

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni-Mellal

Centre d'Etudes Doctorales « Sciences et Techniques »

Formation doctorale « Mathématiques - Physique et Applications »

THÈSE

Présentée par

Abdelmajid EL HAJAJI

Pour obtention du grade de

Doctorat National

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Approximation numérique de quelques inéquations variationnelles
et application en finance**

Soutenue le 22/03/2014 devant la commission d'examen :

Président :

M^r K. EZZINBI Professeur à la Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

Reporteurs :

MM. M. JOURHMANE Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal

S. MELLIANI Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal

S. RAGHAY Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Marrakech

Examineurs :

MM. L. S. CHADLI Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal

K. HILAL Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal
(Directeur de thèse)

M. OUKESSOU Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Béni Mellal

DÉDICACE



Je dédie cette thèse à toute ma famille, surtout :

À mes chers Parents,
À mes chers Frères et Sœurs,
À ma chère épouse Fadoua et ses parents en particulier son père Ahmed Tallouch,
et À mes chers amis.

REMERCIEMENTS



Durant ces dernières années, j'ai eu la chance de faire la connaissance d'un bon nombre de personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de cette thèse de doctorat et que je tiens à remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier K. EZZINBI Professeur à la Faculté des Sciences Semlalia Marrakech qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je tiens à remercier les rapporteurs de mon manuscrit : Messieurs S. MELLIANI, S. RAGHAY et M. JOURHMANE pour avoir acceptée de rapporter ce travail et pour leurs remarques et questions pertinentes. Merci à L. S. CHADLI et à M. OUKESSOU d'avoir acceptée de faire partie du jury.

Je tiens à remercier Monsieur KHALID HILAL, mon directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissante, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible.

Je remercie vivement Messieurs A.SERGHINI, E.B MERMRI et A.AISSAOUI pour leur aide considérable et leur précieux conseils.

Enfin, je souhaiterais remercier ma grande famille pour leur soutien pendant ma thèse. Merci mes parents et à ma femme qui m'a en plus offert le plus beau des cadeaux de ma vie, ma chère Lina.

Table des matières



Résumé	6
Introduction générale	7
Chap. A. Généralités	11
A.1 Notations générales	11
A.2 Espaces des fonctions	12
A.3 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	14
A.4 Principe du maximum	15
A.5 Calcul stochastique	16
A.5.1 Processus et filtration	16
A.5.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)	17
A.5.3 Intégrale stochastique	18
A.5.4 Equations différentielles stochastiques (EDS)	18
Partie I Les splines et les inéquations variationnelles	20
Chap. 1. Les fonctions splines	21
1.1 L'espace des splines	21
1.2 Les B-splines	22
1.2.1 Propriétés de base	22
1.2.2 Les B-splines normalisées	23
1.3 Interpolation et quasi-interpolation par les fonctions splines	28
1.3.1 Interpolation par les fonctions splines	28
1.3.2 Quasi-interpolation par les fonctions splines	33
Chap. 2. Inéquations variationnelles et problème d'obstacle	36
2.1 Introduction	36

2.2	Inéquations variationnelles elliptiques (<i>IVE</i>)	37
2.2.1	Notations	37
2.2.2	IVE du premier type	37
2.2.3	IVE du second type	37
2.2.4	Remarques	38
2.2.5	Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du premier type	38
2.2.6	Remarques	38
2.2.7	Exemple d'IVE du premier type : Problème d'obstacle	40
2.2.8	Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du second type	42
2.2.9	Pénalisation du problème d'obstacle	43
2.3	Inéquations variationnelles paraboliques (<i>IVP</i>)	44
2.3.1	Formulation et résultats principaux	44
2.3.2	Les schémas numériques pour les équations linéaires paraboliques	46
Chap. 3.	Une méthode de spline cubique pour résoudre un problème d'obstacle unilatéral .	48
3.1	Introduction	48
3.2	Le problème de pénalisation	49
3.3	La méthode de collocation de spline cubique	51
3.4	Convergence de la méthode	54
3.5	Des exemples numériques	56
3.5.1	Exemple 1	56
3.5.2	Exemple 2	59
3.6	Conclusion	59
Partie II	Applications en finance	60
Chap. 4.	Options	61
4.1	Introduction	61
4.2	Hypothèses sur le marché	62
4.3	Définitions et notations des taux de base	64
4.4	Modèle de Black-Scholes	66
4.4.1	Modélisation probabiliste du marché	66
4.4.2	Le lemme d'Itô	67

4.5	Les modèles stochastiques des taux d'intérêt	68
4.5.1	Modèle de Vasicek	69
4.5.2	Modèle de Ho-Lee	69
4.5.3	Modèle Hull-White d'un seul facteur	70
4.5.4	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	70

Chap. 5. Évaluation des options européennes en utilisant une méthode de collocation de fonction spline cubique

	tion spline cubique	74
5.1	Introduction	74
5.2	Formulation du problème	75
5.3	La discrétisation temporelle et la description de la θ -méthode	78
5.4	La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique	80
5.5	Analyse de la stabilité	84
5.6	Des exemples numériques	85
5.6.1	Exemple 1.	86
5.6.2	Exemple 2.	87
5.6.3	Exemple 3.	88
5.6.4	Exemple 4.	88
5.6.5	Exemple 5.	89
5.7	Conclusion	90

Chap. 6. Évaluation des options américaines sur les obligations avec utilisation d'une méthode de collocation de fonction spline cubique

	de collocation de fonction spline cubique	91
6.1	Introduction	91
6.2	Le problème de pénalisation	93
6.3	Discrétisation temporelle et description de la méthode trapézoïdale	95
6.4	La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique	100
6.5	La convergence de la méthode	104
6.6	Exemple numérique	105
6.7	Conclusion	107

Perspectives	109
-------------------------------	------------

Bibliographie	110
--------------------------------	------------

Résumé

Cette thèse introduit une nouvelle approche pour résoudre un problème d'obstacle et traite l'évaluation des options européennes (resp. les options américaines) avec des modèles financiers, interprétée comme solution d'un système d'équations (resp. d'inéquations) aux dérivées partielles parabolique.

La première partie développe une méthode numérique pour résoudre un problème d'obstacle unilatéral en utilisant la méthode de **collocation de spline cubique** et la méthode de Newton généralisée. Cette méthode converge quadratiquement et l'erreur d'estimation entre la solution de pénalité et la solution analytique est prouvée. Pour valider les résultats théoriques, des tests numériques sur un problème d'obstacle en dimension un, sont présentés. Ainsi, notre contribution, quand à l'amélioration de certains résultats cités dans les références, sera illustrée.

La deuxième partie est consacrée au développement d'une méthode numérique pour évaluer des options européennes et américaines permettant de discrétiser la variable temporelle par **θ -méthode**, résultant d'une équation aux dérivées partielles (EDP), qui sera ensuite résolue numériquement par une méthode de collocation de spline cubique pour la discrétisation spatiale. Finalement, pour résoudre le système discrétisé, nous élaborerons une méthode de collocation et nous montrerons que celle ci est convergente en deuxième ordre. Les résultats numériques sont présentés et comparés avec les autres méthodes de collocation données dans la littérature.

Introduction générale

Le thème des inéquations variationnelles (IVs) porte essentiellement sur le calcul des variations relatives à la minimisation des fonctionnelles en dimension infinie. L'étude systématique du sujet remonte aux années 60 avec les travaux effectués par l'italien Guido Stampacchia, qui était l'un des pionniers dans ce domaine. Guido Stampacchia et ses collaborateurs ont utilisé l'inéquation variationnelle comme un outil d'analyse favorisant l'étude des problèmes de frontière libre définie par les dérivées partielles non linéaires. Il en découle des problèmes unilatéraux de l'élasticité et de plasticité. Les premiers travaux sur les inéquations variationnelles ont été introduit dans [46, 66, 70, 82, 83]. En particulier, le premier théorème d'existence et d'unicité de la solution des (IVs) a été démontré dans [82]. Les livres de Baiocchi et Capelo [4], Kinderlehrer et Stampacchia [58] constituent une introduction complète à l'application des inéquations variationnelles sur des espaces fonctionels en dimension infinie (voir aussi [5]). Le livre de Glowinski, Lions et Trémolière [43] est considéré comme une des premières références ayant donné un traitement numérique détaillé de ces (IVs). Il existe, par ailleurs, des références sur le même thème en dimension infinie.

Les inéquations variationnelles en dimension finie et les problèmes de complémentarité (linéaire (PC) ou non linéaire (PCN)) ont été traitées pour la première fois au début des années 60. Plus précisément, le (PCN) a été considéré et élaboré en 1964 par Richard W. Cottle [24] dans sa thèse de Ph.D, sous la direction de George B. Dantzig "père de la programmation linéaire". Ainsi, ils ont contribué à la naissance de l'étude des (IVs) par le biais du (PCN). Durant les années 70, 80 et 90, plusieurs auteurs ont contribué à l'étude du (PCN) en dimension infinie. Nous citerons par exemple [51].

De nombreux problèmes en mécanique, en physique, en contrôle et en finance conduisent à l'étude des *inéquations variationnelles*.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

- Un chapitre préliminaire sur le rappel de quelques résultats d'analyse fonctionnelle et calcul stochastique.
- Deux parties consacrées respectivement aux rappels des fonctions splines, des inéquations variation-

nelles, du problème d'obstacle et des notions élémentaires de mathématiques financières.

Partie I : Cette partie est constituée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons quelques résultats et définitions sur les B-splines et les splines cubiques. En suite, on donnera quelques notions sur l'interpolation et la quasi-interpolation par les fonctions splines de degré k .

Dans le deuxième chapitre, nous considérons essentiellement les deux types suivants d'inéquations variationnelles, à savoir :

- Inéquations variationnelles elliptiques (*IVE*) ;
- Inéquations variationnelles paraboliques (*IVP*).

On se limite à l'étude de l'existence, l'unicité et l'approximation de la solution de l'*IVE* et (*IVP*) (voir Lions et Stampacchia [67]).

Dans le troisième chapitre, nous développerons une méthode numérique pour résoudre un problème d'obstacle unilatéral en utilisant la méthode de collocation de spline cubique et la méthode de Newton généralisée. Cette méthode converge quadratiquement si une relation entre le paramètre de pénalisation ε et le paramètre de discrétisation h est satisfaite. L'erreur d'estimation entre la solution de pénalité et la solution analytique sera calculée. Pour valider les résultats théoriques, des tests numériques sur un problème d'obstacle unidimensionnel sont présentés.

Partie II : La deuxième partie est constituée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques modèles qu'on utilise souvent dans le secteur financier. Il existe plusieurs types d'investisseurs dans le marché financier d'aujourd'hui, non seulement les entreprises, les banques et autres institutions financières, mais aussi de nombreux spéculateurs privés avec de l'argent dans des fonds ou d'autres titres. Récemment, la spéculation des instruments financiers dérivés tels que les options sur titre a augmenté rapidement. Tout cela a généré une demande croissante de connaissances sur l'analyse de toutes les relations complexes des marchés et ceci d'une manière fiable. Dans ce chapitre, on rappelle les notions élémentaires en mathématique financiers, à savoir les taux d'intérêts, l'arbitrage, les options et les modèles d'évaluation des actifs financiers.

Dans le deuxième chapitre, nous illustrons notre contribution personnelle par le développement

d'une nouvelle méthode numérique pour évaluer l'option européenne dans le cadre du modèle de Black-Scholes, qui est régi par une équation aux dérivées partielles de Black-Scholes généralisée : Premièrement, nous allons proposer la θ -méthode pour discrétiser la variable temporelle, résultant d'une équation linéaire aux dérivées partielles (EDP), qui sera ensuite résolue numériquement, nous développerons et nous analyserons une nouvelle méthode de collocation de spline cubique pour la discrétisation spatiale. Finalement, pour résoudre le système linéaire discrétisé, nous élaborerons une méthode de collocation et nous montrerons que celle-ci est convergente en deuxième ordre. Les résultats numériques sont présentés et comparés avec les autres méthodes de collocation données dans la littérature.

Dans le troisième chapitre, les options américaines sur les obligations ont le prix sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Le problème de complémentarité linéaire de la valeur de l'option est résolu numériquement par une méthode de pénalisation, par laquelle le problème se transforme en une (EDP) non-linéaire en ajoutant un terme de pénalisation de puissance. La solution du problème pénalisé converge vers celle du problème initial. Pour résoudre numériquement cette (EDP) non-linéaire, nous utilisons la méthode horizontale des lignes pour discrétiser la variable temporelle et la variable spatiale au moyen de la méthode trapézoïdale et une méthode de collocation de spline cubique, respectivement. Nous prouverons que ce schéma de discrétisation complète converge et la convergence est du second ordre. Ainsi la convergence de la solution numérique vers la solution du problème continu est garantie. Les résultats numériques sont présentés et comparés avec d'autres méthodes numériques déjà fait.

Chapitre A

Généralités

Sommaire

A.1	Notations générales	11
A.2	Espaces des fonctions	12
A.3	Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	14
A.4	Principe du maximum	15
A.5	Calcul stochastique	16
A.5.1	Processus et filtration	16
A.5.2	Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)	17
A.5.3	Intégrale stochastique	18
A.5.4	Equations différentielles stochastiques (EDS)	18

A.1 Notations générales

En général, les notations sont indiquées dans le texte lorsqu'elles sont introduites.

Néanmoins, nous reproduisons ici les notations les plus utilisées.

- Ω : un domaine borné dans \mathbb{R}^N , $N \geq 1$,
- $\Gamma = \partial\Omega$,
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un point de Ω ,
- $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_N)$,
- $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$, où $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sont des entiers positifs, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$,
- \rightarrow : la convergence forte (en norme),
- \rightharpoonup : la convergence faible,

- $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^N ,
- $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie,
- $S^{(k)}$ la k^{ime} dérivée d'une fonction S ,
- $\tau_h u(x) = u(x+h)$: translation de u par h , avec $x, x+h \in \Omega$ et $u \in L^r(\Omega)$.
- $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$: le polynôme nodal de degré $n+1$,
- $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$: différences divisées de Newton,
- Nous définissons la fonction puissance tronquée avec un exposant m , comme suit :

$$(x)_+^m = \begin{cases} x^m, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous définissons la fonction indicatrice par

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a,b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous désignons par r' le conjugué de r , défini par $r' = \frac{r}{r-1}$.

Dans la suite de cette section, on prend $r > 1, d = N$ ou N^2 et $m \geq 1$.

A.2 Espaces des fonctions

- $L^1(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions intégrable au sens de Lebesgue. C'est-à-dire, comme nous le faisons habituellement, nous confondons deux fonctions qui coïncident presque partout (p.p. en abrégé).

Pour $f \in L^1(\Omega)$, nous notons

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

- $L^r(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^r dx < +\infty\}$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{0,r,\Omega} = \|f\|_{L^r(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \text{ pour } f \in L^r(\Omega),$$

- $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et il existe } C > 0 \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

- $L^r(\Omega, \mathbb{R}^d) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, f \text{ mesurable et } f_i \in L^r(\Omega), \text{ avec } 1 \leq i \leq d\}$,

- $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$: l'espace des fonctions m -fois continûment différentiables à valeurs réelles où tous les dérivés jusqu'à l'ordre m sont continues dans $\overline{\Omega}$,

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \text{ pour } f \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}),$$

- $\mathcal{C}_c^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega) / \text{Supp}(f) \text{ est un sous-ensemble compact de } \Omega\}$,
- $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact,
- $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); \text{supp}(f) \subset K\}$ est un espace de Fréchet avec $K \subset \Omega$ compact, quand il est muni de la topologie définie par la famille de semi-normes

$$\|f\|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \text{ pour } f \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

- $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$, où $\partial^\alpha f$ est sous-entendu au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$ (c'est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega) = \cup \mathcal{D}_K(\Omega)$), est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \text{ pour } f \in W^{m,p}(\Omega),$$

$$\|\cdot\|_{1,r,\Omega} = \|\cdot\|_{0,r,\Omega} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \right\|_{0,r,\Omega} : \text{ la norme usuelle de } W^{1,r}(\Omega),$$

- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, est un espace de Hilbert,
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega); \partial^\alpha f = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m-1\}$, est un sous-espace de $W^{m,p}(\Omega)$ pour la norme

$$\|f\|_{W_0^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \text{ pour } f \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

- $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$,
- $W_0^{1,r}(\Omega) = \left\{ f \in L^r(\Omega) : \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^r(\Omega) \text{ et } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.
- $W_0^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}^N) = \left\{ f : f_i \in W_0^{1,r}(\Omega) \text{ et } f_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \text{ pour } 1 \leq i \leq N \right\}$.
- $L^p(a, b; X) = \{f : [a, b] \rightarrow X, \text{ intégrable telle que } \|f\|_X \in L^p(a, b), 1 \leq p \leq \infty\}$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f\|_X^p \right)^{1/p} \text{ avec } 1 \leq p < \infty \text{ pour } f \in L^p(a, b; X)$$

avec X est un espace de Banach,

- $C^\alpha(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); [f]_\alpha = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$, est l'espace hölderien d'exposant α avec $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|f\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} + [f]_\alpha \text{ pour } f \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

– $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}); \partial^\beta f \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| = k\}$, pour tout $k \geq 0$ entier, est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq k} \left\| \partial^\beta f \right\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| = k} \left[\partial^\beta f \right]_\alpha \text{ pour } f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

A.3 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ^(a), de frontière $\partial\Omega$. On rappelle que $L^p(\Omega)$ est l'espace de fonctions p -ème intégrables et $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev, muni de sa norme usuelle ($\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$) et $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}$, avec $1 \leq p < +\infty$. Rappelons que $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Nous rappellerons quelques propriétés, sur la complétude, réflexivité et séparabilité, de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition A.3.1 (cf, [10]). *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est*

1. un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$,
2. réflexif pour $1 < p < +\infty$,
3. séparable pour $1 \leq p < +\infty$,
4. un Hilbert séparable pour $p = 2$.

Proposition A.3.2 (Inégalité de Hölder [10]). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a $f \cdot g \in L^1(\Omega)$, et*

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Définition A.3.1 (cf, [10]). *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^N , on dit que Ω_2 est inclus fortement dans Ω_1 , et noté $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$, si $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$.*

Proposition A.3.3 (Voir [10]). *Soit $u \in L^p(\Omega)$, avec $1 < p \leq +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$,
2. Il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq c \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

3. Il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq c|h|.$$

^a Au long de ce chapitre, nous supposons $N \geq 2$.

De plus, on peut prendre $c = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ dans (2) et (3).

Proposition A.3.4 (Inégalité de Poincaré [10]). *On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors il existe une constante $c = c(\Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < +\infty).$$

Théorème A.3.1 (Formule de Green [75]). *On suppose que Ω est borné, de frontière Γ , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors pour toutes u et v de $H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v dx = - \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u \cdot v \cdot v_i ds$$

où v_i est la i -ème composante de la normale extérieure ν .

Soit $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Omega_i$ une décomposition de $\bar{\Omega}$ telle que

1. Ω_i est un ouvert de \mathbb{R}^N , contenu dans Ω , de frontière Γ_i , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux pour $i = 1, \dots, \ell$.
2. $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Théorème A.3.2 (Voir [75]). *Soit u une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ telle que la restriction de u à Ω_i appartient à $H^1(\Omega_i)$, pour tout $i = 1, \dots, \ell$, alors $u \in H^1(\Omega)$.*

Théorème A.3.3 (Théorème de représentation de Riesz (Fréchet-Riesz), (cf, [75])). *Si a est une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert réel H , alors il existe une unique application A de H dans H telle que, pour tout $(u, v) \in H \times H$, on ait $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$. De plus, A est linéaire et continue, de norme égale à celle de a .*

Lemme A.3.1 (cf, [58]). *Soit $K \subset \Omega$ un sous-ensemble convexe fermé ($\neq \emptyset$) et $A : K \rightarrow \Omega'$ un opérateur monotone, coercive et continu sur les sous-espaces de dimension finie. Alors il existe*

$$u \in K : \quad \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } v \in K. \tag{A.3.1}$$

Nous énonçons les principes du maximum faible et fort pour les opérateurs paraboliques.

A.4 Principe du maximum

Nous posons $D = \Omega \times (0, T]$, $Q = \Omega \times (0, T]$ et $\Sigma_L = (\Gamma \times [0, T]) \cup (\bar{\Omega} \times \{0\})$ (la frontière parabolique de Q). L désigne un opérateur aux dérivées partielles de la forme

$$Lu = \sum_{i,j} a_{i,j}(x,t) \partial_{i,j}^2 u + \sum_i b_i(x,t) \partial_i u + c(x,t)u - \partial_t u,$$

où les fonctions $a_{i,j}$, b_i et c sont supposées continues sur \bar{Q} , et la matrice $(a_{ij}(x,t))$ est symétrique définie positive pour tout $x \in D$.

Théorème A.4.1 (Principe du maximum faible (cf, [41])). *Nous supposons que $c \equiv 0$.*

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\bar{D}) \cap C^{2,1}(D)$ telle que $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) dans D . Alors

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\Sigma_L} u \text{ (resp. } \min_{\bar{D}} u = \min_{\Sigma_L} u \text{)}.$$

Corollaire A.4.1 ((cf, [41])). *Nous supposons $c \leq 0$.*

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\bar{D}) \cap C^{2,1}(D)$ tel que $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) dans D . Alors

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\Sigma_L} u^+ \text{ (resp. } \min_{\bar{D}} u = \min_{\Sigma_L} u^- \text{)}.$$

En particulier, si $Lu = 0$ dans D , alors

$$\max_{\bar{D}} |u| = \max_{\Sigma_L} |u|.$$

Théorème A.4.2 (Principe du maximum fort (cf, [41])). *Soit $u \in \mathcal{C}^0(\bar{D}) \cap C^{2,1}(D)$ telle que $Lu \geq 0$ dans D et nous posons $M = \max_{\bar{D}} u$. Nous supposons que l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $c = 0$,

(ii) $c \leq 0$ et $M \geq 0$,

(iii) $M = 0$,

et que $u = M$ en $(x_0, t_0) \in D$. Alors $u = M$ sur $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$.

A.5 Calcul stochastique

Dans la suite de cette section, on se place sur un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

A.5.1 Processus et filtration

Définition A.5.1 (cf, [62]). *Un processus (aléatoire) X sur l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une famille de variable aléatoires $(X_t)_{t \in [0, T]}$. C'est donc une fonction de deux variables :*

$$X : [0, T] \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Définition A.5.2 (cf, [62]). *Une Filtration $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une collection croissante de tribus (sous-tribus de \mathcal{A}), c-à-d. $F_s \subset F_t, \forall s < t$.*

Remarque A.5.1 (cf, [62]). F_t représente la quantité d'informations disponible à l'instant t ; il est logique que cette quantité augmente avec le temps.

Définition A.5.3 (cf, [62]). Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit F -adapté si, pour tout t , la variable aléatoire X_t est F_t -mesurable.

Proposition A.5.1 (cf, [62]). Si X est F -adapté, la variable aléatoire X_s est F_t -mesurable pour tout $s < t$.

Définition A.5.4 (cf, [62]). Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ si :

- X_t est F_t -mesurable et intégrable pour tout t .
- $\mathbb{E}[X_t/F_s] = X_s, \forall s < t$.

A.5.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)

Le mouvement brownien est un processus stochastique à incréments stationnaires, indépendants et distribués selon une loi normale. Ce processus peut être utilisé modulo une certaine approximation, dans :

- Le mouvement des grains de pollen dans l'eau ;
- Trajectoire de la pollution dans une rivière ;
- Prix des actifs dans un marché financier.

Le mouvement Brownien $\{W_t; t \geq 0\}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Chaque variation $(W_{t+s} - W_s)$ du processus $\{W_t; t \geq 0\}$ entre les instants s et $s + t$, suit la loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ où μ et σ sont des paramètres constants.
- Pour les instants $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, les variations $(W_{t_2} - W_{t_1}), (W_{t_3} - W_{t_2}), \dots, (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi normale.
- $W_0 = 0$ et $\{W_t; t \geq 0\}$ est presque sûrement continue en t .

Ses principales propriétés sont d'être :

- fini : l'échelonnage de la variance du mouvement brownien en fonction du temps garantit que le mouvement brownien reste fini ;
- continu : les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais fractales et non différentiables nulle part ;
- markovien : la distribution conditionnelle de W_t sachant toute l'information jusqu'à $\tau \leq t$ dépend uniquement de W_τ ;

- une martingale : l'espérance conditionnelle de W_t sachant toute l'information jusqu'à $\tau \leq t$ est W_τ i.e. $(\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_\tau] = W_\tau)$;
- de variation quadratique finie : si on divise $[0, T]$ en $n + 1$ points $t_i = \frac{it}{n}$ alors

$$\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \longrightarrow T \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

- normal : $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$.

C'est un processus très riche et extrêmement utilisé en finance pour modéliser des processus aléatoires.

A.5.3 Intégrale stochastique

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique d-dimensionnel continu adapté et $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. L'intégrale stochastique de X_t se définit comme suit :

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad t_i = \frac{it}{n}.$$

L'intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

- $\int_0^t X_s dW_s$ est une martingale ;
- $\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dW_s \right] = 0$;
- $\text{Var} \left(\int_0^t X_s dW_s \right) = \int_0^t \|X_s\|_d^2 ds$.

A.5.4 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Une équation différentielle stochastique réelle est une équation de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

ou sous une forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (\text{A.5.1})$$

Soient b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, données :

- $b(t, X_t)$ est appelé coefficient de transport ou de dérive (ou drift) ;
- $\sigma(t, X_t)$ est appelé coefficient de diffusion ou volatilité.

On se donne également un F_t -mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ sur l'espace $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Une solution de l'ESD précédente est un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ continu, F_t -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ aient un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

soit satisfaite pour tout t , \mathbb{P} presque sûrement.

Théorème A.5.1 (Théorème d'existence). *Sous les hypothèses suivantes :*

a) *il existe K tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:*

$$- |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

$$- |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq (1 + |x|^2).$$

b) *la condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t)_{t \geq 0}$ et est de carré intégrable.*

Alors, il existe une unique solution forte de l'EDS à trajectoires continues pour $t \in [0, T]$. De plus cette solution vérifie

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < \infty.$$



Première partie

Les splines et les inéquations variationnelles

Chapitre 1

Les fonctions splines

Sommaire

1.1	L'espace des splines	21
1.2	Les B-splines	22
1.2.1	Propriétés de base	22
1.2.2	Les B-splines normalisées	23
1.3	Interpolation et quasi-interpolation par les fonctions splines	28
1.3.1	Interpolation par les fonctions splines	28
1.3.2	Quasi-interpolation par les fonctions splines	33

En introduisant les fonctions splines dans les années 40, Schoenberg apportait plus de souplesse dans l'approximation polynomiale. Cette notion permet de diminuer le degré du polynôme approchant la fonction, en considérant des fonctions polynomiales par morceaux appelées splines ; du nom de la tige flexible qu'on fixait sur le papier pour tracer des courbes lisses. Les polynômes de Serge Bernstein (1880-1968) servent, dans la construction paramétrique des B-splines. Nous verrons dans ce chapitre le cas des splines cubiques.

1.1 L'espace des splines

Nous définissons les espaces des splines polynomiales et nous montrons qu'il existe une base constituée des polynômes et des fonctions puissances tronquées.

Définition 1.1.1. Soient x_0, \dots, x_n , $n + 1$ noeuds distincts de $[a, b]$, avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle

$$\mathbb{S}_{k+1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \{s \in \mathcal{C}^{k-1}([a, b]) : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, \quad i = 0, \dots, n-1\}$$

l'espace des splines polynomiales de degré k avec $n + 1$ noeuds x_0, \dots, x_n . Pour un espace de spline donné, nous associons toujours d'autres points $x_{-k} < \dots < x_{-1} < a$ et $b < x_{n+1} < \dots < x_{n+k}$, où ces points peuvent être choisis arbitrairement.

Théorème 1.1.1. *L'ensemble des fonctions*

$$\{1, t, \dots, t^k, (t - x_1)_+^k, \dots, (t - x_{n-1})_+^k\}$$

forme une base de $\mathbb{S}_{k+1}(x_1, \dots, x_{n-1})$, de dimension $n + k$.

1.2 Les B-splines

On montre que les B-splines forment une base des espaces des splines. Les B-splines sont des splines ayant un support minimum. Pour l'évaluation des splines, il est souhaitable d'avoir des fonctions de base avec cette propriété. En outre, une évaluation stable de B-splines, à l'aide d'une relation de récurrence, est possible. On montre que les B-splines forment une partition de l'unité. Enfin, nous donnerons quelques résultats des B-splines.

1.2.1 Propriétés de base

Dans cette section, nous donnerons la définition des B-splines et discuterons de leurs propriétés. Nous avons besoin de définir des splines sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

Définition 1.2.1. Soient x_0, \dots, x_n , $n + 1$ noeuds distincts de $[a, b]$, avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La fonction $s_k(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est une spline de degré k relative aux noeuds x_j avec $j = 0, 1, \dots, n$ si

$$s_k|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_k, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (1.2.1)$$

$$s_k \in \mathcal{C}^{k-1}([a, b]) \quad (1.2.2)$$

Si \mathbb{S}_{k+1} désigne l'espace vectoriel des splines s_k défini sur $[a, b]$ et relatif à $n + 1$ noeuds distincts, alors $\dim \mathbb{S}_{k+1} = n + k$. Evidemment, tout polynôme de degré k sur $[a, b]$ est une spline ; mais en pratique, une spline est constituée de polynômes différents sur chaque sous-intervalle. Il peut donc y avoir des discontinuités de la dérivée k -ième aux noeuds internes x_1, \dots, x_{n-1} . Les noeuds où se produisent ces

discontinuités sont appelés *noeuds actifs*.

On vérifie facilement que les conditions (1.2.1) et (1.2.2) ne sont pas suffisantes pour caractériser une spline de degré k . D'une part, la restriction $s_{k,j} = s_{k|_{[x_j, x_{j+1}]}}$ peut être écrite sous la forme

$$s_{k,j}(x) = \sum_{i=0}^k s_{ij}(x-x_j)^i \quad \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (1.2.3)$$

on doit donc déterminer $(k+1)n$ coefficients s_{ij} . D'autre part, d'après (1.2.2),

$$s_{k,j-1}^{(m)}(x_j) = s_{k,j}^{(m)}(x_j) \quad j = 0, \dots, n-1, \quad m = 0, \dots, k-1, \quad (1.2.4)$$

ce qui revient à fixer $k(n-1)$ conditions. Il reste par conséquent $(k+1)n - k(n-1) = k+n$ degrés de liberté.

Même si la spline est une spline d'interpolation, c'est-à-dire telle que $s_k(x_j) = f_j$ pour $j = 0, \dots, n$, où f_0, \dots, f_n sont des valeurs données, il reste encore $k-1$ degrés de liberté à fixer. Pour cette raison, on impose d'autres contraintes qui définissent :

– les splines périodiques, si

$$s_k^{(m)}(a) = s_k^{(m)}(b), \quad m = 0, 1, \dots, k-1; \quad (1.2.5)$$

– les splines naturelles, si pour $k = 2l - 1$, avec $l \geq 2$,

$$s_k^{(l+j)}(a) = s_k^{(l+j)}(b) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-2.$$

1.2.2 Les B-splines normalisées

Nous traitons les splines quelconques de degré k , et nous allons définir la base des B-splines (ou bell-splines) en utilisant les différences divisées introduites à la section de généralités.

Définition 1.2.2. On définit la B-spline normalisée $B_{i,k+1}$ de degré k , relative aux noeuds distincts x_i, \dots, x_{i+k+1} par :

$$B_{i,k+1}(x) = (x_{i+k+1} - x_i) (\cdot - x)_+^k [x_i, \dots, x_{i+k+1}] \quad (1.2.6)$$

ayant $[x_i, x_{i+k+1}]$ comme support avec $i = -k, \dots, n-1$.

En substituant la différence divisée de Newton dans (1.2.6), on obtient l'expression explicite suivante :

$$B_{i,k+1}(x) = (x_{i+k+1} - x_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x_{j+i} - x)_+^k}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (x_{i+j} - x_{i+l})}. \quad (1.2.7)$$

On en déduit de (1.2.7) que les noeuds actifs de $B_{i,k+1}(x)$ sont x_i, \dots, x_{i+k+1} et que $B_{i,k+1}(x)$ est non nulle seulement sur l'intervalle $[x_i, x_{i+k+1}]$.

On peut montrer que c'est l'unique spline non nulle de support minimum ^(a) relative aux noeuds x_i, \dots, x_{i+k+1} (voir [77]). On peut aussi montrer que $B_{i,k+1}(x) \geq 0$ (voir [30]) et $|B_{i,k+1}^{(l)}(x_i)| = |B_{i,k+1}^{(l)}(x_{i+k+1})|$ pour $l = 0, \dots, k-1$ (voir [79]). Les B-splines satisfont la relation de récurrence suivante (voir [31, 26]) :

$$B_{i,k+1}(x) = \begin{cases} \mathcal{X}_{[x_i, x_{i+1}]} & \text{si } k = 0, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k}(x) & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

(1.2.8) est généralement préférée à (1.2.7) quand on évalue une B-spline en un point donné.

Remarque 1.2.1. En généralisant la définition des différences divisées, il est possible de définir des B-splines quand certains noeuds coïncident. On introduit pour cela la relation de récurrence suivante :

Pour les différences divisées de Newton (pour plus de détails voir [33]) :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{si } x_0 < x_1 < \dots < x_n, \\ \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} & \text{si } x_0 = x_1 = \dots = x_n. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Si parmi les $k+2$ noeuds x_i, \dots, x_{i+k+1} , m noeuds ($1 < m < k+2$) coïncident et ils sont égaux à λ , alors (1.2.3) contient une combinaison linéaire des fonctions $(\lambda - x)_+^{k+1-j}$, pour $j = 1, \dots, m$. Par conséquent, la B-spline ne peut avoir des dérivées continues en λ que jusqu'à l'ordre $k-m$, et elle est discontinue si $m = k+1$. Si $x_{i-1} < x_i = \dots = x_{i+k} < x_{i+k+1}$, alors (voir [33])

$$B_{i,k+1}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_i} \right)^k & \text{si } x \in [x_i, x_{i+k+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si $x_i < x_{i+1} = \dots = x_{i+k+1} < x_{i+k+2}$, alors

$$B_{i,k+1}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} \right)^k & \text{si } x \in [x_i, x_{i+k+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut construire des B-splines relatives à des noeuds pouvant coïncider, en combinant ces formules avec la relation de récurrence (1.2.8),

^a Si $B_{i,k+1}(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, x_i] \cup [x_{i+r}, +\infty)$ avec $1 \leq r \leq k$, alors $B_{i,k+1} = 0$. Par conséquent, nous pouvons dire que B-splines ont un support minimum.

Exemple 1.2.1. Examinons le cas particulier de B-splines cubiques sur les noeuds équirépartis $x_{i+1} = x_i + h, i = 0, \dots, n - 1$. L'équation (1.2.7) devient

$$6h^3 B_{i,4}(x) = \begin{cases} (x - x_i)^3 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i+1}) + 3h(x - x_{i+1})^2 - 3(x - x_{i+1})^3 & \text{si } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x) + 3h(x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+3} - x)^3 & \text{si } x \in [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ (x_{i+4} - x)^3 & \text{si } x \in [x_{i+3}, x_{i+4}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etant donné $n + 1$ noeuds distincts $x_j, j = 0, \dots, n$, on peut construire $(n - k)$ B-splines de degré k linéairement indépendantes, mais il reste alors $2k$ degrés de liberté à fixer pour construire une base de \mathbb{S}_{k+1} . Une manière de procéder consiste à introduire $2k$ noeuds fictifs

$$\begin{cases} x_{-k} \leq x_{-k+1} \leq \dots \leq x_0 = a, \\ b = x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq x_{n+k}, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

auxquels on associe les B-splines $B_{i,k+1}$ pour $i = -k, \dots, -1$ et $i = n - 1, \dots, n + k$. Ainsi, toute spline $s_k \in \mathbb{S}_{k+1}$ s'écrit de manière unique :

$$s_k(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} c_i B_{i,k+1}(x). \quad (1.2.11)$$

Les réels c_i sont les coefficients de B-spline de s_k . On choisit généralement les noeuds (1.2.10) confondus ou périodiques :

- *Confondus* : ce choix est bien adapté pour imposer les valeurs atteintes par une spline aux extrémités de son intervalle de définition. Dans ce cas, en effet, d'après la remarque 1.2.1, on a $s_k(a) = c_{-k}, s_k(b) = c_{n-1}$
- *Périodiques*, c'est-à-dire : $x_{-i} = x_{n-i} - b + a, x_{i+n} = x_i + b - i, i = 1, \dots, k$

Nous pouvons énumérer les propriétés des B-splines suivantes :

Proposition 1.2.1.

- $B_{i,k}$ est un polynôme de degré k par morceaux.
- $B_{i,k}$ a un support local : $B_{i,k}(x) = 0$, pour $x \notin [x_i, x_{i+k+1}]$.
- Soit $[a, b]$ un intervalle tel que $x_k \leq a$ et $x_{m-k} \geq b$, alors

$$\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(x) = 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

- Soit $x \in]x_i, x_{i+k+1}[$, alors $B_{i,k}(x) = 1$ si et seulement si $x_{i+1} = \dots = x_{i+k} = x$.
- $B_{i,k}$ est continue et indéfiniment dérivable à droite sur \mathbb{R} et sa dérivée vaut

$$B'_{i,k}(x) = k \left[\frac{B_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right],$$

avec la convention suivante : on remplace par 0 les expressions dont le dénominateur est nul.

- $B_{i,k}$ est intégrable sur \mathbb{R} et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,k}(x) dx = \frac{1}{k+1} (x_{i+k+1} - x_i).$$

Définition 1.2.3. Les polynômes de Bernstein b_n^k sont les polynômes de degré n définis sur $[0, 1]$ par les relations

$$b_n^k(x) = C_n^k (1-x)^{n-k} x^k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

La notation C_n^k désigne le nombre de combinaisons de k objets parmi n $\left(= \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$.

Définition 1.2.4. Soient P_0, P_1, \dots, P_{n-1} n points de \mathbb{R}^s . On appelle fonction spline (ou courbe spline) de degré k associé au polygône $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$, la courbe définie par l'expression paramétrique

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,k}(x),$$

pour x dans l'intervalle $[a, b]$ et aux noeuds $(x_0, x_1, \dots, x_{n+k})$. Si les fonctions $B_{i,k}(x)$ sont les polynômes de Bernstein, la courbe est appelée courbe de Bézier.

En général, la courbe spline ne passe pas par les points P_i . Dans le cas où les noeuds x_i sont simples ($k+1 \leq i \leq n+1$), la courbe spline est de classe \mathcal{C}^{k-1} et elle est formée de n arcs paramétrés polynomiaux de degré $\leq k$. Le choix des noeuds permet de définir facilement des splines

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_1 = \dots = x_k = 0, \\ x_{k+1} = 1, \\ \vdots \\ x_{n-1} = n - k - 1, \\ x_n = x_{n+1} = \dots = x_{n+k} = n - k. \end{array} \right.$$

La répétition des noeuds garantit que les extrémités de la courbe coïncident avec les extrémités de la ligne polygônale : $S(a) = P_0$ et $S(b) = P_{n-1}$. Pour construire une courbe fermée, il suffit de choisir des

noeuds cycliques $[0, 1, \dots, n, 0, 1, \dots, etc.]$ par exemple

$$\begin{cases} x_0 = x_{k+1} = 0, \\ x_{k+2} = x_1 = 1, \\ x_{k+i+1} = x_i. \end{cases}$$

Exemple 1.2.2. Soient quatre points P_0, P_1, P_2 et P_3 , la courbe de Bézier sur ces quatre points aura pour équation :

$$S(x) = P_0(1-x)^3 + 3x(1-x)^2P_1 + 3x^2(1-x)P_2 + x^3P_3,$$

soit encore

$$S(x) = (P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0)x^3 + 3(P_2 - 2P_1 + P_0)x^2 + 3(P_1 - P_0)x + P_0.$$

On peut écrire matriciellement

$$S(x) = (1, x, x^2, x^3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

Si les points sont des points du plan de coordonnées (u_i, v_i) et si $S(x) = (U(x), V(x))$, ce système équivaut à

$$\begin{cases} u(x) = (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)x^3 + 3(u_2 - 2u_1 + u_0)x^2 + 3(u_1 - u_0)x + u_0, \\ v(x) = (v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0)x^3 + 3(v_2 - 2v_1 + v_0)x^2 + 3(v_1 - v_0)x + v_0. \end{cases}$$

Nous présentons un résultat classique sur les dérivées d'une spline donnée dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. (voir de Boor [30])

Soit $s = \sum_{-k}^{n-1} a_i B_{i,k}$ une spline donnée. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$ et tout $x \in [a, b]$,

$$s^{(j)}(x) = \sum_{-k+j}^{n-1} a_i^{(j)} B_{i,k-j}(x),$$

où

$$a_i^{(j)} = \begin{cases} a_i, & \text{si } j = 0 \\ (k+1-j) \frac{a_i^{(j-1)} - a_{i-1}^{(j-1)}}{x_{i+k+1-j} - x_i}, & \text{si } j > 0. \end{cases}$$

1.3 Interpolation et quasi-interpolation par les fonctions splines

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons la partition de l'intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\Theta = \{x_{-k} \leq x_{-k+1} \leq \dots \leq x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \dots \leq x_{n+k} = b\}$$

1.3.1 Interpolation par les fonctions splines

Dans la résolution de certains problèmes numériques on rencontre la situation suivante : on veut calculer les valeurs d'une fonction f pour un très grand nombre de valeurs de t , mais on ne connaît pas f "explicitement". Ceci se produit lorsque f n'est connue qu'en certains points expérimentaux t_0, t_1, \dots, t_n ,

On veut alors "représenter" f par une fonction simple dont l'évaluation est aisée.

Autrement dit, il s'agit d'approcher la fonction f par une autre fonction, plus facile à calculer. Cette fonction approchée \tilde{f} est choisie dans une classe \tilde{F} de fonctions dont le calcul n'est pas trop coûteux. Citons l'ensemble des polynômes, l'ensemble des fractions rationnelles, l'ensemble des polynômes trigonométriques,...

La question est alors de savoir en quel sens on désire approcher f . Il y a un grand nombre de possibilités.

Citons les plus courantes :

- la technique de l'interpolation,
- la technique de la minimisation au sens des moindres carrés,
- la technique de l'approximation quadratique,
- la technique de l'approximation uniforme.

Les splines cubiques d'interpolation sont particulièrement importantes car :

- Ce sont des splines de plus petit degré qui permettent une approximation \mathcal{C}^2 ;
- Elles ont de bonnes propriétés de régularité (à condition que la courbure soit assez faible).

Dans la suite de ce chapitre, nous traitons l'interpolation avec les splines cubiques et nous donnons un théorème de Shoenbery-Whithney avec une spline quelconque.

Définition 1.3.1. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$, et étant donné une partition de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\Theta = \{a = t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = b\}.$$

On appelle spline cubique d'interpolation une fonction notée S , qui vérifie les propriétés suivantes :

- $S \in \mathcal{C}^2([a, b])$ (S est deux fois continûment dérivable),
- S correspond, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, à un polynôme de degré inférieur ou égal à 3,
- $S(t_i) = f(t_i) \equiv y_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Remarquons que la définition qui précède ne suffit pas pour déterminer de façon unique la fonction spline d'interpolation, car il manque des conditions. Comme on va le voir la détermination de la spline nécessite la résolution d'un système linéaire et il manque encore deux équations pour déterminer cette fonction. Ces deux équations proviendront de conditions supplémentaires, on a plusieurs possibilités :

- *spline naturelle* : on suppose que $S''(a) = S''(b) = 0$,
- *spline scellée (ou complète)* : on suppose que $S'(a) = p_0$ et $S'(b) = p_n$,
- *spline périodique* : on suppose que $S'(a) = S'(b)$ et $S''(a) = S''(b)$.

Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n - 1$, S est donnée par un polynôme S_i de degré ≤ 3 .

Ainsi,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [t_0, t_1], \\ S_1(x), & x \in [t_1, t_2], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Les polynômes S_{i-1} sur $[t_{i-1}, t_i]$, et S_i sur $[t_i, t_{i+1}]$, interpolent la même valeur au point t_i et donc $S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i)$ pour $i = 1, \dots, n - 1$.

Par conséquent, S est automatiquement continue.

En outre, S' et S'' sont supposées être continues, et ces conditions seront utilisées pour la dérivation de la fonction spline cubique.

Lemme 1.3.1.

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1} - x)$$

avec $z_i = S''(t_i)$ et $h_i = t_{i+1} - t_i$, pour $i = 0, \dots, n - 1$.

Démonstration. S'' est continue en chaque noeud intérieur, alors

$\lim_{x \rightarrow t_i^+} S''(x) = z_i = \lim_{x \rightarrow t_i^-} S''(x)$ pour $i = 1, \dots, n - 1$, et comme S_i est un polynôme de degré ≤ 3 sur $[t_i, t_{i+1}]$, on peut écrire $S_i''(x) = A_i x + B_i$, avec $x \in [t_i, t_{i+1}]$. On note que S_i'' satisfait $S_i''(t_i) = z_i$ et $S_i''(t_{i+1}) = z_{i+1}$, alors

$$A_i t_i + B_i = z_i,$$

$$A_i t_{i+1} + B_i = z_{i+1}.$$

On trouve facilement que

$$A_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} \text{ et } B_i = z_i - \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} t_i, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} S_i''(x) &= A_i x + B_i \\ &= \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} x + z_i - \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} t_i \\ &= \frac{z_i}{h_i} (t_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i} (x - t_i). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_i'(x) &= \frac{z_i}{h_i} \int (t_{i+1} - x) dx + \frac{z_{i+1}}{h_i} \int (x - t_i) dx \\ &= -\frac{z_i}{2h_i} (t_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i} (x - t_i)^2 + C_i. \end{aligned}$$

Et par suite, on obtient

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + C_i(x - t_i) + D_i. \quad (1.3.2)$$

Les conditions d'interpolation $S_i(t_i) = y_i$ et $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$, peuvent maintenant être imposées sur S_i pour déterminer C_i et D_i .

D'abord, $y_i = \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - t_i)^3 + D_i$ implique que $D_i = y_i - \frac{z_i h_i^2}{6}$, et

$$y_{i+1} = \frac{z_{i+1}}{6} (t_{i+1} - t_i)^3 + C_i(t_{i+1} - t_i) + D_i \text{ implique que } C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (z_i - z_{i+1}).$$

En remplaçant C_i et D_i dans (1.3.2) on trouve

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1} h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1} - x) \quad (1.3.3)$$

□

Une fois les valeurs de z_0, z_1, \dots, z_n ont été déterminées, (1.3.1) et (1.3.3) peuvent être utilisées pour évaluer $S(x)$ pour tout $x \in [t_0, t_n]$.

Notons que ce système a $n - 1$ équations et $n + 1$ inconnues à déterminer. Afin de générer une spline cubique unique, on doit ajouter deux conditions aux bords par exemple $z_0 = z_n = 0$. Et pour déterminer z_1, z_2, \dots, z_{n-1} , on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.2. *Supposons que $z_0 = z_n = 0$, alors le système $MZ = B$ admet une solution unique.*

Avec

$$- Z = [z_1, z_2, \dots, z_{n-1}]^T,$$

$$- B = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]^T,$$

-

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix},$$

avec $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ une matrice symétrique tridiagonale telle que :

$$m_{i,i} = u_i \text{ et } m_{i-1,i} = m_{i,i+1} = h_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

$$- u_i = 2(h_i + h_{i-1}), h_i = t_{i+1} - t_i, b_i = c_i - c_{i-1} \text{ et } c_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

Démonstration. Par continuité de S' à l'intérieur des noeuds t_i : $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$,

$$S'_i(x) = -\frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(z_i - z_{i+1}),$$

en remplaçant $x = t_i$, on obtient :

$$S'_i(t_i) = -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$$S'_{i-1}(t_i) = \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}z_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}},$$

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_iz_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) = c_i - c_{i-1}, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_iz_{i+1} = b_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.3.4)$$

L'équation (1.3.4) avec $z_0 = z_n = 0$ conduit à un système linéaire de la forme $MZ = B$.

La matrice M est symétrique et tridiagonale à diagonale strictement dominante, alors elle est inversible.

Par conséquent le système $MZ = B$ admet une solution unique. \square

Remarque 1.3.1. On peut aussi utiliser ces trois types de splines avec des conditions suivantes :

- spline naturelle : on suppose que $z_0 = z_n = 0$,
- spline parabolique Runout : on suppose que $z_0 = z_1$ et $z_n = z_{n-1}$,
- spline cubique Runout : on suppose que $z_0 = 2z_1 - z_2$ et $z_n = 2z_{n-1} - z_{n-2}$.

Exemple 1.3.1. Trouver une fonction spline cubique naturelle dont les noeuds sont $-1, 0$ et 1 et qui prend respectivement, les valeurs $S(-1) = 13, S(0) = 7$ et $S(1) = 9$.

Solution :

$$z_0 = z_2 = 0 \text{ et } h_0 = h_1 = 1,$$

$$t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1,$$

$$y_0 = 13, y_1 = 7, y_2 = 9,$$

alors d'après la relation, on trouve

$$h_0 z_0 + 2(h_1 + h_0)z_1 + h_1 z_2 = \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0),$$

ce qui implique que $z_1 = 12$.

D'après le lemme (1.3.1) on a :

$$\begin{aligned} S_0(x) &= \frac{z_0}{6h_0}(t_1 - x)^3 + \frac{z_1}{6h_0}(x - t_0)^3 + \left(\frac{y_1}{h_0} - \frac{z_1 h_0}{6}\right)(x - t_0) + \left(\frac{y_0}{h_0} - \frac{z_0 h_0}{6}\right)(t_1 - x) \\ &= 2(x+1)^3 + 5(x+1) - 13x. \end{aligned}$$

De même on trouve $S_1(x) = 2(1-x)^3 + 9x + 5(1-x)$. Par conséquent la fonction spline cubique naturelle est :

$$S(x) = \begin{cases} 2(x+1)^3 + 5(x+1) - 13x & x \in [-1, 0], \\ 2(1-x)^3 + 9x + 5(1-x) & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Nous présentons dans le théorème suivant, un résultat très important qui nous donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une spline d'interpolation, pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.3. (voir de Boor [30])

Soit $S \in \mathbb{S}_{k+1}$ tel que $S = 0$ sur $[x_{p-1}, x_p] \cup [x_q, x_{q+1}]$ avec $p < q$. Si S admet r zéros dans l'intervalle $[x_p, x_q]$ alors $r \leq q - p - (k + 1)$.

Théorème 1.3.1. (théorème de Shoenbery-Whithney [30]) Soit $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{(n+k)} \leq b$, une suite finie de points strictement croissante. On suppose que $f(t_i)$, pour $i = 1, 2, \dots, n+k$ sont donnés :

Alors le problème d'interpolation des valeurs $f(t_i)$ ($i = 1, \dots, n+k$) dans $\mathbb{S}_{(k+1)}(I, \tau)$ admet une solution unique si et seulement si

$$B_j(t_{j+k+1}) > 0; \quad j = -k, \dots, n-1 \iff t_{j+k+1} \in]x_j, x_{j+k+1}[; \quad j = -k, \dots, n-1.$$

1.3.2 Quasi-interpolation par les fonctions splines

L'interpolation est un problème qui consiste à chercher une fonction p dans un espace de dimension finie qui coïncide avec une fonction f ou ses dérivées sur un ensemble de points donnés. La solution p d'un problème d'interpolation est généralement obtenue en résolvant un système linéaire de grande taille. La plupart des applications utilisent les espaces des polynômes comme espaces d'interpolation. Dans ce cas, le calcul de l'interpolant peut être obtenu en inversant une matrice de Vandermonde. Il est bien connu que cette matrice est mal conditionnée, ce qui peut générer des erreurs lors du calcul de l'interpolant.

Le terme quasi-interpolation *QI* signifie une approche générale pour construire des approximaux locaux d'une fonction f sans résoudre des systèmes linéaires (sans inverser aucune matrice) et avec le minimum possible du temps de calcul et ils sont des outils d'approximation très efficaces. Un quasi-interpolant est souvent obtenu comme une combinaison linéaire d'un ensemble des fonctions positives, de supports bornés et qui forment une base stable^(b) de l'espace considéré.

Dans le cas d'une variable, plusieurs constructions des quasi-interpolants basés sur les valeurs de la fonction f , et/ou de ses dérivées, et/ou ses intégrales sont disponibles (voir par exemple [29, 69]), et plusieurs applications sont proposées dans différents domaines d'approximation.

Nous introduisons dans cette section, une définition et quelques propriétés plus importantes d'un quasi-interpolant, particulièrement la quasi-interpolation par des splines cubiques qu'on utilisera dans le chapitre 3, partie II.

Définition 1.3.2. Soit $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$ une fonction donnée.

Un quasi-interpolant spline (abréviation *QI*) est un opérateur linéaire $Q: \mathcal{C}^k([a, b]) \longrightarrow \mathbb{S}_{k+1}(x_1, \dots, x_n)$,

^b La base est dite stable si une petite perturbation sur les coefficients entraîne une petite perturbation sur la fonction spline c-à-d $\exists c_1, c_2 > 0; c_1 \max_i |a_i| \leq \max_x |s(x)| \leq c_2 \max_i |a_i|; \forall s = \sum_i a_i B_{i,k}$

défini par :

$$Qf = \sum_{i=-k}^{n-1} \mu_i(f) B_{i,k+1},$$

où $\mu_{-k}(f), \dots, \mu_{n-1}(f)$ sont des formes linéaires, qui peuvent être de type différentiel, discret ou intégral, définies par les valeurs de f dans un voisinage du support de B_j (opérateur local), et $B_{-k,k+1}, \dots, B_{n-1,k+1}$ sont des B-spline normalisées de degré k (voir définition (1.2.2)).

Évidemment, l'approximation Qf est une spline de $\mathbb{S}_{k+1}(x_1, \dots, x_n)$.

Un quasi-interpolant spline cubique (abréviation QI) est un opérateur d'approximation obtenu comme combinaison linéaire de fonctions à support borné (B-splines) :

$$Qf = \sum_{i=-3}^{n-1} \mu_i(f) B_i,$$

où les coefficients $\mu_i(f)$ sont déterminés en résolvant un système linéaire d'équations données par l'exactitude des Q_3 sur l'espace des polynômes cubiques \mathbb{P}_3 . Plus précisément, on note $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, ces coefficients sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_{-3}(f) &= f_0, \\ \mu_{-2}(f) &= -\frac{2h_2(h_2+h_3)+h_1(2h_2+h_3)}{3(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)}f_0 + \frac{(h_1+h_2)(h_1+h_2+h_3)}{3h_2(h_2+h_3)}f_1 - \frac{h_1^2(h_1+h_2+h_3)}{3h_2(h_1+h_2)h_3}f_2 \\ &\quad + \frac{h_1^2(h_1+h_2)}{3h_3(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)}f_3, \\ \mu_j(f) &= -\frac{h_{j+3}^2}{3h_{j+2}(h_{j+2}+h_{j+3})}f_{j+1} + \frac{(h_{j+2}+h_{j+3})^2}{3h_{j+2}h_{j+3}}f_{j+2} - \frac{h_{j+2}^2}{3h_{j+3}(h_{j+2}+h_{j+3})}f_{j+3}, \quad -1 \leq j \leq n-3, \\ \mu_{n-2}(f) &= \frac{h_n^2(h_n+h_{n-1})}{3h_{n-1}(h_{n-1}+h_{n-2})(h_n+h_{n-1}+h_{n-2})}f_{n-3} - \frac{h_n^2(h_n+h_{n-1}+h_{n-2})}{3h_{n-1}(h_n+h_{n-1})h_{n-2}}f_{n-2} \\ &\quad + \frac{(h_n+h_{n-1})(h_n+h_{n-1}+h_{n-2})}{3h_{n-1}(h_{n-1}+h_{n-2})}f_{n-1} - \frac{2h_{n-1}(h_{n-1}+h_{n-2})+h_n(2h_{n-1}+h_{n-2})}{3(h_n+h_{n-1})(h_n+h_{n-1}+h_{n-2})}f_n, \\ \mu_{n-1}(f) &= f_n. \end{aligned}$$

Les coefficients $\mu_i(f)$ de la B-spline B_i ont une forme linéaire agissant sur la fonction f à approcher dans un voisinage du support de B_i .

Proposition 1.3.1. (voir [32])

- Pour chaque spline, $s \in \mathbb{S}_{k+1}(x_1, \dots, x_n)$, on a $Qs = s$,
- Q est un opérateur exact sur \mathbb{P}_n : $Qp = p$, $\forall p \in \mathbb{P}_n$,
- Q est un opérateur local : les coefficients $\mu_i(f)$ ont une forme linéaire qui ne dépend que des valeurs de f dans un voisinage de $\text{supp}(B_i)$, c-à-d pour $-k \leq j \leq n-1$, on a :
 $B_i = 0$ sur $] -\infty, x_i] \cup [x_{i+k}, +\infty[$ et les valeurs de Qf dans (x_j, x_{j+1}) ne dépendent que des valeurs de f sur $(x_{j-k}, x_{j+k}) \cap [a, b]$.

Nous donnons une majoration de la norme infinie des quasi-interpolants dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. (voir chapitre 5 [32])

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, il existe des constantes C_k , $k = 0, 1$, tel que

$$\|f^{(k)} - Q_3 f^{(k)}\|_{\Omega} \leq C_k h^{2-k} \|f^{(2-k)}\|_{\Omega}, \quad k = 0, 1,$$

avec $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$ et $\|f\|_{\Omega} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Chapitre 2

Inéquations variationnelles et problème d'obstacle

Sommaire

2.1	Introduction	36
2.2	Inéquations variationnelles elliptiques (IVE)	37
2.2.1	Notations	37
2.2.2	IVE du premier type	37
2.2.3	IVE du second type	37
2.2.4	Remarques	38
2.2.5	Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du premier type	38
2.2.6	Remarques	38
2.2.7	Exemple d'IVE du premier type : Problème d'obstacle	40
2.2.8	Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du second type	42
2.2.9	Pénalisation du problème d'obstacle	43
2.3	Inéquations variationnelles paraboliques (IVP)	44
2.3.1	Formulation et résultats principaux	44
2.3.2	Les schémas numériques pour les équations linéaires paraboliques	46

2.1 Introduction

Une classe importante et très utile de problèmes non linéaires résultants de la mécanique, la physique, la finance, etc, composent des inéquations dites variationnelles. Nous considérons essentiellement les deux types suivants d'inéquations variationnelles, à savoir :

- Inéquations variationnelles elliptiques (IVE) ;
- Inéquations variationnelles paraboliques (IVP).

Dans ce chapitre, nous limiterons notre attention à l'étude de l'existence, l'unicité et l'approximation de la solution de l'(IVE) et (IVP).

2.2 Inéquations variationnelles elliptiques (IVE)

Dans cette section, nous considérons deux classes d'IVE, à savoir IVE du premier type et IVE du second type.

2.2.1 Notations

- V : est un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$ est la norme associée,
- V^* l'espace dual de V ,
- $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue et V – *elliptique* sur $V \times V$,

c'est à dire : $\exists \alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$.

En général, nous ne supposons pas que $a(\cdot, \cdot)$ soit symétrique, puisque dans certaines applications, la forme bilinéaire non symétrique peut se produire naturellement (voir, par exemple, Comincioli [23]).

- $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$, une forme continue et linéaire,
- K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V ,
- $j(\cdot) : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.) et $j(\cdot)$ est dite propre si $j(v) > -\infty, \forall v \in V$ et $j \neq +\infty$.

2.2.2 IVE du premier type

Trouver u dans K tel que u est une solution du problème

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K. \quad (2.2.1)$$

2.2.3 IVE du second type

Trouver u dans V tel que u est une solution du problème

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in V. \quad (2.2.2)$$

2.2.4 Remarques

Remarque 2.2.1. *Les cas examinés ci-dessus sont les plus simples et les plus importants. Toutefois, Bensoussan et Lions [7] considèrent un problème plus général que (2.2.1), appelé les inéquations quasivariationnelles (IQV). Un problème typique d' IQV est le suivant :*

Trouver u dans V tel que u est une solution du problème

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K(u), \quad u \in K(u),$$

où $v \rightarrow K(v)$ est une famille de parties non vides fermées convexes de V .

Remarque 2.2.2. *Si $K = V$ et $j \equiv 0$, alors les problèmes (2.2.1) et (2.2.2) se réduisent à l'équation variationnelle classique*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V. \quad (2.2.3)$$

Remarque 2.2.3. *La distinction entre les problèmes (2.2.1) et (2.2.2) est artificielle, puisque le problème (2.2.1) peut être considéré comme un cas particulier du problème (2.2.2) en remplaçant $j(\cdot)$ dans (2.2.2) par la fonction indicatrice I_K de K définie par :*

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K. \end{cases}$$

Même si le problème (2.2.1) est un cas particulier du problème (2.2.2), il est intéressant de considérer (2.2.1) directement, parce que dans la plupart des cas, il se pose naturellement.

On remarque que I_K est une fonction s.c.i. et propre et que le problème (2.2.1)

est équivalent au problème suivant :

Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v - u) + I_K(v) - I_K(u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in V.$$

2.2.5 Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du premier type

Théorème 2.2.1. *(Voir [67]). Le problème (2.2.1) admet une solution unique.*

2.2.6 Remarques

Remarque 2.2.4. *Si $K = V$, le théorème (2.2.1) se réduit au lemme de Lax-Milgram (voir Ciarlet [20, 19]).*

Remarque 2.2.5. Si $a(.,.)$ est symétrique, le problème (??) est équivalent au problème d'optimisation suivant :

Trouver $u \in K$ tel que

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K, \tag{2.2.4}$$

où $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Sous les hypothèses faites sur a et L , on a alors :

$$(i) \quad \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty, \text{ puisque } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \|L\| \|v\|.$$

(ii) J est continue et strictement convexe.

En effet : Comme L est linéaire, pour prouver la convexité stricte de J il suffit de prouver que la fonctionnelle $v \rightarrow a(v, v)$ est strictement convexe.

Soient $0 < t < 1$ et $u, v \in V$ avec $u \neq v$; alors $0 < a(v - u, v - u) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v)$. Nous avons donc

$$2a(u, v) < a(u, u) + a(v, v). \tag{2.2.5}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} a(tu + (1-t)v, tu + (1-t)v) &= t^2a(u, u) + 2t(1-t)a(u, v) + (1-t)^2a(v, v) \\ &< ta(u, u) + (1-t)a(v, v). \end{aligned}$$

Par conséquent $v \rightarrow a(v, v)$ est strictement convexe.

Puisque $a(.,.)$ et L sont continues, J est continue.

A partir de ces propriétés de J et les propriétés de la théorie d'optimisation (voir [14, 35]), il s'ensuit que le problème de minimisation (2.2.4) admet une solution unique. Par conséquent (??) est équivalent au problème suivant :

Trouver $u \in K$ tel que

$$(J'(u), v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

où $J'(u)$ est la dérivée au sens de Gâteaux^(a) de J en u . Puisque $(J'(u), v) = a(u, v) - L(v)$, on voit que (2.2.1) et (2.2.5) sont équivalents si $a(., .)$ est symétrique.

2.2.7 Exemple d'IVE du premier type : Problème d'obstacle

Toutes les propriétés des espaces de Sobolev utilisées dans ce chapitre sont prouvées dans Lions [65], Nečas [73], et Adams [1].

Soient $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma} = 0\}$ et $\psi \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ tel que $\psi|_{\Gamma} \leq 0$. On définit $K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \geq \psi \text{ p.p sur } \Omega\}$.

Définition 2.2.1. Le problème d'obstacle est un cas particulier du problème (2.2.1) défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$L(v) = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx, \text{ pour } f \in V^* = H^{-1}(\Omega) \text{ et } v \in V.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2.6), nous avons besoin des lemmes suivants énoncés ci-dessous sans preuve (pour les preuves des lemmes, voir, par exemple, Lions [65], Nečas [73], et Stampacchia [84]).

Lemme 2.2.1. (de Poincaré-Friedrichs)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . Alors, la semi-norme sur $H^1(\Omega)$

$$v \longrightarrow \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ et elle est équivalente à la norme sur $H_0^1(\Omega)$ induite de $H^1(\Omega)$.

Lemme 2.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne (c-a-d $\exists k > 0$ tel que $|f(t) - f(t')| \leq k|t - t'|$, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$) et tel que f' a un nombre fini de points de discontinuité. Alors l'application f^* sur $H^1(\Omega)$ définie par $v \longrightarrow f(v)$ est une application continue dans $H^1(\Omega)$. Des résultats similaires à tenir pour $H_0^1(\Omega)$ lorsque $f(0) = 0$.

^a $(J'(u), v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J(u + tv) - J(u))$

Corollaire 2.2.1. Si v^+ et v^- désignent les parties positives et négatives de v pour $v \in H^1(\Omega)$ (respectivement, $H_0^1(\Omega)$), alors l'application $v \longrightarrow (v^+, v^-)$ est continue de $H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ (respectivement, $H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$). Également $v \longrightarrow |v|$ est continue.

Théorème 2.2.2. Le problème (2.2.6) admet une solution unique.

Démonstration. Afin d'appliquer le théorème 2.2.1 du chapitre 1, nous devons prouver que $a(.,.)$ est V-elliptique et que K est un ensemble convexe fermé non vide.

La V-ellipticité de $a(.,.)$ résulte du lemme 2.2.1 et la convexité de K est triviale.

❖ (1) K est non vide

On a $\psi \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ avec $\psi \leq 0$ sur Γ .

Ainsi, par le corollaire 2.2.1, $\psi^+ \in H^1(\Omega)$. Puisque $\psi|_{\Gamma} \leq 0$, on a $\psi|_{\Gamma}^+ = 0$. Cela implique que $\psi^+ \in H_0^1(\Omega)$. Et comme $\psi^+ = \max\{\psi, 0\} \geq \psi$, on a $\psi^+ \in K$. d'où K est non vide.

❖ (2) K est fermé.

Soit $v_n \longrightarrow v$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$, où $v_n \in K$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. D'où $v_n \longrightarrow v$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent on peut extraire une sous-suite $\{v_{n_i}\}$ tel que $v_{n_i} \longrightarrow v$ p.p. sur Ω . Alors $v_{n_i} \geq \psi$ p.p. sur Ω implique que $v \geq \psi$ p.p. sur Ω ; par conséquent $v \in K$.

Ainsi, par le théorème 2.2.1 du chapitre 1, Le problème (2.2.6) admet une solution unique. □

Théorème 2.2.3. (Voir [71]) u est solution du problème (2.2.6) si et seulement si elle est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = F^- + \Delta\psi + \mu, & \text{dans } \Omega \\ \text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(F^+), \end{cases} \tag{2.2.7}$$

avec

$$\mu(x) = \begin{cases} F^+(x) & \text{si } u(x) > \psi(x), \\ \in]0, F^+(x)] & \text{si } u(x) = \psi(x), \\ 0 & \text{si } u(x) < \psi(x), \end{cases}$$

et

$$F = -f - \Delta\psi \in L^2(\Omega).$$

Exemple 2.2.1. On considère le problème d'obstacle (2.2.6) avec les données suivantes : $\Omega =]0, 2[$, $\psi = 0$ et

$$f = \begin{cases} -1 & \text{sur }]0, 1], \\ 1 & \text{sur }]1, 2[. \end{cases}$$

D'après (2.2.7), la solution du problème (2.2.6) vérifie :

$$\begin{cases} -u'' = -f^- + \mu, \text{ dans } \Omega \\ \text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(f^+). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

On sait que la solution u appartient à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Donc u appartient à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Sur $]0, 1[$, on a :

$$\mu = 0; \quad u'' = f^- = -1, \quad (2.2.9)$$

d'où :

$$u(x) = \frac{-x^2}{2} + ax + b.$$

Puisque $u(0) = 0$, on a $b = 0$ et par suite :

$$u(x) = \frac{-x^2}{2} + ax. \quad (2.2.10)$$

On cherche $t_0 > 1$ tel que $u(t) = 0$, pour $t \geq t_0$ et $u(t) > 0$ pour $t < t_0$. Sur $]1, t_0[$, on a $u(x) > 0$, ce qui implique :

$$\mu = -f^+ = -1. \quad (2.2.11)$$

On obtient : $u'' = 1$, d'où :

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta. \quad (2.2.12)$$

Sur $[t_0, 2]$ on a $u(x) = 0$, donc :

$$u'' = \mu = 0, \text{ dans }]t_0, 2[. \quad (2.2.13)$$

En utilisant la continuité de u et de ses dérivées aux points 1 et t_0 dans les équations (2.2.10) et (2.2.12), on obtient :

$$t_0 = \sqrt{2}; \quad a = 2 - \sqrt{2}; \quad \alpha = -\sqrt{2}; \quad \beta = 1.$$

De (2.2.9), (2.2.11) et (2.2.13), on en déduit enfin : $\mu = f^+ \chi_{[1, \sqrt{2}]}$. En suite, la solution exacte $u(x)$ de ce problème est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + (2 - \sqrt{2})x & \text{si } x \in]0, 1[, \\ \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 & \text{si } x \in]1, \sqrt{2}[, \\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 2[. \end{cases}$$

2.2.8 Un théorème d'existence et d'unicité pour IVE du second type

Théorème 2.2.4. (voir Lions-Stampacchia [67]). Le problème (2.2.2) admet une solution unique.

2.2.9 Pénalisation du problème d'obstacle

La méthode de pénalisation (issue du Calcul des Variations et d'ailleurs liée à la méthode de régularisation) consiste à approcher les inéquations variationnelles par des équations (non linéaires) de caractère plus classique et déjà résolues par d'autres méthodes. Cette méthode est également utile dans la résolution des problèmes d'évolution dans des ouverts non cylindriques.

La proposition suivante nous donne une approximation au problème d'obstacle (2.2.6).

Proposition 2.2.1. (Voir [58]) *Supposons que f et $-\Delta\psi$ vérifient les propriétés :*

$$f \in L^s(\Omega) \text{ et } \max(-\Delta\psi + f, 0) \in L^s(\Omega) \text{ pour un certain } s \text{ tel que } N < s < \infty, \quad (2.2.14)$$

la solution u de (2.2.6) est dans l'espace $W^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - \frac{N}{s}$, de plus le problème d'obstacle (2.2.6) est approché par un problème appelé problème pénalisé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \max(-\Delta\psi + f, 0)\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) - f & \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

avec θ la fonction définie par

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

et θ_ε est une suite de fonctions Lipschitziennes qui tend vers θ presque partout sur \mathbb{R} , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemme 2.2.3. *Soit θ une fonction définie sur \mathbb{R} , décroissante, lipschitzienne et telle que $0 \leq \theta(t) \leq 1$. Supposons que f vérifie (2.2.14). Alors il existe un unique $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que :*

$$-\Delta w = \max(-\Delta\psi + f, 0)\theta(w - \psi) - f \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.2.16)$$

Démonstration. Notons d'abord que $\theta(w - \psi) \in L^\infty(\Omega)$ pour chaque $w \in L^2(\Omega)$, puisque θ est bornée. Par conséquent, la distribution Lw définie par

$$\langle Lw, \zeta \rangle = \int_{\Omega} \{ \nabla w \nabla \zeta - [\max(-\Delta\psi + f, 0)\theta(w - \psi) - f] \zeta \} dx$$

est dans $H^{-1}(\Omega)$. Nous affirmons qu'elle est strictement monotone et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, θ est décroissante,

$$-[\max(-\Delta\psi + f, 0)\theta(w - \psi) - \max(-\Delta\psi + f, 0)\theta(v - \psi)](w - v) \geq 0.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \langle Lw - Lv, w - v \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla(w - v))^2 dx - \int_{\Omega} \max(-\Delta\psi + f, 0) (\theta(w - \psi) - \theta(v - w)) (w - v) dx \\ &\geq \int_{\Omega} (\nabla(w - v))^2 dx \\ &\geq \|w - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Cela prouve que L est strictement monotone et coercive. En outre, $w_n \rightarrow w$ dans $H_0^1(\Omega)$ implique $Lw_n \rightharpoonup Lw$ faiblement dans $H^{-1}(\Omega)$, ce qui implique que L est continue sur $H_0^1(\Omega)$, en particulier sur un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$. Nous pouvons appliquer le lemme (A.3.1) du chapitre A pour obtenir l'existence de w . \square

Nous prenons par exemple :

$$\theta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ 1 - t/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0, & t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

et on considère le problème de Dirichlet, pour $\varepsilon > 0$,

$$w \in H_0^1(\Omega) : -\Delta w = \max(-\Delta\psi + f, 0) \theta_{\varepsilon}(w - \psi) - f \quad \text{sur } \Omega.$$

Nous revenons au résultat principal de cette section.

Théorème 2.2.5. (Voir [58], p. 108) On suppose que f vérifie (2.2.14) et soit u la solution du problème (2.2.6). Alors $u \in W^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - \frac{N}{s}$. En outre, soit u_{ε} , $\varepsilon > 0$, la solution du problème (2.2.16). Alors $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{2,s}(\Omega)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les approximations que nous avons employées possèdent certaines propriétés intéressantes.

Théorème 2.2.6. (Voir [58], p. 110) Soit u la solution du problème variationnel (2.2.6) et u_{ε} , $\varepsilon > 0$, la solution du problème de pénalité (2.2.15) avec θ_{ε} définie par la relation (2.2.17). Alors (u_{ε}) est une suite décroissante et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$u(x) \leq u_{\varepsilon}(x) \leq u(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega.$$

2.3 Inéquations variationnelles paraboliques (IVP)

2.3.1 Formulation et résultats principaux

Soient H et V deux espaces de Hilbert réels tels que $V \subset H$, $\bar{V} = H$.

Supposons que $H = H^*$, on a $V \subset H \subset V^*$.

Le produit scalaire dans H (resp., dans V) et les normes correspondantes sont désignées par (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$ (resp., $((\cdot, \cdot))$, $\|\cdot\|$). De plus, nous utilisons aussi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour la dualité entre V et V^* .

Nous introduisons maintenant :

- Un intervalle de temps $[0, T]$, avec $0 < T < \infty$ et $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, une forme bilinéaire continue et elliptique au sens suivant : $\exists \alpha > 0$ et $\lambda \geq 0$ tel que

$$a(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V,$$

- K : sous-ensemble non vide fermé convexe de V ,
- $j : V \times V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe, propre, *s.c.i.*

Nous considérons ensuite les deux familles suivantes de (IVP) :

Trouver u tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) \geq (f, v - u), & \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in]0, T[\\ u(t) \in K \text{ p.p. } t \in]0, T[, u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Trouver u tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u), & \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in]0, T[\\ u(t) \in V \text{ p.p. } t \in]0, T[, u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Remarque 2.3.1. Si $K = V$ et $j \equiv 0$, alors (2.3.1) et (2.3.2) se réduisent à une équation variationnelle parabolique standard : Trouver u tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v), & \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in]0, T[\\ u(t) \in V \text{ p.p. } t \in]0, T[, u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Sous des hypothèses convenables sur u_0 , K et $j(\cdot)$, il est prouvé que (2.3.1) et (2.3.2) ont des solutions uniques dans $L^2(0, T, V) \cap \mathcal{C}^0([0, T], H)$. Pour la preuve, nous nous référons à Brezis [11, 12] et Lions [65].

Dans le chapitre 3, partie II, on verra une application de (2.3.3) à la finance.

Dans les sections suivantes de ce chapitre, on se propose de donner quelques schémas de discrétisation pour (2.3.3).

2.3.2 Les schémas numériques pour les équations linéaires paraboliques

On va discrétiser l'intervalle $[0, T]$ en M intervalles de temps de longueur $\Delta t = \frac{T}{M}$, et on note par u^m l'approximation de u au temps $t_m = m\Delta t$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M$).

On approche (2.3.3) en utilisant étape-par-étape des schémas numériques classiques (c-à-d, nous décrivons comment calculer u^{m+1} si u^m est connue).

Schéma d'Euler explicite (Euler's scheme)

Un schéma d'Euler explicite associé à (2.3.3) est défini par la relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t}, v \right) + a(u^m, v) = (f^m, v), & \forall v \in V \\ u^0 = u_0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Une solution de ce schéma est le vecteur (u^0, u^1, \dots, u^M) vérifiant (2.3.4).

Stabilité : conditionnel.

L'ordre de convergence : $O((\Delta t))$.

Schéma d'Euler implicite (backward Euler's scheme)

Un schéma d'Euler implicite associé à (2.3.3) est défini par la relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t}, v \right) + a(u^{m+1}, v) = (f^{m+1}, v), & \forall v \in V \\ u^0 = u_0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Une solution de ce schéma est le vecteur (u^0, u^1, \dots, u^M) vérifiant (2.3.5).

Stabilité : Inconditionnel.

L'ordre de convergence : $O((\Delta t))$.

Schéma de Crank-Nicolson (implicite)

Un schéma de Crank-Nicolson associé à (2.3.3) est défini par la relation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t}, v \right) + a \left(\frac{u^{m+1} + u^m}{2}, v \right) = \left(\frac{f^{m+1} + f^m}{2}, v \right) = (f^{m+1/2}, v), & \forall v \in V \\ u^0 = u_0. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Une solution de ce schéma est le vecteur (u^0, u^1, \dots, u^M) vérifiant (2.3.6).

Stabilité : Inconditionnel.

L'ordre de convergence : $O(\Delta t^2)$.

Remarque 2.3.2. *Étant donné $\theta \in [0, 1]$, le θ -schéma associé à (2.3.3) est défini par la relation de récurrence implicite*

$$\begin{cases} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t}, v \right) + \theta a(u^{m+1}, v) + (1 - \theta)a(u^m, v) = \theta (f^{m+1}, v) + (1 - \theta)(f^m, v), & \forall v \in V \\ u^0 = u_0. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Une solution de ce schéma est le vecteur (u^0, u^1, \dots, u^M) vérifiant (2.3.7). Autrement dit, le θ -schéma est obtenu comme combinaison convexe des schémas d'Euler explicite et implicite. Comme pour le schéma d'Euler implicite, on montre qu'il admet des solutions par application d'un théorème de point fixe.

Le cas particulier $\theta = 1/2$ correspond à ce que l'on appelle le schéma de Crank-Nicholson.

Chapitre 3

Une méthode de spline cubique pour résoudre un problème d'obstacle unilatéral

Sommaire

3.1	Introduction	48
3.2	Le problème de pénalisation	49
3.3	La méthode de collocation de spline cubique	51
3.4	Convergence de la méthode	54
3.5	Des exemples numériques	56
3.5.1	Exemple 1	56
3.5.2	Exemple 2	59
3.6	Conclusion	59

3.1 Introduction

Soient Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^n de bord régulier $\partial\Omega$, et ψ un élément de $H^1(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$. Soit K l'ensemble défini par :

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) / v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

On considère le problème d'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} f(v - u) dx \geq 0, \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où f est un élément de $L^2(\Omega)$. Ce problème est appelé problème d'obstacle unilatéral. Il est bien connu que le problème (3.1.1) admet une solution unique u , et si $\Delta\psi \in L^2(\Omega)$, alors u est un élément de $H^2(\Omega)$

(voir [44, 58]). Il existe plusieurs méthodes de résolution alternatives du problème d'obstacle ; voir, par exemple, [2, 45, 44, 49]. Des méthodes de résolution de ce problème de pénalité ont été considérées, (voir par exemple [45, 78]). Dans ce chapitre, nous développons une méthode numérique pour la résolution du problème d'obstacle unidimensionnel à l'aide de la méthode de collocation de spline cubique et la méthode de Newton généralisée. D'abord, le problème (3.1.1) est approché par une suite de problèmes d'équations non linéaires à l'aide de la méthode de pénalité proposée par [58, 64]. Ensuite, nous appliquons la méthode de collocation spline pour l'approximation du problème aux limites du second ordre associé. Le problème discret consiste à trouver les coefficients des splines cubiques d'un système non régulier $\varphi(Y) = Y$, où $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Afin de résoudre l'équation non régulière, nous appliquons la méthode de Newton généralisée (voir [16, 17, 81], par exemple). Nous montrons que la méthode de collocation de spline cubique converge quadratiquement à condition qu'une propriété de compatibilité entre le paramètre de pénalité ε et le paramètre de discrétisation h soit satisfaite.

Les méthodes numériques, pour approcher la solution du problème aux limites, ont été considérées par plusieurs auteurs. Nous citerons entre autres les travaux [13, 63] et les références qui y sont jointes, qui utilisent la méthode de collocation de spline pour résoudre les problèmes aux limites.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 3.2, nous présentons la méthode de pénalité pour approcher le problème d'obstacle par une suite de problèmes aux limites du second ordre. Dans la section 3.3, nous construisons une spline cubique pour approcher la solution du problème aux limites. La section 3.4 est consacrée à la présentation de la méthode de Newton généralisée. Dans la section 3.5, nous montrons la convergence de la spline cubique vers la solution du problème aux limites, en évaluant l'erreur d'estimation. Enfin, quelques résultats numériques sont donnés dans la section 3.6 pour valider notre méthode.

3.2 Le problème de pénalisation

Dans cette section, nous donnons une approximation au problème d'obstacle (3.1.1), nous commençons tout d'abord par présenter un résultat abstrait.

Proposition 3.2.1. *Soient V un espace vectoriel et $\psi \in V$. L'inéquation variationnelle*

$$u \geq \psi : \langle Au - L, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \geq \psi, \quad (3.2.1)$$

est équivalente au problème non linéaire complémentaire

$$u \geq \psi : Au - L \geq 0, \text{ et } \langle Au - L, u - \psi \rangle = 0. \quad (3.2.2)$$

Démonstration. Soit u une solution de (3.2.1). En prenant dans (3.2.1) $v = \psi$, $v = 2u - \psi$, on obtient, la troisième condition de (3.2.2), et comme $\langle Au - L, v \rangle = \langle Au - L, w - u \rangle \geq 0$, avec $w = v + u$, alors $Au - L \geq 0$, ceci permet d'obtenir la deuxième condition. Inversement si u est solution de (3.2.2) pour $v \geq \psi$, on a

$$\langle Au - L, v - u \rangle = \langle Au - L, v - \psi \rangle + \langle Au - L, \psi - u \rangle \geq 0.$$

□

Soit ψ un élément de $H^1(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$. Supposons que $\Delta\psi$ est un élément de $L^2(\Omega)$, alors la solution u du problème (3.1.1) est un élément de $H^2(\Omega)$ et peut être caractérisée comme (voir la proposition (3.2.1)) :

$$\begin{cases} -\Delta u + f \geq 0 & \text{p.p. sur } \Omega, \\ (-\Delta u + f)(u - \psi) = 0 & \text{p.p. sur } \Omega, \\ u - \psi \geq 0 & \text{p.p. sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

En utilisant la méthode de pénalisation (voir la relation (2.2.15), chapitre 2), on peut approcher ce problème par le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \max(-\Delta\psi + f, 0)\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) - f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où θ_ε est une suite de fonctions lipschitziennes, qui tend vers la fonction θ définie par :

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

presque partout sur \mathbb{R} , quand ε tend vers zéro. Supposons que la fonction $\theta_\varepsilon(t)$, $-\infty < t < +\infty$, est lipschitzienne décroissante et telle que $0 \leq \theta_\varepsilon(t) \leq 1$. Alors le problème (3.2.4) admet une solution unique (voir lemme 2.2.3). On prend par exemple la fonction

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ 1 - t/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

3.3 La méthode de collocation de spline cubique

Dans cette section, nous construisons une spline cubique qui s'approche de la solution u_ε du problème (3.2.4), avec $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et la fonction θ_ε est donnée par (3.2.6). Dans toute la suite, on suppose que $-\psi'' + f \in L^\infty(\Omega)$.

Soit $\tau = \{a = x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = b\}$ une subdivision de l'intervalle Ω . Sans perte de généralité, nous avons pris $x_i = a + ih$, où $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

Notons par $\mathring{\mathbb{S}}_4(\Omega, \tau) = \{s(x) : s \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), s(a) = s(b) = 0, s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_3(x_i, x_{i+1})\}$ l'espace des polynômes par morceaux de degré 3 sur la subdivision τ et de classe \mathcal{C}^2 partout sur Ω et de classe \mathcal{C}^0 partout sur $\bar{\Omega}$. On note que $\mathring{\mathbb{S}}_4(\Omega, \tau) \subseteq \mathring{H}^1(\Omega)$. Soit $B_i, i = -3, \dots, n-1$, une B-spline de degré 3 associé à τ . Ces B-splines sont positives et forment une base de l'espace $\mathring{\mathbb{S}}_4(\Omega, \tau)$. Si on pose :

$$J_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x)) = \max(-\Delta\psi(x) + f(x), 0)\theta_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - \psi(x)) - f(x), \quad (3.3.1)$$

alors le problème (3.2.4) devient

$$\begin{cases} -u''_\varepsilon &= J_\varepsilon(\cdot, u_\varepsilon) \quad \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon(a) &= u_\varepsilon(b) = 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

La fonction J_ε est non-linéaire par rapport au deuxième argument, continue en u_ε (voir [58]) ; et pour les deux fonctions u_ε et v_ε , J_ε satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$|J_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x)) - J_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x))| \leq L_\varepsilon |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)| \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (3.3.3)$$

où

$$L_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \|-\psi'' + f\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon} \max_{x \in \Omega} |-\psi''(x) + f(x)| < +\infty.$$

Maintenant, nous définissons la spline cubique d'interpolation de la solution u_ε du problème aux limites du second ordre (3.3.2).

Proposition 3.3.1. (voir [30]) Soit u_ε une solution du problème (3.3.2). Alors, il existe un interpolant unique de spline cubique $\mathring{\mathbb{S}}_4(\Omega, \tau)$ de u_ε qui satisfait :

$$S_\varepsilon(t_i) = u_\varepsilon(t_i), \quad i = 0, \dots, n+2,$$

où $t_0 = x_0, t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, i = 1, \dots, n, t_{n+1} = x_{n-1}$ et $t_{n+2} = x_n$.

Démonstration. En utilisant le théorème de Schoenberg-Whitney (voir [30]), il est facile de voir qu'il existe une spline cubique unique qui interpole u_ε aux points $t_i, i = 0, \dots, n+2$. □

Si on pose $S_\varepsilon = \sum_{i=-3}^{n-1} c_{i,\varepsilon} B_i$, alors en utilisant les conditions aux limites du problème (3.3.2) on obtient $c_{-3,\varepsilon} = S_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(a) = 0$ et $c_{n-1,\varepsilon} = S_\varepsilon(b) = u_\varepsilon(b) = 0$. D'où

$$S_\varepsilon = \sum_{i=-2}^{n-2} c_{i,\varepsilon} B_i.$$

De plus, comme l'interpolation par des splines de degré d donne des erreurs de la norme uniforme de l'ordre $O(h^{d+1})$ pour l'interpolation, et de l'ordre $O(h^{d+1-r})$ pour la r -ième dérivée de l'interpolant (voir [30], par exemple), alors pour tout $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (voir [59]) on a

$$-S_\varepsilon''(t_i) = J_\varepsilon(t_i, u_\varepsilon) + O(1), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (3.3.4)$$

La méthode de collocation spline cubique, que nous présentons dans ce chapitre, consiste à construire numériquement une spline cubique $\tilde{S}_\varepsilon = \sum_{i=-3}^{n-1} \tilde{c}_{i,\varepsilon} B_i$ qui satisfait au problème (3.3.2) aux points t_i , $i = 0, \dots, n+2$. Il est facile de voir que :

$$\tilde{c}_{-3,\varepsilon} = \tilde{c}_{n-1,\varepsilon} = 0,$$

et les coefficients $\tilde{c}_{i,\varepsilon}$, $i = -2, \dots, n-2$, satisfont un système de $n+1$ équations non linéaires :

$$-\sum_{i=-2}^{n-2} \tilde{c}_{i,\varepsilon} B_i''(t_j) = J_\varepsilon(t_j, \sum_{i=-2}^{n-2} \tilde{c}_{i,\varepsilon} B_i(t_j)), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (3.3.5)$$

Les relations (3.3.4) et (3.3.5) peuvent s'écrire respectivement sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} \widehat{A}C_\varepsilon &= -F_\varepsilon - \widehat{E}_\varepsilon, \\ \widehat{A}\tilde{C}_\varepsilon &= -F_{\tilde{C}_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où

$$F_\varepsilon = [J_\varepsilon(t_1, u_\varepsilon(t_1)), \dots, J_\varepsilon(t_{n+1}, u_\varepsilon(t_{n+1}))]^T,$$

$$F_{\tilde{C}_\varepsilon} = [J_\varepsilon(t_1, \tilde{S}(t_1)), \dots, J_\varepsilon(t_{n+1}, \tilde{S}(t_{n+1}))]^T,$$

et \widehat{E}_ε est un vecteur où chaque composante est d'ordre $O(1)$. Il est bien connu que $\widehat{A} = \frac{1}{h^2}A$, où A est

une matrice, indépendante de h , donnée comme suit (voir [30]) :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & & & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \dots & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Alors, la relation (3.3.6) devient

$$\begin{aligned} AC_\varepsilon &= -h^2 F_\varepsilon - E_\varepsilon, \\ A\tilde{C}_\varepsilon &= -h^2 F_{\tilde{C}_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

avec E_ε est un vecteur où chacune de ses composantes est de l'ordre de $O(h^2)$.

Les résultats de ce travail est essentiellement basés sur l'inversibilité de la matrice A .

Proposition 3.3.2. *La matrice A est inversible.*

Démonstration. Soit $D = [d_{-2}, \dots, d_{n-2}]^T$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} tel que $AD = 0$.

Si on pose $S(x) = \sum_{j=-2}^{n-2} d_j B_j$, alors on a $S(a) = S(b) = 0$ et $S''(t_i) = 0$ pour toute $i = 1, \dots, n+1$. Comme $S \in \mathring{\mathbb{S}}_4(\Omega, \tau)$, alors $S'' \in \mathring{\mathbb{S}}_2(\Omega, \tau)$. Si on suppose que $S'' \neq 0$ sur $[x_0, x_n]$, alors en utilisant le lemme 1.3.3 (chapitre 1, partie I) ci-dessus et du fait que S'' admet $n+1$ zéros dans $[x_0, x_n]$, nous concluons que $n+1 \leq n-2$, ce qui est impossible. Donc $S'' = 0$ sur Ω . Cela signifie que la fonction S est un polynôme linéaire par morceaux dans Ω . Puisque $S(a) = S(b) = 0$, alors on en déduit que $S(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Par conséquent $D = 0$ et la matrice A est inversible. \square

Proposition 3.3.3. *Supposons que le paramètre de pénalité ε et le paramètre de discrétisation h satisfont la relation suivante :*

$$h^2 \| -\Delta \psi + f \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty < \varepsilon. \quad (3.3.9)$$

Alors, il existe une spline cubique unique solution de (3.3.8), qui s'approche de la solution exacte u_ε du problème (3.3.2).

Démonstration. D'après la relation (3.3.8), on a $\tilde{C}_\varepsilon = -h^2 A^{-1} F_{\tilde{C}_\varepsilon}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la fonction définie par :

$$\varphi(Y) = -h^2 A^{-1} F_Y. \quad (3.3.10)$$

Pour prouver l'existence de la collocation de spline cubique, il suffit de prouver que φ admet un unique point fixe. En effet, Soient Y_1 et Y_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} . On a alors

$$\|\varphi(Y_1) - \varphi(Y_2)\| \leq h^2 \|A^{-1}\|_\infty \|F_{Y_1} - F_{Y_2}\|_\infty. \quad (3.3.11)$$

En utilisant la relation (3.3.3) et le fait que $\sum_{j=-2}^{n-2} B_j \leq 1$, on trouve

$$|J_\varepsilon(t_i, S_{Y_1}(t_i)) - J_\varepsilon(t_i, S_{Y_2}(t_i))| \leq L_\varepsilon |S_{Y_1}(t_i) - S_{Y_2}(t_i)| \leq L_\varepsilon \|Y_1 - Y_2\|_\infty,$$

où $L_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \|\Delta\psi + f\|_\infty$. On obtient alors

$$\|F_{Y_1} - F_{Y_2}\|_\infty \leq L_\varepsilon \|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

De la relation (3.3.11), on en déduit que

$$\|\varphi(Y_1) - \varphi(Y_2)\| \leq L_\varepsilon h^2 \|A^{-1}\|_\infty \|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

Ainsi, de la relation (3.3.9), φ est une contraction stricte et alors φ admet un unique point fixe. \square

Afin de calculer les coefficients de collocation de spline cubique donnés par le système non régulier

$$\tilde{C}_\varepsilon = \varphi(\tilde{C}_\varepsilon), \quad (3.3.12)$$

Nous proposons la méthode de Newton généralisée définie par :

$$\tilde{C}_\varepsilon^{(k+1)} = \tilde{C}_\varepsilon^{(k)} - (I_{n+1} - V_k)^{-1} (\tilde{C}_\varepsilon^{(k)} - \varphi(\tilde{C}_\varepsilon^{(k)})), \quad (3.3.13)$$

où I_{n+1} est la matrice unité d'ordre $n+1$ et V_k est la matrice jacobienne de la fonction généralisée $\tilde{C}_\varepsilon \mapsto \varphi(\tilde{C}_\varepsilon)$, (voir [16, 17, 81], par exemple).

3.4 Convergence de la méthode

Théorème 3.4.1. *On suppose que le paramètre de pénalité ε et le paramètre de discrétisation h satisfont la relation :*

$$2h^2 \|\Delta\psi + f\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty < \varepsilon. \quad (3.4.1)$$

Alors la spline cubique \tilde{S}_ε converge vers la solution u_ε . L'erreur d'estimation $\|u_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_\infty$ est d'ordre $O(h^2)$.

Démonstration. D'après (3.3.8) et le lemme 5.4.3, on a

$$C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon = -h^2 A^{-1} (F_\varepsilon - F_{\tilde{C}_\varepsilon}) - A^{-1} E_\varepsilon.$$

Comme E_ε est d'ordre $O(h^2)$, alors il existe une constante K_1 tel que $\|E_\varepsilon\|_\infty \leq K_1 h^2$.

Par conséquent on a

$$\|C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon\|_\infty \leq h^2 \|A^{-1}\|_\infty \|F_\varepsilon - F_{\tilde{C}_\varepsilon}\|_\infty + K_1 \|A^{-1}\|_\infty h^2. \quad (3.4.2)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(t_i, u_\varepsilon(t_i)) - J_\varepsilon(t_i, \tilde{S}_\varepsilon(t_i))| &\leq L_\varepsilon |u_\varepsilon(t_i) - \tilde{S}_\varepsilon(t_i)| \\ &\leq L_\varepsilon |u_\varepsilon(t_i) - S_\varepsilon(t_i)| + L_\varepsilon |S_\varepsilon(t_i) - \tilde{S}_\varepsilon(t_i)|. \end{aligned}$$

Comme S_ε est l'interpolé de la spline cubique de u_ε , alors d'après Baris I. Kvasov (voir [59]), il existe une constante K_2 telle que

$$\|u_\varepsilon - S_\varepsilon\|_\infty \leq K_2 h^2. \quad (3.4.3)$$

En utilisant le fait que

$$|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon| \leq \|C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon\|_\infty \sum_{j=-2}^{n-2} B_j \leq \|C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon\|_\infty, \quad (3.4.4)$$

on obtient

$$|F_\varepsilon - F_{\tilde{C}_\varepsilon}| \leq L_\varepsilon \|C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon\|_\infty + L_\varepsilon K_2 h^2.$$

En utilisant la relation (3.4.2) et l'hypothèse (3.4.1) il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \|C_\varepsilon - \tilde{C}_\varepsilon\|_\infty &\leq \frac{h^2 \|A^{-1}\|_\infty}{1 - L_\varepsilon h^2 \|A^{-1}\|_\infty} (K_2 L_\varepsilon h^2 + K_1) \\ &\leq 2 \|A^{-1}\|_\infty (K_2 L_\varepsilon h^2 + K_1) h^2. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Par suite,

$$\|u_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_\infty \leq \|u_\varepsilon - S_\varepsilon\|_\infty + \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_\infty.$$

Alors d'après les relations (3.4.3), (3.4.4) et (3.4.5), on déduit que $\|u_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_\infty$ est d'ordre $O(h^2)$. \square

Remarque 3.4.1. *Le théorème (3.4.1) pourvoit une relation de compatibilité entre le paramètre de pénalisation ε et le paramètre de discrétisation h , qui garantit la convergence quadratique de la collocation spline cubique \tilde{S}_ε vers la solution u_ε du problème de pénalisé.*

3.5 Des exemples numériques

Dans cette section, on présente deux exemples numériques pour résoudre un problème d'obstacle unidimensionnel, en utilisant la méthode de spline cubique pour approcher la solution du problème de pénalité (3.3.2), et la méthode de Newton généralisée (3.3.13) pour déterminer les coefficients de la collocation de spline cubique.

3.5.1 Exemple 1

Considérons le problème d'obstacle (3.1.1) avec les données suivantes (voir l'exemple (2.2.1) du chapitre 2 partie I) : $\Omega =]0, 2[$, $\psi = 0$ et

$$f = \begin{cases} -1 & \text{sur }]0, 1], \\ 1 & \text{sur }]1, 2[. \end{cases}$$

La solution exacte $u(x)$ de ce problème est donnée par (voir chapitre 2 exemple 2.2.1)

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + (2 - \sqrt{2})x & \text{si } x \in]0, 1], \\ \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 & \text{si } x \in]1, \sqrt{2}], \\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 2[. \end{cases}$$

Comme critère d'arrêt pour les itérations de Newton généralisée, nous avons considéré que la valeur absolue de la différence entre les coefficients d'entrée et les coefficients de sortie est inférieure à 10^{-9} .

Les tableaux 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 et 3.5.4 montrent, pour différentes valeurs du paramètre de discrétisation h , l'erreur entre la collocation spline cubique \tilde{S}_ε et la solution exacte u . Nous avons constaté que la convergence de la solution \tilde{S}_ε vers la fonction u dépend du paramètre de discrétisation h et le paramètre de pénalisation ε . Le théorème 6.5.1 implique que pour h fixé, cette convergence est garantie seulement s'il existe $\varepsilon_h > 0$ tel que $\varepsilon \geq \varepsilon_h$. Certaines valeurs expérimentales de ε_h sont données dans les tableaux 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 et 3.5.4.

Tab. 3.5.1: Résultats pour $h = \frac{1}{20}$

ε	10^{-2}	10^{-3}	5×10^{-4}	$2 \times 10^{-4} = \varepsilon_h$
$\ u - \tilde{S}_\varepsilon\ _\infty$	4.7×10^{-3}	7.61×10^{-4}	7.12×10^{-4}	6.84×10^{-4}
nombre d'itérations	5	7	9	10

Tab. 3.5.2: Résultats pour $h = \frac{1}{50}$

ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	$2 \times 10^{-5} = \varepsilon_h$
$\ u - S_\varepsilon\ _\infty$	4.5×10^{-3}	4.94×10^{-4}	1.75×10^{-4}	1.59×10^{-4}
nombre d'itérations	6	9	15	22

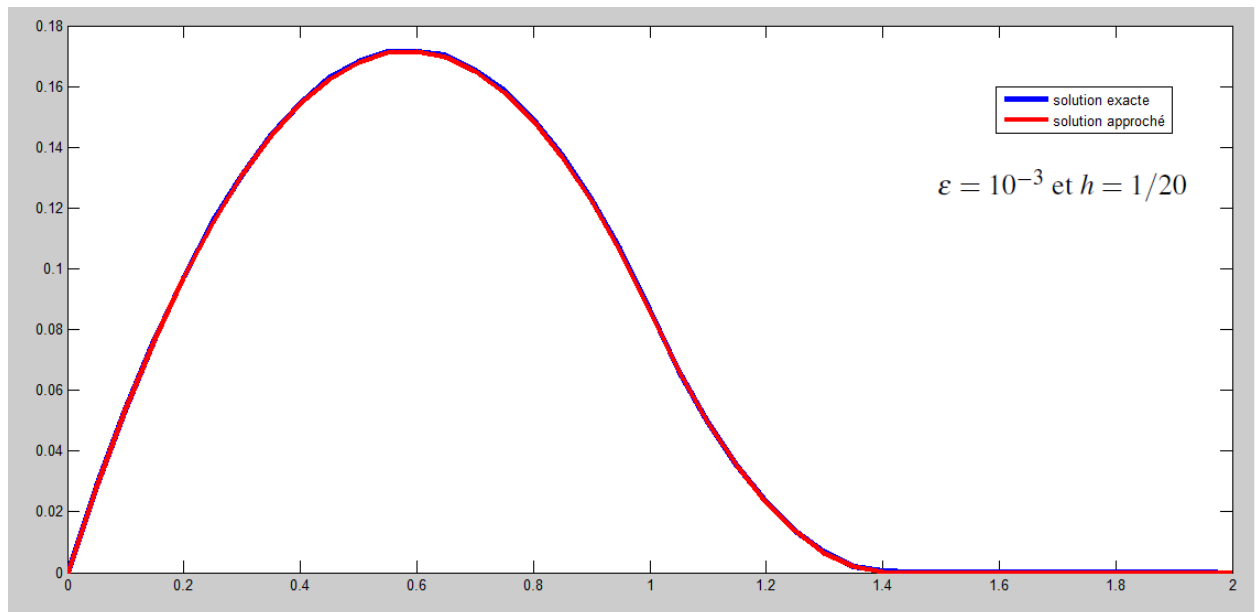
Tab. 3.5.3: Résultats pour $h = \frac{1}{100}$

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$5 \times 10^{-6} = \varepsilon_h$
$\ u - \tilde{S}_\varepsilon\ _\infty$	4.87×10^{-4}	4.41×10^{-5}	4.12×10^{-6}	2.74×10^{-6}
nombre d'itérations	9	16	31	43

Tab. 3.5.4: Résultats pour $h = \frac{1}{200}$

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	$2 \times 10^{-6} = \varepsilon_h$
$\ u - \tilde{S}_\varepsilon\ _\infty$	4.86×10^{-4}	4.92×10^{-5}	5.25×10^{-6}	8.26×10^{-7}
nombre d'itérations	9	18	35	56

D'après les théorèmes 2.2.6 et 3.4.1, l'erreur d'estimation entre la solution exacte et la solution de problème pénalisé est donnée par $|u - \tilde{S}_\varepsilon|_\infty \leq \varepsilon + kh^2$. Les résultats obtenus montrent que la convergence de la solution de problème pénalisé vers la solution du problème d'obstacle d'origine, est assurée à condition que h et ε vérifient la relation (3.4.1). En outre, des erreurs numériques d'estimation se comportent comme $\varepsilon + kh^2$ ce qui confirme ce que nous attendions.



3.5.2 Exemple 2

Considérons le problème d'obstacle (3.1.1) avec les données suivantes :

$$\Omega =]0, 4[, \psi(x) = 1 - (x - 2, 2)^2 \text{ et } f = 0.$$

La solution exacte $u(x)$ de ce problème est donnée par [8, 68]

$$u(x) = \begin{cases} -2(\sqrt{1,2 \times 3,2} - 2,2)x & \text{si } x \in]0, \sqrt{1,2 \times 3,2}], \\ 1 - (x - 2,2)^2 & \text{si } x \in]\sqrt{1,2 \times 3,2}, 4 - \sqrt{2,24}], \\ -2(4 - \sqrt{2,24} - 2,2)(x - 4) & \text{si } x \in [4 - \sqrt{2,24}, 4[. \end{cases}$$

Tab. 3.5.5: Résultats pour $\varepsilon = 10^{-5}$

h	1/21	1/61	1/81	1/101
notre max_error	7.809×10^{-4}	1.013×10^{-4}	6.182×10^{-5}	4.333×10^{-5}
min_error dans [38]	0.043	0.039	0.035	0.029

Le tableau 3.5.5 indique les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos simulations numériques et l'erreur minimale (min_error) celle obtenues dans [38]. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues dans [38].

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré une approximation d'un problème d'obstacle unilatéral par une suite de problèmes de pénalisation, qui sont des équations non régulières, présentées dans [58, 64]. Alors, on a développé une méthode numérique pour résoudre chaque équation non régulière, basée sur une méthode de collocation de spline cubique et la méthode de Newton généralisée. Nous avons montré la convergence de la méthode à condition que les paramètres de pénalisation et de discrétisation satisfassent la relation (3.4.1). En outre, on a fourni une erreur d'estimation d'ordre $O(h^2)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les résultats numériques obtenus justifient la convergence des solutions approchées de problème pénalisé vers la solution exacte. Ainsi, on confirme les résultats théoriques.



Deuxième partie

Applications en finance

Chapitre 4

Options

Sommaire

4.1	Introduction	61
4.2	Hypothèses sur le marché	62
4.3	Définitions et notations des taux de base	64
4.4	Modèle de Black-Scholes	66
4.4.1	Modélisation probabiliste du marché	66
4.4.2	Le lemme d'Itô	67
4.5	Les modèles stochastiques des taux d'intérêt	68
4.5.1	Modèle de Vasicek	69
4.5.2	Modèle de Ho-Lee	69
4.5.3	Modèle Hull-White d'un seul facteur	70
4.5.4	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	70

4.1 Introduction

Notions élémentaires en finance

Dans cette partie, on rappelle les notions élémentaires en mathématique financière qui seront supposées connues par la suite. Pour plus d'informations sur ces notions, voir [53], [47] et [42].

L'**option** est un contrat entre deux parties par lequel l'une accorde à l'autre le droit (mais non l'obligation) de lui acheter (option d'achat (call)) ou de lui vendre (option de vente (put)) un actif, moyennant le versement d'une prime. L'achat (ou la vente) de cet actif se fera à un prix déterminé (prix d'exercice), durant une période (période d'exercice pour les options dites "américaines") ou à une

date précise (date d'exercice pour les options dites "européennes"). Le fondement de l'option est la rémunération du risque.

Les options les plus répandues et les plus simples dites **vanilles** (plain vanilla options en anglais) sont les premières apparues sur les marchés. Ce sont les options sur valeur de l'actif dont elles sont dérivées. Cependant, les besoins de couverture très divers, notamment sur le Forex^(a), ont favorisé l'apparition d'options plus complexes dites **options exotiques**.

Deux générations d'options exotiques subsistent :

- les options de première génération : caps, floors, swaptions européens (essentiellement utilisées comme options sur les taux d'intérêt, ...)
- les options de seconde génération qui sont "path-dependent" : lookback, asiatiques, à barrière, digitales, composées, à choix différé.
- ou durant toute la période jusqu'à échéance (option dite **américaine**).

L'évaluation des options est la détermination à la date actuelle ($t = 0$) de la valeur (*payoff*) de l'option qui sera (peut-être) exercée à la date d'échéance ou encore maturité T .

Dans notre étude nous traitons les deux types d'options **européennes** d'achat les plus répandues et les plus utilisées :

- les options vanilles européennes de payoff : $\max(S_T - K, 0)$;
- les options asiatiques européennes de payoff : $\max(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0)$.

4.2 Hypothèses sur le marché

Nous supposons que :

- Les actifs sont divisibles à l'infini ;
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
- On peut emprunter et vendre à découvert ;
- Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
- On peut emprunter et prêter au même taux constant r .

Arbitrage

Quelles sont les évolutions possibles du marché ?

- Ω : Ensemble des états possibles du marché ;

^a Forex (Foreign Exchange) : est le marché des changes sur lequel les devises dites convertibles sont échangées l'une contre l'autre, à des taux de change qui varient sans cesse.

– \mathbb{P} : Probabilité réelle (ou en tout cas anticipée) de survenance de chacun des états.

Quelles sont les stratégies d'investissement ?

Définition 4.2.1. *Un portefeuille autofinçant est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera X_t la valeur en t du portefeuille X .*

On se donne donc simplement un capital initial et une stratégie dynamique d'investissement dans les actifs du marché à partir de ce capital de départ.

Qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage ?

Définition 4.2.2. *Un arbitrage sur la période $[0, T]$ est un portefeuille autofinçant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.*

$$X_0 = 0, \quad X_T \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

On supposera qu'il y a sur le marché l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage (AOA, no free lunch) en tout instant compris entre 0 et T .

$$\{X_0 = 0 \text{ et } X_T \geq 0\} \implies \mathbb{P}(X_T > 0) = 0.$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut pas devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Le raisonnement (défaitiste) est : "S'il y avait un arbitrage, quelqu'un en aurait déjà profité". Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse est cohérente sur les marchés.

Pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont la même valeur en T , on y gagne.

Relation de parité Call-Put

Un **call** de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(S_T - K)_+$; notons C_t son prix à l'instant t .

Un **put** de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(K - S_T)_+$; notons P_t son prix à l'instant t . Un **zero-coupon** d'échéance T est un produit financier de valeur 1 en T . Son prix en t est

noté $B(t, T)$.

Alors, en AOA, les prix des calls et des puts en t sont reliés par la relation de parité call put :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T)$$

Cette relation est intrinsèque à l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché et ne dépend en rien du modèle d'évolution imposé aux actifs.

4.3 Définitions et notations des taux de base

L'outil de base d'un modèle des taux est l'obligation zéro-coupon^(b), produit financier versant un euro à la maturité T . On notera $P(t, T)$ son prix à la date $t \in [0, T]$. A partir de ce prix de l'obligation zéro-coupon on peut définir plusieurs types de taux :

Définition 4.3.1. On appelle *taux d'intérêt instantané continûment composé* la quantité $R(t, T)$ définie par

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}.$$

$R(t, T)$ est parfois dit "taux zéro-coupon^(c)" : c'est le taux continu constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Définition 4.3.2. On appelle *taux d'intérêt instantané simplement composé* la quantité $L(t, T)$ définie par

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)(T - t)}.$$

$L(t, T)$ est le taux simple constant tel que

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}.$$

Définition 4.3.3. On appelle *taux d'intérêt instantané composé annuellement* la quantité $Y(t, T)$ définie par

$$Y(t, T) = \frac{1}{P(t, T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1.$$

^b Les obligations zéro-coupon sont des titres sans coupon. L'investisseur sera rémunéré par la différence entre le prix d'achat et le prix de remboursement.

^c (appelé aussi taux spot) pour une date de départ et une durée donnée est le taux actuariel qu'aurait une obligation ou un swap de mêmes caractéristiques temporelles mais ayant un coupon de 0%.

$Y(t, T)$ est aussi appelé taux actuariel et vérifie

$$P(t, T) = \frac{1}{[1 + Y(t, T)]^{(T-t)}}.$$

Définition 4.3.4. Soit $s : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction strictement positive et dérivable supposée représenter l'évolution des cours d'un actif sans risque (déterministe) au cours du temps (continu).

Si $t < T$, la quantité $\frac{1}{s(t)} \frac{s(T) - s(t)}{T - t}$ est le taux d'intérêt entre les instants t et T .

Le **taux d'intérêt court (ou taux d'intérêt instantané)** $r(t)$ à l'instant t sera, par définition,

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{s(T) - s(t)}{T - t} \frac{1}{s(t)} = \frac{s'(t)}{s(t)}.$$

Taux à terme (forward)

On appelle forward rate agreement (FRA), de nominal N , d'expiration T et de maturité s , un contrat qui donne à son souscripteur un versement à la date s au taux fixe (simplement composé) K pour la période $[T, s]$ contre le paiement à cette même date s d'un taux variable $L(T, s)$ fixé en T pour cette même période $[T, s]$.

Par absence d'opportunité d'arbitrage, le "juste prix" de ce contrat à la date t doit être nul. En conséquence, on peut définir le taux à terme (ou taux forward) comme étant la valeur de K annulant le prix du FRA.

Définition 4.3.5. On appelle **taux forward (simple) expirant à la date T et de maturité $s > T$** , la quantité définie à la date t par

$$L(t, T, s) = \frac{1}{s - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, s)} - 1 \right). \quad (4.3.1)$$

En faisant tendre s vers T dans la définition (4.3.1) du taux forward, on obtient une définition naturelle du taux forward instantané.

Définition 4.3.6. On appelle **taux forward instantané à la date t pour la maturité T** la quantité

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (4.3.2)$$

i.e. telle que

$$P(t, T) = \exp \left(-\int_t^T f(t, u) du \right). \quad (4.3.3)$$

On peut définir alors de façon cohérente les prix de zéro-coupon forward à la date t pour l'expiration T et la maturité s par

$$P(t, T, s) = \frac{P(t, s)}{P(t, T)}. \quad (4.3.4)$$

$P(t, T, s)$ est la valeur vue à la date t du montant à payer à la date T pour acheter l'obligation zéro-coupon qui versera un euro à la date s .

4.4 Modèle de Black-Scholes

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle s'appelle le modèle de Black-Scholes. Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique (ou processus de WIENER généralisé)

4.4.1 Modélisation probabiliste du marché

Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

- **L'actif sans risque** : Dans le modèle discret à m périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en m intervalles de longueur T/m , que l'on considère un taux sans risque r_m de la forme rT/m , la valeur de l'actif sans risque à l'instant pT/m a la forme suivante : $(1 + rT/m)^p$. Donc, lorsque m tend vers l'infini, S_t^0 se comporte comme e^{rt} . La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actif sans risque en continu est donc naturellement :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \text{ et } S_0^0 = 1 \implies S_t^0 = e^{rt}$$

- **L'actif risqué** : aura la dynamique donnée par l'équations différentielles stochastiques (EDS) de Black-Scholes où $\sigma > 0$:

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \tag{4.4.1}$$

Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements des actifs sont normaux. Cet actif a une tendance donnée par μ et une volatilité donnée par σ toutes les deux constantes.

Dans la suite de cette section, on se place sur un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $\tilde{\Omega}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^+ \times]0, T]$.

Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu F_t représente l'information disponible à la date t , l'aléa provient seulement

de S , donc :

$$F_t = \sigma(S_r, r \leq t)$$

4.4.2 Le lemme d'Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

Un processus d'Itô est un processus stochastique de la forme :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

avec μ_t et σ_t deux fonctions aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus B_t (mouvement brownien).

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de $\mathbb{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt.$$

Le théorème suivant donne la résolution de l'EDS de Black Scholes :

Théorème 4.4.1. *L'EDS (4.4.1) admet une solution unique qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à $f(t, W_t)$ avec

$$f : (t, x) \longmapsto S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= f_x(t, W_t)dW_t + f_t(t, W_t)dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)d\langle W \rangle_t \\ &= \sigma f(t, W_t)dW_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})f(t, W_t)dt + \frac{\sigma^2}{2}f(t, W_t)dt. \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$.

Donc S , processus F -adapté est bien solution de l'EDS (4.4.1). Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer :

Soit Y un processus solution de l'EDS (4.4.1). Remarquons que S_t ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de $\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t} dY_t + d\left\langle \frac{1}{S_t}, Y \right\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t} ((\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dW_t) + \frac{Y_t}{S_t} (\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on aurait pu obtenir directement le résultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y, s) \mapsto y/s$. On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dW_s = 1.$$

Donc les processus Y et S sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution. \square

Remarque 4.4.1. Comme nous avons supposé $\sigma > 0$, la fonction g telle que $S_t = g(W_t)$ est bijective, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement Brownien W :

$$F_t = \sigma(S_\tau, \tau \leq t) = \sigma(W_\tau, \tau \leq t).$$

4.5 Les modèles stochastiques des taux d'intérêt

Dans la littérature, plusieurs modèles de taux d'intérêt sont étudiés. Dans la pratique nous pouvons distinguer deux familles de modèles stochastiques.

- Ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'équilibre :

En effet, on parle d'équilibre général quand il s'applique à l'ensemble de l'économie (consommation/production, offre/ demande). Mais une telle approche impose des hypothèses restrictives qui peuvent entraîner un biais dans la modélisation. Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross [25], que nous étudierons dans la suite de cette section, est un modèle répondant à une telle approche.

- Et ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage :

On citera par exemple le modèle de Vasicek [85]. Cette approche est moins restrictive, mais il faut noter que si l'approche précédente basée sur une économie globale en équilibre implique toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Sous les hypothèses de marché parfait (absence de coût de transaction, titre parfaitement divisible, agents rationnels et disposant du même niveau d'information, marché efficient, taux d'emprunt et de prêt identique), nous présenterons quelques modèles classiques :

- Vasicek
- Ho-Lee
- Hull-White d'un seul facteur
- Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

4.5.1 Modèle de Vasicek

Le taux court dans le modèle de Vasicek est donné comme la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\begin{cases} dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dB_t, & t \geq 0, r_0 \in I = \mathbb{R} \\ \mu(x) = \beta - \alpha x, & \forall x \in I, \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}, \\ \sigma(x) \equiv \sigma \geq 0 & \forall x \in I. \end{cases}$$

Dans ce modèle, le taux d'intérêt de courte durée est la seule source d'incertitude qui conduit avec le temps la forme et le développement de la structure du terme. Il est justifié que l'espace de l'état I d'un processus dans le modèle de Vasicek est \mathbb{R} . Cela implique en particulier que le taux court peut devenir négatif. Le modèle aussi assume une volatilité constante qui n'est pas vrai dans les marchés financiers.

4.5.2 Modèle de Ho-Lee

Le premier modèle de valorisation d'options de taux intégrant toute l'information de la structure des taux est celui de Ho-Lee [48]. Ce modèle présente comme principal inconvénient de prendre en compte des taux de volatilité constante.

Le modèle de Ho-Lee est un modèle exogène décrivant l'évolution de la courbe des taux. Il permet d'évaluer des actifs optionnels sur taux, de complexité importante. Le caractère discret du modèle permet d'intégrer des phénomènes ponctuels dans le temps affectant les taux (option américaine,...). La courbe initiale des taux initiale est une donnée du modèle.

Les limitations du modèle sont :

- Il peut apparaître des taux négatifs.
- Tous les taux sont parfaitement corrélés.
- Tous les taux zéro-coupon ont même volatilité.

Le modèle de Ho-Lee est décrit par l'EDS :

$$\begin{cases} dr_t = \theta(t)dt + \sigma dB_t, & t \geq 0, \\ \theta(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + \sigma^2 t & \forall t \geq 0, \sigma \geq 0. \end{cases}$$

avec f est le taux instantané de forward du marché pour $t = 0$ (voir la formule (4.3.2)).

4.5.3 Modèle Hull-White d'un seul facteur

Le modèle Hull-White [54] est le dérivé du modèle Vasicek. Hull-White ont introduit une moyenne long-terme fonction déterministe du temps. Ils ont supposé que sous la probabilité risque neutre Q , l'évolution du taux d'intérêt court r représenté par le processus de retour à la moyenne suivante :

$$\begin{cases} dr_t = (\theta(t) - \alpha r_t)dt + \sigma dB_t, & t \geq 0, \\ \theta(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + \alpha f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) & \forall t \geq 0, \sigma \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

où $\theta(t)$ est une fonction déterministe du temps et f est le taux instantané de forward du marché pour $t = 0$. Le paramètre α est la vitesse de retour à la moyenne, qui contrôle la vitesse de l'ajustement défini par $\theta(t)$. Le paramètre σ est la volatilité de taux court, α et σ sont des constants positifs. B_t représente le composant aléatoire, donc le mouvement Brownien.

L'intérêt du modèle de Hull-White est de reproduire exactement la courbe de taux zéro-coupon de marché à l'aide de la fonction déterministe.

Par application du lemme d'Ito au processus $r_t \exp(\alpha t)$, on montre que le taux court s'écrit :

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \int_s^t \theta(u)e^{-\alpha(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dB_u.$$

4.5.4 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Les diffusions en racine carré jouent un rôle important dans plusieurs modèles en finance car ils modélisent très bien les taux d'intérêt mais aussi les volatilités stochastiques d'actifs financiers. Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) est utilisé en mathématique financière pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt à court terme. Il s'agit de la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$r_t = r_0 + \int_0^t \sigma \sqrt{r_s} dW_s + \kappa \int_0^t (\theta - r_s) ds,$$

où r_0 est positif, et W est un mouvement brownien. Notons que la solution de cette EDS reste strictement positive sous la condition $2\kappa\theta > \sigma^2$. Le paramètre θ donne la moyenne à long terme, et $\kappa > 0$ donne la vitesse à laquelle le processus va converger vers cet équilibre. Bien sûr, la partie brownienne vient perpétuellement perturber cette convergence à l'équilibre, mais ce processus va essentiellement se concentrer autour de la valeur de θ au bout d'un certain temps.

Le théorème suivant donne la solution exacte du modèle (CIR).

Théorème 4.5.1. Dans le modèle CIR, le prix du zéro-coupon de maturité s s'écrit à la date t

$$P(r, t, s) = A(t, s)e^{-B(t, s)r},$$

où

$$A(t, s) = \left[\frac{\phi_1 e^{\phi_2(s-t)}}{\phi_2 [e^{\phi_1(s-t)} - 1] + \phi_1} \right]^{\phi_3}, \quad B(t, s) = \frac{e^{\phi_1(s-t)} - 1}{\phi_2 [e^{\phi_1(s-t)} - 1] + \phi_1},$$

$$\phi_1 = \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}, \quad \phi_2 = \frac{\mu + \phi_1}{2}, \quad \phi_3 = \frac{2\bar{\theta}}{\sigma^2}, \quad \bar{\theta} = \kappa\theta, \quad \mu = \kappa + \zeta,$$

et ζ est la prime de risque du marché.

Démonstration. Si r vérifie le modèle (CIR) et $P(r, t, s)$ est le prix du zéro-coupon. Alors, le lemme d'Itô implique que P satisfait

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + [\kappa(\theta - r) - \lambda_r]P_r - rP + P_t = 0. \quad (4.5.1)$$

On doit résoudre cette équation différentielle sous la condition terminale $P(r, s, s) = 1$, où κ , θ , σ et λ_r sont des constantes.

La solution générale est de la forme :

$$P(r, t, s) = \exp\{A(T)r(t) + B(T)\}, \quad \text{et } T = s - t.$$

La condition $P(r, s, s) = 1$ implique $A(0)r(s) + B(0) = 0$ pour tout s , et donc $A(0) = B(0) = 0$.

Les dérivées partielles $P_t = -\{A'(T)r + B'(T)\}P$, $P_r = A(T)P$ et $P_{rr} = A(T)^2P$, donnent, après division par P et factorisation par r :

$$\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + \kappa A(T) + 1 + A'(T) \right] r(t) = [(\kappa\theta - \lambda_r)A(T) - B'(T)]. \quad (4.5.2)$$

Valable pour tout T , cette équation impose la nullité du facteur de r et du terme indépendant de r . On doit donc résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$A'(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 - \kappa A(T) - 1 \quad (4.5.3)$$

$$B'(T) = (\kappa\theta - \lambda_r)A(T). \quad (4.5.4)$$

Pour résoudre (4.5.3), on effectue le changement de variables suivant :

$$D(T) = A(T) - \frac{\mu + \phi_1}{\sigma^2}, \quad E(T) = A(T) - \frac{\mu - \phi_1}{\sigma^2} \quad \text{et } \phi_1 = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \quad (4.5.5)$$

On vérifie alors aisément que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 - \kappa A(T) - 1 = \phi_1 \left[\frac{1}{D(T)} - \frac{1}{E(T)} \right]^{-1}. \quad (4.5.6)$$

Et, comme $A'(T) = D'(T) = E'(T)$, on peut réécrire (4.5.6) sous la forme :

$$\left[\frac{D'(T)}{D(T)} - \frac{E'(T)}{E(T)} \right] = \phi_1. \quad (4.5.7)$$

En intégrant (4.5.7) de 0 à T , on obtient

$$\left[\ln \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \right]_0^T = \phi_1 T. \quad (4.5.8)$$

Soit

$$\ln \left[\frac{D(T)/D(0)}{E(T)/E(0)} \right]_0^T = \phi_1 T. \quad (4.5.9)$$

De $A(0) = 0$, on en déduit que $D(0)/E(0) = (\mu + \phi_1)/(\mu - \phi_1)$. Introduisant cette expression dans (4.5.9), on obtient alors

$$\frac{D(T)}{E(T)} = \frac{\mu + \phi_1}{\mu - \phi_1} e^{\phi_1 T}. \quad (4.5.10)$$

En remplaçant $D(T)$ et $E(T)$ par leurs expressions, donnée en (4.5.5), on trouve

$$A(T) = \frac{-2(e^{\phi_1 T} - 1)}{(\mu + \phi_1)(e^{\phi_1 T} - 1) + 2\phi_1}. \quad (4.5.11)$$

Pour résoudre l'équation différentielle (4.5.4), on procède à un nouveau changement de variables :

$$C(T) = (\mu + \phi_1)(e^{\phi_1 T} - 1) + 2\phi_1, \quad (4.5.12)$$

si bien que $C'(T) = \phi_1(\mu + \phi_1)e^{\phi_1 T}$, et $C(0) = 2\phi_1$. On peut alors exprimer (4.5.11) sous la forme

$$A(T) = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{C'(T)}{C(T)} + \frac{\mu + \phi_1}{\sigma^2} \quad (4.5.13)$$

Insérant cette expression dans (4.5.4), on doit alors résoudre

$$B'(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left[-\frac{C'(T)}{C(T)} + \frac{\mu + \phi_1}{2} \right]. \quad (4.5.14)$$

Comme $B(0) = 0$, l'intégration de cette équation entre 0 et T conduit à

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left[-\ln C(\tau) + \frac{\mu + \phi_1}{2} \tau \right], \quad (4.5.15)$$

soit

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left[-\ln \left((\mu + \phi_1)(e^{\phi_1 T} - 1) \right) + \frac{\mu + \phi_1}{2} T + \ln(2\phi_1) \right] \quad (4.5.16)$$

ou encore

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\phi_1 e^{\frac{\mu + \phi_1}{2} T}}{C(T)} \right]. \quad (4.5.17)$$

La solution de l'équation différentielle (4.5.2), sous la condition $P(r, s, s) = 1$, est donc

$$P(r, t, s) = e^{A(T)r(t) + B(T)} \quad \text{et} \quad T = s - t, \quad (4.5.18)$$

avec

$$A(T) = \frac{-2(e^{\phi_1 T} - 1)}{C(T)},$$

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\phi_1 e^{\frac{\kappa + \phi_1}{2} T}}{C(T)} \right],$$

$$C(T) = (\mu + \phi_1)(e^{\phi_1 T} - 1) + 2\phi_1,$$

$\phi_1 = \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}$ et $\mu = \kappa + \zeta$ avec ζ est le prime de risque du marché.

□

Remarque 4.5.1. Dans le chapitre 3, partie II, on verra une méthode numérique pour évaluer l'option américaine sur une obligation sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

Chapitre 5

Évaluation des options européennes en utilisant une méthode de collocation de fonction spline cubique

Sommaire

5.1	Introduction	74
5.2	Formulation du problème	75
5.3	La discrétisation temporelle et la description de la θ-méthode	78
5.4	La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique	80
5.5	Analyse de la stabilité	84
5.6	Des exemples numériques	85
5.6.1	Exemple 1.	86
5.6.2	Exemple 2.	87
5.6.3	Exemple 3.	88
5.6.4	Exemple 4.	88
5.6.5	Exemple 5.	89
5.7	Conclusion	90

5.1 Introduction

L'évaluation des options constitue un domaine de recherche très actif de l'ingénierie financière. C'est un domaine remarquable où les travaux académiques et les démarches des acteurs de marché se fertilisent, s'enrichissent et progressent largement de concert. Après une quarantaine d'années de recherche et de pratique des marchés, nous disposons aujourd'hui d'un ensemble de connaissances et d'outils permettant d'estimer des prix d'option faisant sens et répondant à la logique de marché autorégulatrice

d'arbitrage. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'évaluation d'options européennes selon le modèle Black et Scholes généralisée. Plus précisément, on portera notre attention sur la solution numérique du modèle, qui peut être formulé comme un problème parabolique avec des conditions aux limites et conditions finale (voir [18, 15, 74, 55]). Diverses techniques d'approximation ont été développées pour cette raison, on citera par exemple une méthode des différences finies [15], une méthode de collocation B-spline cubique [55] et l'approche non paramétrique [50]. La méthode de collocation B-spline cubique est largement utilisée dans la pratique. En effet, elle est moins coûteuse numériquement, facile à exécuter et donne un ordre élevé de précision.

Dans [55], les auteurs ont résolu un problème d'évaluation d'option européenne à l'aide de splines du troisième degré, où ils considèrent les points de collocation comme des noeuds de l'espace spline cubique. Dans notre travail, nous considérons un espace spline cubique défini par des noeuds multiples aux limites et nous proposons une nouvelle méthode de collocation simple et efficace en considérant comme collocation des points les noeuds médians de l'espace spline cubique. On observe que la méthode de collocation développée dans notre approche peut améliorer les résultats obtenus par les méthodes de collocation données dans la littérature (voir [55], par exemple). On donnera quelques exemples pour illustrer la différence.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 5.2, nous décrivons brièvement le modèle continu de l'équation de Black-Scholes généralisée pour l'option d'achat européenne. Puis, nous présentons la θ -méthode dans la section 5.3. La section 5.4 est consacrée à la méthode de collocation de spline de l'équation de Black-Scholes généralisée pour l'option d'achat européenne, en utilisant une méthode de collocation de spline cubique. Ensuite, nous montrons la convergence de la spline cubique vers la solution du problème aux limites et nous fournissons une estimation d'erreur. Enfin, certains résultats numériques sont présentés dans la section 5.5 pour valider notre méthodologie et comparer notre méthode avec [55] et [92]. Finalement, une conclusion est donnée à la section 5.6.

5.2 Formulation du problème

Le modèle mouvement brownien géométrique du prix des actifs est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{dS}{S} = (r - d)d\tau + \sigma dW,$$

où S est le prix des actifs, r est le taux d'intérêt sans risque, d est le dividende, σ^2 est le taux de variation sur le rapport prix-qualité et dW est le processus de Wiener standard.

L'équation de Black-Scholes généralisée pour option d'achat européenne est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-d)S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (S, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ C(S, T) = \max(S - K, 0), \quad S \in \mathbb{R}^+, \\ C(0, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, T], \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

où $C(S, \tau)$ est la valeur de l'option d'achat européenne du prix des actifs S et au temps τ , K est le prix d'exercice, T est la date d'échéance, $r(S, \tau) > 0$ est le taux d'intérêt sans risque, $d(S, \tau)$ est le dividende, et $\sigma(S, \tau) > 0$ représente la volatilité de l'actif sous-jacent.

Ici, nous supposons que les fonctions $r(S, \tau)$, $d(S, t)$, et $\sigma(S, \tau)$ sont suffisamment régulières sur le domaine. Quand r , d et σ sont des fonctions constantes, nous obtenons l'équation de Black-Scholes classique pour l'option d'achat européenne. Pour plus de détails sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Black-Scholes généralisée pour l'option d'achat européenne, on se réfère à [56, 41, 61].

La variable S dans le problème (5.2.1) prend des valeurs dans \mathbb{R}^+ . Cependant, d'un point de vue du calcul, nous considérons le problème (5.2.1) défini sur le domaine $(0, S_{\max}) \times (0, T)$, où S_{\max} est un nombre positif suffisamment grand. La solution du problème (5.2.1) est expectée pour vérifier

$$C(S, \tau) \simeq S - Ke^{-\int_{\tau}^T r(S, s) ds},$$

pour $S > 0$ suffisamment grand et $0 \leq \tau \leq \tau_0$ (voir [34]). Ainsi, le problème est complété par la condition aux limites suivante (voir [55]) :

$$C(S_{\max}, \tau) = S_{\max} e^{-\int_{\tau}^T d(S_{\max}, s) ds} - Ke^{-\int_{\tau}^T r(S_{\max}, s) ds}.$$

Par suite, le problème est ainsi modifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S \frac{\partial V}{\partial S} - rC = 0, \quad (S, \tau) \in (0, S_{\max}) \times (0, T), \\ V(S, T) = \max(S - K, 0), \quad S \in [0, S_{\max}], \\ V(0, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, T], \\ V(S_{\max}, \tau) = S_{\max} e^{-\int_{\tau}^T d(S_{\max}, s) ds} - Ke^{-\int_{\tau}^T r(S_{\max}, s) ds}, \quad \tau \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (5.2.2)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (5.2.2) est étudiée dans [61]. Si C et V sont respectivement les solutions des problèmes (5.2.1) et (5.2.2), alors l'erreur d'estimation entre ces solutions est étudiée en détail dans [18, 55, 56].

Comme la condition finale, $\max(S - K, 0)$, n'est pas régulière, le résultat n'est pas assez régulier pour la convergence des approximations numériques, voir par exemple [55]. Pour surmonter cette difficulté, nous approchons la fonction $\Phi(t) = \max(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, par une suite de fonctions régulières $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, satisfaisant : $\Phi_\varepsilon(t) \rightarrow \Phi(t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (simplement). Alors, nous obtenons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial S^2} + (r - d)S \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial S} - rC = 0, \quad (S, \tau) \in (0, S_{\max}) \times (0, T), \\ V_\varepsilon(S, T) = \Phi_\varepsilon(S - K), \quad S \in [0, S_{\max}], \\ V_\varepsilon(0, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, T], \\ V_\varepsilon(S_{\max}, \tau) = S_{\max} e^{-\int_\tau^T d(S_{\max}, s) ds} - K e^{-\int_\tau^T r(S_{\max}, s) ds}, \quad \tau \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (5.2.3)$$

Si V et V_ε sont les solutions des problèmes (5.2.2) et (5.2.3), respectivement, alors l'erreur d'estimation entre ces solutions est considérée dans [15, 55]. Ainsi l'erreur d'estimation que l'on peut obtenir, montre que la suite de solutions du problème (5.2.3) pour $\varepsilon > 0$ est converge vers la solution du problème initial (5.2.2) en choisissant ε assez petit et S_{\max} suffisamment grand. L'opérateur différentiel dans (5.2.3) est dégénéré pour $S = 0$ et retardé dans le temps. En utilisant le changement de variables $S = e^x$ et $t = T - \tau$ dans (5.2.3) nous obtenons une équation parabolique non-dégénéré, voir [55, 56].

Pour ε fixé, on note $u(x, t) := V_\varepsilon(e^x, T - t)$. On pose $S = e^x$ ce qui implique que $x = \ln(S)$, alors il est facile de voir que

$$S \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et

$$S^2 \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial S^2} = S \frac{\partial}{\partial S} \left(S \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial S} \right) - S \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial S} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Par conséquent, le problème (5.2.3) peut s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{BS} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (-\infty, x_{\max}) \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in (-\infty, x_{\max}], \\ u(x_{\min}, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x_{\max}, t) = \phi_R(t), \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (5.2.4)$$

où $L_{BS} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$, avec $\Omega = (-\infty, x_{\max})$, est l'opérateur de Black-Scholes défini par :

$$L_{BS} := \frac{\partial}{\partial t} - \alpha(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - \gamma(x, t) I, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.2.5)$$

et

$$\begin{aligned}
x_{\max} &= \ln(S_{\max}), \\
u(x, t) &= V_{\varepsilon}(e^x, T - t), \\
\alpha(x, t) &= \frac{1}{2}\sigma^2(e^x, T - t), \\
\beta(x, t) &= r(e^x, T - t) - d(e^x, T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(e^x, T - t), \\
\gamma(x, t) &= -r(e^x, T - t), \\
\phi_0(x) &= \Phi_{\varepsilon}(e^x - K), \\
\phi_R(t) &= e^{x_{\max}} e^{-\int_{\tau}^T d(e^{x_{\max}}, T-s) ds} - K e^{-\int_0^t r(e^{x_{\max}}, T-s) ds},
\end{aligned}$$

avec $\alpha(x, t) \geq \tilde{\alpha} > 0$, $\gamma(x, t) \leq \tilde{\gamma} < 0$ sur $\bar{\Omega}$ et α , β , γ , ϕ_0 , ϕ_R sont des fonctions suffisamment régulières.

On tronque l'intervalle $(-\infty, x_{\max})$ en (x_{\min}, x_{\max}) , où x_{\min} est un nombre négatif suffisamment petit. alors le problème (5.2.4) devient (voir [55]) :

$$\begin{cases}
L_{BS}u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega := \Omega_x \times \Omega_T, \\
u(x, 0) = \phi_0(x), & x \in \bar{\Omega}_x, \\
u(x_{\min}, t) = 0, & t \in \bar{\Omega}_t, \\
u(x_{\max}, t) = \phi_R(t), & t \in \bar{\Omega}_t,
\end{cases} \quad (5.2.6)$$

où, $\Omega_x := (x_{\min}, x_{\max})$, $\Omega_T := (0, T)$.

Ici, nous supposons que le problème satisfait une régularité suffisante et des conditions de compatibilité qui garantissent l'existence d'une solution unique $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$ satisfaisant (voir, [41, 61]) :

$$\frac{\partial^{i+j}u(x, t)}{\partial x^i \partial t^j} \leq k \text{ sur } \bar{\Omega}; \quad 0 \leq j \leq 3 \text{ et } 0 \leq i + j \leq 4,$$

où k est une constante.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons le modèle (5.2.6) pour un traitement numérique.

5.3 La discrétisation temporelle et la description de la θ -méthode

La période d'observation doit être spécifiée en premier et est fixée à partir d'aujourd'hui (point dans le temps $t = 0$) au point dans le temps T . Cette période sera divisée en M intervalles de temps de longueur $\Delta t = \frac{T}{M}$, on note $t_m = m \Delta t$. Le prix du sous-jacent (soit la valeur du projet ou de la valeur d'un titre double avec le même profil de risque) est supposé rester dans Ω_x .

Nous discrétisons la variable temps dans (5.2.6) au moyen de la θ -méthode, $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Alors la semi-discrétisation donne le système d'équations suivant :

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} - \theta L_x^m u^{m+1} - (1 - \theta) L_x^m u^m = 0.$$

Par suite,

$$(I - \theta \Delta t L_x^m) u^{m+1} = [I + (1 - \theta) \Delta t L_x^m] u^m, \quad (5.3.1)$$

où, $L_x^m : C(\overline{\Omega_x}) \cap C^2(\Omega_x) \rightarrow C(\Omega_x)$ est l'opérateur différentiel défini par :

$$L_x^m = \alpha^{m+\theta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^{m+\theta} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^{m+\theta} I,$$

avec

u^m une approximation de $u(x, t_m)$,

$$\alpha^{m+\theta} = \alpha(x, t_m + \theta \Delta t),$$

$$\beta^{m+\theta} = \beta(x, t_m + \theta \Delta t),$$

$$\gamma^{m+\theta} = \gamma(x, t_m + \theta \Delta t).$$

Alors, le problème approché du problème (5.2.6) est donné par :

$$\begin{cases} p^{m+\theta}(x) u_{xx}^{m+1} + q^{m+\theta}(x) u_x^{m+1} + l^{m+\theta}(x) u^{m+1} = g^{m+\theta}, & x \in \Omega_x, \\ u^0(x) = \phi_0(x), & x \in \Omega_x, \\ u^{m+1}(x_{\min}) = 0, & 0 \leq m < M, \\ u^{m+1}(x_{\max}) = \phi_R^{m+1}, & 0 \leq m < M, \end{cases} \quad (5.3.2)$$

où, pour chaque $m \geq 0$ et pour toute $x \in \Omega_x$, nous avons

$$p^{m+\theta}(x) = \theta \Delta t \alpha^{m+\theta}(x),$$

$$q^{m+\theta}(x) = \theta \Delta t \beta^{m+\theta}(x),$$

$$l^{m+\theta}(x) = \theta \Delta t \gamma^{m+\theta}(x) - 1,$$

$$g^{m+\theta}(x) = -[I + (1 - \theta) \Delta t L_x^m] u^m,$$

$$\phi_R^{m+1} = \phi_R(x_{\max}, t_{m+1}).$$

Nous avons $u^0(x) = \phi_0(x)$, alors, pour $0 \leq m \leq M - 1$, u^m étant connu, nous obtenons u^{m+1} comme solution du problème (5.3.2).

Le théorème suivant prouve l'ordre de convergence de la solution u^m vers $u(x, t_m)$.

Théorème 5.3.1. (Kadalbajoo et al. [55]) Le problème (5.3.2) est du second ordre de convergence pour $\theta = \frac{1}{2}$ et du premier ordre de convergence pour $\theta \in]\frac{1}{2}, 1]$ c-à-d,

$$\begin{aligned} \|u(x, t_m) - u^m\|_\infty &\leq Cte(\Delta t)^2 \text{ pour } \theta = \frac{1}{2} \\ \|u(x, t_m) - u^m\|_\infty &\leq Cte \Delta t \text{ pour } \theta \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Pour toute $m \geq 0$, le problème (5.3.2) admet une solution unique et peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + l(x)u(x) = g(x), & x \in \Omega_x \\ u(x_{\min}) = 0, \\ u(x_{\max}) = \phi_R. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la solution du problème (5.3.3).

5.4 La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique

Dans cette section, nous construisons une spline cubique dans Ω_x qui s'approche de la solution u du problème (5.3.3).

Soit $\Theta = \{x_{\min} = x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{\max}\}$ une subdivision de l'intervalle Ω_x . Sans perte de généralité, nous avons pris $x_i = x_{\min} + ih$, où $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$. Notons par $\mathbb{S}_4(\Omega_x, \Theta) = \mathbb{P}_3^2(\Omega_x, \Theta)$ l'espace des polynômes par morceaux de degré 3 dans la subdivision Θ et de classe \mathcal{C}^2 sur Ω_x . Soit B_i , $i = -3, \dots, n-1$, une B-spline de degré 3 associée à Θ . Ces B-splines sont positives et forment une base de l'espace $\mathbb{S}_4(\Omega_x, \Theta)$.

Proposition 5.4.1. Soit u la solution du problème (5.3.3). Alors, il existe une interpolation spline cubique unique, $S \in \mathbb{S}_4(\Omega_x, \Theta)$ de u qui satisfait :

$$S(\tau_i) = u(\tau_i), \quad i = 0, \dots, n+2,$$

où $\tau_0 = x_0$, $\tau_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = 1, \dots, n$, $\tau_{n+1} = x_{n-1}$ et $\tau_{n+2} = x_n$.

Démonstration. En utilisant le théorème de Schoenberg-Whitney (voir [30]), il est facile de voir qu'il existe une spline cubique unique qui interpole u aux points τ_i , $i = 0, \dots, n+2$. \square

Si on pose $S = \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_i$, alors en utilisant les conditions aux limites du problème (5.3.3), on obtient $c_{-3} = S(x_{\min}) = u(x_{\min}) = 0$ et $c_{n-1} = S(x_{\max}) = u(x_{\max}) = \phi_R$. D'où

$$S = \mu_1 + S_1, \quad \text{avec } \mu_1 = c_{n-1} B_{n-1} \text{ et } S_1 = \sum_{i=-2}^{n-2} c_i B_i.$$

De plus, comme l'interpolation avec les splines de degré d donne des erreurs de l'ordre $O(h^{d+1})$ pour l'interpolation, et de l'ordre $O(h^{d+1-r})$ pour la r -ième dérivée de l'interpolant (voir [30], par exemple), alors pour toute $u \in \mathcal{C}^4(\Omega_x)$ nous avons

$$p(\tau_i) S_1^{(2)}(\tau_i) + q(\tau_i) S_1^{(1)}(\tau_i) + l(\tau_i) S_1^{(0)}(\tau_i) = f(\tau_i) + O(h^2), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (5.4.1)$$

où

$$\begin{aligned} f(\tau_i) &= g(\tau_i) - \lambda(\tau_i), \\ \lambda(\tau_i) &= p(\tau_i) \mu_1^{(2)}(\tau_i) + q(\tau_i) \mu_1^{(1)}(\tau_i) + l(\tau_i) \mu_1^{(0)}(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

La méthode de collocation spline cubique, que nous présentons dans ce chapitre, consiste à construire numériquement une spline cubique $\tilde{S} = \sum_{i=-3}^{n-1} \tilde{c}_i B_i$ qui satisfait le problème (5.3.3) aux points $\tau_i, i = 0, \dots, n+2$. Il est facile de voir que $\tilde{c}_{-3} = 0, \tilde{c}_{n-1} = \phi_R$, et les coefficients $\tilde{c}_i, i = 1, \dots, n-1$ vérifient les conditions suivantes :

$$p(\tau_i) \tilde{S}_1^{(2)}(\tau_i) + q(\tau_i) \tilde{S}_1^{(1)}(\tau_i) + l(\tau_i) \tilde{S}_1^{(0)}(\tau_i) = f(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (5.4.2)$$

On pose $C = [c_{-2}, \dots, c_{n-2}]^T$ et $\tilde{C} = [\tilde{c}_{-2}, \dots, \tilde{c}_{n-2}]^T$. Ainsi, en utilisant les équations (5.4.1) et (5.4.2), on obtient :

$$(PA_h^{(2)} + QA_h^{(1)} + LA_h^{(0)})C = F + E, \quad (5.4.3)$$

$$(PA_h^{(2)} + QA_h^{(1)} + LA_h^{(0)})\tilde{C} = F, \quad (5.4.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} F &= [f_1, \dots, f_{n+1}]^T, \text{ and } f_i = \frac{1}{\Delta t} f(\tau_i), \\ E &= [O(\frac{h^2}{\Delta t}), \dots, O(\frac{h^2}{\Delta t})]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ P &= (\text{diag}(\theta \alpha^{m+\theta}(\tau_i)))_{1 \leq i \leq n+1}, \\ Q &= (\text{diag}(\theta \beta^{m+\theta}(\tau_i)))_{1 \leq i \leq n+1}, \\ L &= (\text{diag}(\theta \gamma^{m+\theta}(\tau_i) - \frac{1}{\Delta t}))_{1 \leq i \leq n+1}, \\ A_h^{(k)} &= (B_{-3+j}^{(k)}(\tau_i))_{1 \leq i, j \leq n+1}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

La notation $B^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de B et $A_h^{(k)} = \frac{1}{h^k} A_h$ pour $k = 0, 1, 2$. La matrice A_2 est indépendante de h et est donnée par (3.3.7). Cette matrice est inversible d'après proposition (3.3.2), ce qui permet d'écrire les relations (5.4.3) et (5.4.4) sous la forme suivante :

$$PA_2(I + U + V)C = h^2F + h^2E \quad (5.4.5)$$

$$PA_2(I + U + V)\tilde{C} = h^2F, \quad (5.4.6)$$

avec

$$U = hA_2^{-1}P^{-1}QA_1 \quad (5.4.7)$$

$$V = h^2A_2^{-1}P^{-1}LA_0. \quad (5.4.8)$$

Pour estimer $\|C - \tilde{C}\|$, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.4.1. On pose $\rho = \frac{\|A_2^{-1}\|_\infty}{\tilde{\alpha}}$.

Si $h^2 < \frac{\theta \Delta t}{2\rho}$, alors $I + U + V$ is inversible.

Démonstration. D'après la relation (5.4.7), on a

$$\|U\|_\infty \leq h\|A_2^{-1}\|_\infty\|P^{-1}\|_\infty\|Q\|_\infty\|A_1\|_\infty \leq h\rho\|A_1\|_\infty \max_{i,m} \beta(\tau_i, t_m + \theta \Delta t).$$

Pour h suffisamment petit, on obtient

$$\|U\|_\infty < \frac{1}{4}. \quad (5.4.9)$$

Nous avons

$$\min_{i,m} \alpha(\tau_i, t_m + \theta \Delta t) \geq \tilde{\alpha} > 0 \text{ et } \|A_0\|_\infty \leq 1.$$

D'après la relation (5.4.8), on obtient

$$\begin{aligned} \|V\|_\infty &\leq h^2\|A_2^{-1}\|_\infty\|P^{-1}\|_\infty\|L\|_\infty\|A_0\|_\infty \\ &\leq h^2 \frac{\|A_2^{-1}\|_\infty}{\tilde{\alpha}} \max_{i,m} |\gamma(\tau_i, t_m + \theta \Delta t) - \frac{1}{\theta \Delta t}| \\ &\leq h^2 \rho \max_{i,m} |\gamma(\tau_i, t_m + \theta \Delta t) - \frac{1}{\theta \Delta t}| \\ &\leq h^2 \rho \max_{i,m} r(e^{\tau_i}, T - t_m - \theta \Delta t) + \frac{h^2 \rho}{\theta \Delta t}. \end{aligned}$$

Pour h suffisamment petit, on peut prendre $h^2 \rho \max_{i,m} r(e^{\tau_i}, T - t_m - \theta \Delta t) < \frac{1}{4}$.

Comme $\frac{h^2 \rho}{\theta \Delta t} < \frac{1}{2}$, on a

$$\|V\|_\infty < \frac{3}{4}. \quad (5.4.10)$$

Ainsi, $\|U + V\|_\infty \leq \|U\|_\infty + \|V\|_\infty < 1$, et donc $I + U + V$ est inversible, \square

Proposition 5.4.2. Si $h^2 \leq \frac{\theta \Delta t}{2\rho}$, alors il existe une constante cte qui ne dépend que des fonctions p , q , l et g telle que

$$\|C - \tilde{C}\| \leq cte \cdot h^2. \quad (5.4.11)$$

Démonstration. Supposons que $h^2 \leq \frac{\theta \Delta t}{4\rho}$. D'après le lemme 5.4.1 et les relations (5.4.5) et (5.4.6), on a $C - \tilde{C} = h^2(I + U + V)^{-1}(PA_2)^{-1}E$. Comme $E = O(\frac{h^2}{\Delta t})$, alors il existe une constante K_1 tel que $\|E\| \leq K_1 \frac{h^2}{\Delta t}$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \|C - \tilde{C}\| &\leq h^2 \|(I + U + V)^{-1}\|_{\infty} \|P^{-1}\|_{\infty} \|A_2^{-1}\|_{\infty} \|E\| \\ &\leq \frac{h^2 \rho}{\theta \Delta t} \|(I + U + V)^{-1}\|_{\infty} K_1 h^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|(I + U + V)^{-1}\|_{\infty} K_1 h^2. \end{aligned}$$

D'autre part, à partir des relations (5.4.9) et (5.4.10), on obtient $\|U + V\|_{\infty} < 1$, comme

$$\|(I + U + V)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \|U + V\|_{\infty}} = cte, \text{ où } cte \text{ est une constante positive}$$

Enfin, on en déduit que

$$\|C - \tilde{C}\| \leq cte \cdot h^2.$$

□

Maintenant, en résumant les résultats établis dans ce chapitre, on peut énoncer le résultat principal suivant :

Proposition 5.4.3. La spline d'approximation \tilde{S} converge quadratiquement vers la solution exacte u du problème (5.3.3), c-à-d, $\|u - \tilde{S}\|_{\infty} = O(h^2)$.

Démonstration. Il est bien connu que $\|u - S\|_{\infty} = O(h^4)$ (voir [30]), c'est-à-dire $\|u - S\|_{\infty} \leq Kh^4$, où K est une constante positive. D'autre part, nous avons

$$S(x) - \tilde{S}(x) = \sum_{j=-2}^{n-2} (c_j - \tilde{c}_j) B_j(x).$$

Par conséquent, en utilisant (5.4.11) et $\sum_{j=-2}^{n-2} B_j(x) \leq 1$, nous obtenons

$$|S(x) - \tilde{S}(x)| \leq \|C - \tilde{C}\| \sum_{j=-2}^{n-2} B_j(x) \leq \|C - \tilde{C}\| \leq cte \cdot h^2.$$

Comme $\|u - \tilde{S}\|_{\infty} \leq \|u - S\|_{\infty} + \|S - \tilde{S}\|_{\infty}$, on en déduit le résultat annoncé.

□

5.5 Analyse de la stabilité

Nous allons maintenant montrer que la méthode de collocation spline cubique est stable.

La procédure de collocation pour résoudre les problèmes aux limites (5.3.3) donnée par (5.4.6), c'est à-dire

$$A\tilde{C} = G \text{ avec } A = PA_2(I + U + V) \text{ et } G = h^2F,$$

est dite stable si, pour une perturbation des données, c'est à dire,

$$(A + \Gamma)\tilde{\tilde{C}} = G + \delta \text{ et } \tilde{\tilde{S}}(t_i) = \tilde{S}(t_i) + \delta_i \text{ pour } i = 1, \dots, n + 1$$

il existe des constantes positives k_1 , k_2 et k_3 indépendantes de n et G dans $\bar{\Omega}_x$, tels que pour tout n suffisamment grand, on a

$$(A + \Gamma)\tilde{\tilde{C}} = G + \delta. \tag{5.5.1}$$

L'équation (5.5.1) admet une solution unique pour $\|\Gamma\|_\infty \leq k_1$ et

$$\|\tilde{\tilde{S}} - \tilde{S}\|_\infty \leq k_2\|\Gamma\|_\infty + k_3\|\tilde{\delta}\|_\infty$$

avec, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1})$ et $\tilde{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n+2})$.

Les fonctions \tilde{S} et $\tilde{\tilde{S}}$ sont uniquement déterminés par \tilde{c}_j et $\tilde{\tilde{c}}_j$, $-2 \leq j \leq n - 2$ dans (5.4.6) et (5.5.1) respectivement.

Théorème 5.5.1. *La procédure de collocation (5.4.6) pour résoudre le problème aux limites (5.3.3) est stable.*

Démonstration. On a $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|A_2^{-1}\|_\infty \|(I + U + V)^{-1}\|_\infty \leq \frac{\rho}{1 - \|U + V\|_\infty} = k$, pour $n \geq n_0$, où n_0 est suffisamment grand et k est une constante positive. Choisissons une constante positive $k_1 < \frac{1}{2k}$. D'ailleurs, chaque fois que $\|\Gamma\|_\infty \leq k_1$, $(A + \Gamma)^{-1} = (I + A^{-1}\Gamma)^{-1}A^{-1}$ existe parce que

$$\|A^{-1}\Gamma\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\Gamma\|_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

En fait $\|(A + \Gamma)^{-1}\|_\infty \leq 2k$, pour $n \geq n_0$. Après soustraction de (5.4.6) et (5.5.1), on obtient

$$(A + \Gamma)\tilde{\tilde{C}} - A\tilde{C} - \Gamma\tilde{C} = \delta - \Gamma\tilde{C},$$

ce qui implique que

$$\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\|_\infty \leq 2k(\|\delta\|_\infty + \|\Gamma\|_\infty \|\tilde{C}\|_\infty).$$

On a supposé que $\alpha, \beta, \gamma, \phi_0$, et ϕ_R sont des fonctions suffisamment régulières sur $\bar{\Omega}$ et

$$\left| \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial x^i} \right| \leq k \text{ sur } \bar{\Omega} \text{ pour } 0 \leq i \leq 4,$$

donc $\alpha^{m+\theta}, \beta^{m+\theta}, \gamma^{m+\theta}, \phi_0^{m+\theta}$, et $\phi_R^{m+\theta}$ sont des fonctions suffisamment régulières sur $\bar{\Omega}$ et

$$\left| \frac{\partial^i u^{m+1}}{\partial x^i} \right| \leq k \text{ sur } \bar{\Omega} \text{ pour } 0 \leq i \leq 4, \text{ et } m = 0, 1, \dots, M-1.$$

En outre, on a $u(t_i) = S(t_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$ et comme $\|A^{-1}\|_\infty \leq k$ et $\|\tilde{C}\|_\infty \leq r$, avec $r > 0$, Alors

$$\|\tilde{\tilde{C}} - \tilde{C}\|_\infty \leq 2k(\|\delta\|_\infty + r\|\Gamma\|_\infty). \quad (5.5.2)$$

De la relation (5.5.2) et du fait que $\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S} + \delta_i$ pour $i = 0, \dots, n+2$, on a

$$\max_{-2 \leq j \leq n-2} |\tilde{\tilde{c}}_j - \tilde{c}_j| \leq 2kr\|\Gamma\|_\infty + (1+2k)\|\delta\|_\infty.$$

Par ailleurs,

$$\tilde{\tilde{S}}(x) - \tilde{S}(x) = \sum_{-2 \leq j \leq n-2} (\tilde{\tilde{c}}_j - \tilde{c}_j) B_j(x).$$

Donc

$$|\tilde{\tilde{S}}(t_i) - \tilde{S}(t_i)| \leq \max_{-2 \leq j \leq n-2} |\tilde{\tilde{c}}_j - \tilde{c}_j| \sum_{-2 \leq j \leq n-2} |B_j(t_i)|, \text{ pour } i = 1, \dots, n+1,$$

et comme $\sum_{-2 \leq j \leq n-2} |B_j(t_i)| \leq 1$, alors

$$\|\tilde{\tilde{S}} - \tilde{S}\|_\infty \leq k_2\|\Gamma\|_\infty + k_3\|\delta\|_\infty,$$

avec $k_2 = kr$ et $k_3 = 1 + 2k$. □

5.6 Des exemples numériques

Dans cette section, nous vérifions numériquement les résultats théoriques obtenus dans la section précédente. Si la solution exacte est connue, alors à l'instant $t = T$ l'erreur maximale E peut être calculée comme :

$$E = \max_{x \in [x_{min}, x_{max}]} |S^{M,N}(x, T) - u(x, T)|.$$

Autrement, il peut être estimée par le principe de double maille suivant :

$$E_{M,N} = \max_{x \in [x_{min}, x_{max}]} |S^{M,N}(x, T) - S^{2M,2N}(x, T)|,$$

où $S^{M,N}(x, T)$ est la solution numérique sur la $M + 1$ grille dans l'espace et $N + 1$ grille dans le temps, et $S^{2M,2N}(x, T)$ est la solution numérique sur la $2M + 1$ grille dans l'espace et $2N + 1$ grille en temps.

La solution exacte de l'équation de Black-Scholes classique pour l'option européenne d'achat est (see [9]) :

$$u(x, t) = N(d_1)e^{x-dt} - KN(d_2)e^{-rt},$$

$$\text{où } N(x) = \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)dy,$$

$$d_1 = \frac{x - \ln(K) + (r - d + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}.$$

Dans cette section, nous appliquons la méthode numérique développée dans notre travail à trois exemples présentés dans le document des auteurs Kadalbajoo et al. [55] et deux exemples présentés dans le document des auteurs Zhongdi et al. [92]. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus à ceux donnés dans [55] et [92].

Dans les exemples numériques 1, 2, et 3, nous choisissons $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$ et $\varepsilon = 10^{-6}$. La comparaison des valeurs d'erreur maximum entre la méthode développée dans ce chapitre avec celle développée dans [55] sera donnée à cinq valeurs différentes du nombre de pas d'espace $N = 10, 20, 40, 80, 160$ et du nombre de pas de temps $M = N$, pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$.

Dans les exemples numériques 4 et 5, nous choisissons $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. La comparaison des valeurs d'erreur maximum entre la méthode développée dans ce chapitre avec celle développée dans [55] sera donnée à quatre valeurs différentes du nombre de pas d'espace $N = 128, 256, 512, 1024$ et du nombre de pas de temps $M = 1024$, pour $\theta = \frac{1}{2}$.

5.6.1 Exemple 1.

Ici, nous considérons l'équation de Black-Scholes (5.3.3) pour l'option d'achat européenne à paramètres constants $\sigma = 0.4$, $r = 0.06$, $d = 0.02$, $K = 1$ et $T = 1$. Nous menons des expériences sur les différentes valeurs N , M et θ . Le tableau 5.6.1 indique les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos simulations numériques et celle obtenues dans [55]. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues dans [55].

Tab. 5.6.1: Les résultats numériques pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$.

$M = N$	10	20	40	80	160
For $\theta = 0.5$					
notre max_error	3.05×10^{-3}	7.31×10^{-4}	1.84×10^{-4}	4.47×10^{-5}	1.13×10^{-5}
max_error dans [55]	9.54×10^{-3}	2.43×10^{-3}	6.20×10^{-4}	1.55×10^{-4}	3.89×10^{-5}
For $\theta = 1$					
notre max_error	7.50×10^{-3}	2.10×10^{-3}	6.87×10^{-4}	2.31×10^{-4}	9.92×10^{-5}
max_error dans [55]	1.13×10^{-2}	3.24×10^{-3}	1.08×10^{-3}	4.14×10^{-4}	1.76×10^{-4}

5.6.2 Exemple 2.

Le deuxième exemple est une option d'achat européenne de volatilité continue suivant σ , du taux d'intérêt r et les dividendes d :

$$\sigma(e^x, T-t) = 0.4[2 + (T-t) \sin(e^x)],$$

$$r(e^x, T-t) = 0.06(1 + t.e^{-e^x}),$$

$$d(e^x, T-t) = 0.02.e^{-t-e^x},$$

$$K = 1, T = 1.$$

Nous menons des expériences sur les différentes valeurs de N , M et θ . Le tableau 5.6.2 montre les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos simulations numériques et celle obtenue dans [55]. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues dans [55].

Tab. 5.6.2: Les résultats numériques pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$.

$M = N$	10	20	40	80	160
For $\theta = 0.5$					
notre max_error	5.39×10^{-3}	1.38×10^{-3}	3.15×10^{-4}	7.93×10^{-5}	1.97×10^{-5}
max_error dans [55]	9.71×10^{-3}	2.42×10^{-3}	6.05×10^{-4}	1.51×10^{-4}	3.78×10^{-5}
For $\theta = 1$					
notre max_error	9.50×10^{-3}	2.65×10^{-3}	8.01×10^{-4}	2.41×10^{-4}	9.73×10^{-5}
max_error dans [55]	1.36×10^{-2}	4.90×10^{-3}	1.96×10^{-3}	8.60×10^{-4}	4.00×10^{-4}

5.6.3 Exemple 3.

Dans le troisième exemple, nous choisissons une option d'achat européenne pour tester notre schéma numérique à la volatilité continue suivant σ , du taux d'intérêt r et les dividendes d :

$$\sigma(e^x, T-t) = 0.4(1 + (T-t)\sin(-e^x)),$$

$$r(e^x, T-t) = 0.1 + 0.001\sin(10(T-t)e^x),$$

$$d(e^x, T-t) = 0.02(T-t)\sin(e^x),$$

$$K = 1, T = 1.$$

Nous menons des expériences sur les différentes valeurs de N , M et θ . Le tableau 5.6.3 donne les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos expériences numériques. Comme dans les exemples précédents, les résultats de la méthode numérique proposée améliorent celles obtenues dans [55].

Tab. 5.6.3: Les résultats numériques pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$

$M = N$	10	20	40	80	160
For $\theta = 0.5$					
notre max_error	2.42×10^{-3}	6.17×10^{-4}	1.55×10^{-4}	3.91×10^{-5}	9.97×10^{-6}
max_error dans [55]	7.13×10^{-3}	1.81×10^{-3}	4.56×10^{-4}	1.14×10^{-4}	2.85×10^{-5}
For $\theta = 1$					
notre max_error	3.30×10^{-3}	9.93×10^{-4}	3.11×10^{-4}	1.28×10^{-4}	5.15×10^{-5}
max_error dans [55]	8.50×10^{-3}	2.73×10^{-3}	9.75×10^{-4}	3.94×10^{-4}	1.74×10^{-4}

5.6.4 Exemple 4.

Dans le quatrième exemple, nous choisissons une option d'achat européenne pour tester notre schéma numérique à la volatilité σ est continue, du taux d'intérêt r et les dividendes d sont des paramètres constants :

$$\sigma(e^x, T-t) = 0.2(1 + (T-t)e(-e^x)),$$

$$r(e^x, T-t) = 0.06,$$

$$d(e^x, T-t) = 0,$$

$$K = 25, T = 1.$$

Nous menons des expériences sur les différentes valeurs de N , M et θ . Le tableau 5.6.4 donne les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos expériences numériques. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues dans [92].

Tab. 5.6.4: Les résultats numériques pour $\theta = \frac{1}{2}$

N	128	256	512	1024
M	1024			
notre max_error	2.3750×10^{-4}	6.2115×10^{-5}	1.8269×10^{-5}	7.3077×10^{-6}
max_error dans [92]	6.8027×10^{-2}	3.1258×10^{-2}	1.2588×10^{-2}	3.4189×10^{-3}

5.6.5 Exemple 5.

Dans le dernier exemple, nous choisissons une option d'achat européenne pour tester notre schéma numérique à la volatilité σ est continue, du taux d'intérêt r et les dividendes d sont des paramètres constants :

$$\sigma(e^x, T - t) = 0.4(2 + \sin(e^x)),$$

$$r(e^x, T - t) = 0.06,$$

$$d(e^x, T - t) = 0,$$

$$K = 25, T = 1.$$

Nous menons des expériences sur les différentes valeurs de N , M et θ . Le tableau 5.6.5 donne les valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos expériences numériques. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues dans [92].

Tab. 5.6.5: Les résultats numériques pour $\theta = \frac{1}{2}$

N	128	256	512	1024
M	1024			
notre max_error	2.1875×10^{-5}	5.7212×10^{-6}	1.6827×10^{-6}	6.7308×10^{-7}
max_error dans [92]	5.7124×10^{-2}	1.9498×10^{-2}	5.1550×10^{-3}	1.0586×10^{-3}

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes généralisée, la modélisation d'évaluation de l'option d'achat européenne. Nous avons proposé un schéma de discrétisation en temps. Puis, nous avons développé et analysé une méthode de collocalisation spline cubique pour l'approximation des solutions du problème semi-discrétisé. Nous avons fourni une estimation de l'erreur de l'ordre $O(h^2)$ par rapport à la norme : $\| \cdot \|_\infty$. Des expériences numériques ont été réalisées sur cinq modèles connus pour valider la convergence et l'efficacité de la méthode. Les résultats des calculs montrent que la méthode numérique proposée améliorent celles obtenues dans [55] et [92]. De plus, dans notre travail, on a utilisé une spline cubique relative à un vecteur de nœuds multiples aux extrémités pour augmenter le nombre de points de contrôle et pour éviter les pics aux extrémités, par contre les auteurs Kadalbajoo et al. [55] ont utilisé une spline cubique relative à un vecteur de nœuds simple, fait apparaître une série de pics aux extrémités.

Chapitre 6

Évaluation des options américaines sur les obligations avec utilisation d'une méthode de collocation de fonction spline cubique

Sommaire

6.1	Introduction	91
6.2	Le problème de pénalisation	93
6.3	Discrétisation temporelle et description de la méthode trapézoïdale	95
6.4	La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique	100
6.5	La convergence de la méthode	104
6.6	Exemple numérique	105
6.7	Conclusion	107

6.1 Introduction

D'habitude, la notion de taux d'intérêt semble être quelque chose de naturel qu'utilisé par le monde de finance. La gestion du risque de taux d'intérêt, c'est-à-dire le contrôle de l'évolution des flux de trésorerie futurs en raison des fluctuations des taux d'intérêt, est une question d'une grande complexité. Ainsi, l'évaluation et la couverture des produits en fonction, en grande partie, des taux d'intérêt sont nécessaires afin de créer des modèles mathématiques.

Ici, nous adoptons le modèle *CIR* développé par Cox, Ingersoll et Ross en 1985 [25], est l'un des modèle de structure par terme le plus largement utilisé, parcequ'il a plusieurs caractéristiques favorables. Divers résultats mathématiques sur *CIR* étaient introduits par [39]. Le modèle *CIR* est défini comme

l'unique solution forte de

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW,$$

où dW est l'incrément d'un processus de Wiener, θ est le niveau du taux de long terme à court terme, $\kappa > 0$ représente le progrès de réversion, et $\sigma^2 r$ est la variance où σ est une constante strictement positive appelée volatilité. En pratique, r est positif, ce qui impose la contrainte $0 < \sigma^2 < 2\kappa\theta$ (condition de Feller's ([25])). Dand [25], il a été démontré que le prix $P(r, t, s)$ d'une obligation d'actualisation pure avec la valeur nominale un dollar à sa date d'échéance s est donnée comme suit :

$$P(r, t, s) = A(t, s)e^{-B(t, s)r},$$

avec

$$A(t, s) = \left[\frac{\phi_1 e^{\phi_2(s-t)}}{\phi_2 [e^{\phi_1(s-t)} - 1] + \phi_1} \right]^{\phi_3}, \quad B(t, s) = \frac{e^{\phi_1(s-t)} - 1}{\phi_2 [e^{\phi_1(s-t)} - 1] + \phi_1}$$

$$\phi_1 = \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2}, \quad \phi_2 = \frac{\mu + \phi_1}{2}, \quad \phi_3 = \frac{2\theta}{\sigma^2}, \quad \bar{\theta} = \kappa\theta, \quad \mu = \kappa + \zeta,$$

et ζ est la prime de risque du marché.

Nous nous concentrons sur la résolution numérique du modèle *CIR* qui peut être formulé comme un problème de complémentarité parabolique aux dérivées partielles (CPD) avec condition au bord et condition finale (voir [3, 60, 86]). Ce problème de complémentarité n'est pas, en général, analytiquement résoluble. Par conséquent, il existe plusieurs techniques d'approximation qui ont été développées pour la résolution du problème d'évaluation des options américaines sur les obligations. L'approximation numérique par des méthodes de pénalité a été considérée, à savoir par [6, 28, 3, 37]. Dans ce chapitre, nous développons une nouvelle méthode numérique pour la résolution d'un problème (CPD) à l'aide d'une méthode de collocation de spline cubique et la méthode de Newton généralisée. Tout d'abord, le problème (CPD) est approché par une suite de problèmes d'équations non linéaires à l'aide de la méthode de pénalité donnée dans [87, 90]. Puis, on montre que l'équation pénalisée converge vers celle du problème (CPD) avec un ordre arbitraire. Ce taux de convergence, ordre arbitraire, permet d'atteindre la précision requise de la solution avec un petit paramètre de pénalité. Un schéma numérique pour résoudre l'EDP non linéaire pénalisée est également proposé. Ensuite, nous appliquons la méthode de collocation de spline pour approcher la solution du problème aux limites du second ordre associé. Le problème discret est formulé de manière à trouver les coefficients splines cubiques d'un système non régulier $\varphi(Y) = Y$, où $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Afin de résoudre l'équation non régulière, nous appliquons la méthode de Newton généralisée (voir [16, 17, 81], par exemple). Nous prouvons que la méthode de collocation de spline cubique converge quadratiquement à condition qu'une propriété, couplant le paramètre de pénalisation λ et le paramètre de discrétisation h , soit satisfaite.

L'organisation de ce chapitre est la suivante : Dans la section 6.2, nous présentons une méthode de pénalisation pour approcher le problème (CPD) par une suite de problèmes de second ordre aux limites. Dans la section 6.3 nous construisons une spline cubique, approchant la solution du problème aux limites. La section 6.4 est consacrée à la présentation de la méthode de Newton généralisée. Dans la section 6.5, nous montrons la convergence de la spline cubique vers la solution du problème limite et nous fournissons une estimation d'erreur. Enfin, certains résultats numériques sont présentés dans la section 6.6 pour valider notre méthode et la comparer avec [91].

6.2 Le problème de pénalisation

Maintenant, soit $u(r, t)$ une option de vente américaine sur obligation à coupon zéro avec un prix strike K , lorsque le titulaire peut recevoir une payoff donnée $\Lambda(r, t)$ à la date d'échéance T . L'introduction de la transformation d'un temps inverse $\tau = T - t$, le problème du prix des options peut être formulé comme un problème d'équations aux dérivées partielles de complémentarité suivant (voir [88]).

$$\begin{cases} Lu(r, \tau) \geq 0 \\ u(r, \tau) - \Lambda(r, \tau) \geq 0 \\ Lu(r, \tau) \cdot (u(r, \tau) - \Lambda(r, \tau)) = 0 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

presque partout (p.p.) dans $(0, +\infty) \times (0, T)$, où

$$L = \frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (\bar{\theta} - \mu r) \frac{\partial}{\partial r} - rI \right]$$

est un opérateur différentiel parabolique partiel dégénéré.

La condition initiale est :

$$u(r, 0) = \Lambda(r, 0) = \max[K - p(r, T, s), 0] \quad \text{pour une option de vente}$$

et les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u(0, \tau) &= \Lambda(0, \tau), \quad r \longrightarrow 0, \\ u(r, \tau) &= \Lambda(r, \tau), \quad r \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

A la fin du calcul, il est nécessaire de limiter r pour un ensemble de région finie $I = [0, R]$, où R désigne un nombre suffisamment important pour assurer l'exactitude de la solution (voir [88]). Par conséquent, la relation (6.2.2) devient :

$$u(R, \tau) = \Lambda(R, \tau)$$

Remarque 6.2.1. *Il est important de noter que $T < s$ et $K < p(0, T, s) = A(T, s)$ pour une option d'achat ou $K > A(T, s)$ pour une option de vente, dans le cas contraire l'option ne peut être exercée et serait sans valeur.*

Soit λ un nombre réel positif. Le problème de pénalisation est donné par le problème aux limites suivant (voir [89]) :

$$\begin{cases} Lu_\lambda(r, t) = F(t, u_\lambda(r, t)) & (r, t) \in \Omega, \\ u_\lambda(r, 0) = \psi_0(r) & r \in \overline{\Omega_R}, \\ u_\lambda(0, t) = \psi_1(t) & t \in \overline{\Omega_T}, \\ u_\lambda(R, t) = \psi_2(t) & t \in \overline{\Omega_T}, \end{cases} \quad (6.2.3)$$

où, $\Omega = \Omega_R \times \Omega_T = (0, R) \times (0, T)$ et $L : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ est un opérateur défini par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \beta(r) \frac{\partial}{\partial r} - \gamma(r)I.$$

et

$$\begin{aligned} F(t, u_\lambda(r, t)) &= \lambda[\Lambda(r, t) - u_\lambda(r, t)]_+, \\ \alpha(r) &= \frac{1}{2}\sigma^2 r, \quad \beta(r) = \bar{\theta} - \mu r, \quad \gamma(r) = -r, \\ \psi_0(r) &= \Lambda(r, 0), \quad \psi_1(t) = \Lambda(0, t), \quad \psi_2(t) = \Lambda(R, t). \end{aligned}$$

Avec $\alpha(r) \geq \tilde{\alpha} > 0$, $\gamma(r) \leq \tilde{\gamma} < 0$ sur $\overline{\Omega}$ et α , β , γ , ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 , sont des fonctions suffisamment régulières.

Ici, nous supposons que le problème satisfait une régularité suffisante et des conditions de compatibilité qui garantissent que le problème admet une solution unique $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$ satisfaisant (voir, [55, 41, 61]) :

$$\left| \frac{\partial^{i+j} u_\lambda(r, t)}{\partial r^i \partial t^j} \right| \leq k \text{ sur } \overline{\Omega}; \quad 0 \leq j \leq 3 \text{ et } 0 \leq i+j \leq 4, \quad (6.2.4)$$

où k est une constante.

Le théorème suivant prouve l'ordre de convergence de la solution u_λ vers u .

Théorème 6.2.1. (Voir [40]) *Soient u et u_λ des solutions des problèmes (6.2.1) et (6.2.3) respectivement. Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendant de u , u_λ et λ , telle que*

$$\|u - u_\lambda\|_2 \leq \frac{C}{\lambda^{1/2}}$$

où λ est le paramètre de pénalisation utilisé dans (6.2.3)

Lemme 6.2.1. *La fonction F_λ est non-linéaire continue et λ -lipschitzienne par rapport au deuxième argument.*

Démonstration. F_λ est lipschitzienne, en effet : Pour toutes les fonctions u_λ et v_λ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 |F_\lambda(t, u_\lambda) - F_\lambda(t, v_\lambda)| &= \lambda |[\Lambda - u_\lambda]_+ - [\Lambda - v_\lambda]_+| \\
 &= \lambda \left| \frac{(\Lambda - u_\lambda) + |\Lambda - u_\lambda| - (\Lambda - v_\lambda) - |\Lambda - v_\lambda|}{2} \right| \\
 &\leq \lambda \left| \frac{v_\lambda - u_\lambda}{2} + \frac{|\Lambda - u_\lambda| - |\Lambda - v_\lambda|}{2} \right| \\
 &\leq \lambda \left(\left| \frac{v_\lambda - u_\lambda}{2} \right| + \left| \frac{|\Lambda - u_\lambda| - |\Lambda - v_\lambda|}{2} \right| \right) \\
 &\leq \lambda \left(\left| \frac{v_\lambda - u_\lambda}{2} \right| + \left| \frac{v_\lambda - u_\lambda}{2} \right| \right) \\
 &\leq \lambda |v_\lambda - u_\lambda|
 \end{aligned}$$

F_λ est une fonction non linéaire continue en u_λ et satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$|F_\lambda(t, u_\lambda(r, t)) - F_\lambda(t, v_\lambda(r, t))| \leq \lambda |u_\lambda(r, t) - v_\lambda(r, t)| \quad p.p \quad (r, t) \in \Omega,$$

□

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons le modèle (6.2.3) pour un traitement numérique.

6.3 Discrétisation temporelle et description de la méthode trapézoïdale

La période d'observation doit être spécifiée en premier et fixée à partir d'aujourd'hui (point dans le temps $t = 0$) à un point dans le temps T . Cette période sera divisée en M intervalles de temps de même longueur $\Delta t = \frac{T}{M}$, et on note $t_m = m \Delta t$. Le prix du sous-jacent (soit la valeur du projet ou de la valeur d'un titre double avec le même profil de risque) est supposé rester dans un rang Ω_R .

Nous discrétisons la variable temps dans (6.2.3) par la méthode trapézoïdale. Alors la semi-discrétisation donne le système d'équations suivant :

$$\frac{u_\lambda^{m+1} - u_\lambda^m}{\Delta t} - \frac{1}{2} L_r(u_\lambda^{m+1} + u_\lambda^m) = \frac{1}{2} [F(t_m, u_\lambda^m) + F(t_{m+1}, u_\lambda^{m+1})],$$

c'est-à-dire,

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} L_r^m\right) u_\lambda^{m+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_r^m\right) u_\lambda^m + \frac{\Delta t}{2} [F(t_m, u_\lambda^m) + F(t_{m+1}, u_\lambda^{m+1})] \quad (6.3.1)$$

Où, $L_r : C(\bar{\Omega}_r) \cap C^2(\Omega_R) \rightarrow C(\Omega_R)$ est l'opérateur différentiel défini par

$$L_r = \alpha(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r) I$$

et $u_\lambda^m(r)$ est l'approchée de la solution $u_\lambda(r, t_m)$.

Alors, le problème approché du problème (6.2.3) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(r) \frac{\partial^2 u_\lambda^{m+1}}{\partial r^2} + q(r) \frac{\partial u_\lambda^{m+1}}{\partial r} + l(r) u_\lambda^{m+1} = J_\lambda^m(\cdot, u_\lambda^{m+1}), \quad r \in \Omega_R \\ u_\lambda^0 = \psi_0(r), \quad r \in \Omega_R \\ u_\lambda^{m+1}(0) = \psi_1^{m+1}, \quad 0 \leq m < M \\ u_\lambda^{m+1}(R) = \psi_2^{m+1}, \quad 0 \leq m < M \end{array} \right. \quad (6.3.2)$$

où, pour chaque $m \geq 0$ et pour tout $r \in \Omega_R$, nous avons :

$$\begin{aligned} J_\lambda^m(\cdot, u_\lambda^{m+1}) &= -(I + \frac{\Delta t}{2} L_r) u_\lambda^m - \frac{\Delta t}{2} [F(t_m, u_\lambda^m) + F(t_{m+1}, u_\lambda^{m+1})], \\ p(r) &= \frac{\Delta t}{2} \alpha(r), \\ q(r) &= \frac{\Delta t}{2} \beta(r), \\ l(r) &= \frac{\Delta t}{2} \gamma(r) - 1, \\ \psi_0(r) &= \Lambda^0(r) = \Lambda(r, 0), \\ \psi_1^{m+1} &= \Lambda^{m+1}(0) = \Lambda(0, t_{m+1}), \\ \psi_2^{m+1} &= \Lambda^{m+1}(R) = \Lambda(R, t_{m+1}), \end{aligned}$$

u_λ^{m+1} est la solution de (6.3.2), à l'instant t_{m+1} .

Dans la suite de ce chapitre, on notera par \tilde{L}_r l'opérateur linéaire associé à l'opérateur différentiel L_r , et $\|\tilde{L}_r\|_\infty = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\tilde{L}_r u\|$. Le théorème suivant montre l'ordre de convergence de la solution u_λ^m vers $u_\lambda(r, t_m)$.

Théorème 6.3.1. *Supposons que $\Delta t.(\|\tilde{L}_r\|_\infty + \lambda) < 2$. Alors la solution u_λ^m du problème (6.3.2) converge vers $u_\lambda(r, t_m)$, et la convergence est du second ordre.*

$$\|u_\lambda(r, t_m) - u_\lambda^m\|_\infty \leq Cte(\Delta t)^2,$$

Démonstration. Nous introduisons la notation

$$e_m = u_\lambda(r, t_m) - u_\lambda^m$$

l'erreur à l'étape m .

Par un développement de Taylor pour u_λ , nous avons :

$$u_\lambda(r, t_{m+1}) = u_\lambda(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^3)$$

$$u_\lambda(r, t_m) = u_\lambda(r, t_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^3).$$

En utilisant ces expressions, nous obtenons :

$$\frac{u_\lambda(r, t_{m+1}) - u_\lambda(r, t_m)}{\Delta t} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^2). \quad (6.3.3)$$

Et par un développement de Taylor pour $\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}$, nous avons :

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+1}) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^3 u_\lambda}{\partial t^3}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^3),$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_m) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^3 u_\lambda}{\partial t^3}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^3).$$

En utilisant ces expressions, et $\left| \frac{\partial^3 u_\lambda}{\partial t^3} \right| \leq c$ sur $\bar{\Omega}$, (voir la relation (6.2.4)) nous avons :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_\lambda(r, t_{m+1}) + u_\lambda(r, t_m)] = \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(r, t_{m+\frac{1}{2}}) + O((\Delta t)^2).$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r, t_{m+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_\lambda(r, t_{m+1}) + u_\lambda(r, t_m)] + O((\Delta t)^2) \\ &= \frac{1}{2} [L_r u_\lambda(r, t_{m+1}) + F(t_{m+1}, u_\lambda^{m+1}) + L_r u_\lambda(r, t_m) + F(t_m, u_\lambda^m)] + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

En utilisant cette relation dans (6.3.3), nous obtenons :

$$(I - \frac{\Delta t}{2} L_r) u_\lambda(r, t_{m+1}) = (I + \frac{\Delta t}{2} L_r) u_\lambda(r, t_m) + \frac{\Delta t}{2} [F(t_m, u_\lambda(r, t_m)) + F(t_{m+1}, u_\lambda(r, t_{m+1}))] + O((\Delta t)^3).$$

De la relation (6.3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{\Delta t}{2} L_r\right) e_{m+1} &= \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_r\right) e_m + \frac{\Delta t}{2} [F(t_m, u_\lambda(r, t_m)) - F(t_m, u_\lambda^m)] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} [F(t_{m+1}, u_\lambda^{m+1}) - F(t_{m+1}, u_\lambda(r, t_{m+1}))] + O((\Delta t)^3). \end{aligned}$$

D'après le lemme (6.2.1) et l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\|e_{m+1}\| \leq \left\| \left(I - \frac{\Delta t}{2} L_r\right)^{-1} \right\|_\infty \left(\left\| \left(I + \frac{\Delta t}{2} L_r\right) \right\|_\infty \|e_m\| + \frac{\Delta t}{2} \lambda (\|e_m\| + \|e_{m+1}\|) + c(\Delta t)^3 \right).$$

Puisque, l'opérateur $\left(I \pm \frac{\Delta t}{2} L_r\right)$ satisfait le principe de maximum (voir, [22, 21]), alors

$$\left\| \left(I \pm \frac{\Delta t}{2} L_r\right)^{-1} \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{\gamma}_1} \right), \text{ avec } \tilde{\gamma}_1 = -\tilde{\gamma} > 0.$$

Pour Δt suffisamment petit, on peut prendre $\Delta t \cdot \eta < 2$, (avec $\eta = \|\tilde{L}_r\|_\infty + \lambda$) et en utilisant que

$$1 + \frac{\Delta t}{2} (\tilde{\gamma}_1 - \lambda) = 1 + \frac{\Delta t}{2} (\tilde{\gamma}_1 + \|\tilde{L}_r\|_\infty - \eta) \geq 1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta.$$

Alors

$$\|e_{m+1}\| \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) \|e_m\| + \left(\frac{c}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) (\Delta t)^3. \quad (6.3.4)$$

Démontrons par récurrence, que

$$\|e_m\| \leq \frac{c}{\eta} \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right)^m - 1 \right] (\Delta t)^2. \quad (6.3.5)$$

Pour $m = 0$, nous devons prouver que $\|e_0\| \leq 0$ et donc que $e_0 = 0$. Cela est vrai, car à $t_0 = 0$ la solution numérique correspond à l'état initial et l'erreur est nulle.

Supposons que (6.3.5) est vrai jusqu'à m . Des relations (6.3.4) et (6.3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \|e_{m+1}\| &\leq \frac{c}{\eta} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right)^m - 1 \right] (\Delta t)^2 + \left(\frac{c}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) (\Delta t)^3 \\ &\leq \frac{c}{\eta} \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right)^{m+1} - 1 \right] (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Comme $0 < \Delta t \cdot \eta < 2$, il s'en suit que

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) = 1 + \left(\frac{\Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right) \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{\Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right)^l = \exp \left(\frac{\Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right).$$

Par conséquent, (6.3.5) donne

$$\|e_m\| \leq \frac{c(\Delta t)^2}{\eta} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right)^m \leq \frac{c(\Delta t)^2}{\eta} \exp \left(\frac{m \Delta t \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right).$$

Comme $m \Delta t < T$, alors :

$$\|e_m\| \leq \frac{c(\Delta t)^2}{\eta} \exp \left(\frac{T \cdot \eta}{1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta} \right),$$

et comme $0 < 1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \eta < 1$, par suite,

$$\|u_\lambda(r, t_m) - u_\lambda^m\|_\infty \leq C(\Delta t)^2.$$

En d'autres termes, le problème (6.3.2) est convergent en second ordre. □

Pour toute $m \geq 0$, le problème (6.3.2) a une solution unique et peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} p(r)u_\lambda''(r) + q(r)u_\lambda'(r) + l(r)u_\lambda(r) = J_\lambda(\cdot, u_\lambda(r)) & r \in \Omega_R, \\ u_\lambda(0) = \psi_1, \\ u_\lambda(R) = \psi_2, \end{cases} \quad (6.3.6)$$

où

$$J_\lambda(\cdot, u_\lambda(r)) = \Phi(r) - \frac{\Delta t}{2} \lambda [\psi(r) - u_\lambda(r)]_+.$$

Il est facile de voir que J_λ est une fonction non linéaire continue sur u_λ et satisfait la condition de Lipschitz suivante :

$$|J_\lambda(r, u_\lambda(r)) - J_\lambda(r, v_\lambda(r))| \leq L_\lambda |u_\lambda(r) - v_\lambda(r)| \quad p.p \text{ sur } r \in \Omega_R, \quad (6.3.7)$$

où $L_\lambda = \frac{\Delta t}{2} \lambda$.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'approximation de la solution du problème (6.3.6).

6.4 La discrétisation spatiale et la méthode de collocation de spline cubique

Dans cette section, nous construisons une spline cubique qui s'approche de la solution u_λ du problème (6.3.6), dans l'intervalle $\Omega_R \subset \mathbb{R}$.

Soit $\Theta = \{0 = r_{-3} = r_{-2} = r_{-1} = r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} < r_n = r_{n+1} = r_{n+2} = r_{n+3} = R\}$ une subdivision de l'intervalle Ω_R . Sans perte de généralité, nous avons pris $r_i = ih$, où $0 \leq i \leq n$ et $h = \frac{R}{n}$. Notons par $\mathbb{S}_4(\Omega_R, \Theta) = \mathbb{P}_3^2(\Omega_R, \Theta)$ l'espace des polynômes par morceaux de degré 3 dans la subdivision Θ et de classe C^2 sur Ω_R . Soit B_i , $i = -3, \dots, n-1$, une B-splines de degré 3 associée à Θ . ces B-splines sont positive et forment une base de l'espace $\mathbb{S}_4(\Omega_R, \Theta)$.

Considérons l'opérateur linéaire local Q_3 sur un espace spline cubique $\mathbb{S}_4(\Omega_R, \Theta)$ et qui a un ordre d'approximation élevé. Cet opérateur est discret de classe \mathcal{C}^2 , un quasi-interpolant cubique (voir [76]) défini par

$$Q_3 u_\lambda = \sum_{i=-3}^{n-1} \mu_i(u_\lambda) B_i,$$

où les coefficients $\mu_j(u_\lambda)$ sont déterminés en résolvant un système linéaire d'équations données par l'exactitude des Q_3 sur l'espace des polynômes cubique $\mathbb{P}_3(\Omega_R)$. Précisément, ces coefficients sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \mu_{-3}(u_\lambda) = u_\lambda(r_0) = u_\lambda(0), \\ \mu_{-2}(u_\lambda) = \frac{1}{18}(7u_\lambda(r_0) + 18u_\lambda(r_1) - 9u_\lambda(r_2) + 2u_\lambda(r_3)), \\ \mu_j(u_\lambda) = \frac{1}{6}(-u_\lambda(r_{j+1}) + 8u_\lambda(r_{j+2}) - u_\lambda(r_{j+3})), \text{ for } j = -1, \dots, n-3, \\ \mu_{n-2}(u_\lambda) = \frac{1}{18}(2u_\lambda(r_{n-3}) - 9u_\lambda(r_{n-2}) + 18u_\lambda(r_{n-1}) + 7u_\lambda(r_n)), \\ \mu_{n-1}(u_\lambda) = u_\lambda(r_n) = u_\lambda(R). \end{cases}$$

D'après le théorème (1.3.2), il existe des constantes C_k , $k = 0, 1$, telles que, pour toute fonction $u_\lambda \in \mathcal{C}^2(\Omega_R)$,

$$\|u_\lambda^{(k)} - Q_3 u_\lambda^{(k)}\|_{\Omega_R} \leq C_k h^{2-k} \|u_\lambda^{(2-k)}\|_{\Omega_R}, \quad k = 0, 1, \quad (6.4.1)$$

où $\|u_\lambda\|_{\Omega_R} = \max_{r \in \Omega_R} |u_\lambda(r)|$.

Alors en utilisant les conditions aux limites du problème (6.3.6), on obtient $\mu_{-3}(u_\lambda) = Q_3 u_\lambda(0) = u_\lambda(0) = \psi_1$ et $\mu_{n-1}(u_\lambda) = Q_3 u_\lambda(R) = u_\lambda(R) = \psi_2$. D'où

$$Q_3 u_\lambda = z_1 + S_1,$$

où

$$z_1 = \psi_1 B_{-3} + \psi_2 B_{n-1} \text{ et } S_1 = \sum_{i=-2}^{n-2} \mu_i(u_\lambda) B_i.$$

De l'équation (6.4.1), nous pouvons facilement voir que la spline S_1 satisfait l'équation suivante :

$$p(r_i)S_1^{(2)}(r_i) + q(r_i)S_1^{(1)}(r_i) + l(r_i)S_1^{(0)}(r_i) = g(r_i) + O(1), \quad i = 0, \dots, n \quad (6.4.2)$$

avec :

$$g(r_i) = J_\lambda(r_i, u_\lambda(r_i)) - (p(r_i)z_1^{(2)}(r_i) + q(r_i)z_1^{(1)}(r_i) + l(r_i)z_1^{(0)}(r_i)), \quad i = 0, \dots, n.$$

Le but de cette section est de calculer une collocation spline cubique $\tilde{S}_\lambda = \sum_{i=-3}^{n-1} \tilde{c}_{i,\lambda} B_i$ qui satisfait l'équation (6.3.6) aux points $\tau_i, i = 0, \dots, n+2$ avec $\tau_0 = r_0, \tau_i = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, i = 1, \dots, n, \tau_{n+1} = r_{n-1}$ et $\tau_{n+2} = r_n$.

Ensuite, il est facile de voir que

$$\tilde{c}_{-3,\lambda} = \psi_1 \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{n-1,\lambda} = \psi_2,$$

d'où

$$\tilde{S}_\lambda = z_1 + \tilde{S}_1, \quad \text{où} \quad \tilde{S}_1 = \sum_{i=-2}^{n-2} \tilde{c}_{i,\lambda} B_i,$$

et les coefficients $\tilde{c}_{i,\lambda}, i = -2, \dots, n-2$ satisfont aux conditions de collocations suivantes :

$$p(\tau_i)\tilde{S}_1^{(2)}(\tau_i) + q(\tau_i)\tilde{S}_1^{(1)}(\tau_i) + l(\tau_i)\tilde{S}_1^{(0)}(\tau_i) = f(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (6.4.3)$$

où

$$f(\tau_i) = J_\lambda(\tau_i, \tilde{S}_1(\tau_i)) - (p(\tau_i)z_1^{(2)}(\tau_i) + q(\tau_i)z_1^{(1)}(\tau_i) + l(\tau_i)z_1^{(0)}(\tau_i)), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

On prend $C_\lambda = [\mu_{-2}, \dots, \mu_{n-2}]^T$ et $\tilde{C}_\lambda = [\tilde{c}_{-2,\lambda}, \dots, \tilde{c}_{n-2,\lambda}]^T$, et en utilisant les équations (6.4.2) et (6.4.3), nous obtenons :

$$(PA_h^{(2)} + QA_h^{(1)} + LA_h^{(0)})C_\lambda = F_\lambda + E_\lambda \quad (6.4.4)$$

et

$$(PA_h^{(2)} + QA_h^{(1)} + LA_h^{(0)})\tilde{C}_\lambda = F_{\tilde{C}_\lambda}, \quad (6.4.5)$$

avec

$$F_\lambda = [g_1, \dots, g_{n+1}]^T \text{ et } g_i = \frac{1}{\Delta t} g(\tau_i),$$

$$F_{\tilde{C}_\lambda} = [f_1, \dots, f_{n+1}]^T \text{ and } f_i = \frac{1}{\Delta t} f(\tau_i),$$

$$E_\lambda = [O(\frac{1}{\Delta t}), \dots, O(\frac{1}{\Delta t})]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$P = (\text{diag}(\frac{1}{2}\alpha(\tau_i))_{1 \leq i \leq n+1}),$$

$$Q = (\text{diag}(\frac{1}{2}\beta(\tau_i))_{1 \leq i \leq n+1}),$$

$$L = (\text{diag}(\frac{1}{2}\gamma(\tau_i) - \frac{1}{\Delta t})_{1 \leq i \leq n+1}),$$

$$A_h^{(k)} = (B_{-3+j}^{(k)}(\tau_i))_{1 \leq i, j \leq n+1}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Il est bien connu que $A_h^{(k)} = \frac{1}{h^k} A_k$ pour $k = 0, 1, 2$ où les matrices A_0, A_1 et A_2 sont indépendantes de h , avec l'expression de A_2 est donnée par (3.3.7). Cette matrice est inversible (voir proposition (3.3.2))

Alors, les relations (6.4.4) et (6.4.5) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$PA_2(I + U + V)C_\lambda = h^2 F_\lambda + h^2 E_\lambda, \quad (6.4.6)$$

$$PA_2(I + U + V)\tilde{C}_\lambda = h^2 F_{\tilde{C}_\lambda}, \quad (6.4.7)$$

avec

$$U = hA_2^{-1}P^{-1}QA_1, \quad (6.4.8)$$

$$V = h^2A_2^{-1}P^{-1}LA_0. \quad (6.4.9)$$

Pour estimer $\|C - \tilde{C}\|_\infty$, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.4.1. Si $h^2 < \frac{\Delta t}{4\rho}$, alors $I + U + V$ est inversible, où $\rho = \frac{\|A_2^{-1}\|_\infty}{\tilde{\alpha}}$.

Démonstration. D'après la relation (6.4.8), nous avons

$$\|U\|_\infty \leq h\|A_2^{-1}\|_\infty\|P^{-1}\|_\infty\|Q\|_\infty\|A_1\|_\infty \leq h\rho\|A_1\|_\infty \max_{0 \leq i \leq n} |\beta(\tau_i)|.$$

Pour h suffisamment petit, on peut prendre

$$\|U\|_\infty < \frac{1}{4}. \quad (6.4.10)$$

D'après la relation (6.4.9) et $\|A_0\|_\infty \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|V\|_\infty &\leq h^2\|A_2^{-1}\|_\infty\|P^{-1}\|_\infty\|L\|_\infty\|A_0\|_\infty \\ &\leq h^2\frac{\|A_2^{-1}\|_\infty}{\tilde{\alpha}} \max_{0 \leq i \leq n} \left| \gamma(\tau_i) - \frac{2}{\Delta t} \right| \\ &\leq h^2\rho \max_{0 \leq i \leq n} \left| \gamma(\tau_i) - \frac{2}{\Delta t} \right| \\ &\leq h^2\rho \max_{0 \leq i \leq n} |\gamma(\tau_i)| + \frac{2h^2\rho}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Pour h suffisamment petit, on peut prendre $h^2\rho \max_{0 \leq i \leq n} |\gamma(\tau_i)| < \frac{1}{4}$. Alors

$$\|V\|_\infty < \frac{1}{4} + \frac{2h^2\rho}{\Delta t}. \quad (6.4.11)$$

Comme $\frac{2h^2\rho}{\Delta t} < \frac{1}{2}$. Ainsi, $\|U + V\|_\infty \leq \|U\|_\infty + \|V\|_\infty < 1$, et donc $I + U + V$ est inversible. \square

Proposition 6.4.1. *Supposons que le paramètre de pénalisation λ et le paramètre de discrétisation h satisfont la relation suivante :*

$$\lambda h^2 \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty < 2. \quad (6.4.12)$$

Alors, il existe une spline cubique unique, qui s'approche de la solution exacte u_λ du problème (6.3.6).

Démonstration. D'après (6.4.7), nous avons $\tilde{C}_\lambda = h^2(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1} F_{\tilde{C}_\lambda}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la fonction définie par

$$\varphi(Y) = h^2(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1} F_{\tilde{C}_\lambda}. \quad (6.4.13)$$

Pour prouver l'existence de collocation spline cubique, il suffit de prouver que φ admet un unique point fixe. En effet, Soient Y_1 et Y_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} . Alors nous avons

$$\|\varphi(Y_1) - \varphi(Y_2)\| \leq h^2 \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty \|F_{Y_1} - F_{Y_2}\|_\infty. \quad (6.4.14)$$

En utilisant la relation (6.3.7) et le fait que $\sum_{j=-2}^{n-2} B_j \leq 1$, on trouve

$$|J_\lambda(\tau_i, S_{Y_1}(\tau_i)) - J_\lambda(\tau_i, S_{Y_2}(\tau_i))| \leq \frac{\lambda}{2} \Delta t |S_{Y_1}(\tau_i) - S_{Y_2}(\tau_i)| \leq L_\lambda \|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

On obtient alors

$$\|F_{Y_1} - F_{Y_2}\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2} \|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

D'après la relation (6.4.14), nous concluons que

$$\|\varphi(Y_1) - \varphi(Y_2)\| \leq \frac{\lambda}{2} h^2 \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty \|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

Nous avons alors

$$\|\varphi(Y_1) - \varphi(Y_2)\| \leq k \|Y_1 - Y_2\|_\infty,$$

où $k = \frac{\lambda}{2} h^2 \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty < 1$. D'où la fonction φ admet un unique point fixe. □

Afin de calculer les coefficients de spline cubique de collocation donnés par le système non régulier

$$\tilde{C}_\lambda = \varphi(\tilde{C}_\lambda). \quad (6.4.15)$$

Nous proposons la méthode de Newton généralisée définie par :

$$\tilde{C}_\lambda^{(k+1)} = \tilde{C}_\lambda^{(k)} - (I_{n+1} - V_k)^{-1} (\tilde{C}_\lambda^{(k)} - \varphi(\tilde{C}_\lambda^{(k)})), \quad (6.4.16)$$

où I_{n+1} est la matrice unité d'ordre $n + 1$ et V_k est la matrice jacobienne de la fonction généralisée $\tilde{C}_\lambda \mapsto \varphi(\tilde{C}_\lambda)$, (voir [16, 17, 81], par exemple).

6.5 La convergence de la méthode

Théorème 6.5.1. *Supposons que le paramètre de pénalisation λ et les paramètres de discrétisation h et Δt satisfont à les relations suivante :*

$$\frac{h^2 \rho}{\Delta t} < \frac{1}{4} \text{ et } \lambda h^2 \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty < 1. \quad (6.5.1)$$

Alors la spline cubique \tilde{S}_λ converge vers la solution u_λ . De plus, l'erreur d'estimation $\|u_\lambda - \tilde{S}_\lambda\|_\infty$ est d'ordre $O(h^2)$.

Démonstration. On pose $\nu = \|(I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1}\|_\infty$. D'après (6.4.8), (6.4.9) et le lemme (6.3.1), on a

$$C_\lambda - \tilde{C}_\lambda = h^2 (I + U + V)^{-1} (PA_2)^{-1} [(F_\lambda - F_{\tilde{C}_\lambda}) + E_\lambda].$$

Comme E_λ est d'ordre $O(\frac{1}{\Delta t})$, alors il existe une constante K_1 telle que

$$\|E_\lambda\|_\infty \leq K_1 \frac{1}{\Delta t}.$$

Par conséquent, on a

$$\|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty \leq h^2 \nu [\|F_\lambda - F_{\tilde{C}_\lambda}\|_\infty + K_1]. \quad (6.5.2)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} |J_\lambda(\tau_i, u_\lambda(\tau_i)) - J_\lambda(\tau_i, \tilde{S}_\lambda(\tau_i))| &\leq \frac{\lambda}{2} \Delta t |u_\lambda(\tau_i) - \tilde{S}_\lambda(\tau_i)| \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \Delta t |u_\lambda(\tau_i) - Q_3 u_\lambda(\tau_i)| + \frac{\lambda}{2} \Delta t |Q_3 u_\lambda(\tau_i) - \tilde{S}_\lambda(\tau_i)|. \end{aligned}$$

De la relation (6.4.1), il existe une constante K_2 telle que

$$\|u_\lambda - Q_3 u_\lambda\|_\infty \leq K_2 h^2 \|u_\lambda^{(2)}\|_\infty. \quad (6.5.3)$$

En utilisant le fait que

$$|Q_3 u_\lambda - \tilde{S}_\lambda| \leq \|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty \sum_{j=-2}^{n-2} B_j \leq \|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty, \quad (6.5.4)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} |F_\lambda - F_{\tilde{C}_\lambda}| &\leq \frac{1}{\Delta t} |J_\lambda(\tau_i, u_\lambda(\tau_i)) - J_\lambda(\tau_i, \tilde{S}_\lambda(\tau_i))| \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty + \frac{\lambda}{2} K_2 h^2 \|u_\lambda^{(2)}\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (6.5.2) et l'hypothèse (6.5.1), il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty &\leq \frac{h^2 \nu}{1 - \frac{\lambda}{2} h^2 \nu} (K_2 h^2 \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda^{(2)}\|_\infty + K_1) \\ &\leq 2\nu (K_2 h^2 \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda^{(2)}\|_\infty + K_1) h^2. \end{aligned}$$

D'autre part, à partir des relations (6.4.10) et (6.4.11), on obtient $\|U + V\|_\infty < 1$, comme $\|(I + U + V)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \|U + V\|_\infty} = cte$, alors

$$\|C_\lambda - \tilde{C}_\lambda\|_\infty \leq cte (K_2 h^2 \frac{\lambda}{2} \|u_\lambda^{(2)}\|_\infty + K_1) h^2. \quad (6.5.5)$$

Par suite, on a

$$\|u_\lambda - \tilde{S}_\lambda\|_\infty \leq \|u_\lambda - Q_3 u_\lambda\|_\infty + \|Q_3 u_\lambda - \tilde{S}_\lambda\|_\infty,$$

Alors d'après les relations (6.5.3), (6.5.4) et (6.5.5), on en déduit que $\|u_\lambda - \tilde{S}_\lambda\|_\infty$ est d'ordre $O(h^2)$. \square

Remarque 6.5.1. *Le théorème (6.5.1) pourvoit une relation d'association entre le paramètre de pénalisation λ et les paramètres des discrétisation h et Δt , qui garantit la convergence quadratique de la collocation spline cubique \tilde{S}_λ vers la solution u_λ du problème de pénalisation.*

6.6 Exemple numérique

Dans cette section, nous vérifions numériquement les résultats théoriques obtenus dans la section précédente. Si la solution exacte est connue à l'instant $t \leq T$, l'erreur maximale E^{max} peut être calculée comme suit :

$$E^{max} = \max_{r \in [0, R], t \in [0, T]} |S^{M, N}(r, t) - u(r, t)|.$$

Autrement, elle peut être estimée par le principe de double maille suivant :

$$E_{M, N}^{max} = \max_{r \in [0, R], t \in [0, T]} |S^{M, N}(r, t) - S^{2M, 2N}(r, t)|,$$

où $S^{M, N}(r, t)$ est la solution numérique sur la $M + 1$ grille dans l'espace et $N + 1$ grille dans le temps, et $S^{2M, 2N}(r, t)$ est la solution numérique sur la $2M + 1$ grille dans l'espace et $2N + 1$ dans grille en temps.

On note par

$$B = (B_{-2}, \dots, B_{n-2})$$

et

$$d(\tilde{C}_\lambda) = [\psi - \sum_{i=-2}^{n-2} \tilde{c}_{i, \lambda} B_i]_+^{\frac{1}{k}} = [\psi - B\tilde{C}_\lambda]_+^{\frac{1}{k}}. \quad (6.6.1)$$

Cette dernière équation est non linéaire en \tilde{C}_λ . Nous allons maintenant appliquer la méthode de Newton généralisée à cette équation. On note que, lorsque $k > 1$, $d'(\tilde{C}_\lambda) \rightarrow \infty$ quand $\psi - B\tilde{C}_\lambda \rightarrow 0^+$. Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons la technique proposée dans [87] pour lisser (6.6.1), qui donne l'approximation suivante pour $d(\tilde{C}_\lambda)$:

$$d(\tilde{C}_\lambda) = \begin{cases} (\psi - B\tilde{C}_\lambda)^{\frac{1}{k}}, & \psi - B\tilde{C}_\lambda \geq \varepsilon, \\ W([\psi - B\tilde{C}_\lambda]_+), & \psi - B\tilde{C}_\lambda < \varepsilon, \end{cases} \quad (6.6.2)$$

pour $k > 0$, où $0 < \varepsilon \ll 1$ est un paramètre de transition et $W(z)$ est une fonction qui lisse sur l'original $d(z)$ autour $z = 0$. Nous choisissons $W(z) = a_1 + a_2z + \dots + a_nz^{n-1} + a_{n+1}z^n$ pour $n \geq 3$ et d'imposer que $W(z)$ est telle que $d(\cdot)$ est régulière. Cela exige que $W(z)$ satisfait

$$W(0) = W'(0) = 0, \quad W(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{k}}, \quad W'(\varepsilon) = \frac{1}{k}\varepsilon^{\frac{1}{k}-1}. \quad (6.6.3)$$

Dans ce cas, la fonction définie dans (6.6.2) est globalement régulière. En utilisant les quatre conditions données dans la relation (6.6.3) et $a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$, nous pouvons facilement trouver que

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_n = \varepsilon^{\frac{1}{k-n+1}} \left(n - \frac{1}{k}\right), \quad a_{n+1} = \varepsilon^{\frac{1}{k-n}} \left(\frac{1}{k} - n + 1\right).$$

On pose $X = \psi - B\tilde{C}_\lambda$, alors la relation (6.6.2) devient

$$d(\tilde{C}_\lambda) = \begin{cases} X^{\frac{1}{k}}, & X \geq \varepsilon, \\ W(0), & X \leq 0, \\ a_n X^{n-1} + a_{n+1} X^n, & 0 < X < \varepsilon. \end{cases} \quad (6.6.4)$$

Pour $z \in (0, \varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} W'(z) &= (n-1)\varepsilon^{\frac{1}{k-n+1}} \left(n - \frac{1}{k}\right) z^{n-2} + n\varepsilon^{\frac{1}{k-n}} \left(\frac{1}{k} - n + 1\right) z^{n-1} \\ &= z^{n-2} \varepsilon^{\frac{1}{k-n+1}} \left[(n-1) \left(n - \frac{1}{k}\right) + n \left(\frac{1}{k} - n + 1\right) \frac{z}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial d(\tilde{C}_\lambda)}{\partial \tilde{c}_{i,\lambda}} = \begin{cases} -\frac{1}{k} B_i X^{\frac{1}{k}-1}, & X \geq \varepsilon, \\ 0, & X \leq 0, \\ -B_i X^{n-2} \varepsilon^{\frac{1}{k-n+1}} \left[(n-1) \left(n - \frac{1}{k}\right) + \frac{n}{\varepsilon} \left(\frac{1}{k} - n + 1\right) X \right], & 0 < X < \varepsilon. \end{cases}$$

Dans cette section, nous appliquons la méthode numérique développée dans ce chapitre pour un exemple présenté dans le document des auteurs Kai Zhang et al. [91]. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus à ceux donnés dans [91].

Une option vanille de vente sur une obligation zéro-coupon de payoff

$$\Lambda = \max[K - p(r, T, s), 0], \quad \text{avec } P(r, T, s) = EA(T, s)e^{-B(T,s)r}.$$

Les paramètres utilisés pour cette option de vente sur une obligation sous le modèle CIR sont énumérés dans le tableau 6.6.1. Pour l'option de vente sur une obligation avec les paramètres du tableau 1, nous choisissons $R = 2$. La grille grossière est définie comme une partition uniforme du domaine de solutions $(0, 2) \times (0, 1)$.

Tab. 6.6.1: Les données utilisées pour évaluer les options américaines de vente sur une obligation zéro-coupon sous le modèle CIR.

Paramètres	Valeurs
κ	0.10
θ	0.08
σ	0.10 et 0.50
ζ	0
E	100
K	60
T	1
s	5

La comparaison des valeurs d'erreur maximale entre la méthode développée dans ce chapitre avec celle développée dans [91] sera prise à cinq valeurs différentes du nombre de pas d'espace $N = 201, 401, 801, 1601, 3201$ et des pas de temps $M = 100, 200, 400, 800, 1600$, pour $\sigma = 0.1$ et $\sigma = 0.5$.

Nous menons des expériences sur des valeurs différentes de N, M et σ . Les tableaux 6.6.2 et 6.6.3 présentent des valeurs de l'erreur maximale (max_error) obtenues dans nos expériences numériques et de celles obtenues en [91]. Nous voyons que les valeurs de l'erreur maximale obtenue par notre méthode améliorent celles obtenues par [91].

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les options américaines sur une obligation sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Ce problème est approché par une suite de problèmes d'équations non linéaires à l'aide de la méthode de pénalisation proposée dans [87, 90], et son schéma de discrétisation du temps. Ensuite, nous avons développé et analysé une méthode de collocation de spline cubique et la méthode

Tab. 6.6.2: Les résultats calculés avec $\sigma = 0.1$

N	M	notre max_error	max_error dans [91]
201	100	0.00573	0.0721
401	200	0.00161	0.0366
801	400	0.00050	0.0144
1601	800	0.00014	0.0048
3201	1600	0.00004	0.0022

Tab. 6.6.3: Les résultats calculés avec $\sigma = 0.5$

N	M	notre max_error	max_error dans [91]
201	100	0.00252	0.0283
401	200	0.00073	0.0164
801	400	0.00021	0.0086
1601	800	0.00005	0.0046
3201	1600	0.00002	0.0024

de Newton généralisée pour l'approximation des solutions du problème discret. Nous avons montré la convergence de la méthode à condition que les paramètres de pénalisation et de discrétisation satisfassent la relation (6.5.1). En outre, nous avons fourni une erreur d'estimation d'ordre $O(h^2)$ par rapport à la norme $\| \cdot \|_\infty$. La simulation numérique a été réalisée sur un modèle connu pour valider la convergence de la méthode. Les résultats des calculs montrent que la méthode numérique proposée améliorent celles obtenues dans [91].

Conclusion et perspectives

Dans la première partie, nous avons utilisé une méthode de spline cubique pour résoudre un problème d'obstacle unilatéral en dimension un. Ce problème peut être étudié en dimension supérieure utilisant alors la notion de gradient à la place des dérivées. Une des applications physiques est le recouvrement d'un objet par une membrane élastique. D'après les résultats numériques de la première partie, il conviendra d'étendre l'étude au cas où $\Omega = (a, b) \times (c, d)$.

Dans la deuxième partie, nous avons trouvé que la méthode de collocation de fonction spline cubique pour évaluer des options européennes ou américaines sur les obligations, en marché complet, qu'on a proposé est une méthode alternative efficace à celle proposée par d'autres auteurs. D'après les résultats numériques de la deuxième partie, il conviendra d'étendre l'étude au cas où $\Omega = (a, b) \times (c, d) \times (0, T)$.

En marché incomplet, il n'y a plus unicité du prix et le choix de la règle d'évaluation est crucial : L'un de nos objectifs dans le futur est d'étudier ce problème en considérant le processus de Lévy ou le processus de lévy fractionnel à la place du processus de Winner. Notre souhait est que, la méthode de collocation, nous donnera des résultats satisfaisants.

Bibliographie



- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces Academic*, New York (1975).
- [2] R.P. Agarwal and C.S. Ryoo, *Numerical verifications of solutions for obstacle problems*, Computing Suppl. 15 (2001) 9-19.
- [3] W. Allegretto, Y. Lin and H. Yang, *Numerical pricing of American put options on zero-coupon bonds*. Applied Numerical Mathematics, 46 (2003), 113-134.
- [4] C. Baiocchi and A. Capelo and L. Jayakar, *Variational and Quasivariational Inequalities : Applications to Free Boundary Problems*, John Wiley (Chichester 1984).
- [5] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman Advanced Publishing Program (Boston 1984).
- [6] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Applications of variational inequalities in stochastic control*. Amsterdam, New York, Oxford : North-Holland, (1982).
- [7] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles* (Dunod-Bordas, Paris), (1982).
- [8] S.C. Billups and K.G. Murty, *Complementarity problems*. J. Comp. Appl. Math., 124 (2000), 303-318.
- [9] F. Black and M. Scholes, *Scholes, The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), 637-659.
- [10] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson(1992).
- [11] H. Brezis, *Monotonicity in Hilbert Spaces and Some Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. by E. Zarantonello (Academic, New York), (1971), pp. 101-116.
- [12] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert* (North-Holland, Amsterdam), (1973).

-
- [13] H. N. Çaglar, S. N. Çaglar and E. H. Twizell, *The numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth-degree B-spline function*, Applied Mathematics Letter, 12 (1999), 25-30.
- [14] J. Cea and R. Glowinski, *Methodes Numeriques pour l'ecoulement laminaire d'un fluide rigide viscoplastique incompressible*. Intern. J. Comput. Math. Sect. B, 3 (1972), 225-255.
- [15] Z. Cen and A. Le, *A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011), 3728-3733.
- [16] X. Chen, *A verification method for solutions of nonsmooth equations*, Computing 58 (1997) 281-294.
- [17] X. Chen, Z. Nashed and L. Qi, *Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations*, SIAM J. Numer. Anal. 38 (4) (2000) 1200-1216.
- [18] C.K. Cho, T. Kim and Y. Kwon, *Estimation of local volatilities in a generalized Black-Scholes model*, Applied Mathematics and Computation, 162 (2005), 1135-1149.
- [19] P. G. Ciarlet, *Numerical Analysis of the Finite Element Method, Seminaire de Mathematiques Superieures*. (Presses de l'Universite de Montreal), (1976).
- [20] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method*. Lecture Notes, Vol. 49 (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay), (1975).
- [21] C. Clavero, J.C. Jorge and F. Lisbona, *A uniformly convergent scheme on a nonuniform mesh for convection-diffusion parabolic problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics 154 (2003) 415-429
- [22] C. Clavero, J.C. Jorge and F. Lisbona, *Uniformly convergent schemes for singular perturbation problems combining alternating directions and exponential fitting techniques*, in : J.J.H. Miller (Ed.), Applications of Advanced Computational Methods for Boundary and Interior Layers, Boole, Dublin, 1993, pp. 33-52.
- [23] V. Comincioli, *On some oblique derivative problems arising in the fluid flow in porous media*. Appl. Math. Optim. 1(4)(1975), 313-336.
- [24] R.W. Cottle, *Nonlinear Programs with Positively Bounded Jacobians*. Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of California, Berkeley (1964).
- [25] J. Cox, J. Ingersoll and S. Ross, *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53(2) (1985), 385-407.
- [26] M. Cox, *The Numerical Evaluation of B-splines*. Journal of the Inst. of Mathematics and its Applications 10 (1972), 134-149.
-

-
- [27] B. Dacorognat, *Direct Methods in Calculus of Variations*. Applied Mathematical sciences, No.78, Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [28] G. Dautvaut and J. L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, (1976).
- [29] C. de Boor, *The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory*, Academic Press, New York (1973), 269-276.
- [30] C. de Boor, *A Practical guide to Splines*. Springer Verlag, New York, 1978.
- [31] C. de Boor, *On Calculating with B-splines*. Journal of Approximation Theory 6 (1972), 50-62.
- [32] R.A. DeVore and G.G. Lorentz, *Constructive approximation*. Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [33] P. Dierckx, *Curve and Surface Fitting with Splines*. Claredon Press, New York, (1993).
- [34] B. Düring, M. Fournier and A. Jüngel, *Convergence of a high order compact finite difference scheme for a nonlinear Black-Scholes equation*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 38 (2004), 359-369.
- [35] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems* (North-Holland, Amsterdam), (1976).
- [36] A. El hajaji, K. Hilal, A.Serghini and E. Mermri, *Pricing American bond options using a cubic spline collocation method*. Bol. Soc. Paran. Mat, 32 2 (2014) : 189-208.
- [37] E.M. Elliot and J. R. Ockendon, *Weak and variational methods for moving boundary problems*. Boston : Pitman, (1982).
- [38] C.M. Fan and C.S. Liu, Weichung Yeih and Hsin-Fang Chan, *The Scalar Homotopy Method for Solving Non-Linear Obstacle Problem*, Tech Science Press, vol.15, no.1 (2010), pp.67-86.
- [39] W. Feller, *Two singular diffusion problems*, Annals of Mathematics, 54(1951) :173-182.
- [40] P.A. Forsyth and K.R. Vetzal, *Quadratic convergence for valuing American options using a penalty method*. SIAM J. on Sci. Comput., 23 (2002), 2095-2122.
- [41] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, NY, (1983).
- [42] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of Applications of Mathematics (New York). Springer-Verlag, New York, 2004.
- [43] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Trémolières, *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, volumes 1 and 2, Dunod-Bordas (Paris 1976).
-

-
- [44] R. Glowinski, J.L. Lions and R. Trémolières, *Numerical analysis of variational inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [45] R. Glowinski, Y.A. Kuznetsov, T.W. Pan, *A penalty/Newton/conjugate gradient method for the solution of obstacle problems*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1336 (2003) 435-440.
- [46] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*. Acta Mathematica 115 (1966) 153-188.
- [47] E.G. Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, (2007).
- [48] S.T.Y. Ho and S.B. Lee, *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance. Décembre 1986.
- [49] H. Huang, W. Han and J. Zhou, *The regularisation method for an obstacle problem*, Numer. Math, 69 (1994), 155-166.
- [50] G. Huang and J. Wan, *A nonparametric approach for European option valuation*, ScienceDirect, Physica A, 387 (2008), 2306-2316.
- [51] G. Isac, *Complementarity Problems*. Lecture Notes in Mathematics 1528, Springer-Verlag (New York 1992).
- [52] P. Jaillet, D. Lamberton and B. Lapeyre, *Inéquations variationnelles et théorie des options*, C.R. Acad. Sci. Paris 307, Série I, 1988, p. 961-965.
- [53] H. John, *Options, Futures and Other Derivatives* (6th Edition). Prentice Hall, 2005.
- [54] H. John and A. White, *One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 28, No 2, (June 1993) pp 235-254
- [55] M. K. Kadalbajoo, L. P. Tripathi and A. Kumar, *A cubic B-spline collocation for a numerical solution of generalized Black-Scholes equation*, Mathematical and Computer Modelling, 55 (2012), 1483-1505.
- [56] R. Kangro and R. Nicolaidis, *Far field boundary conditions for Black-Scholes equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 38 (2000), 1357-1368.
- [57] S. Karamardian and S. Schaible. *Seven kinds of monotone maps*. Journal of Optimization Theory and Applications 66 (1990) 37-46.
- [58] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, (1980).
- [59] B.I. Kvasov, *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2000), ISBN 981-02-4010-4.
-

-
- [60] Y. K. Kwok, *Mathematical models of financial derivatives*. Berlin : Springer, (1998).
- [61] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N.Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, In : Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 23, Providence, RI, (1968).
- [62] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, 1996, 12646
- [63] A. Lamni, H. Mraoui and D. Sbibih, A. Tijini, *Sextic Spline Solution of Nonlinear Fifth-Order Boundary Value Problems*, Inter. J. Comput. Math. Doi : 10.1080/00207160.2010.519384 (2011).
- [64] H. Lewy and G. Stampacchia, *On the regularity of the solution of the variational inequalities*, Communications in Pure and Applied Mathematics, 22 (1969), 153-188.
- [65] J. L. Lions, *Problemes aux limites dans les equations aux derivees partielles*, Seminaire de Mathematiques Superieures de l'Universite de Montreal (Presses de l'Universite de Montreal, Montreal), (1962).
- [66] J.L. Lions and G. Stampacchia. *Variational inequalities*. Communications on Pure and Applied Mathematics 20 (1967) 493-519.
- [67] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational Inequalities*. Commun. Pure Appl. Math. 20 (1967), 493-519.
- [68] C.S. Liu, *A time-marching algorithm for solving non-linear obstacle problems with the aid of an NCP-function*, CMC : Computers, Materials, and Continua, 8 (2008), 53-66.
- [69] T. Lyche and L. L. Schumaker, Local spline approximation methods. J. Approx. Theory 15 (1975), 294-325.
- [70] O.G. Mancino and G. Stampacchia, *Convex programming and variational inequalities*. Journal of Optimization Theory and Applications 9 (1972) 3-23.
- [71] E.B. Mermri, *Sur quelques problèmes d'inéquations variationnelles*. Thèse à la Faculté des Sciences-Oujda, (2002).
- [72] E.B. Mermri, A.Serghini, A. El hajaji and K. Hilal, *A Cubic Spline Method for Solving a Unilateral Obstacle Problem*. American Journal of Computational Mathematics, 2012, 2, 217-222.
- [73] J. Necas, *Les Methodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques* (Masson, Paris), (1967).
- [74] U.S. Rana and A. Asad, *Numerical solution of European call option with dividends and variable volatility*, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012), 6242-6250.
- [75] P. A. Raviart and J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivés partielles*, Masson(1992).
-

- [76] P. Sablonnière, *Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 63 (2005), 211-222.
- [77] I. Schoenberg, *On Spline functions*. In Shisha O. (ed) *Inequalities*, (1967) pages 255-291. Academic Press, New York.
- [78] R. Scholz, *Numerical solution of the Obstacle problem by the penalty method*, Computing, 32 (1984) 297-306.
- [79] L. Schumaker, *Splines Functions : Basic Theory*. Wiley, (1981). New York.
- [80] A. Serghini, A. El hajaji, E.B. Mermri and K. Hilal, Pricing of European options using a cubic spline collocation method. *International Journal of Applied Mathematic & Statistic* (2013).
- [81] M.J. Śmietański, *A generalised Jacobian based Newton method for semismooth block-triangular system of equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205 (2007) 305-313.
- [82] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercives sur les ensembles convexes*. *Comptes Rendus Academie Sciences Paris* 258 (1964) 4413-4416.
- [83] G. Stampacchia, *Variational inequalities. In Theory and Applications of Monotone Operators* (Proc. NATO Advanced Study Inst., Venice, 1968), Edizioni "Oderisi" (Gubbio 1969) pp. 101-192.
- [84] G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus*. *Seminaire de Mathematiques Superieures de l'Universite de Montreal* (Presses de l'Universite de Montreal), (1965).
- [85] O. Vasicek, *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*. *Journal of Financial Economics* 5 (2) (1977), 177-188. doi :10.1016/0304-405X(77)90016-2.
- [86] S. Wang, *A novel fitted finite volume method for the Black-Scholes equation governing option pricing*. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 24 (2004), 699-720.
- [87] S. Wang, X.Q. Yang and K.L. Teo, *Power penalty method for a linear complementarity problem arising from American option valuation*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 129 (2006), 227-254.
- [88] P. Wilmott, *on quantitative finance*. New York : Wiley, (2000).
- [?]
- [89] K. Zhang, S. Wang, X.Q. Yang and K.L. Teo, *A power penalty approach to numerical solutions of two-asset American options*. *Numerical Mathematics. Theory, Methods and Applications*, 2 (2009), 202-223.
-

- [90] K. Zhang, X.Q. Yang and K.L. Teo, *Convergence analysis of a monotonic penalty method for American option pricing*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 348 (2008), 915-926.
- [91] K. Zhang and S. Wang, *Pricing American bond options using a penalty method*. Automatica 48 (2012) 472-479.
- [92] C. Zhongdi and A. Le, *A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 3728-3733.
-