



UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



Centre d'Étude Doctorales : Sciences et Techniques
Formation Doctorale : **Mathématiques Et Physique Appliquées**

THÈSE

Présentée par

YAHYA MEKAOUI

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Physique Théorique**

Contribution à l'étude des processus de diffusion assistés par laser en électrodynamique quantique

Soutenue publiquement le Samedi 29 Octobre 2022 à 10h00
devant le jury composé de :

Pr Lhoucine OUFNI	<i>P.E.S, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal</i>	Président
Pr Larbi RAHILI	<i>P.H, Faculté des Sciences, Université Ibn Zohr, Agadir</i>	Rapporteur
Pr Adil BELHAJ	<i>P.H, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat</i>	Rapporteur
Pr Moha EL IDRISSE	<i>P.H, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Khouribga</i>	Rapporteur
Pr Rachid BENBRIK	<i>P.H, Faculté Polydisciplinaire, Université Cadi Ayyad, Marrakech</i>	Examineur
Pr El Arbi SIHR	<i>P.E.S, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal</i>	Examineur
Pr Bouzid MANAUT	<i>P.E.S, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Khouribga</i>	Co-directeur
Pr Souad TAJ	<i>P.E.S, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal</i>	Directeur

Année Universitaire 2022/2023

Table des matières

Table des figures	4
Remerciements	6
Introduction	7
1 Formalisme mathématiques	12
Introduction	12
1.1 Notations et conventions	12
1.1.1 Coordonnées	13
1.1.2 Tenseur métrique, indices covariants et contravariants	13
1.2 L'équation de Klein-Gordon	14
1.3 L'équation de Dirac	14
1.4 Solution de l'équation de Dirac	15
1.5 Équation de Dirac pour un électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane (Dirac Volkov)	17
1.5.1 Équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique	18
1.5.2 Fonction d'onde de Dirac Volkov	19
1.6 Les fonctions de Green	21
1.7 Les fonctions de Bessel	21
1.7.1 Les fonctions de Bessel de première espèce	21
1.7.2 Les fonctions de Bessel de seconde espèce	24
1.7.3 Propriétés des J_n	25
1.7.4 Les fonctions de Bessel généralisées	26
Conclusion	28
2 La théorie de la diffusion	29
Introduction	29
2.1 Les expériences de la diffusion	30
2.2 Les types de processus de diffusion	31
2.3 Électrodynamiques quantiques	31
2.4 Les propagateurs dans la QED	32
2.5 Les règles de Feynman	32
2.6 La section efficace	34
2.6.1 Taux de transition	34
2.6.2 La section efficace	36
2.6.3 Variables de Mandelstam	37
2.7 Cinématique d'une réaction	38
2.7.1 Système de centre de masse (4-corps)	39
2.7.2 Système de laboratoire (4-corps, cible fixe)	40
2.8 Laser sous forme d'ondes électromagnétique	41
2.8.1 État de polarisation des ondes lumineuses	42

2.8.1.1	Polarisation linéaire	43
2.8.1.2	Polarisation circulaire	43
2.8.1.3	Polarisation elliptique	44
Conclusion		44
3	Les effets de spin sur la diffusion Compton	46
Introduction		46
3.1	La diffusion Compton	47
3.2	Étude de la diffusion Compton non polarisée	48
3.2.1	Calcul de l'amplitude de la diffusion	48
3.2.2	La section efficace différentielle et la formule de Klein-Nishina	49
3.3	Étude de la diffusion Compton pour les électrons polarisés	52
3.3.1	Le concept d'électrons polarisés dans la diffusion compton	52
3.3.2	Diffusion compton d'électrons polarisés au centre du système de masse	53
3.3.2.1	Calcul de la partie spinorielle $ \mathcal{M} ^2$	53
3.3.2.2	Calcul de la section efficace différentielle de spin polarisé	53
3.3.2.3	Calcul de la section efficace différentielle de spin-flip	54
3.3.2.4	Calcul de la section efficace différentielle de spin-non flip	54
3.4	Résultats et discussions	56
Conclusion		60
4	Émission d'un photon par un électron dans un champ électromagnétique intense	61
Introduction		61
4.1	Diffusion d'un photon par un électron dans un champ électromagnétique intense	61
4.2	Élément de matrice de transition	63
4.3	Probabilité de transition	68
4.3.1	Calcul de traces en algèbre de Dirac	69
4.4	Section efficace différentielle	80
4.5	Résultats et Discussion	82
Conclusion		85
5	La diffusion d'un électron par un muon	86
Introduction		86
5.1	Historique et découverte du muon	87
5.1.1	Le muon	87
5.1.2	Historique	87
5.2	La diffusion électron-muon	88
5.3	Étude en absence du champ électromagnétique	88
5.3.1	L'élément de la matrice S	88
5.3.2	L'amplitude de la diffusion	89
5.3.3	La section efficace de la diffusion	92
5.3.4	Géométrie sphérique et produits scalaires	93
5.4	Étude en présence du champ électromagnétique	93
5.4.1	Section efficace différentielle assistée par un laser	93
5.4.2	L'effet d'habillage de muon	97
5.5	Résultats et discussions	98
5.5.1	En absence du champ électromagnétique	98
5.5.2	En présence du champ électromagnétique	100
5.5.3	Effet d'habillage du muon	101
Conclusion		103

Conclusion générale	104
Annexe A	106
Bibliographie	108

Table des figures

Figure 1.1 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel de première espèce. . . .	24
Figure 1.2 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel de seconde espèce. . . .	24
Figure 1.3 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel généralisées en fonction de α pour $n = 50$ et $\beta = 15$ (gauche), et en fonction de β pour $n = 50$ et $\alpha = 80$ (droite)	27
Figure 2.1 – Schéma d’une expérience de diffusion.	30
Figure 2.2 – Diffusion expérimentale	30
Figure 2.3 – Processus de diffusion (a) et de désintégration (b).	34
Figure 2.4 – Diagramme de Feynman pour chaque canal de la diffusion élastique en QED.	37
Figure 2.5 – Processus à quatre corps : $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$	38
Figure 2.6 – Collision dans le repère du centre de masse.	39
Figure 2.7 – Collision au repère de laboratoire (cible fixe).	40
Figure 2.8 – Une image schématique de l’expérience présentée dans [57].	42
Figure 2.9 – Exemple d’onde électromagnétique.	43
Figure 2.10 – Polarisation linéaire d’une onde.	43
Figure 2.11 – Polarisation circulaire d’une onde.	44
Figure 2.12 – Polarisation elliptique d’une onde	44
Figure 3.1 – Diagrammes de Feynman pour la diffusion Compton.	47
Figure 3.2 – La diffusion Compton dans le système laboratoire.	50
Figure 3.3 – La SED non polarisée en fonction de l’angle de diffusion de photon θ_L dans le SL à différentes valeurs d’énergie s	56
Figure 3.4 – La SED non polarisée en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM, dessiné pour différentes valeurs d’énergie s	57
Figure 3.5 – Le comportement de la SED non polarisée en fonction de l’angle θ_L et de l’énergie s dans le système du laboratoire.	57
Figure 3.6 – Le comportement de la SED non polarisée en fonction de l’angle θ_{CM} et de l’énergie s dans le SCM.	58
Figure 3.7 – Les différentes SEDs en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM pour $s = 1.001 m^2$	58
Figure 3.8 – Les différentes SEDs en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM pour $s = 2 m^2$	58
Figure 3.9 – Les différentes SEDs en fonction de l’angle de diffusion θ_{CM} dans le SCM pour $s = 10 m^2$	59
Figure 3.10 – Degré de polarisation \mathcal{P} en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM, tracé pour différentes valeurs d’énergie s	59
Figure 3.11 – Le comportement du degré de polarisation \mathcal{P} en fonction de l’angle θ_{CM} et de l’énergie s dans le SCM.	60
Figure 4.1 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’angle de diffusion du photon à différentes énergies cinétiques de l’électron entrant. Le paramètre géométrique est $\theta' = 45^\circ$. L’amplitude du laser est $a = 43$ MeV et le nombre de photons échangés est $s = 60$	82

Figure 4.2 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’angle de diffusion du photon à différentes amplitudes du laser. L’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28 \text{ MeV}$. Le paramètre géométrique est $\theta = 0^\circ$ et le nombre de photons échangés est $s = 60$	83
Figure 4.3 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de la fréquence laser à différents angles de diffusion du photon pour l’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28 \text{ MeV}$. Le paramètre géométrique est $\theta = 45^\circ$, l’amplitude du laser est $a = 43 \text{ MeV}$ et le nombre de photons échangés est $s = 60$	83
Figure 4.4 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’amplitude du laser à différentes énergies cinétiques de l’électron entrant. Les paramètres géométriques sont $\theta' = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$, et le nombre de photons échangés est $s = 60$	84
Figure 4.5 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’angle de diffusion du photon à différents nombres de photons échangés. L’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28 \text{ MeV}$. Le paramètre géométrique est $\theta' = 45^\circ$ et l’amplitude du laser est $a = 43 \text{ MeV}$	84
Figure 4.6 – La formule de Klein-Nishina (4.81) pour la diffusion d’un photon par un électron en fonction de l’énergie du centre de masse.	85
Figure 5.1 – Diagramme de Feynman de la diffusion électron-muon en QED, où le propagateur intermédiaire est un photon γ	89
Figure 5.2 – La diffusion d’électron par un muon dans un champ électromagnétique à polarisation circulaire.	93
Figure 5.3 – Les variations de la SED sans laser en fonction de l’angle de diffusion θ_f , pour (a) des petits angles initiaux θ_i et pour (b) des grands angles initiaux θ_i	99
Figure 5.4 – Les variations de la SED sans laser en fonction de l’angle de diffusion θ_f pour différentes énergies cinétiques de l’électron incident, avec l’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$	99
Figure 5.5 – Les variations de la SED sans laser en fonction à la fois de l’énergie cinétique des électrons incidents E_e^{kin} et l’angle de diffusion θ_f , avec l’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$	100
Figure 5.6 – Le comportement de SEDI, $d\bar{\sigma}^{(s)}/d\Omega_f$, par rapport au nombre de photons s . Les différents paramètres sont (a) $\hbar\omega = 2 \text{ eV}$, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$, (b) $\mathcal{E}_0 = 10^6 \text{ V cm}^{-1}$, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$, (c) $\mathcal{E}_0 = 10^7 \text{ V cm}^{-1}$, $\hbar\omega = 2 \text{ eV}$, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$ et (d) $\mathcal{E}_0 = 10^7 \text{ V cm}^{-1}$, $\hbar\omega = 1.17 \text{ eV}$ et $\theta_f = 0^\circ$	101
Figure 5.7 – La SED assistée par laser (5.59) sommée sur $-10 \leq s \leq 10$ en fonction de l’intensité du champ laser pour deux fréquences laser. Le graphe (à gauche) montre la gamme de 10 à 10^8 V cm^{-1} , tandis que le graphe (à droite) montre le détail des variations SEDS pour les intensités de champ entre 10^7 et 10^8 V cm^{-1} , avec l’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$	102

REMERCIEMENTS

Ce modeste travail n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon coeur, en acceptant mes remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame **Souad TAJ** et à Monsieur **Bouزيد MANAUT**, mes professeurs et mes encadrants à la faculté des sciences et technique de Beni Mellal, pour m'avoir dirigé mes recherches. J'exprime ma profonde gratitude pour leurs conseils. Je suis très reconnaissant pour leur professionnalisme et leurs remarquables efficacité qui m'ont permis de mener à bien ce projet.

Je remercie ensuite tous les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail : Monsieur **Larbi RAHILI**, Monsieur **Adil BELHAJ** et Monsieur **Moha EL IDRISSE** pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse de recherche ; Monsieur **El Arbi SIHR** et Monsieur **Rachid BENBRIK** pour avoir accepté d'examiner cette thèse ; et enfin Monsieur **Lhoucine OUFNI** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je voudrais aussi remercier tous les doctorants de notre Master **PhyMo** de la faculté polydisciplinaire de Beni Mellal, surtout Monsieur **Mohamed JAKHA**, Monsieur **Said MOUSLIH**, Monsieur **Mohamed Ouhammou** et Monsieur **Moha Ouali** pour leurs aide et leurs encouragements, ainsi que pour leur collaboration tout au long de l'élaboration de ce projet.

Il me reste également à remercier toute l'équipe du Laboratoire de physique des hautes énergies et d'astrophysique, au faculté des sciences Semlalia de Marrakech, avec qui j'ai eu l'occasion de passer trois ans dans ce laboratoire.

Enfin, j'adresse également des remerciements chaleureux et affectueux à toute ma famille, en particulier à mon père, à ma mère, à mon frère et à ma femme, pour le soutien illimité que j'ai reçu pendant toutes mes années d'études.

A mes amis.

INTRODUCTION

La théorie de l'électrodynamique quantique (QED) décrit l'interaction entre les particules fondamentales chargées telles que l'électron et la lumière. Fondée par Dirac dans les années 1930 avec l'invention de l'équation de l'onde relativiste portant son nom, et achevée dans les années 1950 par Feynman, Tomonaga et Schwinger. QED reste l'une des théories scientifiques les plus réussies de tous les temps. Les prédictions faites par QED concordent avec l'expérience avec jusqu'à 12 chiffres significatifs [1], avec d'autres améliorations, tant que les théoriques et les expérimentales, à prévoir. La technique schématique introduite par Feynman, les " *diagrammes de Feynman* ", s'avère être un outil très puissant pour organiser les termes dans l'expansion perturbative de différentes grandeurs physiques, comme le rapport gyromagnétique de l'électron ou la section efficace pour la diffusion Compton. Une chose est sûre : les résultats obtenus par des calculs impeccables effectués selon les règles de QED seront acceptés par tous. Il ne fait aucun doute que la QED, une fois s'appliquée correctement, est saine et correcte.

Comme déjà mentionné, QED traite de l'interaction de la matière comme les électrons, les positrons ou les muons, avec des champs externes comme les photons. Les exemples types traitent tous problèmes où le champ est faible : la diffusion d'un électron par le champ d'un noyau (diffusion de Mott), la diffusion d'un photon par un électron libre (diffusion de Compton), la création d'une paire électron-positron par absorption de deux photons, pour n'en nommer que quelques-uns. Dans tous les exemples précédents, le champ externe est supposé faible, de sorte que la contribution principale à l'amplitude mécanique quantique est donnée par le premier terme de la série de perturbations, et les termes Next-order (NO) sont supposés être plus petits de l'ordre de la constante de structure fine $\approx 1/137$.

Par conséquent, dans le cas de champs photoniques oscillants, les sections efficaces sont indépendantes de l'amplitude du champ. Naturellement, la question suivante à se poser qu'est ce qui se passe si le champ considéré est fort. Pour un champ suffisamment fort, il est inévitable qu'à un certain point la théorie des perturbations se décompose. Si nous limitons notre discussion aux champs forts qui peuvent être produits dans le laboratoire, et ainsi omettre le cas astrophysiquement intéressant de champs magnétiques ultrapuissants (par exemple autour des pulsars, voir les calculs dans [2, 3, 4] et [5, 6, 7, 8]), deux types de champs forts sont perceptibles :

1. Le champ de Coulomb autour des noyaux lourds. Pour une interaction de Coulomb, le paramètre d'expansion est $Z\alpha$, où Z est le nombre de charge nucléaire. Pour les petits Z , cette expansion est logique, mais ne s'applique pas clairement aux atomes de Z élevés tels que le plomb ou l'uranium. La théorie de QED dans un champ nucléaire fort a avancé très loin, voir par exemple [9, 10, 11] pour des calculs de haute précision dans les ions lourds, ou [12, 13, 14, 15] pour des revues de la production de paires dans les collisions d'ions lourds. Le cas d'un potentiel de Coulomb avec un nombre de charges $Z > 1/\alpha \approx 137$ est particulièrement intéressant, car

l'état fondamental recoupe avec la thèse de Dirac et la production spontanée de paires électron-positron est attendu.

2. Champ électromagnétique produit par un laser. Ici, le paramètre d'expansion par rapport au champ laser est égal à $\xi = -ea/m$, où $e = -|e|$ est la charge de l'électron, m est la masse de l'électron et a est la valeur de crête du potentiel vectoriel du champ laser. Le champ électrique de crête E du laser est associé à a comme $E = a\omega$, où ω est la fréquence, ce qui signifie que le paramètre ξ décrit la quantité de travail effectuée par le champ électrique de crête du laser sur une période laser, mise à l'échelle avec la masse d'électrons m . Notez que nous utiliserons des unités relativistes telles que $\hbar = c = 1$, où \hbar est la constante de Planck réduite et c est la vitesse de la lumière, tout au long de cette thèse, pour de plus amples discussions sur les unités et la notation utilisées, vous trouverez cela dans le chapitre 1.

La technologie laser a commencé avec Albert Einstein au début du 20ème siècle. Il s'est développé davantage en 1960 quand le premier laser a été construit à Hughes Research Laboratories. Suivez la chronologie qui suit pour voir comment la technologie laser a évolué. Tout d'abord, en 1900 Max Planck suggère que l'échange d'énergie entre les ondes et la matière est discontinu et se fait par des "grains" de rayonnement : Le quanta d'énergie. Puis, en 1913 Niels Bohr a présenté le concept de niveaux d'énergie atomique pour tenir compte de l'émission de quanta d'énergie. Albert Einstein (1916-1917) a ensuite décrit et quantifié l'absorption des rayonnements et les émissions spontanées. Plus tard, en 1917, Einstein a ajouté aux deux processus qui précèdent un nouveau mode d'interaction atome-lumière : l'émission stimulée. En 1950, Alfred Kastler a développé ce qu'on appelle le pompage optique. Ainsi, en 1953-1954, un appareil capable d'amplifier les micro-ondes grâce à l'émission stimulée, appelé maser (*micro-wave amplification by stimulated emission of radiation*), est développé de manière indépendante par deux équipes de chercheurs : D'une part, par les Américains Charles H. Townes et Arthur L. Schawlow ; D'autre part, par les Soviétiques Alexandre Prokhorov et Nicolai Basov. Alors, en 1958 Arthur L. Schawlow et Charles H. Townes publient les principes de réalisation d'un appareil analogue au maser mais qui est capable cette fois d'amplifier la lumière. Pour cette raison, ils le nomment maser optique. Ce nom a ensuite été progressivement abandonné au profit du mot "laser" (*light amplification by stimulated emission of radiation*), terme inventé en 1957 par le physicien américain Gordon Gould. En effet, après trente ans de litige, il a été reconnu que Gould avait défini dès 1957- dans un travail non publié ni breveté, mais enregistré - les principes essentiels de réalisation des lasers. Et après presque 3 ans, en 1960 Theodore H. Maiman (*Hughes Aircraft Laboratories*) réalise le premier laser, en utilisant un cristal de rubis "stimulé" par une lampe éclair de grande puissance. Et dans l'année qui suit, en 1961 Ali Javan, William Bennett et Donald Herriot (*Bell Laboratories*) réalisent le premier laser à gaz (hélium-néon). Ainsi, en 1962 le premier laser semiconducteur est mis au point chez *General Electric*, ouvrant la voie aux diodes lasers. Elias Snitzer en 1963 à l'université du New Jersey, invente le laser à fibre optique. Ainsi, en 1965 le premier laser solide YAG (Yttrium-Aluminium-Garnet) a été utilisé par Western Electric (A.T.T.) pour percer les orifices microscopiques des matrices en diamant. De même, en 1966 un émetteur laser permet, pour la première fois, de mesurer la distance Terre-Lune. En 1969, David Collins a créé le premier scanner de code-barres à source laser. Après, en 1971 la firme américaine G.T.E. Sylvania commercialise le premier laser à CO₂ (dioxyde de carbone) atteignant une puissance de 1 kilowatt. En 1979, la réalisation de la première machine de tôlerie associant la découpe laser au poinçonnage. De plus, en 1985 Gérard Mourou, à l'université de Rochester (États-Unis), a utilisé des impulsions d'étirement et de recompression, ouvrant ainsi la voie aux puissances extrêmes. Or, en 1989, la première utilisation d'un laser (un laser à CO₂) pour l'usinage par fraisage. Grâce à l'utilisation d'un laser à impulsions ultracourtes (de l'ordre de quelques femtosecondes), Ahmed Zewail en 1999 au California Institute of Technology, observe en temps réel une photodissociation. Cette première observation en temps réel d'une réaction chimique est considérée comme l'étape fondatrice de

la "femtochimie". Dans ces conditions en 2002 Ferenc Krausz, à l'université de Vienne (Autriche), observe, avec une résolution de 0,6 femtoseconde, l'éjection d'un électron. En 2009, la mise en service du laser NIF (National Ignition Facility) aux États-Unis, destiné à maîtriser la fusion thermonucléaire. Et vers 2014, la mise en exploitation prévue du laser Mégajoule au Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine, près de Bordeaux. Cet outil doit permettre d'étudier, à l'échelle microscopique, les propriétés de la matière soumise à de très hautes températures et densités (matière à l'état de plasma) et de recréer les conditions de réalisation de la fusion thermonucléaire.

Les lasers d'aujourd'hui atteignent régulièrement des valeurs où ξ est de l'ordre de l'unité jusqu'à $\xi = 10^2$ [16, 17], et donc une approche non perturbatrice est nécessaire lors de la description de l'interaction entre les électrons et les champs laser forts.

Il existe deux catégories de lasers modernes :

1. Lasers à haute puissance à basse fréquence. Les lasers de ce type ont une basse fréquence d'ordre 1 eV, mais peuvent fournir de fortes intensités, c'est-à-dire de grandes amplitudes de champ électrique. Le record actuel est une intensité de 10^{22} W/cm² [19, 18], ce qui correspond à une valeur de $\xi = 300$. Cette intensité élevée a été rendue possible grâce à la technique d'amplification d'impulsions à modulation d'impulsions [20]. Il y a aussi des nouveaux projets, par exemple : L'infrastructure ultralégère légère (ELI) [21], l'installation européenne de recherche sur l'énergie laser de haute puissance (HiPER) et l'installation française laser Apollon de laser femtoseconde, tous visant des intensités extrêmes allant jusqu'à l'ordre 10^{26} W/cm².
2. L'autre type de laser est le laser à basse puissance à haute fréquence représenté par le laser à électrons libres de rayons X (X-FEL). Actuellement, les intensités de l'ordre de 10^{16} W/cm² peuvent être obtenues à une fréquence de 100 eV. Cela conduit à une valeur de $\xi = 3 \times 10^{-3}$, de sorte que ce régime peut être traité avec la théorie des perturbations. Selon un point de vue optimiste de [22], avec les futures améliorations de l'installation FLASH à Hambourg, il pourrait être possible d'atteindre des intensités aussi élevées que 10^{28} W/cm² à des fréquences de 200 keV (FLASH1) et 500 keV (FLASH2), si l'on peut atteindre la limite de diffraction du faisceau laser.

Des intensités élevées impliquent que le mouvement de l'électron dans le champ du laser devient relativiste. Une mesure du moment où la transition vers le régime relativiste commence lorsque l'énergie cinétique moyenne, de l'électron devient du même ordre que sa masse de repos.

Avec ces lasers de haute puissance vient un champ de recherche, que nous pourrions appeler QED "modifiée par laser". L'objectif est d'étudier comment la présence d'un champ laser fort modifie les processus fondamentaux de QED, et la façon dont ils dépendent de l'amplitude, de la fréquence et de la polarisation des paramètres laser, etc. Le laser ouvre également de nouveaux canaux de réaction, ce qui signifie que les processus interdits par la conservation de l'énergie et de l'impulsion deviennent possibles grâce à l'énergie et à l'impulsion fournies par le champ. La QED modifiée par laser a été lancée dans les années 1960, bien avant l'avènement des sources laser puissantes, avec les articles fondateurs [23, 49, 42]. Il est très important que, avec la disponibilité expérimentale d'installations laser ultra-intenses et les perspectives brillantes de pousser les limites d'intensité encore plus loin, même les processus exotiques dans la QED modifiée par laser peuvent être vérifiés expérimentalement.

Dans cette thèse, nous étudions l'influence d'un champ laser sur quelques processus fondamentaux de la physique des particules : Diffusion de Compton, qui est la diffusion inélastique d'un photon avec une particule chargée électriquement (souvent l'électron) et l'étude de l'émission d'un photon par un électron dans un champ électromagnétique intense, ainsi La diffusion élastique d'un électron par un muon. Après quelques notes sur les conventions utilisées dans le chapitre 1, nous présentons aussi les fondements théoriques nécessaires pour l'analyse ultérieure. En particulier, nous examinons la dérivation de la solution de Volkov à l'équation de Dirac, l'expression du propagateur de Dirac-Volkov, et nous examinons également la solution à l'équation

relativiste classique du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique d'onde plane, parce qu'on a besoin de comprendre le comportement du système quantique. Nous soulignons la forte correspondance classique-quantique entre la solution de Volkov quantique et la solution classique. En particulier, cette correspondance peut être utilisée pour déduire, à travers les arguments physiques, par laquelle la solution de Volkov est exprimée. Dans lequel les lignes d'électrons libres sont remplacées par les états de Volkov et les lignes de propagateur interne sont remplacées par le propagateur de Dirac-Volkov habillé par laser.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons brièvement la théorie de la diffusion et ses types en électrodynamique quantique, avec l'identification Lagrangienne de cette dernière, ainsi on donne les règles de Feynman pour savoir comment construire les diagrammes de Feynman, puis nous définissons le concept de la section efficace et le taux de transition, qui sont probablement les plus importants de toute la physique des particules expérimentales, sans oublier de rappeler les variables de Mandelstam, et nous indiquons la différence entre le système du centre de masse et le système de laboratoire pour une réaction, c'est-à-dire la cinématique d'une réaction. Enfin, nous avons présenté dans cette thèse tous les états possibles de propagation du laser qui peuvent être considérés comme des ondes électromagnétiques.

Dans le troisième chapitre, nous étudions en détail le processus de la diffusion de Compton, ce travail montre les calculs détaillés des sections efficaces différentielles avec le formalisme Spin-Helicity. Tout d'abord, nous commençons par la diffusion Compton non polarisée analysée dans le système de laboratoire, pour montrer la formule de Klein-Nishina bien connue et sa version classique appelée la formule de Thomson. Ensuite, nous étudions la diffusion Compton en polarisant les électrons dans le système du centre de masse. On introduit un concept bien connu de la section efficace différentielle de spin flip ainsi que de la section efficace différentielle de spin-non flip. Un contrôle de cohérence important qui a été effectué avec succès est que la somme des deux sections efficaces différentielles de spin-flip et de spin-non flip donne toujours la section efficace différentielle non polarisée. Enfin, les résultats obtenus sont interprétés et discutés. Il faut noter que nous avons utilisé le logiciel REDUCE [53] pour calculer les traces compliquées.

Pour bien comprendre l'interaction laser-matière et clarifier l'influence du rayonnement électromagnétique sur la section efficace de diffusion, nous donnons dans le quatrième chapitre l'étude théorique complète de l'émission d'un photon par un électron dans le champ d'une onde plane électromagnétique polarisée circulairement. Les électrons incidents et diffusés sont décrits par les fonctions d'onde bien connues de Dirac-Volkov. Nous calculons analytiquement la formule générale de la section efficace différentielle et nous montrons comment la formule Klein-Nishina se transforme lorsque le champ électromagnétique est suffisamment faible et le nombre de photons échangés $s = 1$. On verra comment la présence du champ électromagnétique complique le calcul et entraîne l'apparition des fonctions de Bessel. On étudie aussi la dépendance de la section différentielle vis-à-vis des autres paramètres de champ. Nous notons que les calculs de trace compliqués sont effectués à l'aide d'un logiciel REDUCE [53].

Au chapitre 5, nous étudions théoriquement la diffusion d'un électron par un muon en présence d'un champ laser monochromatique polarisé circulairement dans la première approximation de Born. Les expressions de l'amplitude et de la section différentielle sont dérivées analytiquement en adoptant l'approche d'image de Furry dans laquelle les calculs sont effectués en utilisant des fonctions de Dirac-Volkov relativistes exactes. Nous commençons par étudier le processus en prenant compte l'habillage relativiste uniquement de l'électron sans muon. Ensuite, afin de révéler l'effet de l'habillage du muon, nous considérons pleinement l'habillage relativiste de l'électron et du muon ensemble dans les états initial et final. Par conséquent, la section efficace différentielle est réduite de manière significative par le champ laser. Nous constatons que l'effet d'habillage du muon par laser devient perceptible à des intensités de champ laser supérieures ou égales à 10^9 V cm^{-1} et doit donc être pris en compte. L'influence

de l'intensité et de la fréquence du champ laser sur la section efficace différentielle et le processus multiphotonique est révélée. Une comparaison perspicace avec les résultats sans laser est également incluse. Il faut noter que nous avons utilisé le package FEYNCALC [116, 117, 118] pour calculer les traces compliquées.

Introduction

Dans ce chapitre, nous discuterons rapidement les notations et les conventions utilisées dans cette thèse, les particules physiques à une vitesse proche de celle de la lumière, il est nécessaire de décrire leur mouvement. Les méthodes employées pour cette généralisation doivent être consistantes avec les équations de transformation de Lorentz. On considère par la suite l'équation de Dirac décrivant les particules de spin demi-entier (les électrons et les positrons, les muons, etc.).

L'objectif de ce chapitre est de présenter les équations qui décrivent les ondes relativistes de Dirac-Volkov et la fonction de Green, ainsi les fonctions Bessel qui sont utilisées dans les chapitres suivants pour calculer des sections efficace de diffusion en l'absence ou en présence d'un champ laser. Nous passons en revue les propriétés du système composé d'un électron et d'une onde électromagnétique. Nous verrons que ce système peut être résolu exactement sous une forme analytique, la condition est que l'onde laser peut être traitée comme une onde plane, c'est-à-dire une onde qui se propage dans une seule direction.

1.1 Notations et conventions

Dans cette thèse, nous utiliserons des unités conventionnelles à haute énergie :

$$\hbar = c = 1, \quad (1.1)$$

cela signifie que toutes les quantités dimensionnelles sont mesurées sur une seule échelle. Si rien d'autre n'est indiqué, nous prenons cette échelle pour l'énergie, mesurée en MeV. Nous avons la masse d'électrons $m = 0,511$ MeV. Certains facteurs de conversion se lisent :

$$\begin{aligned} [\text{MeV}]^2 &= 2.568 \times 10^{21} \text{cm}^{-2}, \\ \text{MeV} &= 1.602 \times 10^{-13} \text{J}, \\ \text{MeV} &= 1.519 \times 10^{21} \text{s}^{-1}, \\ [\text{MeV}]^2 &= 0.507 \times 10^{19} |e| \text{Vm}^{-1}, \\ [\text{MeV}]^{-1} &= 0.1973 \times 10^{-12} \text{m}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous utilisons les conventions de Heaviside-Lorentz, de sorte que la relation entre la charge électrique négative $e = -|e|$ et la constante α s'écrit :

$$e = -2\sqrt{\pi\alpha} \approx -0.3028, \quad \text{avec } \alpha \approx 1/137.04. \quad (1.3)$$

1.1.1 Coordonnées

Dans l'espace-temps, un point est représenté par le quadrivecteur x^μ tel que :

$$x^\mu = (x^0, x^i) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

avec $x^0 = ct$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, et $i = 1, 2, 3$ ($x^i = r = (x, y, z)$). (1.4)

1.1.2 Tenseur métrique, indices covariants et contravariants

Le tenseur métrique utilisé est :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

L'existence du tenseur métrique permet de définir des quadrivecteurs covariants :

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -x, -y, -z), \quad (1.6)$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -p_x, -p_y, -p_z), \quad (1.7)$$

avec $c = 1$. De plus, on peut définir une métrique inverse $g^{\mu\nu}$ telle que :

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu, \quad (1.8)$$

le produit scalaire de deux quadrivecteurs a_μ et b^μ s'écrit :

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.9)$$

avec $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

La norme du quadrivecteur a^μ se déduit à travers :

$$a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2 \quad (1.10)$$

Le quadrivecteur du champ électromagnétique s'écrit :

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}), \quad (1.11)$$

avec $V = V(\mathbf{r}, t)$ désignant le potentiel scalaire et $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ désignant le potentiel vecteur.

L'opérateur gradient s'écrit comme suit :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (1.12)$$

avec

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.13)$$

Le D'Alembertien \square :

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (1.14)$$

et

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ieV, \nabla - ie\mathbf{A} \right). \quad (1.15)$$

1.2 L'équation de Klein-Gordon

D'après le contexte historique, on peut voir que la première équation d'onde relativiste a été introduite en 1926 simultanément par Klein [27], Gordon [28], Kudar [29], Fock [30][31] et De Donder et Van Dungen [32]. Schrödinger lui-même l'a formulée plus tôt dans ses notes avec l'équation de Schrödinger [33]. Dans ce qui suit, nous décrivons la dérivation de l'équation de Klein-Gordon comme une généralisation de l'équation de Schrödinger. Pour une dérivation mathématique correcte de ces équations à partir des premiers principes, voir [34]. L'équation de Schrödinger de la particule libre peut être dérivée de la relation énergie-impulsion :

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.16)$$

par l'utilisation d'un principe de correspondance $p \mapsto -i\hbar\nabla$, $E \mapsto i\hbar\partial_t$ on obtient la fameuse équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi. \quad (1.17)$$

Maintenant, nous répétons la même procédure avec l'analogie relativiste de la relation de quantité d'énergie $E^2 = p^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$. Le principe de la correspondance nous conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0, \quad (1.18)$$

nous utiliserons les unités naturelles en (1.1), l'équation (1.18) devient :

$$(\square + m^2)\psi = 0, \quad (1.19)$$

et les états ψ sont alors des ondes planes qui s'écrivent :

$$\psi = \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)], \quad (1.20)$$

avec \mathbf{p} défini par sa projection sur la base des configurations par :

$$\mathbf{p} = \frac{1}{i}\nabla, \quad (1.21)$$

et

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (1.22)$$

contrairement à l'équation de Schrödinger, l'équation de Klein-Gordon est invariante sous la transformation de Lorentz, c'est donc un candidat éligible pour l'équation de la mécanique quantique relativiste. Cependant, elle pose encore d'autres problèmes qui compliquent son interprétation physique correcte.

1.3 L'équation de Dirac

Dans un effort pour surmonter les problèmes avec les densités de probabilité négatives de l'équation de Klein-Gordon, Dirac [35] a découvert en 1928 une autre équation relativiste, qui porte son nom. Son idée était d'éviter les dérivées temporelles dans l'expression de ρ . Cela ne

peut être réalisé que si l'équation d'onde ne contient pas de dérivées temporelles supérieures au premier ordre. Aussi, afin de satisfaire aux exigences de covariance relativiste et donc de symétrie complète dans le traitement des composantes spatiales et temporelles, il recherchait une équation différentielle linéaire de premier ordre dans les quatre coordonnées [36]

$$\partial_t \psi + (\alpha \nabla) \psi + im\beta \psi = 0, \quad (1.23)$$

où $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ et β sont des matrices hermitiennes constantes $N \times N$, $\psi = \psi_i$ est une matrice colonne $n \times 1$ dont chaque composante ψ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ satisfait l'équation de Klein-Gordon. Cela impose les conditions suivantes sur α et β

$$\frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) = \delta^{ij}, \quad (1.24)$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \quad (1.25)$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = I. \quad (1.26)$$

Il tient aussi, que $\text{Tr} \alpha^i = \text{Tr} \beta = 0$. La dimension N de la représentation explicite des α^i et β doit être paire. Pour notre cas particulier où $N = 4$ nous avons

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

en notant $\gamma^0 = \beta$ et $\gamma^i = \beta \alpha^i$, nous pouvons réécrire la forme générale de l'équation de Dirac (1.23) sous une forme plus pratique :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.28)$$

les matrices γ^μ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}; \\ \gamma^{\mu+} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0; \quad \gamma^\mu = \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu^{-1}; \\ \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\nu; \quad \gamma^0 = \gamma_0; \quad \gamma^k = -\gamma_k. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Toute solution de l'équation de Dirac résout automatiquement l'équation de Klein-Gordon. On peut le voir à partir de la décomposition de l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2)\psi = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (1.30)$$

l'inverse n'est pas vrai.

L'équation de Dirac décrit toutes les particules massives de spin 1/2 telles que les électrons et les quarks. Par conséquent, ces applications offrent également une motivation supplémentaire pour une étude plus approfondie de son descendant Klein-Gordon (1.30).

1.4 Solution de l'équation de Dirac

L'Hamiltonien de Dirac pour une particule libre est donné par

$$H = -i\hbar c \hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta \cdot m \cdot c^2, \quad (1.31)$$

et puisque $\hbar = c = 1$ et $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$, donc l'équation de Dirac pour une particule libre :

$$(-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta \cdot m) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (1.32)$$

la fonction d'onde $\psi(x, t)$ est un vecteur de quatre composantes en fonction de x et t (spineurs de Dirac) :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

pour obtenir l'équation stationnaire nous utilisons une solution de la forme :

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}, \quad (1.34)$$

avec E est l'énergie.

Ce qui donne :

$$(-i\hat{\alpha} \cdot \nabla + \beta \cdot \mathbf{m}) \psi(x) = E\psi(x), \quad (1.35)$$

on cherche des solutions de la forme :

$$\psi_p(x) = u_p e^{-i \frac{\mathbf{p}x}{\hbar}}, \quad (1.36)$$

où u_p est un vecteur de quatre composantes qui satisfait l'équation :

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta \mathbf{m}) u_p = E u_p. \quad (1.37)$$

On cherche u_p sous la forme d'un vecteur composée de deux vecteurs :

$$u_p = \begin{pmatrix} \Phi_p \\ \xi_p \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

Φ_p et ξ_p sont des fonction de r .

Par conséquent, l'équation (1.36) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} E - \mathbf{m} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & E + \mathbf{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_p(r) \\ \xi_p(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (1.39)$$

ce qui produit :

$$(E - \mathbf{m})\Phi_p(r) - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \xi_p(r) = 0, \quad (1.40)$$

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Phi_p(r) + (E + \mathbf{m})\xi_p(r) = 0, \quad (1.41)$$

on obtient donc :

$$\Phi_p(r) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - \mathbf{m}} \xi_p(r), \quad \text{et} \quad \xi_p(r) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + \mathbf{m}} \Phi_p(r). \quad (1.42)$$

En utilisant l'identité $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \vec{p}^2$, l'équation devient :

$$\Phi_p(r) = \frac{\vec{p}^2}{E^2 - \mathbf{m}^2} \Phi_p(r). \quad (1.43)$$

Ce qui implique $E^2 - m^2 = \vec{p}^2$, le même cas pour l'équation de Klein-Gordon, il existe deux solutions pour l'énergie, l'une négative et l'autre positive,

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (1.44)$$

par conséquent, nous écrivons la suite complète de solutions libres d'énergie positive et d'énergie négative de l'équation de Dirac,

$$U(p) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

avec N est un nombre complexe, on remarque qu'il existe deux solutions linéairement différentes pour $U(p)$ correspondant aux deux possibilités indépendantes pour χ . Par exemple : $\chi(0, 1)$ et $\chi(1, 0)$. Afin de normaliser proprement l'équation de Dirac, alors :

$$\bar{U}(p).U(p) = 1. \quad (1.46)$$

Cette contrainte se résoudrait facilement si un choix de phase pour N nous permet d'obtenir

$$N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}.$$

Ainsi :

$$U(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

on a alors trouvé deux solutions à énergie positive $U_1(p)$ et $U_2(p)$ et deux solutions à énergie négative $V_1(p)$ et $V_2(p)$. Ces solutions sont linéairement indépendantes.

Donc :

$$V(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

La solution générale libre de l'équation de Dirac peut être écrite par linéarité sous forme d'une intégrale sur p des spineurs U et V , avec $a_s(\vec{p})$ et $b_s(\vec{p})$ deux fonctions, alors :

$$\psi(x, t) = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} (a_s(\vec{p})U_s(p)e^{-ip.x} + b_s(\vec{p})V_s(p)e^{ip.x}), \quad (1.49)$$

1.5 Équation de Dirac pour un électron dans le champ d'une onde électromagnétique plane (Dirac Volkov)

Dans cette section, on utilise les unités naturelles ($\hbar = c = 1$) utilisées couramment en physique des particules élémentaires. La raison première est que le formalisme de base qui va être utilisé a tout d'abord été donné dans ces unités. C'est dans le champs d'une onde électromagnétique plane que l'équation de Dirac pour l'électron admet une solution exacte (onde de Volkov) [37]. Le champ d'une onde plane de quadrivecteur d'onde k^μ ($k_\mu.k^\mu = k^2 = 0$) ne dépend des coordonnées x^μ que par la combinaison $\phi = k_\mu.x^\mu = k.x$ de sorte que le 4-vecteur potentiel est donné par :

$$A^\mu = A^\mu(k.x) = A^\mu(\phi), \quad (1.50)$$

ce quadrivecteur satisfait à la condition de jauge de Lorentz :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k^\mu . A_\mu = 0. \quad (1.51)$$

1.5.1 Équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique

On présente l'équation de Dirac d'un électron en présence d'un champ électromagnétique extérieur quelconque. Le champ est décrit de manière classique. Il est représenté par les potentiels scalaire $\phi(r, t)$ et vecteur $A(r, t)$. La modification des opérateurs, impulsion et énergie, est décrite par les substitutions suivantes ($e < 0$) [38] :

$$\begin{aligned} p &\longmapsto p - eA(r, t), \\ E &\longmapsto E - e\phi(r, t), \end{aligned} \quad (1.52)$$

l'équation d'évolution d'un bi-spineur en présence d'un champ externe s'écrit alors :

$$(c\alpha.(p - eA(r, t)) + mc^2\beta + e\phi(r, t))\psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t), \quad (1.53)$$

on présente le cas d'interaction sous sa forme covariante. L'équation (1.53) est multipliée par β et divisée par $\hbar c$:

$$\frac{\beta}{\hbar c} (c\alpha.(-i\hbar\nabla - eA(r, t)) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + mc^2\beta + e\phi(r, t))\psi(r, t) = 0, \quad (1.54)$$

donc

$$(-i\beta\alpha\nabla - i\frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{\hbar c} (\beta c\alpha.A(r, t) - \beta\phi(r, t)) + \frac{mc}{\hbar})\psi(r, t) = 0, \quad (1.55)$$

ce qui permet d'introduire la notation quadri-dimensionnelle $\partial_\mu = (c\partial_t, \partial_k)$ et $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^k) = (\beta, \beta\alpha^k)$ en ajoutant celle des potentiels électromagnétiques $A_\mu = (A_k, \frac{-\phi}{c})$ pour obtenir l'équation sous sa forme covariante :

$$\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu + m)\psi(r, t) = 0, \quad (1.56)$$

pour obtenir une équation différentielle du second ordre, on applique l'opérateur $\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu + m)$ à l'équation (1.56). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \gamma^\nu (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - m^2)\psi(r, t) &= 0, \\ (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - m^2)\psi(r, t) &= 0, \end{aligned}$$

alors :

$$((\partial_\mu - ieA_\mu)^2 - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} [(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu)] - m^2)\psi(r, t) = 0. \quad (1.57)$$

En utilisant les relations de commutation $[A_\mu, A_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, le commutateur de l'équation (1.57) se transforme au tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Donc, l'équation de Dirac pour un électron dans un champ extérieur est donnée par [38] :

$$((p - eA)^2 - m^2 - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu})\psi(r, t) = 0, \quad (1.58)$$

le terme d'interaction rayonnement-matière $F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ peut aussi s'écrire dans une représentation complexe, en fonction des matrices de Dirac et du champ électromagnétique [38]

$$F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = i.\alpha E + \sigma\beta. \quad (1.59)$$

1.5.2 Fonction d'onde de Dirac Volkov

L'équation de Dirac, pour une particule de masse m et de charge Q , en présence d'un champ électromagnétique est donnée par :

$$((p - eA)^2 - m^2 - \frac{1}{2}ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi(r, t) = 0, \quad (1.60)$$

en simplifiant cette équation, nous obtenons :

$$(p - eA)^2\psi = (p - eA)_\mu(p - eA)^\mu\psi, \quad (1.61)$$

on a

$$(p - eA)^2\psi = p_\mu p^\mu\psi - ep_\mu(A^\mu\psi) - eA_\mu(p^\mu\psi) + e^2A_\mu A^\mu\psi, \quad (1.62)$$

$$p_\mu(A^\mu\psi) = (p_\mu A^\mu)\psi + A^\mu(p_\mu\psi) = i(\partial_\mu A^\mu)\psi + iA^\mu\partial_\mu\psi = iA^\mu\partial_\mu\psi, \quad (1.63)$$

aussi :

$$p_\mu(A^\mu\psi) + A_\mu(p^\mu\psi) = iA^\mu\partial_\mu\psi, \quad (1.64)$$

alors :

$$(p - eA)^2\psi = -\partial^2\psi - 2iA^\mu(\partial_\mu\psi) + e^2A^\nu A_\nu\psi. \quad (1.65)$$

En développant le deuxième terme, nous trouvons :

$$\begin{aligned} iF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{-i}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi, \\ &= \frac{-i}{2}(k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi, \\ &= -\frac{i}{2}(\not{k}A' + A'\not{k} - A'\not{k} - \not{k}A') = -i(\not{k}A' - A'\not{k}), \end{aligned} \quad (1.66)$$

donc :

$$\frac{-ie}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -i\not{k}A', \quad (1.67)$$

alors l'équation de Dirac pour un électron dans un champ extérieur devient :

$$(-\partial_\mu\partial^\mu - 2ieA_\mu\partial^\mu - m^2 + e^2A^\mu A_\mu - ie\not{k}A')\psi. \quad (1.68)$$

On cherche une solution de cette équation sous la forme suivante :

$$\psi(r, t) = e^{-ip \cdot x} F(\Phi), \quad (1.69)$$

où p est un quadrivecteur tel que $p_\mu p^\mu = p^2 = m^2$. On a :

$$\partial^2(e^{-ip \cdot x} F(\Phi)) = [\partial^2 e^{-ip \cdot x}]F + 2[\partial e^{-ip \cdot x}][\partial F] + e^{-ip \cdot x} \partial^2 F, \quad (1.70)$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial F(\Phi) &= \partial \partial_a F(k^b \cdot x_b) = k^b F(\Phi)', \\ \partial^2 F &= \partial_a(\partial^a F) = k^a(\partial^a F) = k^a k_a F'' = 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Et

$$[\partial e^{-ip.x}][\partial F] = [\partial_\mu e^{-ip.x}][\partial_\mu F] = -ip_\mu e^{-ip.x} k^\mu F' = -ip_\mu k^\mu e^{-ip.x} F', \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} [\partial^2 e^{-ip.x}]F &= -p^2[e^{-ip.x}F], \\ -\partial^2\psi &= [p^2F + 2ip_\mu k^\mu F']e^{-ip.x} \\ &= m^2 e^{-ip.x}F + 2i[pk]e^{-ip.x}F', \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} -2ieA_\mu[\partial^\mu e^{-ip.x}] &= -2ieA_\mu[-ip^\mu e^{-ip.x}F + e^{-ip.x}k^\mu F'] \\ &= -2e[pA]e^{-ip.x}F - 0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

en remplaçant ψ donnée par (1.69) dans (1.68), on obtient :

$$m^2 e^{-ip.x}F + 2i[pk]e^{-ip.x}F' - m^2 e^{-ip.x}F - 2e[pA]e^{-ip.x}F + e^2 A^2 e^{-ip.x}F - ie e^{-ip.x}F = 0, \quad (1.75)$$

ce qui donne :

$$2i[kp]F' + [-2e(pA) + e^2 A^2 - ie k \not{A}]F = 0. \quad (1.76)$$

La solution de cette équation est :

$$F(\Phi) = \exp\left\{-i \int_0^{k.x} \left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\Phi + e^{\frac{k \not{A}}{2(kp)}}\right\} \frac{U}{\sqrt{(2p_0)}}. \quad (1.77)$$

Où U est un spineur à quatre composantes constantes. Dans le terme $\exp\{\frac{e k \not{A}}{2(kp)}\}$, toutes les puissances de $k \not{A}$ supérieure à la première puissance sont nulles :

$$k \not{A} k \not{A} = -k A^2 k = -k^2 A^2 = 0, \quad \text{car : } k^2 = 0, \quad (1.78)$$

alors :

$$\exp\left\{\frac{e k \not{A}}{2(k.p)}\right\} = 1 + \frac{e k \not{A}}{2(k.p)}. \quad (1.79)$$

Enfin la solution de l'équation de Dirac en présence de champ électromagnétique est donnée par :

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e k \not{A}}{2(k.p)}\right] \frac{U(p)}{\sqrt{2p_0}} e^{is(x)}, \quad (1.80)$$

avec :

$$s(x) = -px - \int_0^{kx} \frac{e}{(kp)} [(pA) - \frac{e}{2} A^2] d\Phi. \quad (1.81)$$

Pour déterminer les conditions imposées au bi-spineur constant $U(p)$, on suppose que l'onde s'applique d'une manière adiabatique à partir de $t \rightarrow -\infty$. Alors, $|A| \rightarrow 0$ lorsque $ks \rightarrow \pm\infty$ et ψ doit se réduire à la solution de l'équation de Dirac pour la particule libre $U = U(p)$ qui doit satisfaire à l'équation :

$$(\not{p} - m)U(p) = 0, \quad (1.82)$$

cette condition élimine les solutions supérieures du second ordre. La normalisation des fonctions d'onde ψ_p est donc :

$$\int \psi_p^\dagger(x) \psi_p(x) dx = \int \psi_{p'} \gamma^0 \psi_p dx = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (1.83)$$

c'est la même normalisation que celle des ondes planes libres.

1.6 Les fonctions de Green

Les fonctions de Green constituent une méthode assez générale de résolution des équations différentielles, ou de transformation d'équations différentielles en équations intégrales. Elles sont extrêmement utilisées en mécanique quantique, où on les appelle des propagateurs. Nous passons maintenant à la détermination de la fonction de Green $G_0(r, r')$, qui correspond à l'opérateur ∇_r^2 et au paramètre k :

$$(\nabla_r^2 + k^2)G_0(r, r') = \delta(r - r'), \quad (1.84)$$

il est pratique de travailler dans un espace des vecteurs d'onde. On utilise la représentation intégrale de la fonction δ :

$$\delta(r - r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik'(r-r')} dk', \quad (1.85)$$

on écrit $G_0(r, r')$ sous la forme suivante :

$$G_0(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g_0(k', r') e^{ik'r} dk', \quad (1.86)$$

on obtient après la substitution dans l'équation (1.84) :

$$g_0(k', r') = \frac{e^{-ik'r'}}{k^2 - k'^2}, \quad (1.87)$$

par conséquent, on trouve pour $G_0(r, r')$:

$$G_0(r, r') = \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} e^{-ik'(r-r')} \left(\frac{-4\pi}{k'^2 - k^2} \right). \quad (1.88)$$

1.7 Les fonctions de Bessel

En mathématiques, les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, ces fonctions sont l'une des fonctions spéciales les plus utilisées en physique théorique. Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1816 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli. Dans le contexte de l'interaction laser-matière, les fonctions de Bessel apparaissent comme des coefficients dans le développement en série de Fourier de la fonction d'onde d'un électron dans un champ électromagnétique à onde plane.

Les fonctions de Bessel sont des solutions canoniques $y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel d'ordre n :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (1.89)$$

1.7.1 Les fonctions de Bessel de première espèce

On cherche des fonctions qui résolvent l'équation (1.89). Ces solutions peuvent être trouvées avec la méthode de Frobenius, qui consiste à trouver des fonctions de la forme :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\alpha+i}, \quad a_0 \neq 0, \quad (1.90)$$

où l'on doit déterminer la constante α et les coefficients a_i , avec $a_0 \neq 0$. Les dérivées première et seconde de y par rapport à x sont :

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha + i)x^{\alpha+i-1}, \quad (1.91)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha + i)(\alpha + i - 1)x^{\alpha+i-2}, \quad (1.92)$$

en remplaçant ces séries dans l'équation (1.89), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha + i)(\alpha + i - 1)x^{\alpha+i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha + i - n^2)x^{\alpha+i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\alpha+i+2} &= 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} ((\alpha + i)(\alpha + i - 1) + (\alpha + i - n^2)) a_i x^{\alpha+i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\alpha+i+2} &= 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i ((\alpha + i)^2 - n^2) x^{\alpha+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} x^{\alpha+i} &= 0, \end{aligned} \quad (1.93)$$

cela signifie que chaque coefficient des puissances de x doit être nul. Ainsi, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} (\alpha^2 - n^2)a_0 = 0, \\ ((\alpha + 1)^2 - n^2)a_1 = 0, \\ ((\alpha + i)^2 - n^2)a_i + a_{i-2} = 0, \quad \forall i \geq 2. \end{cases} \quad (1.94)$$

Puisque $a_0 \neq 0$, $\alpha = \pm n$. Tout d'abord, nous prenons $\alpha = n$. Les autres équations seront :

$$(2n + 1)a_1 = 0, \quad i(2n + i)a_i + a_{i-2} = 0, \forall i \geq 2. \quad (1.95)$$

Si $2n$ n'est pas un entier négatif, ces équations deviennent :

$$a_1 = 0, \quad a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(2n + i)}, \forall i \geq 2, \quad (1.96)$$

cela signifie que les coefficients d'indice impair sont tous nuls, et que ceux d'indice pair sont déterminés par cette formule,

$$a_{2i} = -\frac{a_{2i-2}}{2^2 i(n + i)}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad (1.97)$$

d'où

$$\begin{aligned} a_2 = -\frac{a_0}{2^2(n + 1)} &\implies a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(n + 2)} = \frac{a_0}{2^4 2(n + 1)(n + 2)}, \\ &\implies a_6 = -\frac{a_4}{2^2 3(n + 3)} = -\frac{a_0}{2^6 3!(n + 1)(n + 2)(n + 3)}, \\ &\implies \dots \implies a_{2i} = \frac{(-1)^i a_0}{2^{2i} i! \prod_{j=1}^i (n + j)}, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Tant que nous pouvons choisir a_0 , nous supposons que :

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n + 1)}, \quad (1.99)$$

où Γ est la fonction Gamma.

Nous pouvons enfin donner une expression pour une solution de l'équation (1.89).

Cette solution s'appelle les fonctions de Bessel de première espèce, J_n , d'ordre n et d'argument x . Elles sont définies par la série entière suivante :

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n}, \quad (1.100)$$

le même processus peut être appliqué pour $\alpha = -n$. Dans ce cas, on obtient :

$$J_{-n}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(-n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i-n}, \quad (1.101)$$

cette fois, nous supposons que $2n$ n'est pas un entier positif.

Pour travailler avec ces expressions, on voudrait que les séries (1.100) et (1.101), soient absolument convergentes pour tout $x \neq 0$, nous pouvons les différencier terme par terme.

Comme $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, et donc elles forment une base pour l'espace vectoriel des solutions de l'équation (1.89), qui est une équation différentielle linéaire du second ordre. En raison des solutions formant un espace vectoriel à deux dimensions, et $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ étant linéairement indépendantes, toute solution peut être exprimée comme une combinaison linéaire de celles-ci.

Maintenant, si n un entier non négatif. Alors, en utilisant la fonction $\Gamma(k+1)$ qui est infinie pour tout entier négatif k , et on pose $s = i - n$,

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(-n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i-n} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{i! \Gamma(-n+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i-n} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (-1)^n}{(s+n)! \Gamma(-n+s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(s+n)-n} \\ &= (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned} \quad (1.102)$$

D'où, les fonctions $J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont linéairement dépendantes, nous avons besoin de définir une nouvelle solution de l'équation (1.89), linéairement indépendante de J_n .

Par exemple, les fonctions $J_0(x)$ et $J_1(x)$ jouent un rôle majeur dans les applications physiques. Par définition, les fonctions de Bessel de première espèce d'ordres 0 et 1 sont :

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}, \quad (1.103)$$

$$J_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+1}. \quad (1.104)$$

Ainsi, pour de petites valeurs de x , $J_0(x) \approx 1$ et $J_1(x) \approx \frac{x}{2}$. De plus, nous avons pour les valeurs réelles de x : $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) = 0$.

Les graphiques de ces fonctions sont illustrés à la figure (1.1).

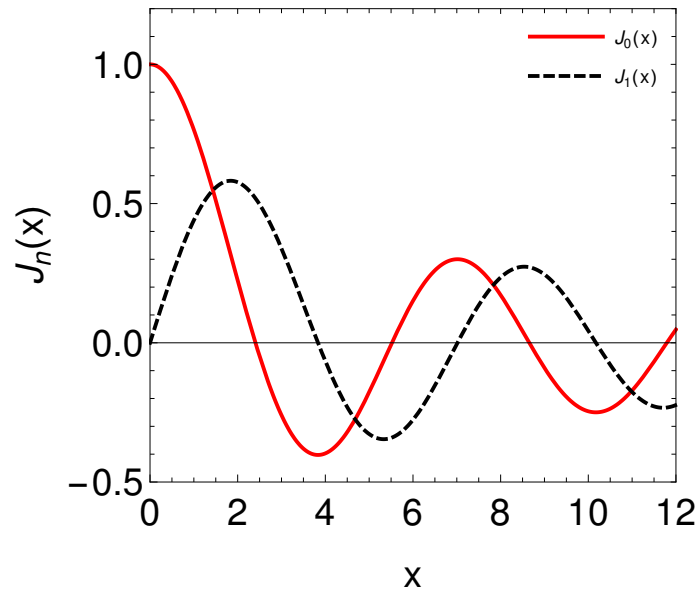


FIGURE 1.1 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel de première espèce.

1.7.2 Les fonctions de Bessel de seconde espèce

Les fonctions de Bessel de seconde espèce Y_n , appelées aussi fonctions de Neuman ou encore les fonctions de Weber-Schlafli, sont des solutions de l'équation différentielle (1.89). Elles sont définies par la série entière suivante :

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}, \quad (1.105)$$

qui a pour conséquence (sous forme intégrale)

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin(\theta) - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sin ht} dt, \quad (1.106)$$

les graphiques de ces fonctions de Bessel de seconde espèce sont illustrés dans la figure (1.2), pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ comme un exemple.

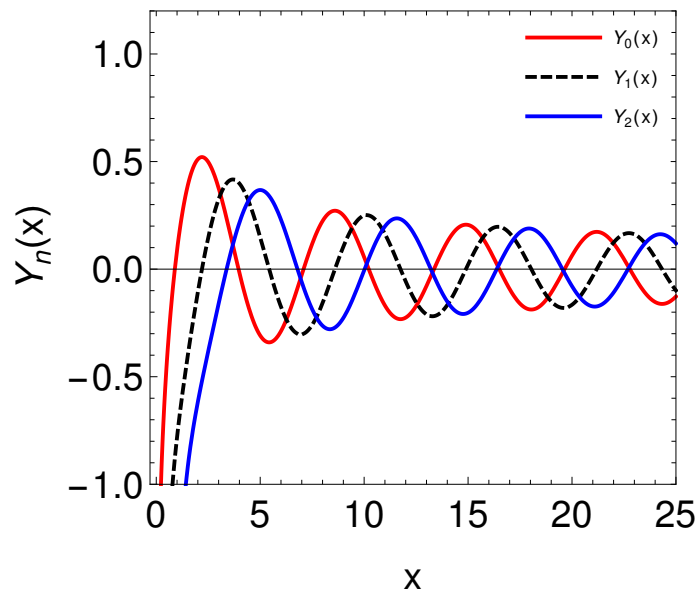


FIGURE 1.2 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel de seconde espèce.

1.7.3 Propriétés des J_n

Notre point de vue de la fonction de Bessel est qu'il s'agit du coefficient dans le développement en série de Fourier de la fonction périodique $\exp(i\alpha \sin \theta)$:

$$\exp(i\alpha \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\theta}. \quad (1.107)$$

Avec l'astuce de Fourier, nous multiplions les deux côtés par $\exp(-im\theta)$ de l'équation (1.107), puis intégrons les deux côtés sur une période $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta$, on trouve la représentation intégrale suivante :

$$J_m(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\sin \theta - m\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin \theta - m\theta) d\theta, \quad (1.108)$$

où la dernière égalité résulte d'arguments de symétrie. On peut considérer l'équation (1.108) comme une définition de $J_n(\alpha)$ pour les valeurs réelles de α et d'entier n (qui sont les seuls cas que nous traitons).

L'équation (1.108) présente immédiatement deux symétries :

$$J_n(\alpha) = J_{-n}(-\alpha) = (-1)^n J_n(-\alpha), \quad (1.109)$$

une autre propriété qui découle de la définition est

$$J_n(0) = \delta_{0n}, \quad (1.110)$$

où δ_{0n} est le delta de Kronecker,

$$\delta_{0n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (1.111)$$

On peut utiliser aussi l'équation (1.108) pour vérifier que la fonction de Bessel satisfait la relation de récurrence suivante :

$$2nJ_n(\alpha) = \alpha [J_{n+1}(\alpha) + J_{n-1}(\alpha)], \quad (1.112)$$

la relation de récurrence (1.112) est un outil important dans l'évaluation numérique. Nous avons pour des sommes de produits de fonctions de Bessel :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(\alpha) J_{n+m'}(\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[-n(\theta+\theta')-m\theta-m'\theta'+\alpha \sin \theta + \beta \sin \theta']} d\theta d\theta', \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\theta(m'-m)+(\alpha-\beta) \sin \theta]} d\theta, \\ &= J_{m-m'}(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (1.113)$$

dans laquelle nous avons utilisé l'identité :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-inx} = \sum_k \delta(2\pi k + x) = \delta(x), \quad (1.114)$$

puisque qu'on a dans ce cas $|x| < 2\pi$. L'équation (1.113) donne comme cas particulier :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(x)]^2 = 1. \quad (1.115)$$

Une autre expression de la fonction de Bessel est par une somme infinie [39],

$$J_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j}}{j!(n+j)!}. \quad (1.116)$$

Les deux représentations (1.108) et (1.116) sont les seules que nous utiliserons, il existe cependant bien d'autres façons [39].

1.7.4 Les fonctions de Bessel généralisées

La fonction de Bessel généralisée $B_0(n, \alpha, \beta)$ est une généralisation de la fonction de Bessel usuelle $J_n(\alpha)$, et est une fonction d'un indice entier n et deux variables réelles α et β . Elle a été introduite pour la première fois par Reiss [42] dans le cadre de la création de paires par un photon et un faisceau laser (plus tard pour l'ionisation induite par champ [43, 44]), ensuite, elle a été étudiée par de nombreux auteurs [45, 46, 47, 48, 49]. Bien que le principal domaine d'application ait jusqu'à présent été l'interaction laser-matière, l'utilisation des fonctions de Bessel généralisées est également faite dans d'autres domaines tels que la cristallographie [50].

La fonction de Bessel généralisée partage de nombreuses propriétés de la fonction de Bessel habituelle. Comme la fonction de Bessel généralisée dépend de deux variables au lieu d'une seule, les choses sont cependant plus compliquées. De manière similaire à la fonction de Bessel habituelle, nous visualisons la fonction de Bessel généralisée $B_0(n, \alpha, \beta)$ comme le coefficient dans le développement en série de Fourier de la fonction périodique $\exp[i\alpha \sin \theta - i\beta \sin(2\theta)]$:

$$e^{i\alpha \sin \theta - i\beta \sin(2\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_0(n, \alpha, \beta) e^{in\theta}, \quad (1.117)$$

qui, en vertu de l'astuce de Fourier, donne la représentation intégrale :

$$\begin{aligned} B_0(n, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi + i\alpha \sin \phi - i\beta \sin(2\phi)} d\phi, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(-n\phi + \alpha \sin(\phi) - \beta \sin(2\phi)) d\phi. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Si nous insérons maintenant le développement de Fourier (1.107) pour chacune des exponentielles $\exp(i\alpha \sin \theta)$ et $\exp(-i\beta \sin 2\theta)$, l'intégrale sur θ réduit la double somme à une seule, de sorte qu'on peut exprimer la fonction de Bessel généralisée comme une somme infinie sur les produits des fonctions de Bessel habituelles :

$$B_0(n, \alpha, \beta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{n+2s}(\alpha) J_s(\beta). \quad (1.119)$$

Les graphiques de ces fonctions de Bessel généralisée sont présentées dans la figure (1.3), pour $n = 50$ comme un exemple.

L'équation (1.118) ou (1.119) peut être considérée comme la définition de $B_0(n, \alpha, \beta)$. L'indice 0 dans $B_0(n, \alpha, \beta)$ à la signification suivante : Nous définissons

$$\cos^l \theta e^{i[\alpha \sin \theta - \beta \sin(2\theta)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_l(n, \alpha, \beta) e^{in\theta}, \quad \text{avec } l \in \mathbb{N}, \quad (1.120)$$

on déduit que :

$$B_l(n, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} [B_{l-1}(n-1, \alpha, \beta) + B_{l-1}(n+1, \alpha, \beta)], \quad (1.121)$$

avec l un entier positif, les fonctions B_l sont nécessaires dans les applications des chapitres 4 et 5. En utilisant la règle de somme (1.113) pour $B_0(n, \alpha, \beta)$, ce qui donne :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_0(N+m, \alpha_1, \beta_1) B_0(M+m, \alpha_2, \beta_2) = B_0(N-M, \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2), \quad (1.122)$$

ou plus généralement pour $B_l(n, \alpha, \beta)$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_i(N+m, \alpha_1, \beta_1) B_j(M+m, \alpha_2, \beta_2) = B_{i+j}(N-M, \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2), \quad (1.123)$$

avec N et M des entiers. La dérivation partielle de la représentation intégrale (1.118) découle la relation de récurrence :

$$2nB_0(n, \alpha, \beta) = \alpha [B_0(n-1, \alpha, \beta) + B_0(n+1, \alpha, \beta)] - 2\beta [B_0(n-2, \alpha, \beta) + B_0(n+2, \alpha, \beta)]. \quad (1.124)$$

Notons que la relation (1.124) est plus complexe que celle pour $J_n(\alpha)$, ici chaque index dépend des quatre voisins.

Comme elle ressort des définitions (1.118) et (1.119), les fonctions de Bessel généralisées ont les symétries suivantes :

$$\begin{aligned} B_0(n, \alpha, -\beta) &= (-1)^n B_0(-n, \alpha, \beta), \\ B_0(n, -\alpha, \beta) &= (-1)^n B_0(n, \alpha, \beta), \\ B_0(-n, \alpha, \beta) &= B_0(n, -\alpha, -\beta), \end{aligned} \quad (1.125)$$

Lorsque l'un des arguments α ou β est égal à zéro, la fonction de Bessel généralisée $B_0(n, \alpha, \beta)$ se simplifie à la fonction de Bessel habituelle :

$$B_0(n, \alpha, 0) = J_n(\alpha), \quad (1.126)$$

et

$$B_0(n, 0, \beta) = \begin{cases} J_{\frac{-n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (1.127)$$

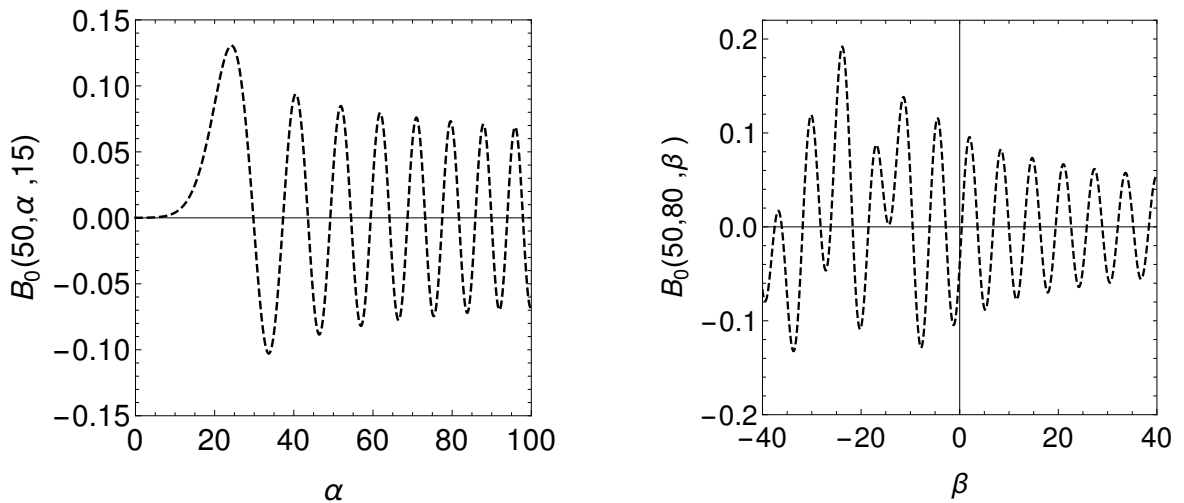


FIGURE 1.3 – Représentations graphiques des fonctions de Bessel généralisées en fonction de α pour $n = 50$ et $\beta = 15$ (gauche), et en fonction de β pour $n = 50$ et $\alpha = 80$ (droite) .

Conclusion

L'équation de Dirac permet de décrire les fermions de manière quantique et relativiste. Postulée en 1928 par le britannique Paul Adrien Maurice Dirac, elle est invariante sous la transformation de Lorenz, elle admet une interprétation probabiliste de la fonction d'onde, elle contient naturellement des degrés de liberté de spin et parvint à prédire l'existence d'une anti-particule (le positron) [38]. On a tenté ici de présenter les bases mathématiques indispensables qui seront utilisées pendant la démonstration de la formule de Klein-Nishina, et de calculer les sections efficaces de diffusion dans les chapitres suivants. D'abord, nous avons présenté l'équation de Dirac libre et en présence d'un champ électromagnétique. Ensuite, les solutions de ces équations et finalement les fonctions de Green et de Bessel.

Introduction

le nombre de particules n'est pas préservé lors de leur collision relativistiquement. On ne peut pas décrire la physique derrière ce processus à l'aide de la mécanique quantique à une seule particule. Mais la théorie quantique des champs combine deux des thèmes majeurs de la relativité restreinte de la physique moderne et de la mécanique quantique pour décrire ce type d'interaction. L'électrodynamique quantique est une extension de la mécanique quantique pour l'analyse du système à plusieurs particules. Elle donne le cadre mathématique et conceptuel de la physique des particules élémentaires. Cette théorie fournit des outils essentiels à la physique nucléaire, à la physique atomique et à l'astrophysique. Comme cette thèse se concentre sur la section efficace de diffusion en électrodynamique quantique, il est donc intéressant de commencer par une introduction à l'électrodynamique quantique (QED), qui est l'une des théories les plus réussies et les plus précises connues en physique. C'est une théorie des champs d'interaction entre la lumière et la matière. Elle donne également des informations complètes sur l'interaction entre les particules chargées (leptons). Cette théorie nous permet de prévoir la façon dont les particules chargées sub-atomiques sont créées ou détruites. La QED est aussi connue sous le nom de Invariant Gauge Theory parce que ses prédictions ne sont pas influencées par des variations dans l'espace ou dans le temps. La valeur pratique des interactions électromagnétiques donne le même résultat prévu par la théorie QED.

En physique mathématique, la théorie de la diffusion offre un cadre pour étudier et de comprendre l'interaction ou la diffusion de solutions d'équations différentielles partielles. En acoustique, l'équation différentielle est l'équation d'onde, et la diffusion étudie comment ses solutions, les ondes sonores, se dispersent à partir d'objets solides ou se propagent dans des milieux non uniformes. Dans le cas de l'électrodynamique classique, l'équation différentielle est à nouveau l'équation d'onde, et la diffusion de la lumière ou des ondes radio est étudiée. Dans la physique des particules, les équations sont celles de l'électrodynamique quantique, de la chromodynamique quantique et du modèle standard, dont les solutions correspondent aux particules élémentaires.

Le formalisme de la théorie de la diffusion joue un rôle important dans la physique, car il permet de prédire les observations expérimentales à partir des interactions fondamentales postulées par la théorie.

2.1 Les expériences de la diffusion

Pour une expérience de diffusion se présente comme suit :

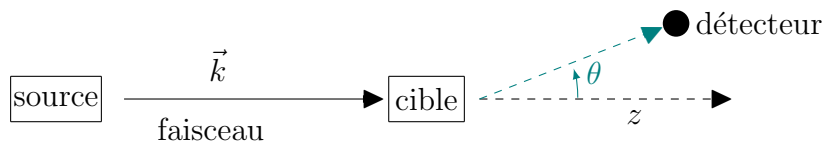


FIGURE 2.1 – Schéma d'une expérience de diffusion.

Il existe donc une source pour un faisceau de particules qui, après préparation de la cinématique du faisceau, heurtent une cible et qui sont ensuite observées dans un dispositif de détection. Notez que les cibles épaisses provoquent plusieurs événements de diffusion ; si celles-ci peuvent être difficiles à analyser dans le cas d'une cible amorphe, elles conduisent à des motifs d'interférences caractéristiques et donc à des informations structurelles dans le cas d'un cristal (pour la cible). Examinons ensuite la situation symétrique, figure (2.2), d'une expérience de diffusion avec deux faisceaux entre en collision :

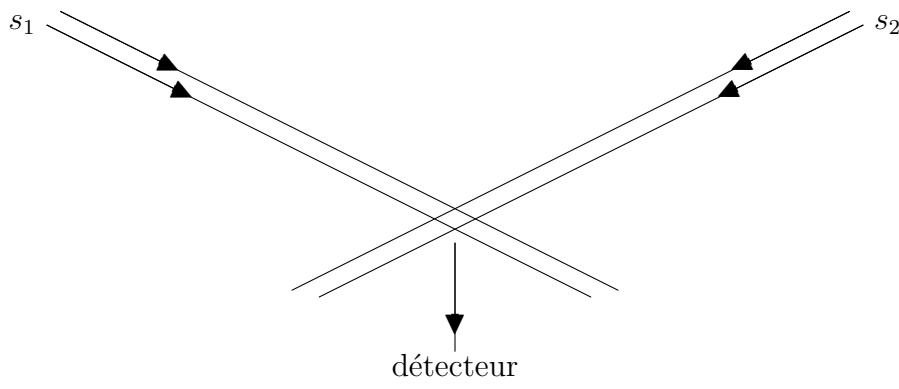


FIGURE 2.2 – Diffusion expérimentale

Dans ce contexte, nous souhaitons éloigner le détecteur de la zone de collision afin d'obtenir une bonne résolution angulaire. On ne place pas le détecteur dans le sens direct d'un faisceau entrant.

Voici une liste des grands accélérateurs en physique des particules :

- Fermilab à l'ouest de Chicago (Illinois, États-Unis), Tevatron (1983 ; $p + p$; 2 TeV ; découverte du quark top [40, 41] ; 6 km)
- Accélérateur linéaire de Stanford ("SLAC" ; 3 km)
- Brookhaven RHIC (collisionneur d'ions lourds relativiste ; plasma quark-gluon)
- DESY Hamburg (HERA $p + e$; PETRA $e^+ + e^-$)
- CERN Geneva (LEP ; LHC = Large Hadron Collider, 17 TeV)
- CEPC en Chine à 300 km à l'est de Pékin, (Collisionneur électron-positron circulaire), sera lancé vers 2025, vise 100 TeV.

2.2 Les types de processus de diffusion

Nous introduisons brièvement quelques nomenclatures :

1. La diffusion élastique est représentée schématiquement par

$$a + b \rightarrow a + b,$$

dans ce cas, toute l'énergie est ramenée à l'état de mouvement.

2. Dans le cas de la diffusion inélastique,

$$a + b \rightarrow a' + b',$$

les degrés de liberté internes des particules sont excités (par exemple, les degrés de liberté de rotation ou de vibration).

3. Dans la catégorie générale de la diffusion par réarrangement, l'identité des particules diffusées est altérée :

$$a + b \rightarrow c + d + e + \dots,$$

un exemple est la décomposition du deutéron en ses constituants (à savoir, un proton et un neutron) lors d'une collision avec une autre particule. Un second exemple est la diffusion nucléon-nucléon, où l'on a les possibilités :

$$\begin{array}{rcl}
 & & N_1 + N_2 \quad \text{(diffusion élastique)} \\
 N_1 + N_2 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \end{array} & N_1 + N_2 + \pi \quad \text{(production de pions)} \\
 & & N_1 + N_2 + K + \bar{K} \quad \text{(production de kaons)}
 \end{array}$$

4. En théorie de la diffusion, on peut aussi considérer la désintégration d'une particule instable ($a \rightarrow b + c + \dots$). Par exemple, un neutron libre se désintègre en un proton, un électron et un anti-neutrino :

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e.$$

2.3 Électrodynamiques quantiques

L'électrodynamique quantique est la théorie quantique du champ électromagnétique et des particules chargées, en particulier décrite par l'équation de Dirac. Cette théorie peut se résumer sous la forme d'une densité lagrangienne qui se divise en trois parties :

1. La densité lagrangienne des électrons libres :

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x), \quad (2.1)$$

où ψ et $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ sont le champ de l'électron et son conjugué, γ^μ sont les matrices de Dirac.

2. Le terme d'interaction :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x), \quad (2.2)$$

où A_μ est le champ du photon.

3. La densité lagrangienne du photon libre s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{Jauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (2.3)$$

où $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ est le tenseur de champ électromagnétique. Donc le lagrangien total de QED est écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x). \quad (2.4)$$

2.4 Les propagateurs dans la QED

Il existe deux approches de la QED. La plus formelle repose sur un appareil général de quantification des champs d'ondes ; l'autre voie, plus illustrative, provient de Stückelberg et Feynman, et utilise le formalisme du propagateur. Presque tout le monde souhaite voir le plus tôt possible comment les différents processus sont réellement calculés. Le formalisme du propagateur de Feynman est la meilleure façon d'atteindre cet objectif.

Pour le moment, nous passons à une discussion plus générale des processus de diffusion. Il s'agit ici de calculer des probabilités de transition et des sections efficaces de diffusion dans le cadre de la théorie des électrons et des positrons de Dirac. Ces calculs seront exacts en principe ; en pratique, cependant, ils seront effectués en utilisant la théorie des perturbations, c'est-à-dire une expansion en termes de petits paramètres d'interaction. Parce que nous devons décrire les processus de création et d'annihilation des paires électron-positron, le formalisme doit être relativiste dès le début.

Dans la méthode du propagateur de Feynman, les processus de diffusion sont décrits au moyen d'équations intégrales. L'idée directrice est que les positrons devraient être interprétés en tant qu'électrons d'énergie négative qui se déplacent dans le sens inverse du temps. Cette idée a d'abord été formulée par E.C.G. Stückelberg, puis largement utilisée par R. Feynman. Feynman a reçu le prix Nobel pour sa formulation de l'électrodynamique quantique, avec J. Schwinger et S. Tomonaga en 1965. Ce dernier a donné des formulations alternatives de la QED, qui sont mutuellement équivalentes. Dans la suite, nous souhaitons nous convaincre du pouvoir de la formulation de Feynman de la théorie. Les règles plus ou moins heuristiques ainsi obtenues sont tout à fait conformes aux résultats qui peuvent être obtenus avec beaucoup plus d'effort en utilisant la méthode de la théorie quantique des champs.

2.5 Les règles de Feynman

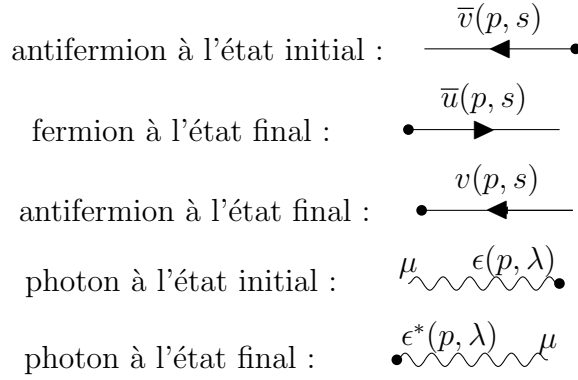
Pour trouver des contributions à l'élément de matrice réduit \mathcal{M} pour un processus physique impliquant des fermions de Dirac chargés et des photons :

1. Tracer tous les diagrammes de Feynman topologiquement distincts, avec des lignes ondulées représentant des photons et des lignes solides avec des flèches représentant des fermions, en utilisant les règles ci-dessous pour les lignes externes, les lignes internes et le vertex d'interaction. La direction de la flèche est conservée lors du suivi de chaque ligne de fermion. Appliquer une conservation de 4-impulsions à chaque vertex.

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & \rightsquigarrow & \sim \\ \text{fermion (spineur)} & & \text{photon, W, Z} \end{array}$$

2. les lignes externes sont écrites (avec 4 impulsions p^μ , et la polarisation de spin s ou λ selon le cas) :

$$\text{fermion à l'état initial : } \longrightarrow \bullet \quad u(p, s)$$



3. Pour les lignes de fermions internes, les propagateurs de Feynman sont écrits :

$$\longrightarrow \iff \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

avec p^μ 4-impulsions suivant la flèche, et m la masse du fermion. Pour les lignes de photons internes, s'écrivent :

$$\mu \text{ wavy line } \nu \iff \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right],$$

avec p^μ 4-impulsions dans les deux sens de la ligne ondulée. (Utilisez $\xi = 1$ pour la jauge Feynman et $\xi = 0$ pour la jauge Landau.)

4. Pour les vertex d'interactions, on peut écrire :

$$\iff -iQe\gamma^\mu,$$

l'indice de vecteur μ doit être contracté avec l'indice correspondant sur la ligne de photons auxquels il est relié. Il s'agira soit d'un facteur de ligne de photons externe de ξ_μ ou ξ_μ^* , soit d'un indice de propagateur de ligne de photons interne.

5. Pour chaque impulsion de boucle l^μ qui est indéterminée par la conservation à quatre impulsions avec des impulsions d'état externe fixes, effectuer une intégration $\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$. Obtenir une réponse finie à partir de ces intégrations de boucles nécessite souvent qu'ils soient régularisés en introduisant une coupure ou une autre astuce.
6. Appliquer le facteur (-1) à chaque boucle fermée.
7. Pour prendre en compte les indices de spineurs supprimés sur les lignes de fermions, écrivez les termes impliquant des spineurs comme suit. Pour les lignes de fermions qui traversent le diagramme, commencez à la fin de chaque ligne de fermions (comme définie par la direction de la flèche) avec un facteur \overline{u} ou \overline{v} , et notez les facteurs de γ^μ ou $(\not{p} + m)$ consécutivement, en suivant la ligne vers l'arrière jusqu'à ce que les spineurs u ou v soient atteints. Pour les boucles de fermions fermées, commencer par un vertex

- arbitraire de la boucle et suivez la ligne de fermion en arrière jusqu'à ce que le point d'origine soit atteint ; prendre une trace sur les matrices gamma en boucle fermée.
8. Si un diagramme de Feynman avec une ou plusieurs boucles fermées peut être transformé en une copie exacte de lui-même en échangeant un nombre quelconque de lignes internes par une déformation douce sans déplacer les lignes externes, alors il existe un facteur de symétrie supplémentaire de $1/N$, où N est le nombre de permutations distinctes de ce type.
 9. Après avoir noté les contributions de chaque diagramme à l'élément de matrice réduit \mathcal{M} selon les règles précédentes, attribuez un signe moins relatif supplémentaire entre les différentes contributions du diagramme chaque fois que l'ordre écrit des fonctions d'onde de spineur d'état externe u, v, \bar{u}, \bar{v} , diffère par une permutation impair.

2.6 La section efficace

Avant de calculer de façon explicite certaines amplitudes de transition, nous allons voir comment relier ces amplitudes aux observables physiques tels que les sections efficaces et les largeurs de désintégration de particules.

2.6.1 Taux de transition

Considérons un processus de diffusion arbitraire avec un état initial i avec une impulsion totale p_i et un état final f avec une impulsion totale p_f . Supposons que nous ayons calculé l'amplitude de diffusion pour ce processus en QED, c'est-à-dire que nous connaissions l'élément de matrice :

$$-i \prod_{f=1}^N N_f \prod_i N_i \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i). \quad (2.5)$$

Notre tâche dans cette section est de convertir cela en une section efficace de diffusion (pertinent s'il y a plus d'une particule dans l'état initial) ou une largeur de désintégration (pertinent s'il n'y a qu'une particule dans l'état initial), figure (2.3).

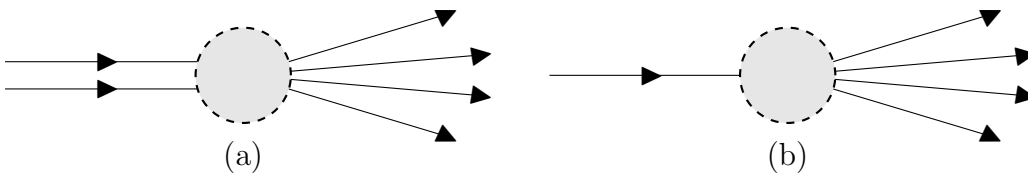


FIGURE 2.3 – Processus de diffusion (a) et de désintégration (b).

La probabilité que la transition se produise est le carré de l'élément de la matrice, c'est-à-dire :

$$\text{Probabilité} = \left| -i \prod_{f=1}^N N_f \prod_i N_i \mathcal{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \right|^2. \quad (2.6)$$

Tenter de prendre le module au carré d'amplitude produit un carré sans signification d'une fonction delta. C'est un problème technique puisque notre amplitude est exprimée entre des

états d'ondes planes. Ces états sont des états d'impulsion définis et s'étendent donc à travers tout l'espace-temps. Dans une expérience réelle, les états entrants et sortants sont localisés (par exemple, ils peuvent laisser des traces dans un détecteur). Pour traiter cela correctement, nous devrions construire des états de paquets d'ondes normalisés qui deviennent bien séparés dans un passé lointain et dans un futur lointain. Une dérivation plus bâclée consiste à soutenir que notre interaction a lieu dans une boîte de volume $V = L^3$ et sur un temps d'ordre T . Les résultats finaux sortiront indépendamment de V et T , reproduisant ceux que nous obtiendrions si nous travaillions avec des paquets d'ondes localisés. Utilisant

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) = \int e^{i(p_f - p_i)x} d^4x, \quad (2.7)$$

nous obtenons dans notre boîte spatio-temporelle le résultat suivant :

$$|(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)|^2 \simeq (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \int e^{i(p_f - p_i)x} d^4x \simeq VT(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i). \quad (2.8)$$

Ci-dessus, nous avons utilisé la normalisation $N = 1/\sqrt{2EV}$. Si nous regroupons tout, nous trouvons pour le taux de transition W , qui est la probabilité par unité de temps

$$W = \frac{1}{T} |\mathcal{M}_{fi}|^2 VT(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2E_f V} \right) \prod_i \left(\frac{1}{2E_i V} \right). \quad (2.9)$$

Comme attendu, la dépendance de T a été annulée. Nous nous intéressons généralement à des informations beaucoup plus détaillées que le taux de transition total. Nous voulons connaître le taux de transition différentiel dW , c'est-à-dire le taux de transition dans un élément particulier de l'espace des phases d'état final. Pour obtenir dW , nous devons multiplier par le nombre d'états disponibles dans la (petite) partie de l'espace des phases considérées. Pour un état final de particule unique, le nombre d'états disponibles dn dans un intervalle d'impulsion \vec{k} à $\vec{k} + d\vec{k}$ est, dans la normalisation de la boîte,

$$dn = V d^3 \vec{k}, \quad (2.10)$$

ce résultat est démontré en rappelant que les impulsions autorisées dans la boîte ont des composantes qui ne peuvent prendre que des valeurs discrètes telles que $k_x = 2\pi n_x/L$ où n_x est un entier. Ainsi $dn = dn_x dn_y dn_z$ et le résultat suit, pour un état final à deux particules, on a

$$dn = dn_1 dn_2, \quad (2.11)$$

où

$$dn_1 = V d^3 \vec{k}_1, \quad dn_2 = V d^3 \vec{k}_2, \quad (2.12)$$

où dn est le nombre d'états finaux dans un intervalle d'impulsion \vec{k}_1 à $\vec{k}_1 + d\vec{k}_1$ pour la particule 1 et \vec{k}_2 à $\vec{k}_2 + d\vec{k}_2$ pour la particule 2. Il y a une généralisation évidente à un état final de N particules,

$$dn = \prod_{f=1}^N \frac{V d^3 \vec{k}_f}{(2\pi)^3}. \quad (2.13)$$

Le taux de transition pour les transitions dans un élément particulier de l'espace des phases d'état final est donc donné par, en utilisant les équations (2.13) et (2.9),

$$\begin{aligned} dW &= |\mathcal{M}_{fi}|^2 V (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{f=1}^N \left(\frac{1}{2E_f V} \right) \prod_i \left(\frac{1}{2E_i V} \right) \prod_{f=1}^N \frac{V d^3 \vec{k}_f}{(2\pi)^3} \\ &= |\mathcal{M}_{fi}|^2 V \prod_i \left(\frac{1}{2E_i V} \right) \times \text{LIPhS}(N), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où, dans le deuxième terme nous avons défini l'Espace des Phases Invariant de Lorentz (noté par LIPhS) avec N particules dans l'état final, qui est écrit :

$$\text{LIPhS}(N) = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{f=1}^N \frac{d^3 \vec{k}_f}{2E_f (2\pi)^3}. \quad (2.15)$$

Remarquez que dans le taux de transition est invariant de Lorentz sauf pour le facteur d'énergie initial et les facteurs de V .

2.6.2 La section efficace

La section efficace totale pour une cible statique et un faisceau de particules entrant est définie comme le taux de transition total pour une seule particule cible et un flux de faisceau unitaire. La section efficace différentielle est liée de manière similaire au taux de transition différentiel. Nous avons calculé le taux de transition différentiel avec un choix de normalisation correspondant à une seule particule "cible" dans la boîte, et un "faisceau" correspondant également à une particule dans la boîte. Un faisceau composé d'une particule par volume V avec une vitesse v présente un flux N_0 donné par $N_0 = \frac{v}{V}$ particules par unité de surface par unité de temps. Ainsi, la section efficace différentielle est liée au taux de transition différentiel dans l'équation (2.14) par :

$$d\sigma = \frac{dW}{N_0} = dW \times \frac{V}{v}. \quad (2.16)$$

Généralisons maintenant au cas où dans le repère dans lequel vous faites les mesures, le faisceau a une vitesse de v_1 mais les particules cibles se déplacent également à une vitesse de v_2 . Dans une expérience de collision de faisceaux, par exemple, v_1 et v_2 pointeront dans des directions opposées en laboratoire. Dans ce cas, la définition de la section efficace est conservée comme ci-dessus, mais maintenant le flux de faisceau de particules N_0 est en fait augmenté du fait que les particules cibles se dirigent vers elle. Dans ce cas, le flux effectif en laboratoire est donné par :

$$N_0 = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V}, \quad (2.17)$$

qui est juste le nombre total de particules par unité de surface qui se croisent par unité de temps. Les vitesses sont indiquées par des flèches pour vous rappeler que ce sont des vitesses vectorielles, qui doivent être ajoutées en utilisant la loi vectorielle d'addition des vitesses, et dans le cas non-relativiste. Dans le cas général, alors, la section efficace différentielle est donnée par

$$d\sigma = \frac{dW}{N_0} = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \times \frac{1}{4E_1 E_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \text{LIPhS}(N), \quad (2.18)$$

où nous avons utilisé l'équation (2.14) pour le taux de transition, et le volume de la boîte V de nouveau a annulé. Les facteurs d'amplitude au carré et d'espace de phase sont clairement des invariants de Lorentz. Les facteurs de vitesse et d'énergie sont écrits :

$$E_1 E_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = E_2 \vec{p}_1 - E_1 \vec{p}_2, \quad (2.19)$$

dans un système dans lequel les impulsions sont colinéaires,

$$|E_2 \vec{p}_1 - E_1 \vec{p}_2|^2 = (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2. \quad (2.20)$$

Il est donc possible de définir une section efficace différentielle invariante de Lorentz. La section efficace totale est obtenue en intégrant dans l'espace des phases de l'état final :

$$\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \times \frac{1}{4E_1 E_2} \sum_{\text{états finaux}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \text{LIPhS}(N). \quad (2.21)$$

Dans le repère du centre de masse, la section efficace différentielle pour la diffusion $a(p_a) + b(p_b) \rightarrow c(p_c) + d(p_d)$ est :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_c|}{|\vec{p}_a|} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (2.22)$$

2.6.3 Variables de Mandelstam

En physique théorique les variables de Mandelstam sont des grandeurs physiques qui représentent l'énergie, l'impulsion et les angles des particules dans la diffusion des processus dans un système invariant de Lorentz. Ils sont utilisés lorsqu'il y a collision élastique entre deux particules.

Prenons comme exemple une réaction impliquant deux particules initiales, et deux particules finales,

$$a(p_a) + b(p_b) \rightarrow c(p_c) + d(p_d),$$

où p_a, p_b, p_c et p_d sont les 4-impulsions ou les amplitudes de diffusion sont souvent exprimées en termes de variables de Mandelstam. Ces derniers sont définis par

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \\ t &= (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2, \\ u &= (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les lettres s, t et u ils peuvent aussi être utilisées pour détecter les processus de *canal-s*, *canal-t* et *canal-u*. Ces canaux représentent différents types de diagrammes de Feynman ou différents processus de diffusion lorsque l'interaction implique l'échange d'une particule intermédiaire possédant un moment

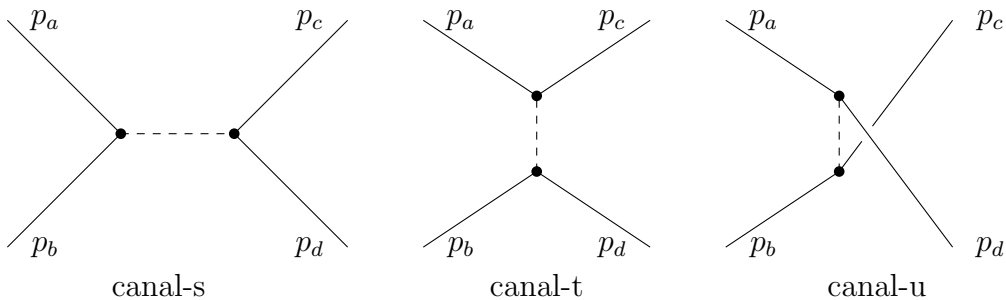


FIGURE 2.4 – Diagramme de Feynman pour chaque canal de la diffusion élastique en QED.

En fait, il y a seulement deux combinaisons indépendantes d'invariants de Lorentz des impulsions disponibles dans ce cas, ainsi il doit donc y avoir une relation entre s , t et u .

On trouve aussi :

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \quad (2.24)$$

2.7 Cinématique d'une réaction

L'objectif de la cinématique d'une réaction, au contraire de la dynamique, est d'étudier les phénomènes de diffusion indépendamment des interactions qui les induisent. Le plus important de ces problèmes de cinématique réside dans la transformation des résultats du calcul ou de la mesure d'une référence à l'autre.

Toute réaction est soumise aux lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion sans tenir compte des détails des interactions. Il est donc utile de comprendre comment décrire la cinématique dans les réactions puisque l'état d'énergie et d'impulsion dans lequel vont se trouver les particules finales devra obéir à ces lois.

Par ailleurs, les propriétés combinées d'invariance par rapport à une transformation de Lorentz et de la conservation de certaines quantités cinématiques s'avèrent très utiles dans l'analyse de la cinématique des processus de diffusion. En effet, dans un processus subatomique, les conditions suivantes sont respectées [96] :

- On peut définir un ou des invariants de Lorentz, c'est-à-dire des quantités indépendantes du système de référence (système du laboratoire ou du centre de masse).
- Le quadri-vecteur impulsion est conservé dans une réaction.

En physique théorique, les variables de Mandelstam sont des quantités numériques qui rendent compte de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, ainsi de l'invariance de Lorentz dans les réactions entre les particules.

Par exemple, dans une réaction impliquant deux particules initiales (1 et 2) et deux particules finales (3 et 4),

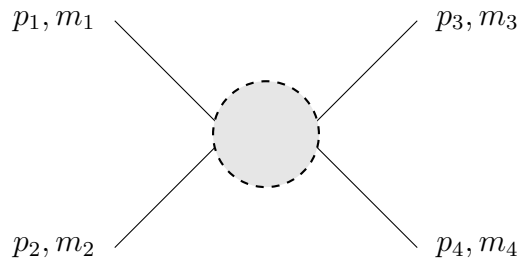


FIGURE 2.5 – Processus à quatre corps : $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$.

À partir des quadri-impulsions des particules p_i :

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i),$$

(où l'indice i désigne chacune des particules, donc ici $i = 1, 2, 3, 4$), on peut définir les trois quantités invariantes de Lorentz, les variables de Mandelstam s , t et u :

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

alors

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\
&= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2, \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2), \\
&= m_3^2 + m_4^2 + 2(E_3E_4 - \vec{p}_3\vec{p}_4),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

de la même façon on trouve :

$$\begin{aligned}
t &= (p_3 - p_1)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1E_3 - \vec{p}_1\vec{p}_3), \\
&= (p_4 - p_2)^2 = m_2^2 + m_4^2 - 2(E_2E_4 - \vec{p}_2\vec{p}_4),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

et

$$\begin{aligned}
u &= (p_3 - p_2)^2 = m_2^2 + m_3^2 - 2(E_2E_3 - \vec{p}_2\vec{p}_3), \\
&= (p_4 - p_1)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1E_4 - \vec{p}_1\vec{p}_4).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Comme on l'a vu auparavant, ces variables sont des invariants de Lorentz puisque ce sont des produits scalaires de quadri-impulsions. Notez que ces variables de Mandelstam vérifient la relation suivante :

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2.$$

Si les masses des quatre particules sont identiques, c'est-à-dire que la masse de la particule $m_i = m$ pour tous $i(i = 1, 2, 3, 4)$, l'équation ci-dessus devient :

$$s + t + u = 4m^2.$$

2.7.1 Système de centre de masse (4-corps)

Le système de centre de masse (SCM), appelé aussi repère d'impulsion nulle, est un système dont la somme des impulsions des particules initiales ou finales est nulle,

$$\sum \vec{p}_{\text{initial}} = \sum \vec{p}_{\text{final}} = \vec{0}. \tag{2.29}$$

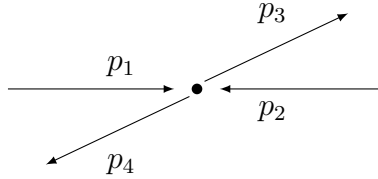


FIGURE 2.6 – Collision dans le repère du centre de masse.

Il est possible d'établir un certain nombre de relations pour un système à quatre corps dans le SCM.

Pour la variable s :

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 \\
&= (E_{1\text{CM}} + E_{2\text{CM}}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2, \\
&= (E_{1\text{CM}} + E_{2\text{CM}})^2, \\
&= E_{\text{CM}}^2,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

la variable s est alors le carré de la somme des énergies initiales ou finales dans le SCM.
De même pour la variable t :

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= (E_3 - E_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1)^2, \\ &= (E_3 - E_1)^2 - (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

la variable t est donc le carré du transfert d'énergie-impulsion.

En termes de variables de Mandelstam, l'énergie et l'impulsion s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} E_{1\text{CM}} &= (s + m_1^2 - m_2^2)/2\sqrt{s}, \\ E_{2\text{CM}} &= (s + m_2^2 - m_1^2)/2\sqrt{s}, \\ E_{3\text{CM}} &= (s + m_3^2 - m_4^2)/2\sqrt{s}, \\ E_{4\text{CM}} &= (s + m_4^2 - m_3^2)/2\sqrt{s}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

et

$$\begin{aligned} |\vec{p}_{1\text{CM}}| &= |\vec{p}_{2\text{CM}}| = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}/2\sqrt{s}, \\ |\vec{p}_{3\text{CM}}| &= |\vec{p}_{4\text{CM}}| = \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}/2\sqrt{s}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

où

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2.7.2 Système de laboratoire (4-corps, cible fixe)

Traditionnellement, le système de laboratoire (SL), aussi connu sous le nom de repère de cible fixe, est le système dans lequel l'une des deux particules initiales, la cible, est au repos avant la collision. Ce n'est évidemment pas le cas pour les expériences réalisées dans les collisionneurs, puisque les deux particules initiales sont en mouvement dans ce repère [96].

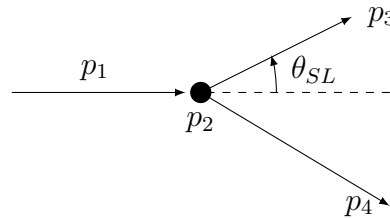


FIGURE 2.7 – Collision au repère de laboratoire (cible fixe).

Dans ce cas, l'une des particules initiales, soit la particule 2, est considérée comme au repos. Alors, on peut leur attribuer les quadri-impulsions suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_{1\text{SL}}, 0, 0, p_{1\text{SL}}), \\ p_2 &= (m_2, 0, 0, 0), \\ p_3 &= (E_{3\text{SL}}, \vec{p}_{3\text{SL}}), \\ p_4 &= (E_{4\text{SL}}, \vec{p}_{4\text{SL}}), \end{aligned} \quad (2.34)$$

où $|\vec{p}_1| = p_{1\text{SL}}$ est l'impulsion longitudinale dont la direction coïncide avec l'axe des z par convention.

Ainsi, le calcul des variables de Mandelstam dans le repère de la cible fixe mène donc à :

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 \\
&= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{1\text{SL}},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

et

$$t = (p_3 - p_1)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_{1\text{SL}}E_{3\text{SL}} + 2p_{1\text{SL}}|\vec{p}_{3\text{SL}}| \cos \theta_{SL}, \tag{2.36}$$

$$u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 - s - t. \tag{2.37}$$

Et encore une fois $E_{i\text{SL}}^2 \implies p_{i\text{SL}}^2 + m_i^2$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Dans le SL, l'énergie et l'impulsion sont écrites, en fonction des variables de Mandelstam, de la façon suivante :

$$E_{1\text{SL}} = (s - m_1^2 - m_2^2)/2m_2, \tag{2.38}$$

et

$$p_{1\text{SL}} = \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}/2m_2. \tag{2.39}$$

L'avantage de l'utilisation des invariants de Lorentz dans les calculs cinématiques apparaît maintenant. Il est possible de calculer ces quantités indépendamment dans un système donné, trouver ensuite les énergies et les impulsions des particules dans un second système sans recourir aux transformations de Lorentz. [96].

2.8 Laser sous forme d'ondes électromagnétique

Un laser est une source lumineuse qui produit des rayonnements monochromatiques rectilignes ; Le mot laser est un acronyme pour "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" ; ce qui, dans le langage de Molière, signifie "Amplification de la lumière par émission stimulée de rayonnement".

Les lasers sont des photons monoénergétiques en physique quantique et dans un champ électromagnétique. La plupart des analyses du couplage des lasers et des matières dans ce texte présupposent que les électrons sont des charges ponctuelles classiques, et les champs électriques et magnétiques du laser sont donnés à partir des équations de Maxwell. Sous la force du champ électromagnétique oscillant, les électrons font principalement le courant électrique local par rapport aux ions, car la masse des électrons est plus de 1000 fois inférieure à la masse des ions, même si elles ont presque la même charge. Il suffit généralement de tenir compte du couplage entre les champs laser et le mouvement des électrons. Par conséquent, on nous demande de résoudre le système couplé des équations de Maxwell et des mouvements d'électron. Toutefois, il est difficile de résoudre le système en général, parce que la densité de charge et la densité de courant induite par de nombreux électrons du plasma modifient les champs électriques et magnétiques.

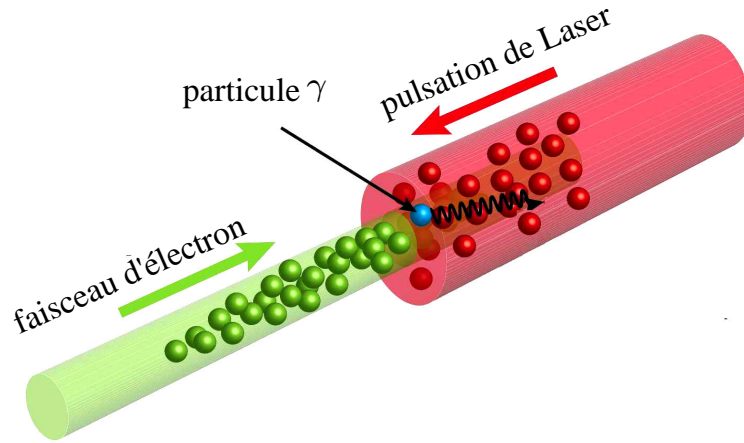


FIGURE 2.8 – Une image schématique de l'expérience présentée dans [57].

2.8.1 État de polarisation des ondes lumineuses

L'onde lumineuse est caractérisée par deux grandeurs vectorielles : son champ électrique \vec{E} et son champ magnétique \vec{B} . Le contexte de cette thèse est celui des ondes planes progressives sinusoïdales se propageant en ligne droite. L'axe de propagation sera l'axe Oz d'un repère cartésien Oxy . Dans ces conditions, il est connu que les champs \vec{E} et \vec{B} se trouvent dans le plan perpendiculaire à l'axe de Oz , à savoir le plan Oxy . On rappelle que l'intensité lumineuse perçue par l'oeil est proportionnelle à la moyenne du carré du champ électrique.

Les phénomènes de polarisation sont des phénomènes liés à la nature vectorielle des deux caractéristiques de l'onde lumineuse à savoir le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} . Les évolutions de \vec{E} et de \vec{B} étant liées au cours du temps, il suffit de décrire le comportement du champ électrique \vec{E} . C'est pourquoi, par la suite, on s'intéresse au champ électrique.

On appelle *plan de polarisation* de l'onde lumineuse, le plan formé par le vecteur d'onde \vec{k} et le champ électrique \vec{E} . On appelle *direction de polarisation* de l'onde lumineuse, la direction prise par le champ électrique \vec{E} est le plan perpendiculaire à l'axe de Oz , c'est-à-dire le plan Oxy .

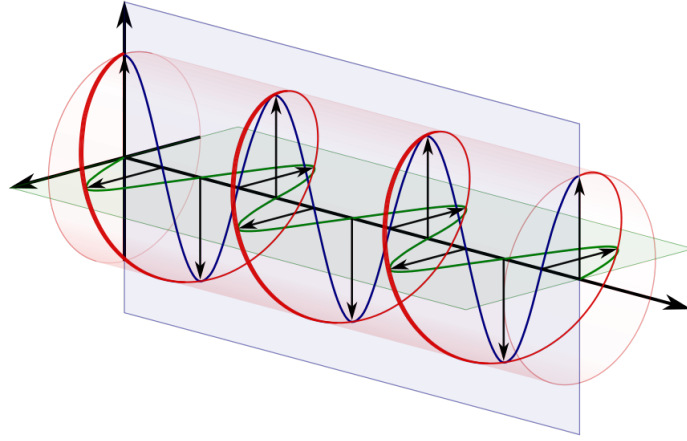


FIGURE 2.9 – Exemple d'onde électromagnétique.

2.8.1.1 Polarisation linéaire

En électrodynamique, la polarisation linéaire du rayonnement électromagnétique est un confinement du vecteur de champ électrique ou du vecteur de champ magnétique à un plan donné le long de la direction de propagation. Le terme de polarisation linéaire a été inventé par Augustin-Jean Fresnel en 1822.

L'orientation d'une onde électromagnétique à polarisation linéaire est définie par la direction du vecteur champ électrique. Par exemple, si le vecteur de champ électrique est vertical (alternativement vers le haut et vers le bas lorsque l'onde se déplace), le rayonnement est dit polarisé verticalement.

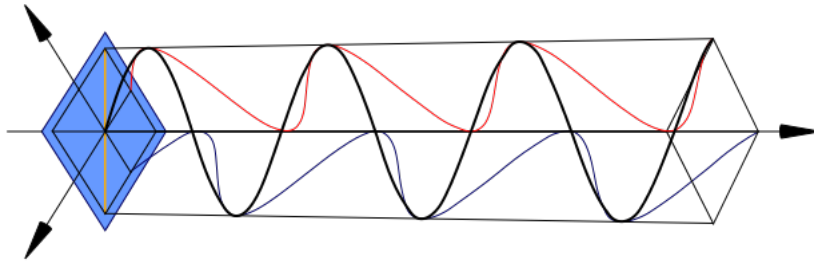


FIGURE 2.10 – Polarisation linéaire d'une onde.

L'état de polarisation linéaire correspond à un champ de la forme :

$$A = a \cos(\phi), \quad (2.40)$$

avec ϕ la phase définie par $\phi = (k \cdot x) = k_\mu x^\mu$, et k le quadrivecteur d'onde.

2.8.1.2 Polarisation circulaire

La polarisation circulaire du rayonnement électromagnétique est une polarisation où la norme du vecteur de champ électrique ne change pas alors que son orientation change selon un mouvement de rotation.

L'état de polarisation circulaire correspond à un champ de la forme :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos(\phi) + a_2^\mu \sin(\phi). \quad (2.41)$$

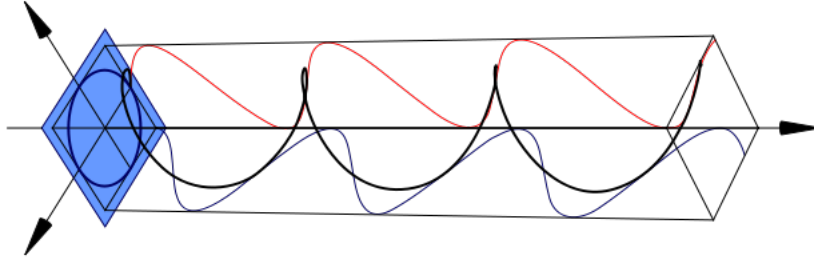


FIGURE 2.11 – Polarisation circulaire d'une onde.

2.8.1.3 Polarisation elliptique

La polarisation elliptique est la polarisation du rayonnement électromagnétique telle que la pointe du vecteur de champ électrique décrit une ellipse dans n'importe quel plan fixe coupant et perpendiculaire à la direction de propagation. Une onde polarisée elliptique peut être décomposée en deux ondes polarisées linéaires en quadrature de phase, avec leurs plans de polarisation perpendiculairement les uns aux autres. Étant donné que le champ électrique peut tourner dans le sens horaire ou antihoraire lors de sa propagation, les ondes polarisées elliptiquement présentent une chiralité.

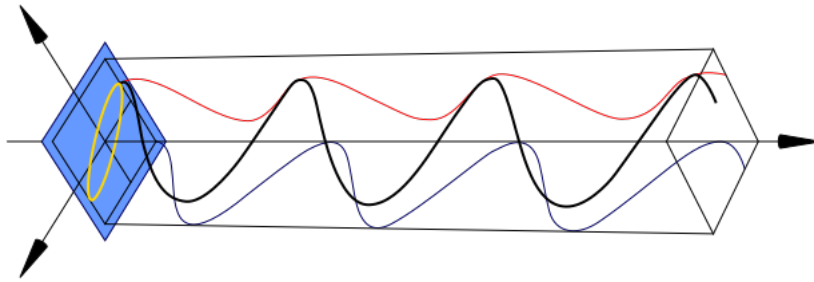


FIGURE 2.12 – Polarisation elliptique d'une onde

L'état de polarisation elliptique correspond à un champ de la forme :

$$A^\mu = a_1^\mu \cos(\phi) + a_2^\mu \sin(\phi) \tan(\eta/2), \quad (2.42)$$

où η représente le degré d'ellipticité, on obtient le cas de polarisation linéaire pour $\eta = 0$, et la polarisation circulaire pour $\eta = \pi/2$.

Conclusion

L'étude de l'interaction entre une onde électromagnétique et des particules (macroscopiques) est depuis longtemps un champ d'optique essentiel, ou plus généralement, de l'électromagnétisme. Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de la diffusion et ces types dans QED, et nous avons rappelé les règles de Feynman pour calculer la section efficace à l'aide des paramètres tels que les traces, les amplitudes et les variables de Mandelstam. Nous avons également parlé des différents états de propagation des ondes lumineuses.

Dans la physique des particules, l'électrodynamique quantique (QED) est la théorie relativiste des champs quantiques de l'électrodynamique. Essentiellement, il décrit comment la lumière et la matière interagissent et est la première théorie dans laquelle un accord complet entre

la mécanique quantique et la relativité restreinte est atteint. QED décrit mathématiquement tous les phénomènes liés à l'interaction de particules chargées électriquement par échange de photons et représente la contrepartie quantique de l'électromagnétisme classique donnant un compte rendu complet de l'interaction entre la matière et la lumière.

CHAPITRE 3

LES EFFETS DE SPIN SUR LA DIFFUSION COMPTON

Introduction

Aux hautes énergies, la diffusion de particules polarisées en spin est un aspect important de la physique, qui doit beaucoup au développement de nouveaux détecteurs et sources de telles particules. De nombreuses nouvelles expériences ne sont devenues réalisables que grâce à ces développements. La diffusion inélastique profonde de leptons et de protons polarisés a révélé des détails intéressants sur la structure en spin des constituants du proton [100, 101], et les effets de non-conservation de la parité ont été étudiés en utilisant des faisceaux polarisés [102, 103]. La polarisation en spin de l'électron final uniquement dans les processus de diffusion Compton non linéaires en présence de champs laser monochromatiques a été étudiée dans [104]. La plupart des études sur l'électrodynamique quantique des spineurs (QED) se réfèrent à des électrons non polarisés où le spin de l'électron est moyenné. Ces études peuvent être considérées comme un moyen utile de tester la validité du formalisme mathématique de QED, et d'assurer la compatibilité entre ses prédictions et les résultats expérimentaux. D'une manière générale, l'étude des collisions est très importante dans la physique des particules, car tout d'abord, historiquement, l'étude des processus de diffusion a permis de découvrir le monde quantique et de connaître les propriétés fondamentales des particules. La diffusion Compton, qui fait l'objet de ce chapitre, est l'un des processus de base de la QED. Il s'agit de la diffusion inélastique d'un photon avec une particule chargée électriquement, découverte pour la première fois en 1923 par Arthur Compton. Ce processus de diffusion est d'une importance historique particulière car l'électromagnétisme classique est insuffisant pour le décrire ; une description réussie nous oblige à prendre en compte les propriétés particulières de la lumière. En outre, la diffusion Compton d'un électron et d'un photon est un processus que la théorie QED peut décrire avec une grande précision. Notre but dans ce travail est d'étudier la diffusion Compton des électrons polarisés, c'est-à-dire de traiter le processus en utilisant des électrons avec des états de polarisation bien définis. Plusieurs études ont été consacrées aux effets de la polarisation sur la diffusion de Compton. Parmi ces études, on trouve celles qui ont traité ce processus en polarisant le photon et l'électron [105, 106, 107, 108], ou seulement le photon [109, 110]. Dans cette contribution, nous présenterons un calcul théorique de la section efficace différentielle polarisée en spin (SED). Nous notons ici quelques références importantes qui ont utilisé le même concept pour étudier les processus assistés par laser en physique atomique relativiste [111, 112, 54, 51]. Tout au long de ce travail, nous utiliserons des unités naturelles ($\hbar = c = 1$) largement utilisées dans la physique des particules élémentaires et travaillerons avec le tenseur métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

3.1 La diffusion Compton

Arthur Holly Compton (1892 – 1962) est un physicien américain qui a joué un rôle primordial dans la fabrication de la bombe atomique. Il est connu grâce à la découverte de l'effet qui porte son nom "*effet Compton*", qui se produit lorsqu'un photon de grande énergie (tels que les rayons X) entre en collision avec une cible et transfère une partie de cette énergie à un seul électron ; cela correspond, en appliquant la formule de Planck reliant l'énergie et la fréquence, à une augmentation de sa longueur d'onde. Il est récompensé en 1927 (avec Charles Thomson Rees Wilson) par le prix Nobel de physique pour sa découverte souvent considérée comme la première preuve expérimentale de l'aspect corpusculaire du rayonnement électromagnétique introduit par Planck (1900) et Einstein (1905). Durant la seconde guerre mondiale, il dirige le Metallurgical Laboratory de l'Université de Chicago, qui participe au Manhattan Project et fait partie du comité scientifique en 1945 chargé de penser aux effets de la bombe atomique. La diffusion Compton est la diffusion inélastique d'un photon avec une particule chargée électriquement (souvent l'électron), découverte pour la première fois en 1923 par Compton. De plus, la diffusion Compton est un processus qui peut être décrit avec une grande précision par la théorie de l'électrodynamique quantique (QED). Cette diffusion peut être représentée schématiquement de la façon suivante :

$$e^- + \gamma \longrightarrow e^- + \gamma.$$

La figure (3.1) illustre les deux diagrammes qui contribuent à la diffusion Compton à l'arbre :

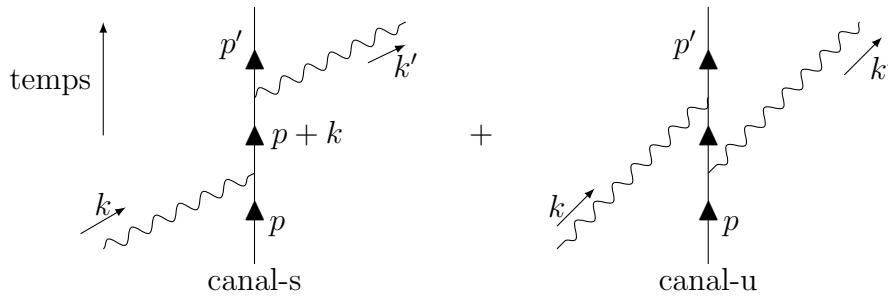


FIGURE 3.1 – Diagrammes de Feynman pour la diffusion Compton.

Dans le premier diagramme (*canal - s*), le photon incident est absorbé par l'électron incident, puis celui-ci émet un photon dans l'état final. Dans le deuxième diagramme (*canal - u*), l'électron incident émet un photon avant qu'il absorbe le photon incident.

3.2 Étude de la diffusion Compton non polarisée

3.2.1 Calcul de l'amplitude de la diffusion

Les règles de Feynman nous permettent d'écrire l'amplitude de diffusion \mathcal{M}_{fi} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k') \underbrace{\frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2}}_{\text{Propagateur fermionique}} (-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)u(p) \\
&+ \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k) \underbrace{\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}}_{\text{Propagateur fermionique}} (-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k')u(p), \\
&= -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u(p).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Où $\varepsilon_\nu(k)$ et $\varepsilon_\mu^*(k')$ désignent les vecteurs de polarisation des photons initial et final respectivement. Le graphe d'échange dans le cas de la diffusion de Compton a un signe plus et l'amplitude totale serait symétrique par rapport à l'échange des photons.

Nous pouvons faire quelques simplifications avant de calculer $|\mathcal{M}_{fi}|^2$. Puisque $p^2 = m^2$ et $k^2 = 0$, le dénominateur de propagateur est :

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p.k \quad \text{et} \quad (p-k')^2 - m^2 = -2p.k'.$$

Pour simplifier le numérateur, on utilise l'équation de Dirac correspondant aux spineurs $u(p)$:

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\nu m)u(p), \\
&= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu \underbrace{(\not{p} - m)u(p)}_{=0}, \\
&= 2p^\nu u(p).
\end{aligned}$$

En utilisant cette astuce pour le numérateur de chaque propagateur, on obtient :

$$\mathcal{M}_{fi} = -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p.k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p.k'} \right] u(p). \tag{3.2}$$

L'adjoint de la quantité \mathcal{M}_{fi} est :

$$\mathcal{M}_{fi}^\dagger = ie^2\varepsilon_\rho(k')\varepsilon_\sigma^*(k)\bar{u}(p) \left[\frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p.k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p^\rho}{2p.k'} \right] u(p'). \tag{3.3}$$

L'étape suivante consistera à calculer $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ et faire la moyenne et la somme sur les spins des électrons et les polarisations des photons. La somme sur les spins des électrons peut être effectuée comme auparavant avec $\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m$. Heureusement, il existe une astuce similaire qui consiste à faire la somme sur les vecteurs de polarisation des photons. La prescription correcte est de faire le remplacement suivant [51] :

$$\sum_{\text{Polarisations}} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Pour obtenir l'amplitude de diffusion non polarisée $|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2$, nous devons moyenner sur les polarisations d'électron et photon initiales et sommer sur les polarisations d'électron et photon

finale. Alors, on trouve :

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p.k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p.k'} \right) (\not{p} + m) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p.k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p^\rho}{2p.k'} \right) \right], \quad (3.5) \\
&= \frac{e^4}{4} \left[\frac{A}{(2p.k)^2} + \frac{B}{(2p.k)(2p.k')} + \frac{C}{(2p.k')(2p.k)} + \frac{D}{(2p.k')^2} \right].
\end{aligned}$$

Avec A , B , C et D sont des traces données par :

$$\begin{aligned}
A &= \text{Tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu)], \\
B &= \text{Tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m)(\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_\mu)], \\
C &= \text{Tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu)(\not{p} + m)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu)], \\
D &= \text{Tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu)(\not{p} + m)(\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_\mu)]. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Notons que $A = D$ si nous remplaçons k par $-k'$. Aussi, puisque nous pouvons inverser l'ordre des matrices γ à l'intérieur d'une trace, nous remarquons que $B = C$. Nous devons donc calculer uniquement A et B .

En programmant les deux traces A et B dans le soft REDUCE [53], on obtient comme résultat :

$$A = 16(4m^4 - 2m^2 p.p' + 4m^2 p.k - 2m^2 p'.k + 2(p.k)(p'.k)). \quad (3.7)$$

À partir de A et en faisant le remplacement $k \longleftrightarrow -k'$, la trace D est donnée par :

$$D = 16(4m^4 - 2m^2 p.p' - 4m^2 p.k' + 2m^2 p'.k' + 2(p.k')(p'.k')). \quad (3.8)$$

Enfin,

$$B = C = -8(4m^4 + 2m^2 p'.k' - 2m^2 k.p'). \quad (3.9)$$

Mettant ensemble tous les termes du carré de l'amplitude de diffusion, on obtient finalement :

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p.k'}{p.k} + \frac{p.k}{p.k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p.k} - \frac{1}{p.k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p.k} - \frac{1}{p.k'} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Notons que $|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2$ est symétrique par rapport à l'échange $k \longleftrightarrow -k'$, les deux diagrammes de la figure (3.1) sont donc liés par cette symétrie. Ceci est connu sous le nom "*crossing symmetry*".

3.2.2 La section efficace différentielle et la formule de Klein-Nishina

Pour transformer le carré de l'amplitude de diffusion en une section efficace, il faut choisir un repère pour la cinématique. La diffusion Compton est plus souvent analysée dans le système de laboratoire où l'électron est initialement au repos [51].

On veut exprimer la section efficace différentielle en termes de l'énergie de photon initial w et d'angle de diffusion de photon final θ_L . On peut montrer l'expression de w' , l'énergie de photon final, en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned}
m^2 &= p'^2 = (p + k - k')^2 = p^2 + 2p.(k - k') - 2k.k', \\
&= m^2 + 2m(w - w') - 2ww'(1 - \cos(\theta_L)). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

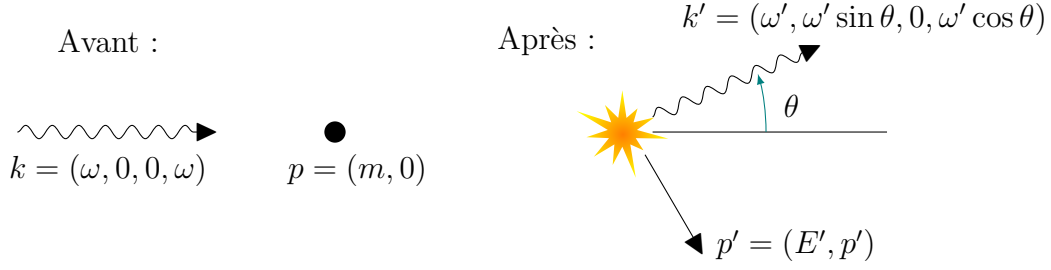


FIGURE 3.2 – La diffusion Compton dans le système laboratoire.

Alors :

$$w' = \frac{w}{1 + \frac{w}{m}(1 - \cos(\theta_L))}. \quad (3.12)$$

L'expression générale de la section efficace différentielle, pour une diffusion non polarisée mettant en jeu deux particules initiales et $n - 2$ particules finales, est donnée par :

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{\phi} |\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \prod_{f=3}^n \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i). \quad (3.13)$$

Avec $\phi = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$ est le flux des particules initiales. Pour la diffusion Compton et dans le système laboratoire, le flux ϕ est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \phi &= 4\sqrt{(k \cdot p)^2}, \\ &= 4mw. \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'intégrale d'espace de phase, pour la diffusion Compton et dans le système de laboratoire, est donnée par :

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \iiint \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2w'} \iiint \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p), \\ &= \iiint \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2 4w' E'} \delta(f(w')) \underbrace{\iiint \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{p}' - \mathbf{k}) d^3 p'}_{=1} \Big|_{\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Avec $f(w') = w' + E' - w - m$. En faisant le remplacement $d^3 k' \rightarrow w'^2 dw' d\Omega_{k'}$, on obtient :

$$\int d\Pi_2 = \iint \frac{w' d\Omega_{k'}}{16\pi^2 E'} dw' \delta(f(w')). \quad (3.16)$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(w') &= E' + w' - w - m, \\ &= \sqrt{(k - k')^2 + m^2} + w' - w - m, \\ &= \sqrt{w^2 + w'^2 - 2ww' \cos(\theta_L)} + w' - w - m. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Maintenant, pour une fonction delta $\delta(f(x))$ d'une fonction $f(x)$ avec une racine à x_0 , on a la propriété suivante [53] :

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|}. \quad (3.18)$$

Dans notre cas :

$$\delta(f(w')) = \frac{\delta(w' - w'_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial w'} \right|}. \quad (3.19)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial w'} \right| &= 1 + \frac{2(w' - w \cos(\theta_L))}{2\sqrt{w^2 + w'^2 - 2ww' \cos(\theta_L)}}, \\ &= 1 + \frac{w' - w \cos(\theta_L)}{E'}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donc :

$$\delta(f(w')) = \frac{\delta(w' - w'_0)}{1 + \frac{w' - w \cos(\theta_L)}{E'}}. \quad (3.21)$$

Alors, l'intégrale de l'espace de phase devient :

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \iiint \frac{w' d\Omega_{k'}}{16\pi^2 E'} \overbrace{\frac{dw' \delta(w' - w'_0)}{1 + \frac{w' - w \cos(\theta_L)}{E'}}}^{=1}, \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega_{k'} \frac{w'}{m + w(1 - \cos(\theta_L))}, \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\Omega_{k'} \frac{w'^2}{wm}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En remplaçant tout dans la formule générale de la section efficace différentielle (3.13) et sachant que $p.k = mw$ et $p.k' = mw'$, on trouve finalement :

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 \left[\frac{w'}{w} + \frac{w}{w'} - \sin^2(\theta_L) \right]. \quad (3.23)$$

Cette dernière expression est appelée la formule Klein-Nishina obtenue pour la première fois en 1929.

Dans la limite $w \rightarrow 0 \implies \frac{w'}{w} \rightarrow 1$, la formule de Klein-Nishina devient celle de Thomson :

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_{w \rightarrow 0}^{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2(\theta_L)); \quad \sigma_{tot} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \quad (3.24)$$

il s'agit de la section efficace différentielle de Thomson pour la diffusion du rayonnement électromagnétique classique par un électron libre.

Notons qu'il y a une autre méthode à suivre pour montrer la formule de Klein-Nishina en fonction des vecteurs de polarisation ε et ε' . Elle consiste d'abord à ne faire la moyenne et la somme que sur les polarisations initiale et finale respectivement de l'électron, sans toucher celles du photon. On obtient alors :

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right) = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 \left[\frac{w'}{w} + \frac{w}{w'} + 4(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 2 \right]. \quad (3.25)$$

Dans un deuxième temps, nous faisons la moyenne et la somme sur les polarisations initiales et finales de photon, pour aboutir finalement à la formule (3.23). Par contre, dans cette section et comme Peskin l'a fait [51], nous avons dès le début moyenner et sommer sur les polarisations initiales et finales de l'électron et du photon en même temps, nous avons exclu les vecteurs de polarisation ε et ε' par le remplacement (3.4) et nous avons obtenu directement la formule de Klein-Nishina indépendante de ε et de ε' .

3.3 Étude de la diffusion Compton pour les électrons polarisés

3.3.1 Le concept d'électrons polarisés dans la diffusion compton

Nous présentons ici certains concepts et formalismes nécessaires pour décrire la polarisation des spin. On parle de polarisation d'un ensemble d'électrons si les spins d'électrons ont une orientation préférentielle de sorte qu'il existe une direction où les deux états de spin possibles ne sont pas également peuplés. Dans les premières expériences avec les électrons libres, la direction de leurs spins était rarement prise en compte. Chaque fois que la direction de spin joue un rôle, il faut faire la moyenne de toutes les orientations de spin afin de décrire correctement les expériences. Ce n'est qu'au cours des dernières années qu'il a été possible de produire des faisceaux d'électrons dans lesquels le spin a une orientation préférentielle. On les appelle faisceaux d'électrons polarisés par analogie à la lumière polarisée où ce sont les vecteurs de champ qui ont une orientation privilégiée. L'intérêt pour les électrons polarisés s'explique par un certain nombre de facteurs. Une raison importante est que dans les expériences de physique on essaie de définir avec le plus de précision possible les états initiaux et/ou finaux des systèmes considérés [52]. Les électrons libres avec quatre impulsions p et spin S sont décrits par les spineurs libres $u(p, S)$. S^μ est un vecteur de Lorentz correctement défini dans le système de repos des particules, qui est réduit à un vecteur spatial unitaire [51] :

$$(S^\mu)_{R.S.} = (0, \mathbf{S}'). \quad (3.26)$$

Les composants de S^μ dans un système où la particule se déplace avec une impulsion \mathbf{p} sont obtenus par un boost de Lorentz avec le résultat :

$$S^\mu = \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}'}{m}, \mathbf{S}' + \frac{\mathbf{S}' \cdot \mathbf{p}}{m(E + m)} \mathbf{p} \right). \quad (3.27)$$

Il est facile de vérifier que S^μ satisfait aux relations de normalisation et d'orthogonalité :

$$S^2 = S^\mu \cdot S_\mu = -1, \quad (p \cdot S) = p^\mu \cdot S_\mu = 0. \quad (3.28)$$

On introduit ensuite l'opérateur de projection de spin :

$$\hat{\Sigma}(S) = \frac{1 + \gamma_5 \not{S}}{2}, \quad (3.29)$$

avec $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Cet opérateur a une propriété simple :

$$\hat{\Sigma}(S)u(p, +S) = u(p, +S), \quad \hat{\Sigma}(S)u(p, -S) = 0. \quad (3.30)$$

Ce formalisme peut être appliqué aux états d'hélicité où la direction du spin pointe le long de la direction du 3-vecteur d'impulsion \mathbf{p} ,

$$\mathbf{S}'_\lambda = \lambda \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \text{avec } \lambda = \pm 1. \quad (3.31)$$

Par conséquent, la définition d'un vecteur à 4 spins devient :

$$S^\mu_\lambda = \lambda \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{E}{m} \hat{p} \right), \quad (3.32)$$

où $\hat{p} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ est le vecteur unitaire définissant la direction du 3-vecteur \mathbf{p} . Après ces concepts préliminaires, nous allons étudier la diffusion Compton des électrons polarisés pour les états initial et final, Cela signifie, respectivement, des électrons d'impulsion bien définis p et p' et des électrons de spin bien définis S et S' .

3.3.2 Diffusion compton d'électrons polarisés au centre du système de masse

Appliquons la polarisation des électrons à l'un des processus les plus importants de QED à savoir la diffusion Compton. Dans la suite, nous allons examiner la section efficace différentielle pour la diffusion Compton d'électrons polarisés.

3.3.2.1 Calcul de la partie spinorielle $|\mathcal{M}|^2$

En utilisant les règles de Feynman, nous pouvons obtenir l'évaluation du carré de l'élément de matrice polarisé comme suit :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} e^4 \text{Tr} \left[\left(\frac{1 + \lambda' \gamma_5 \not{S}'}{2} \right) (\not{p}' + m) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{1 + \lambda \gamma_5 \not{S}}{2} \right) (\not{p} + m) \left(\frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k'} \right) \right], \quad (3.33)$$

où λ et λ' sont les états d'hélicité respectivement des électrons initial et final. S et S' sont leurs quadrivecteurs de spin. Le coefficient $1/2$ de la première ligne de (3.33) est dû à la moyenne sur les polarisations initiales du photon non polarisé incident. Dans le système du centre de masse (SCM), nous avons :

$$\begin{aligned} p &= (E, -\mathbf{k}), & k &= (\omega, \mathbf{k}), \\ p' &= (E', -\mathbf{k}'), & k' &= (\omega', \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $\omega = |\mathbf{k}|$ et $\omega' = |\mathbf{k}'|$. La conservation de l'énergie $E + \omega = E' + \omega'$ nous permet de montrer que $\omega' = \omega$ et donc $E' = E$, ce qui signifie que la collision est élastique dans le SCM. En utilisant la définition de la variable de Mandelstam s , on peut exprimer l'énergie du photon ω entièrement en termes de s et m par :

$$\omega = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}. \quad (3.35)$$

Dans ce cas, les quadrivecteurs de spin S^μ et S'^μ sont exprimés dans le SCM par :

$$S^\mu = \left(\frac{\omega}{m}, -\frac{E}{m\omega} \mathbf{k} \right), \quad S'^\mu = \left(\frac{\omega}{m}, -\frac{E}{m\omega} \mathbf{k}' \right). \quad (3.36)$$

3.3.2.2 Calcul de la section efficace différentielle de spin polarisé

Généralement, l'expression de la SED de la diffusion Compton pour les électrons polarisés, dans le SCM, est exprimée par :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}}(\lambda, \lambda') \right|_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.37)$$

La trace apparaissant dans (3.33) est calculée à l'aide du logiciel REDUCE [53] et on obtient la SED polarisée en fonction du produit des états d'hélicité λ et λ' :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}}(\lambda, \lambda') \right|_{\text{CM}} = \frac{f_1(s, \theta, \lambda, \lambda')}{g_1(s, \theta)}, \quad (3.38)$$

avec $f_1(s, \theta, \lambda, \lambda')$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
f_1(s, \theta, \lambda, \lambda') = & \alpha^2 \left(\cos^3(\theta)s^5 - 5 \cos^3(\theta)s^4m^2 + 10 \cos^3(\theta)s^3m^4 \right. \\
& - 10 \cos^3(\theta)s^2m^6 + 5 \cos^3(\theta)sm^8 - \cos^3(\theta)m^{10} + 3 \cos^2(\theta)s^5 \\
& - \cos^2(\theta)s^4m^2 - 10 \cos^2(\theta)s^3m^4 + 14 \cos^2(\theta)s^2m^6 - 9 \cos^2(\theta)sm^8 \\
& + 3 \cos^2(\theta)m^{10} + 7 \cos(\theta)s^5 - 15 \cos(\theta)s^4m^2 + 6 \cos(\theta)s^3m^4 \\
& + 2 \cos(\theta)s^2m^6 + 3 \cos(\theta)sm^8 - 3 \cos(\theta)m^{10} + 5s^5 - 11s^4m^2 + 10s^3m^4 \\
& - 6s^2m^6 + sm^8 + m^{10} + \lambda\lambda' \left[\cos^3(\theta)s^5 + \cos^3(\theta)s^4m^2 - 2 \cos^3(\theta)s^3m^4 \right. \\
& - 2 \cos^3(\theta)s^2m^6 + \cos^3(\theta)sm^8 + \cos^3(\theta)m^{10} + 3 \cos^2(\theta)s^5 - 6 \cos^2(\theta)s^3m^4 \\
& - 3 \cos^2(\theta)s^4m^2 + 6 \cos^2(\theta)s^2m^6 + 3 \cos^2(\theta)sm^8 - 3 \cos^2(\theta)m^{10} + 7 \cos(\theta)s^5 \\
& - 13 \cos(\theta)s^4m^2 + 2 \cos(\theta)s^3m^4 + 10 \cos(\theta)s^2m^6 - 9 \cos(\theta)sm^8 \\
& \left. \left. + 3 \cos(\theta)m^{10} + 5s^5 - 17s^4m^2 + 22s^3m^4 - 14s^2m^6 + 5sm^8 - m^{10} \right] \right),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

où α est la constante de structure fine sans dimension et $g_1(s, \theta)$ est tel que :

$$\begin{aligned}
g_1(s, \theta) = & 8s^2 \left[\cos^2(\theta)s^4 - 4 \cos^2(\theta)s^3m^2 + 6 \cos^2(\theta)s^2m^4 - 4 \cos^2(\theta)sm^6 + \cos^2(\theta)m^8 \right. \\
& \left. + 2 \cos(\theta)s^4 - 4 \cos(\theta)s^3m^2 + 4 \cos(\theta)sm^6 - 2 \cos(\theta)m^8 + s^4 - 2s^2m^4 + m^8 \right].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.2.3 Calcul de la section efficace différentielle de spin-flip

La SED de spin-flip correspond aux états d'hélicité suivants :

$$\lambda = -\lambda' = \pm 1, \implies \lambda\lambda' = -1, \tag{3.41}$$

on obtient pour la SED polarisée par un flip d'hélicité :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{flip}}^{\text{CM}} = \frac{f_2(s, \theta)}{g_2(s, \theta)}, \tag{3.42}$$

où

$$\begin{aligned}
f_2(s, \theta) = & \alpha^2 m^2 \left(-3 \cos^3(\theta)s^4 + 6 \cos^3(\theta)s^3m^2 - 4 \cos^3(\theta)s^2m^4 + 2 \cos^3(\theta)sm^6 \right. \\
& - \cos^3(\theta)m^8 + \cos^2(\theta)s^4 - 2 \cos^2(\theta)s^3m^2 + 4 \cos^2(\theta)s^2m^4 - 6 \cos^2(\theta)sm^6 \\
& + 3 \cos^2(\theta)m^8 - \cos(\theta)s^4 + 2 \cos(\theta)s^3m^2 - 4 \cos(\theta)s^2m^4 + 6 \cos(\theta)sm^6 \\
& \left. - 3 \cos(\theta)m^8 + 3s^4 - 6s^3m^2 + 4s^2m^4 - 2sm^6 + m^8 \right),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

et

$$\begin{aligned}
g_2(s, \theta) = & 4s^2 \left(\cos^2(\theta)s^4 - 4 \cos^2(\theta)s^3m^2 + 6 \cos^2(\theta)s^2m^4 - 4 \cos^2(\theta)sm^6 + \cos^2(\theta)m^8 \right. \\
& \left. + 2 \cos(\theta)s^4 - 4 \cos(\theta)s^3m^2 + 4 \cos(\theta)sm^6 - 2 \cos(\theta)m^8 + s^4 - 2s^2m^4 + m^8 \right).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

3.3.2.4 Calcul de la section efficace différentielle de spin-non flip

Le cas où il n'y a pas de flip d'hélicité correspond à :

$$\lambda = \lambda' = \pm 1, \implies \lambda\lambda' = 1, \tag{3.45}$$

et la SED non polarisée à hélicité est donnée par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{non flip}}^{\text{CM}} = \frac{f_3(s, \theta)}{g_3(s, \theta)}, \tag{3.46}$$

où

$$\begin{aligned}
f_3(s, \theta) = & \alpha^2 \left(\cos^3(\theta)s^4 - 2 \cos^3(\theta)s^3m^2 + 4 \cos^3(\theta)s^2m^4 - 6 \cos^3(\theta)sm^6 + 3 \cos^3(\theta)m^8 \right. \\
& + 3 \cos^2(\theta)s^4 - 2 \cos^2(\theta)s^3m^2 - 8 \cos^2(\theta)s^2m^4 + 10 \cos^2(\theta)sm^6 - 3 \cos^2(\theta)m^8 \\
& + 7 \cos(\theta)s^4 - 14 \cos(\theta)s^3m^2 + 4 \cos(\theta)s^2m^4 + 6 \cos(\theta)sm^6 - 3 \cos(\theta)m^8 \\
& \left. + 5s^4 - 14s^3m^2 + 16s^2m^4 - 10sm^6 + 3m^8 \right), \tag{3.47}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g_3(s, \theta) = & 4s \left(\cos^2(\theta)s^4 - 4 \cos^2(\theta)s^3m^2 + 6 \cos^2(\theta)s^2m^4 - 4 \cos^2(\theta)sm^6 + \cos^2(\theta)m^8 \right. \\
& \left. + 2 \cos(\theta)s^4 - 4 \cos(\theta)s^3m^2 + 4 \cos(\theta)sm^6 - 2 \cos(\theta)m^8 + s^4 - 2s^2m^4 + m^8 \right). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

La somme des deux SEDs spin-flip et spin-non flip doit toujours donner la SED de spin non polarisée, ainsi :

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{flip}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{non flip}}. \tag{3.49}$$

On présente maintenant le degré de polarisation \mathcal{P} qui est défini par :

$$\mathcal{P} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{non flip}} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{flip}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{non flip}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{flip}}}. \tag{3.50}$$

Dans notre processus, ce degré de polarisation peut s'exprimer comme suit :

$$\mathcal{P}_{\text{CM}} = \frac{f_4(s, \theta)}{g_4(s, \theta)}, \tag{3.51}$$

où

$$\begin{aligned}
f_4(s, \theta) = & \cos^3(\theta)s^5 + \cos^3(\theta)s^4m^2 - 2 \cos^3(\theta)s^3m^4 - 2 \cos^3(\theta)s^2m^6 + \cos^3(\theta)sm^8 \\
& + \cos^3(\theta)m^{10} + 3 \cos^2(\theta)s^5 - 3 \cos^2(\theta)s^4m^2 - 6 \cos^2(\theta)s^3m^4 + 6 \cos^2(\theta)s^2m^6 \\
& + 3 \cos^2(\theta)sm^8 - 3 \cos^2(\theta)m^{10} + 7 \cos(\theta)s^5 - 13 \cos(\theta)s^4m^2 + 2 \cos(\theta)s^3m^4 \\
& + 10 \cos(\theta)s^2m^6 - 9 \cos(\theta)sm^8 + 3 \cos(\theta)m^{10} + 5s^5 - 17s^4m^2 + 22s^3m^4 - 14s^2m^6 \\
& + 5sm^8 - m^{10}, \tag{3.52}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g_4(s, \theta) = & \cos^3(\theta)s^5 - 5 \cos^3(\theta)s^4m^2 + 10 \cos^3(\theta)s^3m^4 - 10 \cos^3(\theta)s^2m^6 + 5 \cos^3(\theta)sm^8 \\
& - \cos^3(\theta)m^{10} + 3 \cos^2(\theta)s^5 - \cos^2(\theta)s^4m^2 - 10 \cos^2(\theta)s^3m^4 + 14 \cos^2(\theta)s^2m^6 \\
& - 9 \cos^2(\theta)sm^8 + 3 \cos^2(\theta)m^{10} + 7 \cos(\theta)s^5 - 15 \cos(\theta)s^4m^2 + 6 \cos(\theta)s^3m^4 \\
& + 2 \cos(\theta)s^2m^6 + 3 \cos(\theta)sm^8 - 3 \cos(\theta)m^{10} + 5s^5 - 11s^4m^2 + 10s^3m^4 - 6s^2m^6 \\
& + sm^8 + m^{10}. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Dans la diffusion à basse énergie $s \approx m^2$ (exactement $s = 1.001m^2$), le degré de polarisation est réduit à :

$$\mathcal{P}_{\text{CM}} \simeq \cos(\theta). \tag{3.54}$$

3.4 Résultats et discussions

La compréhension de l'interaction entre la lumière et la matière est toujours une tâche difficile pour la communauté scientifique. Il couvre un large domaine de recherche, de la spectroscopie nucléaire à des énergies de quelques MeV, à la physique des hautes énergies (particules), utilisant des faisceaux de particules d'énergies de GeV ou de quelques TeV. Différentes mesures ont été faites pour confirmer les résultats avec une plus grande précision et pour sonder les détails les plus fins du spectre de Compton. Les expériences de diffusion de Compton sont difficiles à cause de gammes de sections efficaces assez petites. Pour obtenir une précision statistique raisonnable dans la SED mesurée, il faut des photons à haute intensité avec une résolution énergétique suffisante. Avant de présenter les résultats et leur interprétation physique, notons que toutes les courbes des SEDs sont tracées en unités de $r_0^2 = \alpha^2/m^2$ où $r_0 \simeq 2.8 \times 10^{-13}$ cm est le rayon classique de l'électron. Nous commençons notre discussion par les résultats obtenus pour la diffusion Compton non polarisée dans le SCM et SL. Dans le SL, la formule de Klein-Nishina (3.23) peut être explicitement une fonction d'énergie au centre de masse s , en notant que

$$\omega = \frac{s - m^2}{2m}. \quad (3.55)$$

Les interactions peuvent ainsi être regroupées en trois cas : (1) diffusion à basse énergie où $s = 1.001 m^2$, (2) diffusion à moyenne énergie où $s = 2 m^2$, et (3) diffusion à haute énergie où $s = 10 m^2$.

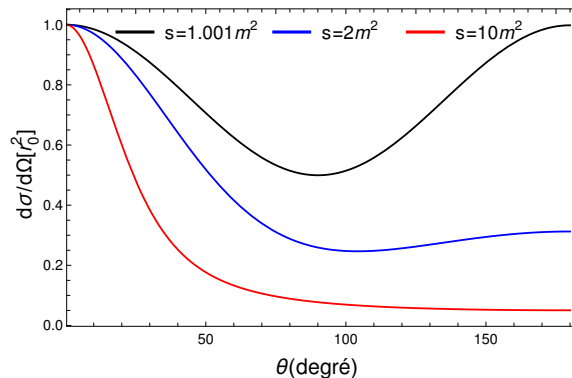


FIGURE 3.3 – La SED non polarisée en fonction de l'angle de diffusion de photon θ_L dans le SL à différentes valeurs d'énergie s .

La figure (3.3) représente la SED en fonction de l'angle θ_L dans le SL pour chacune de ces régions. Dans la région à basse énergie, la SED est presque symétrique autour d'un angle de diffusion $\theta = 90^\circ$ qui sert également de minimum, en d'autres termes, la probabilité de diffusion vers l'avant et vers l'arrière est la même. La SED est proportionnelle à $1 + \cos^2(\theta_L)$, ce qui respecte la prédiction de la diffusion Thomson classique. Par conséquent, la diffusion à basse énergie favorise doucement l'observation près de l'axe du faisceau, donc la probabilité de diffusion tant vers l'avant que vers l'arrière. Dans la région de haute énergie, la probabilité de diffusion aux grands angles (diffusion vers l'arrière) est faible et relativement constante avec l'angle, alors que la probabilité de diffusion vers l'avant ($\theta_L = 0$) est inchangée. La SED est approximativement nulle partout sauf dans le sens direct du photon. Comme l'énergie du photon augmente et devient finalement comparable avec l'énergie de masse au repos de l'électron, la formule de Klein-Nishina prédit que la diffusion en avant des photons devient de plus en plus favorisée par rapport à la diffusion en arrière.

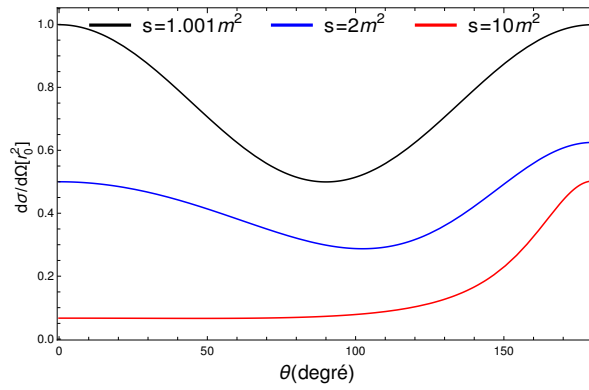


FIGURE 3.4 – La SED non polarisée en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM, dessiné pour différentes valeurs d’énergie s .

Dans la figure (3.4), nous avons montré qu’à basse énergie, la dépendance à l’angle θ_{CM} est la même que sur θ_L , les deux systèmes étant confondus dans la limite de $\omega \rightarrow 0$. À haute énergie, cependant, il y a une grande préférence pour la diffusion proche de $\theta_{CM} = 180^\circ$ dans laquelle un photon diffusé retourne presque le long de sa trajectoire originale. Physiquement, ce n’est pas particulièrement significatif, c’est simplement une réflexion sur le fait que le SCM se déplace par rapport aux deux particules (contrairement au SL). Le graphique de l’énergie moyenne montre une combinaison de deux facteurs concurrents, ayant pour résultat un maximum à $\theta_{CM} = 180^\circ$, avec un minimum maintenant à $\theta_{CM} > 90^\circ$. Pour un angle θ_{CM} fixe, la SED augmente toujours autant que l’énergie du centre de masse augmente.

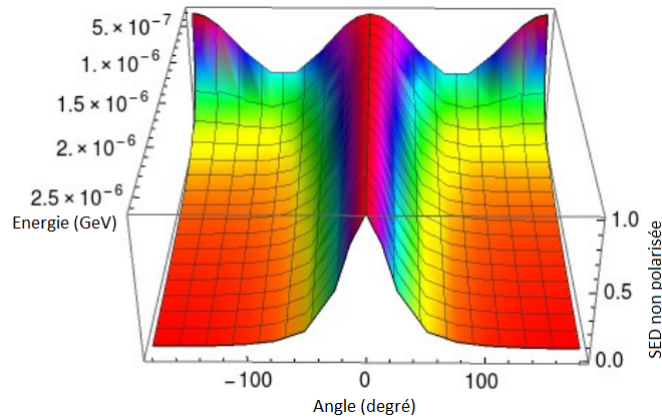


FIGURE 3.5 – Le comportement de la SED non polarisée en fonction de l’angle θ_L et de l’énergie s dans le système du laboratoire.

Nous présentons, dans les figures (3.5) et (3.6), les graphiques en trois dimensions pour la SED non polarisée, en fonction de l’angle de diffusion, dans les deux systèmes (SL et SCM), à différentes énergies. Ces deux figures montrent deux comportements globaux différents, l’un à basse énergie et l’autre à plus haute énergie. À haute énergie, la forme de la SED non polarisée, en SL, est très différente de celle du système CM. Mais ils suivent la même forme pour les énergies les plus basses. À basse énergie, la SED non polarisée, dans les SL et SCM, présente la diffusion Thomson non polarisée dans laquelle le photon a la même probabilité d’être diffusé vers l’avant ou vers l’arrière. Au fur et à mesure que l’énergie au CM s augmente, nous constatons que, dans le SL, la diffusion en avant devient plus dominante, tandis que dans le SCM, c’est la diffusion en arrière qui est dominante.

Passons maintenant à la discussion des résultats concernant la diffusion Compton des électrons polarisés dans le SCM.

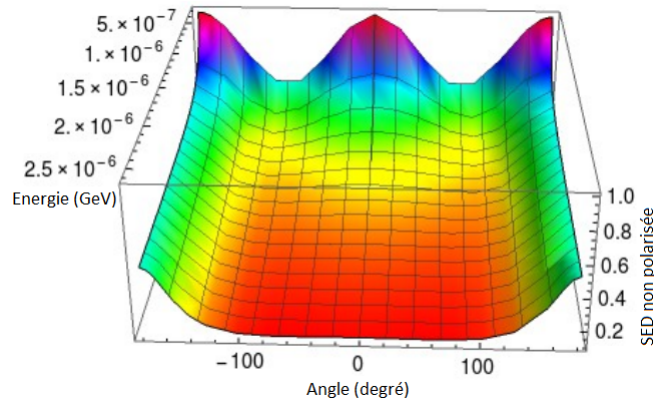


FIGURE 3.6 – Le comportement de la SED non polarisée en fonction de l’angle θ_{CM} et de l’énergie s dans le SCM.

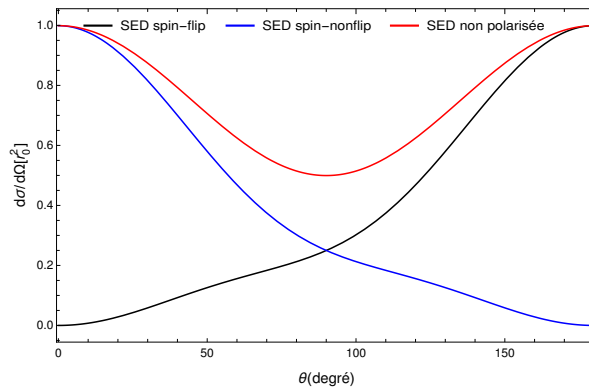


FIGURE 3.7 – Les différentes SEDs en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM pour $s = 1.001 m^2$.

La figure (3.7) montre les trois SEDs différentes (la SED non polarisée, la SED de spin-flip et la SED de spin-non flip) en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM à basse énergie $s = 1.001 m^2$. Dans ce cas, nous voyons que les photons sont principalement diffusés soit vers l’avant, soit vers l’arrière avec une probabilité relativement égale. Comme nous pouvons le voir concernant l’électron diffusé, la SED spin-non flip prédomine dans la gamme d’angle de diffusion $0^\circ \leq \theta_{CM} \leq 90^\circ$ et diminue lorsque l’angle θ_{CM} devient plus grand jusqu’à $\theta_{CM} = 180^\circ$ et quand sa valeur devient nulle. Symétriquement, la SED de spin-flip commence d’une manière basse (égale à zéro à $\theta_{CM} = 0^\circ$) et augmente avec l’angle θ_{CM} croît jusqu’à la valeur maximale égale à 1 à $\theta_{CM} = 180^\circ$. Si le photon est diffusé vers l’arrière ($\theta_{CM} = 180^\circ$), l’électron incident change de spin.

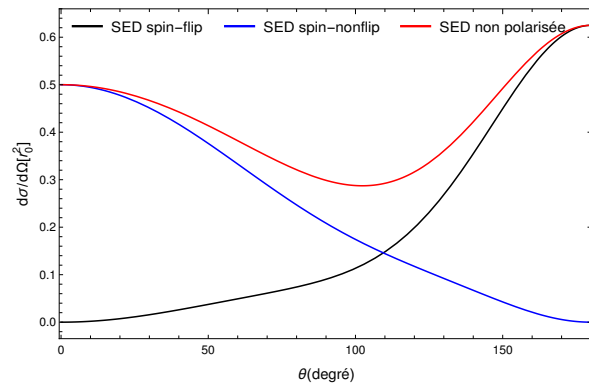


FIGURE 3.8 – Les différentes SEDs en fonction de l’angle θ_{CM} dans le SCM pour $s = 2 m^2$.

La figure (3.8) représente les trois mêmes modèles comme indiqué sur la figure (3.7) mais ici l'énergie CM est égale à $s = 2 m^2$ (la moyenne énergie). Il ressort de cette figure, comme requis et attendu, que la SED non polarisée de spin diminue à mesure que l'énergie au CM s augmente. Nous constatons également que la gamme d'angle de diffusion dans laquelle la SED de spin-non flip est prédominante s'élargit ($0^\circ \leq \theta_{CM} \leq 110^\circ$). Dans l'énergie moyenne, la SED de spin non polarisé a un maximum à l'angle de diffusion $\theta_{CM} = 180^\circ$ auquel également la SED spin-flip est plus prédominant que la SED spin-non flip. Cela signifie que le photon sera plus probablement diffusé vers l'arrière que vers l'avant, ce qui fait que l'électron incident change de spin.

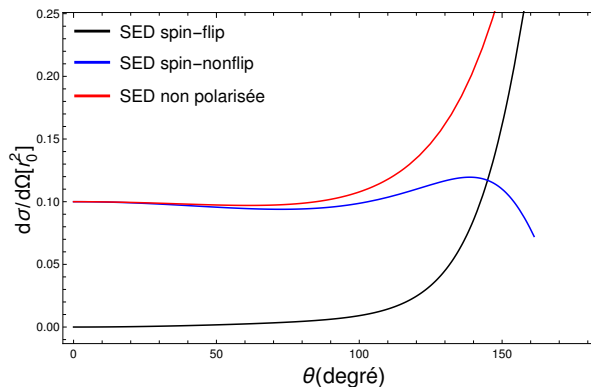


FIGURE 3.9 – Les différentes SEDs en fonction de l'angle de diffusion θ_{CM} dans le SCM pour $s = 10 m^2$.

La figure (3.9) présente le comportement des trois SEDs à haute énergie ($s = 10 m^2$). Apparemment, la SED de spin-non flip devient de plus en plus importante que la SED de spin-flip qui peut être négligée comme l'énergie au CM s augmente. Le résultat le plus important, qui est considéré comme une vérification de cohérence et est atteint avec succès ici, est que la somme des SEDs polarisées (spin-flip) et (spin-non flip) donne toujours la SED non polarisée en spin comme cela est montré dans les trois figures précédentes (3.7), (3.8) et (3.9).

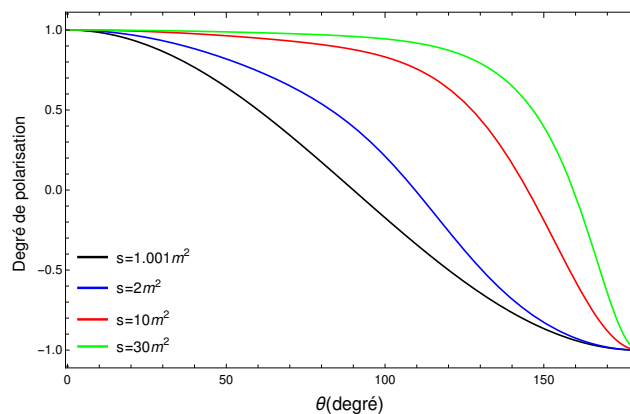


FIGURE 3.10 – Degré de polarisation \mathcal{P} en fonction de l'angle θ_{CM} dans le SCM, tracé pour différentes valeurs d'énergie s .

La figure (3.10) représente le degré de polarisation de l'électron diffusé dans le SCM pour différentes énergies. Cette figure concorde bien avec les trois figures précédentes. Comme nous l'avons vu précédemment, dans la diffusion à basse énergie $s = 1.001 m^2$, le degré de polarisation est réduit à $\cos(\theta)$ qui est fortement modifié par l'angle de diffusion θ_{CM} . Apparemment, à haute énergie, lorsque la diffusion devient relativiste, le degré de polarisation devient moins dépendant de l'angle de diffusion θ_{CM} et se rapproche de la valeur constante égale à 1, ce qui implique

la dominance complète de la SED spin-non flip. La signification physique de ce résultat est la suivante : à très haute énergie, la probabilité que l'électron incident change de spin est nulle. Ces résultats sont cohérents à ceux obtenus dans des articles précédents [54, 51] qui suivent la même méthodologie. Un graphe 3D du degré de polarisation dans le SCM est donné en fonction de l'angle de diffusion θ_{CM} et de l'énergie CM s dans la figure (3.11).

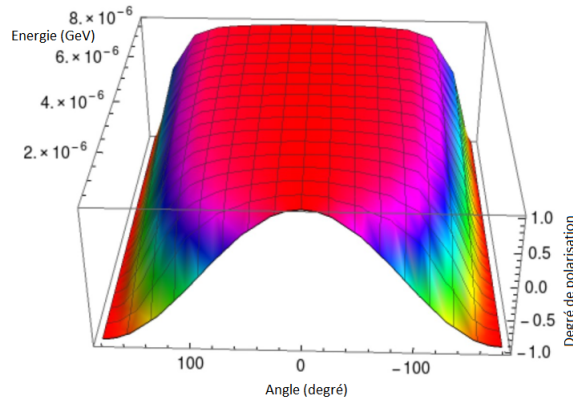


FIGURE 3.11 – Le comportement du degré de polarisation \mathcal{P} en fonction de l'angle θ_{CM} et de l'énergie s dans le SCM.

Semblable au tracé 2D indiqué sur la figure (3.10), le tracé 3D présente plus d'informations sur la variation et la forme du degré de polarisation par rapport aux paramètres libres. En augmentant l'énergie, le degré de polarisation décroît plus lentement qu'une distribution gaussienne et il se comporte comme un plateau. Cela est principalement dû à la non-dépendance du degré de polarisation par rapport au paramètre angulaire dans l'intervalle $[-150^\circ, 150^\circ]$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié la diffusion Compton des électrons polarisés. On a d'abord vérifié les résultats déjà connus pour les électrons non polarisés. La SED non polarisée a été calculée dans les SL et SCM, qui ont donné dans la figure (3.3) et (3.4). Puis on passe au cas où on a appliqué le concept d'électrons polarisés dans le SCM. On a calculé les expressions des trois SEDs (SED non polarisée, SED spin-flip et SED spin-non flip) et le degré de polarisation. On a étudié leur comportement à des énergies faibles et élevées. On en conclut qu'à haute énergie, la probabilité que l'électron doive changer de spin est zéro. Une vérification de cohérence réussie est que la somme des deux SED de spin-flip et de spin-non flip se traduit toujours par une SED non polarisée. Enfin, il est possible de dire que le spin d'un électron peut être influencé par la diffusion en fonction de l'énergie des particules incidentes. Il est donc possible de mieux comprendre l'influence de la diffusion sur les états de spin en appliquant le même concept de polarisation à d'autres processus de QED. Bien que l'ajout des effets externes (ex : la polarisation des électrons, le champ électromagnétique, ...) rend le calcul un peu difficile et nécessite de nouvelles fonctions mathématiques complexes, il permet de comprendre le comportement des particules durant la diffusion et de découvrir leurs nouvelles propriétés.

CHAPITRE 4

ÉMISSION D'UN PHOTON PAR UN ÉLECTRON DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE INTENSE

Introduction

Le laser fut l'une des inventions les plus importantes de la seconde moitié du 20^{ème} siècle. Il fournit une source unique de rayonnement électromagnétique avec une excellente monochromaticité, une luminosité élevée, une directivité et une forte cohérence. Grâce à ces propriétés, il est devenu très utilisé dans les domaines industriel, médical, commercial, scientifique, militaire et de l'information. Actuellement, les lasers ouvrent un champ de recherche pour étudier les processus de diffusion en physique des particules. Les processus de diffusion assistée par laser retiennent beaucoup l'attention depuis l'apparition des premiers lasers dans les années 1960. Grâce aux progrès de la technologie laser, la génération actuelle de sources laser peut atteindre des intensités supérieures à 10^{18} W/cm² [18]. L'intérêt d'utiliser un traitement relativiste pour étudier les processus fondamentaux en présence d'un champ laser devient impératif puisque les intensités dépassent la valeur seuil de 10^{18} W/cm². Le but de cet intérêt est de bien comprendre l'interaction laser-matière et d'avoir l'influence du rayonnement électromagnétique sur la section efficace de diffusion. Les premiers processus assistés par laser qui ont été étudiés dans l'électrodynamique quantique (QED) étaient des processus de premier ordre : la diffusion Compton induite par laser [23, 49] et la diffusion Mott assistée par laser [25, 26]. Dans ce chapitre, nous traitons un autre processus de premier ordre dans une onde plane électromagnétique externe, à savoir l'émission d'un photon par un électron dans un champ laser polarisé circulairement. La première étude de ce processus a été faite dans un cas particulier (champ électromagnétique faible) par [108].

4.1 Diffusion d'un photon par un électron dans un champ électromagnétique intense

Pour étudier la diffusion d'un photon par un électron dans le champ d'une onde électromagnétique intense, on utilise la fonction de *Dirac Volkov* [37] suivante :

$$\psi(x) = \left[1 + \frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}}{2(k\cdot p)}\right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2p_0V}} e^{is(x)}, \quad (4.1)$$

où

$$s(x) = -px - \int_0^{kx} \frac{e}{(kp)} [(pA) - \frac{e}{2}A^2] d\phi.$$

On considère une onde plane monochromatique polarisée circulairement. Son quadri-potentiel est de la forme.

$$A = a_1 \cos(\Phi) + a_2 \sin(\Phi), \quad \Phi = k^\mu x_\mu = k.x. \quad (4.2)$$

Avec :

$$k^\mu = (k^0, \mathbf{k}) = (w, \mathbf{k}), \quad |\mathbf{k}| = w, \quad k^2 = 0. \quad (4.3)$$

On choisit :

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2, \quad a_1.a_2 = a_2.a_1 = 0. \quad (4.4)$$

Les quadri-amplitudes a_1 et a_2 sont égales en valeur absolue et orthogonales les unes aux autres de sorte que :

$$\begin{aligned} A^2 &= a_1^2 \cos^2(\Phi) + a_2^2 \sin^2(\Phi) + 2(a_1.a_2) \cos(\Phi) \sin(\Phi), \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$A^2 = A^\mu A_\mu = a^2. \quad (4.5)$$

Le quadri-potentiel A^μ satisfait à la condition de jauge de Lorenz suivante :

$$K_\mu A^\mu = 0 \leftrightarrow (k.a_1) \cos(\Phi) + (k.a_2) \sin(\Phi) = 0,$$

d'où :

$$k.a_1 = k.a_2 = 0. \quad (4.6)$$

La fonction d'onde exacte pour un électron placé dans le champ d'une onde électromagnétique plane quelconque a été établie dans la section précédente. Elle est donnée par la relation (4.1) avec la normalisation dans (1.83). Nous allons toutefois changer sa normalisation. On exigera que ψ_p corresponde à la densité spatiale moyenne et nous normalisons les fonctions d'ondes des particules libres à une particule dans le volume unitaire. Étant donné que pour la fonction (4.1), la densité spatiale moyenne est égale à $\bar{j}_0 = \frac{q_0}{p_0}$, pour obtenir la normalisation voulue,

elle doit être multipliée par $\sqrt{\frac{q_0}{p_0}}$. Dans l'équation (4.1), on remplace [113] :

$$\frac{1}{\sqrt{2Vp_0}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{\sqrt{2Vp_0}} \sqrt{\frac{q_0}{p_0}} = \frac{1}{\sqrt{2Vq_0}},$$

alors l'équation (4.1) devient :

$$\psi(x) = \left[1 + \frac{ekA}{2(k.p)} \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0V}} e^{is(x)}, \quad (4.7)$$

où

$$s(x) = -px - \int_0^{kx} \frac{e}{(kp)} [(pA) - \frac{e}{2}A^2] d\phi.$$

On remplace le quadri-potentiel A^u dans la fonction de *Dirac-Volkov*. On obtient :

$$\psi(x) = \left[1 + \frac{e}{2(k.p)} \left(\not{k}q_1 \cos(\Phi) + \not{k}q_2 \sin(\Phi) \right) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0V}} e^{is(x)}, \quad (4.8)$$

où

$$s(x) = -px - \int_0^{kx} \frac{e}{(kp)} [(pA) - \frac{e}{2}A^2] d\phi.$$

On a : $A^2 = a^2$ et $(p.A) = (p.a_1) \cos(\Phi) + (p.a_2) \sin(\Phi)$. Alors $s(x)$ devient sous la forme suivante :

$$s(x) = -(p^\mu - \frac{ea^2}{2(k.p)} k^\mu) . x_\mu - \frac{e}{k.p} (p.a_1) \sin(\Phi) + \frac{e}{k.p} (p.a_2) \cos(\Phi). \quad (4.9)$$

Donc, la fonction d'onde correctement normalisée de l'électron dans le champ d'une onde plane électromagnétique polarisée circulairement est donnée par :

$$\psi(x) = \left[1 + \frac{e}{2(k.p)} \left(\not{k}q_1 \cos(\Phi) + \not{k}q_2 \sin(\Phi) \right) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0V}} e^{is(x)}, \quad (4.10)$$

avec

$$s(x) = -(q.x) - \frac{e}{k.p} (p.a_1) \sin(\Phi) + \frac{e}{k.p} (p.a_2) \cos(\Phi).$$

Où $q^\mu = p^\mu - \frac{ea^2}{2(k.p)} k^\mu$: est la nouvelle impulsion que la particule fermionique acquiert en présence d'une onde électromagnétique. Il sera appelé la quasi-impulsion [113].

4.2 Élément de matrice de transition

Le processus de diffusion d'un photon par un électron dans le champ d'une onde électromagnétique intense est un processus d'interaction faible, il peut être décrit par les diagrammes de Feynman, donc l'élément de matrice S_{fi} pour la transition de l'électron de l'état ψ_p à l'état $\psi_{p'}$ avec émission d'un photon de quadri-impulsion $k'^\mu = (w', \mathbf{k}')$ et de polarisation ϵ' est écrit :

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\Psi}_{p'}(x) A^*(k', \lambda') \Psi_p(x) d^4x. \quad (4.11)$$

Où, e est la charge de l'électron, Ψ_p et $\Psi_{p'}$ sont respectivement l'état initial et final de l'électron :

$$\psi_p(x) = \left[1 + \frac{e}{2(k.p)} \left(\not{k}q_1 \cos(\Phi) + \not{k}q_2 \sin(\Phi) \right) \right] \frac{u(p, s)}{\sqrt{2q_0V}} e^{is(x)},$$

$$\psi_{p'}(x) = \left[1 + \frac{e}{2(k.p')} \left(\not{k}q_1 \cos(\Phi) + \not{k}q_2 \sin(\Phi) \right) \right] \frac{u(p', s')}{\sqrt{2q_0V}} e^{is_f(x)},$$

et $A_\mu(k', \lambda')$ est le champ du photon donné par :

$$A_\mu(k', \lambda') = \sqrt{4\pi} \epsilon_\mu(k', \lambda') \frac{e^{-ik'.x}}{\sqrt{2w'}}, \quad \epsilon_\mu(k', \lambda') = \epsilon'_\mu. \quad (4.12)$$

On remplace $A_\mu(k', \lambda')$ par son expression dans l'élément de matrice de transition. On aura :

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2w'}} \bar{\Psi}_{p'}(x) \gamma^\mu \epsilon'_\mu \Psi_{p'}(x) e^{ik'.x}, \quad (4.13)$$

$$= -ie \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2w'}} \int d^4x \bar{\Psi}_{p'}(x) \not{\epsilon}'^* \Psi_{p'}(x) e^{ik'.x}. \quad (4.14)$$

Insérons $\Psi_{p'}(x)$ et $\bar{\Psi}_p(x)$ dans l'élément de matrice de transition. On obtient :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \int d^4x \bar{u}(p', s') \left[1 + \frac{e}{2k.p'} \left(q_1 \not{k} \cos(\Phi) + q_2 \not{k} \sin(\Phi) \right) \right] \not{\epsilon}'^* \\ &\quad \left[1 + \frac{e}{2k.p} \left(\not{k} q_1 \cos(\Phi) + \not{k} q_2 \sin(\Phi) \right) \right] u(p, s) \times e^{ik'.x} \times e^{i(s_i(x) - s_f(x))}, \\ &= \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \int d^4x \bar{u}(p', s') \left[1 + C(p') \left(q_1 \not{k} \cos(\Phi) + q_2 \not{k} \sin(\Phi) \right) \right] \not{\epsilon}'^* \\ &\quad \left[1 + C(p) \left(\not{k} q_1 \cos(\Phi) + \not{k} q_2 \sin(\Phi) \right) \right] u(p, s) \times e^{-ik'.x} \times e^{i(s_i(x) - s_f(x))}, \\ &= \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \int d^4x \bar{u}(p', s') \times F(\Phi) \times u(p, s) \times e^{ik'.x} \times e^{i(s_i(x) - s_f(x))}. \end{aligned}$$

Où

$$C(p') = \frac{e}{2(k.p')} , \quad C(p) = \frac{e}{2(k.p)},$$

et

$$F(\Phi) = \left[1 + C(p') \left(q_1 \not{k} \cos(\Phi) + q_2 \not{k} \sin(\Phi) \right) \right] \not{\epsilon}'^* \left[1 + C(p) \left(\not{k} q_1 \cos(\Phi) + \not{k} q_2 \sin(\Phi) \right) \right].$$

Traitons d'abord $\exp i(s_i(x) - s_f(x))$:

$$\begin{aligned} \exp i(s_i(x) - s_f(x)) &= \exp \left(i(q_f - q_i)x - ie \left[\frac{a_1.p}{k.p} - \frac{a_1.p'}{k.p'} \right] \sin(\Phi) \right. \\ &\quad \left. + ie \left[\frac{a_2.p}{k.p} - \frac{a_2.p'}{k.p'} \right] \cos(\Phi) \right), \\ &= \exp \left(i(q_f - q_i)x - i\alpha_1 \sin(\Phi) + i\alpha_2 \cos(\Phi) \right). \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e \left(\frac{a_1.p}{k.p} - \frac{a_1.p'}{k.p'} \right), \\ \alpha_2 &= e \left(\frac{a_2.p}{k.p} - \frac{a_2.p'}{k.p'} \right). \end{aligned}$$

Cette expression peut être transformée comme suit :

$$\exp(i(s_i(x) - s_f(x))) = \exp\left[i(q' - q)x - iz \sin(\Phi - \Phi_0)\right]. \quad (4.15)$$

Où $z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $\cos(\Phi_0) = \frac{\alpha_1}{z}$, $\sin(\Phi_0) = \frac{\alpha_2}{z}$, et $\Phi_0 = \arctan\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$.

On développe F :

$$\begin{aligned} F(\Phi) &= [1 + C(p')(q_1 k \cos(\Phi) + q_2 k \sin(\Phi))] \epsilon'^* [1 + C(p)(k q_1 \cos(\Phi) + k q_2 \sin(\Phi))], \\ &= [1 + C(p')(q_1 k \cos(\Phi) + q_2 k \sin(\Phi))] [\epsilon'^* + C(p)(\epsilon'^* k q_1 \cos(\Phi) + \epsilon'^* k q_2 \sin(\Phi))], \\ &= \epsilon'^* + [C(p')q_1 k \epsilon'^* + C(p)\epsilon'^* k q_1] \cos(\Phi) + [C(p')q_2 k \epsilon'^* + C(p)\epsilon'^* k q_2] \sin(\Phi) \\ &\quad + C(p')C(p)q_1 k \epsilon'^* k q_1 \cos^2(\Phi) + C(p')C(p)q_2 k \epsilon'^* k q_2 \sin^2(\Phi) \\ &\quad + C(p')C(p)[q_1 k \epsilon'^* k q_2 + q_2 k \epsilon'^* k q_1] \cos(\Phi) \sin(\Phi). \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= q_1 k \epsilon'^* k q_1, \\ \delta_2 &= q_2 k \epsilon'^* k q_2, \\ \alpha &= q_1 k \epsilon'^* k q_2, \\ \beta &= q_2 k \epsilon'^* k q_1. \end{aligned}$$

Donc, F devient :

$$\begin{aligned} F(\Phi) &= \epsilon'^* + [C(p')q_1 k \epsilon'^* + C(p)\epsilon'^* k q_1] \cos(\Phi) + [C(p')q_2 k \epsilon'^* + C(p)\epsilon'^* k q_2] \sin(\Phi) \\ &\quad + C(p')C(p)[\delta_1 \cos^2(\Phi) + \delta_2 \sin^2(\Phi)] + C(p')C(p)[\alpha + \beta] \cos(\Phi) \sin(\Phi). \end{aligned}$$

On calcule α , δ_1 et β . On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= q_1 k \epsilon'^* k q_2 = \phi_1(2(k \cdot \epsilon'^*) - \epsilon'^* k) k q_2, \\ &= 2(k \cdot \epsilon'^*) q_1 k q_2 - q_1 \epsilon'^* k^2 q_2, \quad (\text{car } k^2 = 0), \\ &= 2(k \cdot \epsilon'^*) q_1 k q_2, \\ &= 2(k \cdot \epsilon'^*)(2(k \cdot a_1) - k q_1 q_2), \quad (\text{car } (a_1 \cdot k) = 0), \\ &= -2(k \cdot \epsilon'^*) q_2 k q_1. \end{aligned}$$

De même façons on trouve :

$$\beta = q_2 k \epsilon'^* k q_1 = 2(k \cdot \epsilon'^*) q_2 k q_1.$$

Comme $q_1 q_2 = q_2 q_1$.

Donc

$$\beta = -\alpha.$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= q_1 k \epsilon'^* k q_1 = q_1(2(k \cdot \epsilon'^*) - \epsilon'^* k) k q_1, \\ &= 2(k \cdot \epsilon'^*) q_1 k q_1 - q_1 \epsilon'^* k k q_1, \quad (\text{car } k k = k^2 = 0), \\ &= 2(k \cdot \epsilon'^*) q_1 k q_1, \\ &= -2(k \cdot \epsilon'^*) k a^2 = \delta_2. \end{aligned}$$

On remplace α et δ_1 par leurs expressions dans F . On aura :

$$F(\Phi) = \epsilon'^* - 2C(p')C(p)(k.\epsilon'^*)ka^2 + \left[C(p')q_1k\epsilon'^* + C(p)\epsilon'^*ka_1 \right] \cos(\Phi) \\ + \left[C(p')q_2k\epsilon'^* + C(p)\epsilon'^*ka_2 \right] \sin(\Phi). \quad (4.16)$$

Donc :

$$F(\Phi) = C_0 + C_1 \cos(\Phi) + C_2 \sin(\Phi). \quad (4.17)$$

Avec :

$$C_0 = \epsilon'^* - 2C(p')C(p)(k.\epsilon'^*)ka^2, \\ C_1 = \left[C(p')q_1k\epsilon'^* + C(p)\epsilon'^*ka_1 \right], \\ C_2 = \left[C(p')q_2k\epsilon'^* + C(p)\epsilon'^*ka_2 \right].$$

Insérons (4.15) et (4.17) dans l'élément de matrice de transition. Donc, on obtient :

$$S_{fi} = \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \int d^4x \bar{u}(p', s') \left[C_0 + C_1 \cos(\Phi) + C_2 \sin(\Phi) \right] u(p, s) \times e^{ik'.x} \\ \times \exp \left[i(q' - q)x - iz \sin(\Phi - \Phi_0) \right], \\ = \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \int d^4x \bar{u}(p', s') \left[C_0 + C_1 \cos(\Phi) + C_2 \sin(\Phi) \right] u(p, s) \\ \times \exp(i(k' + q' - q).x) \times \exp(-iz \sin(\Phi - \Phi_0)).$$

Dans cette étape, on utilise les fonctions de Bessel qui sont données par la transformation suivante[113] :

$$e^{-iz \sin(\Phi - \Phi_0)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(z) e^{-is(\Phi - \Phi_0)}. \quad (4.18)$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\Phi) \\ \sin(\Phi) \end{bmatrix} \times \exp[-iz \sin(\varphi - \varphi_0)] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} B_s(z) \\ B_{1s}(z) \\ B_{2s}(z) \end{bmatrix} e^{-is\Phi}. \quad (4.19)$$

Avec :

$$B_s(z) = J_s(z) e^{is\Phi_0}, \\ B_{1s}(z) = [J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\Phi_0} + J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\Phi_0}] \frac{1}{2}, \\ B_{2s}(z) = [J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\Phi_0} - J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\Phi_0}] \frac{1}{2i}.$$

Où s est le nombre de photons échangés.

Il vient alors pour l'élément de matrice S_{fi} :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{-ie\sqrt{4\pi}}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} u(p', s') \left[C_0 B_1(z) + C_1 B_{1s}(z) + C_2 B_{2s}(z) \right] u(p, s) \int d^4x e^{i(k'+q'-q-sk)\cdot x}, \\ &= \frac{i(2\pi)^4}{V\sqrt{8q'_0q_0w'}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} M_{fi}^s \delta^4(k' + q' - q - sk). \end{aligned}$$

Où M_{fi}^s est l'élément de matrice donné par :

$$M_{fi}^s = -e\sqrt{4\pi} \left[\bar{u}(p', s') \Gamma^s u(p, s) \right]. \quad (4.20)$$

Avec :

$$\Gamma^s = C_0 B_s(z) + C_1 B_{1s}(z) + C_2 B_{2s}(z),$$

où

$$\begin{aligned} C_0 &= \not{\epsilon}'^* - 2C(p')C(p)(k \cdot \not{\epsilon}'^*)\not{k}a^2, \\ C_1 &= \left[C(p')q_1\not{k}\not{\epsilon}'^* + C(p)\not{\epsilon}'^*\not{k}q_1 \right], \\ C_2 &= \left[C(p')q_2\not{k}\not{\epsilon}'^* + C(p)\not{\epsilon}'^*\not{k}q_2 \right]. \end{aligned}$$

L'élément de matrice S_{fi} est exprimé par une somme infinie de termes, chacun satisfaisant à la loi de la conservation de l'énergie-impulsion :

$$sk + q = q' + k'. \quad (4.21)$$

Avec :

$$-\infty \leq s \leq +\infty.$$

On a :

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(p - \frac{e^2 a^2}{2(k \cdot p)} k \right)^2, \\ &= m^2 - e^2 a^2, \\ &= m(1 + \varepsilon^2) = m_*^2. \end{aligned}$$

Où m_* est la masse effective de l'électron. De même, on trouve :

$$\begin{aligned} q'^2 &= \left(p' - \frac{e^2 a^2}{2(k \cdot p)} k \right)^2, \\ &= m^2 - e^2 a^2, \\ &= m(1 + \varepsilon^2) = m_*^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$q^2 = q'^2 = m_*^2 = m^2(1 + \varepsilon^2). \quad (4.22)$$

De plus $k^2 = k'^2 = 0$, donc la relation de conservation n'est valable que pour $s \geq 1$. Le s^{ieme} terme de la somme décrit l'émission du photon k' aux dépens de s photons de quadri-impulsion k absorbés à l'onde. La forme de l'équation (4.21) montre clairement que toutes les relations cinématiques valables pour l'effet compton [115] seront également valables pour les processus que nous considérons ici, si les impulsions des électrons sont remplacées par les quasi-impulsions q et si l'impulsion du photon k est remplacée par le quadrivecteur sk . Notamment, dans le système où l'électron est en moyenne au repos.

Dans le système de laboratoire on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} q &= (m_*, 0), & sk &= (sw, s\mathbf{k}), \\ q' &= (E', \mathbf{q}'), & k' &= (w', \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$sw + m_* = E' + w', \quad (4.23)$$

$$s\mathbf{k} = \mathbf{q}' + \mathbf{k}', \quad (4.24)$$

$$E'^2 = q'^2 + m_*^2. \quad (4.25)$$

Insérons (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned} (sw - w' + m_*)^2 &= (s\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m_*^2, \\ \Rightarrow (sw - w')^2 + m_*^2 + 2m_*(sw - w') &= (sw)^2 + w'^2 - 2sww' \cos(\theta) + m_*^2, \\ \Rightarrow -2sww' + 2m_*(sw - w') &= -2sww' \cos(\theta), \\ \Rightarrow sww'(1 - \cos(\theta)) &= m_*(sw - w'). \end{aligned}$$

Donc :

$$w' = \frac{sw}{1 + \frac{sw}{m_*} [1 - \cos(\theta)]}. \quad (4.26)$$

Où θ est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{k}' . On dit que les fréquences w' sont les harmoniques de la fréquence w .

4.3 Probabilité de transition

La probabilité de transition par unité de volume et par unité de temps est donnée par :

$$W = \frac{|S_{fi}|^2}{TV} = \frac{1}{8TV^2 q'_0 q_0 w'} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|\bar{M}_{fi}^s\|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(sk + q - k' - q')]^2. \quad (4.27)$$

Où

$$|M_{fi}^s|^2 = 4\pi e^2 \left[\bar{u}(p', s') \Gamma^s u(p, s) \right] \left[\bar{u}(p, s) \bar{\Gamma}^s u(p', s') \right].$$

L'espace de phase des deux particules finales doit figurer dans l'expression de la probabilité de transition :

$$dN_f = \frac{V^2 d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{q}'}{(2\pi)^6}.$$

Ainsi, la probabilité de transition pondérée est fournie par :

$$dW = \frac{1}{8TV^3q'_0q_0w'} \sum_{s=1}^{\infty} |\overline{M}_{fi}^s|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(sk + q - k' - q')]^2 \times \frac{V^2 d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{q}'}{(2\pi)^6}. \quad (4.28)$$

On utilise la propriété de la fonction de Dirac suivante :

$$[(2\pi)^4 \delta^4(sk + q - k' - q')]^2 = T(2\pi)^4 \delta^4(sk + q - k' - q'). \quad (4.29)$$

Donc, la probabilité de transition devient :

$$dW = \frac{1}{(2\pi)^2 8Vq'_0q_0w'} \sum_{s=1}^{\infty} |\overline{M}_{fi}^s|^2 \delta^4(sk + q - k' - q') d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{q}'. \quad (4.30)$$

La structure des amplitudes $|\overline{M}_{fi}^s|$ est analogue à celle des amplitudes de diffusion avec des ondes planes $\bar{u}(p)\Gamma u(p)$. Les opérations de sommation sur les polarisations de particules se font aussi comme d'habitude. Donc, la partie spinorielle est implicitement donnée par :

$$|\overline{M}_{fi}^s|^2 = \frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} |M_{fi}^s|^2 = 4e^2\pi \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} \frac{1}{2} [u(p', s')\Gamma^s u(p, s)]^2. \quad (4.31)$$

Avec :

$$\Gamma^s = C_0 B_s(z) + C_1 B_{1s}(z) + C_2 B_{2s}(z).$$

Où :

$$\begin{aligned} C_0 &= \not{\epsilon}'^* - 2C(p')C(p)(k \cdot \not{\epsilon}'^*)\not{k}a^2, \\ C_1 &= [C(p')q_1\not{k}\not{\epsilon}'^* + C(p)\not{\epsilon}'^*\not{k}q_1], \\ C_2 &= [C(p')q_2\not{k}\not{\epsilon}'^* + C(p)\not{\epsilon}'^*\not{k}q_2]. \end{aligned}$$

4.3.1 Calcul de traces en algèbre de Dirac

On aborde maintenant le calcul de la somme sur la polarisation de spin ou bien ce qu'on appelle aussi la partie spinorielle. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_{fi}^s|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} |M_{fi}^s|^2 = \frac{4e^2\pi}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} [\bar{u}(p', s')\Gamma^s u(p, s)]^2, \\ &= \frac{4e^2\pi}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} [\bar{u}(p', s')\Gamma^s u(p, s)] [\bar{u}(p, s)\bar{\Gamma}^s u(p', s')]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si on utilise les techniques standards de l'algèbre de Dirac pour les matrices γ , on aura :

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} |M_{fi}^s|^2 = \frac{4e^2\pi}{2} Tr(\not{p}' + m)\Gamma^s(\not{p} + m)\bar{\Gamma}^s. \quad (4.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Gamma^s &= C_0 B_s(z) + C_1 B_{1s}(z) + C_2 B_{2s}(z), \\ &= \left[\not{\epsilon}'^* - \frac{e^2 a^2 (k \cdot \not{\epsilon}'^*)}{2(k \cdot p)(k \cdot p')} \not{k} \right] B_s(z) + e \left[\frac{\not{\epsilon}'^* \not{k} q_1}{2(k \cdot p)} + \frac{q_1 \not{k} \not{\epsilon}'^*}{2(k \cdot p')} \right] B_{1s}(z) \\ &+ e \left[\frac{\not{\epsilon}'^* \not{k} q_2}{2(k \cdot p)} + \frac{q_2 \not{k} \not{\epsilon}'^*}{2(k \cdot p')} \right] B_{2s}(z). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^s &= \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0, \\
&= \left[\not{\epsilon}' - \frac{e^2 a^2 (k \cdot \epsilon')}{2(k \cdot p)(k \cdot p')} \right] B_s^*(z) + e \left[\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}'}{2(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\phi}_1}{2(k \cdot p')} \right] B_{1s}^*(z) \\
&\quad + e \left[\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}'}{2(k \cdot p)} + \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\phi}_2}{2(k \cdot p')} \right] B_{2s}^*(z).
\end{aligned}$$

Le calcul de cette trace se fait à l'aide du logiciel REDUCE [53]. Donc la solution donnée par REDUCE est :

$$\begin{aligned}
\text{Trace} = T &= \left[-e^{2\Phi_0} a_1 \cdot p \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} e - a_1 \cdot p \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} e + e^{2\Phi_0} a_1 \cdot p \ (k \cdot p')^2 j_{\text{som}} e \right. \\
&\quad + a_1 \cdot p \ (k \cdot p')^2 j_{\text{som}} e + e^{2\Phi_0} a_1 \cdot p' \ (k \cdot p)^2 j_{\text{som}} e + a_1 \cdot p' \ (k \cdot p)^2 j_{\text{som}} e \\
&\quad - e^{2\Phi_0} a_1 \cdot p' \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} e - a_1 \cdot p' \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} e + e^{2\Phi_0} a_2 \cdot p \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} ie \\
&\quad - a_2 \cdot p \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} ie - e^{2\Phi_0} a_2 \cdot p \ (k \cdot p')^2 j_{\text{som}} ie + a_2 \cdot p \ (k \cdot p')^2 j_{\text{som}} ie \\
&\quad - e^{2\Phi_0} a_2 \cdot p' \ (k \cdot p)^2 j_{\text{som}} ie + a_2 \cdot p' \ (k \cdot p)^2 j_{\text{som}} ie + e^{2\Phi_0} a_2 \cdot p' \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} ie \\
&\quad - a_2 \cdot p' \ k \cdot p \ k \cdot p' j_{\text{som}} ie - e^{\Phi_0} (k \cdot p)^2 a^2 e^2 j_{s-1}^2 - e^{\Phi_0} (k \cdot p')^2 a^2 e^2 j_{s-1}^2 \\
&\quad - e^{\Phi_0} (k \cdot p)^2 a^2 e^2 j_{s+1}^2 - e^{\Phi_0} (k \cdot p')^2 a^2 e^2 j_{s+1}^2 + 4e^{\Phi_0} k \cdot p k \cdot p' p \cdot p' J_s^2 \\
&\quad \left. + 4e^{\Phi_0} k \cdot p \ k \cdot p' \ a^2 \ e^2 \ J_s^2 - 8e^{\Phi_0} k \cdot p k \cdot p' \ m e^2 \ J_s^2 \right] / (2e^{\Phi_0} k \cdot p k \cdot p').
\end{aligned}$$

On calcule la somme des huit premiers termes dans la trace, on obtient :

$$\begin{aligned}
C^8 &= 4e j_{\text{som}} \left[-e^{2i\Phi_0} (a_1 \cdot p') (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) - (a_1 \cdot p') (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) \right. \\
&\quad - (a_1 \cdot p') (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) - (a_1 \cdot p') (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) \\
&\quad - e^{2i\Phi_0} (a_1 \cdot p) (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) - (a_1 \cdot p) (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \\
&\quad \left. - (a_1 \cdot p) (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) - (a_1 \cdot p) (k \cdot p') (k \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right] \times \frac{1}{2e^{i\Phi_0} (k \cdot p') (k \cdot p)} \\
&= 4e j_{\text{som}} \left[(a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) (-e^{2i\Phi_0} - 1) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) (-e^{2i\Phi_0} - 1) \right] \frac{1}{2e^{i\Phi_0}} \\
&= 4e j_{\text{som}} \left[(a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right] \times \frac{(-e^{2i\Phi_0} - 1)}{2e^{i\Phi_0}} \\
&= -4e j_{\text{som}} \cos(\Phi_0) \left[(a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right].
\end{aligned}$$

De façon similaire, nous trouvons les huit termes suivants :

$$C'_8 = -4e j_{\text{som}} \sin(\Phi_0) \left[(a_2 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) + (a_2 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right].$$

La contribution des 16 premières termes est :

$$\begin{aligned}
T_{16} = C^8 + C'_8 &= -4e j_{\text{som}} \left[\sin(\Phi_0) \left[(a_2 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) + (a_2 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. \cos(\Phi_0) \left[(a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'}\right) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p}\right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} j_{\text{som}} &= J_s(J_{s+1} + J_{s-1}) \\ &= \frac{2sJ_s^2}{z}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \cos(\Phi_0) \times j_{\text{som}} &= \frac{\alpha_1}{z} \frac{2sJ_s^2}{z} = \frac{2\alpha_1 s J_s^2}{z^2}, \\ \sin(\Phi_0) \times j_{\text{som}} &= \frac{\alpha_2}{z} \frac{2sJ_s^2}{z} = \frac{2\alpha_2 s J_s^2}{z^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Donc, en insérant (4.34) dans T_{16} , on obtient :

$$\begin{aligned} T_{16} &= -8e \left[\frac{\alpha_1}{z^2} \left((a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} \right) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_2}{z^2} \left((a_2 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} \right) + (a_2 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p} \right) \right) \right] s J_s^2. \end{aligned}$$

On utilise la relation :

$$\begin{aligned} sk + q = q' + k' &\implies k \cdot p = k \cdot p' + k \cdot k', \\ \implies \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} = 1 + \frac{k \cdot k'}{k \cdot p'} &\implies 1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} = -\frac{k \cdot k'}{k \cdot p'}, \end{aligned}$$

et on a :

$$q' = sk + q - k' \implies 1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p} = \frac{k \cdot k'}{k \cdot p}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} \right) + (a_1 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p} \right) &= -(a_1 \cdot p') \frac{k \cdot k'}{k \cdot p'} + (a_1 \cdot p) \frac{k \cdot k'}{k \cdot p} \\ &= \left(\frac{a_1 \cdot p}{k \cdot p} - \frac{a_1 \cdot p'}{k \cdot p'} \right) (k \cdot k') \\ &= \frac{\alpha_1 (k \cdot k')}{e}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

De même :

$$(a_2 \cdot p') \left(1 - \frac{k \cdot p}{k \cdot p'} \right) + (a_2 \cdot p) \left(1 - \frac{k \cdot p'}{k \cdot p} \right) = \frac{\alpha_2 (k \cdot k')}{e}. \quad (4.36)$$

Et on a :

$$\begin{aligned} sk - k' = q' - q &\implies (sk - k')^2 = (q' - q)^2 \\ \implies -2s(k \cdot k') = 2m_*^2 - 2(q \cdot q') & \\ \implies (k \cdot k') = \frac{1}{s} ((q \cdot q') - m_*^2). & \end{aligned}$$

Donc, T_{16} devient :

$$T_{16} = -8(q \cdot q' - m_*^2) J_s^2. \quad (4.37)$$

Les sept autres termes qui contribuent à la trace sont :

$$T_7 = 2 \left\{ -e^2 a^2 \left(\frac{k.p'}{k.p} - \frac{k.p}{k.p'} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2) + 4e^2 a^2 J_s^2 + 4(p.p' - 2m^2) J_s^2 \right\}. \quad (4.38)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{k.p'}{k.p} &= \frac{k.q'}{k.q} = \frac{k(sk + q - k')}{k.q} = \frac{k.q - k.k'}{k.p} \\ &= 1 - \frac{k.k'}{k.q} = 1 - \frac{k.k'}{k.p}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{k.p}{k.p'} &= 1 + \frac{k.k'}{k.p'} \\ \implies \left(\frac{k.p'}{k.p} - \frac{k.p}{k.p'} \right) &= 2 - k.k' \left(\frac{1}{k.q} - \frac{1}{k.q'} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les relations :

$$q + sk = q' + k' \implies q' - q = sk - k',$$

et aussi :

$$\xi^2 = \frac{-e^2 a^2}{m^2} \implies -e^2 a^2 = m^2 \xi^2.$$

Si on utilise la première relation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{k(q' - q)}{(k.q')(k.q)} (k.k') &= 2 - \frac{k(sk - k')}{(k.q')(k.q)} (k.k') \\ &= 2 + \frac{(k.k')^2}{(k.q')(k.q)}. \end{aligned}$$

Finalement, les sept autres termes qui contribuent à la trace deviennent :

$$\begin{aligned} T_7 &= 2 \left\{ -e^2 a^2 \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2) + 4e^2 a^2 J_s^2 + 4(p.p' - 2m^2) J_s^2 \right\} \\ &= 2 \left\{ \xi^2 m^2 \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2) - 4\xi^2 m^2 J_s^2 + 4(p.p' - 2m^2) J_s^2 \right\}. \end{aligned}$$

On transforme T_{16} :

$$\begin{aligned} T_{16} &= -8(q.q' - m_*^2) J_s^2 \\ &= -8 \left\{ \left(p + \frac{\xi^2 m^2}{2(k.p)} k \right) \left(p' + \frac{\xi^2 m^2}{2(k.p')} k \right) - m^2 (1 + \xi^2) \right\} \quad \text{car } m_*^2 = m^2 (1 + \xi^2) \\ &= -8 \left\{ (p.p') + \frac{\xi^2 m^2}{2(k.p)} (k.p') + \frac{\xi^2 m^2}{2(k.p')} (k.p) + 0 - m^2 (1 + \xi^2) \right\} \\ &= -8 \left\{ (p.p') + \frac{\xi^2 m^2}{2} \left(\frac{k.p'}{k.p} + \frac{k.p}{k.p'} \right) - m^2 - \xi^2 m^2 \right\}, \end{aligned}$$

et on a :

$$\left(\frac{k.p'}{k.p} + \frac{k.p}{k.p'} \right) = \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.p)(k.p')} \right).$$

Donc, T_{16} devient :

$$T_{16} = -8 \left\{ (p.p') + \frac{\xi^2 m^2}{2} \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.p)(k.p')} \right) - m^2 - \xi^2 m^2 \right\}. \quad (4.39)$$

On fait la somme entre les deux termes T_{16} et T_7 . Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{16} + T_7 &= 2 \left\{ \xi^2 m^2 \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2) - 4\xi^2 m^2 J_s^2 + 4(p.p' - 2m^2) J_s^2 \right\} \\ &\quad - 8 \left\{ (p.p') + \frac{\xi^2 m^2}{2} \left(2 + \frac{(k.k')^2}{(k.p)(k.p')} \right) - m^2 - \xi^2 m^2 \right\} J_s^2 \\ &= 4\xi^2 m^2 \left[\left(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right] - 8m^2 J_s^2 \\ &= 4m^2 \left[-2J_s^2 + \xi^2 \left(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right]. \end{aligned}$$

Donc, la partie spinorielle de ce processus est donnée par :

$$|\overline{M}_{fi}^s|^2 = \frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_{\lambda'} |M_{fi}^s|^2 = 8e^2 m^2 \pi \left[-2J_s^2 + \xi^2 \left(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right]. \quad (4.40)$$

En insérant la partie spinorielle dans la probabilité différentielle, on trouve :

$$dW = \frac{e^2 m^2}{4\pi V} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{q}'}{(q_0 q'_0 w')} \delta^4(s\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \mathbf{k}') \left[-2J_s^2 + \xi^2 \left(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} \right) (J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right]. \quad (4.41)$$

C'est la même formule trouvée par Landau[115].

Pour intégrer cette dernière expression, nous remarquons que, par suite de la symétrie axiale du champ polarisé circulairement, la probabilité différentielle ne dépend pas de l'angle azimutale ϕ autour de la direction k . Jointe à la présence de la fonction δ , cette propriété permet d'intégrer sur toutes les variables sauf une, nous prendrons pour cette dernière la quantité invariante suivante[113] :

$$u = \frac{(k.k')}{k.p'}. \quad (4.42)$$

Rappel :

Dans le système du centre de masse, il est possible de calculer la quantité suivante :

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2. \quad (4.43)$$

On intègre par rapport à \mathbf{p}'_2 , on obtient :

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta^4(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2) |\mathbf{p}'_1|^2 d\mathbf{p}'_1 d\Omega'_1. \quad (4.44)$$

Où

$$p'_2 = -p'_1 + p_1 + p_2.$$

Dans le système du centre de masse (SCM), on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_1 &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \implies \mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1 \\ &\implies |\mathbf{p}'_2| = |\mathbf{p}'_1|.\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{cases} E_1'^2 = \mathbf{p}'_1{}^2 + m_1^2 & \implies E_1' dE_1' = |\mathbf{p}'_1| d|\mathbf{p}'_1|, \\ E_2'^2 = \mathbf{p}'_2{}^2 + m_2^2 & \implies E_2' dE_2' = |\mathbf{p}'_1| d|\mathbf{p}'_1|. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\implies d(E_1' + E_2') &= \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'}\right) |\mathbf{p}'_1| d|\mathbf{p}'_1| \\ &= \frac{(E_2' + E_1')}{E_2' E_1'} |\mathbf{p}'_1| d|\mathbf{p}'_1|.\end{aligned}$$

Donc :

$$d^3 \mathbf{p}'_1 = \frac{E_2' E_1'}{(E_2' + E_1')} |\mathbf{p}'_1| d(E_1' + E_2') d\Omega'_1. \quad (4.45)$$

On intègre par rapport à $|\mathbf{p}'_1|$:

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) |\mathbf{p}'_1| \frac{E_2' E_1'}{(E_2' + E_1')} d\Omega'_1.$$

Où la dérivée partielle est évaluée avec θ'_1 et ϕ'_1 angles polaires de $|\mathbf{p}'_1|$ constantes. Nous avons une expression du genre :

$$dW_s = f(sk, q, q', k') \delta^4(sk + q - q' - k') \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0} \frac{d\mathbf{k}'}{w'}. \quad (4.46)$$

Avec :

$$f(sk, q, q', k') = \frac{e^2 m^2}{4\pi q_0 V} \sum_{s=1}^{\infty} \left[-2J_s^2 + \xi^2 \left(1 + \frac{(k \cdot k')^2}{2(k \cdot q')(k \cdot q)}\right) ((J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2)) \right].$$

On intègre cette expression par rapport à \mathbf{k}' .

$$dW = f(sk, q, q', k') \delta^4(sk + q - q' - k') \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0 w'}, \quad (4.47)$$

où $k' = sk + q - q'$. Donc, dW devient :

$$dW = f(sk, q, q', k') \delta(sw + q_0 - q'_0 - w') \frac{|\mathbf{q}'|}{q'_0 w'} \frac{q'_0 w'}{w' + q'_0} d(w' + q'_0) d\Omega'. \quad (4.48)$$

On intègre sur $d(w' + q'_0)$:

$$dW = f(sk, q, q', k') \frac{|\mathbf{q}'|}{(sw + q_0)} d\Omega'. \quad (4.49)$$

On intègre sur ϕ' :

$$dW = f(sk, q, q', k') \frac{2\pi |\mathbf{q}'| \sin(\theta') d\theta'}{E_{CM}}, \quad (4.50)$$

$$= f(sk, q, q', k') \frac{2\pi |\mathbf{q}'| d \cos(\theta')}{E_{CM}}. \quad (4.51)$$

Où, $E_{CM} = sk + q = q' + k'$ et θ' est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{q}' .

Cherchons à exprimer u dans le système du centre de masse (SCM). On a :

$$u = \frac{k.k'}{k.p'} = \frac{k(sk + q - q')}{k.q'} = \frac{k.q}{k.q'} - 1,$$

et

$$k.p = wq_0 - \mathbf{k}.\mathbf{q}, \quad (4.52)$$

$$\text{or } sk + q = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} = -s\mathbf{k}, \quad (4.53)$$

$$\rightarrow -\mathbf{k}.\mathbf{q} = +s\mathbf{k}^2 = sw^2. \quad (4.54)$$

Donc :

$$k.q = w(q_0 + sw), \quad (4.55)$$

et on a :

$$k.q' = wq'_0 - \mathbf{k}\mathbf{q}' = wq'_0 - w|\mathbf{q}'| \cos(\theta') \\ w(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta')).$$

Alors, u devient :

$$u = \frac{k.k'}{k.p} = \frac{wq_0 + sw^2}{w(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta'))} - 1 \\ = \frac{E_{CM}}{(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta'))} - 1 \\ \implies q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta') = \frac{E_{CM}}{u + 1} \\ |\mathbf{q}'| \cos(\theta') = q_0 - \frac{E_{CM}}{u + 1} \\ \cos(\theta') = \frac{q_0}{|\mathbf{q}'|} - \frac{E_{CM}}{|\mathbf{q}'|(u + 1)}.$$

Donc :

$$d \cos(\theta') = \frac{E_{CM} du}{|\mathbf{q}'|(u + 1)^2}. \quad (4.56)$$

La probabilité différentielle de la s-ième harmonique dW devient :

$$dW = f(sk, q, q', k') \frac{2\pi|\mathbf{q}'|}{E_s} \frac{E_s du}{|\mathbf{q}'|(u + 1)^2} \quad (4.57)$$

$$= f(sk, q, q', k') \frac{2\pi du}{(u + 1)^2}. \quad (4.58)$$

En effet, dans le système du centre de masse (dans lequel $s\mathbf{k} + \mathbf{q} = \mathbf{q}' + \mathbf{k}' = 0$), cette intégration donne $2\pi|\mathbf{q}'| \frac{d \cos(\theta')}{E_s}$, où $E_s = sw + q_0 = w' + q'_0$ et θ' est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{q}' d'un autre côté, dans le même système, on a vu que :

$$u = \frac{E_{CM}}{(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta'))} - 1, \quad d \cos(\theta') = \frac{E_{CM} du}{|\mathbf{q}'|(u + 1)^2}. \quad (4.59)$$

À l'intervalle $-1 < \cos(\theta') < 1$ correspond à l'intervalle :

$$u_{min} < u < u_{max}. \quad (4.60)$$

Pour $\cos(\theta') = -1$:

$$\begin{aligned} u = u_{min} &= \frac{E_s}{q'_0 + |\mathbf{q}'|} - 1 = \frac{w' + q'_0 - q'_0 - |\mathbf{q}'|}{q'_0 + |\mathbf{q}'|} \\ &= \frac{w' - |\mathbf{q}'|}{q'_0 + |\mathbf{q}'|} \\ &= 0 \quad \text{car } |\mathbf{q}'| = |\mathbf{k}'| = w'. \end{aligned}$$

Pour $\cos(\theta') = 1$:

$$u = u_{max} = \frac{E_s}{q'_0 - |\mathbf{q}'|} - 1 = \frac{w' + |\mathbf{q}'|}{q'_0 - |\mathbf{q}'|} = \frac{2|\mathbf{q}'|}{q'_0 - |\mathbf{q}'|}.$$

De plus :

$$\frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{(q'_0 + w')^2}{q_0'^2 - w'^2} - 1 = \frac{q'_0 + w'}{q'_0 - w'} - 1 = \frac{2w'}{q'_0 - w'} = \frac{2|\mathbf{q}'|}{q'_0 - |\mathbf{q}'|}.$$

D'un autre côté, en utilisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} sk + q = q' + k', \quad q^2 = q'^2 = m_*^2, \\ s(k \cdot q) = q' \cdot k', \\ \theta'(k, q') = \pi. \end{array} \right.$$

On aura :

$$\begin{aligned} 2s \frac{k \cdot p}{m_*^2} &= 2s \frac{k \cdot p}{q^2} \\ &= \frac{2(q' \cdot k')}{q'^2} \\ &= \frac{2(q'_0 w' - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}')}{q_0'^2 - |\mathbf{q}'|^2} \\ &= \frac{2(q'_0 w' + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}')}{q_0'^2 - |\mathbf{q}'|^2} = \frac{2w'}{q'_0 - |\mathbf{q}'|} = \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$u = u_{min} = 0 < u < u_s = u_{max} = \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = 2s \frac{k \cdot p}{m_*^2}.$$

Donc, la probabilité différentielle correspondant au processus d'émission de la s^{ieme} harmonique est :

$$dW_s = \frac{e^2 m^2}{4q_0 V} \frac{du}{(u+1)^2} \left[-4J_s^2 + 2\xi^2 \left(1 + \frac{(k \cdot k')^2}{2(k \cdot q')(k \cdot q)}\right) ((J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2)) \right]. \quad (4.61)$$

La probabilité totale d'émission d'un photon par unité de volume et de temps est donnée par :

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s. \quad (4.62)$$

Avec :

$$W_s = \frac{e^2 m^2}{4q_0 V} \int_0^{u_s} \frac{du}{(u+1)^2} \left[-4J_s^2 + 2\xi^2 \left(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} \right) ((J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2)) \right]. \quad (4.63)$$

Où

$$u = \frac{k.k'}{k.p'}, \quad u_s = \frac{2s(k.p)}{m_*^2}, \quad z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Exprimons $(1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)})$ en fonction de u . On a :

$$\begin{aligned} \frac{k.k'}{k.p} &= \frac{u}{1+u}, \\ 1 + \frac{(k.k')^2}{2(k.q')(k.q)} &= 1 + \frac{u^2}{2(1+u)}. \end{aligned}$$

Donc W_s devient :

$$W_s = \frac{e^2 m^2}{4q_0 V} \int_0^{u_s} \frac{du}{(u+1)^2} \left[-4J_s^2 + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) ((J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2)) \right]. \quad (4.64)$$

Où les fonctions de Bessel ordinaires J_s et $J_{s\pm 1}$ ont pour argument z . On exprime z en fonction de u , u_s , ξ , et s . Alors, on a :

$$\begin{aligned} z^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \\ &= (a_1 e Q)^2 + (a_2 e Q)^2, \\ &= 2e^2 a^2 Q^2, \quad \text{car } a_1^2 = a_2^2 = a^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Avec :

$$Q^2 = \frac{m^2}{(k.p)^2} + \frac{m^2}{(k.p')^2} - \frac{2p.p'}{(k.p)(k.p')}.$$

Donc, z^2 devient :

$$z^2 = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.66)$$

Le premier terme est T_1 :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2e^2 a^2 m^2}{(k.p)^2} = 2e^2 a^2 m^2 \frac{4s^2}{m_*^2} \frac{1}{u_s^2} \\ &= \frac{-\xi^2 m^4}{m^4 (1+\xi^2)^2} \frac{4s^2}{u_s^2} = \frac{-8s^2 \xi^2}{(1+\xi^2)^2 u_s^2}. \end{aligned}$$

Le second terme est T_2 :

$$T_2 = \frac{2e^2 a^2 m^2}{(k.p')^2} = \frac{-2\xi^2 m^4 u^2}{(k.k')^2}.$$

Or, on a déjà montré que :

$$\frac{(k.k')^2}{(k.p)(k.p')} = \frac{u^2}{(1+u)}.$$

De plus :

$$\frac{1}{(k.p)(k.p')} = \frac{2s}{m^2(1+\xi^2)u_s} \frac{u}{k.k'},$$

$$\frac{(k.k')^2}{(k.p)(k.p')} = \frac{u^2}{(1+u)}.$$

On en déduit :

$$(k.k') = \frac{4m^2(1+\xi^2)}{2s} \frac{u_s u}{(1+u)}$$

$$\Rightarrow (k.k')^{-2} = \frac{4s^2(1+u)^2}{m^4(1+\xi^2)^2 u_s^2 u^2}.$$

Donc, le terme T_2 devient :

$$T_2 = -\frac{8s^2\xi^2(1+u)^2}{(1+\xi^2)^2 u_s^2}.$$

Le troisième terme est T_3 :

$$T_3 = -\frac{4e^2 a^2}{(k.p)(k.p')} (p.p').$$

On a :

$$p.p' = m^2 + s(k.k') - \frac{\xi^2 m^2 u^2}{2(u+1)}, \quad (4.67)$$

et

$$\frac{1}{k.p k.p'} = \frac{2s}{m^2(1+\xi^2)} \frac{u}{u_s(k.k')}. \quad (4.68)$$

Insérons (4.67) et (4.68) dans T_3 . On aura :

$$T_3 = \frac{8\xi^2 s^2}{1+\xi^2} \left[\frac{2(u+1)}{(1+\xi^2)u_s^2} + \frac{u}{u_s} - \frac{\xi^2 u^2}{(\xi^2+1)u_s} \right]. \quad (4.69)$$

Si on ajoute ces trois termes :

$$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{-8s^2\xi^2}{(1+\xi^2)^2 u_s^2} - \frac{8s^2\xi^2(1+u)^2}{(1+\xi^2)^2 u_s^2} + \frac{8\xi^2 s^2}{1+\xi^2} \left[\frac{2(u+1)}{(1+\xi^2)u_s^2} + \frac{u}{u_s} - \frac{\xi^2 u^2}{(\xi^2+1)u_s} \right]$$

$$= \frac{8s^2\xi^2}{(1+\xi^2)^2 u_s^2} \left[-1 - (1+u)^2 + 2(u+1) - \xi^2 u^2 \right] + \frac{8\xi^2 s^2}{1+\xi^2} \frac{u}{u_s}.$$

Donc :

$$z = \frac{2\sqrt{2}\xi s}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left(1 + \frac{u}{u_s}\right)}. \quad (4.70)$$

Où :

$$u = \frac{k.k'}{k.p'} = \frac{E_s}{(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta'))} - 1, \quad u_s = 2s \frac{k.p}{m_*^2} = \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1.$$

Les expressions sous le signe de l'intégration dans (4.64) peuvent être développées en puissances de ξ . Rappelons que la fonction de Bessel $J_s(z)$ possède le développement en série suivant :

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(n+k)!}. \quad (4.71)$$

Enfin, la probabilité de transition est déterminée par :

$$dW = \frac{e^2 m^2}{4q_0 V} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2} \left[-4J_s^2(z) + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) ((J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z) - 2J_s^2(z))) \right]. \quad (4.72)$$

Où les fonctions de Bessel ordinaires J_S et $J_{s\pm 1}$ ont pour argument z . Donc :

$$z = \frac{2\sqrt{2}\xi s}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left(1 + \frac{u}{u_s}\right)}. \quad (4.73)$$

Où :

$$u = \frac{k \cdot k'}{k \cdot p'} = \frac{E_s}{(q'_0 - |\mathbf{q}'| \cos(\theta'))} - 1, \quad u_s = 2s \frac{k \cdot p}{m_*^2} = \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1. \quad (4.74)$$

Donc, on peut écrire la probabilité différentielle de la $s^{i\text{eme}}$ harmonique comme suit :

$$dW = \frac{e^2 m^2}{8q_0 V \pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{q}'|}{E_s} \left[-4J_s^2(z) + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) ((J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z) - 2J_s^2(z))) \right] d\Omega'. \quad (4.75)$$

Pour $\xi \ll 1$ (condition d'application de la théorie des perturbations), on aura au premier ordre

$$\begin{aligned} J_s(z) &\simeq \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{n!} + o(z^2)\right), \\ &\simeq \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Si $\xi \ll 1$

$$u_s = 2s \frac{k \cdot p}{m_*^2} = \frac{2s(k \cdot p)}{m^2(1+\xi^2)} \simeq 2s \frac{(k \cdot p)}{m^2},$$

Et

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\sqrt{2}\xi s}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left(1 + \frac{u}{u_s}\right)} \simeq 2\sqrt{2}s\xi^2 \left(\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right)\right)^{1/2} \\ \implies \frac{z}{2} &= \sqrt{2}s\xi \left(\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Et on a :

$$q_0 = p_0 - \frac{e^2 a^2}{2(k \cdot p)} k_0 = p_0 + \frac{\xi^2 m^2}{2(k \cdot p)} k_0 \simeq p_0.$$

Pour le premier terme du développement de W_1 , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_s^2(z) = J_1^2(z) \simeq 2\xi^2 \frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right), \\ J_{s-1}^2(z) = J_0^2(z) \simeq 1, \\ J_{s+1}^2(z) = J_2^2(z) \simeq \xi^4 \left(\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right)\right)^2. \end{array} \right.$$

Donc pour $s = 1$:

$$\begin{aligned} & \left[-4J_s^2(z) + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) \left((J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z) - 2J_s^2(z)) \right) \right] = -8\xi^2 \frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) \\ & + \xi^2 \left[\left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) \left(\xi^4 \left(\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right)\right)^2 + 1 - 4\xi^2 \frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) \right) \right], \\ & = \xi^2 \left[\left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) - 4\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right) \right], \quad \text{car } \xi \ll 1. \end{aligned}$$

Donc, la probabilité totale de transition pour $s = 1$ est [115] :

$$W_1 = \frac{e^2 m^2 \xi^2}{4p_0} \left[\left(1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2}\right) \ln(1 + u_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1 + u_1)^2} \right].$$

4.4 Section efficace différentielle

La section efficace de diffusion peut être définie comme la probabilité de transition par unité de volume et par unité de temps divisée par le courant entrant des particules incidentes. Son expression est donnée par :

$$d\sigma = \frac{dW_{fi}}{|J_{inc}|}. \quad (4.76)$$

Où $|J_{in}|$ est la densité de flux des particules incidentes.

On calcule d'abord la densité de flux des particules incidentes dans le système du centre de masse [115]. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |J_{in}| &= \frac{\sqrt{(sk \cdot q)^2 - m_e^2 m_\gamma^2}}{q_0 swV}, \\ &= \frac{\sqrt{(sk \cdot q)^2}}{q_0 swV} \quad \text{car } m_\gamma = 0, \\ &= \frac{swq_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} \mathbf{k}}{q_0 swV}, \\ &= \frac{sw(q_0 + sw)}{swq_0 V} \quad \text{car } \mathbf{q} = -\mathbf{s} \mathbf{k}, \\ &= \frac{E_s}{q_0 V}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{|J_{inc}|} = \frac{q_0 V}{E_s}. \quad (4.77)$$

Insérons dW_{fi} et la densité de flux des particules incidentes dans la section efficace différentielle, on obtient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^2 m^2}{8\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{w'}{E_s^2} \left[-4J_s^2(z) + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) ((J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z) - 2J_s^2(z))) \right].$$

Donc, la section efficace différentielle par unité d'angle solide $d\Omega'$ de la particule diffusée est :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha m^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{w'}{E_s^2} \left[-4J_s^2(z) + 2\xi^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)}\right) ((J_{s+1}^2(z) + J_{s-1}^2(z) - 2J_s^2(z))) \right]. \quad (4.78)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} w' = \frac{sw}{1 + \frac{sw}{m^*} [1 - \cos(\theta)]}, \quad q^2 = q'^2 = m_*^2 = m^2(1 + \xi^2), \\ E_{CM} = sw + q_0, \quad q_0 = p_0 + \frac{\xi^2 m^2}{2p_0}, \\ z = \frac{2\sqrt{2}\xi s}{\sqrt{1 + \xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left(1 + \frac{u}{u_s}\right)}, \\ u = \frac{E_{CM}}{E_{CM} - w'(1 + \cos(\theta'))} - 1, \\ u_s = \frac{E_{CM}}{m_*^2} - 1. \end{array} \right.$$

Pour des champs faibles et $s = 1$, on obtient la section efficace totale est donnée par :

$$\sigma = \frac{e^2 m^2 \xi^2}{4E_s} \left[\left(1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2}\right) \ln(1 + u_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1 + u_1)^2} \right]. \quad (4.79)$$

En posant dans (4.79), on obtient :

$$\xi^2 = \frac{-e^2 a^2}{m^2} = \frac{4\pi e^2}{m^2 w}. \quad (4.80)$$

Insérons (4.80) dans (4.79), on obtient :

$$\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{x} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}\right) \ln(1 + x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1 + x)^2} \right]. \quad (4.81)$$

Où :

$$x = \frac{s - m^2}{m^2} = 2 \frac{k \cdot p}{m^2} = u_s,$$

$r_e = \frac{e^2}{m}$ est le "rayon classique de l'électron."

Ce résultat coïncide avec la formule de *Klein-Nishina*[115] pour la diffusion d'un photon par un électron (effet Compton).

À basse énergie (c'est à dire $x \ll 1$), la formule de Klein-Nishina devient celle de Thomson :

$$\sigma = ((8\pi)/3) \cdot (r_e)^2. \quad (4.82)$$

Ainsi, nous trouvons que la section efficace totale se comporte à haute énergie (c'est à dire $x \gg 1$) comme suit :

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left[\log(x) + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \right]. \quad (4.83)$$

De sorte que les formules (4.81) et (4.83) donnent immédiatement la section efficace en fonction de l'énergie de photon pour la diffusion de Compton dans le système de laboratoire. La figure (4.1) montre la section efficace totale en fonction d'énergie de photon w .

4.5 Résultats et Discussion

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques de la section efficace différentielle (SED) pour l'émission d'un photon par un électron dans un champ laser polarisé circulairement. L'axe z est défini le long de la direction du vecteur d'onde de champ k , $a_1^\mu = (0, \mathbf{a}_1)$ et $a_2^\mu = (0, \mathbf{a}_2)$ avec les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 tels que $\mathbf{a}_1 = a(1, 0, 0)$ et $\mathbf{a}_2 = a(0, 1, 0)$ et pour le cas de la polarisation circulaire, on a $A_2 = a_2$. Pour simplifier le processus de calcul, nous utilisons le système du centre de masse. Nous évaluons la SED dans ce cadre de l'électron entrant avec une énergie cinétique $E_k = 408,28$ MeV et l'amplitude a du laser est $a = 43$ MeV. Cela correspond à une intensité laser $I = (a\omega)^2$ de 10^{28} W/cm² en unités SI ou, exprimée dans un paramètre sans dimension fréquemment utilisé, $|e|a/m = 25.48$.

Chaque SED, avec la conservation à quadri-impulsions $sk + q = q' + k'$, peut être interprétée comme la SED partielle qui décrit le processus avec une impulsion finale déterminée par $sk + q = q' + k'$ et s est le nombre de photons échangés ($s > 1$ pour l'émission et $s < 1$ pour l'absorption).

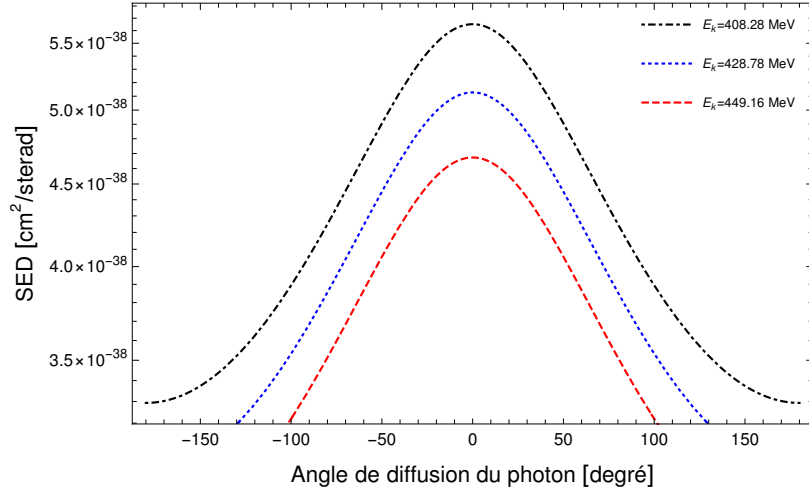


FIGURE 4.1 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l'angle de diffusion du photon à différentes énergies cinétiques de l'électron entrant. Le paramètre géométrique est $\theta' = 45^\circ$. L'amplitude du laser est $a = 43$ MeV et le nombre de photons échangés est $s = 60$.

La figure (4.1) illustre la formule générale de la SED en fonction de l'angle de diffusion du photon pour différentes énergies. La SED présente un maximum d'environ ($SED = 5,64188 \times 10^{38} \text{ cm}^2/\text{sterad}$) au voisinage de l'angle de diffusion $\theta = 0^\circ$. Cette situation illustre que l'émission vers l'avant d'un photon par un électron dans un champ électromagnétique intense est plus probable que l'émission vers l'arrière. Nous remarquons également que la SED diminue lorsque l'énergie de l'électron entrant augmente. Cela implique que l'interaction d'un électron entrant avec le champ électromagnétique intense devient faible.

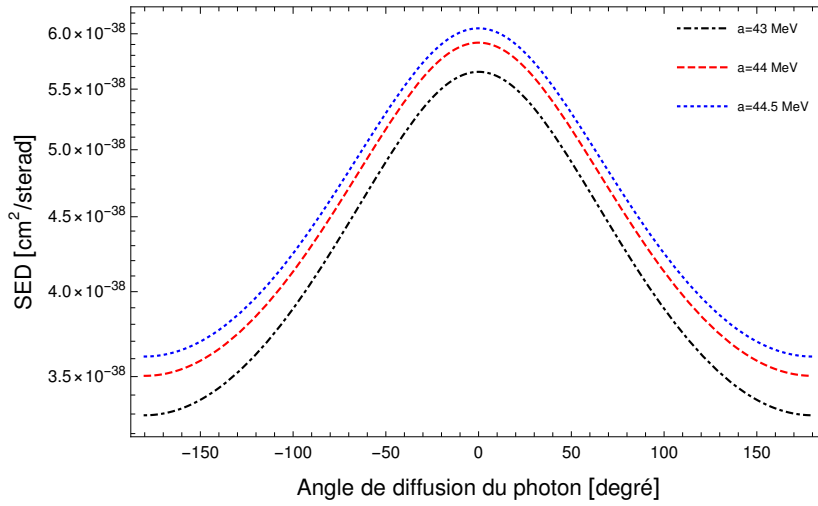


FIGURE 4.2 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’angle de diffusion du photon à différentes amplitudes du laser. L’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28 \text{ MeV}$. Le paramètre géométrique est $\theta = 0^\circ$ et le nombre de photons échangés est $s = 60$.

La figure (4.2) illustre la SED par rapport à l’angle de diffusion du photon pour diverses amplitudes du laser. Comme le montre cette figure, le maximum reste au voisinage de $\theta = 0^\circ$. La seule remarque que l’on puisse faire ici est que la situation est inversée puisque la SED relativiste augmente avec l’augmentation de l’intensité. Cette situation s’explique par le fait que pendant l’émission de photons par l’électron, celui-ci perd une partie de son énergie sous la forme d’énergie cinétique. Comme indiqué précédemment, l’introduction du champ laser a une signature typique sur la SED à travers l’habillage électronique. Le traitement perturbateur de l’interaction laser-électron est bien motivé par la prise en compte complète de la distorsion électronique induite par un champ laser d’intensités bien définies. Pour les collisions aux petits angles de diffusion des photons, la SED a une forme gaussienne avec un maximum pointé autour de l’angle $\theta = 0^\circ$. Le rôle de l’intensité et de la fréquence du champ laser pour l’émission nette de photons est représenté dans les figures (4.3) et (4.4).

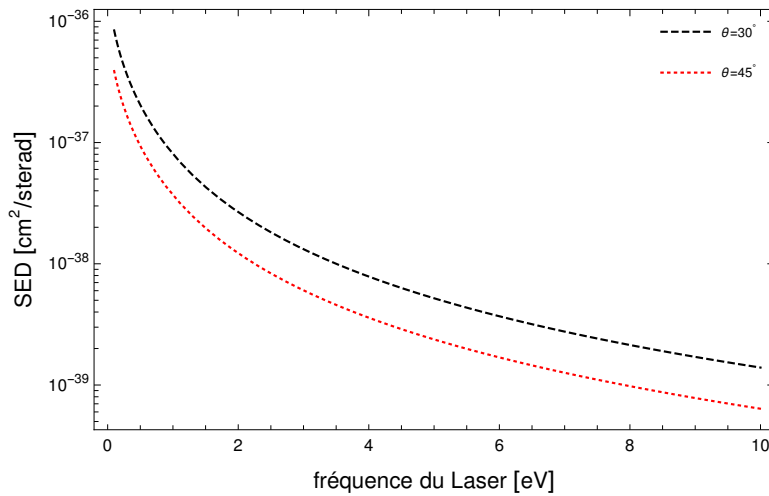


FIGURE 4.3 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de la fréquence laser à différents angles de diffusion du photon pour l’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28 \text{ MeV}$. Le paramètre géométrique est $\theta = 45^\circ$, l’amplitude du laser est $a = 43 \text{ MeV}$ et le nombre de photons échangés est $s = 60$.

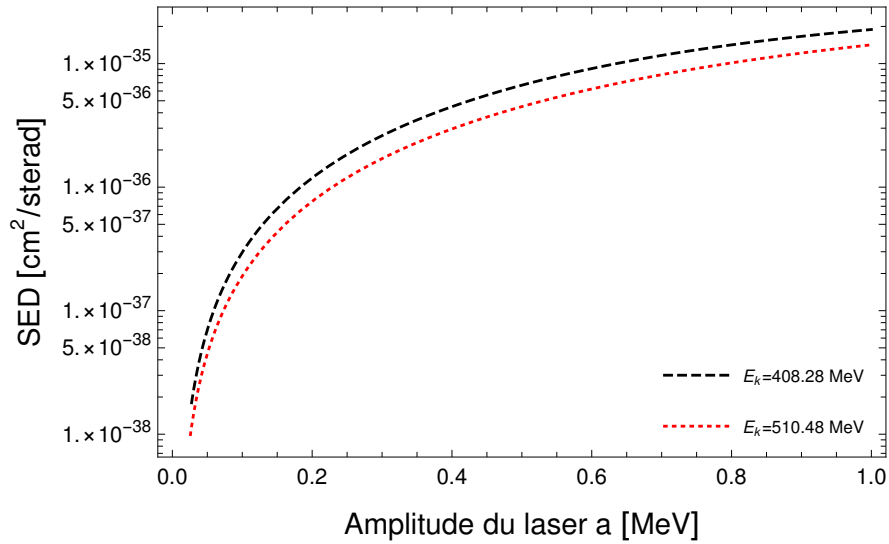


FIGURE 4.4 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’amplitude du laser à différentes énergies cinétiques de l’électron entrant. Les paramètres géométriques sont $\theta' = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$, et le nombre de photons échangés est $s = 60$.

Ces figures montrent que le comportement de la SED assisté par laser vis-à-vis de la variation d’intensité et de fréquence diffère sensiblement. Ce comportement peut être attribué à l’expression de l’énergie pondéromotrice qui est donnée par :

$$U_p = \frac{e^2 I}{4m\omega_0^2},$$

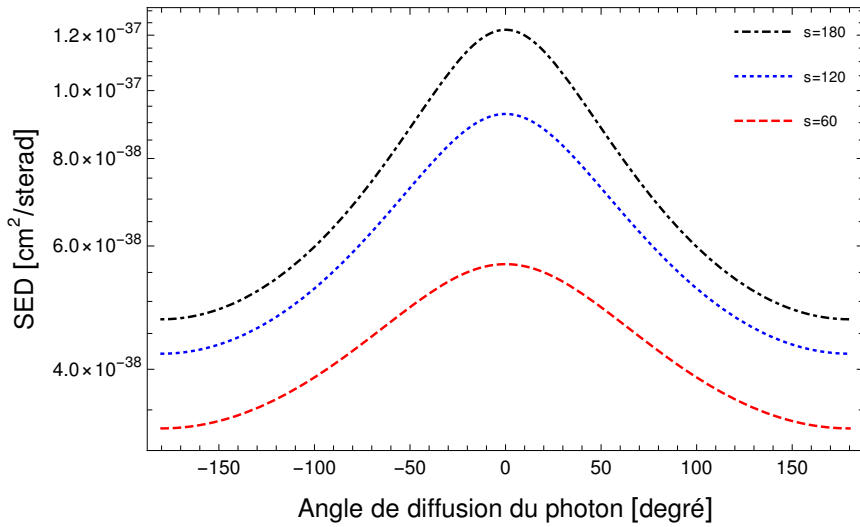


FIGURE 4.5 – Les courbes logarithmiques de la SED relativiste en fonction de l’angle de diffusion du photon à différents nombres de photons échangés. L’énergie cinétique de l’électron entrant est $E_k = 408.28$ MeV. Le paramètre géométrique est $\theta' = 45^\circ$ et l’amplitude du laser est $a = 43$ MeV.

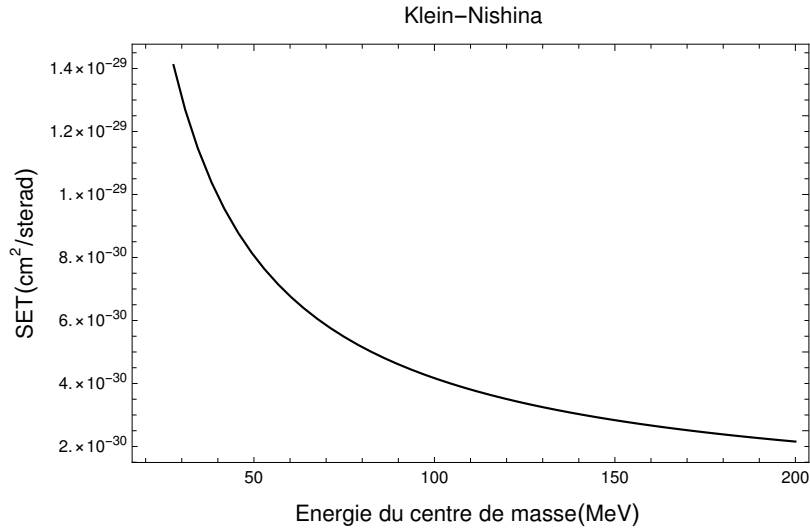


FIGURE 4.6 – La formule de Klein-Nishina (4.81) pour la diffusion d’un photon par un électron en fonction de l’énergie du centre de masse.

On voit bien que l’intensité et la fréquence doivent avoir un comportement inversé. Un autre point intéressant est montré dans la figure (4.5). La magnitude de la SED, pour différents nombres de photons échangés $s = 60$, $s = 120$ et $s = 180$, augmente et devient très significative toujours au voisinage de $\theta = 0^\circ$. Au fur et à mesure le nombre de photons échangés augmente, l’interaction entre l’électron entrant et le champ électromagnétique devient de plus en plus prononcée. La caractéristique la plus importante est donnée dans la figure (4.6) dans laquelle la SED diminue avec l’augmentation de l’énergie du centre de masse. Cette situation assure l’unitarité de la SET (section efficace totale). Pour cela, nous avons donné dans ce chapitre des résultats où les effets d’habillage sur la SED relativiste sont significatifs pour l’angle de diffusion du photon proche de zéro et nous pensons que nos résultats devraient servir d’incitation à réaliser de telles expériences de collisions assistées par laser.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dérivé l’expression correcte de la première SED de Born pour l’émission d’un photon par un électron dans le champ d’une onde plane électromagnétique polarisée circulairement. Nous avons calculé analytiquement la formule générale de la SED et nous avons montré la formule dérivée de Klein-Nishina lorsque le champ électromagnétique est suffisamment faible et le nombre de photons échangés $s = 1$. Ce travail révèle des calculs compliqués en présence d’un champ électromagnétique, car il conduit à l’émergence des fonctions de Bessel et des ondes de Dirac Volkov. Malgré cela, nous avons exploité la puissance de REDUCE pour résoudre les problèmes de calcul. Généralement, ce type de processus présente certaines difficultés. Mais, ils sont utiles pour bien comprendre l’interaction entre le rayonnement et la matière et pour se rendre compte de l’influence du champ électromagnétique sur les particules diffusantes. En ce qui concerne notre processus, nous avons conclu que la SED devient maximum lorsque l’angle $\theta = 0^\circ$. Cela signifie que l’émission vers l’avant d’un photon par un électron en présence d’un champ électromagnétique intense est plus probable que l’émission vers l’arrière. De plus, la SED diminue lorsque l’énergie de l’électron entrant augmente, ce qui implique que l’interaction de l’électron entrant avec le champ électromagnétique intense devient faible. Nous avons également vu que la SED augmente lorsque l’intensité du champ électromagnétique augmente et que le nombre de photons échangés augmente.

Introduction

La physique des champs forts est le domaine de recherche général de l'interaction laser-matière. Il vise à stimuler et contrôler des processus ultra-rapides et à comprendre leur mécanisme [55]. Une nouvelle physique émerge des champs laser intenses qui interagissent avec les atomes, les molécules et les particules.

Actuellement et grâce à la disponibilité de lasers de grande puissance, des efforts mondiaux sont consacrés à l'étude théorique de divers processus d'électrodynamique quantique (QED) en présence de champs électromagnétiques puissants. Les collisions de particules chargées en présence de lasers ont reçu beaucoup d'attention au cours ces dernières décennies en raison de leurs larges applications et de leur contribution à la compréhension fondamentale de la structure atomique. En particulier, les processus de diffusion d'électrons ont joué un rôle crucial dans le développement de la science, à la fois théoriquement et expérimentalement. Son importance dans la physique atomique et moléculaire est reconnue depuis longtemps. Parallèlement au développement des lasers femtoseconde de haute puissance, [56, 57, 58]. Un aperçu des études préliminaires sur les processus de diffusion assistés par laser a été présenté dans certains livres de Faisal [59], Mittleman [60] et Fedorov [61]. Les premiers processus bien étudiés, à la fois analytiquement et numériquement, étaient la diffusion Compton induite par laser [62], suivie de la diffusion Mott d'un électron habillé au laser par le champ de Coulomb d'un noyau atomique [63]. Roshchupkin *et al* ont développé la théorie de la diffusion des électrons par un noyau dans le champ de deux ondes électromagnétiques planes [64, 65, 66, 67]. Lebed' *et al* ont étudié le processus de diffusion de Mott en présence d'une [68] ou deux [69] impulsions laser. Ensuite, avec l'augmentation des intensités de laser, d'autres processus de diffusion ont été étudiés. Hrouz *et al* [70] ont rapporté une diffusion de protons par le potentiel de Coulomb dans un champ laser polarisé circulairement considérant la distorsion d'effet Coulomb. La diffusion électron-électron assistée par laser a été analysée en présence d'un puissant champ laser polarisé linéairement dans [71]. La diffusion électron-positron dans le champ d'une onde lumineuse a été étudiée dans les travaux [72, 73]. La diffusion élastique électron-proton en présence d'un champ laser polarisé circulairement [74] ou linéairement [75, 76] a également été signalé. En plus des processus QED, de nombreux auteurs ont étudié certains processus de la théorie électrofaible tels que la désintégration des particules [77, 78] et la production de boson de Higgs [79] en présence d'un champ laser polarisé circulairement. A notre tour, comme contribution à l'enrichissement de la littérature scientifique avec de telles études théoriques des processus de diffusion en présence de laser, nous nous concentrons dans ce travail sur l'étude du processus

de diffusion électron-muon dans le cadre de QED en présence d'un champ laser polarisé circulairement. La diffusion élastique électron-muon est l'un des processus les plus fondamentaux de la physique des particules. Il a joué un rôle important dans la découverte du muon en 1936, tout en mesurant les collisions de muons dans le rayonnement cosmique avec des électrons atomiques par les physiciens américains Carl D. Anderson and Seth Neddermeyer [80]. La section efficace de diffusion élastique électron-muon a été mesurée dans les années 1960 en utilisant des muons produits par des accélérateurs [81, 82, 83]. Expérimentalement, un grand projet, le projet MUonE, est consacré à la mesure de la section efficace différentielle (SED) de la diffusion élastique électron-muon en fonction du transfert de l'impulsion carrée afin de déterminer la contribution hadronique au moment magnétique du muon $g-2$ [84]. Ce processus de diffusion présente un grand intérêt pour les chercheurs et a également été bien étudié théoriquement auparavant. Les corrections radiatives QED de la section efficace de diffusion électron-muon ont été calculées il y a longtemps dans [85, 86, 87] et récemment au Next Leading Order (NLO) dans [88]. De nouveaux phénomènes de diffusion d'un électron/positron par un muon en présence d'un champ laser polarisé linéairement sont étudiés dans la première approximation de Born par Du *et al* dans [89, 90]. Le même processus a été étudié dans le domaine d'une onde électromagnétique plane polarisée elliptiquement dans les cas résonants [91] et non résonants [92]. La diffusion non résonante d'un électron par un muon dans le champ de lumière pulsée a été étudiée dans des cas relativistes [93] et non relativistes généraux [94]. Dans ce travail, nous allons ajouter de nouvelles idées pertinentes concernant la diffusion électron-muon dans le champ d'une onde électromagnétique plane, monochromatique et polarisée circulairement. À travers cela, notre principale contribution est que nous avons considéré l'habillage du muon et discuté de son effet sur la SED. Le tenseur métrique $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ et unités naturelles $\hbar = c = 1$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, sont utilisées tout au long de ce travail. Pour tous k , le style audacieux \mathbf{k} est réservé aux vecteurs.

5.1 Historique et découverte du muon

5.1.1 Le muon

Le muon est, selon le modèle standard de la physique des particules, une particule élémentaire de charge électrique négative, instable. Le muon a un spin $1/2$, il a les mêmes propriétés physiques que l'électron, mis à part sa masse, 207 fois plus grande (105,66 MeV, c'est pour cela qu'on l'appelle parfois "électron lourd"). Les muons sont des fermions de la famille des leptons, comme les électrons ou les taus. Les muons sont notés μ^- . L'antiparticule associée au muon, est notée μ^+ et est chargée positivement.

5.1.2 Historique

La plupart des gens savent que la matière ordinaire qui nous entoure est constituée d'atomes. En y regardant de plus près, nous nous sommes rendu compte que ceux-ci sont eux-mêmes constitués d'éléments plus petits, à savoir les électrons, les neutrons et les protons. Ces deux dernières sont elles-mêmes composées de quarks up et down. Ces trois particules élémentaires sont les éléments constitutifs de tout ce que nous voyons et touchons dans le monde où nous vivons. Bien que ces particules de matières soient suffisantes pour construire notre monde, la recherche en physique des particules nous a appris qu'il existe bien d'autres particules de matière, dont certaines sont stables, mais interagissent très peu, comme les trois saveurs de neutrinos. D'autres sont instables et se désintègrent rapidement, comme les quatre saveurs plus lourdes de quarks, le tau et le muon. C'est à ce dernier que ce texte s'intéresse, ainsi nous

verrons donc dans les pages suivantes des propriétés fascinantes de cette particule éphémère qu'est le muon [96].

Commençons par voir comment le muon a été découvert. Au début du 20ème siècle, une nouvelle découverte a fasciné certains scientifiques de l'époque, il était à propos des rayons cosmiques. Ces particules de haute énergie ont été découvertes par Victor Hess en 1912 qui, à l'aide d'un électromètre, a mesuré une ionisation plus élevée à haute altitude que sur le sol et conclut que cette ionisation devait provenir de particules pénétrantes de hautes énergies venant de l'extérieur de l'atmosphère, mais d'un endroit autre que le soleil. Grâce à cette découverte, il obtient le prix Nobel de physique en 1936 [97]. À cette époque, seuls les photons et les électrons étaient connus.

Plusieurs années plus tard, avec le perfectionnement de la chambre à bulles, Werner Kolhörster découvrit que certaines de particules qui ionisaient l'air et laissaient une trace de leur passage dans la chambre à bulles devaient être chargées négativement. Puisque leur trajectoire courbait à la manière d'une particule négative suite à l'intervention d'un champ magnétique, il devait donc s'agir d'électrons [98]. Un problème a persisté, quelques-uns ont réussi à pénétrer une grande épaisseur de plomb, tandis que d'autres ont été bloqués presque à la surface. Normalement, un électron traversant autant de plomb aurait à produire une cascade de particules, comme une paire électron-positron ou perdre de l'énergie par effet Bremsstrahlung. Il y avait donc quelque chose qui n'allait pas, que ce soit les propriétés de l'électron, les mesures, ou une nouvelle particule. C'est en 1937 que Carl D. Anderson et son étudiant Seth Neddermeyer ont conclu que cela devait être une particule avec la même charge que l'électron, mais plus massive que celui-ci tout en étant moins massif que le proton. Ils avaient découvert le muon. [99].

5.2 La diffusion électron-muon

La diffusion élastique électron-muon peut être schématisée comme suit

$$e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \longrightarrow e^-(p_3) + \mu^-(p_4). \quad (5.1)$$

Une bonne première étape est de noter les données d'impulsion et de spin de l'électron et du muon dans l'état initial et de l'électron et du muon dans l'état final :

Particule	état	spineur
e^-	initial	$u(p_1, s_1)$
μ^-	initial	$u(p_2, s_2)$
e^-	final	$\bar{u}(p_3, s_3)$
μ^-	final	$\bar{u}(p_4, s_4)$

5.3 Étude en absence du champ électromagnétique

5.3.1 L'élément de la matrice S

On suit les étapes habituelles de calcul et on donne l'élément de la matrice S correspondant à ce processus à l'arbre [95]

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x \int d^4y [\bar{\psi}_e^f(x) \gamma^\mu \psi_e^i(x)] D_F(x-y) [\bar{\psi}_{\mu^-}^f(y) \gamma_\mu \psi_{\mu^-}^i(y)], \quad (5.2)$$

où $e = -|e| < 0$ est la charge de l'électron et $D_F(x-y)$ est le propagateur de Feynman du rayonnement électromagnétique donné par [95]

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left(\frac{-4\pi}{q^2 + i\varepsilon} \right). \quad (5.3)$$

Les ondes planes de Dirac qui décrivent l'électron et le muon dans les états initial et final sont écrites comme suit :

$$\begin{aligned}\psi_e^{i,f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{1,3}V}} u(p_{1,3}, s_{1,3}) e^{-ip_{1,3} \cdot x}, \\ \psi_{\mu^-}^{i,f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{2,4}V}} u(p_{2,4}, s_{2,4}) e^{-ip_{2,4} \cdot y}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Pour les équations (5.4), s_i et E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se réfèrent respectivement au spin et à l'énergie. En substituant les expressions du propagateur de Feynman (5.3) et les fonctions d'onde (5.4) dans l'élément de matrice S (5.2), on obtient

$$S_{fi} = \frac{-ie^2}{\sqrt{16E_1E_2E_3E_4V^4}} \int d^4x d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{-4\pi}{q^2 + i\varepsilon} \right] e^{i(p_3 - p_1 - q) \cdot x} e^{i(p_4 - p_2 + q) \cdot y} \mathcal{M}_{fi}, \quad (5.5)$$

où \mathcal{M}_{fi} est l'amplitude de diffusion, laquelle sera déterminée dans la section suivante. L'intégration sur d^4x et d^4y peut être effectuée à la fois, en résultant

$$\begin{aligned}\int d^4x e^{i(p_3 - p_1 - q) \cdot x} &= (2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_1 - q), \\ \int d^4y e^{i(p_4 - p_2 + q) \cdot y} &= (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q),\end{aligned}\quad (5.6)$$

et l'intégration sur d^4q peut être effectuée simplement comme suit :

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_1 - q) (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q)}{q^2 + i\varepsilon} = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)}{(p_3 - p_1)^2 + i\varepsilon}, \quad (5.7)$$

et l'élément total de la matrice S (5.5) se lit

$$S_{fi} = \frac{ie^2(4\pi)}{\sqrt{16E_1E_2E_3E_4V^4}} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)}{q^2 + i\varepsilon} \mathcal{M}_{fi}, \quad (5.8)$$

où $q = p_3 - p_1 = p_4 - p_2$ est le transfert relativiste d'impulsions.

5.3.2 L'amplitude de la diffusion

Par l'application de règles de Feynman en QED pour transformer le processus (5.1) en une formule pour l'élément de la matrice réduite,

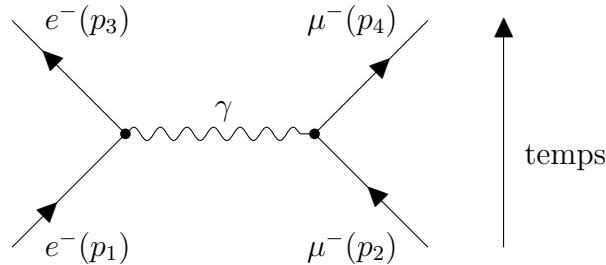


FIGURE 5.1 – Diagramme de Feynman de la diffusion électron-muon en QED, où le propagateur intermédiaire est un photon γ .

Alors, nous trouvons :

$$\mathcal{M}_{fi} = [\bar{u}(p_3, s_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)] \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_3)^2} \right] [\bar{u}(p_4, s_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2, s_2)]. \quad (5.9)$$

La partie $\bar{u}(p_3, s_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)$ est obtenue à partir de la fin de la ligne électron-électron avec le spineur d'état externe d'électron, et la suit jusqu'à son début. Le vertex d'interaction est $-iQe\gamma^\mu = ie\gamma^\mu$, puisque la charge des électrons et des muons est $Q = -1$. De même, la partie $\bar{u}(p_4, s_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2, s_2)$ est obtenue à partir de la fin de la ligne muon-muon avec le spineur d'état externe du muon, et en la suivant en arrière.

Le propagateur de photons est écrit en jauge de Feynman, par souci de simplicité, et porte les indices μ et ν qui se connectent aux deux lignes de fermions à leurs vertex d'interaction respectifs.

Il est possible d'écrire ce résultat plus compact à l'aide des abréviations $\bar{u}(p_3, s_3) \equiv \bar{u}_3$ et $u(p_1, s_1) \equiv u_1$, etc. En écrivant le dénominateur du propagateur de photons comme variable de Mandelstam $s = (p_1 + p_3)^2 = (p_4 + p_2)^2$, et en utilisant la métrique dans le propagateur de photons pour abaisser l'indice sur l'une des matrices gamma, nous obtenons :

$$\mathcal{M} = i\frac{e^2}{s}(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2). \quad (5.10)$$

La section efficace différentielle fait intervenir le carré complexe de \mathcal{M} :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2}(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma_\nu u_1)^*(\bar{u}_4\gamma^\nu u_2)^*. \quad (5.11)$$

L'évaluation des termes conjugués complexes entre parenthèses peut être effectuée de manière systématique en prenant le conjugué hermitique des spineurs de Dirac et les matrices qui les composent, en prenant soin de les écrire dans l'ordre inverse, par exemple,

$$(\bar{u}_3\gamma_\nu u_1)^* = (\bar{u}_3^\dagger\gamma^0\gamma_\nu u_1)^* = u_1^\dagger\gamma_\nu^\dagger\gamma^0 u_3 = u_1^\dagger\gamma^0\gamma_\nu u_3 = \bar{u}_1\gamma_\nu u_3. \quad (5.12)$$

De la même manière,

$$(\bar{u}_4\gamma^\nu u_2)^* = \bar{u}_2\gamma^\nu u_4. \quad (5.13)$$

On a donc :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2}(\bar{u}_3\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_1\gamma_\nu u_3)(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_2\gamma^\nu u_4). \quad (5.14)$$

Après avoir fait la somme et la moyenne sur les spins, la section efficace différentielle doit être symétrique sous des rotations autour de l'axe de collision. En effet, les seules directions spéciales du problème sont les impulsions de particules, de sorte que la section efficace différentielle ne peut dépendre que de l'angle entre l'axe de collision déterminé par les deux particules à l'état initial et l'axe de diffusion déterminé par les deux particules à l'état final.

Dans le repère du centre de masse, les effets de la moyenne du spin à l'état initial et de la sommation sur le spin à l'état final sont inclus dans le calcul.

On peut désormais utiliser les équations :

$$\begin{aligned} \sum_{s_1} u_1\bar{u}_1 &= \not{p}_1 + m_e, \\ \sum_{s_2} u_2\bar{u}_2 &= \not{p}_2 + m_\mu, \end{aligned} \quad (5.15)$$

on obtient :

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \sum_{s_2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} (\bar{u}_3\gamma_\mu [\not{p}_1 + m_e] \gamma_\nu u_3)(\bar{u}_4\gamma^\mu [\not{p}_2 + m_\mu] \gamma^\nu u_4). \quad (5.16)$$

On va appliquer une autre astuce. Un produit scalaire de deux vecteurs est égal à la trace de vecteurs multipliés dans l'ordre inverse afin de former une matrice

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \right] \equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1 & \beta_1\alpha_2 & \beta_1\alpha_3 & \beta_1\alpha_4 \\ \beta_2\alpha_1 & \beta_2\alpha_2 & \beta_2\alpha_3 & \beta_2\alpha_4 \\ \beta_3\alpha_1 & \beta_3\alpha_2 & \beta_3\alpha_3 & \beta_3\alpha_4 \\ \beta_4\alpha_1 & \beta_4\alpha_2 & \beta_4\alpha_3 & \beta_4\alpha_4 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

En appliquant cela à chaque expression entre parenthèses dans l'équation 5.16, on déplace le spineur barré jusqu'à la fin et on prend la trace sur la matrice de spineur de Dirac 4×4 résultante. Alors :

$$\bar{u}_3 \gamma_\mu [\not{p}_1 + m_e] \gamma_\nu u_3 = \text{Tr} \left[\gamma_\mu [\not{p}_1 + m_e] \gamma_\nu u_3 \bar{u}_3 \right], \quad (5.18)$$

$$\bar{u}_4 \gamma^\mu [\not{p}_2 + m_\mu] \gamma^\nu u_4 = \text{Tr} \left[\gamma^\mu [\not{p}_2 + m_\mu] \gamma^\nu u_4 \bar{u}_4 \right], \quad (5.19)$$

de sorte que

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \sum_{s_3} \sum_{s_4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu [\not{p}_1 + m_e] \gamma_\nu u_3 \bar{u}_3 \right] \text{Tr} \left[\gamma^\mu [\not{p}_2 + m_\mu] \gamma^\nu u_4 \bar{u}_4 \right]. \quad (5.20)$$

La raison pour laquelle cette astuce de réorganisation en une trace, est utile, est que maintenant nous pouvons exploiter à nouveau les expressions :

$$\begin{aligned} \sum_{s_3} u_3 \bar{u}_3 &= \not{p}_3 + m_e, \\ \sum_{s_4} u_4 \bar{u}_4 &= \not{p}_4 + m_\mu. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Le résultat est :

$$\frac{1}{4} \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\nu]. \quad (5.22)$$

Ensuite, nous devons évaluer les traces. D'abord, nous avons utilisé le résultat général pour la trace de quatre matrices gamma. On utilise le fait que la trace d'un nombre impair de gamma matrices est nulle :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] &= \text{Tr} \left[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \right] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4p_1^\mu p_3^\nu - 4g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_3 + 4p_3^\mu p_1^\nu + 4g^{\mu\nu} m_e^2, \end{aligned} \quad (5.23)$$

de même

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\nu] &= \text{Tr} \left[\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \right] + m_\mu^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4p_2^\mu p_4^\nu - 4g^{\mu\nu} p_2 \cdot p_4 + 4p_4^\mu p_2^\nu + 4g^{\mu\nu} m_\mu^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\nu] &= 64m_e^2 m_\mu^2 - 32m_\mu^2 (p_1 \cdot p_3) \\ &\quad - 32m_e^2 (p_2 \cdot p_4) + 32(p_2 \cdot p_3)(p_4 \cdot p_1) + 32(p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Finalement

$$\frac{1}{4} \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_2 \cdot p_3)(p_4 \cdot p_1) + (p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3) - m_\mu^2 (p_1 \cdot p_3) - m_e^2 (p_2 \cdot p_4) + 2m_e^2 m_\mu^2 \right]. \quad (5.26)$$

5.3.3 La section efficace de la diffusion

Pour calculer la section efficace de diffusion, on multiplie le carré d'élément de matrice $|S_{fi}|^2$ par la densité d'états finaux, et on divise par l'intervalle du temps d'observation T et le flux des particules incidentes $|J_{\text{inc.}}|$ et enfin on doit faire la moyenne sur les spins initiaux et la somme sur les spins finaux. On obtient

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{|S_{fi}|^2}{|J_{\text{inc.}}|T} \frac{V d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_4}{(2\pi)^3}, \\ &= V^2 \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{e^4 (4\pi)^2 (2\pi)^4 V T \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)}{16 E_1 E_2 E_3 E_4 V^4 q^4} \frac{1}{4} \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \\ &= \frac{e^4 \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)}{16 E_1 E_2 E_3 E_4 |J_{\text{inc.}}| V q^4} d^3 p_3 d^3 p_4 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

où nous avons utilisé la propriété suivante de la fonction de Dirac [95] :

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)]^2 = (2\pi)^4 V T \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1). \quad (5.28)$$

A l'aide de la formule suivante [95] :

$$\frac{d^3 p_4}{E_4} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_\mu^2) \Theta(p_4^0), \quad (5.29)$$

avec

$$\Theta(p_4^0) = \begin{cases} 1 & \text{for } p_4^0 > 0, \\ 0 & \text{for } p_4^0 < 0, \end{cases}$$

et $m_\mu = 206.771 \times m_e$ la masse du muon, la section efficace différentielle devient

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{e^4}{8 E_1 E_2 E_3 |J_{\text{inc.}}| V q^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 p_4 \delta^4(p_4 - p_2 + p_3 - p_1) \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d^3 p_3 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \\ &= \frac{e^4}{8 E_1 E_2 E_3 |J_{\text{inc.}}| V q^4} \int \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d^3 p_3 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec $p_4 + p_3 - p_1 - p_2 = 0$. En considérant le flux incident des électrons dans le système de laboratoire de muon $|J_{\text{inc.}}| = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_\mu^2 m_e^2} / (E_1 E_2 V) = |\mathbf{p}_1| / E_1 V$ et en utilisant $d^3 p_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\Omega_f$, on trouve

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{e^4}{8 m_\mu E_3 q^4} \frac{|\mathbf{p}_3|^2}{|\mathbf{p}_1|} \int \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d|\mathbf{p}_3| \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (5.31)$$

L'intégration sur $d|\mathbf{p}_3|$ peut être effectuée en utilisant la formule familière suivante [95]

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \frac{f(x)}{|g'(x)|} \Big|_{g(x)=0}. \quad (5.32)$$

On a :

$$\begin{aligned} p_4^2 &= (p_1 + p_2 - p_3)^2, \\ &= 2m_e^2 + m_\mu^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot (p_1 + p_2), \\ p_4^2 - m_\mu^2 &= 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_3 \cdot (p_1 + p_2). \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{e^4}{8m_\mu E_3 q^4} \frac{|\mathbf{p}_3|^2 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2}{|\mathbf{p}_1| |g'(|\mathbf{p}_3|)|}, \quad (5.34)$$

où

$$g'(|\mathbf{p}_3|) = 2|\mathbf{p}_1|F(\theta_i, \theta_f, \varphi_i, \varphi_f) - \frac{2|\mathbf{p}_3|}{E_3}(E_1 + m_\mu), \quad (5.35)$$

avec

$$F(\theta_i, \theta_f, \varphi_i, \varphi_f) = \cos(\varphi_i) \sin(\theta_i) \cos(\varphi_f) \sin(\theta_f) + \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i) \sin(\theta_f) \sin(\varphi_f) + \cos(\theta_i) \cos(\theta_f). \quad (5.36)$$

5.3.4 Géométrie sphérique et produits scalaires

Nous travaillons dans le système de laboratoire, où le muon est au repos.

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(E_1, |\mathbf{p}_1| \cos(\varphi_i) \sin(\theta_i), |\mathbf{p}_1| \sin(\varphi_i) \sin(\theta_i), |\mathbf{p}_1| \cos(\theta_i) \right), \\ p_2 &= (m_\mu, 0, 0, 0), \\ p_3 &= \left(E_3, |\mathbf{p}_3| \cos(\varphi_f) \sin(\theta_f), |\mathbf{p}_3| \sin(\varphi_f) \sin(\theta_f), |\mathbf{p}_3| \cos(\theta_f) \right), \\ p_4 &= p_1 + p_2 - p_3, \quad q^2 = (p_3 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2(p_1 \cdot p_3). \end{aligned}$$

Les différents produits scalaires sont évalués dans le système de laboratoire comme suit :

$$\begin{aligned} (p_2 \cdot p_3) &= m_\mu E_3, \quad (p_1 \cdot p_2) = m_\mu E_1, \quad (p_1 \cdot p_3) = E_1 E_3 - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| F(\theta_i, \theta_f, \varphi_i, \varphi_f), \\ (p_2 \cdot p_4) &= m_\mu^2 + (p_1 \cdot p_2) - (p_2 \cdot p_3), \quad (p_1 \cdot p_4) = m_e^2 + (p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_3), \\ (p_3 \cdot p_4) &= (p_1 \cdot p_3) + (p_2 \cdot p_3) - m_e^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.4 Étude en présence du champ électromagnétique

5.4.1 Section efficace différentielle assistée par un laser

Dans cette partie, nous essaierons d'établir toutes les expressions théoriques des grandeurs nécessaires pour calculer la SED du processus de diffusion électron-muon en présence d'un champ laser. Ce processus peut être schématisé comme suit :

$$e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \longrightarrow e^-(p_3) + \mu^-(p_4), \quad (5.38)$$

dont les p_i sont les quadri-impulsions associés. Dans le cadre de QED, il peut être décrit par le diagramme de Feynman représenté dans la figure (5.2).

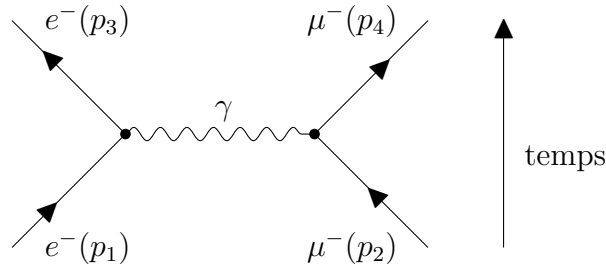


FIGURE 5.2 – La diffusion d'électron par un muon dans un champ électromagnétique à polarisation circulaire.

Le laser appliqué est considéré comme une onde électromagnétique plane, monochromatique et polarisée circulairement, théoriquement définie par le quadri-potentiel suivant :

$$A^\mu(\phi) = a_1^\mu \cos(\phi) + a_2^\mu \sin(\phi), \quad (5.39)$$

où $\phi = (k \cdot x)$ est la phase du champ laser. $k = (\omega, \mathbf{k})$ est le quadrivecteur d'onde et ω est la fréquence de laser. $a_1^\mu = (0, \mathbf{a}_1) = |\mathbf{a}|(0, 1, 0, 0)$ et $a_2^\mu = (0, \mathbf{a}_2) = |\mathbf{a}|(0, 0, 1, 0)$ sont les quadrivecteurs de polarisation satisfont-ils $(a_1 \cdot a_2) = 0$ et $a_1^2 = a_2^2 = a^2 = -|\mathbf{a}|^2 = -(\mathcal{E}_0/\omega)^2$, où \mathcal{E}_0 est l'intensité du champ électrique. Le quadri-potentiel $A^\mu(\phi)$ satisfait à la condition de jauge de Lorentz suivante, $k_\mu A^\mu = 0$, d'où $(k \cdot a_1) = (k \cdot a_2) = 0$, ce qui signifie que le vecteur d'onde \mathbf{k} est choisi suivant l'axe de z .

En théorie des perturbations, l'amplitude de diffusion S_{fi} pour la diffusion électron-muon assistée par laser peut être écrite comme [95]

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x \int d^4y [\bar{\psi}_e^f(x) \gamma^\mu \psi_e^i(x)] D_F(x-y) [\bar{\psi}_{\mu^-}^f(y) \gamma_\mu \psi_{\mu^-}^i(y)], \quad (5.40)$$

où $e = -|e| < 0$ est la charge d'électron et $D_F(x-y)$ est le propagateur de Feynman du rayonnement électromagnétique donné par [95]

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \left(\frac{-4\pi}{q^2 + i\varepsilon} \right). \quad (5.41)$$

Dans un premier temps, nous ne considérerons que l'habillage des électrons sans les muons dans les états initial et final. En adoptant l'approche de l'image Furry [114], nous prenons en compte l'interaction des électrons initiaux et finaux avec le champ électromagnétique en les décrivant par les fonctions relativistes de Dirac-Volkov, qui sont les solutions exactes de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique [115]. Elles sont écrites, lorsqu'elles sont normalisées selon le volume V , comme suit [37] :

$$\psi_e^{i,f}(x) = \left[1 + \frac{e \not{k} \cdot \not{A}}{2(k \cdot p_{1,3})} \right] \frac{u(p_{1,3}, s_{1,3})}{\sqrt{2Q_{1,3}V}} \times e^{iS(q_{1,3}, x)}, \quad (5.42)$$

où

$$\begin{aligned} S(q_{1,3}, x) &= -(p_{1,3} \cdot x) - \int_0^{(k \cdot x)} \left(\frac{e(p_{1,3} \cdot A)}{(k \cdot p_{1,3})} - \frac{e^2 A^2}{2(k \cdot p_{1,3})} \right) d\phi, \\ &= -(q_{1,3} \cdot x) - \frac{e(a_1 \cdot p_{1,3})}{k \cdot p_{1,3}} \sin(\phi) + \frac{e(a_2 \cdot p_{1,3})}{k \cdot p_{1,3}} \cos(\phi). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Pour les muons libres initiaux et finaux, nous avons

$$\psi_{\mu^-}^{i,f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2E_{2,4}V}} u(p_{2,4}, s_{2,4}) e^{-ip_{2,4} \cdot y}, \quad (5.44)$$

où $u(p_i, s_i)$ représente le bispineur de Dirac pour l'électron libre et le muon d'impulsion p_i et de spin s_i satisfaisant $\sum_{s_i} u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) = \not{p}_i + m_{e/\mu}$, où $m_{e/\mu}$ est la masse au repos d'électron ou de muon ($m_\mu \approx 207m_e$). La quadri-impulsion cinétique assistée au laser de l'électron est appelée l'impulsion efficace $q_{1,3}$, avec la forme :

$$q_{1,3} = (Q_{1,3}, \mathbf{q}_{1,3}) = p_{1,3} - \frac{e^2 a^2}{2(k \cdot p_{1,3})} k. \quad (5.45)$$

La quadrature de cette impulsion effective montre que la masse de l'électron habillé dépend de l'intensité du champ et de la fréquence

$$q_{1,3}^2 = m_{e^*}^2 = m_e^2 - e^2 a^2 = m_e^2 + e^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\omega} \right)^2, \quad (5.46)$$

où m_{e^*} agit comme une masse effective de l'électron à l'intérieur du champ laser. Substitution des expressions du propagateur de Feynman et des fonctions d'onde dans l'amplitude de diffusion S_{fi} (5.40), on obtient

$$S_{fi} = \frac{ie^2 4\pi}{\sqrt{16Q_1 Q_3 E_2 E_4 V^4}} \int d^4 x d^4 y \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{e^{i(q_3 - q_1 - q) \cdot x} e^{i(p_4 - p_2 + q) \cdot y}}{q^2 + i\epsilon} \right] e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} \quad (5.47)$$

$$\times \left[\bar{u}(p_3, s_3) \left(\chi_0^\mu + \chi_1^\mu \cos(\phi) + \chi_2^\mu \sin(\phi) \right) u(p_1, s_1) \right] \left[\bar{u}(p_4, s_4) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right],$$

où

$$z = e \sqrt{\left(\frac{a_1 \cdot p_1}{k \cdot p_1} - \frac{a_1 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \right)^2 + \left(\frac{a_2 \cdot p_1}{k \cdot p_1} - \frac{a_2 \cdot p_3}{k \cdot p_3} \right)^2}, \quad (5.48)$$

$$\phi_0 = \arctan \left[\frac{(a_2 \cdot p_1)(k \cdot p_3) - (a_2 \cdot p_3)(k \cdot p_1)}{(a_1 \cdot p_1)(k \cdot p_3) - (a_1 \cdot p_3)(k \cdot p_1)} \right],$$

et

$$\begin{aligned} \chi_0^\mu &= \gamma^\mu - e^2 a^2 k^\mu \not{k} / [2(k \cdot p_1)(k \cdot p_3)], \\ \chi_1^\mu &= [e/2(k \cdot p_1)] \gamma^\mu \not{k} \not{a}_1 + [e/2(k \cdot p_3)] \not{a}_1 \not{k} \gamma^\mu, \\ \chi_2^\mu &= [e/2(k \cdot p_1)] \gamma^\mu \not{k} \not{a}_2 + [e/2(k \cdot p_3)] \not{a}_2 \not{k} \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (5.49)$$

L'intégration sur $d^4 x$, $d^4 y$ et $d^4 q$ dans l'équation (5.47) peut être réalisée en utilisant des techniques standard [95], alors nous obtenons :

$$S_{fi} = \frac{ie^2 4\pi}{\sqrt{16Q_1 Q_3 E_2 E_4 V^4}} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk)}{q^2 + i\epsilon} \quad (5.50)$$

$$\times \left[\bar{u}(p_3, s_3) \left(\chi_0^\mu B_s(z) + \chi_1^\mu B_{1s}(z) + \chi_2^\mu B_{2s}(z) \right) u(p_1, s_1) \right] \left[\bar{u}(p_4, s_4) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right],$$

avec $q = q_3 - q_1 - sk$ correspond au transfert relativiste du quadri-impulsion en présence du champ laser. Dans l'équation (5.50), nous avons utilisé la transformation suivante, connue comme l'identité de Jacobi-Anger, impliquant les fonctions ordinaires de Bessel [115]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \times e^{-iz \sin(\phi - \phi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} B_s(z) \\ B_{1s}(z) \\ B_{2s}(z) \end{bmatrix} e^{-is\phi}, \quad (5.51)$$

où z est l'argument de la fonction de Bessel défini précédemment dans l'équation (5.48) et s , son ordre, est interprété comme le nombre de photons échangés entre l'électron et le champ laser.

Pour exprimer la SED assistée par laser, nous multiplions l'élément de la matrice S au carré $|S_{fi}|^2$ par la densité des états finaux, et divisons par l'intervalle de temps d'observation T et le flux de particules entrantes $|J_{\text{inc}}|$ et finalement nous devons faire la moyenne sur les spins

initiaux et la somme sur les spins finaux. Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned}
d\bar{\sigma} &= \frac{|S_{fi}|^2}{|J_{\text{inc.}}|T} \times \frac{Vd^3q_3}{(2\pi)^3} \times \frac{Vd^3p_4}{(2\pi)^3}, \\
&= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} V^2 \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} \frac{e^4(4\pi)^2 (2\pi)^4 VT \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk)}{16Q_1Q_3E_2E_4V^4q^4} \frac{1}{4} \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2, \\
&= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk)}{16Q_1Q_3E_2E_4|J_{\text{inc.}}|Vq^4} d^3q_3 d^3p_4 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

où nous avons utilisé la propriété de la fonction de Dirac suivante [95] :

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk)]^2 = (2\pi)^4 VT \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk), \tag{5.53}$$

et

$$\mathcal{M}_{fi}^s = \left[\bar{u}(p_3, s_3) \left(\chi_0^\mu B_s(z) + \chi_1^\mu B_{1s}(z) + \chi_2^\mu B_{2s}(z) \right) u(p_1, s_1) \right] \left[\bar{u}(p_4, s_4) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \right]. \tag{5.54}$$

A l'aide de la formule suivante [95] :

$$\frac{d^3p_4}{E_4} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p_4 \delta(p_4^2 - m_\mu^2) \Theta(p_4^0), \quad \text{avec} \quad \Theta(p_4^0) = \begin{cases} 1 & \text{for } p_4^0 > 0 \\ 0 & \text{for } p_4^0 < 0 \end{cases} \tag{5.55}$$

la section efficace différentielle devient

$$\begin{aligned}
d\bar{\sigma} &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{8E_2Q_1Q_3|J_{\text{inc.}}|Vq^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4p_4 \delta^4(p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk) \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d^3q_3 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2, \\
&= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{8E_2Q_1Q_3|J_{\text{inc.}}|Vq^4} \int \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d^3q_3 \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2 \Big|_{p_4 - p_2 + q_3 - q_1 - sk = 0}.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

En considérant le flux incident d'électron dans le système de laboratoire où le muon est au repos :

$|J_{\text{inc.}}| = \sqrt{(q_1 \cdot p_2)^2 - m_\mu^2 m_{e^*}^2} / (Q_1 E_2 V) = |\mathbf{q}_1| / (Q_1 V)$ et en utilisant $d^3q_3 = |\mathbf{q}_3|^2 d|\mathbf{q}_3| d\Omega_f$,
on a

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{8m_\mu Q_3 q^4} \frac{|\mathbf{q}_3|^2}{|\mathbf{q}_1|} \int \delta(p_4^2 - m_\mu^2) d|\mathbf{q}_3| \sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2. \tag{5.57}$$

L'intégration sur $d|\mathbf{q}_3|$ peut être effectuée en utilisant la formule familière suivante [95] :

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \frac{f(x)}{|g'(x)|} \Big|_{g(x)=0}. \tag{5.58}$$

Finalement, on obtient pour la SED assistée par laser

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} \right)^{e^- \text{-habillé}} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\sigma}(s)}{d\Omega_f} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{8m_\mu Q_3 q^4} \frac{|\mathbf{q}_3|^2}{|\mathbf{q}_1|} \frac{\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2}{|g'(|\mathbf{q}_3|)|}, \tag{5.59}$$

où

$$g'(|\mathbf{q}_3|) = 2(s\omega \cos(\theta_f) + |\mathbf{q}_1| F(\theta_i, \theta_f, \phi_i, \phi_f)) - 2 \frac{|\mathbf{q}_3|}{Q_3} (Q_1 + m_\mu + s\omega). \tag{5.60}$$

La somme des spins sera convertie en calcul de traces comme suit :

$$\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2 = \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e)\Gamma_s^\mu(\not{p}_1 + m_e)\bar{\Gamma}_s^\nu]\text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu], \quad (5.61)$$

où

$$\Gamma_s^\mu = \chi_0^\mu B_s(z) + \chi_1^\mu B_{1s}(z) + \chi_2^\mu B_{2s}(z), \quad (5.62)$$

et

$$\bar{\Gamma}_s^\nu = \gamma^0 \Gamma_s^{\nu\dagger} \gamma^0 = \bar{\chi}_0^\nu B_s^*(z) + \bar{\chi}_1^\nu B_{1s}^*(z) + \bar{\chi}_2^\nu B_{2s}^*(z), \quad (5.63)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_0^\nu &= \gamma^\nu - e^2 a^2 k^\nu \not{k} / [2(k.p_1)(k.p_3)], \\ \bar{\chi}_1^\nu &= [e/2(k.p_1)] \not{p}_1 \not{k} \gamma^\nu + [e/2(k.p_3)] \gamma^\nu \not{k} \not{p}_1, \\ \bar{\chi}_2^\nu &= [e/2(k.p_1)] \not{p}_2 \not{k} \gamma^\nu + [e/2(k.p_3)] \gamma^\nu \not{k} \not{p}_2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Le calcul des traces de l'équation (5.61) se fait généralement avec FEYNCALC [116, 117, 118]. Le résultat obtenu se trouve dans l'annexe A. Afin de les distinguer et d'éviter toute confusion, il serait très approprié de considérer la section efficace différentielle sommée (SEDS) dans l'équation (5.59), $\left(d\bar{\sigma}/d\Omega_f\right)^{e^-\text{-habillé}}$, comme la somme de sections efficaces différentielles individuelles discrètes (SEDI), $d\bar{\sigma}^{(s)}/d\Omega_f$, pour chaque processus d'échange de photons.

5.4.2 L'effet d'habillage de muon

Pour l'instant, on ne considère que l'habillage d'électrons incidents diffusés. Dans cette partie et pour mettre en valeur l'effet d'habillage sur le muon, on prendra en compte l'habillage relativiste des deux particules impliquées dans le processus (5.38), l'électron et le muon, et donc ils seront décrits ensemble par les ondes planes de Dirac-Volkov. Ceci introduira une nouvelle trace pour calculer et une nouvelle somme sur le nombre de photons n qui seront échangés entre le muon et le champ laser. La fonction d'onde de Dirac-Volkov pour les états initial et final du muon habillé est telle que

$$\psi_{\mu^-}^{i,f}(y) = \left[1 + \frac{e \not{k} A'}{2(k.p_{2,4})}\right] \frac{u(p_{2,4}, s_{2,4})}{\sqrt{2Q_{2,4}V}} \times e^{iS(q_{2,4}, y)}, \quad (5.65)$$

où

$$S(q_{2,4}, y) = -(q_{2,4}.y) - \frac{e(a_1.p_{2,4})}{k.p_{2,4}} \sin(\phi') + \frac{e(a_2.p_{2,4})}{k.p_{2,4}} \cos(\phi'). \quad (5.66)$$

$A'(\phi')$ est le quadri-potentiel du champ laser ressenti par le muon

$$A'(\phi') = a_1^\mu \cos(\phi') + a_2^\mu \sin(\phi'), \quad (5.67)$$

où $\phi' = (k.y)$ est la phase du champ laser. $Q_{2,4}$ correspond à l'énergie totale du muon en présence d'un champ laser.

Il n'est pas nécessaire de répéter les étapes menant à la SED puisqu'elles ont déjà été décrites dans la section précédente. En suivant la même procédure qu'auparavant, nous obtenons une SED non polarisée :

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f}\right)^{(e^-, \mu^-)\text{-habillé}} = \sum_{s,n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\sigma}^{(s,n)}}{d\Omega_f} = \sum_{s,n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{8m_{\mu^*} Q_3 q^4} \frac{|\mathbf{q}_3|^2}{|\mathbf{q}_1|} \frac{\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^{(s,n)}|^2}{|h'(|\mathbf{q}_3|)|}, \quad (5.68)$$

où m_{μ^*} représente la masse effective du muon acquis au sein du champ laser. Dans ce cas, la conservation d'énergie-impulsion $q_4 + q_3 - q_1 - q_2 - (s + n)k = 0$ doit être satisfaite. Le terme $\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^{(s,n)}|^2$ s'exprime comme suit :

$$\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^{(s,n)}|^2 = \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e)\Gamma_s^\mu(\not{p}_1 + m_e)\bar{\Gamma}_s^\nu]\text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu)\Lambda_\mu^n(\not{p}_2 + m_\mu)\bar{\Lambda}_\nu^n], \quad (5.69)$$

avec

$$\Lambda_\mu^n = \chi'_{0\mu} B_n(z_{\mu^-}) + \chi'_{1\mu} B_{1n}(z_{\mu^-}) + \chi'_{2\mu} B_{2n}(z_{\mu^-}), \quad (5.70)$$

et

$$\begin{aligned} \chi'_{0\mu} &= \gamma_\mu - e^2 a^2 k_\mu \not{k} / [2(k.p_2)(k.p_4)], \\ \chi'_{1\mu} &= [e/2(k.p_2)]\gamma_\mu \not{k} \not{p}_1 + [e/2(k.p_4)]\not{p}_1 \not{k} \gamma_\mu, \\ \chi'_{2\mu} &= [e/2(k.p_2)]\gamma_\mu \not{k} \not{p}_2 + [e/2(k.p_4)]\not{p}_2 \not{k} \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (5.71)$$

z_{μ^-} des nouvelles fonctions de Bessel ordinaires. La quantité $h'(|\mathbf{q}_3|)$ dans l'équation (5.68) est donnée par

$$h'(|\mathbf{q}_3|) = 2\left((s+n)\omega \cos(\theta_f) + |\mathbf{q}_1|F(\theta_i, \theta_f, \phi_i, \phi_f)\right) - 2\frac{|\mathbf{q}_3|}{Q_3}\left(Q_1 + m_{\mu^*} + (s+n)\omega\right). \quad (5.72)$$

5.5 Résultats et discussions

Cette section est consacrée à présenter et à discuter les résultats numériques obtenus pour la diffusion relativiste d'électrons et de muons en absence et en présence du champ laser. La quantité expérimentale mesurable la plus importante dans les processus de diffusion est la SED, qui exprime la probabilité de l'événement pris en considération. Ici, la SED est dérivée par rapport à l'angle solide de l'électron sortant Ω_f et est évalué dans le système de laboratoire du muon où le muon est au repos avec une énergie initiale $E_2 = m_\mu$. Pour la géométrie, nous plaçons à la fois les électrons initiaux et finaux dans une géométrie générale avec des coordonnées sphériques $\theta_i, \theta_f, \phi_i$ et ϕ_f . Ces angles ont été choisis, dans tous les résultats présentés, de sorte que $\theta_i = \phi_i$, $-180^\circ \leq \theta_f \leq 180^\circ$ et $\phi_f = \phi_i + 90^\circ$. Cette géométrie est choisie parce qu'elle s'est avérée générer des résultats bons et cohérents. L'impulsion du muon final peut être déduite des autres en utilisant la relation de conservation d'impulsion. Compte tenu de la relativité et des effets de spin, nous choisissons l'énergie cinétique de l'électron entrant comme (sauf indication contraire) $E_e^{\text{kin}} = 10^6$ eV.

5.5.1 En absence du champ électromagnétique

Les paramètres sur lesquels repose la SED sans laser de diffusion électron-muon sont l'énergie totale de l'électron entrant et les diverses coordonnées sphériques. Nous contrôlons les paramètres initiaux tels que l'énergie cinétique de l'électron entrant et son angle d'incidence θ_i , et nous pouvons voir l'effet de chacun sur la SED. En ce qui concerne les paramètres finaux, nous n'en savons rien et nous ne pouvons pas les contrôler. Pour l'angle ϕ_f , nous avons constaté que la SED ne change pas avec lui et donne une valeur constante. Pour obtenir des informations sur l'angle de diffusion final θ_f à partir duquel l'électron sera sortant, il est nécessaire d'étudier les variations de la SED en termes de θ_f comme représentée dans la figure (5.3) pour les différents angles initiaux θ_i . Pour les petits angles d'incidence, on remarque que lorsque l'angle initial diminue ($\theta_i \rightarrow 0^\circ$), la SED augmente avec une valeur maximale toujours à l'angle $\theta_f = 0^\circ$. Dans le cas des grands angles initiaux, on constate que lorsque l'angle initial augmente ($\theta_i \rightarrow 180^\circ$), la SED augmente avec une valeur maximale à $\theta_f = 180^\circ$. Chaque fois que l'angle

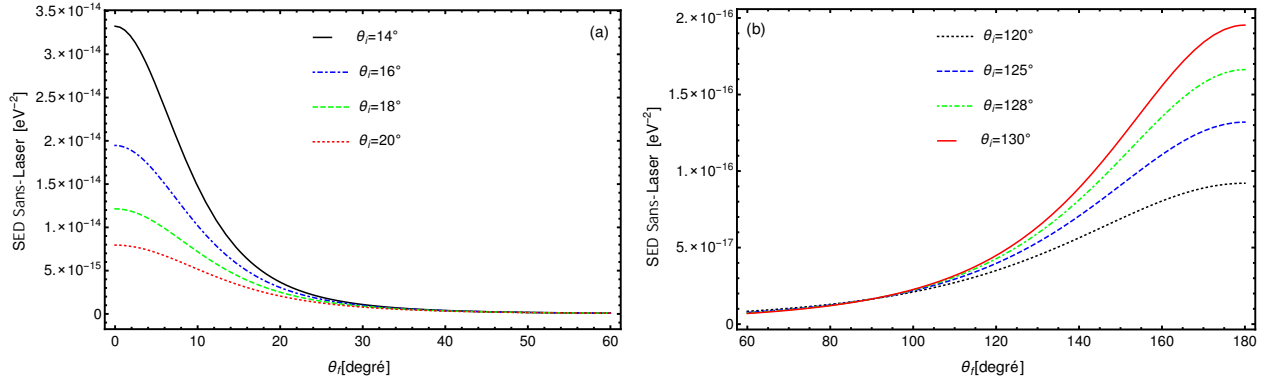


FIGURE 5.3 – Les variations de la SED sans laser en fonction de l’angle de diffusion θ_f , pour (a) des petits angles initiaux θ_i et pour (b) des grands angles initiaux θ_i .

initial tend vers 0° (diffusion vers l’avant) ou 180° (rétrodiffusion), la SED est très importante. Si l’électron entre avec un petit angle initial $0^\circ \leq \theta_i < 90^\circ$, il est fort probable qu’il sortira avec un angle $\theta_f = 0^\circ$. Mais, s’il entre avec un grand angle initial $90^\circ < \theta_i \leq 180^\circ$, il est très probable qu’il sortira avec un angle $\theta_f = 180^\circ$. Pour $\theta_i = 90^\circ$, nous avons trouvé que tous les angles de diffusion ont la même probabilité.

Voyons maintenant l’effet de l’énergie cinétique des électrons entrants sur la SED sans laser. En figure (5.4), nous traçons les changements de la SED sans laser en termes d’angle de diffusion final θ_f pour différentes énergies cinétiques de l’électron incident E_e^{kin} . Il est très clair que la

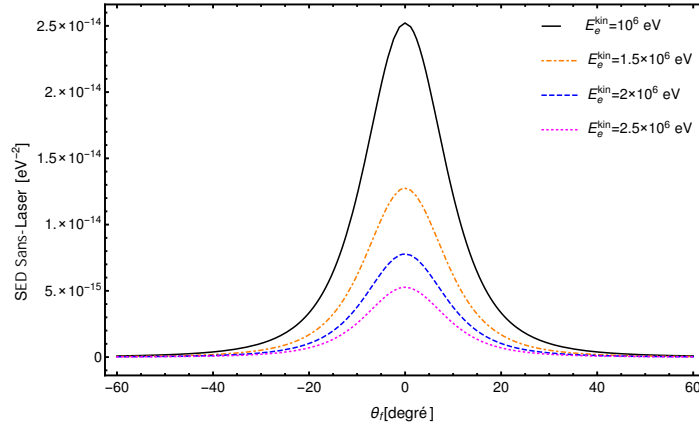


FIGURE 5.4 – Les variations de la SED sans laser en fonction de l’angle de diffusion θ_f pour différentes énergies cinétiques de l’électron incident, avec l’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$.

SED est inversement proportionnelle à l’énergie cinétique, ce qui signifie qu’elle diminue avec l’augmentation de l’énergie cinétique de l’électron entrant. C’est un comportement normal et attendu dû à l’unitarité de l’élément de la matrice S . La relativité et les effets de spin ont contribué de manière significative aux écarts qui surviennent entre les régimes relativistes et non relativistes. On remarque également que la valeur maximale de la SED, pour $\theta_i = 15^\circ$, est régulièrement située autour de l’angle $\theta_f = 0^\circ$ quelle que soit l’énergie cinétique de l’électron incident.

Pour donner un meilleur aperçu de la dépendance de la SED sans laser à l’énergie cinétique des électrons incidents et de l’angle de diffusion final θ_f , nous présentons dans la figure (5.5) un graphe en trois dimensions (contour-plot) dans lequel nous représentons les changements de la SED en termes de deux variables simultanément, l’énergie cinétique de l’électron entrant et de l’angle de diffusion θ_f . A partir de cette figure, on peut voir que la courbe est en pointe autour de l’angle $\theta_f = 0^\circ$ et que l’ordre de grandeur de la SED sans laser diminue avec l’augmentation

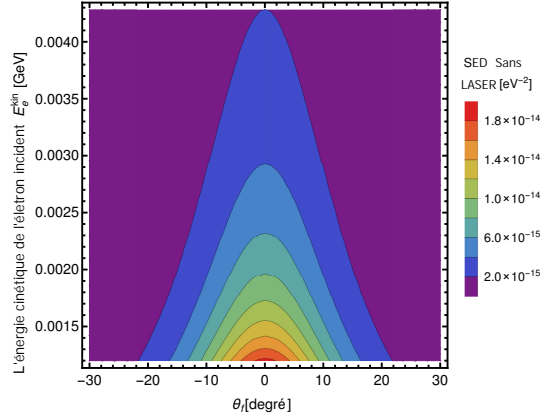


FIGURE 5.5 – Les variations de la SED sans laser en fonction à la fois de l'énergie cinétique des électrons incidents E_e^{kin} et l'angle de diffusion θ_f , avec l'angle incident est $\theta_i = 15^\circ$.

de l'énergie cinétique de l'électron entrant.

5.5.2 En présence du champ électromagnétique

Dans cette partie, nous présenterons les résultats obtenus dans le cas de n'habiller que l'électron sans le muon dans le processus de diffusion électron-muon. Chaque particule chargée change ses propriétés et peut en acquérir de nouvelles en interaction avec un champ externe. Le champ externe considéré ici est le champ électromagnétique polarisé circulaire, qui peut être fourni dans le laboratoire à l'aide d'un dispositif laser [119]. Dans notre cas, l'électron habillé par laser acquiert une nouvelle masse effective, quantité de mouvement et énergie en présence du champ laser. Ainsi, quand on insère le processus de diffusion électron-muon dans un champ électromagnétique externe, sa SED sera évidemment modifiée et affectée. Maintenant, les paramètres laser sont ajoutés à ceux qui dépendent de la SED. Précisément, on parle d'intensité et de fréquence du champ laser ainsi que du nombre de photons échangés. Si ces trois paramètres sont nuls dans la limite du champ, la SED assistée par laser est réduite en SED sans laser. Cette comparaison, qui peut se faire numériquement, permet de vérifier la cohérence et la précision du calcul théorique. Pour la géométrie laser, nous notons ici que nous avons choisi la direction du vecteur d'onde de champ \mathbf{k} selon l'axe des z , tandis que les vecteurs de polarisation \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 perpendiculaires à \mathbf{k} suivent l'axe des x et l'axe des y , respectivement.

La chose importante qui indique l'interaction ou la non-interaction de l'électron avec le champ électromagnétique est le processus d'échange des photons par émission et absorption. L'échange d'un plus grand nombre de photons entre le laser et l'électron implique que l'électron interagit fortement avec le champ laser et vice versa. Pour examiner le processus d'échange de photons, on trace les variations de la SEDI, $d\bar{\sigma}^{(s)}/d\Omega_f$, en termes de nombre de photons échangés s . Par conséquent, nous obtenons des enveloppes comme indiqué dans la figure (5.6). On remarque que toutes ces enveloppes sont découpées à deux bords symétriques par rapport à l'axe $s = 0$. La figure (5.6)(a) montre l'effet de l'intensité du champ laser sur le processus d'échange de photons. Il nous apparaît que le nombre de photons échangés augmente en même temps que l'intensité du champ \mathcal{E}_0 à partir de 10^6 à 4.5×10^6 V cm $^{-1}$. Ceci indique que l'électron interagit de façon significative avec le champ laser d'intensité élevée. Concernant l'effet de la fréquence laser, nous montrons dans la figure (5.6)(b) le processus multiphotonique pour deux fréquences différentes. Grâce à cette figure, nous pouvons voir que l'électron échange un petit nombre de photons avec le laser à haute fréquence ($\hbar\omega = 2$ eV) comparé au laser à basse fréquence ($\hbar\omega = 1.17$ eV). Autrement dit, l'influence du laser diminue à des fréquences plus élevées. La figure (5.6)(c) illustre l'effet de l'énergie cinétique de l'électron incident sur

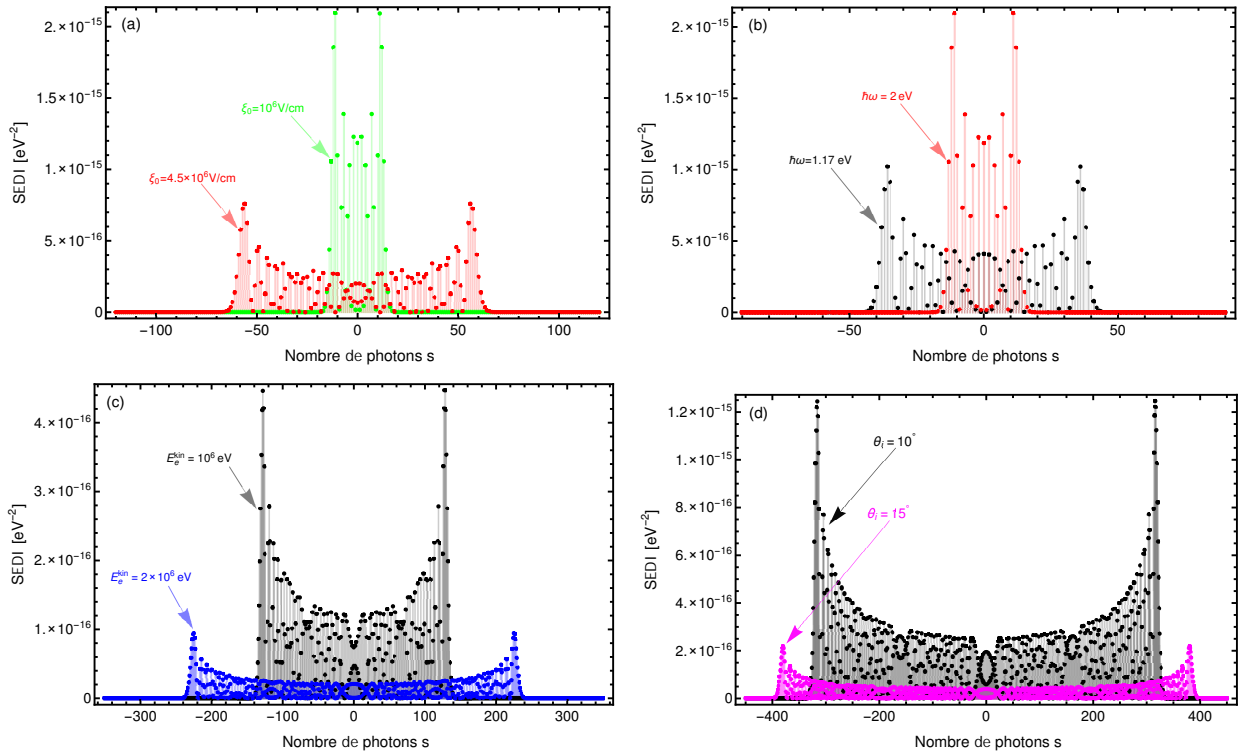


FIGURE 5.6 – Le comportement de SEDI, $d\bar{\sigma}^{(s)}/d\Omega_f$, par rapport au nombre de photons s . Les différents paramètres sont (a) $\hbar\omega = 2$ eV, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$, (b) $\mathcal{E}_0 = 10^6$ V cm $^{-1}$, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$, (c) $\mathcal{E}_0 = 10^7$ V cm $^{-1}$, $\hbar\omega = 2$ eV, $\theta_i = 15^\circ$ et $\theta_f = 0^\circ$ et (d) $\mathcal{E}_0 = 10^7$ V cm $^{-1}$, $\hbar\omega = 1.17$ eV et $\theta_f = 0^\circ$.

l'interaction entre l'électron et le champ laser. Selon cette figure, il semble que plus de photons étaient échangés avec des énergies cinétiques supérieures qu'avec des énergies inférieures. Cela veut dire que l'énergie cinétique élevée de l'électron a permis d'améliorer l'interaction entre l'électron et le champ laser. L'effet de l'angle θ_i initial, auquel l'électron entre en collision avec le muon, a aussi été étudié, et le résultat est indiqué dans la figure (5.6)(d). Il est clair qu'il existe un écart au niveau du nombre de photons échangés entre les deux angles initiaux, car le nombre de photons échangés devient important lorsque l'angle θ_i initial est élevé.

Nous avons vu à quel point tous ces paramètres initiaux, qu'ils soient liés au laser, comme la fréquence et l'intensité du champ, ou ceux de l'énergie cinétique et de la géométrie initiales, jouent un rôle important dans l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique. Afin de mieux clarifier davantage l'effet des paramètres laser sur la SED de la diffusion électron-muon, dans la figure (5.7) nous montrons le comportement de la SEDS (l'équation (5.59)) en termes d'intensité de champ laser \mathcal{E}_0 pour deux fréquences différentes. De cette figure, nous pouvons voir que la haute intensité du laser a réduit significativement la SED. En outre, l'effet du laser dépend de la fréquence utilisée, car nous constatons que le laser à basse fréquence affecte la SED plus rapide que le laser à haute fréquence.

5.5.3 Effet d'habillage du muon

La présente section vise à présenter et à discuter les résultats obtenus dans le cas du muon habillé, et les comparer avec ceux obtenus dans le cas où seulement l'électron était habillé sans le muon dans les états initial et final. Il s'agit de déterminer à quelles intensités de champ l'habillage du muon a un effet sur la SED. En tenant compte de l'interaction de l'électron et du muon avec le champ électromagnétique dans les états initial et final, le calcul théorique est un peu difficile et lourd, qui nécessite des ordinateurs très rapides et de haute résolution

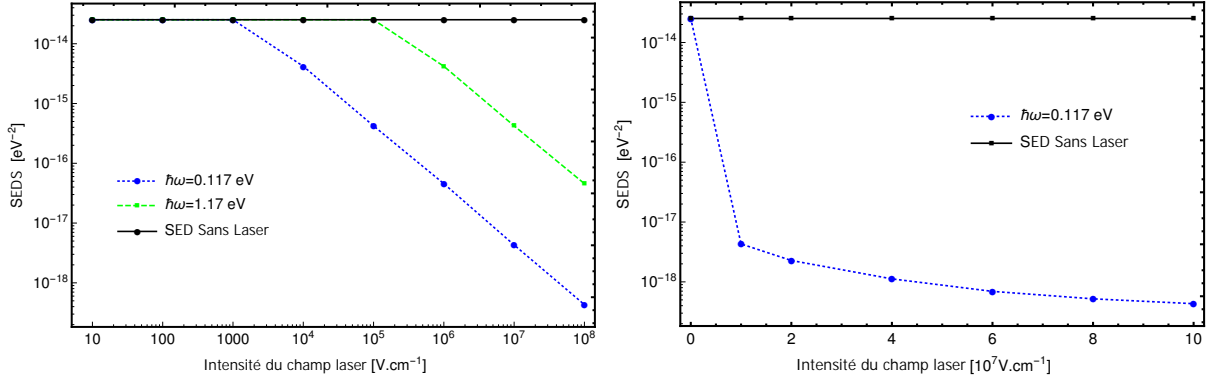


FIGURE 5.7 – La SED assistée par laser (5.59) sommée sur $-10 \leq s \leq 10$ en fonction de l’intensité du champ laser pour deux fréquences laser. Le graphe (à gauche) montre la gamme de 10 à 10^8 V cm^{-1} , tandis que le graphe (à droite) montre le détail des variations SEDS pour les intensités de champ entre 10^7 et 10^8 V cm^{-1} , avec l’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$.

pour extraire des résultats numériques et graphiques. C’est pour cela nous nous limiterons ici à inclure, dans le tableau 5.1, quelques valeurs pertinentes pour la SED dans le cas où nous habillons uniquement l’électron ou l’électron et le muon ensemble.

TABLE 5.1 – Valeurs de deux SEDs sans (l’équation (5.59)) et avec (l’équation (5.68)) l’effet d’habillage du muon pour différentes intensités de champ laser. La fréquence laser est $\hbar\omega = 1.17$ eV. L’angle incident est $\theta_i = 15^\circ$. Les deux nombres de photons s et n sont sommés de -10 à $+10$.

Intensité \mathcal{E}_0 (V cm^{-1})	$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f}\right)^{e^- \text{-habillé(5.59)}}$ (eV^{-2})	$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f}\right)^{(e^-, \mu^-) \text{-habillé(5.68)}}$ (eV^{-2})
10^5	2.52149×10^{-14}	2.52149×10^{-14}
10^6	4.19919×10^{-15}	4.19919×10^{-15}
10^7	4.22187×10^{-16}	4.22187×10^{-16}
10^8	4.566×10^{-17}	4.566×10^{-17}
10^9	4.30249×10^{-18}	6.02908×10^{-19}
10^{10}	4.96829×10^{-19}	6.38937×10^{-21}

D’après le tableau, il est facile de constater que les deux SEDs sont identiques aux quatre premières intensités de champ (10^5 , 10^6 , 10^7 et 10^8 V cm^{-1}), ce qui signifie que l’habillage du muon n’a pas encore d’effet. Lorsque nous atteignons la valeur d’intensité de champ de 10^9 V cm^{-1} , nous remarquons que les deux SEDs commencent à être très différentes. À cette force de champ et au-dessus ($\mathcal{E}_0 \geq 10^9$ V cm^{-1}), l’effet d’habillage muonique commence à apparaître. Dans l’intervalle des champs en dessous de cette valeur, il suffit d’habiller uniquement l’électron pour éviter la complexité du calcul théorique et les expressions lourdes engendrées par l’habillage du muon. Mais, si des intensités de champ plus élevées sont utilisées, il faut habiller le muon et le décrire par la fonction de Dirac-Volkov pour tenir compte de son interaction avec le champ électromagnétique intense. On peut expliquer cela par la différence entre les masses du muon et de l’électron. Ceci conforterait et justifierait le choix fait précédemment par certains auteurs [89, 90] pour étudier le même processus de diffusion sans prendre en compte l’habillage du muon à l’intensité du champ de 5.18×10^7 V cm^{-1} . Récemment, Dahiari *et al* [74] ont examiné l’effet de l’habillage des protons dans la diffusion électron-proton assistée par laser et ils ont constaté qu’il commence à apparaître à des intensités de champ laser supérieures ou égales à 10^{10} V cm^{-1} à cause de la masse lourde du proton. De la table 5.1, il est également clair pour nous que l’habillage du muon a rendu la SED plus bas qu’auparavant.

Conclusion

Afin de conclure, nous avons présenté dans ce travail une étude théorique de la diffusion relativiste élastique des électrons-muons en présence d'un champ laser monochromatique polarisé circulairement sous deux phases. Dans la première, nous avons habillé seulement l'électron sans muon dans les états initial et final, et dans la seconde nous avons également ajouté l'habillage du muon afin de mettre en évidence son effet sur la SED. Dans les résultats obtenus, nous avons montré l'effet de l'intensité et de la fréquence du champ laser, ainsi que l'énergie cinétique de l'électron entrant et son angle initial sur la SED et le processus multiphotonique. Nos conclusions sont les suivantes. La SED est affectée par le champ laser, car il diminue avec l'augmentation des intensités de champ en raison des processus d'absorption et d'émission multiphotoniques. Le processus de diffusion permet d'échanger plusieurs photons avec le champ laser en fonction des paramètres du champ et de l'énergie des électrons. Nous avons trouvé que les processus d'émission de photons sont égaux aux processus d'absorption de photons. En ce qui concerne la fréquence laser, il est démontré que l'effet du laser diminue aux fréquences élevées. Pour l'énergie des électrons, on remarque que lorsque l'énergie incidente augmente, la SED diminue. Encore un autre point important concernant l'effet d'habillage muonique, nous avons démontré que le laser n'a absolument aucun effet sur la SED tant que l'intensité du champ est inférieure à 10^9 V cm^{-1} et peut donc être ignoré en toute sécurité.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette thèse visait à améliorer la compréhension des processus QED modifiés par laser. Cet objectif a été atteint, ce qui a notamment donné lieu à une étude approfondie des processus suivants : l'émission d'un photon par un électron et la diffusion d'un électron par un muon en présence d'un champ électromagnétique polarisé circulairement. Outre les résultats théoriques, une attention particulière a été accordée à l'évaluation numérique des formules utilisées. Les principaux résultats de cette thèse sont les valeurs numériques obtenues à partir des formules d'électrodynamique quantique modifiées par laser, présentées dans un certain nombre de graphiques dans les chapitres 4 et 5.

Après avoir introduit l'électrodynamique quantique dans des champs laser intenses, dans le chapitre 1, nous avons examiné la solution du problème du mouvement d'un électron dans une onde électromagnétique plane.

Dans le second chapitre, nous avons traité la définition de la théorie de diffusion, en soulignant ses types, et nous avons déterminé tous les paramètres dont nous aurons besoin au cours des prochains chapitres. Nous avons également examiné les manières dont le laser est diffusé et comment écrire son expression mathématique pour étudier la diffusion de certaines particules assistées par laser.

Dans le troisième chapitre, on a bien étudié le concept d'électrons polarisés dans la diffusion de Compton. On en conclut qu'à haute énergie, la probabilité que l'électron change de spin est nulle, on peut dire aussi que le spin d'un électron peut être influencé par la diffusion en fonction de l'énergie des particules incidentes. On peut ainsi mieux comprendre l'influence de la diffusion sur les états de spin en appliquant le même concept de polarisation à d'autres processus dans l'électrodynamique quantique. Bien que l'ajout d'effets externes complique un peu le calcul et requiert de nouvelles fonctions mathématiques complexes, mais cela permet de comprendre le comportement des particules lors de la diffusion et de découvrir leurs nouvelles propriétés.

Dans un deuxième projet, on ajoute le quatrième chapitre afin de comprendre l'interaction entre le rayonnement et la matière et de comprendre l'influence du champ électromagnétique sur la diffusion des particules. En ce qui concerne notre processus, nous avons conclu que la section efficace différentielle devient maximum lorsque l'angle de diffusion $\theta = 0^\circ$. Cela signifie que l'émission vers l'avant d'un photon par un électron en présence d'un champ électromagnétique intense est plus probable que l'émission vers l'arrière. De plus, la section efficace différentielle diminue lorsque l'énergie de l'électron entrant augmente, ce qui implique que l'interaction de l'électron entrant avec le champ électromagnétique intense devient faible. Nous avons également vu que la section efficace différentielle augmente lorsque l'intensité du champ électromagnétique augmente et que le nombre de photons échangés augmente.

Nous avons présenté dans le cinquième chapitre, c'est un troisième projet, une étude théorique de la diffusion relativiste élastique des électrons-muons en présence d'un champ laser mono-

chromatique polarisé circulairement, nous avons montré l'effet de l'intensité et de la fréquence du champ laser, ainsi que l'énergie cinétique de l'électron entrant et son angle initial sur la section efficace différentielle et le processus multiphotonique.

Nos conclusions sont les suivantes. La section efficace différentielle est affectée par le champ laser, car elle diminue avec l'augmentation des intensités de champ en raison des processus d'absorption et d'émission multiphotoniques. Le processus de diffusion peut échanger un certain nombre de photons avec le champ laser en fonction des paramètres du champ et de l'énergie des électrons. Nous avons constaté que les processus d'émission de photons sont égaux à ceux d'absorption de photons. Concernant la fréquence de laser, nous avons montré que l'effet du laser diminue aux hautes fréquences. Pour l'énergie des électrons, on note qu'au fur et à mesure que si l'énergie incidente augmente, la section efficace différentielle devient plus petite.

Encore un autre point important concernant l'effet d'habillage muonique, nous avons démontré que le laser n'a absolument aucun effet sur la section efficace différentielle tant que l'intensité du champ est inférieure à 10^9 V cm^{-1} et peut donc être ignoré en toute sécurité.

Finalement, nous avons montré qu'il est possible d'évaluer numériquement des sections efficaces en électrodynamique quantique assistées par laser dans le domaine relativiste, en utilisant le formalisme de Dirac-Volkov.

L'évaluation numérique des deux traces montrées dans l'équation (5.61) donne le résultat suivant :

$$\sum_{s_i} |\mathcal{M}_{fi}^s|^2 = \mathcal{C}_1 |B_s|^2 + \mathcal{C}_2 |B_{1s}|^2 + \mathcal{C}_3 |B_{2s}|^2 + \mathcal{C}_4 B_s B_{1s}^* + \mathcal{C}_5 B_{1s} B_s^* + \mathcal{C}_6 B_s B_{2s}^* + \mathcal{C}_7 B_{2s} B_s^* + \mathcal{C}_8 B_{1s} B_{2s}^* + \mathcal{C}_9 B_{2s} B_{1s}^*, \quad (5.73)$$

où l'argument z des diverses fonctions de Bessel ordinaires a été abandonné pour plus de commodité et les neuf coefficients $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8$ et \mathcal{C}_9 sont explicitement exprimés, en termes de différents produits scalaires, par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = & \frac{8m_\mu}{(k.p_1)^2(k.p_3)^2} \left[2(k.p_1)(k.p_3)(a^2 e^2 (k.p_3)^2 E_1 - a^2 e^2 (k.p_1)^2 E_3 + (k.p_1)(k.p_3)(a^2 e^2 (-E_1 \right. \\ & + E_3 + 2Q_1 - 2Q_3) + 2(-m_\mu E_1 E_3 + E_3(p_4.p_1) + E_1(p_4.p_3) + m_e^2(m_\mu - Q_1 + Q_3))) \\ & - 2a^2 e^2 (k.p_1)(k.p_3)(a^2 e^2 (-(k.p_1) + (k.p_3)) + (k.p_3)(-2m^2 + 2E_1 E_3 + (p_4.p_1)) \\ & + (k.p_1)(2m_e^2 - 2E_1 E_3 + (p_4.p_3)))\omega + a^4 e^4 (k.p_1)(k.p_3)m_\mu \omega^2 + a^6 e^6 (-(k.p_1) + (k.p_3))\omega^3 \\ & + 2((k.p_1)(k.p_3)m_\mu + a^2 e^2 (-(k.p_1) + (k.p_3))\omega)((k.p_3)|\mathbf{q}_3| \cos(\theta_f)(a^2 e^2 \omega + 2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| \\ & \times \cos(\theta_i)) + (k.p_1)(a^2 e^2 |\mathbf{q}_1| \omega \cos(\theta_i) + 2(k.p_3)|\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \sin(\theta_i)(|\mathbf{q}_1| \cos(\varphi_f) \cos(\varphi_i) \\ & \left. + |\mathbf{q}_1| \sin(\varphi_f) \sin(\varphi_i)))) \right], \quad (5.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \frac{8e^2 m_\mu}{(k.p_1)^2(k.p_3)^2} \left[a^2 (2(k.p_1)(k.p_3)((k.p_1)^2(m_\mu - E_1 + E_3) + (k.p_3)^2(m_\mu - E_1 + E_3)) \right. \\ & - 2(k.p_1)(k.p_3)(m_\mu - E_1 + E_3 + Q_1 - Q_3)) + 2(k.p_1)((k.p_1) - (k.p_3))(k.p_3)(2m^2 \\ & - 2E_1 E_3 - (p_4.p_1) + (p_4.p_3))\omega + a^4 e^4 ((k.p_1) - (k.p_3))\omega^3 + 2a^2 ((k.p_1) - (k.p_3)) \\ & \times (k.p_3)|\mathbf{q}_3| \omega \cos(\theta_f)(a^2 e^2 \omega + 2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| \cos(\theta_i)) + 2(k.p_1)\omega(a^4 e^2 ((k.p_1) - (k.p_3)) \\ & \times |\mathbf{q}_1| \omega \cos(\theta_i) + 2(k.p_3)(|\mathbf{a}|^2(k.p_1)|\mathbf{q}_3|^2 \cos(\varphi_f)^2 \sin(\theta_f)^2 + a^2((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_1| + |\mathbf{a}|^2 \\ & \times (2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| - (k.p_3)|\mathbf{q}_1| - (k.p_1)|\mathbf{q}_1|))|\mathbf{q}_3| \cos(\varphi_f) \cos(\varphi_i) \sin(\theta_f) \sin(\theta_i) + |\mathbf{q}_1| \sin(\theta_i) \\ & \left. \times (-|\mathbf{a}|^2(k.p_3)|\mathbf{q}_1| \cos(\varphi_i)^2 \sin(\theta_i) + a^2((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \sin(\varphi_f) \sin(\varphi_i))) \right], \quad (5.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3 = & \frac{8e^2 m_\mu}{(k.p_1)^2 (k.p_3)^2} \left[a^2 (2(k.p_1)(k.p_3)((k.p_1)^2(m_\mu - E_1 + E_3) + (k.p_3)^2(m_\mu - E_1 + E_3)) \right. \\
& - 2(k.p_1)(k.p_3)(m_\mu - E_1 + E_3 + Q_1 - Q_3)) + 2(k.p_1)((k.p_1) - (k.p_3))(k.p_3)(2m_e^2 \\
& - 2E_1 E_3 - (p_4.p_1) + (p_4.p_3))\omega + a^4 e^4 ((k.p_1) - (k.p_3))\omega^3 + 2a^2 ((k.p_1) - (k.p_3))(k.p_3) \\
& \times |\mathbf{q}_3| \omega \cos(\theta_f) (a^2 e^2 \omega + 2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| \cos(\theta_i)) + 2(k.p_1)\omega (a^4 e^2 ((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_1| \omega \cos(\theta_i) \\
& + 2(k.p_3)(|\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) (a^2 ((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_1| \cos(\varphi_f) \cos(\varphi_i) \sin(\theta_i) + |\mathbf{a}|^2 (k.p_1) \\
& \times |\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \sin(\varphi_f)^2) + (a^2 + |\mathbf{a}|^2)((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_f) \sin(\varphi_i) \\
& \left. - |\mathbf{a}|^2 (k.p_3)|\mathbf{q}_1|^2 \sin(\theta_i)^2 \sin(\varphi_i)^2) \right], \tag{5.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_5 = & \frac{8|\mathbf{a}|em_\mu}{(k.p_1)(k.p_3)} \left[|\mathbf{q}_3| (2(k.p_1)((k.p_1)(m_\mu - E_1) - (k.p_3)(m_\mu + E_3)) + (a^2 e^2 (3(k.p_1) \right. \\
& - (k.p_3)) - 2(k.p_1)(p_4.p_1))\omega) \cos(\varphi_f) \sin(\theta_f) - 2((k.p_1) - (k.p_3))(k.p_3)(m_\mu + E_3)|\mathbf{q}_1| \\
& - 2(k.p_1)(k.p_3)(E_1 + E_3)|\mathbf{q}_1| + (2(k.p_3)(p_4.p_3)|\mathbf{q}_1| + a^2 e^2 (-2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| + 2(k.p_3)|\mathbf{q}_1| \\
& \left. + (k.p_1)|\mathbf{q}_1| + (k.p_3)|\mathbf{q}_1|))\omega) \cos(\varphi_i) \sin(\theta_i) \right], \tag{5.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_7 = & \frac{8|\mathbf{a}|em_\mu}{(k.p_1)(k.p_3)} \left[|\mathbf{q}_3| (2(k.p_1)((k.p_1)(m_\mu - E_1) - (k.p_3)(m_\mu + E_3)) + (a^2 e^2 (3(k.p_1) \right. \\
& - (k.p_3)) - 2(k.p_1)(p_4.p_1))\omega) \sin(\theta_f) \sin(\varphi_f) + |\mathbf{q}_1| ((k.p_1)(-2(k.p_3)m_\mu + 2(k.p_3)E_1 \\
& \left. + a^2 e^2 \omega) + (k.p_3)(2(k.p_3)(m_\mu + E_3) - (3a^2 e^2 + 2(p_4.p_3))\omega)) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i) \right], \tag{5.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_8 = \mathcal{C}_9 = & \frac{16|\mathbf{a}|^2 e^2 m_\mu \omega}{(k.p_1)(k.p_3)} \left[\cos(\varphi_i) \sin(\theta_i) ((2(k.p_1)|\mathbf{q}_1| - (k.p_3)|\mathbf{q}_1| - (k.p_1)|\mathbf{q}_1|)|\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \right. \\
& \times \sin(\varphi_f) - 2(k.p_3)|\mathbf{q}_1|^3 \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) + |\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) ((k.p_1)|\mathbf{q}_3| \sin(\theta_f) \sin(2\varphi_f) \\
& \left. + ((k.p_1) - (k.p_3))|\mathbf{q}_1| \cos(\varphi_f) \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) \right]. \tag{5.79}
\end{aligned}$$

- [1] U. D. Jentschura, S. Kotochigova, E.-O. Le Bigot, P. J. Mohr, and B. N. Taylor, *Precise calculation of transition frequencies of hydrogen and deuterium based on a least-squares analysis*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005), 163003 (1-4).
- [2] V. N. Bařer, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Higher-order effects in external field : Pair production by a particle*, Yad. Fiz. 14 (1971), 1020-1026, [Sov. J. Nucl. Phys 14, 572 (1972)].
- [3] V. N. Bařer, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Electroproduction of e^+e^- pairs in an external field*, Yad. Fiz. 53 (1991), 1021-1029, [Sov. J. Nucl. Phys 53, 632 (1991)].
- [4] A. Di Piazza and G. Calucci, *Pair production in a rotating strong magnetic field*, Phys. Rev. D 65 (2002), 125019 (1-10).
- [5] T. Erber, *High-energy electromagnetic conversion processes in magnetic fields*, Rev. Mod. Phys. 38 (1966), 626-659.
- [6] C. Graziani, *Strong-field cyclotron scattering. I. Scattering amplitudes and natural line width*, Astrophysical J. 412 (1993), 351-362.
- [7] A. K. Harding, *The physics of gamma-ray bursts*, Phys. Rep. 206 (1991), 327-391.
- [8] H. Herold, *Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields*, Phys. Rev. D 19 (1979), 2868-2875.
- [9] Z. Harman, I. I. Tupitsyn, A. N. Artemyev, U. D. Jentschura, C. H. Keitel, J. R. Crespo López-Urrutia, A. J. González Martínez, H. Tawara, and J. Ullrich, *Benchmarking high- field few-electron correlation and QED contributions in Hg75⁺ to Hg78⁺ ions. II. Theory*, Phys. Rev. A 73 (2006), 052711 (1-13).
- [10] U. D. Jentschura and P. J. Mohr, *Electron self-energy for higher excited S levels*, Phys. Rev. A 69 (2004), 064103 (1-2).
- [11] A. J. González Martínez, J. R. Crespo López-Urrutia, J. Braun, G. Brenner, H. Bruhns, A. Lapierre, V. Mironov, R. Soria Orts, H. Tawara, M. Trinczek, J. Ullrich, A. N. Artemyev, Z. Harman, U. D. Jentschura, C. H. Keitel, J. H. Scofield, and I. I. Tupitsyn, *Benchmarking high-field few-electron correlation and QED contributions in Hg75⁺ to Hg78⁺ ions. I. Experiment*, Phys. Rev. A 73 (2006), 052710 (1-10).
- [12] G. Baur, K. Hencken, and D. Trautmann, *Electron-positron pair production in ultrarelativistic heavy ion collision*, Phys. Rep. 453 (2007), 1-27.
- [13] W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum electrodynamics of strong fields*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [14] J. Rafelski, L. P. Fulcher, and A. Klein, *Fermions and bosons interacting with arbitrarily strong external fields*, Phys. Rep. 38 (1978), 227-361.

- [15] N. Szpak, *On the problem of "spontaneous pair creation" in strong electric fields*, Nucl. Instrum. Meth. B 205 (2003), 30-35.
- [16] A. Maquet and R. Grobe, *Atoms in strong laser fields : challenges in relativistic quantum mechanics*, J. Mod. Opt. 49 (2002), 2001-2018.
- [17] Y. I. Salamin, S. X. Hu, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, *Relativistic high-power laser-matter interactions*, Phys. Rep. 427 (2006), 41-155.
- [18] V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau, T. Planchon, T. Matsuoka, A. Maksimchuk, J. Nees, G. Cheriaux, G. Mourou, and K. Krushelnick, *Ultra-high intensity-300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate*, Opt. Express 16 (2008), 2109-2114.
- [19] S. W. Bahk, P. Rousseau, T. A. Planchon, V. Chvykov, G. Kalintchenko, A. Maksimchuk, G. A. Mourou, and V. Yanovsky, *Generation and characterization of the highest laser intensities (10^{22} W/cm²)*, Opt. Lett. 29 (2004), 2837-2839.
- [20] G. A. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov, *Optics in the relativistic regime*, Reviews of Modern Physics 78 (2006), 309-371.
- [21] R. P. Feynman, *Space-time approach to quantum electrodynamics*, Phys. Rev. 76 (1949), 769-789.
- [22] A. Ringwald, *Pair production from vacuum at the focus of an X-ray free electron laser*, Phys. Lett. B 510 (2001), 107-116.
- [23] L. S. Brown and T. W. B. Kibble, *Interaction of intense laser beams with electrons*, Phys. Rev. 133 (1964), A705-A719.
- [24] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, *Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field. I*, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 46 (1964), 776-796, [Sov. Phys. JETP 19, 529 (1964)].
- [25] Szymanowski C, Véniard V, Taïeb R, Maquet A and Keitel C H 1997 Phys. Rev. A 56 3846-59
- [26] Attaourti Y and Manaut B 2003 Phys. Rev. A 68 067401
- [27] Klein, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Z. Physik 37, 895-906 (1926).
- [28] Gordon, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. Z. Physik 40, 117-133 (1926).
- [29] J. Kudar. Zur vierdimensionalen formulierung der undulatorischen mechanik. Annalen der Physik, 386(22) :632-636, 1926.
- [30] Fock, V. Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. Z. Physik 39, 226-232 (1926).
- [31] Fock, V. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. Z. Physik 38, 242-250 (1926).
- [32] T. De Donder and H. van den Dungen. La quantification déduite de la gravifique einsteinienne. Comptes rendus, 183 :22-24, 1926.
- [33] E. Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. Annalen der physik, 385(13) :437-490, 1926.
- [34] G. Grössing. Derivation of the schrödinger equation and the klein-gordon equation from first principles. arXiv preprint quant-ph/0205047, 2002.
- [35] Dirac Paul Adrien Maurice. 1928 The quantum theory of the electron. Proc. R. Soc. Lond. A 117 :610-624.
- [36] S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Courier Corporation, 2011

- [37] Volkov D M 1935 On a class of solutions of the Dirac equation *Z. Phys.* **94** 250
- [38] Yannick Hinschberger, Etude théorique des effets relativistes induits par une impulsion lumineuse ultra-rapide dans la matière, Thèse doctorale, université de Strasbourg, France, 2012.
- [39] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [40] F. Abe et al. (CDF Collaboration), *Observation of Top Quark Production in $p\bar{p}$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab*, Physical Review Letters 74, 2626 (1995).
- [41] S. Abachi et al. (D0 Collaboration), *Observation of the Top Quark*, Physical Review Letters 74, 2632 (1995).
- [42] H. R. Reiss, *Absorption of light by light*, J. Math. Phys. 3 (1962), 59-67.
- [43] H. R. Reiss, *Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system*, Phys. Rev. A 22 (1980), 1786-1813.
- [44] H. R. Reiss and V. P. Krainov, *Generalized Bessel functions in tunneling ionization*, J. Phys. A 36 (2003), 5575-5585.
- [45] G. Dattoli, C. Chiccoli, S. Lorenzutta, G. Maino, M. Richetta, and A. Torre, *Advances on the theory of generalized Bessel functions and applications to multiphoton processes*, J. Sci. Comp. 8 (1993), 69-109.
- [46] G. Dattoli, C. Chiccoli, S. Lorenzutta, G. Maino, and A. Torre, *Generalized Bessel functions of the Anger type and applications to physical problems*, J. Math. Anal. App. 184 (1994), 201-221.
- [47] G. Dattoli, L. Giannessi, L. Mezi, and A. Torre, *Theory of generalized Bessel functions*, Nuovo Cim. 105 B (1990), 327-348.
- [48] G. Dattoli, A. Torre, S. Lorenzutta, G. Maino, and C. Chiccoli, *Theory of generalized Bessel functions II*, Nuovo Cim. 106 B (1991), 21-51.
- [49] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, *Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field. I*, Zh. Éksp. Teor. Fiz. 46 (1964), 776-796, [Sov. Phys. JETP 19, 529 (1964)].
- [50] W. A. Paciorek and G. Chapuis, *Generalized Bessel functions in incommensurate structure analysis*, Acta Cryst. A50 (1994), 194-203.
- [51] Greiner W and Reinhardt J 2009 *Quantum Electrodynamics* (Fourth Edition, Springer)
- [52] Kessler J 1985 *Polarized Electrons* vol 1, ed G Ecker et al (2nd Edition, Springer)
- [53] Grozin A G 1997 *Using Reduce in High Energy Physics* (Cambridge : Cambridge University Press)
- [54] El Idrissi M, Taj S, Manaut B, Attaourti Y and Oufni L 2013 *J. At. Mol. Sci.* **4** 95-104
- [55] Reiss H R 2010 Foundations of Strong-Field Physics. In : Yamanouchi K. (eds) Lectures on Ultrafast Intense Laser Science 1. Springer Series in Chemical Physics, vol 94. (Springer, Berlin, Heidelberg).
- [56] Kumita T *et al* 2006 Observation of the nonlinear effect in relativistic Thomson scattering of electron and laser beams *Laser Phys.* **16** 267
- [57] Burke D L *et al* 1997 Positron production in multiphoton light-by-light scattering *Phys. Rev. Lett.* **79** 1626
- [58] Bula C *et al* 1996 Observation of nonlinear effects in Compton scattering *Phys. Rev. Lett.* **76** 3116
- [59] Faisal F H M 1987 *Theory of Multiphoton Processes* (New York : Plenum)

- [60] Mittleman M H 1993 *Introduction to the Theory of Laser-Atom Interactions* (New York : Plenum)
- [61] Fedorov M V 1997 *Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field* (Singapore : World Scientific)
- [62] Panek P, Kaminski J Z and Ehlotzky F 2002 Laser-induced Compton scattering at relativistically high radiation powers *Phys. Rev. A* **65** 022712
- [63] Panek P, Kaminski J Z and Ehlotzky F 2002 Relativistic electron-atom scattering in an extremely powerful laser field : Relevance of spin effects *Phys. Rev. A* **65** 033408
- [64] Roshchupkin S P 1994 The interference effect in the scattering of an electron by a nucleus in the field of two plane electromagnetic waves *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **106** 102
- [65] Roshchupkin S P 1996 The effect of a strong light field on the scattering of an ultrarelativistic electron by a nucleus *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **109** 337
- [66] Roshchupkin S P and Tsybul'nik V A 2006 The light amplification effect in the Coulomb scattering of nonrelativistic electrons in a two-mode laser field *Laser Phys. Lett.* **3** 362
- [67] Roshchupkin S P and Voroshilo A I 1997 Stimulated bremsstrahlung in electron-nucleus scattering in a multifrequency electromagnetic field *Laser Phys.* **7** 873
- [68] Lebed' A A and Roshchupkin S P 2008 The influence of a pulsed light field on the electron scattering by a nucleus *Laser Phys. Lett.* **5** 437
- [69] Lebed' A A 2015 Mott scattering in a field of two pulsed laser waves *Laser Phys.* **25** 055301
- [70] Hrouz E, Taj S, Chahboune A, El Idrissi M and Manaut B 2017 On the Coulomb effect in laser-assisted proton scattering by a stationary atomic nucleus *Laser Phys.* **27** 066003
- [71] Panek P, Kaminski J Z and Ehlotzky F 2004 Analysis of resonances in Møller scattering in a laser field of relativistic radiation power *Phys. Rev. A* **69** 013404
- [72] Denisenko O I and Roshchupkin S P 1999 Resonant scattering of an electron by a positron in the field of a light wave *Laser Phys.* **9** 1108
- [73] Roshchupkin S P, Voroshilo A I and Padusenko E A 2010 One photon annihilation of an electron-positron pair in the field of pulsed circularly polarized light wave *Laser Physics* **20** 1679
- [74] Dahiri I, Jakha M, Mouslih S, Manaut B, Taj S and Attaourti Y 2021 Elastic electron-proton scattering in the presence of a circularly polarized laser field *Laser Phys. Lett.* **18** 096001
- [75] Liu A H and Li S M 2014 Relativistic electron scattering from a freely movable proton in a strong laser field *Phys. Rev. A* **90** 055403
- [76] Wang N, Jiao L and Liu A 2019 Relativistic electron scattering from freely movable proton/ μ^+ in the presence of strong laser field *Chin. Phys. B* **28** 093402
- [77] Baouahi M, Ouali M, Jakha M, Mouslih S, Attaourti Y, Manaut B, Taj S and Benbrik R 2021 Laser-assisted kaon decay and CPT symmetry violation *Laser Phys. Lett.* **18** 106001
- [78] Jakha M, Mouslih S, Taj S and Manaut B 2021 Laser effect on the final products of Z-boson decay *Laser Phys. Lett.* **18** 016002
- [79] Ouhammou M, Ouali M, Taj S and Manaut B 2021 Higgs-strahlung boson production in the presence of a circularly polarized laser field *Laser Phys. Lett.* **18** 076002
- [80] Neddermeyer S H and Anderson C D 1937 Note on the nature of cosmic-ray particles *Phys. Rev.* **51** 884
- [81] Backenstoss G, Hyams B D, Knop G, Marin P C and Stierlin U 1963 Scattering of 8-GeV μ mesons on electrons *Phys. Rev.* **129** 2759

- [82] Kirk T B W and Neddermeyer S H 1968 Scattering of high-energy positive and negative muons on electrons *Phys. Rev.* **171** 1412
- [83] Jain P L and Wixon N J 1969 Scattering of high-energy positive and negative muons on electrons *Phys. Rev. Lett.* **23** 715
- [84] Abbiendi G *et al* 2017 Measuring the leading hadronic contribution to the muon $g-2$ via μe scattering *Eur. Phys. J. C* **77** 139
- [85] Kaiser N 2010 Radiative corrections to lepton-lepton scattering revisited *J. Phys. G* **37** 115005
- [86] D'Ambrosio G 1983 Electron muon scattering in the electroweak unified Theory *Lett. Nuovo Cim.* **38** 593
- [87] Eriksson K E, Larsson B and Rinander G A 1963 Radiative corrections to muon-electron scattering *Nuovo Cimento* **30** 1434
- [88] Alacevich M, Carloni Calame C M, Chiesa M, Montagna G, Nicrosini O and Piccinini F 2019 Muon-electron scattering at NLO *J. High Energy Phys.* **02** 155
- [89] Du W Y, Zhang P F and Wang B H 2018 New phenomena in laser-assisted scattering of an electron by a muon *Front. Phys.* **13** 133401
- [90] Du W Y, Wang B H and Li S M 2018 Nonlinear effects in the laser-assisted scattering of a positron by a muon *Mod. Phys. Lett. B* **32** 1850058
- [91] Nedoreshta V N, Voroshilo A I and Roshchupkin S P 2008 Resonant scattering of an electron by a muon in the field of light wave *Eur. Phys. J. D* **48** 451
- [92] Nedoreshta V N, Voroshilo A I and Roshchupkin S P 2007 Nonresonant scattering of an electron by a muon in the field of plane electromagnetic wave *Laser Phys. Lett.* **4** 872
- [93] Padusenko E A, Roshchupkin S P and Voroshilo A I 2009 Nonresonant scattering of relativistic electron by relativistic muon in the pulsed light field *Laser Phys. Lett.* **6** 242
- [94] Padusenko E A, Roshchupkin S P and Voroshilo A I 2009 Nonresonant scattering of non-relativistic electron by nonrelativistic muon in the pulsed light field *Laser Phys. Lett.* **6** 616
- [95] Greiner W and Reinhardt J 2009 *Quantum Electrodynamics* (Berlin : Springer)
- [96] Marleau L. Introduction à la physique des particules, 2019.
- [97] Victor Hess. *On the Observations of the Penetrating Radiation during Seven Balloon Flights.* 2018.
- [98] Per Carlson. *A century of cosmic rays.* Phys. Today, 65(2) :30, 2012
- [99] Peter Galison. *The discovery of the muon and the failed revolution against quantum electrodynamics.* Centaurus, 26(3) :262–316, 1982.
- [100] Anselmino M, Efremov A and Leader E 1995 *Phys. Rep.* **261** 1-124
- [101] Steven Bass D 2009 *Mod. Phys. Lett. A* **24** 1087-101
- [102] Prescott C Y *et al* 1978 *Phys. Lett. B* **77** 347-52
- [103] Labzowsky L N, Nefiodov A V, Plunien G, Soff G, Marrus R and Liesen D 2001 *Phys. Rev. A* **63** 054105
- [104] Bol'shedvorsky E, Polityko S and Misaki A 2000 *Prog. Theor. Phys.* **104** 769-75
- [105] Shishkina T V and Bondarev A L 2010 Study of polarized effects in Compton scattering *Proc. of the F&ANS-2010 Conf. -School* 80-87
- [106] Kotkin G L, Polityko S I and Serbo V G 1998 *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A* **405** (Elsevier) 30-38
- [107] Lipps F W and Tolhoek H A 1954 *Physica* **20** 85-98

- [108] Berestetskii V B, Lifshitz E M and Pitaevskii L P 1982 *Quantum Electrodynamics* (vol 4, 2nd Edition, Pergamon Press, Oxford) chapter 10 pp 359-66
- [109] Knights P, Ryburn F, Tungate G and Nikolopoulos K 2018 *Eur. J. Phys.* **39** 025203
- [110] Wightman A 1948 *Phys. Rev.* **74** 1813-17
- [111] Manaut B, Attaourti Y, Taj S and Elhandi S 2009 *Phys. Scr.* **80** 025304
- [112] Manaut B, Taj S and Attaourti Y 2005 *Phys. Rev. A* **71** 043401
- [113] B. Manaut, *Etude théorique de la diffusion relativiste de particules chargées en présence d'un champ laser intense*, Thèse Nationale, 2005.
- [114] Furry W H 1951 On bound states and scattering in positron theory *Phys. Rev.* **81** 115
- [115] Berestetskii V B, Lifshitz E M and Pitaevskii L P 1982 *Quantum Electrodynamics* (Oxford U.K. : Butterworth-Heinemann)
- [116] Mertig R, Böhm M and Denner A 1991 Feyn Calc - Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes *Comput. Phys. Commun.* **64** 345
- [117] Shtabovenko V, Mertig R and Orellana F 2016 New developments in FeynCalc 9.0 *Comput. Phys. Commun.* **207** 432
- [118] Shtabovenko V, Mertig R and Orellana F 2020 FeynCalc 9.3 : New features and improvements *Comput. Phys. Commun.* **256** 107478
- [119] Zhong C L, Qiao B, Xu X R, Zhang Y X, Li X B, Zhang Y, Zhou C T, Zhu S P and He X T 2020 Intense circularly polarized attosecond pulse generation from solid targets irradiated with a two-color linearly polarized laser *Phys. Rev. A* **101** 053814