(-3+\frac{5n}{6}+\frac{2}{r}\right)}\|\dot{\Delta}_j(v\nabla\phi)\|_{L^{\frac{6}{5}}}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \|v\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{-3+\frac{5n}{6}+\frac{2}{r}}_{\frac{6}{5},q})}\\
&\lesssim \|v\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-3+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q})}\\
&\lesssim \|v\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}}_{2,2,q})}\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-1+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q})},
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'estimation suivante dans l'inégalité (2.3.7) :

$$
\begin{aligned}
&\|2^{\frac{-n}{p^\star(\cdot)}j}\varphi_j\|_{L^{p^\star(\cdot)}}\\
&= \inf\{\lambda>0 : \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{2^{\frac{-n}{p^\star(\cdot)}j}\varphi_j}{\lambda}\right|^{p^\star(\cdot)}dx \le 1\}\\
&= \inf\{\lambda>0 : \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\varphi_j}{\lambda}\right|^{p^\star(\cdot)}2^{-nj}dx \le 1\}\\
&= \inf\{\lambda>0 : \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\varphi}{\lambda}\right|^{\frac{6p(2^j)}{6-p(2^j)}}dx \le 1\}\\
&\le C.
\end{aligned}
$$

Puisque $\phi = (-\Delta)^{-1}(w - v)$, le Lemme 1.9.12 entraîne que

$$\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{2,2,q}^{-1+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}})} \lesssim \|(v,w)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{2,2,q}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}})}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\|B(v,\phi)\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}\right)}\\
&\lesssim \|v\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{2,2,q}^{-2+\frac{n}{2}})} \|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}\\
&\lesssim \|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}^2.
\end{aligned}$$

De manière similaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|B(v,\phi)\|_{\mathcal{L}^r\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{2,2,q}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}\right)\cap\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}_{2,2,q}^{-2+\frac{n}{2}}\right)}\\
&\lesssim \|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'estimation souhaitée est établie.

En utilisant l'estimation (4.1.4), on obtient

$$\|\mathcal{Q}_1(v,w)\|_{\mathcal{Y}} \le \|\mathcal{S}(t)v_0\|_{\mathcal{Y}} + C_2\,\|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

De même, on peut obtenir

$$\|\mathcal{Q}_2(v,w)\|_{\mathcal{Y}} \le \|\mathcal{S}(t)w_0\|_{\mathcal{Y}} + C_2\,\|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

$$\|G(v,w)\|_{\mathcal{Y}} \le \|(\mathcal{S}(t)v_0, \mathcal{S}(t)w_0)\|_{\mathcal{Y}} + C_2\,\|(v,w)\|_{\mathcal{Y}}^2.$$

D'après le Lemme 1.3.1, on sait que si $\|(\mathcal{S}(t)v_0, \mathcal{S}(t)w_0)\|_{\mathcal{Y}} < \kappa$ avec $\kappa = \frac{1}{4C_2}$, alors G a un point fixe dans la boule fermée $B(0,2\kappa) := \{x \in \mathcal{Y} : \|x\|_{\mathcal{Y}} \le 2\kappa\}$. D'après l'estimation (4.1.3), il existe une constante positive $C_1$ qui dépend uniquement de $n$ telle que

$$\|(\mathcal{S}(t)v_0, \mathcal{S}(t)w_0)\|_{\mathcal{Y}} \le C_1\,\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}}.$$

Ainsi, si $\|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}} < \sigma$ avec $\sigma = \frac{\kappa}{C_1}$, alors on a $\|(\mathcal{S}(t)v_0, \mathcal{S}(t)w_0)\|_{\mathcal{Y}} < \kappa$. Cela prouve l'existence globale pour des petites données initiales.

### 2.3.2 Régularité Gevrey

Dans cette partie, nous montrons l'analyticité de la solution obtenue dans le Théorème 3.0.1.

**Théorème 2.3.6** *Supposons que* $p(\cdot), \lambda(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^n), 1 \leq r \leq +\infty, 2 \leq p(\cdot) \leq 6,$ $p(\cdot) \leq \lambda(\cdot) < \infty$ *et* $1 \leq q < 3$. *Alors, il existe une constante positive* $\sigma_0'$ *telle que pour toute donnée initiale* $(v_0, w_0) \in \mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$ *avec*

$$\|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq \sigma_0',$$

*le système* (2.0.1) *a une solution analytique unique telle que*

$$\| \left(e^{\sqrt{t}|D|}v, e^{\sqrt{t}|D|}w\right) \|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|(v_0, w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},$$

*où* $e^{\sqrt{t}|D|}u = \mathcal{F}^{-1}(e^{\sqrt{t}|\xi|}\hat{u})$.

**Preuve.** On définit $V(t) = e^{\sqrt{t}|D|}v(t), W(t) = e^{\sqrt{t}|D|}w(t)$, et $\Phi(t) = e^{\sqrt{t}|D|}\phi(t) = W(t) - V(t)$. On voit alors que $(V(t), W(t))$ satisfait le système intégral suivant :

$$\begin{cases} V(t) = e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0 - \displaystyle\int_0^t e^{[(\sqrt{t}-\sqrt{s})|D|+(t-s)\Delta]}\nabla \cdot e^{\sqrt{s}|D|}\left(e^{-\sqrt{s}|D|}V(s)e^{-\sqrt{s}|D|}\nabla\Phi(s)\right) ds \\ \quad := e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0 - B(V, \Phi), \\ W(t) = e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)w_0 + \displaystyle\int_0^t e^{[(\sqrt{t}-\sqrt{s})|D|+(t-s)\Delta]}\nabla \cdot e^{\sqrt{s}|D|}\left(e^{-\sqrt{s}|D|}W(s)e^{-\sqrt{s}|D|}\nabla\Phi(s)\right) ds \\ \quad := e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)w_0 + B(W, \Phi). \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'analyticité de la solution, nous commençons par estimer le terme linéaire $e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0$. En utilisant la transformée de Fourier, en multipliant par $2^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}\varphi_j$ et en prenant la norme $L^r(\mathbb{R}^+; M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left\|2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r})}\varphi_j \widehat{e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)}v_0\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\ &\lesssim \left\|e^{\sqrt{t}|\xi|-t|\xi|^2}2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r})}\varphi_j\hat{v}_0\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\ &\lesssim \left\|e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2}2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r})}\varphi_j\hat{v}_0\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $e^{\sqrt{t}|\xi|-\frac{1}{2}t|\xi|^2} = e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{t}|\xi|-1)^2+\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}}$.
Donc, en prenant la norme $l^q$, nous pouvons conclure que

$$\left\|e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0\right\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

De manière analogue, nous avons

$$\left\|e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0\right\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}+\frac{2}{r}}_{2,2,q})} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$$

et

$$\left\|e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{2}}_{2,2,q})} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

Alors $\left\|e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0\right\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|v_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$.

De la même façon, $\left\|e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)w_0\right\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|w_0\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$.

D'où

$$\left\|(e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)v_0, e^{\sqrt{t}|D|}\mathcal{S}(t)w_0)\right\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|(v_0,w_0)\|_{\mathcal{FN}^{-2+\frac{n}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

En utilisant le Lemme 2.1.7 (pour $\beta = 2$), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|2^{j-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}}\varphi_j\widehat{\overline{B}(V,\Phi)}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}\\
&\lesssim \left\|2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}+1)}\varphi_j e^{\sqrt{t}|\xi|}\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2}(\widehat{e^{-\sqrt{\tau}|D|}Ve^{-\sqrt{\tau}|D|}\nabla\Phi})\,d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}\\
&\lesssim \left\|2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}+1)}\varphi_j e^{\sqrt{t}|\xi|}\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}(e^{-\sqrt{\tau}|\xi-y|}\widehat{V(\xi-y)}e^{-\sqrt{\tau}|y|}\widehat{\nabla\Phi(y)})\,dy\,d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}\\
&\lesssim \left\|2^{(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}+1)}\varphi_j\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\sqrt{t}|\xi|-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2-\sqrt{\tau}(|\xi-y|+|y|)}(\widehat{V(\xi-y)}\widehat{\nabla\Phi(y)})\,dy\,d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}\\
&\lesssim \left\|2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}+1)}\varphi_j\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}(\widehat{V(\xi-y)}\widehat{\nabla\Phi(y)})\,dy\,d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}\\
&\lesssim \left\|2^{j(-2+\frac{n}{p'(\cdot)}+\frac{2}{r}+1)}\varphi_j\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^2}(\widehat{V\nabla\Phi})\,d\tau\right\|_{L^r(\mathbb{R}^+;M^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}.
\end{aligned}$$

En répétant les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir l'estimation bilinéaire (4.1.4), on aboutit à

$$\left\|\overline{B}(V,\Phi)\right\|_{\mathcal{Y}} \lesssim \|(V,W)\|^2_{\mathcal{Y}}.$$

Le reste de la preuve est omis car il est analogue à la preuve du Théorème 2.1.

# Chapitre 3

# L'équation quasi-géostrophique dissipative 2D

## Contents



Dans ce chapitre, nous étudions l'équation quasi-géostrophique (QG) dissipative critique et sous-critique sur l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier.

$$\begin{cases} \partial_t\theta + K[\theta]\cdot\nabla\theta + \mu\Lambda^{2\alpha}\theta = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ K[\theta] = \left(-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta\right), \\ \theta(0,x) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Rappelons que $\alpha \geq \frac{1}{2}$ est un nombre réel, $\mu > 0$ est le coefficient dissipatif, $\theta : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire modélisant la température du fluide, et $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ désignent les transformées de Riesz usuelles dans $\mathbb{R}^2$, $K[\theta]$ est la vitesse du fluide définie par :

$$K[\theta] = \left(\partial_{x_2}(-\Delta)^{1/2}\theta, -\partial_{x_1}(-\Delta)^{1/2}\theta\right).$$

Afin de résoudre l'équation (3.0.1), nous considérons l'équation intégrale équivalente suivante qui découle du principe de Duhamel

$$\theta(t) = S_\alpha(t)\theta_0 + B(\theta,\theta)(t), \tag{3.0.2}$$

où $S_\alpha := e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ désigne l'opérateur de semi-groupe de la chaleur fractionnaire, qui peut être considéré comme l'opérateur de convolution avec le noyau $k_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^{2\alpha}})$, et

$$B(\theta, \psi)(t) = -\int_0^t S_\alpha(t-\tau)\left(K[\theta]\cdot\nabla\psi)\right)(\tau)d\tau. \tag{3.0.3}$$

Dans un premier temps, nous montrons l'existence de solutions globales pour l'équation (3.0.1), à condition que les données initiales soient petites et appartiennent à l'espace de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}$.

**Théorème 3.0.1** ***(Existence de solution globale)***
*Soient $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 2$ et $\theta_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}$. Supposons que $\alpha$ et $q$ vérifient l'une des hypothèses suivantes :*

**a)** $\frac{1}{2} < \alpha < 2 + \frac{\lambda-2}{2p}$ *et* $1 \leq q \leq \infty$,

**b)** $\alpha = 2 + \frac{\lambda-2}{2p}$ *et* $q \in [1, 2]$,

**c)** $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $q = 1$.

*Alors, il existe une constante $\beta > 0$ telle que si $\theta_0$ satisfait $\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}} \leq \beta$, l'équation (3.0.1) admet une unique solution globale $\theta \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}\right)$, tel que $\|\theta\|_X \lesssim \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}$, où*

$$X = \mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}\right).$$

*En outre, la solution $\theta$ dépend continûment de la donnée initiale $\theta_0$.*

Ensuite, nous présentons notre deuxième résultat principal qui établit l'existence d'un temps $T > 0$ et d'une unique solution locale $\theta \in \mathcal{C}\left([0,T), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right) \cap \mathcal{L}^4\left((0,T], \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right)$ pour l'équation (3.0.1).

**Théorème 3.0.2** ***(Existence de solution locale)***
*Soient $I = (0,T]$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $0 \leq \lambda < 2$ et $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{4}{3} + \frac{\lambda-2}{3p}$. Supposons que $\theta_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}$. Il existe un temps $T > 0$ tel que l'équation (3.0.1) admet une unique solution locale dans $Y_T$ avec $Y_{T=\mathcal{C}\left(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right)\cap\mathcal{L}^4\left(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right)}$.*

Si l'on suppose que le temps maximal d'existence est fini, le théorème suivant garantit un critère de blow-up pour les solutions de l'équation (3.0.1).

**Théorème 3.0.3** *Sous les hypothèses de Théorème 3.0.2. Soit* $\theta \in \mathcal{C}\left([0,T^*), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}(\mathbb{R}^2)\right) \cap \mathcal{L}^1\left([0,T^*), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}\right)$ *la solution maximale de* (3.0.1). *Alors*

$$T^* < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{T^*} \|\theta\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}} = \infty. \tag{3.0.4}$$

Enfin, nous présentons un résultat sur le comportement asymptotique des solutions dans le contexte des espaces de Fourier-Besov-Morrey.

**Théorème 3.0.4** *(**Comportement asymptotique**) Soient* $\frac{2}{3} < \alpha < 1$, $1 \leq p, \quad q \leq 2, \quad 0 \leq \lambda \leq 2-p$, *et* $\theta \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right)$ *soit une solution globale de* (3.0.1) *donnée par le Théorème* 3.0.2. *Alors,*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}} = 0.$$

**Remarque 3.0.5** *Il est important de noter que des résultats similaires ont été prouvés par Benameur et Benhamed [21], dans lesquels ils considèrent la même équation dans l' espace de Lei-Lin (qui est un cas particulier des espaces de Fourier-Besov-Morrey en prenant* $p = q = 1$ *et* $\lambda = 0$*). Par conséquent, nos résultats étendent ceux de [21].*

La preuve du Théorème 3.0.3 nécessite le lemme suivant :

**Lemme 3.0.6** *Soient* $T > 0$, $\alpha > 0$, $s \in \mathbb{R}$, *et* $U, V \in S'(\mathbb{R}^2)$ *tels que* $\operatorname{div} U = 0$. *Alors,*

$$\int_0^t \left\| e^{-(t-z)\Lambda^{2\alpha}} U \cdot \nabla V \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{s}} dz \leq \int_0^t \|U \cdot V\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{s+1}} dz,$$

*pour tout* $t \in (0, T]$.

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\| e^{-(t-z)\Lambda^{2\alpha}} U \cdot \nabla V \right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{s}} dz &= \int_0^t \left( \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \left\| \varphi_j \mathcal{F}(e^{-(t-z)\Lambda^{2\alpha}} U \cdot \nabla V) \right\|_{M_p^\lambda}^q \right)^{\frac{1}{q}} dz \\
&= \int_0^t \left( \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \left\| \varphi_j e^{-(t-z)\xi^{2\alpha}} \mathcal{F}(U \cdot \nabla V) \right\|_{M_p^\lambda}^q \right)^{\frac{1}{q}} dz \\
&\leq \int_0^t \left( \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\varphi_j \mathcal{F}(U \cdot \nabla V)\|_{M_p^\lambda}^q \right)^{\frac{1}{q}} dz.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la Remarque 1.7.3 et le fait que $\operatorname{div} U = 0$, il en résulte

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\,\|\varphi_j\mathcal{F}(U\cdot\nabla V)\|^q_{M_p^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\,\|\varphi_j\mathcal{F}(\operatorname{div}(U\cdot V))\|^q_{M_p^\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \int_0^t \|U\cdot V\|_{\mathcal{FN}^{s+1}_{p,\lambda,q}}\,dz,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

## 3.1 Estimations bilinéaires dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey

Dans cette section, nous allons établir deux résultats relatifs aux espaces spatio-temporels mixtes de Fourier-Besov-Morrey, qui traitent le produit de deux fonctions dans ces espaces. Nous soulignons que ces résultats sont cruciaux pour montrer les Théorèmes 3.0.1 et 3.0.2.

**Proposition 3.1.1** *Soient $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $0 \leq \lambda < 2$. Supposons que $\alpha$ et $q$ vérifient l'une des hypothèses suivantes :*

**a)** $\frac{1}{2} < \alpha < 2 + \frac{\lambda-2}{2p}$ *et* $1 \leq q \leq \infty$,

**b)** $\alpha = 2 + \frac{\lambda-2}{2p}$ *et* $q \in [1, 2]$,

**c)** $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $q = 1$.

*Alors, il existe une constante $\eta_0 > 0$ telle que*

$$\|B(\theta,\psi)\|_X \leq \eta_0\|\theta\|_X\|\psi\|_X, \tag{3.1.1}$$

*pour tout* $\theta, \psi \in X$ *avec* $X = \mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)$.

**Preuve.** Nous allons établir l'estimation (3.1.1) pour les hypothèses **a)**, **b)** et **c)**.
Commençons par l'hypothèse **a)**. En utilisant le Lemme 1.7.8 et la Remarque 1.7.3, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}\|B(\theta,\psi)\|_X &\lesssim \|K[\theta]\cdot\nabla\psi\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\\ &\lesssim \|\operatorname{div}(K[\theta]\psi)\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\\ &\lesssim \|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}.\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Donc, le reste de la preuve consiste à montrer que

$$\|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \lesssim \|\theta\|_X\|\psi\|_X. \tag{3.1.3}$$

Rappelons que $K[\theta] = (-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta)$ . Puisque $\widehat{\mathcal{R}_j\theta(\xi)} = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\theta}(\xi), j = 1, 2$, alors

$$\|\widehat{K[\theta]}\| \lesssim \|\widehat{\theta}\|. \tag{3.1.4}$$

En appliquant la décomposition du para-produit de Bony et la propriété de quasi-orthogonalité pour la décomposition de Littlewood-Paley, pour j fixe, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j(K[\theta]\psi) &= \sum_{|k-j|\le 4} \dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}K[\theta]\dot{\Delta}_k\psi) + \sum_{|k-j|\le 4} \dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}\psi\dot{\Delta}_k K[\theta]) \\
&+ \sum_{k\ge j-3} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k K[\theta]\widetilde{\dot{\Delta}}_k\psi) \\
&= I_j^1 + I_j^2 + I_j^3 .
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Par l'inégalité triangulaire dans $M_p^\lambda$ et dans $l^q(\mathbb{Z})$, on voit bien que

$$\begin{aligned}
\|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} &= \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\widehat{\dot{\Delta}_j(K[\theta]\psi)}\|^q_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\widehat{I_j^1}\|^q_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\widehat{I_j^2}\|^q_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&:= E_1 + E_2 + E_3.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Bernstein (1.6.3) (avec $|\gamma| = 0$) entraîne

$$\left\|\varphi_l\widehat{K[\theta]}\right\|_{L^1} \le C2^{l(2-\frac{2-\lambda}{p})}\left\|\varphi_l\widehat{K[\theta]}\right\|_{M_p^\lambda} \lesssim 2^{l(2+\frac{\lambda-2}{p})}\left\|\varphi_l\hat{\theta}\right\|_{M_p^\lambda}, \tag{3.1.6}$$

où nous avons utilisé (3.1.4).

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2) et l'estimation

(3.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^1}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \|(\dot{S}_{k-1}\widehat{K[\theta]\dot{\Delta}_k}\psi)\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} \|\varphi_l\widehat{K[\theta]}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^1)} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} 2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{\theta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} 2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l}2^{(2\alpha-1)l}\|\varphi_l\widehat{\theta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}2^{k(2\alpha-1)}\|2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{\theta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\|_{l^q(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} 2^{j(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})}\times \\
&\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-(j-k)(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})}\chi_{\{k';|k'|\leq 4\}}(j-k)2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} 2^{j(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})}(\mathcal{E}_{k'}*\mathcal{Q}_k)_j,
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_{k'} = 2^{-k'(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})}\chi_{\{k';|k'|\leq 4\}}$ et $\mathcal{Q}_k = 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}$.

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour les séries, on trouve

$$\begin{aligned}
E_1 &\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\|\mathcal{E}_{k'}\|_{l^1(\mathbb{Z})}\|\mathcal{Q}_k\|_{l^r(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\|\psi\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}})}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$E_2 \lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}})}.$$

Pour $E_3$, nous utilisons d'abord l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2), l'inégalité de Bernstein (avec $|\gamma| = 0$) ainsi que l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^3}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} &\leq \sum_{k\geq j-3} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k K[\theta]\tilde{\dot{\Delta}}_k\psi})\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{k\geq j-3} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k K[\theta]} * \widehat{\tilde{\dot{\Delta}}_k\psi})\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{K[\theta]}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^1)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} 2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} 2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l} 2^{l(2\alpha-1)} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} 2^{k(2\alpha-1)} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \|2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\|_{l^q(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} 2^{j(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})} \times \\
&\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-(j-k)(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})} \chi_{\{k';k'\leq 2\}}(j-k) 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} 2^{j(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})} (\mathcal{E}_{k'} * \mathcal{Q}_k)_j,
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{E}_{k'}^1 = 2^{-k'(-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p})}\chi_{\{k';k'\leq 2\}}$ et $\mathcal{Q}_k = 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}$.
Ensuite, en appliquant l'inégalité de Young pour les séries, on obtient

$$
\begin{aligned}
E_3 &\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \|\mathcal{E}_{k'}\|_{l^1(\mathbb{Z})} \|\mathcal{Q}_k\|_{l^q(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3+\frac{\lambda-2}{p}})},
\end{aligned}
$$

où la condition $\alpha < 2 + \frac{\lambda-2}{2p}$ (*i.e.*, $-4+2\alpha-\frac{\lambda-2}{p} < 0$) assure que $\mathcal{E}_{k'} \in l^1(\mathbb{Z})$.

Pour l'hypothèse **b)**, on procède de manière similaire au cas **a)**, on décompose $\dot{\Delta}_j(K[\theta]\psi)$ en trois termes $I_j^1$, $I_j^2$ et $I_j^3$. Les termes $I_j^1$ et $I_j^2$ satisfont la même estimation. Par conséquent, il suffit d'estimer le terme $I_j^3$.

$$\begin{aligned}
E_3 = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq j-3} \|\varphi_j(\widehat{\dot{\Delta}_k K[\theta]\tilde{\dot{\Delta}}_k\psi})\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq j-3}\int_{\mathbb{R}^+} \|\varphi_j(\widehat{\dot{\Delta}_k K[\theta]} * \widehat{\tilde{\dot{\Delta}}_k\psi})\|_{M_p^\lambda} \\
&\leq \sup_\xi \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j\Big)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\varphi_k\widehat{K[\theta]}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1}\|\varphi_l\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^1)} \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} 2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{|l-k|\leq 1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} 2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{|m|\leq 1} 2^{-m(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}\times \\
&\qquad 2^{(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})m+k}\|\varphi_{m+k}\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})}\|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q'})} \qquad (3.1.7)\\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{-1}_{p,\lambda,q})}\|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2\alpha-1}_{p,\lambda,q})},
\end{aligned}$$

où dans (3.1.7) nous avons utilisé la Remarque 1.7.5.

Pour terminer, on considère l'hypothèse **c)**, pour les termes $E_1$ et $E_2$, on a

$$E_1 \lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})}\|\psi\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})},$$

et

$$E_2 \lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})}\|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})}.$$

Maintenant, nous allons estimer le terme $E_3$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^3}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} &\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})} 2^{j(-3-\frac{\lambda-2}{p})}\times \\
&\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-(j-k)(-3-\frac{\lambda-2}{p})}\chi_{\{k';k'\leq 2\}}(j-k)2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})} 2^{j(-3-\frac{\lambda-2}{p})}(\mathcal{E}_{k'} * \mathcal{Q}_k)_j,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_{k'} = 2^{-k'(-3-\frac{\lambda-2}{p})}\chi_{\{k';k'\leq 2\}}$ et $\mathcal{Q}_k = 2^{k(3+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^1(\mathbb{R}^+,M_p^\lambda)}$.
En tenant compte du fait que $0<\lambda<2$ implique que $-3-\frac{\lambda-2}{p}>0$, on aura $\mathcal{E}_{k'}\in l^1(\mathbb{Z})$.

D'où

$$\begin{aligned} E_3 &\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})} \|\mathcal{E}_{k'}\|_{l^1(\mathbb{Z})} \|\mathcal{Q}_k\|_{l^q(\mathbb{Z})} \\ &\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{2+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})} \|\theta\|_{\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})}. \end{aligned}$$

Ce qui finit la preuve de la Proposition 3.1.1.

**Remarque 3.1.2** *En suivant un argument similaire à celui présenté ci-dessus, nous obtenons*

$$\|\theta \cdot V\|_{\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \|V\|_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{3.1.8}$$

*En particulier*

$$\|\theta \cdot \theta\|_{\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{3.1.9}$$

**Proposition 3.1.3** *Sous les hypothèses du Théorème 3.0.1, il existe une constante* $\eta_1 > 0$ *telle que*

$$\|B(\theta,\psi)\|_{Y_T} \leq \eta_1 \|\theta\|_{Y_T} \|\psi\|_{Y_T},$$

*pour tout* $\theta, \psi \in Y_T$.

**Preuve.** La preuve de cette proposition s'appuie sur les mêmes techniques utilisées dans la démonstration de (3.1.1). En appliquant le Lemme 1.7.8, on déduit

$$\begin{aligned} \|B(\theta,\psi)\|_{Y_T} &= \Big\| \int_0^t S_\alpha(t-\tau)\left(K[\theta]\cdot\nabla\psi\right)(\tau)d\tau \Big\|_{\mathcal{L}^4\left(I,\mathcal{FN}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\ &\lesssim \|K[\theta]\cdot\nabla\psi\|_{\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}^{3-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\ &\lesssim \|\mathrm{div}(K[\theta]\psi)\|_{\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}^{3-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\ &\lesssim \|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}^{4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Pour conclure, nous allons montrer que

$$\|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}^{4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \lesssim \|\theta\|_{Y_T}\|\psi\|_{Y_T}. \tag{3.1.11}$$

Pour ce faire, nous appliquons la décomposition de Bony comme dans (3.1.5)

$$\begin{aligned} \varphi_j(\widehat{K[\theta]\psi}) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \varphi_j(\widehat{\dot{S}_{k-1}K[\theta]} * \varphi_k\widehat{\psi}) + \sum_{|k-j|\leq 4} \varphi_j(\widehat{\dot{S}_{k-1}\psi} * \varphi_k\widehat{K[\theta]}) \\ &+ \sum_{k\geq j-3} \varphi_j(\varphi_k\widehat{K[\theta]} * \widehat{\widetilde{\dot{\Delta}}_k\psi}) \\ &= II_j^1 + II_j^2 + II_j^3. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire dans $M_p^\lambda$ et dans $l^q(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned}
\|K[\theta]\psi\|_{\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}\right)} &= \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\varphi_j(\widehat{K[\theta]\psi})\|^q_{L^2(I,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|I_j^1\|^q_{L^2(I,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&+ \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|I_j^2\|^q_{L^2(I,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&+ \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|I_j^3\|^q_{L^2(I,M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&:= L_1 + L_2 + L_3.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2) et l'estimation (3.1.6), on a

$$\begin{aligned}
\|II_j^1\|_{L^2(I,M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \|\widehat{\dot{S}_{k-1}K[\theta]} * \varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^2(I,M_p^\lambda)}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} \|\varphi_l\widehat{k[\theta]}\|_{L^4(I,L^1)}\\
&\lesssim \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} 2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\\
&\lesssim \sum_{|k-j|\leq 4} \|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \sum_{l\leq k-2} 2^{(3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p})l}2^{(\frac{3}{2}\alpha-1)l}\|\varphi_l\widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \sum_{|k-j|\leq 4}\left(\sum_{l\leq k-2} 2^{l(\frac{3}{2}\alpha-1)q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(\frac{3}{2}\alpha-1)}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young pour les séries, on trouve

$$\begin{aligned}
L_1 &\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\Big(\sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(\frac{3}{2}\alpha-1)}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\Big)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{|k-j|\leq 4} 2^{(j-k)(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})}2^{k(3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p})}\|\varphi_k\widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\Big)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})}\\
&\lesssim \|\theta\|_{Y_T}\|\psi\|_{Y_T}.
\end{aligned}$$

En procédant de manière analogue, nous garantissons une estimation similaire pour $L_2$. Plus précisément, nous obtenons

$$L_2 \lesssim \|\psi\|_{Y_T}\|\theta\|_{Y_T}.$$

Maintenant nous allons estimer le terme $II_j^3$

$$\begin{aligned}
\|II_j^3\|_{L^2(I,M_p^\lambda)} &\leq \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{K[\theta]} * \widehat{\tilde{\dot{\Delta}}_k\psi}\|_{L^2(I,M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{K[\theta]}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^4(I,L^1)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \sum_{|l-k|\leq 1} 2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l} \|\varphi_l \widehat{\psi}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)} \Big(\sum_{|l-k|\leq 1} 2^{l(\frac{3}{2}\alpha-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}} \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \sum_{k\geq j-3} 2^{k(\frac{3}{2}\alpha-1)} \|\varphi_k \widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young pour les séries, nous inférons que

$$\begin{aligned}
L_3 &\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q} \Big( \sum_{k\geq j-3} 2^{k(\frac{3}{2}\alpha-1)} \|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big( \sum_{k\geq j-3} 2^{(j-k)(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})} 2^{k(3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p})} \|\varphi_k\widehat{\theta}\|_{L^4(I,M_p^\lambda)}\Big)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \sum_{i\leq 3} 2^{i(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})} \\
&\lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \|\theta\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}})} \\
&\lesssim \|\psi\|_{Y_T}\|\theta\|_{Y_T}.
\end{aligned}$$

où la condition $\alpha < \frac{4}{3} + \frac{\lambda-2}{3p}$ assure que la série $\sum_{i\leq 3} 2^{i(4-3\alpha+\frac{\lambda-2}{p})}$ converge, ce qui achève la preuve.

A présent, nous sommes en mesure de donner la preuve du Théorème 3.0.1.

## 3.2 Preuve du Théorème 3.0.1

En vertu de la Proposition 3.1.1, nous avons l'estimation bilinéaire suivante

$$\|B(\theta,\psi)\|_X \leq \eta_0 \|\theta\|_X \|\psi\|_X. \tag{3.2.1}$$

Par le Lemme 1.7.7, nous avons la partie linéaire dans (3.0.2) vérifie l'estimation suivante

$$\|S_\alpha(t)\theta_0\|_X \leq C_0\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}, \tag{3.2.2}$$

où $C_0$ est une constante.
Donc, si nous choisissons les données initiales $\theta_0$ telles que $\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \beta$ avec $\beta < \frac{1}{4\eta_0 C_0}$, alors le Lemme 1.3.1 ainsi que les estimations (3.2.1) et (3.2.2) assurent que l'équation (3.0.1) a une unique solution globale $\theta \in X$ telle que

$$\|\theta\|_X \leq 2C_0\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

En combinant l'estimation (3.2.1) avec les conditions **b)** et **c)** de la Proposition 3.1.1, nous démontrons le Théorème 3.0.1 pour les hypothèses **b)** et **c)**.

Finalement, nous allons montrer que la solution $\theta$ dépend continuellement des données initiales $\theta_0$. Pour cela, nous utilisons l'estimation (1.3.3) dans le Lemme 1.3.1 pour obtenir

$$\begin{aligned}\|\theta-\theta'\|_X &\leq \frac{1}{1-4C_0\eta_0\beta}\|S_\alpha(t)\theta_0 - S_\alpha(t)\theta_0'\|_X \\ &\leq \frac{C_0}{1-4C_0\eta_0\beta}\|\theta_0-\theta_0'\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}.\end{aligned}$$

Cette inégalité nous donne la continuité de Lipschitz pour l'application $\theta_0 \mapsto \theta$ de $\{\theta_0 \in \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}; \|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \beta\}$ à $\{\theta \in X; \|\theta\|_X \leq 2C_0\beta\}$.

La continuité par rapport au temps est standard.

## 3.3 Preuve du Théorème 3.0.2

Pour l'existence locale, nous utiliserons à nouveau le Lemme 1.7.8 pour garantir l'existence d'une solution locale pour toute donnée initiale $\theta_0$ dans l'espace de Banach $Y_T$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante quelconque telle que $\varepsilon \leq \frac{1}{4\eta_1}$. D'après la Proposition 3.1.3, on a

$$\|B(\theta,\psi)\|_{Y_T} \leq \eta_1\|\theta\|_{Y_T}\|\psi\|_{Y_T}. \tag{3.3.1}$$

En vertu du Lemme 1.7.7, nous avons la partie linéaire dans (3.0.2) vérifie

$$\|S_\alpha(t)\theta_0\|_{Y_T} \leq C_1\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{3.3.2}$$

Maintenant, on décompose $\theta_0$ en deux termes comme suit

$$\widehat{\theta_0}(\xi) = \widehat{\theta_0}\chi_{\{|\xi|\leq N\}} + \widehat{\theta_0}\chi_{\{|\xi|>N\}} := \widehat{\theta_{0,1}} + \widehat{\theta_{0,2}}.$$

Il est clair que si $N \in \mathbb{N}$ est assez grand, alors

$$C_1\|\theta_{0,2}\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant un tel N et en le fixant, on obtient

$$\|S_\alpha(t)\theta_0\|_{Y_T} \leq \|S_\alpha(t)\theta_{0,1}\|_{Y_T} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|S_\alpha(t)\theta_{0,1}\|_{Y_T} &= \|e^{-t(-\Delta)^\alpha}\theta_{0,1}\|_{\mathfrak{L}^4(I,\mathcal{FN}^{3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q})} \\
&= \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\varphi_j e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\widehat{\theta}_0\chi_{\{|\xi|\leq N\}}\|^q_{L^4(I,M^\lambda_p)}\right\}^{1/q} \\
&\leq \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(3-\frac{3}{2}\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\left(\left(\int_0^T\left(\sup_{\xi\in B(0,N)} e^{-t|\xi|^{2\alpha}}|\xi|^{\frac{\alpha}{2}}\right)^4 \||\xi|^{\frac{-\alpha}{2}}\varphi_j\widehat{\theta}_0\|^4_{M^\lambda_p}dt\right)^{\frac{q}{4}}\right\}^{1/q} \qquad (3.3.4) \\
&\leq \eta_2 N^{\frac{\alpha}{2}}T^{\frac{1}{4}}\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}},
\end{aligned}$$

où $|\xi|^{\frac{\alpha}{2}} \sim 2^{\frac{j\alpha}{2}}$ est utilisé dans l'inégalité (3.3.4).
Par conséquent, si nous choisissons T de telle sorte que

$$\eta_2 N^{\frac{\alpha}{2}}T^{\frac{1}{4}}\|\theta_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

Donc

$$\|S_\alpha(t)\theta_{0,1}\|_{Y_T} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.5}$$

En insérant (3.3.5) dans (3.3.3), nous déduisons

$$\|S_\alpha(t)\theta_0\|_{Y_T} \leq \varepsilon. \tag{3.3.6}$$

A nouveau, en utilisant le Lemme 1.3.1 et les estimations (3.3.1) et (3.3.6), on conclut que l'équation (3.0.1) a une solution locale unique dans $Y_T$.

## 3.4 Preuve du Théorème 3.0.3

Prenant $\theta \in \mathcal{C}\left([0,T^*), \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)\right)$ (avec $T^* < \infty$) pour être la solution maximale de l'équation (3.0.1) obtenue dans le Théorème 3.0.1.

Montrons donc que le critère de blow-up (3.0.4) est valide. Il convient de mentionner que les techniques décrites dans l'article [21] ont été utilisées dans cette analyse.
Par contradiction, supposons que $T^* < \infty$ et

$$\int_0^{T^*} \|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} < \infty. \tag{3.4.1}$$

Soit $T_0 \in (0, T^*)$ tel que

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}^1\left([T_0,T^*),\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} < \frac{1}{2}.$$

Pour $t \in [T_0, T^*)$ et $s \in [T_0, t]$, on considère l'équation intégrale

$$\theta(s) = e^{-s\Lambda^{2\alpha}}\theta_0 + \int_{T_0}^{s} e^{-(s-z)\Lambda^{2\alpha}} K[\theta] \cdot \nabla\theta \, dz.$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à $\xi$, on obtient

$$|\widehat{\theta}(s,\xi)| \leq e^{-|\xi|^{2\alpha}s} \left|\widehat{\theta}\left(T_0,\xi\right)\right| + \int_{T_0}^{s} e^{-(s-z)|\xi|^{2\alpha}} |K[\theta] \cdot \nabla\theta(z,\xi)| dz.$$

Le même calcul utilisé pour prouver la Proposition 3.1.1 donne

$$\begin{aligned}
\|\theta(s)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \|\theta(T_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} + \|K[\theta]\theta\|_{\mathcal{L}^1\left([T_0,s),\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\
&\lesssim \|\theta(T_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} + \sup_{T_0\leq s\leq t} \|\theta(s)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \|\theta\|_{\mathcal{L}^1\left([T_0,s),\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\
&\lesssim \|\theta(T_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} + \frac{1}{2} \sup_{T_0\leq s\leq t} \|\theta(s)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\sup_{T_0\leq s\leq t} \|\theta(s)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim 2\|\theta(T_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}, \forall t \in [T_0, T^*).$$

Posons

$$L = \max\left(2\left\|\theta\left(T_0\right)\right\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} ; \max_{t\in[0,T_0]} \|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\right).$$

Nous avons

$$\|\theta(t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim L, \forall t \in [0, T^*). \tag{3.4.2}$$

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $t_n \nearrow T^*$, où $t_n \in (0, T^*)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nous voulons démontrer que

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|\theta\left(t_m\right) - \theta\left(t_n\right)\right\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0. \tag{3.4.3}$$

Pour cela, nous utilisons la forme intégrale de $\theta$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\theta(t_m)-\theta(t_n) &= \left(e^{-t_m\Lambda^{2\alpha}}\theta_0 - e^{-t_n\Lambda^{2\alpha}}\theta_0\right) - \int_0^{t_m} e^{-(t_m-z)\Lambda^{2\alpha}}K[\theta]\cdot\nabla\theta\ dz \\ &\quad + \int_0^{t_n} e^{-(t_n-z)\Lambda^{2\alpha}}K[\theta]\cdot\nabla\theta\ dz \\ &= \left(e^{-t_m\Lambda^{2\alpha}}\theta_0 - e^{-t_n\Lambda^{2\alpha}}\theta_0\right) - \int_{t_n}^{t_m} e^{-(t_m-z)\Lambda^{2\alpha}}K[\theta]\cdot\nabla\theta\ dz \\ &\quad - \int_0^{t_n} e^{-(t_n-z)\Lambda^{2\alpha}}(e^{-(t_m-t_n)\Lambda^{2\alpha}}-1)K[\theta]\cdot\nabla\theta\ dz \\ &:= \mathcal{R}_1(m,n)+\mathcal{R}_2(m,n)+\mathcal{R}_3(m,n).\end{aligned}$$

D'abord, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_1(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &= \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\varphi_j\left(e^{-t_m|\xi|^{2\alpha}}-e^{-t_n|\xi|^{2\alpha}}\right)\hat{\theta}_0\|^q_{M^\lambda_p}\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q}\|\varphi_j\left(e^{-t_m|\xi|^{2\alpha}}-e^{-T^*|\xi|^{2\alpha}}\right)\hat{\theta}_0\|^q_{M^\lambda_p}\right\}^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

où $t_n < T^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par suite, en utilisant le fait que $\theta_0\in\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}$, on déduit a l'aide du théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{n,m\to\infty}\|\mathcal{R}_1(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

De plus, en utilisant le Lemme 3.0.6 et les estimations (3.1.9) et (3.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_2(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &\le \int_{t_n}^{t_m}\left\|e^{-(t_m-z)\Lambda^{2\alpha}}K[\theta]\cdot\nabla\theta\right\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz \\ &\lesssim \int_{t_n}^{T^*}\|\theta\cdot\theta\|_{\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz \\ &\lesssim \int_{t_n}^{T^*}\|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz \\ &\lesssim \left(\int_{t_n}^{T^*}\|\theta\|^2_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{T^*}\|\theta\|^2_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

En appliquant (3.4.2), l'inégalité de Hölder, et l'estimation (3.4.1), on trouve

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_2(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \left(\int_{t_n}^{T^*}\|\theta\|^2_{\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C(T^*-t_n)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\mathcal{R}_2(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_3(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q} \int_0^{t_n} \|\varphi_j e^{-(t_m-z)|\xi|^{2\alpha}}(1-e^{-(t_m-t_n)|\xi|^{2\alpha}})\widehat{\mathrm{div}K[\theta]\theta}\|^q_{M^\lambda_p}\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p})q} \int_0^{T^*} \|\varphi_j(1-e^{-(T^*-t_n)|\xi|^{2\alpha}})\widehat{K[\theta]\theta}\|^q_{M^\lambda_p}\right\}^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

où $t_n < T^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En recourant à l'hypothèse (3.4.1) et à l'estimation (3.4.2) , on arrive à

$$\int_0^{T^*} \|\theta\cdot\theta\|_{\mathcal{FN}^{4-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} dz < \infty.$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, nous déduisons

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\mathcal{R}_3(m,n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

Alors,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\theta(t_m)-\theta(t_n)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

Ceci implique que $(\theta(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy en $T^*$ dans l'espace de Banach $\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}$. Alors, il existe un élément $\theta^*$ de $\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|\theta(t_n)-\theta^*\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

Nous soulignons que la limite ci-dessus est indépendante de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En d'autres termes,

$$\lim_{t\nearrow T^*} \|\theta(t)-\theta^*\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} = 0.$$

Maintenant, considérons le système suivant avec la donnée initiale $\theta^*$, au lieu de $\theta_0$.

$$\begin{cases} \partial_t w + K[w]\cdot\nabla w + \Lambda^{2\alpha} w = 0, \\ K[w] = (-\mathcal{R}_2 w, \mathcal{R}_1 w), \\ w(0,x) = \theta^*. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

D'après le Théorème 3.0.1, il existe un temps $t_0 > 0$ et une solution unique $w \in \mathcal{C}\left([0,t_0), \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)\right)$. Par conséquent,

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t), & \text{si } t\in[0,T^*) \\ w(t-T^*), & \text{si } t\in[T^*,T^*+t_0], \end{cases}$$

est une solution de (3.0.1) avec une donnée initiale $\theta_0$ sur l'intervalle $[0, T^* + t_0]$ ce qui contredit la maximalité de $T^*$.

Maintenant, nous allons établir quelques lemmes cruciaux dans la preuve du Théorème 3.0.4.

**Lemme 3.4.1** *Soient* $\frac{2}{3} < \alpha < 1, 1 \leq p, q \leq 2$ *et* $0 \leq \lambda \leq 2 - p$. *Alors nous avons*

$$\|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|\theta\|_{L^2}^{\frac{3\alpha-2}{\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^{\frac{2-2\alpha}{\alpha}}. \tag{3.4.5}$$

**Preuve.** En utilisant la définition des espaces de Fourier-Besov-Morrey, et l'inégalité de Bernstein (1.6.3) avec $|\gamma| = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \\
&= \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\left(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}\right)q} \|\varphi_j \hat{u}\|^q_{M_p^\lambda} \right\}^{1/q} \\
&\lesssim \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\left(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}\right)q} 2^{j\left(\frac{2-\lambda}{p}-1\right)q} \|\varphi_j \hat{u}\|^q_{L^2(B(x_0,r))} \right\}^{1/q} \\
&\lesssim \left\{ \sum_{j\leq N} 2^{j(2-2\alpha)q} \|\varphi_j \hat{u}\|^q_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}^{1/q} + \left\{ \sum_{j>N} 2^{j(2-3\alpha)q} 2^{j\alpha q} \|\varphi_j \hat{u}\|^q_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}^{1/q} \\
&\lesssim 2^{(2-2\alpha)N} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\varphi_j \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}^{1/2} + 2^{(2-3\alpha)N} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2\alpha j} \|\varphi_j \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}^{1/2} \\
&\lesssim 2^{(2-2\alpha)N} \|\theta\|_{F\dot{B}^0_{2,2}} + 2^{(2-3\alpha)N} \|\theta\|_{F\dot{B}^\alpha_{2,2}}.
\end{aligned}$$

A partir de la Remarque 3.1.9, on peut voir que $F\dot{B}^\alpha_{2,2} = \dot{H}^\alpha$ et $F\dot{B}^0_{2,2} = L^2$. Alors, en prenant N tel que $2^N = \left(\frac{\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}}{\|\theta\|_{L^2}}\right)^{1/\alpha}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} &\lesssim \left(\frac{\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}}{\|\theta\|_{L^2}}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \|\theta\|_{L^2} + \left(\frac{\|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}}{\|\theta\|_{L^2}}\right)^{\frac{2-3\alpha}{\alpha}} \|\theta\|_{\dot{H}^\alpha} \\
&\lesssim \|\theta\|_{\dot{H}^\alpha}^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \|\theta\|_{L^2}^{\frac{3\alpha-2}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

**Lemme 3.4.2** *Soient* $\frac{1}{2} < \alpha < 1, 1 \leq p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq 2$. *Alors,*

$$\|fg\|_{\dot{H}^{1-\alpha}} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} + \|f\|_{\dot{H}^\alpha} \|g\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{3.4.6}$$

**Preuve.** Pour démontrer ce lemme, nous allons suivre la méthode décrite dans la preuve de la Proposition 3.1.1. Pour j fixe, nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j(fg) &= \sum_{|k-j|\le 4} \dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1} f \dot{\Delta}_k g) + \sum_{|k-j|\le 4} \dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1} g \dot{\Delta}_k f) \\
&\quad + \sum_{k\ge j-3} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k f \widetilde{\dot{\Delta}}_k g) \\
&:= II_j^1 + II_j^2 + II_j^3 .
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\dot{H}^{1-\alpha}} &= \|fg\|_{F\dot{B}^{1-\alpha}_{2,2}} \\
&\le \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(1-\alpha)} \left\|\widehat{II_j^1}\right\|_{L^2}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(1-\alpha)} \left\|\widehat{II_j^2}\right\|_{L^2}^2 \right\}^{1/2} \\
&\quad + \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(1-\alpha)} \left\|\widehat{II_j^3}\right\|_{L^2}^2 \right\}^{1/2} \\
&:= J_1 + J_2 + J_2.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2) et à l'inégalité de Bernstein (1.6.3) avec $|\gamma| = 0$, il en résulte que

$$\left\|\widehat{f}_j\right\|_{L^1} \le C 2^{j(2-\frac{2-\lambda}{p})} \left\|\widehat{f}_j\right\|_{M_p^\lambda} .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{II}_j^1\right\|_{L^2} &\le \sum_{|k-j|\le 4} \left\|\dot{S}_{k-1} f \widehat{\Delta}_k g\right\|_{L^2} \\
&\le \sum_{|k-j|\le 4} \|\widehat{g}_k\|_{L^2} \sum_{l\le k-2} \left\|\widehat{f}_l\right\|_{L^1} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\le 4} \|\widehat{g}_k\|_{L^2} \sum_{l\le k-2} 2^{l\left(2-\frac{2-\lambda}{p}\right)} \left\|\widehat{f}_l\right\|_{M_p^\lambda} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\le 4} \|\widehat{g}_k\|_{L^2} \sum_{l\le k-2} 2^{l\left(2-\frac{2-\lambda}{p}\right)} 2^{-l(2\alpha-1)} 2^{l(2\alpha-1)} \left\|\widehat{f}_l\right\|_{M_p^\lambda} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\le 4} \|\widehat{g}_k\|_{L^2} \left( \sum_{l\le k-2} 2^{l(2\alpha-1)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \\
&\lesssim \sum_{|k-j|\le 4} 2^{k(2\alpha-1)} \|\widehat{g}_k\|_{L^2} \|f\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} .
\end{aligned}$$

En multipliant par $2^{2j(1-\alpha)}$, et en prenant la norme $l^2$ des deux côtés dans l'estimation ci-dessus, on obtient

$$J_1 \lesssim \|f\|_{\dot{H}^\alpha}\|g\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{3.4.7}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{II}^2_j\right\|_{L^2} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\left\|\dot{S}_{k-1}g\widehat{\Delta}_k f\right\|_{L^2}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\left\|\widehat{f}_k\right\|_{L^1}\sum_{l\leq k-2}\|\widehat{g}_l\|_{L^2}\\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\sum_{|k-j|\leq 4}2^{k\left(2-\frac{2-\lambda}{p}\right)}\left\|\widehat{f}_k\right\|_{M^\lambda_p}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young pour les séries entraine

$$\begin{aligned}
J_2 &\lesssim \|g\|_{L^2}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{2j(1-\alpha)}\Big(\sum_{|k-j|\leq 4}2^{k\left(2-\frac{2-\lambda}{p}\right)}\left\|\widehat{f}_k\right\|_{M^\lambda_p}\Big)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{|k-j|\leq 4}2^{(j-k)(1-\alpha)}2^{k(3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p})}\left\|\widehat{f}_k\right\|_{M^\lambda_p}\Big)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\|f\|_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,2}}\sum_{i\leq 3}2^{i(1-\alpha)}\\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\|f\|_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la Proposition 1.9.15 et le fait que $\alpha < 1$.

Reste à traiter le troisième terme $J_3$. Pour ce faire, en appliquant à nouveau l'inégalité de Young dans les espaces de Morrey (1.6.2), l'inégalité de type Bernstein (1.6.3) avec $|\gamma| = 0$, l'inégalité de Hölder et le fait que $\alpha < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{II}^3_j\|_{L^2} &\leq \sum_{k\geq j-3}\|\widehat{(\dot{\Delta}_k f\widetilde{\dot{\Delta}}_k g)}\|_{L^2}\\
&\leq \sum_{k\geq j-3}\|\widehat{(\dot{\Delta}_k f} * \widehat{\widetilde{\dot{\Delta}}_k g}\|_{L^2}\\
&\leq \sum_{k\geq j-3}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}\sum_{|l-k|\leq 1}\|\varphi_l\widehat{g}\|_{L^1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{k\geq j-3}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}\sum_{|l-k|\leq 1}2^{(2+\frac{\lambda-2}{p})l}\|\varphi_l\widehat{g}\|_{M_p^\lambda}\\
&\lesssim \sum_{k\geq j-3}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}\Big(\sum_{|l-k|\leq 1}2^{l(2\alpha-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}\\
&\lesssim \|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}\sum_{k\geq j-3}2^{k(2\alpha-1)}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
J_3 &\lesssim \|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{2j(1-\alpha)}\Big(\sum_{k\geq j-3}2^{k(2\alpha-1)}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}\Big)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\geq j-3}2^{(j-k)(1-\alpha)}2^{k\alpha}\|\varphi_k\widehat{f}\|_{L^2}\Big)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}\|f\|_{F\dot{B}_{2,2}^{\alpha}}\sum_{i\leq 3}2^{i(1-\alpha)}\\
&\lesssim \|f\|_{\dot{H}^\alpha}\|g\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}}.
\end{aligned}
$$

En combinant $J_1$, $J_2$ et $J_3$, on obtient le résultat désiré.

## 3.5 Preuve du Théorème 3.0.4

Pour montrer la stabilité asymptotique pour la solution globale, nous suivons les idées développées par Gallagher et al. [56], dans lequel les auteurs ont utilisé une interpolation standard dans l'espace de Fourier et des estimations d'énergie dans $L^2$. (voir aussi [22, 23, 102]).

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \beta$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$
S_m = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2; |\xi| \leq m \text{ et } \left|\widehat{\theta}_0(\xi)\right| \leq m\right\}.
$$

Il est clair que $\mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{S_m}\widehat{\theta}_0\right) \to \theta_0$ dans $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}$. Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$
\left\|\theta_0 - \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{S_m}\widehat{\theta}_0\right)\right\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq m_0.
$$

Soit $m$ un nombre entier fixe tel que $m \geq m_0$.
Posons $\theta_{0,m} = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{S_m}\widehat{\theta}_0\right)$, $b_{0,m} = \theta_0 - \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{S_m}\widehat{\theta}_0\right)$. Alors, nous avons prouvé que

$$
\|b_{0,m}\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}} \leq \frac{\varepsilon}{2},
$$

$$
\theta_{0,m} \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}} \cap L^2.
$$

Ensuite, considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t b_m + \Lambda^{2\alpha} b_m + u_{b_m} \cdot \nabla b_m = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ b_m(0,x) = b_{0,m}(x). \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Pour tout $m \geq m_0$ on a $\|b_{0,m}\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On déduit alors du Théorème 3.0.1 qu'il existe une unique solution globale $b_m \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)$.
De plus, on a

$$\|b_m(t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} + \|b_m\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \lesssim \|b_{0,m}\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \quad \forall t \geq 0.$$

Décomposons $\theta$ la solution de l'équation (3.0.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta - b_m + b_m \\ &:= \theta_m + b_m. \end{aligned}$$

Donc $\theta_m$ est une solution du système :

$$\begin{cases} \partial_t \theta_m + \Lambda^{2\alpha} \theta_m + u_{\theta_m} \cdot \nabla \theta_m + u_{\theta_m} \cdot \nabla b_m + u_{b_m} \cdot \nabla \theta_m = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \theta_m(0,x) = \theta_{0,m}(x) \in \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q} \cap L^2. \end{cases}$$

En outre, $\theta_m \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)$. En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ avec $\theta_m$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|^2_{L^2} + \|\Lambda^\alpha \theta_m\|^2_{L^2} \leq |< u_{\theta_m} \cdot \nabla b_m, \theta_m >_{L^2}|.$$

Puisque

$$\|\Lambda^\alpha \theta_m\|_{L^2} = \|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}.$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation (3.1.4), le Lemme 3.4.2 et l'inégalité de

Young, impliquent

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m\|_{L^2}^2+\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2\\
&\leq |<\operatorname{div}(u_{\theta_m}b_m),\theta_m>_{L^2}|\\
&\lesssim \left\|\Lambda^{1-\alpha}(u_{\theta_m}b_m)\right\|_{L^2}\|\Lambda^\alpha\theta_m\|_{L^2}\\
&\lesssim \|u_{\theta_m}b_m\|_{\dot{H}^{1-\alpha}}\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}\\
&\lesssim \|\theta_m b_m\|_{\dot{H}^{1-\alpha}}\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}\\
&\lesssim \|\theta_m\|_{L^2}\|b_m\|_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}+\|b_m\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2\\
&\lesssim \|\theta_m\|_{L^2}^2\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}+\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2+\|b_m\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2 \qquad (3.5.2)\\
&\lesssim \|\theta_m\|_{L^2}^2\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}+\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2\,,
\end{aligned}
$$

où dans (3.5.2), on a utilisé que $\|b_m\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent,

$$
\frac{d}{dt}\|\theta_m\|_{L^2}^2+\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2\lesssim\|\theta_m\|_{L^2}^2\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\,.
$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient

$$
\|\theta_m\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\theta_m\|_{\dot{H}^\alpha}^2\lesssim\|\theta_{0,m}\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\theta_m\|_{L^2}^2\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\,. \tag{3.5.3}
$$

Grâce au lemme de Gronwall on a

$$
\begin{aligned}
\|\theta_m\|_{L^2}^2&\lesssim\|\theta_{0,m}\|_{L^2}^2\exp\int_0^t\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\\
&\lesssim\|\theta_{0,m}\|_{L^2}^2\,, \qquad (3.5.4)
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé le fait suivant : $\int_0^t\|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}}\leq C$.

En effet : puisque $q\leq 2$, alors par l'inégalité de Minkowski (1.7.4) nous avons

$$
\mathcal{L}^2\left(I,\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)\hookrightarrow L^2\left(I;\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right). \tag{3.5.5}
$$

Ainsi, en utilisant (3.5.5) et l'inégalité de Hölder pour les séries, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \\
&\lesssim \left\| 2^{j\left(3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}\right)} \|\varphi_j \widehat{b}_m\|_{L^2([0,t),M_p^\lambda)} \right\|^2_{l^q} \\
&\lesssim \left\| 2^{\frac{j}{2}\left(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}\right)} 2^{\frac{j}{2}\left(3+\frac{\lambda-2}{p}\right)} \|\varphi_j \widehat{b}_m\|^{\frac12}_{L^\infty([0,t),M_p^\lambda)} \|\varphi_j \widehat{b}_m\|^{\frac12}_{L^1([0,t),M_p^\lambda)} \right\|^2_{l^q} \\
&\lesssim \left\| 2^{j\left(3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}\right)} \|\varphi_j \widehat{b}_m\|_{L^\infty([0,t),M_p^\lambda)} \right\|_{l^q} \left\| 2^{j\left(3+\frac{\lambda-2}{p}\right)} \|\varphi_j \widehat{b}_m\|_{L^1([0,t),M_p^\lambda)} \right\|_{l^q} \\
&\lesssim \|b_m\|_{\mathcal{L}^\infty\left([0,t),\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \|b_m\|_{\mathcal{L}^1\left([0,t),\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \\
&\lesssim \left( \|b_m\|_{\mathcal{L}^\infty\left([0,t),\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} + \|b_m\|_{\mathcal{L}^1\left([0,t),\mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)} \right)^2 \\
&\lesssim \|b_{0,m}\|^2_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

En combinant (3.5.3) et (3.5.4), on trouve

$$\begin{aligned}
\|\theta_m\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\theta_m\|^2_{\dot H^\alpha} &\leq \|\theta_{0,m}\|^2_{L^2} + \|\theta_{0,m}\|^2_{L^2} \int_0^t \|b_m\|^2_{\mathcal{FN}^{3-\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 3.4.1, nous obtenons

$$\|\theta_m\|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|\theta_m\|^{\frac{3\alpha-2}{1-\alpha}}_{L^2} \|\theta_m\|^2_{\dot H^\alpha}. \tag{3.5.6}$$

Donc,

$$\|\theta_m\|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \lesssim \|\theta_m\|^2_{\dot H^\alpha}, \tag{3.5.7}$$

où nous avons utilisé (3.5.4). Enfin, en intégrant par rapport au temps entre 0 et $\infty$, on aura

$$\int_0^\infty \|\theta_m\|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}} \leq C \int_0^\infty \|\theta_m\|^2_{\dot H^\alpha}. \tag{3.5.8}$$

Considérons le sous-ensemble suivant de $[0, \infty[$ :

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \left\{ t \geq 0;\ \ \|\theta_m(t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Alors, pour tout $\frac12 < \alpha < 1$,

$$\int_0^\infty \|\theta_m(t)\|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} dt \geq \int_{\mathcal{A}_\varepsilon} \|\theta_m(t)\|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} dt \geq \mu(\mathcal{A}_\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \tag{3.5.9}$$

où $\mu(\mathcal{A}_\varepsilon)$ est la mesure de Lebesgue de $\mathcal{A}_\varepsilon$.

En utilisant les estimations (3.5.8) et (3.5.9), on obtient $\mu(\mathcal{A}_\varepsilon) < \infty$ et $\mu(\mathcal{A}_\varepsilon) \lesssim \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty \|\theta_m\|^2_{\dot{H}^\alpha}$.

Pour $\eta > 0$, il existe $t_0 \in [0, \mu(\mathcal{A}_\varepsilon) + \eta]$ tel que $t_0 \notin \mathcal{A}_\varepsilon$.

Alors,

$$\|\theta_m(t_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, nous avons

$$\begin{aligned}\|\theta(t_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\theta_m(t_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} + \|b_m(t_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|b_{0,m}\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\theta(t_0)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon. \tag{3.5.10}$$

Maintenant, nous considérons l'équation quasi-géostrophique à $t = t_0$.

$$\begin{cases} \partial_t Z + u_Z \cdot \nabla Z + \Lambda^{2\alpha} Z = 0, & x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,\\ Z(0,x) = Z_0 = \theta(t_0). \end{cases} \tag{3.5.11}$$

En utilisant l'inégalité (3.5.10) et le Théorème 3.0.1, nous déduisons qu'il existe une solution unique $Z \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right) \cap \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{FN}^{3+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}\right)$ du problème QG (3.0.1).

L'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (3.0.1) implique $\forall t \geq 0$, $Z(t) = \theta(t_0 + t)$. Alors,

$$\begin{aligned}\|\theta(t_0+t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)} &= \|Z(t)\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq \|Z_0\|_{\mathcal{FN}^{3-2\alpha+\frac{\lambda-2}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du Théorème 3.0.4.

**Remarque 3.5.1** *Si $k \neq 1$, les résultats du Théorème 3.0.1 et du Théorème 3.0.4 restent vrais, mais avec des calculs plus compliqués.*

# Chapitre 4

# Équations magnétohydrodynamiques fractionnelles 3D dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey à exposant variable

## Contents



Dans ce chapitre, nous considérons le problème de Cauchy des équations magnétohydrodynamiques incompressibles généralisées (grMHD) en 3D. Notre objectif est d'obtenir un résultat d'existence globale dans le cas de données initiales dans un espace critique de Fourier-Besov-Morrey à exposant variable. De plus, nous obtenons l'analyticité des solutions globales.

## Introduction

Nous étudions les équations magnétohydrodynamiques généralisées dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u + \mu(-\Delta)^\alpha u + \nabla\pi = (b \cdot \nabla)b & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ b_t + (u \cdot \nabla)b + \nu(-\Delta)^\alpha b = (b \cdot \nabla)u & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \nabla \cdot b = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = u_0, \; b|_{t=0} = b_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

où $u = (u_1, u_2, u_2)$ représente le champ de vitesse de l'écoulement, $b = (b_1, b_2, b_3)$ désigne le champ magnétique, $\pi$ désigne la fonction de pression, $\mu > 0$ désigne le coefficient de viscosité et $\nu > 0$ représente le coefficient de diffusivité, tandis que $u_0$ et $b_0$ sont respectivement la vitesse initiale et le champ magnétique initial avec divergence libre (c'est-à-dire $\nabla \cdot u_0 = 0$ et $\nabla \cdot b_0 = 0$). L'opérateur $(-\Delta)^\alpha$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|^{2\alpha}$. Pour simplifier et sans perte de généralité, nous ne considérons que le cas où $\mu = \nu = 1$.

## 4.1 Existence globale

Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 4.1.1** *Supposons que* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0\left(\mathbb{R}^3\right) \cap C^{\log}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{5}{4}$, $1 \leq \theta \leq +\infty$, $2 \leq p(\cdot) \leq \frac{6}{5-4\alpha}$ *et* $1 \leq q < \frac{3}{2\alpha-1}$. *Alors, il existe une constante positive* $\beta_0$ *telle que pour toute données initiales* $(u_0, b_0) \in \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$ *avec*

$$\|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq \beta_0,$$

*le système* (4.0.1) *a une solution globale unique* $(u, b)$ *dans* $X$,
*où*

$$X := \mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}) \cap \mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}).$$

*De plus*

$$\|(u, b)\|_X \lesssim \|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

**Remarque 4.1.2** — *Récemment, Wang [99] a montré l'existence de solution globale de* (4.0.1) *dans l'espace* $\mathcal{F}B^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q} = \mathcal{FN}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),p(\cdot),q}$ *avec* $s(\cdot) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{p'(\cdot)}$. *Par conséquent, le Théorème 4.1.1 étend et complète son résultat. Nous remarquons en outre que pour* $b = 0$*, l'équation du système* (4.0.1) *devient l'équation fractionnaire de Navier-Stokes.*

**Preuve du Théorème 4.1.1.** En vertu du principe de Duhamel, la solution $(u, b)$ du système (4.0.1) peut être représentée comme suit

$$u = \mathcal{K}_\alpha(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u - b \otimes b)(\cdot, \tau)d\tau := \mathcal{G}_1^\alpha(u, b), \tag{4.1.1}$$

$$b = \mathcal{K}_\alpha(t)b_0 - \int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes b - b \otimes u)(\cdot, \tau)d\tau := \mathcal{G}_2^\alpha(u, b), \tag{4.1.2}$$

où $\mathcal{K}_\alpha(t)u := e^{-t(-\Delta)^\alpha}u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^{2\alpha}}\mathcal{F}(u))$, et $\mathbb{P} = \mathrm{Id} - \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$ est le projecteur de Leray-Hopf, qui est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0.

**Notation :** Soient A, B des espaces de Banach, on note $\|\cdot\|_{A\cap B} := \|\cdot\|_A + \|\cdot\|_B$.
Il est utile de noter que l'espace X défini dans le Théorème 4.1.1 est un espace de Banach équipé de la norme

$$\|u\|_X = \|u\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q})}.$$

On définit

$$B(u,b) := \int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)(x,\tau)d\tau.$$

Nous définissons l'application $\psi$ comme :

$$\psi(u,b) := (\mathcal{G}_1^\alpha(u,b), \mathcal{G}_2^\alpha(u,b)) = (u,b).$$

Grâce au Lemme 2.3.3, on obtient

$$\|\mathcal{K}_\alpha(t)u_0\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},$$
$$\|\mathcal{K}_\alpha(t)u_0\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},$$
$$\|\mathcal{K}_\alpha(t)u_0\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

Alors,

$$\|\mathcal{K}_\alpha(t)u_0\|_X \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}. \tag{4.1.3}$$

De plus, si $\theta_1 \le \theta,\ p_1(\cdot)\in\mathcal{P}_0\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $p_1(\cdot) \le \frac{6}{5-4\alpha}$, alors on a l'estmation bilinéaire suivante

$$\|B(u,b)\|_X \lesssim \|u\|_X\|b\|_X. \tag{4.1.4}$$

En effet, si $p_\alpha(\cdot) = \frac{6p_1(\cdot)}{6-(5-4\alpha)p_1(\cdot)}$, en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Hausdorf-Young, l'inégalité de Young, la Proposition 1.7.9 et l'estimation (1.9.3), on trouve

$$\begin{aligned}&\|B(u,b)\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta_1}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)}\\ &= \left\|\int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau)\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau\right\|_{\mathcal{L}^{\theta_1}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta_1}}_{p_1(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left\|\left\|\left\|\int_0^t 2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta_1})}\varphi_j e^{-(t-\tau)|\cdot|^{2\alpha}}\nabla\cdot\widehat{u\otimes b}\,d\tau\right\|_{L^{\theta_1}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p_1(\cdot)}\right)}\right\|\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t \left\|r^{\frac{-3}{p_\alpha(\cdot)}}2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p_1'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta_1}\right)}\varphi_j e^{-(t-\tau)|\cdot|^{2\alpha}}\right\|_{L^{p_\alpha(\cdot)}}\left\|\widehat{u\otimes b}\right\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{5-4\alpha}}}d\tau\right\|_{L^{\theta_1}(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|\int_0^t 2^{j\left(\frac{2\alpha}{\theta_1}+\frac{5}{2}\right)}e^{-(t-\tau)2^{2\alpha j}}\left\|r^{\frac{-3}{p_\alpha(\cdot)}}2^{-3j\frac{1}{p_\alpha(\cdot)}}\varphi_j\right\|_{L^{p_\alpha(\cdot)}}\|\Delta_j(u\otimes b)\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{4\alpha+1}}}d\tau\right\|_{L^{\theta_1}(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \left\|\left\|2^{j\left(\frac{2\alpha}{\theta}+\frac{5}{2}-2\alpha\right)}\|\Delta_j(u\otimes b)\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{4\alpha+1}}}\right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+)}\left\|e^{-t2^{2\alpha j}}2^{2\alpha j(1+\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta})}\right\|_{L^{(1+\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta})^{-1}}(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q} \qquad (4.1.5)\\
&\lesssim \left\|\left\|2^{j\left(\frac{2\alpha}{\theta}+\frac{5}{2}-2\alpha\right)}\|\Delta_j(u\otimes b)\|_{\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{\frac{6}{4\alpha+1}}}\right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+)}\right\|_{l^q}\\
&\lesssim \|u\otimes b\|_{\mathcal{L}^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{\frac{6}{4\alpha+1},\lambda(\cdot),q})}\\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|b\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;L^{\frac{3}{2\alpha-1}}\right)}\\
&\qquad +\|b\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;L^{\frac{3}{2\alpha-1}}\right)}\\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|b\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;B^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,q}\right)}\\
&\qquad +\|b\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;B^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,q}\right)}\\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|b\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)}\\
&\qquad +\|b\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{N}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)}\\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|b\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)}\\
&\qquad +\|b\|_{\mathcal{L}^{\theta}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)}\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)},
\end{aligned}
$$

où le fait suivant est utilisé dans l'inégalité (4.1.5) :

$$
\begin{aligned}
&\|2^{\frac{-3}{p_\alpha(\cdot)}j}\varphi_j\|_{L^{p_\alpha(\cdot)}}\\
&= \inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{2^{\frac{-3}{p_\alpha(\cdot)}j}\varphi_j}{\lambda}\right|^{p_\alpha(\cdot)}dx<1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\varphi_j}{\lambda}\right|^{p_\alpha(\cdot)} 2^{-3j} dx < 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\varphi}{\lambda}\right|^{\frac{6p_1(2^j\cdot)}{6-(5-4\alpha)p_1(2^j\cdot)}} dx < 1\right\} \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|B(u,b)\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}\right)} \\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)} \|b\|_{\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)} \\
&\quad + \|b\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)} \|u\|_{\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)}.
\end{aligned}
$$

De la même manière, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|B(u,b)\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)\cap\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)} \\
&\lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)} \|b\|_{\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)} \\
&\quad + \|b\|_{\mathcal{L}^\theta\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}\right)} \|u\|_{\mathcal{L}^\infty\left(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}\right)}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, l'estimation souhaitée (4.1.4) est établie.

En utilisant les estimations (4.1.3) et (4.1.4), on peut conclure que

$$
\|\mathcal{G}_1^\alpha(u,b)\|_X \leq C_1 \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} + C_2\left(\|u\|_X^2 + \|b\|_X^2\right). \tag{4.1.6}
$$

De la même façon, il résulte que

$$
\|\mathcal{G}_2^\alpha(u,b)\|_X \leq C_1 \|b_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} + 2C_2\left(\|u\|_X + \|b\|_X\right). \tag{4.1.7}
$$

Nous définissons maintenant

$$
S = \left\{(u,b) \mid (u,b) \in X, \|(u,b)\|_X \leq 2\beta_0 C_1\right\},
$$

où $\beta_0$ est une constante qui peut être déterminée plus tard. En combinant (4.1.6) et (4.1.7), il s'ensuit que si nous choisissons $\beta_0 \leq \frac{1}{16(\max(C_1,C_2))^2}$, alors pour toute $(u_0,b_0) \in \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$

avec $\|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq \beta_0$, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi(u,b)\|_X &\leq C_1 \|(u_0,b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} + C_2 \|(u,b)\|_X^2 \\
&\leq \beta_0 C_1 + 4{\beta_0}^2 C_1^2 C_2 \\
&\leq \frac{1}{8\max(C_1,C_2)} \quad \forall (u,b) \in S,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\psi(u,b) \in S$. De ce fait, $\psi$ est bien défini de $S$ vers lui-même. D'autre part, pour tout $(u_1,b_1),(u_2,b_2) \in S$, on a

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{G}_1^\alpha(u_1,b_1) - \mathcal{G}_1^\alpha(u_2,b_2)\|_X \\
&\leq \|B(u_1,u_1) - B(u_2,u_2)\|_X + \|B(b_1,b_1) - B(b_2,b_2)\|_X \\
&\leq \|B(u_1,u_1-u_2) - B(u_1-u_2,u_2)\|_X + \|B(b_1-b_2,b_2) - B(b_1,b_1-b_2)\|_X \\
&\leq C_2\Big\{(\|u_1\|_X + \|u_2\|_X)\|u_1-u_2\|_X + (\|b_1\|_X + \|b_2\|_X)\|b_1-b_2\|_X\Big\} \\
&\leq C_2\Big\{(\|(u_1,b_1)\|_X + \|(u_2,b_2)\|_X)(\|u_1-u_2\|_X + \|b_1-b_2\|_X)\Big\} \\
&\leq 4C_1C_2\beta_0\Big\{\|u_1-u_2\|_X + \|b_1-b_2\|_X\Big\} \\
&\leq \frac{1}{4}\Big\{\|u_1-u_2\|_X + \|b_1-b_2\|_X\Big\}.
\end{aligned}$$

Des calculs analogues aux précédents impliquent

$$\|\mathcal{G}_2^\alpha(u_1,b_1) - \mathcal{G}_2^\alpha(u_2,b_2)\|_X \leq \frac{1}{4}\Big\{\|u_1-u_2\|_X + \|b_1-b_2\|_X\Big\}.$$

Alors,

$$\|\psi(u_1,b_1) - \psi(u_2,b_2)\|_X \leq \frac{1}{2}\Big\{\|u_1-u_2\|_X + \|b_1-b_2\|_X\Big\}. \tag{4.1.8}$$

D'après l'estimation ci-dessus, nous déduisons que $\psi$ est une application contractante de $S$ vers $S$. Le théorème du point fixe de Banach nous amène à la conclusion que $\psi$ a un unique point fixe $(u,b) \in S$, qui est la solution de (4.0.1).

**Remarque 4.1.3** — *Selon la preuve du Théorème 3.0.1, si $\mu \neq \nu$ dans (4.0.1), la conclusion du Théorème 3.0.1 reste vraie, mais avec des estimations plus complexes.*

## 4.2 Régularité Gevrey

Le but de cette section est de montrer l'analyticité des solutions obtenues dans le Théorème 4.0.1.

**Théorème 4.2.1** *Supposons que* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{\log}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $1 \leq \theta \leq +\infty$, $2 \leq p(\cdot) \leq \frac{6}{5-4\alpha}$ *et* $1 \leq q < \frac{3}{2\alpha-1}$. *Alors, il existe une constante positive* $\beta_0'$ *telle que pour toute données initiales* $(u_0, b_0)$ *dans* $\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}$ *avec*

$$\|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq \beta_0',$$

*le système* (4.0.1) *a une solution analytique unique telle que*

$$\| \left(e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha} u, e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha} b\right) \|_X \lesssim \|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},$$

*où*

$$X := \mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}) \cap \mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q}),$$

*et* $e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha} u = \mathcal{F}^{-1}(e^{\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha} \hat{u})$.

**Preuve.** On pose $\overline{u}(x,\ t) = e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} u(x,\ t)$ et $\overline{b}(x,\ t) = e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} b(x,\ t)$. On voit alors que $(\overline{u}, \overline{b})$ satisfait le système intégral suivant :

$$\begin{cases} \overline{u} = e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} \mathcal{K}_\alpha(t) u_0 - e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau) \mathbb{P}\nabla \cdot (e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{u} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{u} - e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{b} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{b}) d\tau, \\ \overline{b} = e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} \mathcal{K}_\alpha(t) b_0 - e^{\sqrt{t}|D|^\alpha} \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}_\alpha(t-\tau) \mathbb{P}\nabla \cdot (e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{u} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{b} - e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{b} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^\alpha}\overline{u}) d\tau. \end{cases}$$

Afin d'obtenir la régularité Gevrey des solutions, nous commençons par estimer le terme linéaire $e^{\sqrt{t}|D|^\alpha}\mathcal{K}_\alpha(t)u_0$. En utilisant la transformation de Fourier, en multipliant par $2^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}} \varphi_j$ et en prenant la norme $L^\theta(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\| 2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta})} \varphi_j \widehat{e^{\sqrt{t}|D|^\alpha}\mathcal{K}_\alpha(t)u_0} \right\|_{L^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\ &\lesssim \left\| e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - t|\xi|^{2\alpha}} 2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta})} \varphi_j \hat{u}_0 \right\|_{L^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\ &\lesssim \left\| e^{-\frac{t}{2}|\xi|^{2\alpha}} 2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta})} \varphi_j \hat{u}_0 \right\|_{L^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $e^{\sqrt{t}|\xi|^\alpha - \frac{1}{2}t|\xi|^{2\alpha}} = e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{t}|\xi|^\alpha - 1)^2 + \frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}}$.
Donc, en prenant la norme $l^q$, nous en déduisons que

$$\left\| e^{\sqrt{t}|D|^\alpha}\mathcal{K}_\alpha(t)u_0 \right\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}+\frac{2\alpha}{\theta}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

De manière analogue, nous avons

$$\left\| e^{\sqrt{t}|D|^\alpha}\mathcal{K}_\alpha(t)u_0 \right\|_{\mathcal{L}^\theta(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha}{\theta}}_{2,\lambda(\cdot),q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}$$

et

$$\left\| e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha}(t)u_0 \right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^+;\mathcal{FN}^{\frac{5}{2}-2\alpha}_{2,2,q})} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

Alors

$$\left\| e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha}(t)u_0 \right\|_{X} \lesssim \|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

D'autre part, posons

$$s(\cdot) := 1 - 2\alpha + \frac{3}{p'(\cdot)} + \frac{2\alpha}{\theta},$$

$$\text{et} \qquad \overline{B}(\overline{u}, \overline{b}) := e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}} \int_0^t \mathcal{K}_{\alpha}(t-\tau)\mathbb{P}\nabla \cdot (e^{-\sqrt{\tau}|D|^{\alpha}}\overline{b} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^{\alpha}}\overline{u})d\tau.$$

En utilisant le Lemme 2.1.7, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\| 2^{js(\cdot)} \varphi_j \widehat{\overline{B}(\overline{u}, \overline{b})} \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\lesssim \left\| 2^{j(s(\cdot)+1)} \varphi_j e^{\sqrt{t}|\xi|^{\alpha}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} (\widehat{e^{-\sqrt{\tau}|D|^{\alpha}}\overline{b} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|D|^{\alpha}}\overline{u}}) d\tau \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\lesssim \left\| 2^{j(s(\cdot)+1)} \varphi_j e^{\sqrt{t}|\xi|^{\alpha}} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-\sqrt{\tau}|\xi-y|^{\alpha}} \widehat{\overline{b}(\xi-y)} \otimes e^{-\sqrt{\tau}|y|^{\alpha}} \widehat{\overline{u}(y)}) dy d\tau \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\lesssim \left\| 2^{(s(\cdot)+1)} \varphi_j \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t}|\xi|^{\alpha} - \frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^{2\alpha} - \sqrt{\tau}(|\xi-y|^{\alpha}+|y|^{\alpha})} (\widehat{\overline{b}(\xi-y)} \otimes \widehat{\overline{u}(y)}) dy d\tau \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\lesssim \left\| 2^{j(s(\cdot)+1)} \varphi_j \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{\overline{b}(\xi-y)} \otimes \widehat{\overline{u}(y)}) dy d\tau \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\lesssim \left\| 2^{j(s(\cdot)+1)} \varphi_j \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}} (\widehat{\overline{b} \otimes \overline{u}}) d\tau \right\|_{L^{\theta}(\mathbb{R}^+;\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})}.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir l'estimation bilinéaire (4.1.4), on peut établir

$$\left\| \overline{B}(\overline{u}, \overline{b}) \right\|_X \lesssim \|\overline{u}\|_X \|\overline{b}\|_X.$$

Le reste de la preuve se fait de manière similaire à la preuve du Théorème 4.1.1. la seule différence étant l'analyse de diverses constantes bornées. Ces détails peuvent être omis.

## 4.3 Estimations de décroissance des solutions.

Dans cette partie, nous obtenons une estimation de décroissance des solutions "decay estimate" pour les équations magnétohydrodynamiques fractionnelles dans les espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey à exposant variable.

Le lemme suivant nous servira dans la suite.

**Lemme 4.3.1** *Les multiplicateurs de Fourier correspondant aux symboles* $m(\xi) = |\xi|^{\beta} e^{-\sqrt{t}|\xi|^{\alpha}}$ *sont donnés par une convolution avec le noyau correspondant* $k$*, qui est une fonction* $L^1$ *avec* $\|\hat{k}\|_{L^1} \leq C_{\alpha,\beta} t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}$.

**Preuve.** Analogue à celle du Lemme 2.1 dans [77], sous l'échelle : $\xi \mapsto t^{\frac{1}{2\alpha}}\xi$, nous montrons que $\hat{k} \in L^1$ et $\|\hat{k}\|_{L^1} \leq C_{\alpha,\beta} t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}$.

Dans le Théorème 4.2.1, nous avons prouvé l'analyticité des solutions, ce qui nous permet d'obtenir une estimation de décroissance temporelle des solutions.

**Théorème 4.3.2** *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, pour tout* $\beta > 0$*, la solution globale* $(u, b) \in X$ *et* $(e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u, e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}b) \in X$ *satisfait l'estimation de décroissance temporelle suivante :*

$$\left\|\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u(t), (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}b(t)\right)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq C_{\alpha,\beta} t^{-\frac{\beta}{2\alpha}} \|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}},$$

*où* $C_{\alpha,\beta}$ *est une constante qui dépend de* $\alpha$ *et* $\beta$.

**Preuve.** En utilisant la définition des espaces de Fourier-Besov-Morrey, le Lemme 4.3.1 et le Théorème 4.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u(t)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} &= \left\|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}e^{-\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u(t)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \\
&= \|\{2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)})}\varphi_j\mathcal{F}\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}e^{-\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u(t)\right)\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&= \|\{2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)})}|\xi|^{\beta}e^{-\sqrt{t}|\xi|^{\alpha}}\varphi_j\mathcal{F}\left(e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u(t)\right)\}_{-\infty}^{\infty}\|_{l^q(\mathcal{M}^{\lambda(\cdot)}_{p(\cdot)})} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}\left\|e^{\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u(t)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.
\end{aligned}$$

De même, nous montrons que

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}b(t)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq C_{\alpha,\beta}t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}\|b_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

Ainsi,

$$\left\|\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u(t), (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}b(t)\right)\right\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}} \leq C_{\alpha,\beta}t^{-\frac{\beta}{2\alpha}}\|(u_0, b_0)\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'(\cdot)}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot),q}}.$$

# Chapitre 5

# Existence et analyticité pour les équations de Navier-Stokes généralisées dans les espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey

## Contents



Le but de ce chapitre est de montrer l'existence et l'unicité de la solution globale pour les équations de Navier-Stokes généralisées dans les espaces critiques de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}$ et d'établir la régularité Gevrey de la solution en utilisant une méthode de point fixe.

## Introduction

Nous étudions le problème d'existence globale pour le système généralisé de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu(-\Delta)^\alpha u = Q(u,u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

où $u = u(t,x) = (u^1(t,x), u^2(t,x), ..., u^n(t,x))$, $\mu$ est une constante. L'opérateur bilinéaire $Q$ désigne l'application de la forme

$$Q^j(u,v) = \sum_{k,l,m=1}^{n} q^{j,m}_{k,l}\partial_m(u^k v^l), \quad j = 1, ..., n,$$

où

$$q^{j,m}_{k,l}(f) := \sum_{a,b=1}^{n} \beta^{j,m,a,b}_{k,l}\mathcal{F}^{-1}\big(\big(\frac{\xi_a\xi_b}{|\xi|^2}\big)\widehat{f}(\xi)\big),$$

et $\beta_{k,l}^{j,m,a,b}$ sont des nombres réels.

**Remarque 5.0.1** *Des techniques analogues à celle utilisés dans la Remarque 2.2.1 permettent de montrer que l'espace de Fourier-Besov-Morrey* $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$ *est critique pour* (5.0.1).
*Pour ce faire, nous définissons*

$$u_0^\lambda(x) := \lambda^{2\alpha-1} u_0(\lambda x),$$

*et nous montrons que*

$$\|u_0^\lambda\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} = \|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}},$$

*donc* $\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$ *est un espace critique pour* (5.0.1).

**Théorème 5.0.2** *Soient* $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 3$, $1 \leq q \leq 2$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 + \frac{3}{2p'} + \frac{\lambda}{2p}$ *et* $u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$. *Alors il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que si* $u_0$ *satisfait* $\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} < C_0\mu$, *l'équation* (5.0.1) *a une solution globale unique*

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty); \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right) \cap \mathcal{L}^1\left([0,\infty), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right) \cap \mathcal{L}^\infty([0,\infty); \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}),$$

*telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty);\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} + \mu\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} \leq 2C\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}},$$

*où* $C$ *est une constante positive.*

**Théorème 5.0.3** *Soient* $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < 3$, $1 \leq q \leq 2$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *et* $u_0 \in \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}$. *Alors il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que si* $u_0$ *satisfait* $\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} < C_0\mu$, *le problème* (5.0.1) *admet une solution analytique unique telle que*

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}u\|_{\mathcal{L}^\infty\left([0,\infty);\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)} + \mu\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}u\|_{\mathcal{L}^1\left([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)} \leq 2C\|u_0\|_{\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}},$$

*où* $C$ *est une constante positive.*

## 5.1 Preuve du Théorème 5.1.1

Considérons l'équation intégrale équivalente suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\mu(-\triangle)^\alpha t}u_0 + \int_0^t e^{-\mu(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}Q(u,u)d\tau \\ &= e^{-\mu(-\triangle)^\alpha t}u_0 + B(u,u). \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

**Proposition 5.1.1** *Soient* $1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q \leq 2,\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 + \frac{3}{2p'} + \frac{\lambda}{2p}$ *et* $0 \leq \lambda < 3$. *Posons*

$$X = \mathcal{L}^{\infty}\Big([0,\infty), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big) \cap \mathcal{L}^{1}\Big([0,\infty), \mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big),$$

*avec la norme*

$$\|u\|_X = \|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}\Big([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big)} + \mu\|u\|_{\mathcal{L}^{1}\Big([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big)}.$$

*Il existe une constante* $C = C(\alpha, p, q) > 0$ *qui dépend de* $\alpha, p, q$ *telle que*

$$\|Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^{1}\Big([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big)} \leq C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X. \tag{5.1.2}$$

**Preuve.** On a : (avec $I = [0,\infty)$)

$$\|Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^{1}\Big(I,\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\Big)} = \Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\triangle_j\widehat{Q(u,v)}\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)}\Big\}^{\frac{1}{q}}$$

et

$$Q^j(u,v) = \sum_{k,l,m=1}^{3}\sum_{a,b=1}^{3}\beta_{k,l}^{j,m,a,b}\mathcal{F}^{-1}\Big(\Big(\frac{\xi_a\xi_b}{|\xi|^2}\Big)\partial_m\widehat{(u^k v^l)}(\xi)\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big\|\triangle_j\widehat{Q(u,v)}\Big\|^q_{L^1(I,M_p^\lambda)} &\leq \sum \|\varphi_j\beta_{k,l}^{j,m,a,b}\widehat{\mathcal{F}^{-1}\Big(\Big(\frac{\xi_a\xi_b}{|\xi|^2}}\Big)\partial_m\widehat{(u^k v^l)}\Big)\|_{L^1(I,M_p^\lambda)}\\
&\leq C\sum \|\varphi_j\frac{\xi_a\xi_b}{|\xi|^2}\partial_m\widehat{(u^k v^l)}\|_{L^1(I,M_p^\lambda)}\\
&\leq C\sum \|\varphi_j\partial_m\widehat{(u^k v^l)}\|_{L^1(I,M_p^\lambda)}.
\end{aligned}$$

Nous définissons

$$u_j = \dot{\Delta}_j u, \quad \dot{S}_j u = \sum_{k\leq j-1}\dot{\Delta}_k u, \quad \widetilde{\dot{\Delta}}_j u = \sum_{|k-j|\leq 1}\dot{\Delta}_k u, \quad j\in\mathbb{Z}.$$

En appliquant la décomposition du paraproduit de Bony et la propriété de quasi-orthogonalité pour la décomposition de Littlewood-Paley, pour j fixé, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j(uv) &= \sum_{|k-j|\leq 4}\dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v) + \sum_{|k-j|\leq 4}\dot{\Delta}_j(\dot{S}_{k-1}v\dot{\Delta}_k u)\\
&\quad + \sum_{k\geq j-3}\dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k u\widetilde{\dot{\Delta}}_k v)\\
&= I_j^1 + I_j^2 + I_j^3.
\end{aligned}$$

Alors, par les inégalités triangulaires dans $M_p^\lambda$ et dans $l^q(\mathbb{Z})$, on aura

$$\begin{aligned}
\|\partial(uv)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} &\leq \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{\dot{\Delta}_j(uv)}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^1}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\
&+\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^2}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\
&+\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}}\\
&:= J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}$$

D'après (1.6.2) et le Lemme 1.6.2 avec $|\gamma|=0$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^1}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\|\widehat{(\dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v)}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\|\widehat{v_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\leq k-2}\|\widehat{u_l}\|_{L^\infty([0,\infty),L^1)}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\|\widehat{v_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\leq k-2}2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})l}\|\widehat{u_l}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\|\widehat{v_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\leq k-2}2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})l}2^{l(2\alpha-1)}2^{l(1-2\alpha)}\|\widehat{u_l}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}\|\widehat{v_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\Big(\sum_{l\leq k-2}2^{l(2\alpha-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\|u\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4}2^{k(2\alpha-1)}\|\widehat{v_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\|u\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}$ et en prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$, on obtient

$$J_1\leq \|v\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\|u\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}. \tag{5.1.3}$$

De même, nous montrons que

$$J_2\leq \|u\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\|v\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}. \tag{5.1.4}$$

Pour $J_3$, nous avons

$$I_j^3=\sum_{k\geq j-3}\dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k u\tilde{\dot{\Delta}}_k v)\quad and\quad \tilde{\dot{\Delta}}_j u=\sum_{|k-j|\leq 1}\dot{\Delta}_k u$$

alors,

$$\begin{aligned}
I_j^3 &= \sum_{k\geq j-3} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k u \sum_{|i-k|\leq 1} \dot{\Delta}_i v) \\
&= \sum_{k\geq j-3} \sum_{|i|\leq 1} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k u \dot{\Delta}_{k+i} v) \\
&= \sum_{k\geq j-3} I_{jk}^3,
\end{aligned}$$

avec $I_{jk}^3 = \sum_{|i|\leq 1} \dot{\Delta}_j(\dot{\Delta}_k u \dot{\Delta}_{k+i} v)$.
En utilisant l'inégalité (1.6.2) et le Lemme 1.6.2 avec $|\gamma| = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_{jk}^3}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|i|\leq 1} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k u \dot{\Delta}_{k+i} v})\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\widehat{u_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \|\widehat{v}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),L^1)} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\widehat{u_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} 2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})(k+i)} \|\widehat{v}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}.
\end{aligned}$$

Notant que $\alpha \leq 1 + \frac{3}{2p'} + \frac{\lambda}{2p}$ entraîne que $-2(\alpha-1) + \frac{3}{p'} + \frac{\lambda}{p} \geq 0$, alors en multipliant par $2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}$ et en prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{I_{jk}^3}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|i|\leq 1} 2^{(j-k)(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} 2^{i(2\alpha-1)} \\
&\times (2^{k(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{u_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}) \\
&\times (2^{(k+i)(-(2\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{v}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\sum_{j\in\mathbb{Z}} (\sum_{l\leq 3} \sum_{|i|\leq 1} 2^{l(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} 2^{i(2\alpha-1)} 2^{(j-l)(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \\
&\qquad \times \|\widehat{u}_{j-l}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} 2^{(j-l+i)(-(2\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{v}_{j-l+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)})^q)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{l\leq 3} \sum_{|i|\leq 1} 2^{l(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} 2^{i(2\alpha-1)} \|u\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} \|v\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q'}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur la Remarque 1.7.5, on montre que

$$\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\}^{\frac{1}{q}} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} \times \|v\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} \quad (5.1.5)$$

On obtient après avoir sommé les estimations (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6)

$$\|Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X.$$

Pour l'existence globale, nous utiliserons le Lemme 1.3.1 pour assurer l'existence d'une solution globale avec petites données initiales dans l'espace de Banach X donné par

$$X = \mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}) \cap \mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}).$$

D'après le Lemme 1.7.8 et la Proposition 5.1.1, il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\|B(u,v)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&= \left\|\int_0^t e^{-\mu(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}Q(u,v)d\tau\right\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&\leq C\|Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&\leq C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X\,.
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
&\|B(u,v)\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&= \left\|\int_0^t e^{-\mu(-\triangle)^\alpha(t-\tau)}Q(u,v)d\tau\right\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&\leq C\|Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}\\
&\leq C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X\,.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\|B(u,v)\|_X \leq C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X\,.$$

Le Lemme 1.7.7 permet d'obtenir

$$\|e^{-\mu(-\triangle)^\alpha t}u_0\|_X \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}\,.$$

Si $\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}} < C_0\mu$ avec $C_0 = \frac{1}{4C^2}$, alors l'équation (5.0.1) a une solution globale unique $u \in X$ qui satisfait

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty);\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} + \mu\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq 2C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}\,.$$

## 5.2 Preuve du Théorème 5.1.2

On note $a(t,x) := e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}u(t,x)$ et $b(t,x) := e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}v(t,x)$. En utilisant l'équation intégrale (5.1.1), nous avons

$$\begin{aligned}a(t,x) &= e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}[e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0 + \int_0^t e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}(t-\tau)}Q(u,u)d\tau] \\ &= e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0 + \int_0^t e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}(t-\tau)}e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}Q(u,u)d\tau \\ &= e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0 + N(u,u).\end{aligned}$$

**Lemme 5.2.1** *Soient* $0 \leq \lambda < 3$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $u_0 \in \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^3)$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0\|_{\mathcal{L}^{\infty}([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}, \tag{5.2.1}$$

*et*

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}. \tag{5.2.2}$$

**Preuve.** On a

$$e^{\mu(\sqrt{t}|D|^{\alpha}-(-\Delta)^{\alpha}t)}u_0 = e^{-\frac{1}{2}\mu(\sqrt{t}|D|^{\alpha}-1)^2+\frac{\mu}{2}}e^{-\frac{1}{2}\mu(-\Delta)^{\alpha}t}u_0.$$

En utilisant la transformée de Fourier, en multipliant par $\varphi_j$ et en prenant la norme $M^{\lambda}_p$ on obtient

$$\|\varphi_j \widehat{e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0}\|_{M^{\lambda}_p} \leq Ce^{-\frac{1}{2}\mu t2^{2j\alpha}(\frac{3}{4})^{2\alpha}}\|\varphi_j\widehat{u_0}\|_{M^{\lambda}_p}.$$

En multipliant par $2^{(1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})j}$ et en prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$ on trouve

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0\|_{\mathcal{L}^{\infty}([0,\infty),\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

De la même façon,

$$\|2^{(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})j}\varphi_j \widehat{e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0}\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty);M^{\lambda}_p)} \leq C(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mu t2^{2j\alpha}(\frac{3}{4})^{2\alpha}}2^{2\alpha j}dt)2^{(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})j}\|\varphi_j\widehat{u_0}\|_{M^{\lambda}_p}.$$

En prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$, nous concluons que

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}e^{-\mu(-\triangle)^{\alpha}t}u_0\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty),\mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\|u_0\|_{\mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}}.$$

**Proposition 5.2.2** *Soient* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq 2$, $0 \leq \lambda < 3$ *et* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, *et définissons*

$$X = \mathcal{L}^{\infty}([0,\infty), \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}) \cap \mathcal{L}^{1}([0,\infty), \mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}),$$

*avec la norme*

$$\|u\|_X = \|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}([0,\infty), \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} + \mu \|u\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty), \mathcal{FN}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}.$$

*Alors il existe une constante* $C = C(\alpha, p, q) > 0$ *qui dépend de* $\alpha, p, q$ *telle que*

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}} Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty), \mathcal{FN}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} \leq C\mu^{-1}\|a\|_X \|b\|_X. \tag{5.2.3}$$

**Preuve.** En utilisant la même discussion dans la preuve de la Proposition 5.1.1, nous pouvons estimer $\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(uv)\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty), \mathcal{FN}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})}$. Par la décomposition de Bony, on a

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(uv) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(\dot{S}_{k-1}u\dot{\Delta}_k v) + \sum_{|k-j|\leq 4} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(\dot{S}_{k-1}v\dot{\Delta}_k u) \\
&+ \sum_{k\geq j-3} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(\dot{\Delta}_k u\widetilde{\dot{\Delta}}_k v) \\
&:= I_j^1 + I_j^2 + I_j^3.
\end{aligned}$$

Alors, par l'inégalité triangulaire dans $M_p^{\lambda}$ et dans $l^q(\mathbb{Z})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(uv)\|_{\mathcal{L}^{1}([0,\infty), \mathcal{FN}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q})} &\leq \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\dot{\Delta}_j \widehat{e^{\mu\sqrt{t}|D|^{\alpha}}(uv)}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^{\lambda})}\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\widehat{I_j^1}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^{\lambda})}\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\widehat{I_j^2}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^{\lambda})}\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q} \|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^{\lambda})}\}^{\frac{1}{q}} \\
&:= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Pour $J_1$, par le Lemme 2.1.7 à nouveau, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^1}\|_{M_p^\lambda} &= \|\sum_{|k-j|\le 4}\varphi_j e^{\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}(\widehat{\dot S_{k-1}u\dot\Delta_k v})\|_{M_p^\lambda}\\
&= \|\sum_{|k-j|\le 4}\varphi_j e^{\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}[(\sum_{l\le k-2}e^{-\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\widehat{a}_l)*(e^{-\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\widehat{\dot\Delta_k b})]\|_{M_p^\lambda}\\
&= \|\sum_{|k-j|\le 4}\varphi_j\int_{\mathbb{R}^3}e^{\mu\sqrt{t}(|\xi|^\alpha-|\xi-\zeta|^\alpha-|\zeta|^\alpha)}(\sum_{l\le k-2}\widehat{a}_l)(\xi-\zeta)\widehat{\dot\Delta_k b})(\zeta)d\zeta\|_{M_p^\lambda}\\
&\le C\|\sum_{|k-j|\le 4}\varphi_j\int_{\mathbb{R}^3}(\sum_{l\le k-2}\widehat{a}_l)(\xi-\zeta)\widehat{\dot\Delta_k b}(\zeta)d\zeta\|_{M_p^\lambda}\\
&\le C\sum_{|k-j|\le 4}\|(\widehat{\dot S_{k-1}a\dot\Delta_k b})\|_{M_p^\lambda}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young (1.6.2) et le Lemme 1.6.2 avec $|\gamma|=0$, on a

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_j^1}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} &\le \sum_{|k-j|\le 4}\|(\widehat{\dot S_{k-1}a\dot\Delta_k b})\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\widehat{b_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}\|\widehat{a}_l\|_{L^\infty([0,\infty),L^1)}\\
&\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\widehat{b_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})l}\|\widehat{a}_l\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\widehat{b_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\sum_{l\le k-2}2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})l}2^{l(2\alpha-1)}2^{l(1-2\alpha)}\|\widehat{a}_l\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}\\
&\le \sum_{|k-j|\le 4}\|\widehat{b_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\Big(\sum_{l\le k-2}2^{l(2\alpha-1)q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\|a\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}\\
&\le \sum_{|k-j|\le 4}2^{k(2\alpha-1)}\|\widehat{b_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\|a\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}$ et en prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$, on obtient

$$J_1 \le \|b\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}\|a\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}. \tag{5.2.4}$$

De même, nous montrons que

$$J_2 \le \|a\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}\|b\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}. \tag{5.2.5}$$

Pour $J_3$, nous avons

$$I_j^3 = \sum_{k\ge j-3}\dot\Delta_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}(\dot\Delta_k u\widetilde{\dot\Delta}_k v)\quad \text{and}\quad \widetilde{\dot\Delta}_j u = \sum_{|k-j|\le 1}\dot\Delta_k u.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_j^3 &= \sum_{k\geq j-3} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}(\dot{\Delta}_k u \sum_{|i-k|\leq 1} \dot{\Delta}_i v) \\
&= \sum_{k\geq j-3}\sum_{|i|\leq 1} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}(\dot{\Delta}_k u \dot{\Delta}_{k+i} v) \\
&= \sum_{k\geq j-3} I_{jk}^3,
\end{aligned}$$

avec $I_{jk}^3 = \sum_{|i|\leq 1} \dot{\Delta}_j e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}(\dot{\Delta}_k u \dot{\Delta}_{k+i} v)$

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_{jk}^3}\|_{M_p^\lambda} &= \|\sum_{|i|\leq 1} \varphi_j e^{\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}(\widehat{\dot{\Delta}_k u \Delta_{k+i} v})\|_{M_p^\lambda} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\varphi_j e^{\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}[(e^{-\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\widehat{\dot{\Delta} a_l}) * (e^{-\mu\sqrt{t}|\xi|^\alpha}\widehat{\dot{\Delta}_{k+i} b})]\|_{M_p^\lambda} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\varphi_j \int_{\mathbb{R}^3} e^{\mu\sqrt{t}(|\xi|^\alpha - |\xi-\zeta|^\alpha - |\zeta|^\alpha)}(\sum_{l\leq k-2} \widehat{a}_l)(\xi-\zeta)\widehat{\dot{\Delta}_{k+i} b})(\zeta)d\zeta\|_{M_p^\lambda} \\
&\leq C\sum_{|i|\leq 1} \|\varphi_j \int_{\mathbb{R}^3} (\sum_{l\leq k-2} \widehat{a}_l)(\xi-\zeta)\widehat{\dot{\Delta}_{k+i} b}(\zeta)d\zeta\|_{M_p^\lambda} \\
&\leq C\sum_{|i|\leq 1} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k a \Delta_{k+i} b})\|_{M_p^\lambda}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.6.2) et le Lemme 1.6.2 avec $|\gamma| = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{I_{jk}^3}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} &\leq \sum_{|i|\leq 1} \|(\widehat{\dot{\Delta}_k a \dot{\Delta}_{k+i} b})\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\widehat{a_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \|\widehat{b}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),L^1)} \\
&\leq \sum_{|i|\leq 1} \|\widehat{a_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} 2^{(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})(k+i)} \|\widehat{b}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}$, en prenant la norme $l^q(\mathbb{Z})$ et en remarquant que $\alpha \leq 1 + \frac{3}{2p'} + \frac{\lambda}{2p}$ implique que $-2(\alpha-1) + \frac{3}{p'} + \frac{\lambda}{p} \geq 0$, il apparaît que

$$\begin{aligned}
2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{I_{jk}^3}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)} \leq \sum_{|i|\leq 1} & 2^{(j-k)(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} 2^{i(2\alpha-1)} \\
&\times (2^{k(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{a_k}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}) \\
&\times (2^{(k+i)(-(2\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})} \|\widehat{b}_{k+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}),
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{l\leq 3}\sum_{|i|\leq 1} 2^{l(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}2^{i(2\alpha-1)}2^{(j-l)(1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\\
&\qquad\times\|\widehat{a}_{j-l}\|_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}2^{(j-l+i)(-(2\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}\|\widehat{b}_{j-l+i}\|_{L^\infty([0,\infty),M_p^\lambda)}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \sum_{l\leq 3}\sum_{|i|\leq 1} 2^{l(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})}2^{i(2\alpha-1)}\|a\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}\|b\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q'}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}.
\end{aligned}$$

À nouveau la Remarque 1.7.5 est utilisable pour montrer que

$$\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{j(-2(\alpha-1)+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p})q}\|\widehat{I_j^3}\|^q_{L^1([0,\infty),M_p^\lambda)}\right\}^{\frac{1}{q}} \leq \|a\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}\times\|b\|_{\mathcal{L}^\infty([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})}. \tag{5.2.6}$$

En combinant les estimations (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6), on obtient

$$\|e^{\mu\sqrt{t}|D|^\alpha}Q(u,v)\|_{\mathcal{L}^1([0,\infty),\mathcal{FN}_{p,\lambda,q}^{1-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}})} \leq C\mu^{-1}\|a\|_X\|b\|_X.$$

Pour terminer la preuve du Théorème 5.0.3, nous utilisons les mêmes idées utilisés dans la preuve du Proposition 5.2.2 et en suivant les mêmes étapes dans la preuve du Théorème 5.0.2, il est facile de conclure notre résultat désiré.

# Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons étudié certaines équations aux dérivées partielles issues de la dynamique des fluides. nous avons obtenu des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité et de comportement asymptotique des solutions de ces équations à l'aide des outils d'analyse harmonique, précisément l'utilisation de la décomposition de Littlewood-Paley et l'argument du point fixe dans les espaces de Banach étaient concluante.

L'inégalité de Young est un outil important pour déterminer l'existence globale. Récemment, plusieurs chercheurs ont obtenu l'existence locale et globale de l'équation $(\mathsf{grMHD})$ et $(\mathsf{DHS})$ avec petites données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey. Pour obtenir le résultat d'existence globale, nous ne pouvons pas utiliser l'inégalité de Young dans des espaces fonctionnels à exposants variables. Dans cette thèse, nous avons surmonté ce problème et nous avons obtenu l'existence globale pour l'équation $(\mathsf{grMHD})$ et $(\mathsf{DHS})$ avec petites données initiales dans les espaces de Fourier-Besov-Morrey à exposants variables.

# Bibliographie


[1] Abidin, M.Z., Chen, J. : Global well-posedness and analyticity of generalized porous medium quation in Fourier-Besov-Morrey spaces with variable exponent. Mathematics. 9 (2021), p.498.

[2] Abidin, M.Z., Chen, J. : Global well-posedness for fractional Navier-Stokes equations in variable exponent Fourier-Besov-Morrey spaces. Acta Mathematica Scientia. 41 (2021), 164-176.

[3] Abidi, H., Hmidi, T. : On the global well-posedness of the critical quasigeostrophic equation, SIAM J. Math. Anal. 40 (1) (2008), 167-185.

[4] Acerbi, E., Mingione, G. : Regularity results for stationary electro-rheological fluids, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 164(3) (2002), 213–259.

[5] Alfvén, H. : Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, Nature, 150.3805 (1942), 405-406.

[6] Almeida, A., Caetano, A. : Variable exponent Besov–Morrey spaces. Journal of Fourier Analysis and Applications. 26 (2020), 1-420.

[7] Aurazo-Alvarez, L. L., Ferreira, L.C.F. : Global well-posedness for the fractional Boussinesq-Coriolis system with stratification in a framework of Fourier-Besov type, SN Partial Differential Equations and Applications 2 :62 (2021), pp.18.

[8] Azanzal, A., Allalou, C., Melliani, S. : Global well-posedness, Gevrey class regularity and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier-Besov spaces. Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. DOI : 10.1007/s40590-022-00468-x.

[9] Azanzal, A., Allalou, C., A. : Abbassi, Well-posedness and analyticity for generalized Navier-Stokes equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. J. Nonlinear Funct. Anal. 2021 (2021), 1-14.

[10] Azanzal, A., Abbassi, A., Allalou, C. : Existence of Solutions for the Debye-Hückel System with Low Regularity Initial Data in Critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 21, (2021) 367-380.

[11] Azanzal, A., Abbassi, A., Allalou, C. : On the Cauchy problem for the fractional drift-diffusion system in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. International Journal On Optimization and Applications, 1 (2021), 28-36.

[12] Azanzal, A., Allalou, C., Melliani, S. : Well-posedness, analyticity and time decay of the 3D fractional magneto-hydrodynamics equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces with variable exponent. Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 8 (2022), 1-20. https ://doi.org/10.1007/s41808-022-00172-x.

[13] Azanzal, A., Abbassi, A., Allalou, C. : Gevrey Class Regularity for the 2D Subcritical Dissipative Quasi-geostrophic Equation in Critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. In : Melliani, S., Castillo, O. (eds) Recent Advances in Fuzzy Sets Theory, Fractional Calculus, Dynamic Systems and Optimization. ICPAMS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 476. Springer, Cham (2023). https ://doi.org/10.1007/978-3-031-12416-7-5.

[14] Azanzal, A., Allalou, C., Melliani, S. : Well-posedness and blow-up of solutions for the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. J Elliptic Parabol Equ, 8 (2021), 23-48. https ://doi.org/10.1007/s41808-021-00140-x

[15] Azanzal, A., Allalou, C., Melliani, S. : Gevrey class regularity and stability for the Debye-Hückel system in critical Fourier-Besov-Morrey spaces, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática. To appear

[16] **A**zanzal, A., Allalou, C., Melliani, S. : Global well-posedness and asymptotic behavior for the 2D subcritical dissipative quasi-geostrophic equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces, Journal of Partial Differential Equations. To appear

[17] Ouidirne, F., Azanzal, A., Allalou, C., Oukessou, M. : Sobolev-type Embedding in Besov-Morrey spaces with variable exponents. Special Issue of the journal Advanced Mathematical Models and Applications. To appear

[18] Bae, H. : Existence and analyticity of Lei-Lin solution to the Navier-Stokes equations. Proceedings of the American Mathematical Society, (2015), 2887-2892.

[19] Bae, H. : Global well-posedness of dissipative quasi-geostrophic equations in critical spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 136 (2008), 257-261.

[20] Benameur, J. : Long time decay to the Lei–Lin solution of 3D Navier–Stokes equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 422 (2015), 424-434.

[21] Benameur, J., Benhamed, M. : Global existence of the two-dimensional QGE with subcritical dissipation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423 (2015), 1330-1347.

[22] Benameur, J., Blel, M. : Long-time decay to the global solution of the 2D dissipative quasigeostrophic equation. In Abstract and Applied Analysis, 2012 (2012).

[23] Benhamed, M., Abusalim, S. M. : Long Time Behavior of the Solution of the Two-Dimensional Dissipative QGE in Lei–Lin Spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2020 (2020).

[24] Biler, P. : Existence and asymptotics of solutions for a parabolic-elliptic system with nonlinear no-flux boundary conditions. Nonlinear Analysis : Theory Methods and Applications. 19 (12) (1992), 1121-1136.

[25] Biswas, A. : Gevrey regularity for a class of dissipative equations with applications to decay. Journal of Differential Equations. 253 (2012), 2739-2764.

[26] Bony, J.M. : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Annales de l'École Normale Supérieure, 14 (1981), 209–246.

[27] Caffarelli, L., and Vasseur, A. : Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation, Annal of Math (2006).

[28] Cannone, M. : A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. Revista matemática iberoamericana. 13 (1997), 515-541.

[29] Cannone, M., Wu, G. : Global well-posedness for Navier-Stokes equations in critical Fourier-Herz spaces, Nonlinear Anal., 75 (2012).

[30] Carrillo, J. A., Ferreira, L. C. F. : The asymptotic behaviour of subcritical dissipative quasi-geostrophic equations. Nonlinearity, 21 (2008), 1001.

[31] Chae, D., Lee, J. : Global well-posedness in the super-critical dissipative quasi-geostrophic equations. Communications in mathematical physics, 233 (2003), 297-311.

[32] Chemin, J. Y. : Desjardins, B., Gallagher, I., Grenier, E. : Mathematical geophysics : An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations (Vol. 32)(2006). Clarendon Press.

[33] Chen, Q., Zhang, Z. : Global well-posedness of the 2D critical dissipative quasi-geostrophic equation in the Triebel–Lizorkin spaces. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 67 (2007), 1715-1725.

[34] Y. Chen, S. Levine and M. Rao. : Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM journal on Applied Mathematics, 66(4) (2006), 1383– 1406.

[35] Chen, Q., Miao, C., Zhang, Z. : A new Bernstein's inequality and the 2D Dissipative quasi-geostrophic equation, Comm. in Math. Phys. 271 (3) (2007), 821-838.

[36] Constantin, P., Wu, J. : Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations. SIAM journal on mathematical analysis, 30 (1999), 937-948.

[37] Constantin, P., Majda, A. J., Tabak, E. : Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. Nonlinearity, 7(6) (1994), 1495-1533.

[38] Córdoba, A., Córdoba, D. : A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations, Comm. Math. Phys. 249, (2004), 511-528.

[39] Corrias, L., Perthame, B., and Zaag, H. : Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions. Milan J. Math. 72 (2004), 1–28.

[40] Cruz-Uribe, D., Diening, L., Hästö, P. : The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces, Fractional Calculus and Applied Analysis, 14(3) (2011), 361–374.

[41] Cruz-Uribe, D. V., Fiorenza, A. : Variable Lebesgue spaces : Foundations and harmonic analysis, Springer Science & Business Media, 2013.

[42] Cui, Y., Xiao, W. : Gevrey regularity and time decay of the fractional Debey-Hückel system in Fourier-Besov spaces. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 57 (2020), 1393-1408.

[43] de Almeida, M. F., Ferreira, L. C. F., Lima, L. S. M. : Uniform global well-posedness of the Navier–Stokes–Coriolis system in a new critical space. Mathematische Zeitschrift, 287 (2017), 735-750.

[44] Debye, P., and Hückel, E. : Zur theorie der elektrolyte. II. Das Grenzgesetz für die elektrische Leitfähigkeit. Physikalische Zeitschrift. 24 (15) (1923), 305-325.

[45] De Giorgi, E. : Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (3), 3 (1957), 25-43.

[46] El Baraka, A., Toumlilin, M. : Global well-posedness and decay results for 3D generalized magneto-hydrodynamic equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces, Electronic J. Differential Equations, 2017.65 (2017), 1-20.

[47] El Baraka, A., Toumlilin, M. : Uniform well-Posedness and stability for fractional Navier-Stokes Equations with Coriolis force in critical Fourier-Besov-Morrey Spaces, Open J. Math. Anal. 2019, 3(1), 70-89.

[48] El Baraka, A., Toumlilin, M. : Global well-posedness and decay results for 3D generalized magneto-hydrodynamic equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. Electronic Journal of Differential Equations. 65 (2017), 1-20.

[49] El Baraka, A., Toumlilin, M. : Global Well-Posedness for Fractional Navier-Stokes Equations in critical Fourier-Besov-Morrey Spaces, Moroccan J. Pure and Appl. Anal., 3.1 (2017), 1-14.

[50] Fan, X. : Global c1, $\alpha$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form, Journal of Differential Equations, 235(2) (2007), 397–417.

[51] Ferreira, L. C. : On the uniqueness of mild solutions for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in the critical $L^p$-space. Mathematics in Engineering. 4 (2022), 1-14.

[52] Ferreira, L.C., Lima, L.S. : Self-similar solutions for active scalar equations in Fourier-Besov-Morrey spaces, Monatsh. Math. 175.4 (2014), 491-509.

[53] Ferreira, L. C., Precioso, J. C. : Existence and asymptotic behaviour for the parabolic–parabolic Keller–Segel system with singular data. Nonlinearity. 24 (2011), 1433.

[54] Foias, C., Temam, R. : Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. Journal of Functional Analysis. 87 (1989), 359-369.

[55] Fujita, H., Kato, T. : On the Navier-Stokes initial value problem. I. STANFORD UNIV CALIF. (1963).

[56] Gallagher, I., Iftimie, D., Planchon, F. : Non-blowup at large times and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations. CR Math. Acad. Sci. Paris, 334 (2002), 289-292.

[57] Germain, P., Pavlovic, N., Staffilani, G. : Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations evolving from small data in $BMO^{-1}$, Int. Math. Res. Not. IMRN 2007 (2007).

[58] Giga, Y., Miyakawa, T. : Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morry spaces, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), 577–618.

[59] Gogny, D., and Lions, P. L. : Sur les états d'équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique. 23 (1) (1989) 137-153.

[60] Grujić, Z., Kukavica, I. : Space analyticity for the Navier–Stokes and related equations with initial data inLp. journal of functional analysis. 152 (1998), 447-466.

[61] Hmidi, T., Keraani, S. : On the global solutions of the super-critical 2D quasigeostrophic equation in Besov spaces. Advances in Mathematics, 214 (2) (2007), 618- 638.

[62] Hmidi T. : Régularité höldérienne des poches de tourbillon régulières. J. Math. Pures Appl. 84 (11) (2005), 1455-1495.

[63] Hopf, E. : Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. Mathematische Nachrichten. 4 (1950), 213-231.

[64] Iwabuchi, T., Takada, R. : Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type, J. Funct. Anal. 267 (5) (2014), 1321-1337.

[65] Iwabuchi, T. : Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 379 (2) (2011), 930-948.

[66] Iwabuchi, T., and Nakamura, M. : Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation and the Keller-Segel system in Besov and Triebel-Lizorkin spaces. Advances in Differential Equations. 18 (7/8) (2013), 687-736.

[67] Ju, N. : Existence and uniqueness of the solution to the dissipative 2D quasigeostrophic equations in the Sobolev space. Comm. Math. Phys. (2) 251, (2004), 365-376.

[68] Kato, T. : Strong $L^p$-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$. with applications to weak solutions. Mathematische Zeitschrift. 187 (1984), 471-480 .

[69] Kato, T. : Strong $L^p$-solutions of the Navier-Stokes in $\mathbb{R}^3$ with applications to weak solutions, Math. Z. 187 (1984), 471–480.

[70] Kato, T. : KatoStrong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces, Bol. Soc. Brasil Mat. 22.2 (1992), 127–155.

[71] H. Koch, D. Tataru : Well-posedness for the Navier-Stokes equations, Adv. Math. 157 (2001), 22–35.

[72] Kato, T. : Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In Spectral theory and differential equations. 448, 25-70 (1995).

[73] Koch, H., Tataru, D. : Well-posedness for the Navier-Stokes equations. Advances in Mathematics. 157 (2001), 22-35.

[74] Kozono, H., Yamazaki, M. : Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, Comm. Partial Differential Equations, 19, no. 5-6 (1994) , 959-1014.

[75] Karch, G. : scaling in nonlinear parabolic equations. Journal of mathematical analysis and applications. 234 (2) (1999), 534-558.

[76] Kurokiba, M., Ogawa, T. : Well-posedness for the drift-diffusion system in Lp arising from the semiconductor device simulation. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 342 (2008), 1052-1067.

[77] Lemarié-Rieusset, P. G. : Recent developments in the Navier-Stokes problem. CRC Press (2002)..

[78] Leray, J. : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta mathematica. 63 (1934), 193-248.

[79] Liu, Q., Zhao, J. : Global well-posedness for the generalized magneto-hydrodynamic equations in the critical Fourier–Herz spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 420 (2014), 1301-1315.

[80] Luo, Y. : Well-Posedness Of A Cauchy Problem Involving Nonlinear Fractal Dissipative Equations. Applied Mathematics E-Notes. 10 (2010), 112-118.

[81] Li, P. and Zhai, Z. : Well-posedness and regularity of generalized Navier-Stokes equations in some critical Q-spaces, Journal of Functional Analysis, vol. 259, no. 10 (2010), pp. 2457–2519.

[82] P. Li and Zhai, Z. : Generalized Navier-Stokes equations with initial data in local Q-type spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 369, no. 2 (2010), 595–609.

[83] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Gauthier-Villars, Paris, Farnce, 1969.

[84] Miao, C., Yuan, B., Zhang, B. : Well-posedness of the Cauchy problem for the fractional power dissipative equations. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. 68 (2008), 461-484.

[85] Marchand, F. : Existence and regularity of weak solutions to the quasigeostrophic equations in the spaces Lp or $H^{-1/2}$, Comm. Math. Phys. 277(2008), 45-67.

[86] Melo, W. G., Perusato, C., Rocha, N. F. : On local existence, uniqueness and blow-up of solutions for the generalized MHD equations in Lei–Lin spaces. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 70 (3) (2019), Paper No. 74, pp.24

[87] Nakano, H. : Topology and linear topological spaces, 3, Maruzen Company, 1951.

[88] Ogawa, T. and Shimizu, S. : The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space. Journal of Functional Analysis. 255 (5) (2008), 1107-1138.

[89] Pedlosky, J., Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, (1987).

[90] Resnick, S. : Dynamical problems in nonlinear advective partial differential equations, Ph.D. Thesis, University of Chicago (1995).

[91] Selberherr, S. : Analysis and simulation of semiconductor devices. Springer Science & Business Media, 2012.

[92] Stein, E. M. : Singular Integrals and Differentiability properties of functions, Princeton University Press, (1970).

dissipation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423 (2015), 1330-1347.

[93] Taylor, M. E. : Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations, Commun. Partial Differ. Equ., 17 (1992), 1407-1456.

[94] Toumlilin, M. : Global well-posedness and analyticity for generalized porous medium equation in critical Fourier-Besov-Morrey spaces Open J. Math. Anal. 3(2) (2019),71-80.

[95] Wang, W. : Global well-posedness and analyticity for the 3D fractional magneto-hydrodynamics equations in variable Fourier–Besov spaces. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 70 (2019), 1-16.

[96] Wu, J. : Lower bounds for an integral involving fractional Laplacians and the generalized Navier-Stokes equations in Besov spaces, Communications in Mathematical Physics, vol.263, no. 3 (2006), 803-831.

[97] Wu, J. : Global solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in Besov spaces. SIAM J. Math. Anal, 36 (2005), 1014-1030.

[98] Wu, J. : 2D dissipative quasi-geostrophic equation in Besov spaces. SIAM J. Math. Anal, 36 (2005), 1014-1030.

[99] Wang, Y., Wang, K. : Global well-posedness of the three dimensional magneto-hydrodynamics equations. Nonlinear Analysis : Real World Applications. 17 (2014), 245-251.

[100] Wu, J. : The generalized incompressible Navier-Stokes equations in Besov spaces, Dynamics of Partial Diferential Equations, vol.1, no. 4 (2004), 381–400.

[101] Xiao, J. Homothetic variant of fractional Sobolev space with application to Navier-Stokes system, Dynamics of Partial Differential Equations, vol. 4, no. 3 (2007), 227–245.

[102] Xiao, W., Chen, J., Fan, D., Zhou, X., Global well-posedness and long time decay of fractional Navier-Stokes equations in Fourier-Besov spaces. In Abstract and Applied Analysis Hindawi, 2014 (2014).

[103] Yu, X., and Zhai Z. : Well-posedness for fractional NavierStokes equations in the largest critical spaces $\dot{B}^{-(2\beta-1)}_{\infty,\infty}$, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 35, no. 6 (2012), pp. 676–683.

[104] Yamamoto, M. : Spatial analyticity of solutions to the drift-diffusion equation with generalized dissipation. Arch. Math. 97 (2011), 261-270.

[105] Zhai, Z. : Well-posedness for fractional Navier-Stokes equations in critical spaces close to $\dot{B}^{-(2\beta-1)}_{\infty,\infty}$, Dynamics of Partial Diferential Equations, vol. 7, no. 1 (2010), 25–44.

[106] Zhao, J., Liu, Q. and Cui, S. : Existence of solutions for the Debye-Hückel system with low regularity initial data. Acta applicandae mathematicae. 125 (1) (2013) 1-10.

[107] Zhou, X., Xiao, W. : Algebra properties in Fourier-Besov spaces and their applications. Journal of Function Spaces. (2018). DOI : 10.1155/2018/3629179.

[108] Zhao, J. : Gevrey regularity of mild solutions to the parabolic–elliptic system of drift-diffusion type in critical Besov spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 448 (2017), 1265-1280.

[109] Zhao, J., Liu, Q., Cui, S. : Existence of solutions for the Debye-Hückel system with low regularity initial data. Acta applicandae mathematicae. 125 (2013), 1-10.

[110] Zhou, X., Xiao, W. : Algebra Properties in Fourier-Besov Spaces and Their Applications. Journal of Function Spaces, 2018, (2018).

[111] Zhou, X., Xiao,W. : Algebra Properties in Fourier-Besov Spaces and Their Applications, J. of Function Spaces Volume 2018, Article ID 3629179, 10 pages.