

# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés, dans le cadre d'une cotutelle, au sein des laboratoires LIMATI de la faculté des sciences et techniques de Béni Mellal, Maroc et LIS de l' Université de Caen Normandie, Ecole Nationale supérieure d'Ingénieurs de Caen, France.

Je souhaite remercier en tout premier lieu mes directeurs de la thèse, Monsieur **Mathieu POULIQUEN**, Professeur à l'université de Caen Normandie, et Monsieur **Said SAFI**, Professeur à la faculté polydisciplinaire de Béni Mellal, pour tout ce qu'ils m'ont apporté au cours de ces années de thèse, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Merci pour leurs conseils, leur aide et leur soutien. J'ai véritablement adoré travailler sous leur direction, et j'espère vivement que notre collaboration se poursuivra dans le futur.

J'adresse mes remerciements également à mon Co-encadrant Monsieur **Miloud Frikel** , Professeur à l'Ecole Nationale supérieure d'Ingénieurs de Caen, pour son patience, son aide et son humour.

Je présente mes remerciements au membres de jury, les professeurs **S. CHABAA**, **M. KIEFER**, **R. OUVRARD**, **B. BOUIKHALENE** et **J. ANTARI** pour avoir accepté de rapporter et de juger ce travail de thèse.

Il m'est agréable de remercier tous les professeurs qui m'ont enrichis par beaucoup de connaissances scientifiques et éducatives durant toute ma formation, les professeurs des deux laboratoire LIS et LIMATI. Je remercie bien sûr tous les doctorants côtoyés pendant cette thèse : **Tristan**, **Ali**, **Xue**, **Rachid**, **José Luis**, **Hassan**, **Leticia**, **Guillaume**.

J'adresse un merci a tous mes amis qui m'ont encouragé durant cette aventure et particulièrement **Hassan LAMSAADI** pour son soutien pendant mes différents séjours en France.

Enfin, je n'oublie pas mes parents, mes frères et ma soeur pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Je dédie ce travail à l'âme de ma grande mère **Oumlaid SABER** et mon ami **Toufik OUIAT** qui nous a quitté à la fin de l'année précédente.

# Liste des publications

## Listes des articles acceptés et publiés

### Articles de revue

- R1 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "Recursive Identification of IIR System Using Binary Input/Output Measurements", International Journal of Modelling, Identification and Control (accepté).
- R2 **H. Oualla**, R. Fateh, A. Darif, S. Safi, M. Pouliquen et M. Frikel "Channel Identification Based on Cumulants, Binary Measurements and Kernels ", Systems, 9(2), 46, 2021.

### Articles de conférence

- C1 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, A. Mestrah, " Closed-loop system parametric identification based on binary measurement on the input and the output", "IEEE/IFAC International Conference on Control Decision and Information Technologies", Istanbul, 2022 (IEEE-IFAC CoDIT'2022).
- C2 A. Mestrah, M. Pouliquen, E. Pigeon et **H. Oualla**, "Subspace Identification from Binary Output Measurements", IEEE/IFAC International Conference on Control Decision and Information Technologies", Istanbul, 2022 (IEEE-IFAC CoDIT'2022).
- C3 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, " Identification of closed-loop systems using binary measurement on the output", International Conference on Systems and Control, Caen, 2021 (IEEE ICSC'2021).
- C4 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel, S. Safi et T. Bonargent, "Spectral Analysis for System Identification from Input/Output Binary Measurements", European Control Conference, Saint Petersburg, 2020 (IEEE ECC'2020).
- C5 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "Comparison of algorithms for real-time identification of FIR systems from binary measurements on the output", 2020 28th Mediterranean Conference on Control and Automation, Saint Raphaël, 2020 (IEEE MED'2020).
- C6 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "Comparison of algorithms for identification of IIR systems from binary measurements on the output", International Conference of Computer Science and Renewable Energies, Agadir, 2020.
- C7 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, " Spectrum estimation for

time-series based on binary data", International Colloquium on Signal, Automatic Control and Telecommunications, Caen, 2020.

- C8 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "Étude comparative des méthodes d'identification récursives des systèmes FIR à sortie binaire", Journées Identification et Modélisation Expérimentale, Caen, 2020.

## Listes des articles soumis

### Articles de revue

- R3 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "Recursive System Identification Method From Binary Input/Output Measurements", soumis à la revue "Asian Journal of Control".
- R4 **H. Oualla**, M. Pouliquen, M. Frikel et S. Safi, "An Identification Algorithm for IIR Systems from Input and Output Binary Measurements", soumis à la revue "Journal of the Franklin Institute".

# Table des matières

Remerciements . . . . .	i
Liste des publications . . . . .	ii
Table des matières . . . . .	iv
Abréviations et Symboles . . . . .	vi
Résumé . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Méthodes d'identification des systèmes à base de données binaires</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Méthodes d'identification des systèmes RIF à sortie binaire . . . . .	6
1.2.1 Méthodes récursives . . . . .	7
1.2.2 Méthodes non récursives . . . . .	15
1.3 Méthodes d'identification des systèmes RII à sortie binaire ou quantifiée	16
1.3.1 Algorithme de Wang et al. - 2006 - [81] . . . . .	18
1.3.2 Algorithme de Liu et al. - 2011 - [52] . . . . .	19
1.3.3 Algorithme de Li et al. - 2012 - [50] . . . . .	20
1.3.4 Algorithme de Marelli et al. - 2013 - [55] . . . . .	20
1.3.5 Algorithme de Song et al. - 2018 - [72] . . . . .	21
1.3.6 Algorithme de Pouliquen et al. - 2019 - [66] . . . . .	21
1.3.7 Méthodes particulières . . . . .	22
1.3.8 Bilan . . . . .	22
1.4 Méthodes d'identification des systèmes RIF à entrée et sortie binaires	23
1.4.1 Algorithme de Leong et al. - 2018 - [49] . . . . .	24
1.4.2 Algorithme de Pouliquen et al. - 2020 - [67] . . . . .	25
1.5 Conclusion . . . . .	25
<b>2 Identification en boucle ouverte des systèmes RIF à base des me-</b>	
<b>sures binaires de l'entrée et de la sortie</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 Problématique et notations . . . . .	28
2.3 Analyse spectrale . . . . .	30
2.4 Identification paramétrique récursive . . . . .	33
2.4.1 Algorithme récursif . . . . .	34
2.4.2 Algorithme récursif simplifié . . . . .	36
2.4.3 Analyse des algorithmes 2 et 3 . . . . .	37

2.5	Simulations et résultats . . . . .	44
2.5.1	Données d'identification . . . . .	44
2.5.2	Estimation de l'amplitude de la réponse fréquentielle par l'Algorithme 1 (page 33) . . . . .	44
2.5.3	Résultats d'identification paramétrique : Algorithme 2 (page 36) . . . . .	48
2.5.4	Résultats d'identification paramétrique : Algorithme 3 (page 37) . . . . .	53
2.6	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Identification en boucle ouverte des systèmes RII à base des mesures binaires de l'entrée et de la sortie</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	60
3.2	Problématique et notations . . . . .	60
3.3	Algorithme Batch . . . . .	62
3.3.1	Description de l'algorithme . . . . .	62
3.3.2	Analyse de la variance et de la convergence . . . . .	65
3.4	Algorithme récursif . . . . .	71
3.4.1	Description de l'algorithme . . . . .	71
3.4.2	Analyse de l'algorithme . . . . .	72
3.5	Simulations et résultats . . . . .	75
3.5.1	Données d'identification . . . . .	75
3.5.2	Résultats d'identification batch : Algorithme 4 (page 64) . . . . .	75
3.5.3	Résultats de l'identification récursive : Algorithme 5 (page 72) . . . . .	81
3.6	Conclusion . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Identification en boucle fermée des systèmes à partir de mesures binaires</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	88
4.2	Identification en boucle fermée des systèmes ayant une sortie binaire . . . . .	88
4.2.1	Approche indirecte . . . . .	89
4.2.2	Approche indirecte basée sur l'algorithme de l'erreur de sortie en boucle fermée . . . . .	90
4.3	Identification en boucle fermée des systèmes à base de mesures binaire de l'entrée et de la sortie . . . . .	95
4.3.1	Approche indirecte . . . . .	96
4.3.2	Approche indirecte basée sur la variable instrumentale . . . . .	98
4.4	Simulations et résultats . . . . .	101
4.4.1	Données d'identification . . . . .	101
4.4.2	Système à sortie binaire . . . . .	101
4.4.3	Système à entrée et sortie binaires . . . . .	109
4.5	Conclusion . . . . .	116
	<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>118</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Abréviations et Symboles

## Liste des abréviations

RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie
SVM	Support Vector Machine
EM	Expectation Maximization
SAAWET	Stochastic Approximation Algorithms With Expanding Truncations
F-OE-OBE	Filtered Output Error Optimal Bounding Ellipsoid
i.i.d	indépendantes et identiquement distribuées

## Liste des symboles

$u_t$	signal d'entrée
$y_t$	signal de sortie
$x_t$	signal binaire sur l'entrée
$z_t$	signal binaire sur la sortie
$r_t$	l'excitation de la boucle fermée
$R_{aa}(j)$	la fonction d'auto-corrélation, où $j$ représente le décalage temporel
$R_{ab}(j)$	la fonction d'inter-corrélation entre $a_t$ et $b_t$
$\overline{R_{aa}}(j)$	la fonction d'auto-corrélation normalisée
$\overline{R_{ab}}(j)$	la fonction d'inter-corrélation normalisée entre $a_t$ et $b_t$
$\sigma_a^2$	la variance de $a_t$
$\theta^*$	vecteur des paramètres du système
$\widehat{\theta}$	vecteur des paramètres du modèle (paramètres estimés)
$i$	nombre complexe

# Résumé

Cette thèse est consacrée à l'identification des systèmes à base de données binaires. Dans un premier temps, une présentation succincte de l'ensemble des méthodes d'identification des systèmes basé sur l'utilisation des données binaires existant dans la littérature est donnée. Dans la suite nous nous sommes intéressé au problème d'identification en boucle ouverte des systèmes à sortie et entrée binaires. Nous proposons des méthodes permettant l'identification des systèmes RIF et plus complexes les RII ayant une entrée et sortie binaires. Ces méthodes sont analysées et testées par des exemples numériques. Dans le reste de ce travail, nous proposons des premières solutions aux problèmes d'identification en boucle fermée des systèmes à base de données binaires. Les premières solutions sont dédiées aux systèmes à sortie binaire, l'excitation de la boucle fermée est supposée être à haute résolution. Enfin, deux méthodes sont proposées pour les systèmes en boucle fermée à sortie et entrée binaires. Ces solutions sont testées sur des exemples numériques pour mesurer leurs performances.

**Mots clés :** Identification, boucle ouverte/fermée, système à sortie binaire, système à entrée/sortie binaire.

# Abstract

This thesis is devoted to the identification of systems based on binary data. First, a brief presentation of all the methods of identification of systems based on the use of binary data existing in the literature is given. In the following, we are interested in the problem of open loop identification of systems with binary output and input. We propose methods for the identification of FIR systems and more complex IIR systems with binary input and output. These methods are analyzed and tested by numerical examples. In the rest of this work, we propose first solutions to the problems of closed-loop identification of systems based on binary data. The first solutions are dedicated to binary output systems, the closed loop excitation is assumed to be high resolution. Finally, two methods are proposed for closed loop systems with binary output and input. These solutions are tested on numerical examples to quantify their performances.

**Key words :** Identification, open loop, closed loop, binary output system, binary input/output system.



# Introduction générale

## Contexte et motivation

Cette thèse étudie le problème de modélisation des systèmes dynamiques à partir de données binaires. Ce problème spécifique de modélisation se pose notamment dans les systèmes de transmission numérique, dans les réseaux et dans les systèmes embarqués. Un premier exemple concerne les canaux de communication. Dans un système de transmission numérique, les signaux doivent être transmis à travers des canaux de communication. Les communications numériques rendent la quantification nécessaire pour répondre aux problèmes de limitation de la bande passante. Le canal décrit le support physique de la transmission. Un second exemple est le cas des systèmes embarqués. Les dispositifs embarqués peuvent traiter, stocker et échanger des informations, ils sont cependant limités, dans leurs capacités du fait de contraintes de taille. Dans certaines applications il peut-être intéressant, voire nécessaire, de quantifier les données directement au niveau du dispositif embarqué afin de préserver les capacités de la mémoire et de la batterie. Ce choix technologique est notamment envisagé dans [2] et [3] pour un dispositif portable (figure 1).



Figure 1 – Dispositif embarqué décrit dans [3] et utilisé pour la reconnaissance d'activités via des données binaires.

D'autres applications dans différents domaines pour lesquelles, les données sont binaires, sont présentées dans [43], [79] et [84].

L'identification de systèmes n'est pas un domaine de recherche nouveau, elle est développée depuis des décennies et consiste à chercher un modèle pour un système donné à partir des données expérimentales. La procédure d'identification est composée généralement de trois éléments principaux : les données, la structure du modèle et le critère d'identification. De nombreux algorithmes sont disponibles dans la littérature pour traiter le problème d'identification lorsque les données sont à haute résolution. Ces méthodes diffèrent, essentiellement, sur la structure du modèle (linéaire ou non-linéaire, fonction de transfert ou représentation d'état, temps discret ou temps continu, etc.) ou sur le critère d'identification (erreur de prédiction, variable instrumentale, etc.). Lorsque les données sont binaires, le cadre d'application de ces méthodes n'est plus respecté et par conséquent elles ne sont malheureusement plus applicables.

Il convient de noter que l'identification des systèmes à base de données binaires ou quantifiées a suscité un engouement et un développement important dans ces dernières années. Différentes solutions intéressantes ont déjà été développées et sont disponibles dans la littérature pour l'identification des systèmes à base de données binaires. Ces solutions peuvent être regroupées en deux grandes familles : les méthodes dédiées à l'identification des systèmes à sortie binaire et les méthodes d'identification des systèmes à sortie et entrée binaires. La plupart des solutions proposées dans la littérature sont dédiées à la première famille. Comme nous verrons dans l'état d'art des méthodes d'identification des systèmes basées sur des données binaires, il émerge les constats suivants :

- L'identification des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires n'a pas encore reçu suffisamment d'attention. La limitation de la qualité de données binaires pose une grande difficulté sur l'identification de ce type de systèmes. Par conséquent, peu de méthodes permet l'identification des systèmes ayant une sortie et une entrée binaires.
- Ces premières méthodes ont ainsi été développées pour l'identification des systèmes en boucle ouverte, à notre connaissance et jusqu'à la rédaction de ce rapport, il n'y a aucune solution dans la littérature pour l'identification en boucle fermée des systèmes à base de données binaires. Cependant, certains systèmes nécessitent d'être utilisés en boucle fermée, ce peut être pour des raisons d'instabilité en boucle ouverte, ou alors pour un bon fonctionnement du système, ou bien pour des raisons de sécurité.

## Objectifs

Dans ce contexte, les objectifs de la thèse sont les suivants :

- D'une part, ce mémoire s'inscrit dans la continuité de ces premières recherches effectuées sur l'identification en boucle ouverte des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires, présentée dans [67]. En effet, notre premier objectif

est d'enrichir la littérature d'identification des systèmes à sortie et entrée binaires, par le développement de nouvelles méthodes.

- D'autre part, l'importance de l'identification en boucle fermée a été largement reconnue ces dernières années et des progrès très importants ont été réalisés dans le cas des systèmes dont les données sont à haute résolution. Comme l'identification en boucle fermée des systèmes à base de données binaires n'est pas encore traitée dans la littérature, il semble alors intéressant de développer des méthodes dans ce contexte, du fait que dans de nombreuses situations l'identification en boucle ouverte est difficile ou simplement irréalisable.

### Organisation de ce mémoire

Ce manuscrit est une présentation détaillée de certains travaux de recherche déjà publiés (voir la liste des publications), et d'autres sont en cours de publication. La présente thèse est constituée de quatre chapitres que nous décrivons, brièvement, ici :

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu des méthodes d'identification basées sur des informations binaires. L'approche abordée consiste en l'étude des différentes méthodes paramétriques. L'étude commence par les méthodes dédiées à l'identification des systèmes RIF à sortie binaire et ensuite l'étude des méthodes dédiées à l'identification des systèmes RII à sortie binaire. Enfin, nous abordons les méthodes d'identification des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires.

Nous consacrons le deuxième chapitre à l'identification des systèmes linéaires ayant une entrée et une sortie binaires, dont la partie linéaire est modélisée par un filtre RIF. Nous proposons, ici, un algorithme non paramétrique et deux algorithmes paramétriques pour estimer la réponse impulsionnelle du système, ces derniers permettant l'identification en temps réel. Une étude de convergence est proposée pour les algorithmes paramétriques. Le développement de ces approches est basé sur l'estimation des corrélations entre les signaux d'entrée et de sortie binaires. À travers des simulations, nous évaluons les performances des algorithmes proposés.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une extension de l'approche développée dans le chapitre précédent à un modèle plus complexe, le modèle RII. Deux algorithmes paramétriques dédiés à l'identification des systèmes RII ayant une entrée et une sortie binaires sont proposés : le premier est un algorithme batch, le deuxième est en temps réel. Nous proposons ensuite l'analyse de convergence de ces algorithmes et l'analyse des performances du premier. Des exemples numériques sont donnés pour illustrer leurs performances.

Le quatrième chapitre traite le problème d'identification en boucle fermée des systèmes à partir de données binaires, systèmes ayant une sortie binaire et puis systèmes ayant une entrée et une sortie binaires. Pour les systèmes à sortie binaire, nous proposons deux approches indirectes permettant leur identification en boucle

fermée. Ces approches présentent les premières contributions à ce problème qui n'est pas traité dans la littérature. La première approche consiste en l'utilisation d'un des algorithmes existants pour l'identification de la boucle fermée à partir de l'excitation et la sortie binaire. La deuxième approche permet l'identification directe des paramètres du système, elle est basée sur l'erreur de sortie en boucle fermée. Dans le même esprit des systèmes à sortie binaire, nous proposons deux approches dédiées à l'identification des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires. La première approche est similaire à celle des systèmes à sortie binaire, elle consiste en l'utilisation de l'algorithme proposé dans le chapitre 3 pour l'estimation de boucle fermée en passant ensuite par la réduction du modèle. La deuxième approche est basée sur le principe de la variable instrumentale, elle permet l'estimation directe d'un modèle d'ordre réduit. Nous évaluons, dans la partie simulation, les approches proposées pour montrer leur efficacité.

La figure 2 résume toutes les différentes caractéristiques des contributions de cette thèse détaillées précédemment.

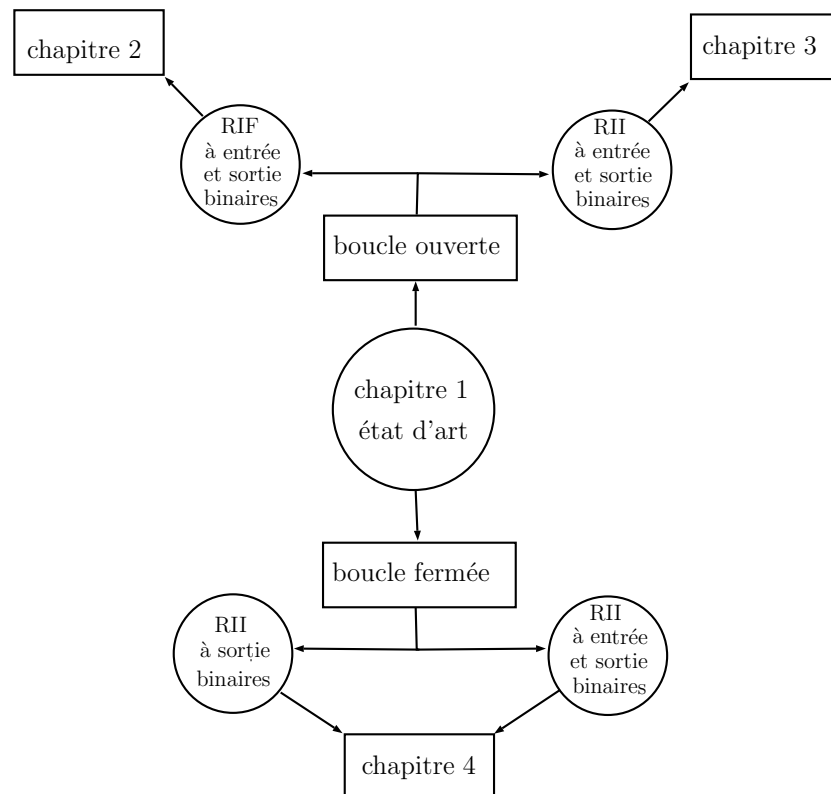


Figure 2 – Contributions de la thèse

Nous terminerons ce document par une conclusion générale contenant un récapitulatif de nos différentes contributions. Des perspectives pour de futurs travaux seront données en fin de ce document.

# Chapitre 1

## Méthodes d'identification des systèmes à base de données binaires

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'état de l'art des méthodes d'identification lorsque la connaissance sur la sortie est binaire. Nous pouvons distinguer trois familles de méthodes, ces trois familles sont décrites dans les sections suivantes. La section 1.2 présente les méthodes d'identification à sortie binaire pour les systèmes RIF. La section 1.3 présente la famille des méthodes d'identification des systèmes RII à sortie binaire. Dans la section 1.4 nous décrivons l'ensemble des méthodes dédiées à l'identification de systèmes à entrée et sortie binaires. La section 1.5 conclut ce chapitre.

Les différents algorithmes d'identification cités, ci-après, sont présentés dans l'ordre chronologique.

## 1.2 Méthodes d'identification des systèmes RIF à sortie binaire

Dans cette partie, nous nous intéressons aux méthodes dédiées à l'identification des systèmes RIF à sortie binaire.

Nous considérons un système défini, ci dessous, et représenté sur la figure 1.1.

$$y_t = G^*(q)u_t \quad (1.1)$$

où  $u_t$  est l'entrée et  $y_t$  représente la sortie.  $G^*(q)$  est sa fonction de transfert :

$$G^*(q) = \sum_{k=0}^n g_k^* q^{-k}$$

avec  $n$  est l'ordre du système et  $q^{-1}$  représente l'opérateur retard tel que :  $q^{-1}u_t = u_{t-1}$ . Les  $g_k$  représentent les termes de la réponse impulsionnelle.  $y_t$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y_t = \phi_t^T \theta^* \quad (1.2)$$

où les vecteurs  $\theta^* \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\phi_t \in \mathbb{R}^{n+1}$  sont donnés par :

$$\theta^* = \begin{pmatrix} g_0^* \\ \vdots \\ g_n^* \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

et

$$\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \vdots \\ u_{t-n} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Le signal de sortie du système est supposé inconnu. Les seuls échantillons disponibles sont ceux de  $z_t$  définis par :

$$z_t = Q_C(y_t + v_t^y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t + v_t^y \geq C \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $Q_C(\cdot)$  représente un capteur binaire de seuil  $C$ .  
 $v_t^y$  est le bruit sur la sortie du système.

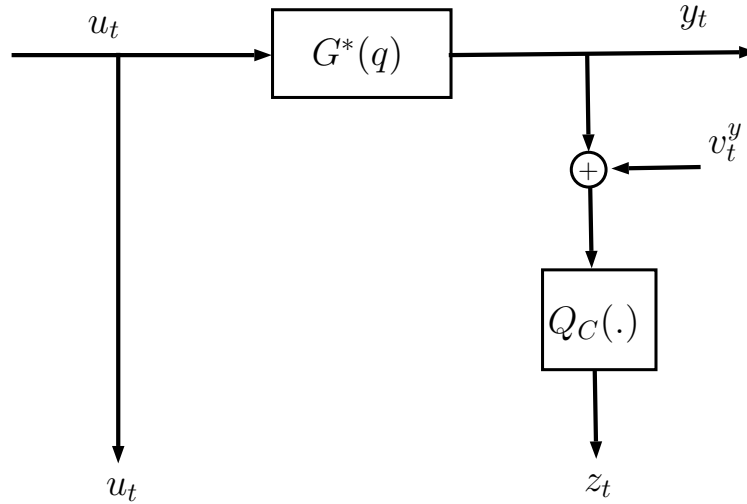


Figure 1.1 – Système RIF à sortie binaire

Par ailleurs, les notations suivantes seront utilisées par la suite :

- $\hat{\theta}_t$  est l'estimation de  $\theta^*$  à l'instant  $t$ .
- $\hat{y}_{t/t-1} = \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}$  et  $\hat{z}_{t/t-1} = Q_C(\hat{y}_{t/t-1})$  sont les estimations a priori de  $y_t$  et de  $z_t$ .
- $\hat{y}_{t/t} = \phi_t^T \hat{\theta}_t$  et  $\hat{z}_{t/t} = Q_C(\hat{y}_{t/t})$  sont les estimations a posteriori de  $y_t$  et de  $z_t$ .
- $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.
- $\mathcal{E}\{\cdot\}$  est l'espérance mathématique.

## 1.2.1 Méthodes récursives

### 1.2.1.1 Algorithme de Wang et al. - 2003 - [84]

Le premier algorithme proposé dans la littérature est celui présenté dans [84] en 2003. Cet algorithme est basé sur les hypothèses suivantes :

- $C$  est supposé connu.
- L'entrée  $u_t$  est la somme d'une composante périodique de période  $(n + 1)$  et d'une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) de moyenne nulle et de variance finie.
- Le bruit  $v_t^y$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. avec une moyenne nulle et une variance finie. Sa fonction de distribution  $F(\cdot)$  est différentiable avec une densité bornée  $f(\cdot)$  et une inverse continue,  $F^{-1}(\cdot)$ , supposée connue.

L'algorithme propose l'estimation de  $\theta^*$  tous les  $(n + 1)$  échantillons. Cet algorithme est basé sur la propriété suivante :

$$\mathcal{E}\{s_t\} = \mathcal{E}\{v_t^y \geq C - \phi_t^T \theta^*\} \quad (1.6)$$

où  $s_t = \frac{1}{2}(1 - z_t)$ . Il en résulte que

$$F^{-1}(\mathcal{E}\{s_t\}) = C - \phi_t^T \theta^* \quad (1.7)$$

$$\phi_t^T \theta^* = C - F^{-1}(\mathcal{E}\{s_t\}) \quad (1.8)$$

A partir de la connaissance d'une estimation glissante de  $\mathcal{E}\{s_t\}$  sur  $(n + 1)$  échantillons, il est possible d'estimer  $\theta^*$ . Cette estimation est donnée comme suit :

$$\hat{\theta}_j = \Phi_0^{-1} \left( C \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \gamma_j \right) \quad (1.9)$$

avec :

- $\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_{t_0+1} & \cdots & \phi_{t_0+n+1} \end{pmatrix}$
- $\gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_j^1 \\ \vdots \\ \gamma_j^{n+1} \end{pmatrix}$  avec  $\gamma_j^i = F^{-1}(\zeta_j^i)$
- $\zeta_j^i = \frac{1}{j} \sum_{l=0}^{j-1} s(t_0 + l(n + 1) + i)$

Une analyse de convergence est donnée dans [84] avec notamment des résultats sur les bornes supérieure et inférieure de l'erreur d'estimation.

### 1.2.1.2 Algorithme de Wang et al. - 2008 - [83]

L'application de l'algorithme précédent nécessite à la fois la connaissance de la fonction de distribution du bruit et du seuil, ce qui n'est pas toujours possible. Pour surmonter ces contraintes, les mêmes auteurs ont proposé trois algorithmes dans [83] en 2008. Dans le premier algorithme, le seuil  $C$  et la fonction de distribution du bruit sont supposés connus. Dans le deuxième algorithme, le seuil  $C$  est inconnu. Dans le troisième algorithme, la fonction de distribution du bruit est inconnue.

Le premier algorithme est similaire à celui de [84], il est basé sur les mêmes hypothèses.

L'algorithme propose l'estimation de  $\theta^*$  tous les  $(n + 1)$  échantillons. Si on note  $\zeta_j$  l'estimation de  $\mathcal{E}\{s_t\}$  sur une fenêtre de  $(n + 1)$  échantillons, le premier algorithme est donné par :

$$\hat{\theta}_j = \Phi_j^{-1} \left( C \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - F^{-1}(\zeta_j) \right) \quad (1.10)$$

avec :



$$\begin{aligned}
 & - \zeta_j = \zeta_{j-1} + \frac{1}{j} \left( \frac{1}{2} (1 - S_j) - \zeta_{j-1} \right) \\
 & - \Phi_j = \Phi_{j-1} + \frac{1}{j} (\Phi_j^u - \Phi_{j-1}) \\
 & - S_j = \begin{pmatrix} s_{j(n+1)-n} \\ \vdots \\ s_{j(n+1)-1} \\ s_{j(n+1)} \end{pmatrix} \\
 & - \Phi_j^u = \left( \phi_{j(n+1)-n} \quad \cdots \quad \phi_{j(n+1)-1} \quad \phi_{j(n+1)} \right)
 \end{aligned}$$

Cet algorithme fonctionne de manière récursive mais sur des fenêtres successives de  $(n + 1)$  échantillons : une estimation est donc réalisée tous les  $(n + 1)$  instants.

Dans le deuxième algorithme,  $C$  est supposé inconnue. Ce deuxième algorithme propose l'estimation de vecteur du paramètres  $\theta^*$  et du seuil  $C$ . Par conséquent le vecteur à identifier est  $\Theta^* = \begin{pmatrix} C \\ \theta^* \end{pmatrix}$ .

Les hypothèses du deuxième algorithme sont les suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est la somme d'une composante périodique de période  $(n + 2)$  et d'une séquence de variables aléatoires i.i.d de moyenne nulle et de variance finie.
- Le bruit  $v_t^y$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d de moyenne nulle et une variance finie. Sa fonction de distribution  $F(\cdot)$  est différentiable avec une densité bornée  $f(\cdot)$  et une inverse continue  $F^{-1}(\cdot)$  supposée connue.

Le deuxième algorithme est similaire au premier. Par contre, il propose l'estimation de  $\Theta^*$  tous les  $(n + 2)$  échantillons. Le deuxième algorithme est donné par :

$$\hat{\Theta}_j = \Psi_j^{-1} (F^{-1}(\zeta_j)) \quad (1.11)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 & - \zeta_j = \zeta_{j-1} + \frac{1}{j} (S_j - \zeta_{j-1}) \\
 & - \Psi_j^T = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} (\Phi_j^u)^T \right) \\
 & - \Phi_j = \Phi_{j-1} + \frac{1}{j} (\Phi_j^u - \Phi_{j-1}) \\
 & - S_j = \begin{pmatrix} s_{j(n+2)-n-1} \\ \vdots \\ s_{j(n+2)-1} \\ s_{j(n+2)} \end{pmatrix} \\
 & - \Phi_j^u = \left( \phi_{j(n+2)-n-1} \quad \cdots \quad \phi_{j(n+2)-1} \quad \phi_{j(n+2)} \right)
 \end{aligned}$$

Ces deux algorithmes reposent sur la connaissance de la fonction de distribution ou de son inverse. Dans le troisième algorithme, en plus du vecteur  $\theta^*$ , on estime la fonction de distribution  $F(\cdot)$ .

L'estimation de  $F(\cdot)$  ne peut devenir suffisamment précise que si les points de données sont suffisamment denses. Pour résoudre ce problème, la fonction de distribution

est paramétrée par un vecteur  $\alpha$ . Le troisième algorithme se compose ainsi de deux étapes : la première consiste en l'estimation récursive de  $\alpha$  à partir d'un modèle stochastique, la deuxième étape permet d'estimer le vecteur des paramètres  $\theta^*$  à partir de l'estimation de la première.

Une étude et une analyse approfondies de ces algorithmes ont été proposées dans [79].

### 1.2.1.3 Algorithmes de Jafari et al. - 2010 - [43] et Jafari et al. - 2012 -[44]

Toutes les méthodes présentées précédemment reposent sur l'utilisation de la fonction de distribution du bruit ou de son inverse. En effet, ces algorithmes ne sont pas applicables en absence du bruit, d'ailleurs, en absence du bruit, il est proposé dans [84] d'utiliser un signal de tramage pour compenser cette absence du bruit. Une autre particularité des algorithmes précédents est l'utilisation d'une séquence périodique en entrée. Les algorithmes proposées dans [43] et [44] ne dépendent pas de cette contrainte sur l'entrée.

L'algorithme présenté dans [43] a été proposé en 2010, il est basé sur les hypothèses suivantes :

- $C = 0$ .
- $\theta^*$  vérifie  $\|\theta^*\| = 1$ .
- Absence du bruit :  $v_t^y = 0$ .

L'algorithme est dérivé de l'approche des moindres carrés pondérés présentée dans [22], il est basé sur la technique du gradient stochastique :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} - \alpha_t \frac{\partial E_{t/t-1}}{\partial \hat{\theta}_{t-1}} \quad (1.12)$$

où  $E_{t/t-1}$  est l'erreur instantanée :  $E_{t/t-1} = |z_t - \hat{z}_{t/t-1}|^2 \hat{y}_{t/t-1}^2$ .

L'algorithme est donné par :

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{w_t} \left( \hat{\theta}_{t-1} - 2\alpha_t \phi_t (z_t - \hat{z}_{t/t-1})^2 \hat{y}_{t/t-1} \right) \quad (1.13)$$

où :

- La valeur initiale est :  $\hat{\theta}_0^T = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ .
- $w_t = \|\hat{\theta}_{t-1} - 2\alpha_t \phi_t (z_t - \hat{z}_{t/t-1})^2 \hat{y}_{t/t-1}\|$  est un facteur de normalisation de sorte que  $\|\hat{\theta}_t\| = 1$ .
- $\alpha_t$  est un paramètre utilisateur dont le choix doit garantir la stabilité et la convergence de l'algorithme. Deux choix de  $\alpha_t$  sont proposés dans [43] :  $\alpha_t = \frac{1}{t}$  et  $\alpha_t = \alpha$ .  $\alpha_t$  est similaire au pas d'adaptation dans l'algorithme du gradient stochastique.

Le deuxième algorithme est une version étendue du premier proposé dans [43]. Il est présenté dans [44] en 2012 et il est basé sur les hypothèses suivantes :

- $C = 0$ .
- $\theta^*$  vérifie  $\|\theta^*\| = 1$ .
- $u_t$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. avec une fonction de densité de probabilité continue.
- $v_t^y = 0$ .

Cet algorithme est donné par :

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{w_t} \left( \hat{\theta}_{t-1} - \mu \alpha_t \phi_t | z_t - \hat{z}_{t/t-1} | \hat{y}_{t/t-1} \right) \quad (1.14)$$

avec :

- La valeur initiale de  $\hat{\theta}_0$  est telle que  $\hat{\theta}_0 \theta^* > 0$ .
- $w_t = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)\alpha_t | z_t - \hat{z}_t | \hat{y}_t^2} \leq 1$  un facteur de normalisation tel que  $\|\hat{\theta}_t\| = 1$ .
- $\alpha_t = \frac{1}{\phi_t^T \phi_t}$ .
- $0 < \mu < 1$ .

La convergence de l'algorithme, qui repose sur le coefficient  $\mu$ , est démontrée dans [44] en absence du bruit, contrairement au premier algorithme présenté dans [43]. Concernant  $\mu$  : un choix élevé augmente la vitesse de convergence et sa sensibilité au bruit, et un choix faible diminue la vitesse de sa convergence, mais il permet aussi de réduire la variance de l'estimation en présence du bruit.

#### 1.2.1.4 Algorithme de Guo et al. - 2013 - [36]

L'approche présentée dans [36] en 2013, est basée aussi sur l'utilisation de la fonction de distribution du bruit, sans qu'elle soit nécessairement continue et inversible (contrairement aux approches dans [84] et [83]). Cet algorithme est basé sur les hypothèses suivantes :

- $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ , où  $\Theta$  est un compact convexe borné.
- Le vecteur  $\phi_t$  est un vecteur de variables aléatoires bornées et satisfait la condition d'excitation persistente.
- La séquence de bruit  $\{v_t^y\}$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. à variance finie et à moyenne nulle.  $F(\cdot)$  et  $f(\cdot)$  sont, respectivement, la distribution et les fonctions de densité de  $v_1^y$ .  $F(\cdot)$  et  $f(\cdot)$  sont supposées connues.

Comme dans [84], l'algorithme proposé repose sur la propriété  $\mathcal{E}\{s_t\} = \mathcal{E}\{\phi_t^T \theta^* + v_t^y \geq C\}$  où  $s_t = \frac{1}{2}(1 - z_t)$ . Ceci conduit à

$$\mathcal{E}\{s_t\} = F(C - \phi_t^T \theta^*) \quad (1.15)$$

Cette relation permet l'estimation de  $\theta^*$  via l'algorithme du gradient stochastique normalisé. Cet algorithme est donné par :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \beta \frac{\phi_t}{r_t} \left( F(C - \hat{y}_{t/t-1}) - \frac{1}{2}(1 - z_t) \right) \quad (1.16)$$

avec :

- $r_t = 1 + \sum_{k=1}^t \phi_k^T \phi_k$
- $\beta > 0$  est un scalaire constant.

Dans [36] les estimations de  $\theta^*$  sont calculées en utilisant un opérateur de projection qui projette les estimations dans un compact convexe  $\Theta$ . Ceci permet d'éviter un comportement instable de l'algorithme dans les premières itérations. Une analyse de convergence est fournie dans [36]. A noter que l'algorithme présenté dans [37] est une extension de celui donné dans [36] pour l'identification d'un canal de communication.

### 1.2.1.5 Algorithme de Pouliquen et al. - 2016 - [64]

En 2016, un algorithme est introduit dans [64] pour dépasser les limitations des algorithmes précédents, limitations sur les conditions sur l'entrée et sur les connaissances a priori sur le bruit. Les hypothèses de cet algorithme sont les suivantes :

- $C = 0$ .
- $\theta^*$  vérifie  $\|\theta^*\| = 1$ .
- $u_t$  est une séquence satisfaisant la condition d'excitation persistente.
- La séquence de bruit  $\{v_t^y\}$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle, de variance finie et non-corrélée avec la séquence d'entrée.

Cet algorithme est basé sur la formulation du problème d'identification initiale en un problème d'identification ensembliste, problème d'identification à erreur bornée.. Il consiste, dans un premier temps, à estimer un vecteur paramètre  $\hat{\vartheta}_t$  tel que  $\phi_t^T \hat{\vartheta}_t$  a le même signe que  $z_t$ , et dans un deuxième temps dans sa normalisation selon  $\|\theta^*\| = 1$ .

L'estimation  $\hat{\theta}_t$  est calculée comme suit :

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{w_t} \hat{\vartheta}_t \quad (1.17)$$

avec

- La valeur initiale de  $\hat{\theta}_0$  est tel que  $\|\hat{\theta}_0\| > 0$ .
- $\hat{\vartheta}_t = \hat{\vartheta}_{t-1} + \frac{P_{t-1} \phi_t \sigma_t}{\lambda + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t \sigma_t} \left( z_t - \phi_t^T \hat{\vartheta}_{t-1} \right)$
- $w_t = \|\hat{\vartheta}_t\|$  est un facteur de normalisation de sorte que  $\|\hat{\theta}_t\| = 1$ .
- $P_t = \frac{1}{\lambda} \left( I_{n+1} - \frac{P_{t-1} \phi_t \sigma_t}{\lambda + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t \sigma_t} \phi_t^T \right) P_{t-1}$ .
- $0 < \lambda < 1$  est le facteur d'oubli [53].
- $\sigma_t$  est défini par

$$\sigma_t = \begin{cases} \frac{\lambda}{\phi_t^T P_{t-1} \phi_t} s \left( \left| \frac{z_t - \phi_t^T \hat{\vartheta}_{t-1}}{\delta} \right| - 1 \right) \\ \text{if } \left( \left| z_t - \phi_t^T \hat{\vartheta}_{t-1} \right| > \delta \right) \text{ et } (\phi_t^T P_{t-1} \phi_t > 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $0 < \delta < 1$  proche de 1 (par exemple  $\delta = 0.999$ ), ce paramètre assure à  $\phi_t^T \hat{\vartheta}_t$  d'avoir le même signe que  $s_t$ .

Cet algorithme permet l'identification des systèmes RIF à sortie binaire sans hypothèses particulières sur l'entrée (hormis la condition usuelle d'excitation persistente) et la distribution de bruit. Une analyse de convergence, en présence de bruit, est fournie dans [64].

#### 1.2.1.6 Méthodes particulières

Il existe d'autres algorithmes récursifs proposés dans la littérature pour l'identification des systèmes utilisant une sortie binaire. Ces algorithmes se concentrent sur des cas particuliers.

##### **Algorithme de Wang et al. - 2007 - [80]**

L'algorithme présenté dans [80] étudie le problème de l'identification du système RIF d'ordre zéro :  $\theta^*$  est un scalaire. Deux cas sont étudiés : dans le premier, l'identification est basée sur l'entrée  $u_t$  et sur la sortie quantifiée  $z_t$  générée à l'aide d'un capteur à seuil multiple. Dans le second cas, la sortie du système est transmise par un canal de communication. L'identification est basée sur l'entrée  $u_t$  et sur la sortie du canal.

##### **Algorithme de Guo et al. - 2011 - [38]**

Dans [38], l'algorithme d'identification est dédié à l'identification d'un système RIF d'ordre zéro comme dans [23]. Dans [38], l'objectif est de proposer une loi de contrôle adaptative, la sortie binaire est générée en utilisant un seuil variable dans le temps. Les mêmes auteurs considèrent un problème similaire dans [39] : l'identification d'un système RIF d'ordre zéro mais avec un seuil constant.

##### **Algorithme de Guo et al. - 2015 - [37]**

Dans [37] un algorithme récursif est proposé pour l'identification des systèmes RIF avec des sorties binaires et pour des canaux de communication. L'algorithme d'identification est similaire à l'algorithme proposé dans [36], la différence réside dans le fait que l'identification est réalisée avec les incertitudes sur la transmission des paquets de données.

##### **Algorithme de Wang et al. - 2019 - [85]**

L'algorithme proposé dans [85] est consacré à la conception d'un contrôle de suivi adaptatif. L'entrée est supposée périodique.

#### 1.2.1.7 Bilan

Tous les algorithmes présentés dans la section précédente permettent de réaliser, efficacement, l'identification récursive des systèmes à sortie binaire. Chacun d'entre eux a des avantages et des limites. Les algorithmes présentés dans [84] et [83] utilisent une entrée périodique et une fonction de distribution du bruit continue et inversible,

contrairement aux problèmes d'identification traditionnels où les fonctions de distribution du bruit ne sont pas, généralement, utilisées dans les algorithmes. L'approche présentée dans [36] est basée aussi sur la connaissance de la fonction de distribution du bruit avec une estimation des paramètres en temps réel non pas à chaque période comme dans [84] et [83]. L'implémentaion des deux algorithmes [43] et [44] est facile, mais ils sont développés en absence du bruit. La méthode présentée dans [64] est développée en présence du bruit, elle est indépendante de la distribution du bruit. Cet algorithme utilise un seuil nul.

Le tableau 1.1 résume certaines caractéristiques des algorithmes décrits précédemment : les principales hypothèses sur le signal d'entrée, le bruit et le seuil, les paramètres choisis par l'utilisateur et s'il y a une analyse de convergence ou non.

Algorithmes		Entrée $u_t$	Bruit $v_t^y$	paramètres	Condition sur $\theta^*$ et $C$	Etude de convergence
Wang et al. 2003		(n+1)-périodique.	- i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie. - $F(\cdot)$ et $F^{-1}(\cdot)$ sont connus	- séquence d'entrée - $0 < \delta < 1$	- $C$ connu	- oui
Wang et al. 2008	1 <sup>er</sup> algorithme	- somme d'une composante (n+1)-périodique et d'une séquence de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie.	-i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie. - $F(\cdot)$ et $F^{-1}(\cdot)$ sont connus	- séquence d'entrée	- $C$ connu	-oui
	2 <sup>me</sup> algorithme	- somme d'une composante (n+2)-périodique et d'une séquence de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie.	-i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie. - $F(\cdot)$ et $F^{-1}(\cdot)$ sont connus.	-séquence d'entrée	- $C$ inconnu	- oui
	3 <sup>me</sup> algorithme	- somme d'une composante périodique et d'une séquence de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et de variance finie.	- $F(\alpha, x)$ La fonction de distribution est paramétrée par les vecteurs $\alpha$ et $x$ . - Elle a des dérivés partiels continus en ce qui concerne les deux variables $x$ et $\alpha$ .	-séquence d'entrée	- $C$ inconnu	-oui
Jafari et al.	1 <sup>er</sup> algorithme	—	- $v_t^y = 0$	- $\alpha_t = \frac{1}{t}$ où $\alpha_t = \alpha$	- $\ \theta^*\  = 1$ - ( $C = 0$ )	- non
	2 <sup>me</sup> algorithme	- une séquence i.i.d. avec pdf continu.	- $v_t^y = 0$ .	- $0 < \mu < 1$	- $\ \theta^*\  = 1$ - ( $C = 0$ )	-oui
Guo et al.		- condition d'excitation persistente.	- i.i.d - $F(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont connus	- $\beta > 0$	- $C$ connu	- oui
Pouliquen et al.		- condition d'excitation persistente.	- i.i.d.de moyenne nulle et de variance finie	- $0 < \lambda < 1$ - $0 < \delta < 1$	- $\ \theta^*\  = 1$ - ( $C = 0$ )	- oui

Tableau 1.1 – Résumé des caractéristiques des principaux algorithmes d'identification de système RIF à sortie binaire

## 1.2.2 Méthodes non récursives

### 1.2.2.1 Algorithme de Colinet et al. - 2010 - [22]

La méthode présentée dans [22] ressemble à celle de Wigren présentée dans [86] pour les systèmes à sortie quantifiée. La méthode est basée sur la minimisation d'un critère des moindres carrés pondérés. Pour l'algorithme présenté dans [22] la sortie du système est soumise, en plus du bruit  $v_t^y$ , à un signal de tramage, supposé être connu noté  $v_t$ , est une forme de bruit avec une distribution appropriée, qui est volontairement ajouté aux échantillons. La sortie binaire est obtenue par  $z_t = Q_C(w_t)$  avec  $w_t = y_t + v_t + v_t^y$ .

Cet algorithme considère les hypothèses suivantes :

- $u_t, v_t^y$  et  $v_t$  sont gaussiens ergodiques stationnaires.
- $v_t^y$  et  $v_t$  sont des bruits blancs.
- $u_t, v_t^y$  et  $v_t$  sont indépendants.

L'algorithme présenté dans [22] est basé sur l'utilisation du critère des moindres carrés pondérés suivant :

$$J_k^N = \frac{1}{4} \frac{\sum_{t=1}^N \widehat{w}_t^{2k} (z_t - \widehat{z}_t)^2}{\sum_{t=1}^N \widehat{w}_t^{2k}} \quad (1.19)$$

où  $\widehat{w}_t = \phi_t^T \widehat{\theta}_t + v_t$ ,  $\widehat{z}_t = Q_C(\widehat{w}_t)$  et  $k$  est un paramètre de choix sur le critère.

La solution développée dans [22] ne considère que le cas où  $k = 1$ . À l' $i^{\text{ème}}$  itération l'estimation de  $\theta^*$  est donnée par :

$$\widehat{\theta}_i = \widehat{\theta}_{i-1} - \lambda_i g(\widehat{\theta}_{i-1}) \quad (1.20)$$

Avec :

- $g(\widehat{\theta}) = \frac{1}{2\widehat{\theta}^T Q \widehat{\theta}} \left[ (P - 4J_1^N Q) \widehat{\theta} + (p - 4J_1^N q) \right]$
- $P = \sum_{t=1}^N \phi_t \phi_t^T (z_t - \widehat{z}_t)^2$
- $Q = \sum_{t=1}^N \phi_t \phi_t^T$
- $p = \sum_{t=1}^N \phi_t v_t (z_t - \widehat{z}_t)^2$
- $q = \sum_{t=1}^N \phi_t v_t$
- $\lambda_i > 0$

L'analyse de convergence de cet algorithme est présentée dans [22]. Cette méthode, hors ligne, est adaptée à l'identification récursive dans [43] et [44] comme vu auparavant.

### 1.2.2.2 Algorithme de Goudjil et al. - 2015 - [33]

Dans le même esprit de surmonter les contraintes présentées dans les algorithmes présentés jusqu'à présent telles qu'un seuil égal à zéro, un seuil ajustable, un signal d'entrée spécifique ou la connaissance de la fonction de distribution du bruit. Une nouvelle approche est basée sur l'utilisation de l'algorithme d'apprentissage : Support Vector Machine (SVM).

Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le gain statique de  $H^*(q)$  est supposé connu.
- La séquence d'entrée  $u_t$  est telle que pour chaque instant  $t : y_t \neq C$ .

Cette méthode reformule dans un premier temps le problème d'identification comme un problème de classification binaire. Il est montré que le vecteur des paramètres  $\theta^*$  paramétrise un hyperplan séparateur qu'il est possible d'estimer via les SVM.

L'algorithme est constitué des deux étapes suivantes :

- Étape 1 : Estimation de  $\hat{\theta}$  et  $\hat{C}$  solutions de :

$$\begin{cases} \min_{\theta, C, e} \frac{1}{2} \|\theta\|^2 + \gamma \sum_{t=1}^N e_t, \\ tq \ z_t(\theta^T \phi_t - C) \geq 1 - e_t, \\ et \ e_t \geq 0; t \in [1, N], \end{cases} \quad (1.21)$$

- Étape 2 : Normalisation par la valeur du gain statique.

A noter que, du fait de l'utilisation des SVM, la charge de calcul de cette méthode peut être relativement élevée pour un grand nombre  $N$  de données.

### 1.2.2.3 Méthodes particulières

Dans [12] une étude de la complexité en temps (charge de calcul) pour l'identification des systèmes RIF est proposée. Une analyse est ainsi présentée sur le choix de  $u_t$  dans le cas où  $\theta^*$  est scalaire. Les mêmes auteurs considèrent un problème similaire dans [13].

## 1.3 Méthodes d'identification des systèmes RII à sortie binaire ou quantifiée



Les méthodes présentées précédemment permettent l'identification des systèmes RIF, ce qui limite le cadre de leur application sur des systèmes plus complexes. Ceci nécessite le développement de méthodes pour des structures plus complexes. Nous nous intéressons dans cette section aux méthodes dédiées à l'identification de modèles RII à sortie binaire.

Nous considérons un système  $G^*(q)$  défini, ci-dessous, et représenté sur la figure 1.2 :

$$y_t = G^*(q)u_t \quad (1.22)$$

où  $u_t$  et  $y_t$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système.  $G^*(q)$  est la fonction de transfert supposée de la forme suivante :

$$G^*(q) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)} \quad (1.23)$$

avec

$$\begin{cases} A^*(q) = 1 + a_1^*q^{-1} + \dots + a_{n_a}^*q^{-n_a} \\ B^*(q) = b_0^* + b_1^*q^{-1} + \dots + b_{n_b}^*q^{-n_b} \end{cases} \quad (1.24)$$

$n_a$  et  $n_b$  sont les degrés respectivement de  $A^*(q)$  et  $B^*(q)$ .

$y_t$  est la sortie du capteur binaire  $Q_C(\cdot)$  :

$$z_t = Q_C(y_t + v_t^y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t + v_t^y \geq C \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $C$  est un seuil donné.

Définissons le vecteur des paramètres  $\theta^* \in R^n$  avec  $n = n_a + n_b + 1$  comme suit :

$$\theta^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_{n_a}^* \\ b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_{n_b}^* \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

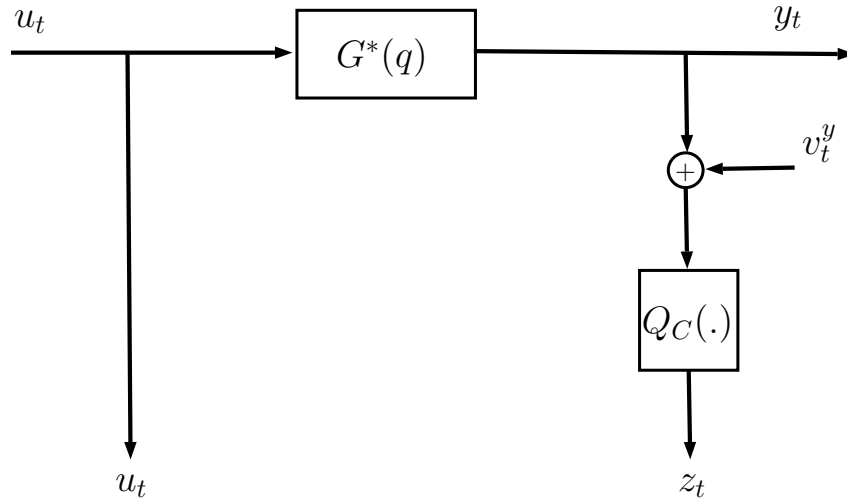


Figure 1.2 – Système RII à sortie binaire

### 1.3.1 Algorithme de Wang et al. - 2006 - [81]

Les mêmes auteurs qui ont proposé le premier algorithme pour un système RIF l'ont étendu pour un système RII. Ce premier algorithme est proposé dans [81] en 2006. Cet algorithme est ici encore basé sur l'estimation de  $\{y_t\}_{t=1}^N$ .

Les principales hypothèses de [81] sont les suivantes :

- La séquence d'entrée  $u_t$  est n-périodique (la période du signal  $u_t$  est  $T = n$ ).
- Le bruit  $v_t^y$  est une séquence des variables aléatoires i.i.d. L'inverse  $F^{-1}(\cdot)$  de sa fonction de distribution  $F(\cdot)$  est supposée connue.

L'algorithme propose l'estimation de  $\theta^*$  tous les  $n$  échantillons. Il est similaire à celui de [84]. Il est organisé en deux étapes :

- Étape 1 : estimation de la sortie du système  $G^*(q)$  sur la base de  $s_t$ , c'est-à-dire l'estimation de  $\{y_t\}_{t=1}^N$ . Cette estimation est réalisée, récursivement, tous les  $n$  échantillons en utilisant l'inverse de la fonction de distribution du bruit. Notons  $\hat{y}_t$  l'estimation de  $y_t$ .
- Étape 2 : estimation de  $\theta^*$  en utilisant l'entrée  $u_t$  et la sortie estimée de la première étape. Dans cette étape, l'estimation de  $\theta^*$  est donnée par :

$$\hat{\theta}_t = (\hat{\Phi}_0 \hat{\Phi}_0^T)^{-1} \hat{\Phi}_0 \hat{Y}_t \quad (1.27)$$

où

$$\hat{Y}_t = \begin{pmatrix} \hat{y}_t \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+na+nb} \end{pmatrix}$$

$$\text{— } \widehat{\Phi}_0 = \left( \widehat{\phi}_t \quad \cdots \quad \widehat{\phi}_{t+na+nb} \right) \text{ avec } \widehat{\phi}_t = \begin{pmatrix} -\widehat{y}_{t-1} \\ \vdots \\ -\widehat{y}_{t-na} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-nb} \end{pmatrix}$$

L'analyse de convergence de cet algorithme est fournie dans [81].

### 1.3.2 Algorithme de Liu et al. - 2011 - [52]

Afin de surmonter les limitations des hypothèses de la méthode précédente, telles que l'excitation périodique ou la connaissance de la fonction de distribution du bruit, un algorithme est proposé dans [49] sans hypothèses spécifiques sur le système considéré. Cette méthode est basée sur la programmation quadratique. L'estimation de  $\theta^*$  est obtenue en résolvant le problème QP défini par :

$$\begin{aligned}
 & \min_M \quad M^T H M \\
 & \text{s. t. } M_L \leq M \leq M_H
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

où

$$\begin{aligned}
 \text{— } M &= \begin{pmatrix} \theta \\ Y \end{pmatrix} \\
 \text{— } M_L \text{ et } M_H &\text{ sont les bornes inférieures et supérieures de } M. \text{ Ces bornes sont} \\
 &\text{utilisées pour prendre en compte le capteur binaire } Q_C(.). \\
 \text{— } H &= \begin{pmatrix} \Phi\Phi^T & -\Phi \\ -\Phi^T & I_N \end{pmatrix} \\
 \text{— } Y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \\
 \text{— } \Phi &= \left( \phi_1 \quad \cdots \quad \phi_N \right) \text{ avec } \phi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-na} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-nb} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La mise en oeuvre de cet algorithme nécessite la procédure itérative suivante :

- Étape d'initialisation : résolution du problème (1.28) en remplaçant les  $y_{t-i}$  par 0 dans  $\phi_t$ .
- Étape 1 : estimation de la sortie à partir de l'estimation de  $G^*(q)$ . Cette estimation de  $y_t$  est notée  $\widehat{y}_t$ .
- Étape 2 : estimation de  $\theta^*$  par la résolution du problème (1.28) en substituant  $y_t$  par  $\widehat{y}_t$  dans  $\phi_t$ .

A noter que cet algorithme est applicable au cas général des sorties quantifiées avec plus de 2 niveaux de quantification. Aucune analyse de convergence n'est proposée et, en terme de mise en oeuvre, les conditions sur la nature du bruit ne sont pas non plus précisées.

### 1.3.3 Algorithme de Li et al. - 2012 - [50]

L'algorithme présenté dans [50] traite l'identification des systèmes de Wiener, où la partie linéaire est suivie d'une partie non-linéaire. Pour uniformiser le problème posé dans [50] avec celui présenté dans cette section, nous négligeons la partie non linéaire.

L'algorithme est basé sur les hypothèses suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est une séquence des variables aléatoires i.i.d.
- $v_t^y$  est un bruit blanc borné.

Il est constitué également de deux étapes :

- Étape 1 : estimation d'un modèle RIF d'ordre élevé en utilisant les SVM comme dans [31] vu auparavant.
- Étape 2 : estimation de  $\theta^*$  en utilisant la réponse impulsionnelle estimée. Cette étape correspond à une étape de réduction du modèle.

L'algorithme proposé ici revient sur le problème d'identification des systèmes RIF par l'approximation de système RII par RIF d'ordre élevé en se basant sur la stabilité du système. L'analyse de convergence est fournie dans [50].

### 1.3.4 Algorithme de Marelli et al. - 2013 - [55]

Dans [54] et [55] un algorithme d'identification récursif est proposé en utilisant le critère du maximum de vraisemblance. Cet algorithme est une extension de l'algorithme présenté dans [31]. Il permet l'identification des systèmes RIF à sortie quantifiée.

Il est basé sur les hypothèses suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est une séquence d'excitation persistente.
- $v_t^y$  est une séquence i.i.d à distribution normale : sa fonction de distribution est connue.

Cet algorithme est récursif à deux étapes successives. Les détails techniques de chaque étape sont fournis dans [54] et [55]. Ces deux étapes sont les suivantes :

- Étape 1 : c'est une étape d'initialisation. Le vecteur  $\theta^*$  est estimé à l'aide d'un algorithme en ligne basé sur la méthode de EM (Expectation Maximization). La méthode EM a un taux de convergence faible, cette première étape est utilisée pendant quelques itérations.

- Étape 2 : la deuxième étape est un algorithme en ligne basé sur la méthode de quasi-Newton. L'estimation avec la méthode EM est utilisée pour l'initialisation.
- L'analyse de convergence est fournie dans [55].

### 1.3.5 Algorithme de Song et al. - 2018 - [72]

L'algorithme d'identification présenté dans [72] est basé sur l'algorithme d'approximation stochastique SAAWET (Stochastic Approximation Algorithms With Expanding Truncations). Cet algorithme consiste dans un premier temps, comme dans [50], en une estimation de la réponse impulsionnelle et dans un second temps en une estimation du vecteur  $\theta^*$ . Les termes de la réponse impulsionnelle sont estimés via un calcul de l'intercorrélacion entre la sortie et l'entrée du système

Il est basé sur les hypothèses suivantes :

- La séquence d'entrée  $u_t$  est une séquence gaussienne i.i.d.
- Le bruit additif  $v_t^y$  est un bruit gaussien à moyenne nulle.

Il a deux étapes organisées comme suit :

- Étape 1 : comme dans [50] le système est approché par un modèle RIF d'ordre élevé. Les paramètres de la réponse impulsionnelle, c'est-à-dire les paramètres du modèle RIF d'ordre élevé, sont estimés de manière récursive.
- Étape 2 : estimation de  $\theta^*$  en utilisant la réponse impulsionnelle estimée. Elle correspond à une étape de réduction du modèle.

Notons qu'une analyse de convergence est fournie dans [72]. A noter que la charge de calcul de cet algorithme est, particulièrement, faible.

### 1.3.6 Algorithme de Pouliquen et al. - 2019 - [66]

Le dernier algorithme de cette section est celui présenté dans [66], il est la continuité du travail présenté dans [64] consacré aux systèmes RIF. L'algorithme est basé sur l'utilisation de l'algorithme F-OE-OBE (Filtered Output Error Optimal Bounding Ellipsoid). Dans le cas où  $C = 0$ , l'objectif de l'algorithme proposé dans [66] est de réaliser l'estimation d'un modèle tel que sa sortie possède le même signe que  $z_t$  (approche similaire à [64]).

Les hypothèses principales de cet algorithme sont les suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est une séquence d'excitation persistente.
- Le bruit  $v_t^y$  a une moyenne nulle et stationnaire au sens large et non corrélé avec  $u_t$ .

C'est un algorithme itératif contient les étapes suivantes :

- Étape d'initialisation : initialisation en utilisant l'algorithme des moindres carrés (à partir de la connaissance de  $z_t$ ).

- Étape d'itération : utilisation de l'algorithme F-OE-OBE. Le filtre est construit en utilisant le modèle estimé à l'itération précédente.

Cet algorithme permet l'identification des paramètres du système sans passer par l'approximation par un filtre d'ordre élevé présenté dans les plupart des méthodes présentées précédemment et donc la réduction du modèle n'est pas nécessaire. L'analyse de la convergence est fournie dans [66].

### 1.3.7 Méthodes particulières

Il existe d'autres algorithmes proposés dans la littérature pour l'identification des systèmes RII utilisant une sortie quantifiée ou binaire.

- L'algorithme présenté dans [11] étudie l'identification pour un système RII à sortie quantifiée. Le bruit est supposé être borné.
- L'objectif dans [23] est l'identification d'un système RII à sortie binaire. Les deux algorithmes présentés dans [23] sont basés sur une sortie binaire générée à l'aide d'un seuil réglable : Ce seuil n'est pas constant, il est ajusté à chaque instant.
- Une méthode d'identification des systèmes continus ayant une sortie binaire est proposée dans [63]. Cet algorithme est composé de deux étapes : la première permet de reconstruire le signal de sortie et la deuxième étape permet d'estimer les paramètres du système.

### 1.3.8 Bilan

Les algorithmes présentés dans cette section permettent l'identification des systèmes RII à sortie binaire. Comme dans le cas de RIF, chaque algorithme est développé pour dépasser les contraintes et les limitations des algorithmes antérieurs. Certains algorithmes sont développés dans le cas où  $C \neq 0$  et d'autres dans le cas où  $C = 0$  en utilisant une hypothèse de normalisation, telle que la connaissance du gain statique ou la connaissance suivante :  $\|\theta^*\|_2 = 1$ .

Le tableau 1.2 résume certaines caractéristiques des algorithmes précédents : les principales hypothèses sur le signal d'entrée, le bruit, type d'algorithme et si une analyse de convergence existe ou non.

Algorithme	Type	Entrée $u_t$	Sortie $z_t$	Bruit $v_t^y$	Etude de convergence
Wang et al. [81]	récuratif	n-périodique	binaire	i.i.d, $F(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont connus	oui
Liu et al. [52]	itératif	i.i.d	quantifié	i.i.d	non
Li et al. [50]	batch	i.i.d	binaire	bruit blanc borné	oui
Marelli et al. [55]	récuratif	condition d'excitation persistente	quantifié	i.i.d, $F(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont connus	oui
Song et al. [72]	récuratif	i.i.d gaussien	binaire	gaussien à moyenne nulle	oui
Pouliquen et al. [66]	itératif	condition d'excitation persistente	binaire	- moyenne nulle et non corrélé avec l'entrée	oui

Tableau 1.2 – Résumé des caractéristiques des algorithmes d'identification de système RII à sortie binaire

## 1.4 Méthodes d'identification des systèmes RIF à entrée et sortie binaires

Dans les sections 1.1, 1.2 et 1.3, nous avons présenté les méthodes dédiées à l'identification en temps réel des systèmes RIF et à l'identification des systèmes RII à partir d'une sortie binaire. Dans le reste de ce chapitre, nous présentons les méthodes permettant l'identification des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires. Ces solutions sont toutes dédiées aux systèmes RIF.

Le système considéré dans la figure 1.3 est modélisé par :

$$y_t = G^*(q)u_t \quad (1.29)$$

où  $u_t$  est l'entrée,  $y_t$  représente la sortie du système.  $G^*(q)$  est sa fonction de transfert :

$$G^*(q) = \sum_{k=0}^n g_k^* q^{-k}$$

$n$  est l'ordre du système.

$x_t$  et  $z_t$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie binaires définies comme suit :

$$\begin{aligned} x_t &= Q_{C_u}(u_t + v_t^u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_t + v_t^u \geq C_u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ z_t &= Q_{C_y}(y_t + v_t^y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t + v_t^y \geq C_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.30)$$

où  $C_u$  et  $C_y$  sont deux seuils.

$v_t^u$  et  $v_t^y$  sont, respectivement, des bruits sur  $u_t$  et  $y_t$ .

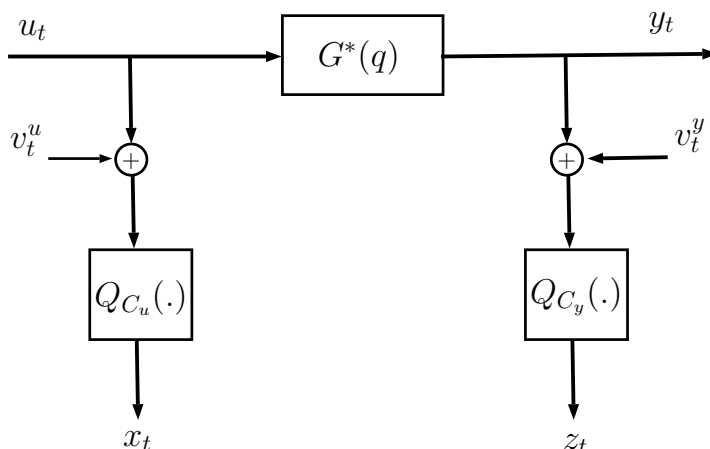


Figure 1.3 – Système RIF à sortie et entrée binaires

### 1.4.1 Algorithme de Leong et al. - 2018 - [49]

Dans cette section, nous présentons les travaux proposés dans [48] et [49]. Quatre algorithmes ont été proposés, en absence du bruit sur l'entrée :  $v_t^u = 0$ . Pour les quatre algorithmes, les seuils  $C_u$  et  $C_y$  peuvent être adaptés.

Deux premiers algorithmes sont dédiés à l'identification des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires. L'idée est basée sur l'exploitation des corrélations entre l'entrée et la sortie du système pour dériver des équations non-linéaires que les paramètres doivent satisfaire. Les paramètres sont, ensuite, estimés en résolvant ces équations non-linéaires à l'aide du gradient stochastique.

#### 1<sup>re</sup> algorithme

Le premier algorithme, proposé dans [49], considère les hypothèses suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est i.i.d. gaussien de moyenne  $\mu_u$  et de variance  $\sigma_u^2$  supposée connue.
- Le bruit  $v_t^y$  est i.i.d. gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{v^y}^2$  supposée connue.
- $C_u = \mu_u$ .

Le premier algorithme est basé sur l'estimation de la fonction de corrélation et sur la connaissance de la distribution de la séquence d'entrée. L'estimation de  $\theta^*$  est réalisée en temps réel. Cette estimation nécessite de pouvoir adapter à chaque instant le seuil  $C_y$  et l'algorithme propose une loi d'adaptation sur ce seuil.

#### 2<sup>me</sup> algorithme

Dans cet algorithme  $\mu_u$  et  $\sigma_u^2$  ne sont plus connues. Il est basé sur les hypothèses suivantes :



- L'entrée  $u_t$  est i.i.d. gaussien et de moyenne nulle.
- Le bruit  $v_t^y$  est i.i.d. gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{v^y}^2$  supposée connue.

Le deuxième algorithme est similaire au premier. Les seuils  $C_u$  et  $C_y$  sont adaptés en temps réel. L'algorithme SAAWET est, ici, aussi utilisé pour l'estimation des paramètres (comme dans [67]).

A noter qu'afin d'assurer la stabilité de l'estimation, un opérateur de projection dans un compact convexe est utilisé dans cet algorithme. A noter aussi que les algorithmes développés dans [48] et [49] sont des versions étendues des algorithmes développés dans [51] et [89]. L'analyse de performance de ces algorithmes est présentée dans [49].

### 1.4.2 Algorithme de Pouliquen et al. - 2020 - [67]

L'algorithme proposé dans [67] est basé sur l'estimation des fonctions d'autocorrélation de l'entrée et de l'intercorrélacion entre l'entrée et la sortie. Il est basé sur les hypothèses suivantes :

- L'entrée  $u_t$  est une séquence stationnaire de distribution normale et de moyenne nulle.
- $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des bruits blancs de moyenne nulle et de variances  $\sigma_{v^u}^2$  et  $\sigma_{v^y}^2$  connues, non-corrélés entre eux.
- $\sigma_u^2$  et  $\sigma_y^2$  sont connues.

L'algorithme est composé de trois étapes :

- Étape 1 : Estimation de la fonction de corrélation de l'entrée  $x_t$  et la fonction de corrélation entre l'entrée  $x_t$  et la sortie  $z_t$ .
- Étape 2 : Estimation de la fonction de corrélation de l'entrée  $u_t$  et la fonction de corrélation entre l'entrée  $u_t$  et la sortie  $y_t$  à partir des estimations de la première étape.
- Étape 3 : Estimation de  $\theta^*$  à partir des résultats de la deuxième étape.

**Cette approche est le point de départ de nos contributions développées dans les chapitres 2 et 3. L'analyse de convergence et de la variance sont fournies dans [67].**

## 1.5 Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré à l'introduction de la problématique d'identification des systèmes à base de données binaires. Nous avons présenté plusieurs solutions développées dans la littérature. Nous avons introduit les méthodes dédiées à l'identification récursive des systèmes RIF à sortie binaire. Ensuite, nous avons présenté les méthodes dédiées à l'identification des systèmes RII à sortie binaire.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons présenté des méthodes d'identification des systèmes à mesure binaire de l'entrée et de la sortie.

Des études comparatives des méthodes récursives d'identification des systèmes RIF à sortie binaire et des méthodes d'identification des systèmes RII à sortie binaire ont fait l'objet de deux articles [59] et [61].

A partir de cet état de l'art, il apparaît que la majorité de ces algorithmes est dédiée à l'identification des systèmes RIF. Certaines méthodes sont plus contraignantes que d'autres en terme d'hypothèses (signal d'entrée spécifique, connaissance sur le bruit, etc.).

L'identification de systèmes RII est plus délicate. La plupart des algorithmes est de forme itérative et repose sur une phase d'initialisation qui peut conditionner la réussite de cette identification.

L'identification à partir de données binaires en entrée et en sortie est beaucoup plus rare. A ce jour et à notre connaissance, seules deux approches ont été proposées. Dans la suite de cette thèse, nous proposons des extensions de l'une de ces méthodes (version en temps réel, systèmes plus complexes).

## Chapitre 2

Identification en boucle ouverte des systèmes RIF à base des mesures binaires de l'entrée et de la sortie

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème d'identification des systèmes linéaires en utilisant des mesures binaires de l'entrée et de la sortie. Les solutions proposées dans ce chapitre sont des extensions de l'algorithme présenté dans [67]. Ce chapitre est organisé comme suit : la section 2.2 présente la problématique et les notations. La section 2.3 propose une analyse spectrale du système. La section 2.4 propose l'identification récursive du système. Dans la section 2.5, des simulations numériques sont présentées pour illustrer les performances des solutions proposées. La section 2.6 conclut ce chapitre.

## 2.2 Problématique et notations

Conformément aux notations introduites dans le **chapitre 1**, nous considérons le système suivant (figure 2.1) :

$$y_t = G^*(q)u_t \quad (2.1)$$

où  $u_t$  est l'entrée et  $y_t$  est la sortie du système RIF.  $G^*(q)$  est la fonction de transfert du système :

$$G^*(q) = \sum_{k=0}^n g_k^* q^{-k}$$

$n$  est l'ordre du système et  $q^{-1}$  est l'opérateur retard tel que :  $q^{-1}u_t = u_{t-1}$ .

L'entrée et la sortie sont supposées inconnues. Les seuls échantillons disponibles sont ceux de  $x_t$  et  $z_t$  définis par :

$$\begin{aligned} x_t = Q_{C_u}(u_t + v_t^u) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{u_t + v_t^u}{\sigma_{u+v^u}} \geq C_u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ z_t = Q_{C_y}(y_t + v_t^y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{y_t + v_t^y}{\sigma_{y+v^y}} \geq C_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $C_u$  et  $C_y$  sont deux seuils relatifs.  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des bruits, respectivement, sur  $u_t$  et  $y_t$ .  $\sigma_{u_t+v_t^u}^2$  (respectivement  $\sigma_{y_t+v_t^y}^2$ ) correspond à la variance de  $u_t + v_t^u$  (respectivement  $y_t + v_t^y$ ). Notons que les seuils  $C_u$  et  $C_y$  peuvent être différents. Cependant, pour plus de simplicité dans la présentation, nous prenons  $C = C_u = C_y$  dans le reste de ce chapitre.

Le vecteur des paramètres est donné par :

$$\theta^* = \begin{pmatrix} g_0^* \\ g_1^* \\ \vdots \\ g_n^* \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

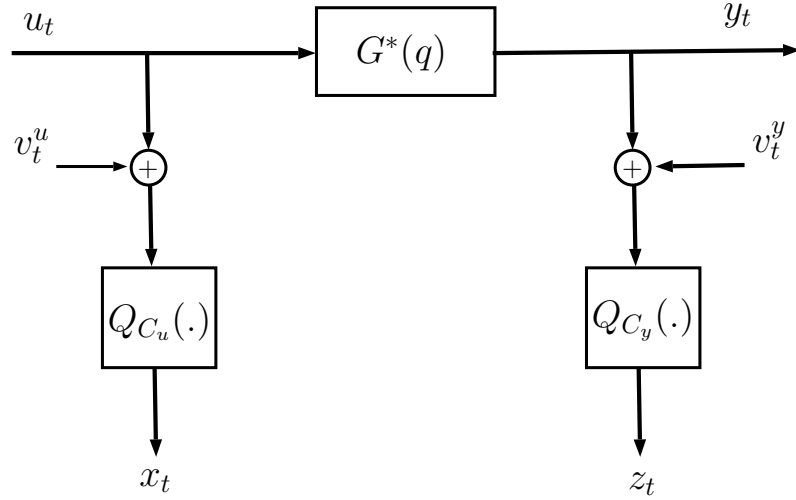


Figure 2.1 – Système RIF à sortie et entrée binaires

L'objectif de ce chapitre est de proposer des algorithmes permettant de caractériser un système, notamment estimer  $\theta^*$ , étant donné l'ensemble des observations  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ , avec  $N$  est le nombre de données disponibles.

Afin de compléter la description de ce problème, nous considérons les hypothèses suivantes :

**H1** : La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est générée par un processus ARMA stationnaire, ergodique et strictement stable  $u_t = H^*(q)e_t$  où  $\{e_t\}$  est une séquence gaussienne de moyenne nulle.

**H2** :  $\sigma_u$  et  $\sigma_y$  sont connus.

**H3** :  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des bruits blancs à distribution normale et de moyenne nulle.  $\sigma_{v_u}$  et  $\sigma_{v_y}$  sont connus.  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont indépendants de  $u_t$  et indépendants entre eux.

**Remarque 2.1** : L'hypothèse **H1** est conservatrice. Cette hypothèse est nécessaire parce que nous utilisons la connaissance de la distribution gaussienne dans l'algorithme. Cependant cette hypothèse est justifiée dans certains cas par le théorème de la limite centrale.

Par ailleurs, les notations suivantes seront utilisées par la suite :

- $R_{aa}(j) = \mathcal{E}\{a_t a_{t-j}\}$  est la fonction d'auto-corrélation, où  $j$  représente le décalage temporel.
- $R_{ab}(j) = \mathcal{E}\{a_t b_{t-j}\}$  est la fonction d'inter-corrélation entre  $a_t$  et  $b_t$ , où  $j$  représente le décalage temporel.
- $\bar{R}_{aa}(j) = \frac{R_{aa}(j)}{\sigma_a^2}$  est la fonction d'auto-corrélation normalisée, où  $j$  représente le décalage temporel et  $\sigma_a^2$  représente la variance de  $a_t$ .
- $\bar{R}_{ab}(j) = \frac{R_{ab}(j)}{\sigma_a \sigma_b}$  est la fonction d'inter-corrélation normalisée entre  $a_t$  et  $b_t$ , où

$j$  représente le décalage temporel et  $\sigma_b^2$  représente la variance de  $b_t$ .

## 2.3 Analyse spectrale

Dans cette partie nous présentons un algorithme qui permet d'estimer l'amplitude de la réponse fréquentielle du système. Il est en effet souvent utile lors de la procédure d'identification d'avoir une idée de cette réponse fréquentielle. Ceci permet, par exemple, d'avoir une idée de la complexité du système : présence d'une résonance ou non ; pente en  $-20dB$  ou en  $-40dB$  ; etc. La réponse fréquentielle est définie par :

$$S_{yu}(f) = \sqrt{\frac{\Phi_y(f)}{\Phi_u(f)}} \quad (2.4)$$

où  $\Phi_u(f)$  et  $\Phi_y(f)$  correspondent aux spectres de l'entrée et de la sortie définies par  $\Phi_u(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} R_{yy}(j)e^{-ij2\pi f}$  et  $\Phi_y(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} R_{uu}(j)e^{-ij2\pi f}$ ,  $f$  représente la fréquence.

L'algorithme proposé est composé de trois étapes :

— **Étape 1 : Estimation de  $R_{xx}(j)$  et  $R_{zz}(j)$**

Dans un premier temps, nous réalisons l'estimation de la fonction d'autocorrélation de l'entrée binaire  $x_t$  et de la sortie  $z_t$ . Pour  $j \geq 0$ , ces estimations  $\widehat{R}_{xx}(j)$  et  $\widehat{R}_{zz}(j)$  sont données par :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{xx}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N x_t x_{t-j} \\ \widehat{R}_{zz}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N z_t z_{t-j} \end{cases} \quad (2.5)$$

— **Étape 2 : Estimation de  $R_{uu}(j)$  et  $R_{yy}(j)$**

Dans cette deuxième étape, l'objectif est d'estimer les fonctions d'auto-corrélation normalisées de l'entrée  $u_t$  et de la sortie  $y_t$ , respectivement, définies par  $R_{uu}(j)$  et  $R_{yy}(j)$ , en utilisant les estimations des fonctions d'auto-corrélation de l'étape 1.

Les fonctions d'autocorrélations  $R_{xx}(j)$  et  $R_{zz}(j)$  correspondent, respectivement, aux proportions de points  $((u_t + v_t^u); (u_{t-j} + v_{t-j}^u))$  et  $((y_t + v_t^y); (y_{t-j} + v_{t-j}^y))$  tels que :

$$\begin{aligned} R_{xx}(j) &= \Pr\{x_t = 1, x_{t-j} = 1\} \\ &= \Pr\left\{\frac{u_t + v_t^u}{\sigma_{u+vu}} \geq C, \frac{u_{t-j} + v_{t-j}^u}{\sigma_{u+vu}} \geq C\right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} R_{zz}(j) &= \Pr\{z_t = 1, z_{t-j} = 1\} \\ &= \Pr\left\{\frac{y_t + v_t^y}{\sigma_{y+vy}} \geq C, \frac{y_{t-j} + v_{t-j}^y}{\sigma_{y+vy}} \geq C\right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notons  $P_C(\bar{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)) = R_{xx}(j)$  et  $P_C(\bar{R}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j)) = R_{zz}(j)$  ces deux proportions. Du fait que  $u_t$  a une distribution normale avec une moyenne nulle,  $y_t$  l'a aussi. Il s'ensuit que  $P_C(\bar{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j))$  et  $P_C(\bar{R}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j))$  dépendent de  $C$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_C(\bar{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)) &= \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(u_t + v_t^u, u_{t-j} + v_{t-j}^u) d(u_t + v_t^u) d(u_{t-j} + v_{t-j}^u) \\ P_C(\bar{R}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j)) &= \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(y_t + v_t^y, y_{t-j} + v_{t-j}^y) d(y_t + v_t^y) d(y_{t-j} + v_{t-j}^y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\psi(.,.)$  est la fonction de distribution définie par :

$$\psi(a_t, b_{t-j}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - (\bar{R}_{ab}(j))^2}} e^{-\frac{a_t^2 + b_{t-j}^2 - 2(\bar{R}_{ab}(j))a_t b_{t-j}}{2(1 - (\bar{R}_{ab}(j))^2)}}. \quad (2.9)$$

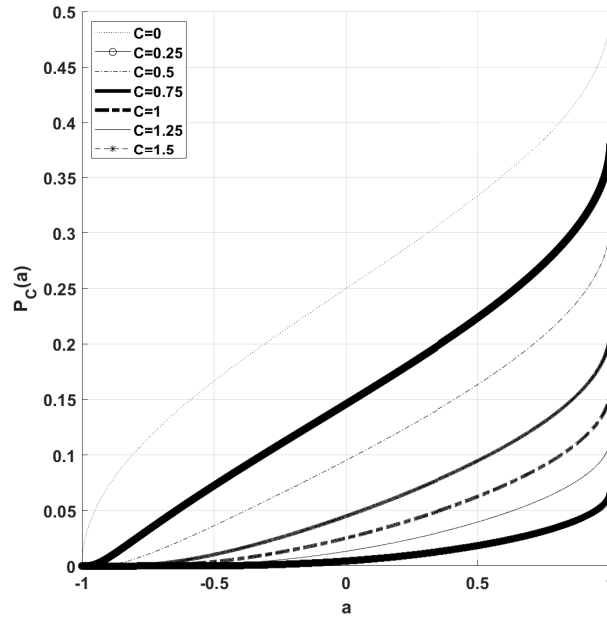


Figure 2.2 –  $P_C(a)$  pour différentes valeurs de  $C$ .

Comme il est montré sur la figure 2.2 ci-dessus, pour  $C$  fixe,  $P_C(.)$  est une fonction monotone continue et strictement croissante, donc  $P_C(.)$  est inversible. On note son inverse comme  $P_C^{-1}(.)$  telle que  $P_C^{-1}(P_C(a)) = a$ . Dans cette deuxième étape, les estimations des fonctions d'auto-corrélation normalisées  $\widehat{\bar{R}}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)$  et  $\widehat{\bar{R}}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j)$  sont :

$$\begin{cases} \widehat{\bar{R}}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j) = P_C^{-1}(\widehat{R}_{xx}(j)) \\ \widehat{\bar{R}}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j) = P_C^{-1}(\widehat{R}_{zz}(j)) \end{cases} \quad (2.10)$$

en terme de mise en œuvre, il faut distinguer le cas pour  $C = 0$  et celui pour  $C \neq 0$  :

- Pour  $C = 0$ , il est montré dans [71] que  $P_C^{-1}(\cdot)$  s'exprime comme suite :

$$P_C^{-1}(a) = \cos(\pi(1-2a)) = \sin\left(2\pi\left(a - \frac{1}{4}\right)\right) \quad (2.11)$$

donc, dans ce cas il est possible d'estimer directement  $R_{uu}(j)$  à partir de  $R_{xx}(j)$ .

- Pour  $C \neq 0$ , il n'existe pas d'expression analytique pour  $P_C^{-1}(\cdot)$ , donc  $\widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j)$  et  $\widehat{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j)$  sont calculées en minimisant le critère suivant :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j) = \underset{\bar{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \left| \widehat{R}_{xx}(j) - P_C(\bar{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j)) \right| \right\} \\ \widehat{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j) = \underset{\bar{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \left| \widehat{R}_{zz}(j) - P_C(\bar{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j)) \right| \right\} \end{cases} \quad (2.12)$$

Nous savons que :

$$\begin{cases} R_{(u+vu)(u+vu)}(j) = R_{uu}(j) + \sigma_{vu}^2 \delta(j) \\ R_{(y+vy)(y+vy)}(j) = R_{yy}(j) + \sigma_{vy}^2 \delta(j) \end{cases} \quad (2.13)$$

donc,  $\widehat{R}_{uu}(j)$  et  $\widehat{R}_{yy}(j)$  sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{uu}(j) = \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1}\left(\widehat{R}_{xx}(j)\right) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \\ \widehat{R}_{yy}(j) = \sigma_{y+vy}^2 P_C^{-1}\left(\widehat{R}_{zz}(j)\right) - \sigma_{vy}^2 \delta(j) \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\delta(j)$  est l'impulsion de Dirac en temps discret.

— **Étape 3 : Estimation de  $S_{yu}(f)$**

Dans la troisième étape, nous réalisons l'estimation de  $\Phi_u(f)$  et  $\Phi_y(f)$ . Ces estimations sont désignées par  $\widehat{\Phi}_u(f)$  et  $\widehat{\Phi}_y(f)$ . Elles peuvent être calculées comme suit

$$\begin{cases} \widehat{\Phi}_u(f) = \sum_{j=-\gamma}^{\gamma} w_{\gamma}(j) \widehat{R}_{uu}(j) e^{-ij2\pi f} \\ \widehat{\Phi}_y(f) = \sum_{j=-\gamma}^{\gamma} w_{\gamma}(j) \widehat{R}_{yy}(j) e^{-ij2\pi f} \end{cases} \quad (2.15)$$

avec

$$w_{\gamma}(j) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi) e^{i\xi j} d\xi \quad (2.16)$$

où  $W_{\gamma}(\xi)$  représente une fonction de fenêtrage sur les fréquences et  $\gamma$  est la largeur de cette fenêtre.

L'estimation du module de la réponse fréquentielle est ensuite donnée par :

$$\widehat{S}_{yu}(f) = \sqrt{\frac{\widehat{\Phi}_y(f)}{\widehat{\Phi}_u(f)}} \quad (2.17)$$



L'algorithme proposée est résumé dans le tableau 1. Ses performances dépendent grandement de  $C$ ,  $N$  et du niveau de bruit. Nous étudions l'influence de ces paramètres par des applications numériques dans la **section 2.5**.

---

**Algorithme 1** : Estimation de  $S_{yu}(f)$

---

**Entrée** :  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0; \gamma]$  calculer  $\widehat{R}_{xx}(j)$  et  $\widehat{R}_{zz}(j)$  à partir de (2.5).
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0; \gamma]$  calculer  $\widehat{R}_{uu}(j)$  et  $\widehat{R}_{yy}(j)$  à partir de (2.14).
  - **Étape 3** : Calculer  $\widehat{\Phi}_u(f)$  et  $\widehat{\Phi}_y(f)$  à partir de (2.15) et estimer l'amplitude de la réponse fréquentielle  $S_{yu}(f)$  à partir de (2.17).
- 

Nous avons choisi, ici, d'estimer la réponse fréquentielle via le rapport des spectres  $\Phi_u(f)$  et  $\Phi_y(f)$ . A noter qu'il est aussi possible d'estimer cette réponse fréquentielle à partir de l'estimation du spectre croisé  $\Phi_{yu}(f)$  en passant au préalable par une estimation de l'inter-corrélation  $R_{yu}(j)$ .

## 2.4 Identification paramétrique récursive

Nous avons présenté dans la **section 2.3** un algorithme pour l'estimation de la réponse fréquentielle. Dans cette section, nous proposons deux algorithmes d'identification paramétrique en temps réel utilisant des mesures binaires à la fois sur l'entrée et sur la sortie. Ces deux algorithmes se basent, cette fois-ci, sur l'estimation en temps réel de la fonction d'auto-corrélation de l'entrée et de la fonction d'inter-corrélation de l'entrée et de la sortie du système.

L'inter-corrélation  $R_{yu}(j)$  peut-être exprimée à partir des paramètres  $g_k^*$  et des auto-corrélations  $R_{uu}(j)$  comme suit :

$$R_{yu}(j) = \sum_{k=0}^n g_k^* R_{uu}(j - k). \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\theta^* = M(R_{uu})^{-1} L(R_{yu}) \quad (2.19)$$

avec

$$L(R_{yu}) = \begin{pmatrix} R_{yu}(0) \\ R_{yu}(1) \\ \vdots \\ R_{yu}(n) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

et

$$M(R_{uu}) = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \cdots & R_{uu}(n) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \cdots & R_{uu}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(n) & R_{uu}(n-1) & \cdots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.4.1 Algorithme récursif

Le premier algorithme d'identification proposé ici est basé sur la mise en œuvre en temps réel de l'équation (2.19) pour l'estimation de  $\theta^*$ .

Il est composé de trois étapes :

— **Étape 1 : Estimation de  $R_{xx}(j)$  et de  $R_{zx}(j)$ .**

La première étape consiste à estimer la fonction d'auto-corrélation de l'entrée binaire  $\{x_t\}$  et la fonction d'inter-corrélation entre  $\{z_t\}$  et  $\{x_t\}$ . A l'instant  $t$  ces estimations sont désignées par  $\widehat{R}_{xx}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  pour  $j \in [0, n]$ . Elles sont calculées à l'aide de l'algorithme du gradient stochastique comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{xx}(j)_t = \widehat{R}_{xx}(j)_{t-1} + \mu_1(x_t x_{t-j} - \widehat{R}_{xx}(j)_{t-1}) \\ \widehat{R}_{zx}(j)_t = \widehat{R}_{zx}(j)_{t-1} + \mu_1(z_t x_{t-j} - \widehat{R}_{zx}(j)_{t-1}) \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $\mu_1$  est le pas d'adaptation.

— **Étape 2 : Estimation de  $R_{uu}(j)$  et de  $R_{yu}(j)$ .**

Cette deuxième étape de l'algorithme est similaire à celle de l'algorithme d'identification non paramétrique présenté dans la **section 2.3**. L'objectif est de calculer des estimations de  $R_{uu}(j)$  et de  $R_{yu}(j)$  en utilisant l'étape précédente.

On notera que  $R_{xx}(j)$  et  $R_{zx}(j)$  correspondent respectivement aux proportions de couples  $((u_t + v_t^u); (u_{t-j} + v_{t-j}^u))$  et  $((y_t + v_t^y); (u_{t-j} + v_{t-j}^u))$  tels que :

$$\begin{aligned} R_{xx}(j) &= \Pr\{x_t = 1, x_{t-j} = 1\} \\ &= \Pr\left\{\frac{u_t + v_t^u}{\sigma_{u+v^u}} \geq C, \frac{u_{t-j} + v_{t-j}^u}{\sigma_{u+v^u}} \geq C\right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{aligned} R_{zx}(j) &= \Pr\{z_t = 1, x_{t-j} = 1\} \\ &= \Pr\left\{\frac{y_t + v_t^y}{\sigma_{y+v^y}} \geq C, \frac{u_{t-j} + v_{t-j}^u}{\sigma_{u+v^u}} \geq C\right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Comme vu dans la **section 2.3**,  $R_{xx}(j)$  et  $R_{zx}(j)$  peuvent s'exprimer comme suit à partir de la fonction  $\psi(\cdot, \cdot)$  définie en (2.9) :

$$R_{xx}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(u_t + v_t^u, u_{t-j} + v_{t-j}^u) d(u_t + v_t^u) d(u_{t-j} + v_{t-j}^u) \quad (2.25)$$

et

$$R_{zx}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(y_t + v_t^y, u_{t-j} + v_{t-j}^u) d(y_t + v_t^y) d(u_{t-j} + v_{t-j}^u) . \quad (2.26)$$

Les estimations  $\widehat{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{(y+v^y)(u+v^u)}(j)_t$  des fonctions de corrélation  $\overline{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)$  et  $\overline{R}_{(y+v^y)(u+v^u)}(j)$  peuvent, ainsi, être calculées pour  $j \in [0, n]$  comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)_t = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j)_t \right) \\ \widehat{R}_{(y+v^y)(u+v^u)}(j)_t = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j)_t \right) \end{cases} . \quad (2.27)$$

En temps réel, nous utilisons une approximation de  $P_C^{-1}(\cdot)$ . Cette dernière peut être une approximation polynomiale par exemple. Elle est dénommée  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot)$ .

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)_t = \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j)_t \right) \\ \widehat{R}_{(y+v^y)(u+v^u)}(j)_t = \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j)_t \right) \end{cases} . \quad (2.28)$$

Ensuite, à l'instant  $t$ ,  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{uu}(j)_t = \sigma_{u+v^u}^2 \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j)_t \right) - \sigma_{v^u}^2 \delta(j) \\ \widehat{R}_{yu}(j)_t = \sigma_{y+v^y} \sigma_{u+v^u} \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j)_t \right) \end{cases} \quad (2.29)$$

— **Étape 3 : Estimation de  $\theta^*$**

La troisième étape consiste en l'estimation du vecteur de paramètres  $\theta^*$ . Là encore, l'algorithme du gradient stochastique est utilisé à partir des estimations précédentes de  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$  :

$$\widehat{\theta}_t = \widehat{\theta}_{t-1} + \mu_2 (L(\widehat{R}_{yu_t}) - M(\widehat{R}_{uu_t}) \widehat{\theta}_{t-1}) \quad (2.30)$$

où  $\mu_2$  est le pas d'adaptation,  $M(\widehat{R}_{uu_t})$  et  $L(\widehat{R}_{yu_t})$  sont définis comme  $L(R_{uu})$  et  $M(R_{uu})$  dans (2.20) et (2.21).

Le choix des pas d'adaptation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sera discuté dans l'analyse de l'algorithme et dans les simulations numériques dans la **section 2.5** .

L'algorithme proposé est résumé dans le tableau 2.

---

**Algorithme 2** : Estimation récursive de  $\theta^*$

---

**Entrée** :  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\widehat{R}_{xx}(j)_0$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_0$  pour  $j \in [0, n]$  et  $\widehat{\theta}_0$

À chaque instant  $t$  faire :

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{R}_{xx}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  à partir de (2.22)
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  à partir de (2.29)
  - **Étape 3** : Calculer  $\widehat{\theta}_t$  à partir (2.30).
- 

### 2.4.2 Algorithme récursif simplifié

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le premier algorithme est composé de trois étapes et sa mise en œuvre nécessite l'utilisation de deux pas :  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Dans ce qui suit, nous proposons une version simplifiée de cet algorithme.

Nous considérons le problème dans le cas d'un bruit blanc sur l'entrée de variance  $\sigma_u^2$ . Dans ce nouveau contexte,  $M(R_{uu}) = \sigma_u^2 I_{n+1}$  et la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\theta^*$  satisfait :

$$g_j^* = \theta^*(j) = \frac{1}{\sigma_u^2} R_{yu}(j). \quad (2.31)$$

Il est possible d'estimer directement les composantes du vecteur de paramètres à partir de  $R_{yu}(j)$ . L'algorithme, ci-dessus, utilise ce principe et permet ainsi d'éviter la troisième étape de l'algorithme précédent. Il permet aussi de réduire l'utilisation de deux pas d'adaptation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en un seul.

La version simplifiée se compose de deux étapes :

- **Étape 1** : *Estimation de  $R_{zx}(j)$*

Cette étape ressemble à la première de l'algorithme précédent, elle consiste en l'estimation récursive de  $R_{zx}(j)$  pour  $j \in [0, n]$  et elle est donnée par :

$$\widehat{R}_{zx}(j)_t = \widehat{R}_{zx}(j)_{t-1} + \mu(z_t x_{t-j} - \widehat{R}_{zx}(j)_{t-1}) \quad (2.32)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation.

- **Étape 2** : *Estimation de  $\theta^*$*

La deuxième étape consiste à calculer en temps réel des estimations de  $R_{yu}(j)$  en utilisant celles de la première étape comme suite :

$$\widehat{R}_{yu}(j)_t = \sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu} \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j)_t \right). \quad (2.33)$$

Pour  $j \in [0, n]$ . Ensuite, l'estimation de la  $j^{\text{me}}$  composante de  $\theta^*$  à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\widehat{\theta}(j)_t = \frac{1}{\sigma_u^2} \widehat{R}_{yu}(j)_t. \quad (2.34)$$

Cela donne

$$\widehat{\theta}(j)_t = \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} \widehat{P}_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j)_t \right). \quad (2.35)$$

Cet algorithme simplifié est résumé dans le tableau 3.

---

**Algorithme 3** : Estimation récursive de  $\theta^*$

---

**Entrée** :  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ ,  $\mu$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_0$  pour  $j \in [0, n]$  et  $\widehat{\theta}_0$

À chaque instant  $t$  faire :

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  à partir de (2.32).
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{\theta}(j)_t$  à partir de (2.35).
- 

### 2.4.3 Analyse des algorithmes 2 et 3

L'objectif de cette section est de fournir une analyse de convergence des algorithmes 2 et 3 et une analyse de variance de l'algorithme 2. Nous nous intéressons d'abord aux propriétés de convergence des algorithmes proposés. Ces algorithmes sont, partiellement, basés sur l'algorithme du gradient stochastique. Par conséquent les propriétés de convergence de ce dernier ont un fort impact sur notre analyse. Pour cela, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

- **H4** :  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  sont tels que pour tous les  $j$

$$\left\{ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2| < \infty \right. . \quad (2.36)$$

Cette hypothèse peut sembler abrupte. Elle implique simplement que les échantillons de  $x_t$  et  $z_t$ , suffisamment distants dans le temps, sont indépendants. Cette hypothèse est raisonnable dans le cas de l'identification d'un système stable.

#### 2.4.3.1 Analyse de l'algorithme 3

Le théorème 1, ci-dessous, considère le cas d'un  $\mu$  décroissant. Ce théorème utilise la définition de  $P^{-1'}(a) = \frac{dP^{-1}(a)}{da} = \frac{1}{P'(a)}$

**Théorème 2.1** Considérons le système décrit dans la **section 2.3** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**. En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$  et  $\mu = \frac{1}{t}$ . Alors

- $\widehat{\theta}_t$  calculé par l'algorithme 2 converge presque sûrement et converge en moyenne quadratique vers  $\theta^*$
- La variance de  $\widehat{\theta}(j)_t$  est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathcal{E}\{\widetilde{\theta}(j)_t^2\} = \left( \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(j)) \right)^2 A \quad (2.37)$$

$$\text{avec } A = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2)$$

- Pour  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\widehat{\theta}_t$  est

$$\mathcal{E}\{\|\widehat{\theta}_t - \theta^*\|_2^2\} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.38)$$

■

**Preuve du Théorème 2.1**

Avec  $\mu = \frac{1}{t}$ , l'estimation de  $\widehat{R}_{zx}$  calculée à partir de (2.32), peut être réécrite comme suite :

$$\widehat{R}_{zx}(j)_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t z_k x_{k-j} \quad (2.39)$$

L'ergodicité et la stationnarité dans les hypothèses 1 et 2 impliquent une convergence presque certaine et une convergence quadratique moyenne de  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  vers  $R_{zx}(j)$ .

En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$ , du fait que  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction continue et dérivable,  $P_C^{-1}(\widehat{R}_{zx}(j)_t)$  converge presque sûrement et converge en moyenne quadratique vers  $P_C^{-1}(R_{zx}(j))$ . L'estimation de la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\theta^*$  est calculée à partir de l'équation (2.35), ce qui implique que  $\widehat{\theta}_t$  converge presque sûrement et converge en moyenne quadratique vers  $\theta^*$ .

Considérons la variance de  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$ . A partir de l'équation (2.39)  $\mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = \mathcal{E}\{(R_{zx}(j) - \widehat{R}_{zx}(j)_t)^2\}$  peut-être réécrite comme suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} &= \frac{1}{t^2} \mathcal{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^t (R_{zx}(j) - z_k x_{k-j})\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{k'=1}^t (\mathcal{E}\{z_k x_k z_{k'} x_{k'}\} - R_{zx}(j)^2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

En prenant  $h = k' - k$  on obtient

$$\mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{h=-k}^{t-1-k} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \quad (2.41)$$

Ceci peut être réécrit comme suit

$$t \mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = \frac{1}{t} \sum_{h=-(t-1)}^{t-1} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \quad (2.42)$$

avec  $k_{\min} = -\min(0, h)$  et  $k_{\max} = t - 1 - \max(0, h)$ . A partir de la stationnarité, nous obtenons

$$t \mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = \frac{1}{t} \sum_{h=-(t-1)}^{t-1} (t - |h|) (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \quad (2.43)$$

par la suite

$$\begin{aligned} t \mathcal{E}\{\widetilde{R}_{zx}(j)_t^2\} &= \sum_{h=-(t-1)}^{t-1} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \\ &\quad - \frac{1}{t} \sum_{h=-(t-1)}^{t-1} |h| (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'après l'hypothèse **H4**, nous avons

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2| < \infty \quad (2.45)$$

donc, nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \quad (2.46)$$

La variance de  $\hat{\theta}(j)_t$  est définie par  $\mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = \mathcal{E}\{(\theta^*(j) - \hat{\theta}(j)_t)^2\}$ . Du fait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\} = 0$  avec une approximation de Taylor du premier ordre sur  $P^{-1}(\cdot)$ , A partir de l'équation (2.30) nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = \left( \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(i)) \right)^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} t \mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\} \quad (2.47)$$

Cela donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = \left( \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(i)) \right)^2 A \quad (2.48)$$

$$\text{avec } A = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{z_k x_{k-j} z_{k+h} x_{k+h-j}\} - R_{zx}(j)^2).$$

■

Ce résultat montre la convergence de l'algorithme pour le choix de  $\mu = \frac{1}{t}$ . Ce choix peut poser problème lors de l'identification d'un système variant dans le temps. En effet, pour  $t$  grand, le gain d'adaptation devient faible et ne permet plus une adaptation sur l'étape 1 de l'algorithme. Le théorème suivant propose un résultat dans le cas d'un pas d'adaptation constant.

**Théorème 2.2** Considérons le système décrit dans la **section 2.3** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**. En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$  avec  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction linéaire sur  $[\min_{j,t} \widehat{R}_{zx}(j)_t, \max_{j,t} \widehat{R}_{zx}(j)_t]$ . Si  $0 < \mu < 2$ , alors

—  $\hat{\theta}_t$  obtenu par l'algorithme 3 est tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (2.49)$$

— La variance de  $\hat{\theta}(j)_t$  est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = \left( \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(j)) \right)^2 A \quad (2.50)$$

avec

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k \left( \sum_{k=h}^{\infty} \mu(1-\mu)^{k-h} (z_t x_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-j} - R_{zx}(j)^2) \right). \quad (2.51)$$



### Preuve du Théorème 2.2

Considérons d'abord l'estimation de  $R_{xx}(j)$ . Le produit  $x_t x_{t-j}$  peut s'écrire :  $x_t x_{t-j} = R_{xx}(j) + e_t(j)$  avec  $\mathcal{E}\{e_t(j)\} = 0$ .

Définissons  $\tilde{R}_{xx}(j)_t = R_{xx}(j) - \hat{R}_{xx}(j)_t$ .

A partir de l'équation (2.22) nous avons :

$$\tilde{R}_{xx}(j)_t = (1 - \mu)\tilde{R}_{xx}(j)_{t-1} - \mu_1 e_t(j) \quad (2.52)$$

Ensuite

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu)\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_{t-1}\} - \mu_1 \mathcal{E}\{e_t(j)\} \quad (2.53)$$

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu)\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_{t-1}\}. \quad (2.54)$$

Ceci donne :

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu)^t \mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_0\}. \quad (2.55)$$

Si  $\mu$  est tel que  $0 < \mu < 2$ , alors  $-1 < 1 - \mu < 1$  et donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = 0$  et par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{xx}(j)_t\} = R_{xx}(j). \quad (2.56)$$

De même, si  $0 < \mu < 2$ , alors on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{zx}(j)_t\} = R_{zx}(j). \quad (2.57)$$

Considérons maintenant l'estimation de la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\theta^*$ . En supposant que  $\hat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$  et  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction linéaire sur  $[\min_{j,t} \hat{R}_{zx}(j)_t, \max_{j,t} \hat{R}_{zx}(j)_t]$

$\mu = \frac{1}{t}$  alors nous avons

$$\mathcal{E}\{\hat{\theta}(j)_t\} = \frac{\sigma_{y+vy}\sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1}(\mathcal{E}\{\hat{R}_{zx}(j)_t\}) \quad (2.58)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{\theta}(j)_t\} = \frac{\sigma_{y+vy}\sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{zx}(j)_t\}) \quad (2.59)$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (2.60)$$

Considérons maintenant la variance sur  $\hat{R}_{zx}(j)_t$ . Notons d'abord que  $\hat{R}_{zx}(j)_t$  est la sortie du filtre passe-bas du premier ordre  $\frac{\mu}{1-(1-\mu)q^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(1-\mu)^k q^{-k}$ , filtre dont l'entrée est  $z_t x_{t-j}$ . Nous avons ainsi :

$$\hat{R}_{zx}(j)_t = \sum_{k=0}^t \mu(1-\mu)^k z_{t-k} x_{t-k-j}. \quad (2.61)$$



$\tilde{R}_{zx}(j)_t$  peut ainsi s'écrire comme suit :

$$\tilde{R}_{zx}(j)_t = \sum_{k=0}^t \mu(1-\mu)^k (R_{zx}(j) - z_{t-k}x_{t-k-j}). \quad (2.62)$$

La variance  $\mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\}$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\} &= \mathcal{E}\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k z_{t-k}x_{t-k-j}\right)\left(\sum_{k'=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^{k'} z_{t-k'}x_{t-k'-j}\right) - R_{zx}(j)^2\right\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^{k'} (z_{t-k}x_{t-k-j}z_{t-k'}x_{t-k'-j} - R_{zx}(j)^2)\right)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^{k'} (\mathcal{E}\{z_{t-k}x_{t-k-j}z_{t-k'}x_{t-k'-j}\} - R_{zx}(j)^2)\right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

En prenant  $h = k - k'$  nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{R}_{zx}(j)_t^2\} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k \left(\sum_{h=k}^{\infty} \mu(1-\mu)^{h-k} (\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-j}\} - R_{zx}(j)^2)\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Enfin, définissons  $\tilde{\theta}(j)_t = \theta^*(j) - \hat{\theta}(j)_t$ , D'après l'hypothèse 4, nous pouvons voir que, si  $0 < \mu < 2$ , alors le terme à droite dans (2.64) est fini. Supposons  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction linéaire sur  $[\min_{j,t} \hat{R}_{zx}(j)_t, \max_{j,t} \hat{R}_{zx}(j)_t]$   $\mu = \frac{1}{t}$  alors nous avons

$$\tilde{\theta}(j)_t^2 = \left(\frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(j))\right)^2 \tilde{R}_{zx}(j)_t^2 \quad (2.65)$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = \left(\frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(j))\right)^2 A \quad (2.66)$$

avec

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(1-\mu)^k \left(\sum_{h=k}^{\infty} \mu(1-\mu)^{k-h} (z_t x_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-j} - R_{zx}(j)^2)\right). \quad (2.67)$$

■

Ce résultat montre que l'algorithme est asymptotiquement non biaisé pour un pas d'adaptation constant. Il découle aussi de ce résultat que la variance dépend explicitement de  $\mu$ ,  $C$ ,  $\theta^*$  et des niveaux de bruit. On peut remarquer que

$\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} z_{t-h} x_{t+h-j}\}$  peut être exprimée avec une intégrale quadruple en utilisant les fonctions de corrélation  $R_{yu}(j)$  et  $R_{uu}(j)$  pour différents décalages  $j$ . Ainsi

$\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} z_{t-h} x_{t+h-j}\}$  peut être calculée si les fonctions de corrélation précédente sont connues, c'est-à-dire si le vecteur  $\theta^*$  est connu.

Ceci montre qu'il est possible de faire une analyse de variance a posteriori à partir d'une estimation de  $\theta^*$ , il est donc possible de calculer une estimation de la variance sur  $\hat{\theta}_t$ .

Concernant l'impact de  $\mu$ , il apparait que pour les faibles  $\mu$  nous avons  $\mu(1-\mu)^k \simeq \mu$ , alors (2.59) devient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\} = . \quad (2.68)$$

$$\left( \frac{\sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu}}{\sigma_u^2} P^{-1'}(R_{zx}(j)) \right)^2 \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{h=k}^{-\infty} (\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-j}\} - R_{zx}(j)^2) \right)$$

Cela montre que la variance augmente si  $\mu$  augmente. Ces résultats et interprétations sont confirmés par des applications numériques dans la **section 2.5**.

### 2.4.3.2 Analyse de l'algorithme 2

L'analyse de l'algorithme 2 est plus délicate. Nous nous concentrons ici sur une analyse de la convergence dans le cas de pas d'adaptation constants.

**Théorème 2.3** Considérons le système décrit dans la **section 2.3** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3**. En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$  et que la dérivée d'ordre supérieur à 1 de  $P_C(\cdot)$  est nulle au voisinage de  $\mathcal{E}\{R_{uu}(i)_t\}$  et de  $\mathcal{E}\{R_{yu}(i)_t\}$ . Supposons également que  $\tilde{\theta}_{t-1}$  est non corrélé avec  $M(\widehat{R}_{uut})$ . Si

$$\begin{cases} 0 < \mu_1 < 2 \\ 0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}} \end{cases} \quad (2.69)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur propre maximale de  $M(\widehat{R}_{uut})$ , alors  $\hat{\theta}_t$  est tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (2.70)$$

■

#### Preuve du Théorème 2.3

Considérons d'abord l'estimation de  $R_{xx}(j)$ . Le produit  $x_t x_{t-j}$  peut s'écrire :  $x_t x_{t-j} = R_{xx}(j) + e_t(j)$  avec  $\mathcal{E}\{e_t(j)\} = 0$ .

Définissons  $\tilde{R}_{xx}(j)_t = R_{xx}(j) - \widehat{R}_{xx}(j)_t$ .

A partir de l'équation (2.22) nous avons :

$$\tilde{R}_{xx}(j)_t = (1 - \mu_1) \tilde{R}_{xx}(j)_{t-1} - \mu_1 e_t(j) \quad (2.71)$$

Ensuite,

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu_1)\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_{t-1}\} - \mu_1\mathcal{E}\{e_t(j)\} \quad (2.72)$$

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu_1)\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_{t-1}\}. \quad (2.73)$$

Ceci donne :

$$\mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = (1 - \mu_1)^t \mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_0\}. \quad (2.74)$$

Si  $\mu_1$  est tel que  $0 < \mu_1 < 2$ , alors  $-1 < 1 - \mu_1 < 1$  et donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{R}_{xx}(j)_t\} = 0$  et par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{xx}(j)_t\} = R_{xx}(j). \quad (2.75)$$

De même, si  $0 < \mu_1 < 2$ , alors on peut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{zx}(j)_t\} = R_{zx}(j). \quad (2.76)$$

Considérons maintenant l'estimation de  $R_{uu}(j)$ .  $\hat{R}_{uu}(j)_t$  est calculée dans (2.29) en utilisant  $\hat{P}_C^{-1}(\cdot)$ .

En supposant que  $\hat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$ , pour  $\tilde{R}_{xx}(j)_t$  faible et du fait que  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction continue et dérivable nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{uu}(j)_t\} = \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{xx}(j)_t\} \right) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \quad (2.77)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{uu}(j)_t\} = \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1}(R_{xx}(j)) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \quad (2.78)$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{uu}(j)_t\} = R_{uu}(j). \quad (2.79)$$

De même, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{yu}(j)_t\} = R_{yu}(j). \quad (2.80)$$

Enfin, définissons  $\tilde{\theta}_t = \theta^* - \hat{\theta}_t$ . A partir de l'équation (2.30) nous avons :

$$\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t-1} - \mu_2(L(\hat{R}_{yu_t}) - M(\hat{R}_{uu_t})\hat{\theta}_{t-1}). \quad (2.81)$$

Ceci peut être réécrit comme suit :

$$\tilde{\theta}_t = (I_{n+1} - \mu_2 M(\hat{R}_{uu_t}))\tilde{\theta}_{t-1} - \mu_2(L(R_{yu}) - L(\hat{R}_{yu_t})) - \mu_2(M(R_{uu}) - M(\hat{R}_{uu_t}))\theta^*. \quad (2.82)$$

Du fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{uu}(j)_t\} = R_{uu}(j)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{R}_{yu}(j)_t\} = R_{yu}(j)$ , il vient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{L(R_{yu}) - L(\hat{R}_{yu_t})\} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{(M(R_{uu}) - M(\hat{R}_{uu_t}))\theta^*\} = 0.$$

Nous avons ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}_t\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{(I_{n+1} - \mu_2 M(\hat{R}_{uu_t}))\tilde{\theta}_{t-1}\}. \quad (2.83)$$

Si l'on considère  $\tilde{\theta}_{t-1}$  non corrélé avec  $M(\hat{R}_{uu_t})$ , il s'ensuit que la convergence en moyenne de  $\tilde{\theta}_t$  dépend des valeurs propres de  $(I_{n+1} - \mu_2 M(\hat{R}_{uu_t}))$ .

Si l'amplitude de chaque valeur propre est incluse dans  $] -1; 1[$ , alors nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\hat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (2.84)$$

Cela donne la condition suivante sur  $\mu_2$  :

$$0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (2.85)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur propre maximale de  $M(\widehat{R}_{uu_t})$ . ■

L'analyse proposée dans cette section est locale, il est possible de la faire de manière plus fine à partir de l'analyse de l'algorithme du gradient stochastique. Cette analyse locale permet néanmoins d'avoir une idée pour les choix de  $\mu_1$  et de  $\mu_2$ .

Notons que d'après (2.74) et (2.83) il apparaît que la vitesse de convergence dépend de  $|1 - \mu_1|$  et des valeurs propres de  $(I_{n+1} - \mu_2 M(\widehat{R}_{uu_t}))$ . En général, si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont choisis de telles sortes que  $|1 - \mu_1| \simeq 1$  et  $I_{n+1} - \mu_2 M(\widehat{R}_{uu_t}) \simeq I_{n+1}$ , alors la vitesse de convergence est faible. Les choix de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont abordés dans la section suivante.

## 2.5 Simulations et résultats

### 2.5.1 Données d'identification

Pour évaluer les différents algorithmes proposés et quantifier leurs performances, des simulations numériques sont proposées ici. Cette section est divisée en trois parties dans lesquelles sont étudiés certains aspects des trois algorithmes précédents. Les méthodes développées dans ce chapitre sont appliquées sur l'exemple numérique proposé dans [44] et [86]. Dans cet exemple numérique

$$\theta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7 \\ 4 \\ -2.8 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Les données numériques ont été générées selon (2.1) et (2.2). Les bruits  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et leur amplitude est ajustée pour avoir différentes valeurs de SNR.

### 2.5.2 Estimation de l'amplitude de la réponse fréquentielle par l'Algorithme 1 (page 33)

Dans cette section, nous présentons des résultats de simulation de l'algorithme 1. Dans ce qui suit, pour chaque expérience,  $u_t$  est un bruit blanc gaussien filtré par le filtre passe-bas à temps discret  $\frac{1}{1-0.9q^{-1}}$ . Pour chaque expérience concernant  $w_\gamma(j)$  dans (2.16), la fenêtre par défaut est celle de Hamming telle que :

$$w_\gamma(j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi j}{\gamma} \right) \right) & \text{si } |j| < \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.87)$$

Dans une première expérience, nous appliquons l'algorithme dans le contexte suivant : le seuil est  $C = 0$  et le nombre de données est  $N = 10^5$ . Sur la figure 2.3 nous présentons l'estimation de l'amplitude de la réponse fréquentielle du modèle considéré. Nous remarquons que cette estimation tend bien vers la réponse fréquentielle du système.

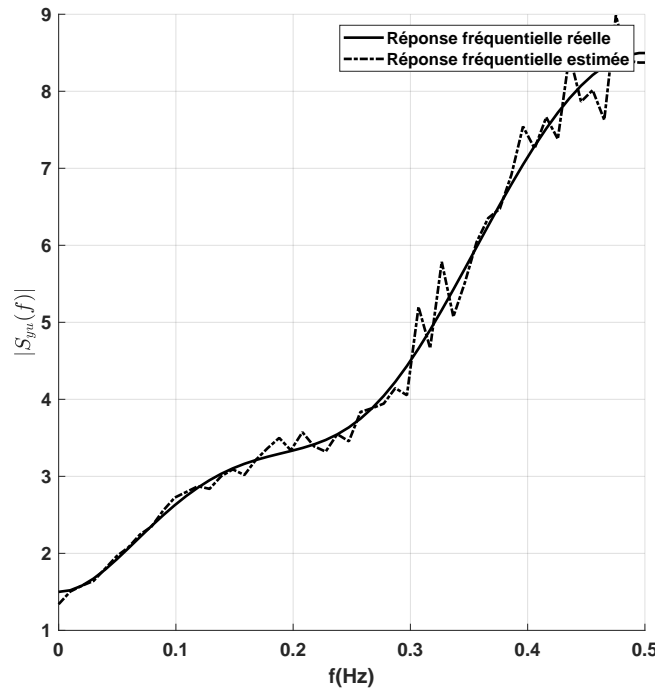


Figure 2.3 – Algorithme 1 pour l'estimation de  $S_{yu}(f)$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^5$ .

Dans une deuxième expérience, afin d'évaluer les performances de l'algorithme proposé, en fonction de  $C$  et de  $N$ , deux simulations de Monte-Carlo avec 100 jeux de données ont été réalisées sur des séquences de longueur  $N \in [5 \cdot 10^3; 5 \cdot 10^4]$  : la première en utilisant  $C = 0$ , la seconde en utilisant  $C = 1$ . Afin de quantifier l'efficacité de l'algorithme proposé, nous considérons l'erreur définie par :

$$Er = \text{moyenne} \int_{f=0}^{f=T_e/2} \left| |S_{yu}(f)| - \left| \widehat{S}_{yu}(f) \right| \right| df \quad (2.88)$$

La figure 2.4 présente  $Er$  en fonction de  $N$ . Elle montre que l'erreur diminue si  $N$  augmente. Les performances dépendent de  $C$ , ici le cas  $C = 0$  fournit la meilleure performance.

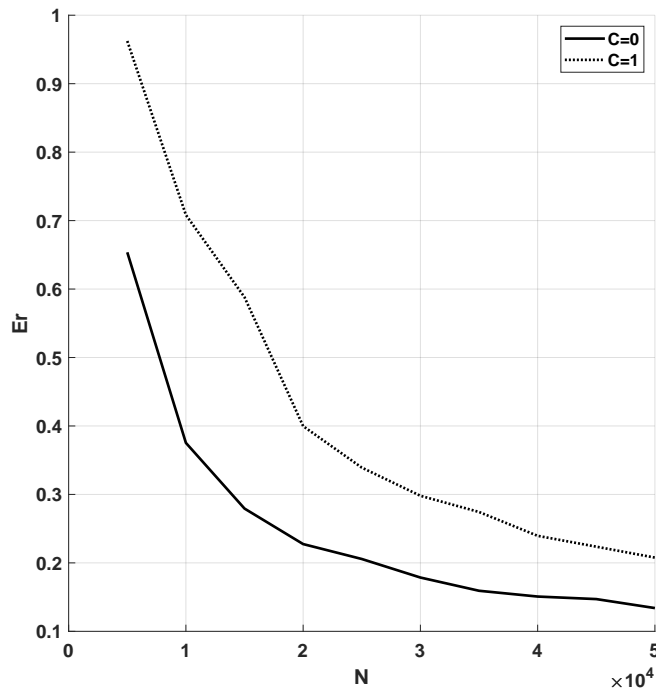


Figure 2.4 – Algorithme 1 :  $Er$  en fonction de  $N$  pour  $C = 0$  et  $C = 1$ .

Pour illustrer davantage l'influence de  $C$ , deux simulations de Monte-Carlo sont maintenant effectuées avec 100 jeux de données pour  $C \in [-1; 1]$  : la première avec  $N = 5 \cdot 10^3$ , la seconde avec  $N = 10^4$ . La figure 2.5 montre que les meilleurs résultats sont obtenus pour  $C$  au voisinage de 0.

Enfin, dans une troisième expérience, afin d'évaluer l'impact du bruit sur les performances, nous proposons deux simulations de Monte-Carlo avec 100 jeux pour  $N \in [5 \cdot 10^3; 5 \cdot 10^4]$  et  $C = 0$  : la première avec  $SNR = 10dB$ , la seconde avec  $SNR = 5dB$ . La figure 2.6 présente  $Er$  en fonction de  $N$  pour les deux SNR. Il semble qu'un faible SNR dégrade les performances, mais cela peut être compensé par un  $N$  plus élevé.

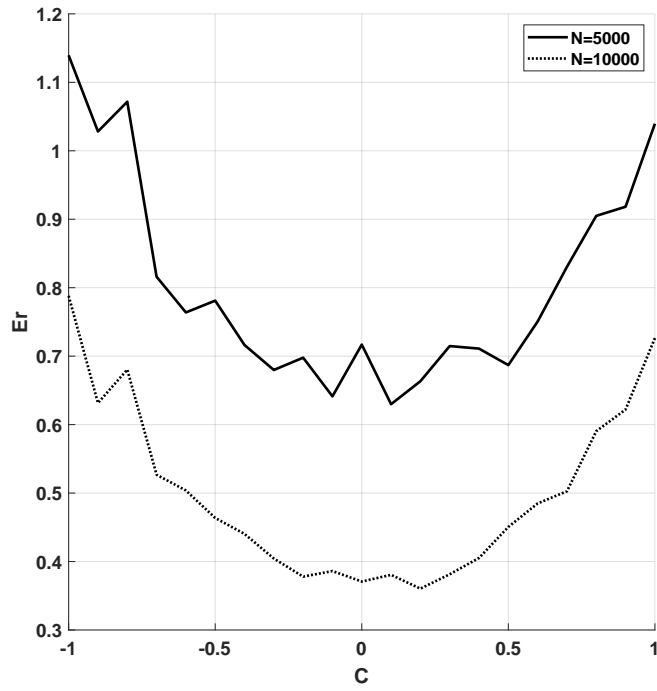


Figure 2.5 – Algorithme 1 :  $Er$  en fonction de  $C$  pour  $N = 5 \cdot 10^3$  et  $N = 10^4$ .

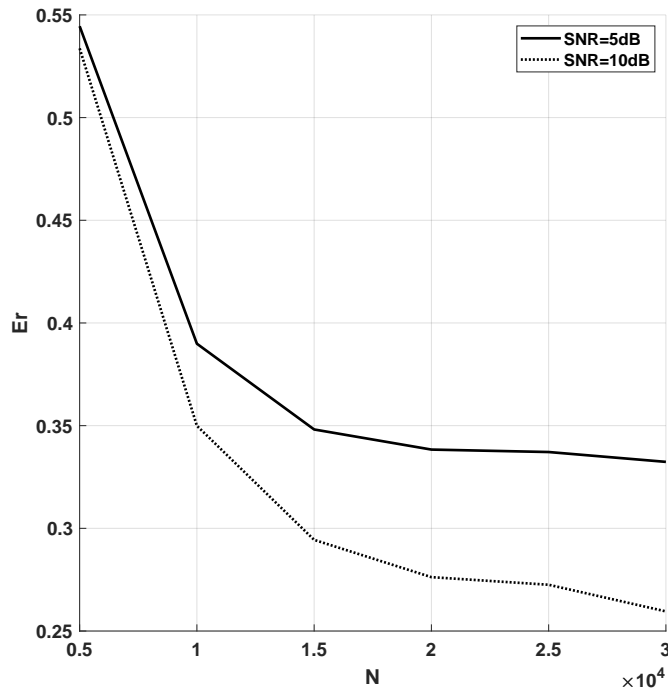


Figure 2.6 – Algorithme 1 :  $Er$  en fonction du SNR pour  $C = 0$  et  $N = 10^5$ .

### 2.5.3 Résultats d'identification paramétrique : Algorithme 2 (page 36)

Dans cette section nous présentons les résultats de simulation de l'algorithme 2. Dans ce qui suit, l'entrée  $u_t$  est un bruit blanc gaussien de variance unitaire filtré par le filtre passe-bas  $\frac{0.3}{1-0.7q^{-1}}$

#### En absence du bruit

La première expérience est consacrée à la convergence des paramètres estimés vers les valeurs réelles. Nous réalisons une simulation de Monte Carlo avec 100 réalisations avec  $C = 0$  et  $N = 10^4$ . Nous choisissons des valeurs constantes  $\mu_1 = 0.005$  et  $\mu_2 = 0.001$ .

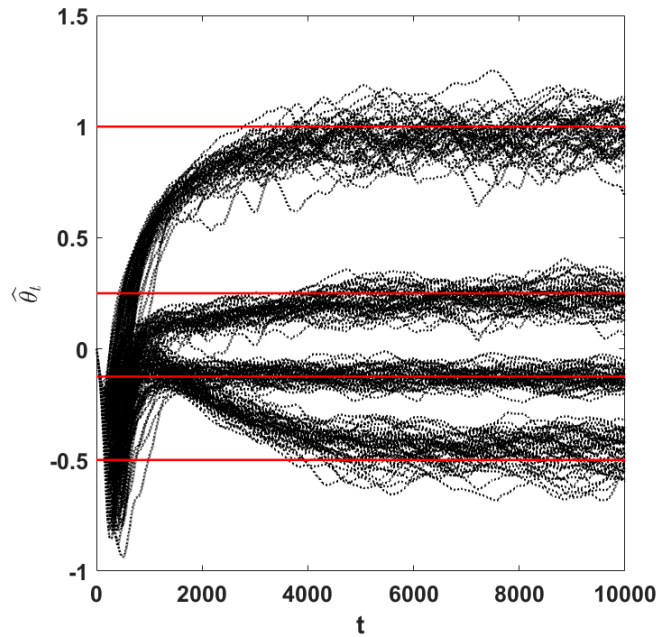


Figure 2.7 – Algorithme 2 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  sur 100 expériences pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

La figure 2.7 montre la convergence en moyenne de  $\hat{\theta}_t$  sur les 100 réalisations. Les figures 2.8, 2.9 et 2.10 présentent le comportement de  $\hat{R}_{xx}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{zx}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{yu}(j)_t$  et de  $\hat{\theta}_t$  en fonction du temps pour l'une des réalisations. Ces résultats montrent l'efficacité de l'algorithme d'identification récursif proposé.



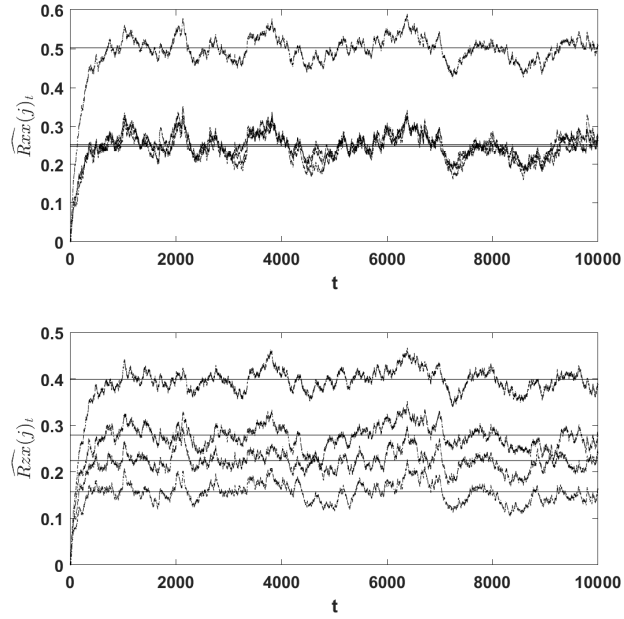


Figure 2.8 – Algorithme 2 :  $\widehat{R}_{xx}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

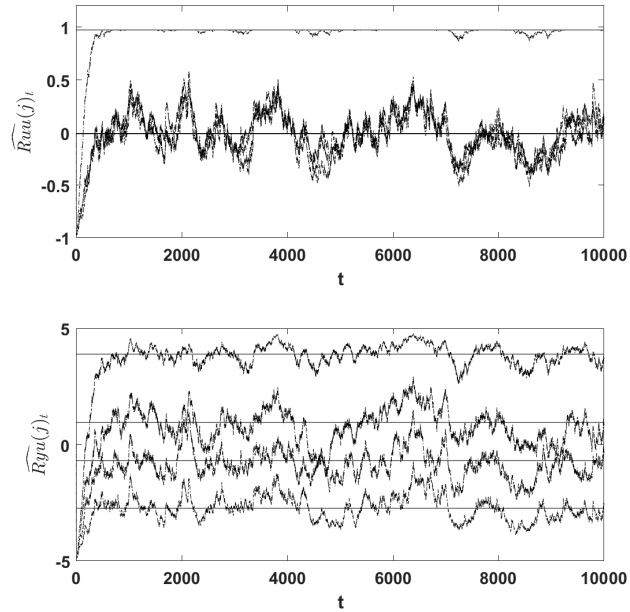


Figure 2.9 – Algorithme 2 :  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

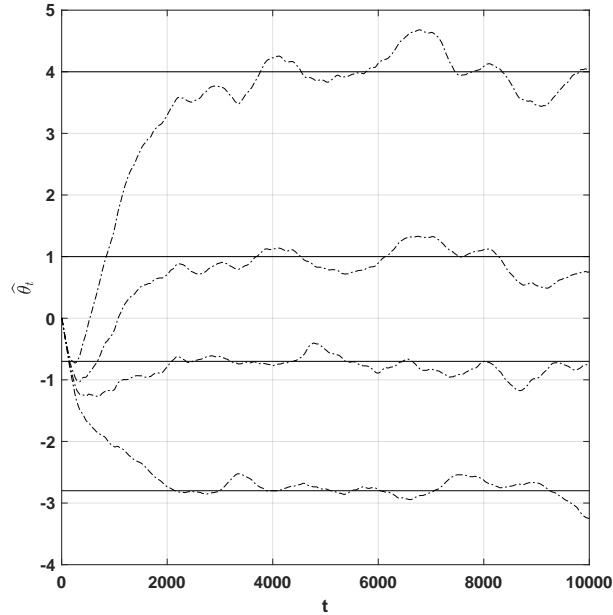


Figure 2.10 – Algorithme 2 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

Une deuxième expérience est proposée ici afin de montrer le comportement de l'algorithme dans le cas d'un seuil non nul. L'algorithme est implémenté avec les mêmes valeurs de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

$\hat{P}^{-1}(\cdot)$  est obtenu en utilisant une approximation polynomiale d'ordre 9. Deux simulations de Monte-Carlo avec 100 réalisations ont été effectuées. Nous avons appliqué l'algorithme dans le cas où  $C = 0.5$  et  $C = 1$ . Les figures 2.11 et 2.12 montrent encore la convergence de  $\hat{\theta}_t$  vers  $\theta^*$  même pour un seuil non nul.

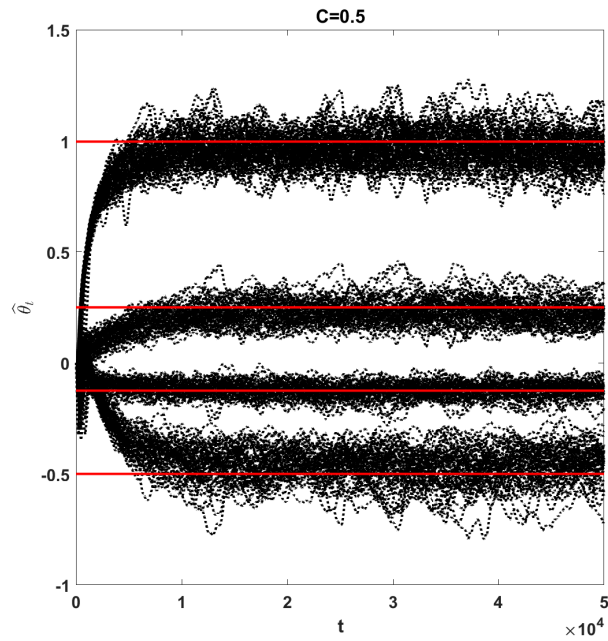


Figure 2.11 – Algorithme 2 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  sur 100 expériences pour  $C = 0.5$  et  $N = 5.10^4$ .

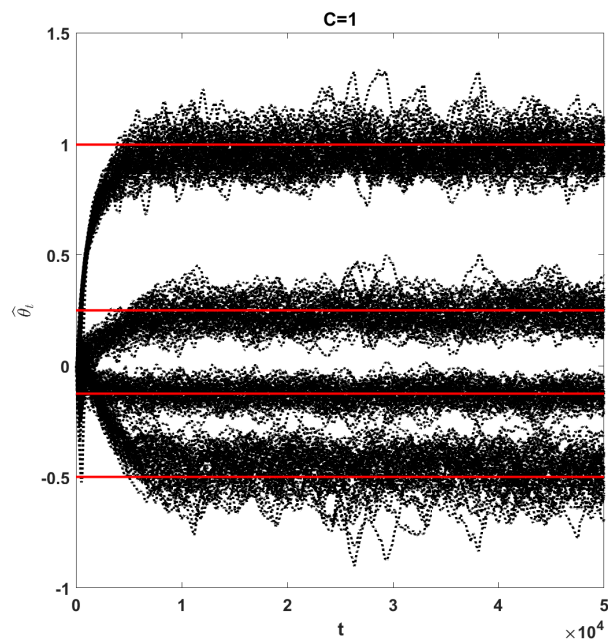


Figure 2.12 – Algorithme 2 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  sur 100 expériences pour  $C = 1$  et  $N = 5.10^4$ .

### Influences de $\mu_1$ et $\mu_2$

La troisième expérience est consacrée aux choix des paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Ces paramètres peuvent être choisis de deux manières différentes : constants ou adaptatifs. Dans cette expérience, nous choisissons  $C = 0$  et  $N = 5.10^4$ . Quatre valeurs de  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  sont testés :

- $\mu = 0.1$  ;
- $\mu = 0.01$  ;
- $\mu = 0.001$  ;
- $\mu_t = \frac{1}{t}$  ;

On se focalise sur les performances de l'algorithme via l'erreur instantanée définie par :

$$Er_t = \log_{10}(\|\theta^* - \hat{\theta}_t\|) \quad (2.89)$$

La figure 2.13 présente l'évolution temporelle de  $Er_t$  en fonction de  $t$  pour ces 4 choix. A partir de cette figure, nous pouvons conclure que pour  $\mu$  constant, si  $\mu$  est faible, alors la variance est faible mais la vitesse de convergence est également faible. Le choix d'un  $\mu$  adaptatif peut fournir une vitesse de convergence élevée et une faible variance.

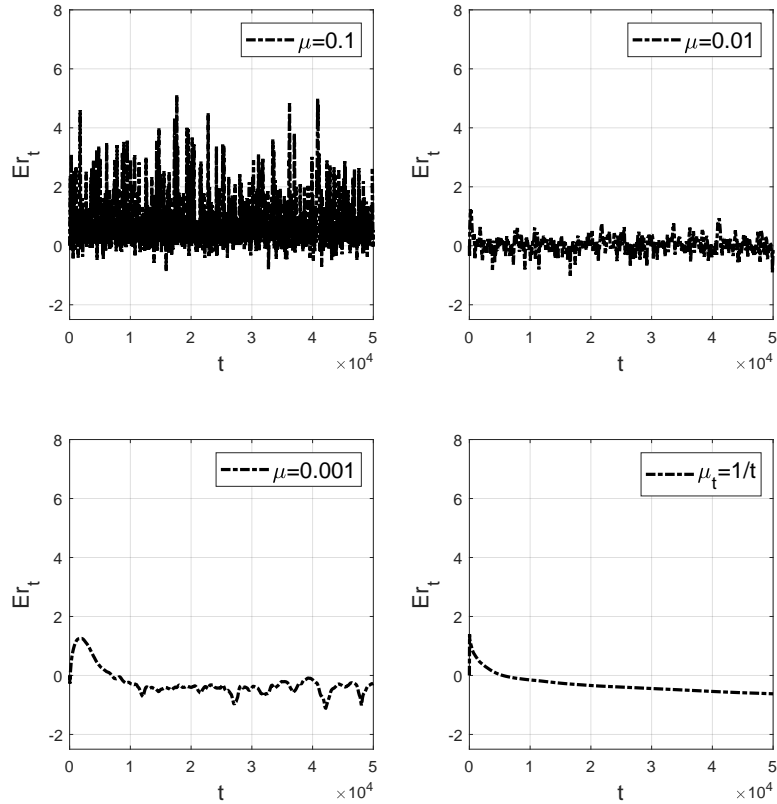


Figure 2.13 – Algorithme 2 :  $Er_t$  en fonction de  $t$  pour différentes valeurs de  $\mu$  pour  $C = 0$  et  $N = 5.10^4$ .

### Influence du bruit

Dans la quatrième expérience, nous réalisons deux simulations de Monte-Carlo avec 100 réalisations en présence du bruit et pour  $SNR \in [0dB; 20dB]$  : la première avec  $N = 10^3$ , la seconde avec  $N = 10^4$ . Le seuil est choisi égale à zéro. La figure 2.14 présente  $Er = \log_{10}(\text{moyenne}\{|\theta^* - \hat{\theta}_N|\})$  en fonction du  $N$ . Elle montre la capacité de l'algorithme proposé à estimer les paramètres du système en présence du bruit. Pour un nombre d'échantillons réduit l'impact du bruit est important et la variance dépend naturellement de SNR, la variance la plus élevée est obtenue avec un SNR plus faible.

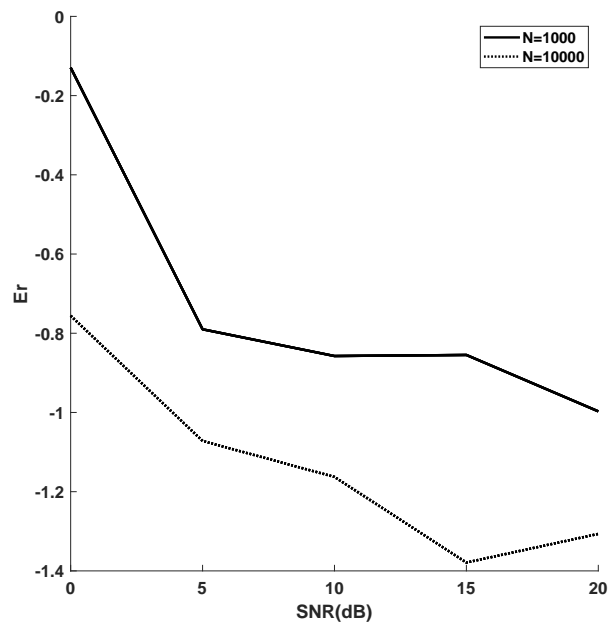


Figure 2.14 – Algorithme 2 :  $Er$  en fonction de  $SNR$  pour  $N = 1000$  et  $N = 10000$  pour  $C = 0$ .

### 2.5.4 Résultats d'identification paramétrique : Algorithme 3 (page 37)

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les performances de l'Algorithme 3. L'entrée  $u_t$  est un bruit blanc. Nous choisissons le pas adaptatif  $\mu_t = \frac{1}{t}$ .  $\hat{P}^{-1}(\cdot)$  est obtenu en utilisant une approximation polynomiale d'ordre 9 pour un seuil différent de zéro.

#### En absence de bruit

Dans la première expérience, le seuil est  $C = 0$  et les données sont générées avec  $N = 10^4$ . Les figures 2.15, 2.16 et 2.17 montrent l'efficacité de l'algorithme

proposé pour l'estimation des fonctions de corrélation et des paramètres du système considéré.

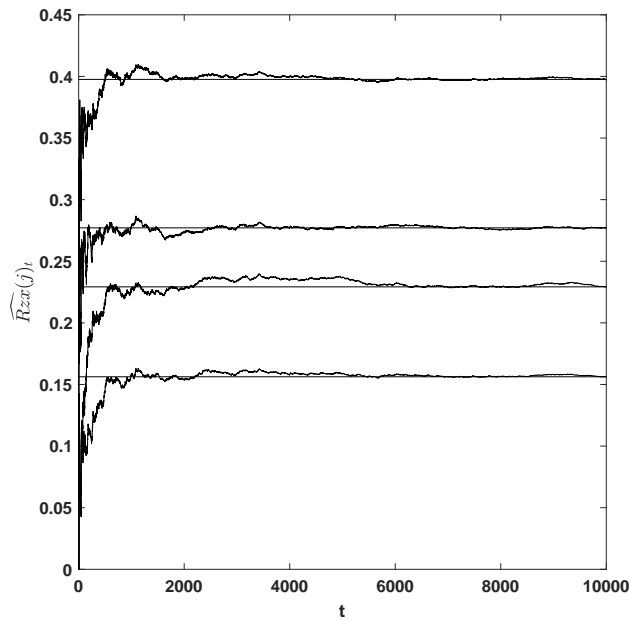


Figure 2.15 – Algorithme 3 :  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

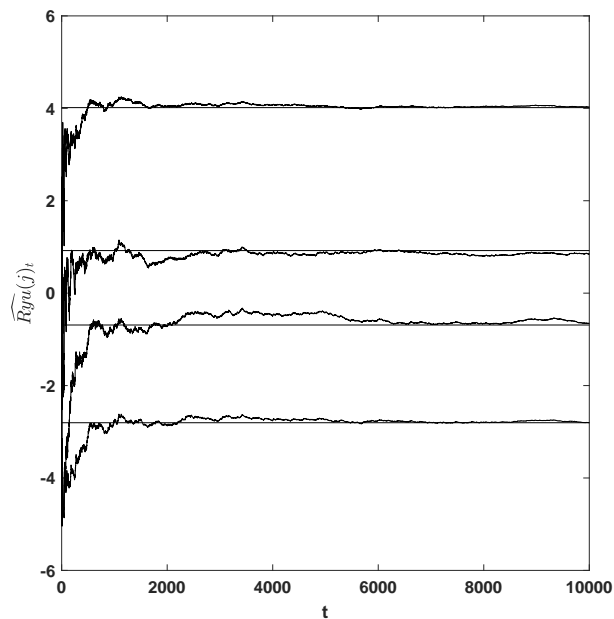


Figure 2.16 – Algorithme 3 :  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ .

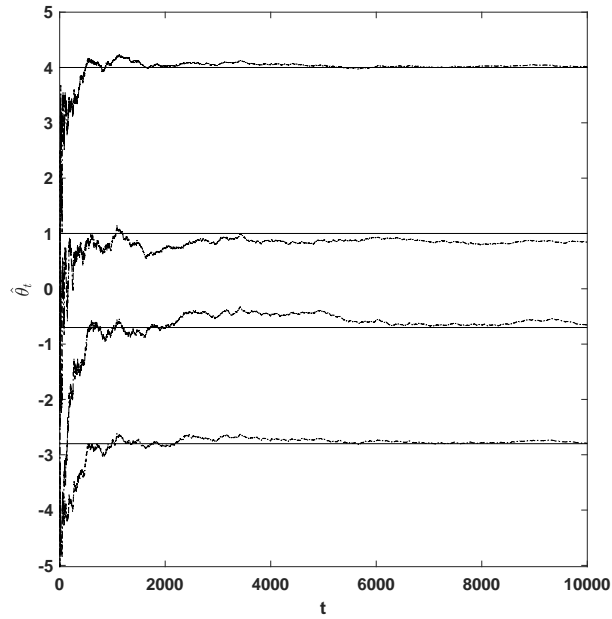


Figure 2.17 – Algorithme 3 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 10^4$ ..

La deuxième expérience traite de l'influence d'un seuil  $C$  différent de zéro sur l'algorithme proposé. Nous avons appliqué l'algorithme dans le cas où  $C = 0.5$  et  $C = 1$ . Les figures 2.18 et 2.19 montrent encore la convergence de  $\hat{\theta}_t$  vers  $\theta^*$  même pour un seuil non nul.

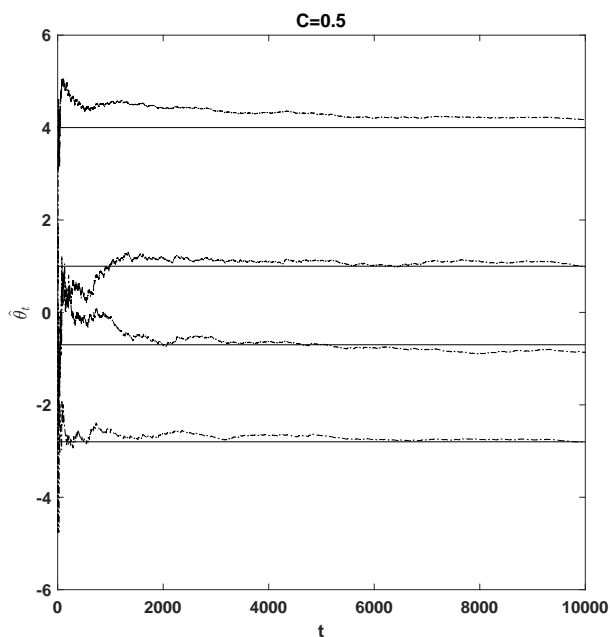


Figure 2.18 – Algorithme 3 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0.5$  et  $N = 10^4$ .

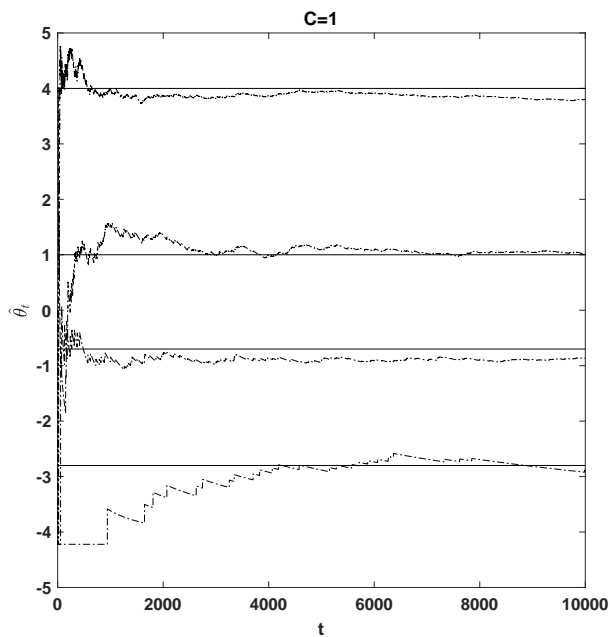


Figure 2.19 – Algorithme 3 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 1$  et  $N = 10^4$ .



### Analyse de variance

Un exemple numérique utilisant (2.68) est proposé dans ce qui suit afin d'avoir une meilleure idée de l'impact de  $\mu$ , de  $C$  et de  $\theta^*(j)$  sur la variance. Nous considérons ici un système d'ordre  $n = 10$ ,  $G^*(q)$  tel que

$$G^*(q) = \sum_{k=0}^n a^k q^{-k}$$

avec  $-1 < a < 1$ .

Cette expérience est réalisée en absence du bruit et nous supposons que  $u_t$  est un bruit blanc gaussien avec une variance unitaire. Les figures 2.20 et 2.21 présentent la variance  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\}$  en fonction de  $a$  et de  $C$  pour  $\mu = 0.01$  et  $\mu = 0.001$ . Il apparaît que la variance est plus faible dans le cadre suivant : petit  $\mu$  (ce qui confirme l'analyse de (2.68)), faible  $|C|$  et  $|\theta^*(j)|$  petit.

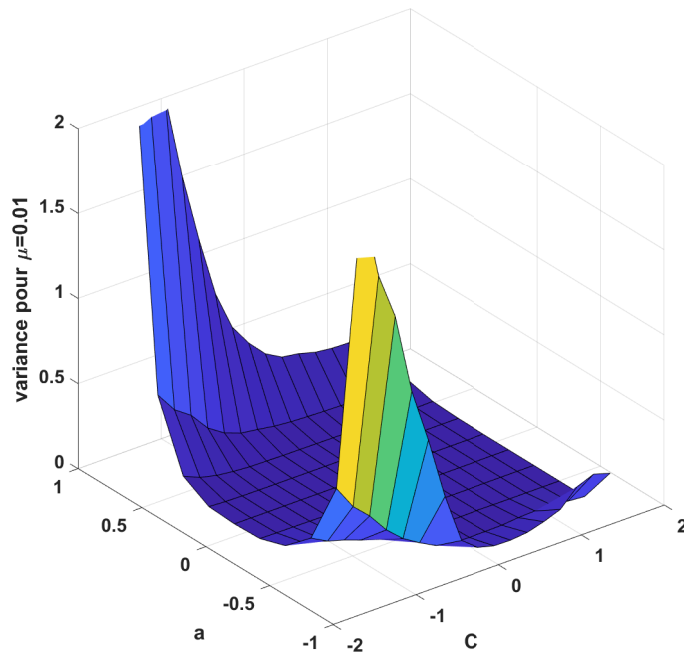


Figure 2.20 –  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\}$  à partir de l'équation (2.68) en fonction de  $a$  et  $C$  pour  $\mu = 0.01$ .

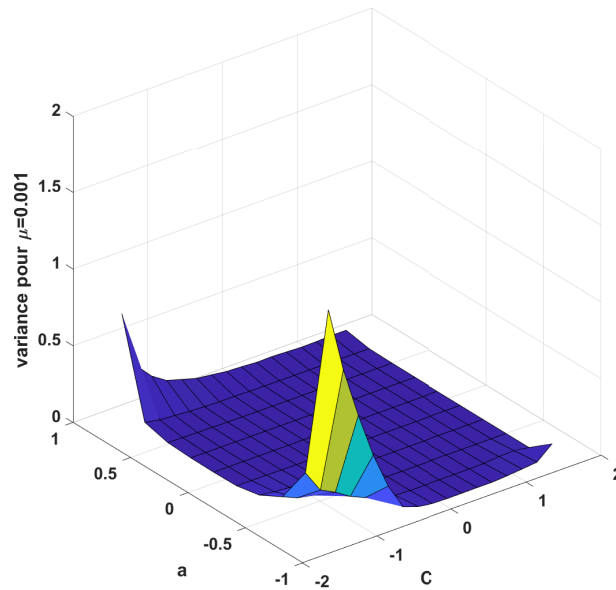


Figure 2.21 –  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{\theta}(j)_t^2\}$  à partir de l'équation (2.68) en fonction de  $a$  et  $C$  pour  $\mu = 0.001$ .

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé trois algorithmes d'identification d'un système RIF avec des mesures binaires des entrées et sorties. Le premier algorithme permet une analyse fréquentielle du système. Ce type d'analyse est souvent utilisé en identification afin d'anticiper, par exemple, la présence d'une résonance. Le deuxième algorithme permet l'identification en temps réel des paramètres du système. Cet algorithme est basé en partie sur la technique du gradient stochastique. Les conditions de convergence de cet algorithme ont été analysées. Le troisième algorithme est une version simplifiée du deuxième algorithme. Cette version est à utiliser lorsque l'entrée est un bruit blanc gaussien. Différents résultats de simulations ont été présentés afin d'évaluer leurs performances.

A noter que le premier algorithme a fait l'objet d'une publication [58]. Les deux autres algorithmes ont été présentés dans un article en cours d'expertise pour la revue Asian Journal of Control.

Ce chapitre a été consacré à une version particulière des systèmes linéaires, les systèmes RIF. Le chapitre suivant traite une structure plus complexe, les systèmes RII.

## Chapitre 3

Identification en boucle ouverte des systèmes RII à base des mesures binaires de l'entrée et de la sortie

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une extension de l'approche du **chapitre 2** à des systèmes plus complexes, plus précisément, aux systèmes à réponse impulsionnelle infinie (RII). Nous proposons deux solutions pour l'identification de ces systèmes. Ce chapitre est organisé comme suit : la section 3.2 présente la problématique et les notations. La section 3.3 contient l'identification batch du système. Dans la section 3.4 nous proposons un algorithme pour une identification récursive. Dans la section 3.5, des simulations numériques seront présentées. La section 3.6 conclut ce chapitre.

### 3.2 Problématique et notations

Considérons le système linéaire en temps discret de la figure 3.1 donné par :

$$y_t = G^*(q)u_t \quad (3.1)$$

où  $u_t$  et  $y_t$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système.  $G^*(q)$  est la fonction de transfert du système définie par :

$$G^*(q) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)} \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{cases} A^*(q) = 1 + a_1^*q^{-1} + \dots + a_n^*q^{-n_a} \\ B^*(q) = b_0^* + b_1^*q^{-1} + \dots + b_m^*q^{-n_b} \end{cases} \quad (3.3)$$

$n_a$  et  $n_b$  sont les degrés respectivement de  $A^*(q)$  et  $B^*(q)$ . D'après l'équation (3.1),  $y_t$  peut s'exprimer comme suit :

$$y_t = \phi_t^T \theta^* \quad (3.4)$$

avec

$$\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-n_b} \\ -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-n_a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta^* = \begin{pmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_{n_b}^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_{n_a}^* \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Les séquences d'entrée et de sortie sont supposées inconnues. Les seuls échantillons disponibles sont ceux de  $\{x_t\}$  et de  $\{z_t\}$  définis par :

$$\begin{aligned} x_t = Q_{C_u}(u_t + v_t^u) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{u_t + v_t^u}{\sigma_{u+v^u}} \geq C_u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ z_t = Q_{C_y}(y_t + v_t^y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{y_t + v_t^y}{\sigma_{y+v^y}} \geq C_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $C_u$  et  $C_y$  sont deux seuils qui peuvent être différents de zéro.  $\{v_t^u\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont des séquences de bruit, respectivement, sur l'entrée et sur la sortie.  $\sigma_{u+v^u}^2$  et  $\sigma_{y+v^y}^2$  sont des variances, respectivement, de  $\{u_t + v_t^u\}$  et de  $\{y_t + v_t^y\}$ .

Comme dans le chapitre précédent, les seuils  $C_u$  et  $C_y$  peuvent être différents. Sans perte de généralité, pour plus de simplicité dans la présentation nous avons choisi  $C = C_u = C_y$ . Dans un même esprit, l'algorithme et son analyse sont présentés avec  $n = n_b = n_a$  ( $n$  supposé connu).

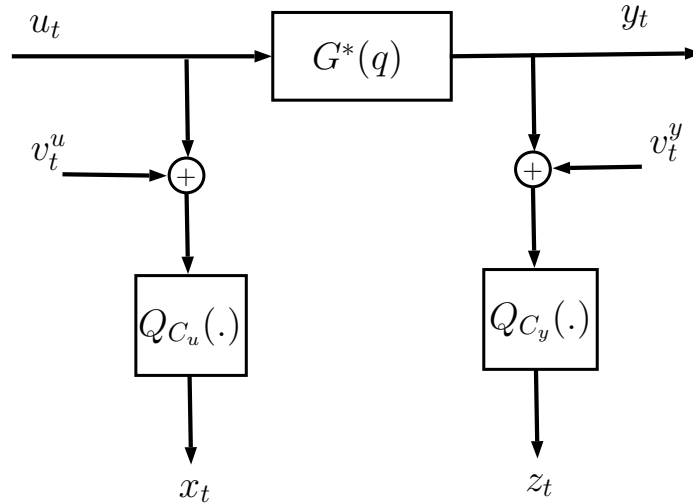


Figure 3.1 – Système RII à sortie et entrée binaires

L'objectif de ce chapitre est de proposer des algorithmes d'identification, étant donné l'ensemble des observations  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ , avec  $N$  représente le nombre de données disponibles.

Les hypothèses suivantes complètent la description du problème :

- **H1** :  $\{u_t\}$  est généré par un processus ARMA stationnaire, ergodique et strictement stable  $u_t = H^*(q)e_t$  où  $\{e_t\}$  est une séquence gaussienne de moyenne nulle.
- **H2** :  $\sigma_u$  et  $\sigma_y$  sont connus.
- **H3** :  $\{v_t^u\}$  et  $\{v_t^y\}$  représentent un bruit blanc gaussien de moyenne nulle,  $\sigma_{v^u}^2$  et  $\sigma_{v^y}^2$  sont connus.  $\{v_t^u\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont indépendants de  $u_t$  et indépendants entre eux.
- **H4** : Les polynômes  $B^*(q)$  et  $A^*(q)$  sont premiers entre eux.

**Remarque 3.1** : H2 est une double hypothèse et repose sur la connaissance de  $\sigma_u$  et  $\sigma_y$ , elle est une hypothèse de normalisation comme celle utilisée dans [6], [43], [44] et [64]. La connaissance de  $\sigma_{v^u}$  et  $\sigma_{v^y}$  correspond à une hypothèse sur la connaissance

de la distribution du bruit comme celle de [83] et [36]. On peut remarquer que cette double hypothèse peut parfois être limitante dans certaines utilisations pratiques.

### 3.3 Algorithme Batch

#### 3.3.1 Description de l'algorithme

A partir de l'équation (3.4) on peut montrer que :

$$\theta^* = (\mathcal{E} \{ \phi_t \phi_t^T \})^{-1} \mathcal{E} \{ \phi_t y_t \} \quad (3.7)$$

L'estimation de  $\theta^*$  est alors possible si les composantes de  $\mathcal{E} \{ \phi_t \phi_t^T \}$  et  $\mathcal{E} \{ \phi_t y_t \}$  sont connues. Malheureusement, du fait que les séquences d'entrée et de sortie ne sont pas connues, il n'est pas possible d'évaluer  $\mathcal{E} \{ \phi_t \phi_t^T \}$  et  $\mathcal{E} \{ \phi_t y_t \}$  et donc d'appliquer directement (3.7).

L'algorithme d'identification décrit, ci-dessous, permet de surmonter cette difficulté. À l'image de l'approche présentée dans [67], cet algorithme est organisé en trois étapes. Elles sont détaillées dans cette section et analysées dans la suivante.

— **Étape 1 : Estimations de  $R_{xx}(j)$ ,  $R_{zz}(j)$ ,  $R_{zx}(j)$  et de  $R_{xz}(j)$**

Dans un premier temps, nous estimons les fonctions d'auto-corrélation de l'entrée binaire  $x_t$  et de la sortie  $z_t$  et la fonction d'inter-corrélation entre  $z_t$  et  $x_t$ . Ces estimations sont, respectivement, désignées  $\widehat{R}_{xx}(j)$ ,  $\widehat{R}_{zz}(j)$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)$ . Pour  $j \in [0; n]$ , ces estimations sont calculées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{R}_{xx}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N x_t x_{t-j} \\ \widehat{R}_{zz}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N z_t z_{t-j} \\ \widehat{R}_{zx}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N z_t x_{t-j} \\ \widehat{R}_{xz}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N x_t z_{t-j} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

— **Étape 2 : Estimations de  $R_{uu}(j)$ ,  $R_{yy}(j)$ ,  $R_{yu}(j)$  et de  $R_{uy}(j)$**

La deuxième étape consiste à estimer les fonctions d'auto-corrélation de l'entrée binaire  $u_t$  et de la sortie  $y_t$  et la fonction d'inter-corrélation de  $y_t$  et de  $u_t$ .

Comme dans le **chapitre 2**, il apparaît d'après la figure 3.2 que  $R_{xx}(j)$ ,

$R_{zz}(j)$ ,  $R_{zx}(j)$  et  $R_{xz}(j)$  correspondent aux probabilités suivantes :

$$\begin{cases} R_{xx}(j) = \Pr\left\{\frac{(u_t+v_t^u)}{\sigma_{u+v^u}} \geq C, \frac{(u_{t-j}+v_{t-j}^u)}{\sigma_{u+v^u}} \geq C\right\} \\ R_{zz}(j) = \Pr\left\{\frac{(y_t+v_t^y)}{\sigma_{y+v^y}} \geq C, \frac{(y_{t-j}+v_{t-j}^y)}{\sigma_{y+v^y}} \geq C\right\} \\ R_{zx}(j) = \Pr\left\{\frac{(y_t+v_t^y)}{\sigma_{y+v^y}} \geq C, \frac{(u_{t-j}+v_{t-j}^u)}{\sigma_{u+v^u}} \geq C\right\} \\ R_{xz}(j) = \Pr\left\{\frac{(u_t+v_t^u)}{\sigma_{u+v^u}} \geq C, \frac{(y_{t-j}+v_{t-j}^y)}{\sigma_{y+v^y}} \geq C\right\} \end{cases} \quad (3.9)$$

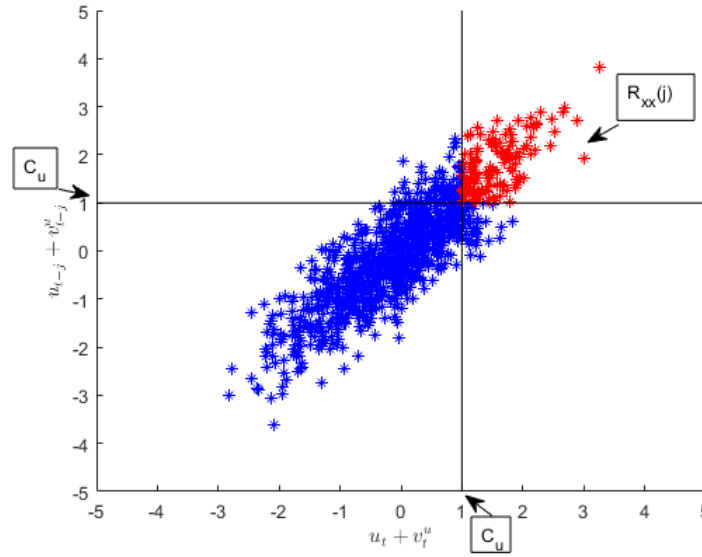


Figure 3.2 – Exemple de la proportion  $R_{xx}(j)$  (en rouge) sur l'ensemble des points  $(u_t + v_t^u; u_{t-j} + v_{t-j}^u)$  avec un nombre d'échantillons  $N = 1000$  et  $C_u = 1$ .

Du fait que  $u_t$  possède une distribution normale et une moyenne nulle,  $y_t$  a aussi une distribution normale et une moyenne nulle. Il s'ensuit que  $R_{xx}(j)$ ,  $R_{zz}(j)$ ,  $R_{zx}(j)$  et  $R_{xz}(j)$  peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\begin{cases} R_{xx}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(u_t + v_t^u, u_{t-j} + v_{t-j}^u) d(u_t + v_t^u) d(u_{t-j} + v_{t-j}^u) \\ R_{zz}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(y_t + v_t^y, y_{t-j} + v_{t-j}^y) d(y_t + v_t^y) d(y_{t-j} + v_{t-j}^y) \\ R_{zx}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(y_t + v_t^y, u_{t-j} + v_{t-j}^u) d(y_t + v_t^y) d(u_{t-j} + v_{t-j}^u) \\ R_{xz}(j) = \int_C^{+\infty} \int_C^{+\infty} \psi(u_t + v_t^u, y_{t-j} + v_{t-j}^y) d(u_t + v_t^u) d(y_{t-j} + v_{t-j}^y) \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\psi(.,.)$  est définie par (2.9).

Ces quatre égalités peuvent être exprimées à l'aide de la même fonction  $P_C(.,.)$  telle que  $R_{xx}(j) = P_C(\bar{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j))$ ,  $R_{zz}(j) = P_C(\bar{R}_{(y+v^y)(y+v^y)}(j))$ , etc.

Comme vu auparavant, cette fonction est inversible. En utilisant  $P_C^{-1}(\cdot)$ , les estimations  $\widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j)$ ,  $\widehat{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j)$ ,  $\widehat{R}_{(y+vy)(u+vu)}(j)$  et  $\widehat{R}_{(u+vu)(y+vy)}(j)$  sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j) = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j) \right) \\ \widehat{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j) = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zz}(j) \right) \\ \widehat{R}_{(y+vy)(u+vu)}(j) = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{zx}(j) \right) \\ \widehat{R}_{(u+vu)(y+vy)}(j) = P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xz}(j) \right) \end{cases} \quad (3.11)$$

Enfin, dans cette deuxième étape, il reste à calculer les estimations de  $\widehat{R}_{uu}(j)$ ,  $\widehat{R}_{yy}(j)$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)$  comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{uu}(j) = \sigma_{u+vu}^2 \widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \\ \widehat{R}_{yy}(j) = \sigma_{y+vy}^2 \widehat{R}_{(y+vy)(y+vy)}(j) - \sigma_{vy}^2 \delta(j) \\ \widehat{R}_{yu}(j) = \sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu} \widehat{R}_{(y+vy)(u+vu)}(j) \\ \widehat{R}_{uy}(j) = \sigma_{u+vu} \sigma_{y+vy} \widehat{R}_{(u+vu)(y+vy)}(j) \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $\sigma_{u+vu} = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_{vu}^2}$ ,  $\sigma_{y+vy} = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{vy}^2}$ .

— **Étape 3 : Estimation de  $\theta^*$**

C'est l'étape finale. Partant de (3.7),  $\theta^*$  dépend de  $R_{uu}(j)$ ,  $R_{yy}(j)$ ,  $R_{yu}(j)$  et  $R_{uy}(j)$  pour  $j \in [0; n]$ .

Notons

$$M(R_{uu}, R_{yy}, R_{yu}, R_{uy}) = \mathcal{E} \{ \phi_t \phi_t^T \} \quad (3.13)$$

$$L(R_{yy}, R_{yu}) = \mathcal{E} \{ \phi_t y_t \} \quad (3.14)$$

l'estimation de  $\theta^*$  est donnée par :

$$\widehat{\theta}_N = M(\widehat{R}_{uu}, \widehat{R}_{yy}, \widehat{R}_{yu}, \widehat{R}_{uy})^{-1} L(\widehat{R}_{yy}, \widehat{R}_{yu}) \quad (3.15)$$

L'algorithme proposé est résumé dans le tableau 4.

---

**Algorithme 4** : Estimation de  $\theta^*$

---

**Entrée** :  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0; n]$  calculer  $\widehat{R}_{xx}(j)$ ,  $\widehat{R}_{zz}(j)$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)$  à partir de (3.8).
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0; n]$  calculer  $\widehat{R}_{uu}(j)$ ,  $\widehat{R}_{yy}(j)$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)$  à partir de (3.12).
  - **Étape 3** : Calculer  $\widehat{\theta}_N$  à partir de (3.15).
-



### 3.3.2 Analyse de la variance et de la convergence

Après avoir présenté l'algorithme dans la section précédente, l'objectif de cette section est d'étudier sa variance et sa convergence. Pour cela, nous ajoutons l'hypothèse suivante :

— **H5** :  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  sont tels que pour tous les  $j$  et  $k$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)| < +\infty \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_t z_{t-j} z_{t+h} z_{t+h-k}\} - R_{zz}(j)R_{zz}(k)| < +\infty \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{zx}(j)R_{zx}(k)| < +\infty \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} z_{t+h} z_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{zz}(k)| < +\infty \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{zx}(j)R_{xx}(k)| < +\infty \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{z_t z_{t-j} z_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{zz}(j)R_{zx}(k)| < +\infty \end{array} \right. . \quad (3.16)$$

Cette hypothèse est une extension de l'hypothèse H4 dans le chapitre 2. Elle est similaire à l'hypothèse 1.1 dans [24]. Elle implique que les échantillons de  $\{x_t\}$  et de  $\{z_t\}$  suffisamment séparés dans le temps sont approximativement indépendants. Les hypothèses 1 et 2 sont cohérentes avec cette hypothèse H5. Par exemple, considérons la première inégalité de (3.16) en absence du bruit, avec  $C = 0$  et  $j = k = 0$ . Nous avons

$$\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k) = R_{xx}(h) - \mathcal{E}\{x_t\}^2. \quad (3.17)$$

Si  $\{u_t\}$  satisfait l'hypothèse 1 alors il existe  $0 < \rho < 1$  telle que  $|\overline{R}_{uu}(h)| < \rho^{|h|}$ . Pour  $C = 0$ ,  $\mathcal{E}\{x_t\} = \frac{1}{2}$  et il est montré dans [71] que  $R_{xx}(h) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}(\overline{R}_{uu}(h))$  il s'ensuit que

$$|\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)| < \frac{1}{2\pi} |\sin^{-1}(\rho^{|h|})| \quad (3.18)$$

et ensuite

$$\begin{aligned} & \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |h| |\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)| \\ & < \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |h \sin^{-1}(\rho^{|h|})| \end{aligned} . \quad (3.19)$$

Du fait que  $0 < \rho < 1$ , on peut montrer que  $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} |h \sin^{-1}(\rho^{|h|})| < \infty$ , ce qui donne la première inégalité dans (3.16).

### 3.3.2.1 Analyse de convergence

Le théorème 1, ci-dessous, montre que  $\widehat{\theta}_N$  converge vers  $\theta^*$ .

**Théorème 3.1** Considérons le système décrit dans la section 3.2 et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**.  $\widehat{\theta}_N$  est tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\theta}_N = \theta^* \quad (3.20)$$

■

#### Preuve du Théorème 3.1

$u_t$ ,  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des séquences stationnaires, par conséquent  $x_t$  et  $z_t$  sont également des séquences stationnaires. Il s'ensuit que (3.8) fournit une estimation asymptotiquement non biaisée pour  $R_{xx}(j)$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{R}_{xx}(j) = R_{xx}(j) \quad (3.21)$$

Il en va de même pour  $R_{zz}(j)$ ,  $R_{zx}(j)$  et  $R_{xz}(j)$ .

$\widehat{R}_{uu}(j)$  est calculée en utilisant (3.12) avec  $\widehat{R}_{(u+v^u)(u+v^u)}(j)$  obtenue à partir de (3.11). Du fait que  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction continue, il s'ensuit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{R}_{uu}(j) = R_{uu}(j) \quad (3.22)$$

Il en va de même pour  $R_{yy}(j)$ ,  $R_{yu}(j)$  et  $R_{uy}(j)$ .

Il résulte de ce qui précède que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} M(\widehat{R}_{uu}, \widehat{R}_{yy}, \widehat{R}_{yu}, \widehat{R}_{uy}) = M(R_{uu}, R_{yy}, R_{yu}, R_{uy}) \quad (3.23)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} L(\widehat{R}_{yy}, \widehat{R}_{yu}) = L(R_{yy}, R_{yu}) \quad (3.24)$$

Donc nous avons :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \widehat{\theta}_N = \theta. \quad (3.25)$$

■

### 3.3.2.2 Analyse de la variance

Dans un premier temps le Théorème 3.2 ci-dessous se focalise sur la variance des

estimations à l'étape 1. Au préalable on note :  $\widehat{R}_{xx} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{xx}(0) \\ \vdots \\ \widehat{R}_{xx}(n) \end{pmatrix}$ ,

$$\widehat{R}_{zz} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{zz}(0) \\ \vdots \\ \widehat{R}_{zz}(n) \end{pmatrix}, \widehat{R}_{zx} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{zx}(0) \\ \vdots \\ \widehat{R}_{zx}(n) \end{pmatrix} \text{ et } \widehat{R}_{xz} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{xz}(0) \\ \vdots \\ \widehat{R}_{xz}(n) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 3.2** Considérons le système décrit dans la section 3.2 et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**.

— La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{xx}$  est  $\mathcal{N}(R_{xx}, \frac{1}{N}\Sigma^{xx})$  où  $\Sigma^{xx}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{xx}$  à la  $(j+1)$ ème ligne et à la  $(k+1)$ ème colonne de  $\Sigma^{xx}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{xx} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - \mathcal{E}\{x_t x_{t-j}\} \mathcal{E}\{x_{t+h} x_{t+h-k}\}). \quad (3.26)$$

— La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{zz}$  est  $\mathcal{N}(R_{zz}, \frac{1}{N}\Sigma^{zz})$  où  $\Sigma^{zz}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{zz}$  à la  $(j+1)$ ème ligne et à la  $(k+1)$ ème colonne de  $\Sigma^{zz}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{zz} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{z_t z_{t-j} z_{t+h} z_{t+h-k}\} - \mathcal{E}\{z_t z_{t-j}\} \mathcal{E}\{z_{t+h} z_{t+h-k}\}). \quad (3.27)$$

— La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{zx}$  est  $\mathcal{N}(R_{zx}, \frac{1}{N}\Sigma^{zx})$  où  $\Sigma^{zx}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{zx}$  à la  $(j+1)$ ème ligne et à la  $(k+1)$ ème colonne de  $\Sigma^{zx}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{zx} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{z_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - \mathcal{E}\{z_t x_{t-j}\} \mathcal{E}\{x_{t+h} x_{t+h-k}\}). \quad (3.28)$$

— La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{xz}$  est  $\mathcal{N}(R_{xz}, \frac{1}{N}\Sigma^{xz})$  où  $\Sigma^{xz}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{xz}$  à la  $(j+1)$ ème ligne et à la  $(k+1)$ ème colonne de  $\Sigma^{xz}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{xz} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{x_t z_{t-j} x_{t+h} z_{t+h-k}\} - \mathcal{E}\{x_t z_{t-j}\} \mathcal{E}\{x_{t+h} z_{t+h-k}\}). \quad (3.29)$$

■

### Preuve du Théorème 3.2

Le Théorème 3.1 établit que  $\widehat{R}_{xx}$  est une estimation non biaisée de  $R_{xx}$ . Sa covariance est une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ , l'élément à la  $(j+1)$ ème ligne et à la  $(k+1)$ ème colonne est désigné  $Cov_{xx}(j, k)$ , il est défini par

$$\begin{aligned} Cov_{xx}(j, k) &= \mathcal{E}\{(\widehat{R}_{xx}(j) - R_{xx}(j))(\widehat{R}_{xx}(k) - R_{xx}(k))\} \\ &= \frac{1}{N^2} \mathcal{E}\left\{\left(\sum_{t=0}^{N-1} (x_t x_{t-j} - R_{xx}(j))\right)\left(\sum_{t'=0}^{N-1} (x_{t'} x_{t'-k} - R_{xx}(k))\right)\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{t'=0}^{N-1} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t'} x_{t'-k}\} - R_{xx}(j) R_{xx}(k)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

En prenant  $h = t' - t$  nous obtenons

$$NCov_{xx}(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{h=-t}^{N-1-t} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{h+t} x_{h+t-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)) \quad (3.31)$$

Ceci peut être réécrit comme suit

$$NCov_{xx}(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{h=-(N-1)}^{N-1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)) \quad (3.32)$$

avec  $t_{min} = -\min(0, h)$  et  $t_{max} = N - 1 - \max(0, h)$ .

En exploitant la propriété de stationnarité, nous obtenons

$$NCov_{xx}(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{h=-(N-1)}^{N-1} (N - |h|) (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)) \quad (3.33)$$

ensuite

$$NCov_{xx}(j, k) = \sum_{h=-(N-1)}^{N-1} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)) - \frac{1}{N} \sum_{h=-(N-1)}^{N-1} |h| (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)) \quad (3.34)$$

D'après l'hypothèse H5, nous avons

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |h| |\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)| < \infty \quad (3.35)$$

donc nous avons

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} NCov_{xx}(j, k) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{t+h} x_{t+h-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k)). \quad (3.36)$$

avec  $\lim_{N \rightarrow +\infty} NCov_{xx}(j, k) = \sigma_{j,k}^{xx}$

On obtient ainsi (3.26) avec  $\sigma_{j,k}^{xx} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}\{x_t x_{t-j} x_{h+t} x_{h+t-k}\} - R_{xx}(j)R_{xx}(k))$ .

Nous pouvons détailler de la même manière la covariance sur les estimations  $\widehat{R}_{zz}$ ,  $\widehat{R}_{zx}$  et  $\widehat{R}_{xz}$ . ■

**Théorème 3.3** Considérons le système décrit dans la **section 3.2** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**.

— La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{uu}$  est  $\mathcal{N}(R_{uu}, \frac{1}{N}\Sigma^{uu})$  où  $\Sigma^{uu}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{uu}$  à la  $(j+1)^{\text{ème}}$  ligne et à la  $(k+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $\Sigma^{uu}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{uu} = \sigma_{u+vu}^4 (P_C^{-1'}(R_{xx}(j))) \sigma_{j,k}^{xx} (P_C^{-1'}(R_{xx}(k))). \quad (3.37)$$

- La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{yy}$  est  $\mathcal{N}(R_{yy}, \frac{1}{N}\Sigma^{yy})$  où  $\Sigma^{yy}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{yy}$  à la  $(j+1)^{\text{ème}}$  ligne et à la  $(k+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $\Sigma^{yy}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{yy} = \sigma_{y+vy}^4 (P_C^{-1'}(R_{zz}(j))) \sigma_{j,k}^{zz} (P_C^{-1'}(R_{zz}(k))). \quad (3.38)$$

- La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{yu}$  est  $\mathcal{N}(R_{yu}, \frac{1}{N}\Sigma^{yu})$  où  $\Sigma^{yu}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{yu}$  à la  $(j+1)^{\text{ème}}$  ligne et à la  $(k+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $\Sigma^{yu}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{yu} = \sigma_{u+vu}^2 \sigma_{y+vy}^2 (P_C^{-1'}(R_{zx}(j))) \sigma_{j,k}^{zx} (P_C^{-1'}(R_{zx}(k))). \quad (3.39)$$

- La distribution asymptotique de  $\widehat{R}_{uy}$  est  $\mathcal{N}(R_{uy}, \frac{1}{N}\Sigma^{uy})$  où  $\Sigma^{uy}$  désigne une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ . L'élément  $\sigma_{j,k}^{uy}$  à la  $(j+1)^{\text{ème}}$  ligne et à la  $(k+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $\Sigma^{uy}$ , avec  $j \in [0, n]$  et  $k \in [0, n]$ , est

$$\sigma_{j,k}^{uy} = \sigma_{u+vu}^2 \sigma_{y+vy}^2 (P_C^{-1'}(R_{xz}(j))) \sigma_{j,k}^{xz} (P_C^{-1'}(R_{xz}(k))). \quad (3.40)$$

■

### Preuve du Théorème 3.3

D'après le Théorème 3.1  $\widehat{R}_{uu}$  est une estimation asymptotiquement non biaisée de  $R_{uu}$ . Notons  $Cov_{uu}(j, k)$  la covariance entre  $\widehat{R}_{uu}(j)$  et  $\widehat{R}_{uu}(k)$ ,  $Cov_{uu}(j, k)$  peut s'écrire comme :

$$Cov_{uu}(j, k) = \mathcal{E}\{(\widehat{R}_{uu}(j) - R_{uu}(j))(\widehat{R}_{uu}(k) - R_{uu}(k))\} \quad (3.41)$$

Les composantes de  $\widehat{R}_{uu}$  sont calculées comme suit :

$$\widehat{R}_{uu}(j) = \sigma_{u+vu}^2 \widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \quad (3.42)$$

avec  $\widehat{R}_{(u+vu)(u+vu)}(j) = P_C^{-1}(\widehat{R}_{xx}(j))$ .  $P_C^{-1}(\cdot)$  est continue et dérivable, il s'ensuit qu'en utilisant une approximation de Taylor du premier ordre sur  $P_C^{-1}(\cdot)$  nous avons asymptotiquement

$$Cov_{uu}(j, k) = \left( \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1'}(R_{xx}(j)) \right) Cov_{xx}(j, k) \left( \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1'}(R_{xx}(k)) \right). \quad (3.43)$$

Ensuite, d'après le Théorème 2 nous avons :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} NCov_{uu}(j, k) = \sigma_{j,k}^{uu} \quad (3.44)$$

avec  $\sigma_{j,k}^{uu} = \left( \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1'}(R_{xx}(j)) \right) \sigma_{j,k}^{xx} \left( \sigma_{u+vu}^2 P_C^{-1'}(R_{xx}(k)) \right)$ .

La covariance sur les estimations  $\widehat{R}_{zz}$ ,  $\widehat{R}_{zx}$  et  $\widehat{R}_{xz}$  est obtenue de la même manière.

■

**Théorème 3.4** Considérons le système décrit dans la **section 3.2** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**. La distribution asymptotique de  $\hat{\theta}_N$  est  $\mathcal{N}(\theta, \frac{1}{N}\Sigma^\theta)$  où  $\Sigma^\theta$  est tel que

$$\begin{aligned}
\Sigma^\theta = & \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uu/yy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uu/yu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uu/uy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yy/uu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yy/yu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yy/uy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yu/uu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yu/yy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{yu/uy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uy/uu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uy/yy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(k)} \right)^T \\
& + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uy/yu} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(k)} \right)^T + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(j)} \right) \sigma_{j,k}^{uy} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(k)} \right)^T
\end{aligned} \tag{3.45}$$

et  $\hat{\theta}_N$  est tel que

$$\mathcal{E} \left\{ \|\hat{\theta}_N - \theta^*\|^2 \right\} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{N} \right) \tag{3.46}$$

■

#### Preuve du Théorème 3.4

$\hat{\theta}_N$  est calculé à partir de  $\hat{\theta}_N = M(\hat{R}_{uu}, \hat{R}_{yy}, \hat{R}_{yu}, \hat{R}_{uy})^{-1} L(\hat{R}_{yy}, \hat{R}_{yu})$ .

Du fait que  $\theta^*$  est une fonction continue et dérivable de  $R_{uu}$ ,  $R_{yy}$ ,  $R_{yu}$  et  $R_{uy}$ , en utilisant le théorème de Taylor du premier ordre, nous obtenons de façon asymptotique :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_N - \theta^* = & \sum_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uu}(j)} \right) \left( \hat{R}_{uu}(j) - R_{uu}(j) \right) \\
& \sum_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yy}(j)} \right) \left( \hat{R}_{yy}(j) - R_{yy}(j) \right) \\
& \sum_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{yu}(j)} \right) \left( \hat{R}_{yu}(j) - R_{yu}(j) \right) \\
& \sum_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial R_{uy}(j)} \right) \left( \hat{R}_{uy}(j) - R_{uy}(j) \right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{E} \{ (\hat{\theta}_N - \theta^*) (\hat{\theta}_N - \theta^*)^T \} = \frac{1}{N} \Sigma^\theta \tag{3.48}$$

avec  $\Sigma^\theta$  est donnée dans l'équation (3.45).

L'équation (3.46) est une conséquence de ce qui précède. En effet, il s'ensuit que

$$\mathcal{E} \left\{ \|\hat{\theta}_N - \theta^*\|^2 \right\} = \frac{1}{N} \text{trace}(\Sigma^\theta).$$

■

Les théorèmes 3.2, 3.3 et 3.4 montrent que la variance de  $\hat{\theta}_N$  dépend principalement de  $N$ ,  $\theta^*$  et  $C$  et que l'algorithme proposé à un taux de convergence d'ordre  $\frac{1}{N}$ .

Les termes de ces théorèmes peuvent être exprimés à partir de  $\theta^*$ ,  $C$ ,  $\sigma_{u+vu}$ ,  $\sigma_{y+vy}$ ,  $\sigma_{vu}$  et  $\sigma_{vy}$ . Donc, dans la pratique, il est possible de calculer une variance a posteriori de  $\hat{\theta}_N$ .

## 3.4 Algorithme récursif

### 3.4.1 Description de l'algorithme

Ce qui est fait ici est à l'image de ce qui a été fait dans le chapitre 2 pour l'identification récursive de système RIF. Ainsi, à chaque instant  $t$ , nous retrouvons les 3 étapes de l'algorithme 3.1 précédent via une mise en œuvre en temps réel. Ces 3 étapes sont les suivantes :

- **Étape 1 : Estimation de  $R_{xx}(j)$ ,  $R_{zz}(j)$ ,  $R_{zx}(j)$  et de  $R_{xz}(j)$ .**

Dans cette étape, l'estimation récursive de la fonction d'auto-corrélation, de l'entrée binaire  $x_t$ , de la sortie  $z_t$  et de la fonction d'inter-corrélation de  $z_t$  et de  $x_t$ , pour  $j \in [0, n]$ , est calculée par :

$$\begin{cases} \hat{R}_{xx}(j)_t = \hat{R}_{xx}(j)_{t-1} + \mu_1(x_t x_{t-j} - \hat{R}_{xx}(j)_{t-1}) \\ \hat{R}_{zz}(j)_t = \hat{R}_{zz}(j)_{t-1} + \mu_1(z_t z_{t-j} - \hat{R}_{zz}(j)_{t-1}) \\ \hat{R}_{zx}(j)_t = \hat{R}_{zx}(j)_{t-1} + \mu_1(z_t x_{t-j} - \hat{R}_{zx}(j)_{t-1}) \\ \hat{R}_{xz}(j)_t = \hat{R}_{xz}(j)_{t-1} + \mu_1(x_t z_{t-j} - \hat{R}_{xz}(j)_{t-1}). \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $\mu_1$  est le pas d'adaptation.

- **Étape 2 : Estimation de  $R_{uu}(j)$ ,  $R_{yy}(j)$ ,  $R_{yu}(j)$ , et de  $R_{uy}(j)$ .**

Dans cette étape, l'objectif est de calculer des estimations pour  $R_{uu}(j)$ ,  $R_{yy}(j)$ ,  $R_{yu}(j)$  et  $R_{uy}(j)$  en utilisant les estimations de la première étape. La mise en œuvre en temps réel de l'algorithme d'identification en utilisant (3.11) n'est pas possible. En effet, sauf pour  $C = 0$ , il n'existe pas d'expression analytique pour  $P_C^{-1}(\cdot)$ . Pour  $C \neq 0$ , nous proposons d'utiliser une approximation de  $P_C^{-1}(\cdot)$ , comme dans la deuxième étape de l'Algorithme 2 du chapitre 2. On note  $\hat{P}_C^{-1}(\cdot)$  cette approximation de  $P_C^{-1}(\cdot)$ .

Ensuite, à l'instant  $t$ ,  $\hat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{uy}(j)_t$  et  $\hat{R}_{yu}(j)_t$  sont calculées comme suit

$$\begin{cases} \hat{R}_{uu}(j)_t = \sigma_{u+vu}^2 \hat{P}_C^{-1}(\hat{R}_{xx}(j)_t) - \sigma_{vu}^2 \delta(j) \\ \hat{R}_{yy}(j)_t = \sigma_{y+vy}^2 \hat{P}_C^{-1}(\hat{R}_{zz}(j)_t) - \sigma_{vy}^2 \delta(j) \\ \hat{R}_{uy}(j)_t = \sigma_{u+vu} \sigma_{y+vy} \hat{P}_C^{-1}(\hat{R}_{xz}(j)_t) \\ \hat{R}_{yu}(j)_t = \sigma_{y+vy} \sigma_{u+vu} \hat{P}_C^{-1}(\hat{R}_{zx}(j)_t) \end{cases} \quad (3.50)$$

- **Étape 3 : Estimation de  $\theta^*$**

En utilisant  $\hat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\hat{R}_{uy}(j)_t$  et  $\hat{R}_{yu}(j)_t$  l'estimation en temps réel de  $\theta^*$  au temps  $t$  via l'algorithme du gradient stochastique est donnée par :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \mu_2(L(\hat{R}_{yyt}, \hat{R}_{yut}) - M(\hat{R}_{uut}, \hat{R}_{yyt}, \hat{R}_{yut}, \hat{R}_{uyt})\hat{\theta}_{t-1}) \quad (3.51)$$

où  $\mu_2$  est le pas d'adaptation.  $L(\widehat{R}_{yyt}, \widehat{R}_{yut})$  et  $M(\widehat{R}_{uut}, \widehat{R}_{yyt}, \widehat{R}_{yut}, \widehat{R}_{yut})$  sont définis dans  $L(R_{yy}, R_{yu})$  et  $M(R_{uu}, R_{yy}, R_{yu}, R_{uy})$  dans les équations (3.14) et (3.13).

L'algorithme proposé est résumé dans l'Algorithme (5).

---

**Algorithme 5** : Estimation récursive de  $\theta^*$

---

**Entrée** :  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\widehat{R}_{xx}(j)_0$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_0$ ,  $\widehat{R}_{xz}(j)_0$ ,  $\widehat{R}_{zz}(j)_0$  pour  $j \in [0, n]$  et  $\widehat{\theta}_0$ .

À chaque instant  $t$  faire :

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{R}_{xx}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zz}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)_t$  à partir de (3.49).
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0, n]$  calculer  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$  à partir de (3.50).
  - **Étape 3** : Calculer  $\widehat{\theta}_t$  à partir (3.51).
- 

**Remarque 3.2** : Notons que, afin d'éviter un comportement instable de l'algorithme dans les premières itérations, il est possible de projeter  $\widehat{\theta}_t$  dans un compact convexe. Ceci est notamment utilisé dans [36].

### 3.4.2 Analyse de l'algorithme

La convergence de l'algorithme est conditionnée par les choix des pas d'adaptation  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Ces paramètres peuvent être choisis constant ou variant dans le temps à l'image de ce qui se fait pour l'algorithme du gradient. Le Théorème suivant considère le cas d'un  $\mu_1$  variant et d'un  $\mu_2$  constant.

**Théorème 3.5** Considérons le système décrit dans la **section 3.2** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**, avec  $\widehat{R}_{xx}(j)_0 = \widehat{R}_{zz}(j)_0 = \widehat{R}_{zx}(j)_0 = \widehat{R}_{xz}(j)_0 = 0$ , avec  $j \in [0, n]$ . En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$ . Si

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{t-j} \\ 0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}} \end{cases} \quad (3.52)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur propre maximale de  $M(R_{uu}, R_{yy}, R_{yu}, R_{uy})$ , alors  $\widehat{\theta}_t$  est tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\widehat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (3.53)$$

■

#### Preuve du Théorème 3.5



Considérons d'abord l'estimation de  $R_{xx}(j)$ . Introduisons  $\mu_1$  dans l'équation (3.49), nous obtenons

$$\widehat{R}_{xx}(j)_t = \widehat{R}_{xx}(j)_{t-1} + \frac{1}{t-j} (x_t x_{t-j} - \widehat{R}_{xx}(j)_{t-1}). \quad (3.54)$$

(3.54) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\widehat{R}_{xx}(j)_t = \frac{1}{t-j} \left( x_t x_{t-j} - (t-j-1) \widehat{R}_{xx}(j)_{t-1} \right) \quad (3.55)$$

donc après  $(t-j)$  itérations, on peut montrer que :

$$\widehat{R}_{xx}(j)_t = \frac{1}{t-j} \sum_{k=j+1}^t x_k x_{k-j}. \quad (3.56)$$

Du fait que  $u_t$  et  $v_t^u$  sont des séquences stationnaires, il suit que l'équation (3.49) fournit une estimation non-biaisée de  $R_{xx}(j)$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{R}_{xx}(j)_t = R_{xx}(j). \quad (3.57)$$

Il en va de même pour  $\widehat{R}_{zz}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  et pour  $\widehat{R}_{xz}(j)_t$ . Du fait que  $P_C^{-1}(\cdot)$  est une fonction continue et sa dérivée est également une fonction continue, il s'ensuit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j)_t \right) = P_C^{-1} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{R}_{xx}(j)_t \right) = P_C^{-1} (R_{xx}(j)). \quad (3.58)$$

donc nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{R}_{uu}(j)_t = R_{uu}(j) \quad (3.59)$$

Il en va de même pour  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$ .

Enfin, définissons  $\tilde{\theta}_t = \theta^* - \hat{\theta}_t$ .

De l'équation (3.51) nous avons :

$$\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t-1} - \mu_2 (L(\widehat{R}_{yyt}, \widehat{R}_{yut}) - M(\widehat{R}_{uut}, \widehat{R}_{yyt}, \widehat{R}_{yut}, \widehat{R}_{uyt}) \tilde{\theta}_{t-1}). \quad (3.60)$$

D'après  $M(R_{uu}; R_{yy}; R_{yu}; R_{uy})\theta^* = L(R_{yy}; R_{yu})$  et de la conclusion précédente sur  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$ , l'équation (3.60) peut être réécrite comme suite :

$$\tilde{\theta}_t = (I_n - \mu_2 M(R_{uu}; R_{yy}; R_{yu}; R_{uy})) \tilde{\theta}_{t-1}. \quad (3.61)$$

Introduisons maintenant la décomposition propre de la matrice  $M(R_{uu}, R_{yy}, R_{uy}, R_{yu})$  :  
 $M(R_{uu}, R_{yy}, R_{uy}, R_{yu}) = Q\Lambda Q^T$ , où  $Q$  est unitaire.  
 Soit en multipliant les membres de l'équation (3.61) par  $Q^T$  et en notant  $V_t = Q^T \tilde{\theta}_t$  :

$$V_t = (I_n - \mu_2 \Lambda) V_{t-1} \quad (3.62)$$

L'algorithme converge si  $V_t \rightarrow 0$ , ce qui entraîne bien que  $\hat{\theta}_t \rightarrow \theta^*$ .  
 L'équation (3.62) nous donne par récurrence :

$$V_t = (I_n - \mu_2 \Lambda)^t V_0 \quad (3.63)$$

Chacune des composantes s'exprime alors sous la forme :

$V(i)_t = (1 - \mu_2 \lambda_i)^t V(i)_0$ , où  $\lambda_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre.

Les différentes composantes convergent vers 0 pourvu que

$$|1 - \mu_2 \lambda_i| < 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Nous en déduisons alors la condition de convergence de l'algorithme est :

$$0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (3.64)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur propre maximale de  $M(R_{uu}, R_{yy}, R_{yu}, R_{uy})$ . ■

Ce théorème est basé sur le pas adaptatif  $\mu_1$  avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1 = 0$ , ce qui n'est pas adapté aux systèmes variants dans le temps. Dans le cas d'un système variant dans le temps, afin de maintenir une capacité d'adaptation, il est nécessaire de conserver un pas  $\mu_1$  différent de zéro. Le théorème suivant considère le cas de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  constants.

**Théorème 3.6** Considérons le système décrit dans la **section 3.2** et les hypothèses **H1**, **H2**, **H3** et **H4**. En supposant que  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot) = P_C^{-1}(\cdot)$  et que la dérivée d'ordre supérieur à 1 de  $P_C(\cdot)$  est nulle au voisinage de  $\mathcal{E}\{R_{uu}(i)_t\}$ ,  $\mathcal{E}\{R_{yy}(i)_t\}$ ,  $\mathcal{E}\{R_{yu}(i)_t\}$  et  $\mathcal{E}\{R_{uy}(i)_t\}$ . Supposons également que  $\widehat{\theta}_{t-1}$  est non corrélée avec  $M(\widehat{R}_{uu}(i)_t, \widehat{R}_{yy}(i)_t, \widehat{R}_{yu}(i)_t, \widehat{R}_{uy}(i)_t)$ . Si

$$\begin{cases} 0 < \mu_1 < 2 \\ 0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}} \end{cases} \quad (3.65)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur propre maximale de  $M(\widehat{R}_{uut})$ , alors  $\widehat{\theta}_t$  est tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\widehat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (3.66)$$

■

### Preuve du Théorème 3.6

La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 2 dans le **chapitre 2**. La preuve précédente a montré que pour l'algorithme 2, si  $0 < \mu_1 < 2$  et  $0 < \mu_2 < \frac{2}{\lambda_{max}}$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\widehat{R}_{xx}(j)_t\} = R_{xx}(j). \quad (3.67)$$

De même pour  $\widehat{R}_{zz}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)_t$ . Dans ce cas, pour un faible  $\widetilde{R}_{xx}(j)_t$ , nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\widehat{R}_{uu}(j)_t\} = R_{uu}(j) \quad (3.68)$$

De même pour  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$ . et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\widehat{\theta}_t\} = \theta^*. \quad (3.69)$$



Notons que le Théorème 3.6 est un théorème de convergence locale. D'après ce théorème, la vitesse de la convergence et la variance dépendent naturellement de  $\mu_1$ . D'une part, si  $\mu_1$  est au voisinage de zéro, alors la convergence est lente et la variance est faible. D'autre part, une valeur élevée de  $\mu_1$  permet une plus grande vitesse de convergence mais aussi une plus grande variance. L'impact de  $\mu_2$  est tout à fait similaire à l'impact de  $\mu_1$ .

## 3.5 Simulations et résultats

### 3.5.1 Données d'identification

Afin d'évaluer les différents algorithmes proposés et de quantifier leurs performances pour une application, des simulations sont proposées. Cette section est divisée en deux parties, dans lesquelles certains aspects des deux algorithmes sont étudiés.

Les méthodes développées dans ce chapitre sont appliquées sur les exemples numériques proposés dans [11] et [52]. Les données numériques ont été générées selon les équations (3.1) et (4.49). Pour chaque expérience,  $u_t$  est un bruit blanc. Les bruits  $v_t^u$  et  $v_t^y$  sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et leur amplitude est ajustée pour avoir différents niveaux de SNR. Chaque algorithme a été appliqué dans différentes situations de simulation.

### 3.5.2 Résultats d'identification batch : Algorithme 4 (page 64)

#### Estimation des paramètres

Le premier exemple numérique utilisé est celui proposé dans [52] :

$$\text{Système 1 : } \begin{cases} A^*(q) = 1 - 0.75q^{-1} + 0.5q^{-2} \\ B^*(q) = 1 - 2q^{-1} \end{cases} \quad (3.70)$$

On se focalise sur les performances de l'algorithme via l'erreur définie par :

$$Er = \log_{10} \|\theta^* - \text{moyenne}(\widehat{\theta}_N)\|. \quad (3.71)$$

La première expérience porte sur la convergence de  $\widehat{\theta}_N$  avec ou sans bruit. Dans cette première expérience, nous prenons  $N = 5000$  et  $C = 0$ . Nous réalisons quatre simulations de Monte Carlo avec 100 réalisations : la première est sans bruit, la seconde est réalisée avec  $SNR = 20dB$ , la troisième est avec  $SNR = 10dB$  et la

quatrième avec  $SNR = 0dB$ . Le tableau 3.1 présente les moyennes et les écart-types des paramètres estimés. Cela montre que l'algorithme proposé fournit une bonne estimation des paramètres, la variance dépend naturellement du niveau de bruit.

Paramètres	$v_u^t = v_u^t = 0$	SNR=20dB	SNR=10dB	SNR=0dB
$\hat{b}_0 \pm \sigma_{\hat{b}_0}$	$0.9936 \pm 0.0839$	$0.9858 \pm 0.0844$	$1.0100 \pm 0.0964$	$1.0013 \pm 0.2479$
$\hat{b}_1 \pm \sigma_{\hat{b}_1}$	$-2.0043 \pm 0.0414$	$-2.0109 \pm 0.0420$	$-2.0105 \pm 0.0513$	$-2.0485 \pm 0.1885$
$\hat{a}_1 \pm \sigma_{\hat{a}_1}$	$-0.7499 \pm 0.0464$	$-0.7577 \pm 0.0428$	$-0.7560 \pm 0.0564$	$-0.7817 \pm 0.1546$
$\hat{a}_2 \pm \sigma_{\hat{a}_2}$	$0.4996 \pm 0.0176$	$0.5049 \pm 0.0180$	$0.5032 \pm 0.0221$	$0.5181 \pm 0.0653$

Tableau 3.1 – Algorithme 4 : Estimation des paramètres du **Systeme 1** pour  $N = 5000$  et  $C = 0$ .

### Influences de $C$ et $N$

La deuxième expérience se concentre sur l'influence de  $C$  et de  $N$  sur la convergence de l'algorithme proposé. Deux simulations de Monte-Carlo avec 100 réalisations pour  $N \in [500; 5000]$  sont effectuées : dans la première expérience le seuil est  $C = 0$  et dans la deuxième  $C = 1$ , dans le cas d'absence de bruit et dans le cas d'un environnement bruité avec  $SNR = 5dB$ .

Pour illustrer davantage l'influence de  $C$ , deux simulations de Monte-Carlo sont également effectuées avec 100 réalisations pour  $C \in [-1.5; 1.5]$  : dans la première le nombre d'échantillons est  $N = 5000$  et  $N = 50000$  dans la deuxième, en l'absence de bruit et dans un environnement bruité avec  $SNR = 5dB$ . Les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 montrent que les meilleurs résultats sont obtenus pour  $C$  au voisinage de 0 et pour un nombre élevé d'échantillons. La comparaison entre les figures 3.3 et 3.4 et la comparaison entre les figures 3.5 et 3.6 montrent que le bruit a un impact limité sur les performances de l'algorithme 4.

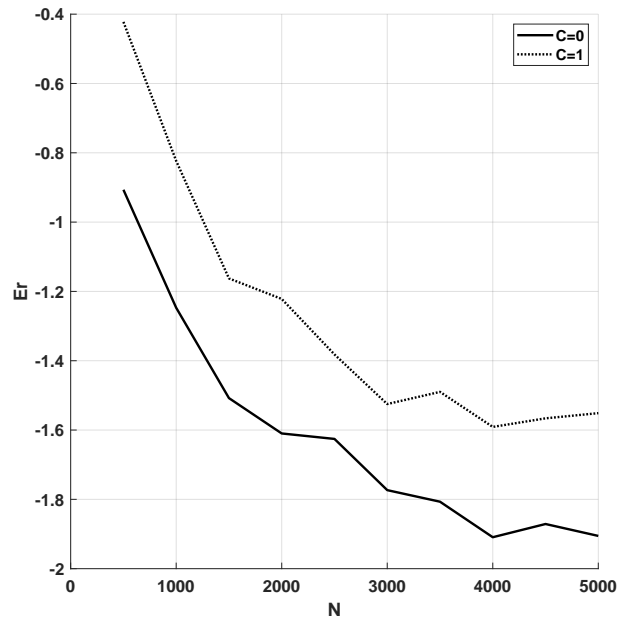


Figure 3.3 – Algorithme 4 :  $Er$  en fonction de  $N$  pour  $C = 0$  et  $C = 1$  en absence du bruit.

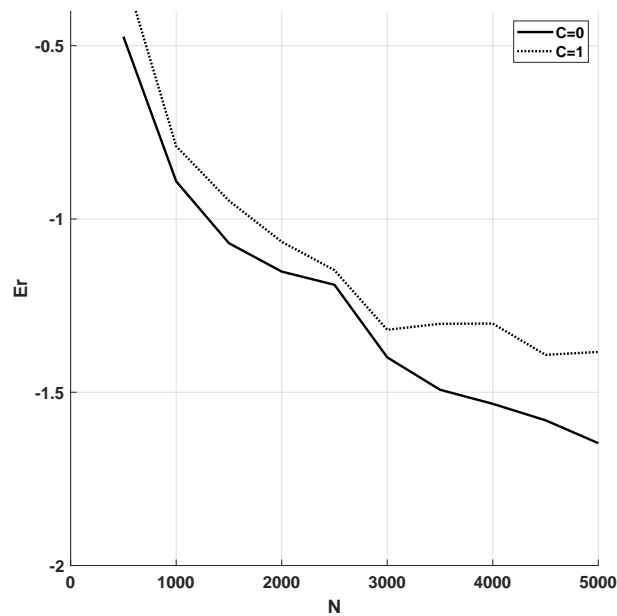


Figure 3.4 – Algorithme 4 :  $Er$  en fonction de  $N$  pour  $C = 0$  et  $C = 1$  en présence du bruit avec  $SNR = 5dB$ .

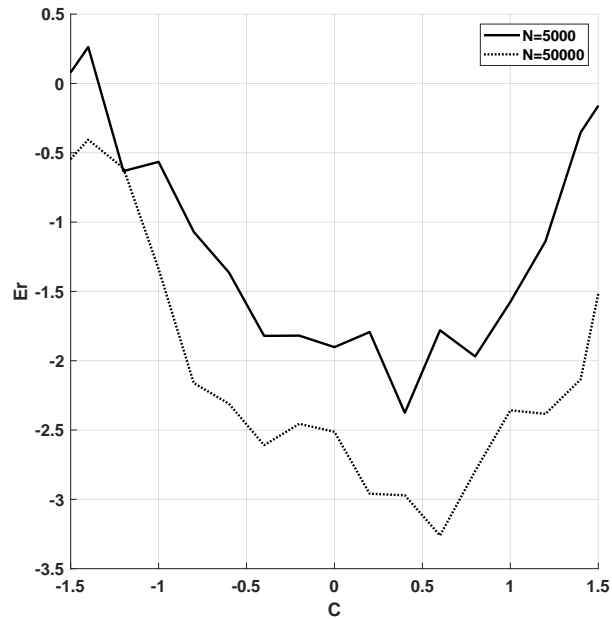


Figure 3.5 – Algorithme 4 :  $Er$  en fonction de  $C$  pour  $N = 10^4$  et  $N = 10^5$  en absence du bruit.

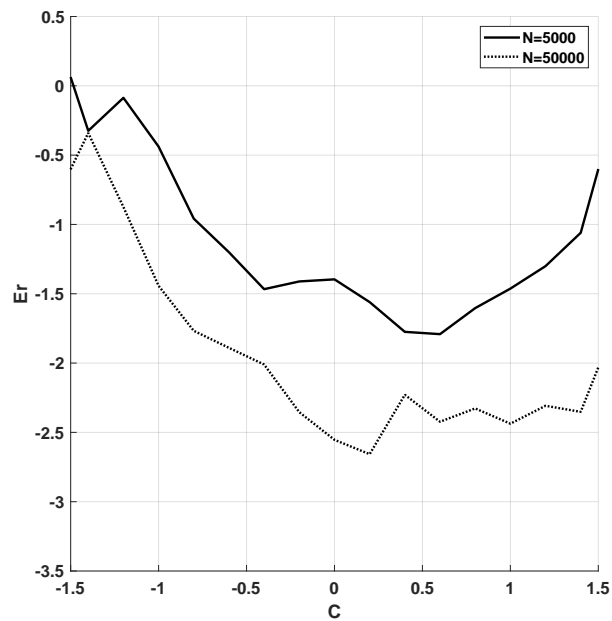


Figure 3.6 – Algorithme 4 :  $Er$  en fonction de  $C$  pour  $N = 10^4$  et  $N = 10^5$  en présence du bruit avec  $SNR = 5dB$ .

### Analyse de la variance

La troisième expérience est consacrée à l'étude de la variance en utilisant le système suivant [11] :

$$\text{Système 2} : \begin{cases} A^*(q) = 1 - 0.6^*q^{-1} \\ B^*(q) = 0.15 \end{cases} \quad (3.72)$$

Dans cette expérience, la valeur expérimentale de  $\log_{10}(N \sum_{i \in [1, (n_a+n_b+1)]} \sigma_{\hat{\theta}_N(i)}^2)$  est comparée à la valeur théorique de ce terme obtenue avec le Théorème 3.4, en fonction de  $C$ . La figure 3.7 confirme les résultats du théorème 3.4 et montre que la variance est plus faible pour un nombre élevé d'échantillons et pour  $C$  au voisinage de zéro. La même chose se produit en présence du bruit, comme le montre la figure (3.8).

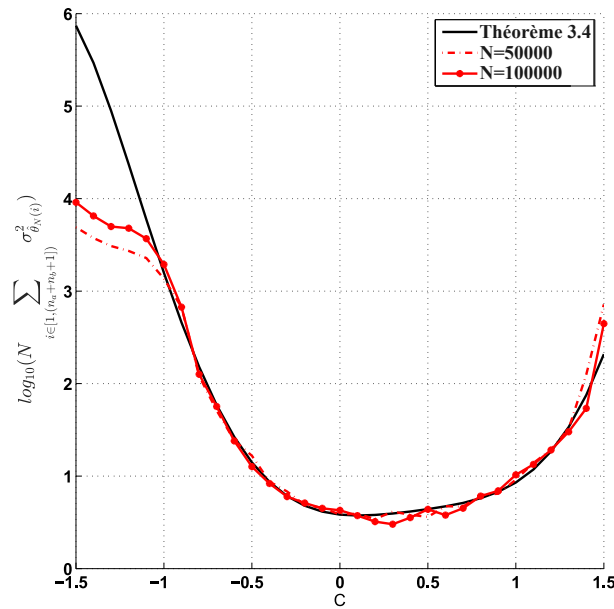


Figure 3.7 – Algorithme 4 :  $\log_{10}(N \sum_{i \in [1, (n_a+n_b+1)]} \sigma_{\hat{\theta}_N(i)}^2)$  en fonction de  $C$  pour  $N = 5.10^4$  et  $N = 10^5$  en absence du bruit.

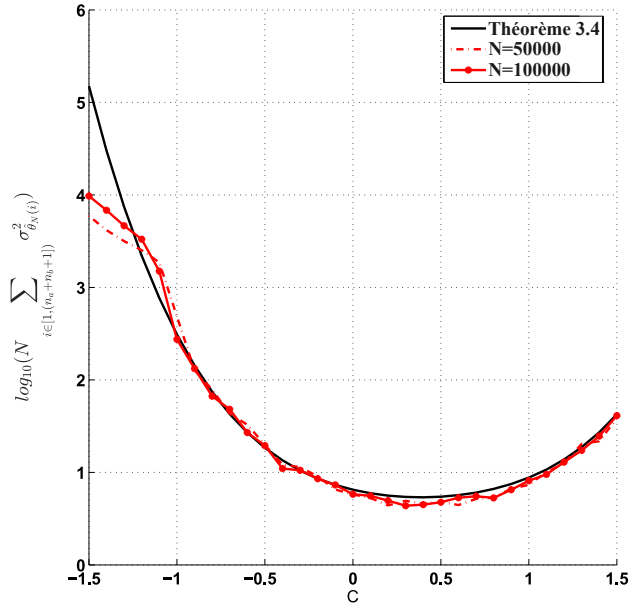


Figure 3.8 – Algorithme 4 :  $\log_{10}(N \sum_{i \in [1, (n_a+n_b+1)]} \sigma_{\theta_N(i)}^2)$  en fonction de  $C$  pour  $N = 5 \cdot 10^4$  et  $N = 10^5$  en présence du bruit avec  $SNR = 5dB$ .

Pour avoir une meilleure idée sur l'impact de  $C$ , considérons le système définie par  $G(q)^* = \frac{1+a}{1+aq^{-1}}$  où  $-1 < a < 1$ .

Nous considérons que l'entrée  $u_t$  étant un bruit gaussien blanc avec une variance unitaire.

La figure 3.9 présente  $\log_{10}(N(\sigma_{\theta_N(1)}^2 + \sigma_{\theta_N(2)}^2))$  calculé à partir du **Théorème 3.2**, **Théorème 3.3** et du **Théorème 3.4** en fonction de  $a$  et de  $C$ . Les résultats de l'expérience précédente montrent que la variance dépend de  $C$ . La figure 3.9 confirme ces résultats et de plus elle montre que la variance est plus élevée pour un  $C$  loin de zéro. D'autre part la variance dépend de  $a$ , elle est plus faible pour  $a < 0$ , c'est-à-dire lorsque  $G^*(q)$  est un filtre passe-bas.



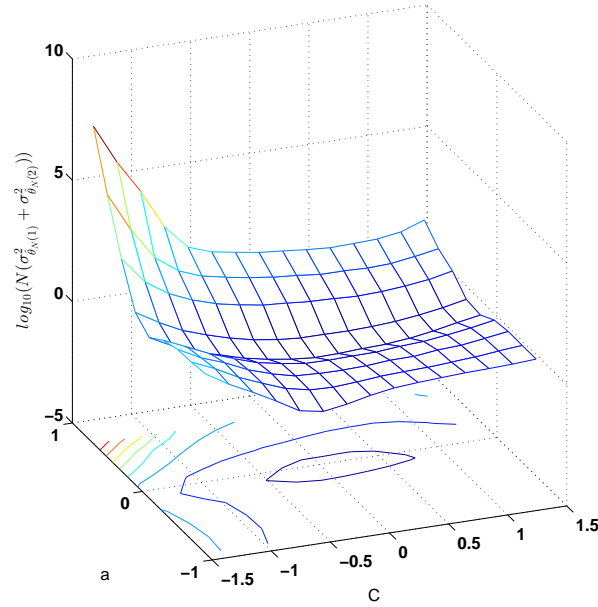


Figure 3.9 – Algorithme 4 :  $\log_{10}(N(\sigma_{\hat{\theta}_N(1)}^2 + \sigma_{\hat{\theta}_N(2)}^2))$  en fonction de  $C$  et de  $a$ .

### 3.5.3 Résultats de l'identification récursive : Algorithme 5 (page 72)

Les simulations suivantes sont présentées pour évaluer l'algorithme récursif proposé et pour quantifier ses performances. L'estimation  $\widehat{P}_C^{-1}(\cdot)$  est réalisée en utilisant une approximation polynomiale. Les paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont choisis comme suit :

- $\mu_1 = \frac{1}{t}$
- $\mu_2 = 0.05$

#### En absence du bruit

Les données sont générées dans cette première expérience en utilisant le **Système 1** en absence de bruit,  $C = 0$  et  $N = 5000$ . Les figures 3.10, 3.11, et 3.12 présentent les convergences de  $\widehat{R}_{xx}(i)_t$ ,  $\widehat{R}_{zz}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{xz}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$  et  $\widehat{\theta}_t$  en fonction du temps (en pointillés les estimations, en trait continu les valeurs réelles). Ces résultats montrent l'efficacité de l'algorithme d'identification récursif proposé.

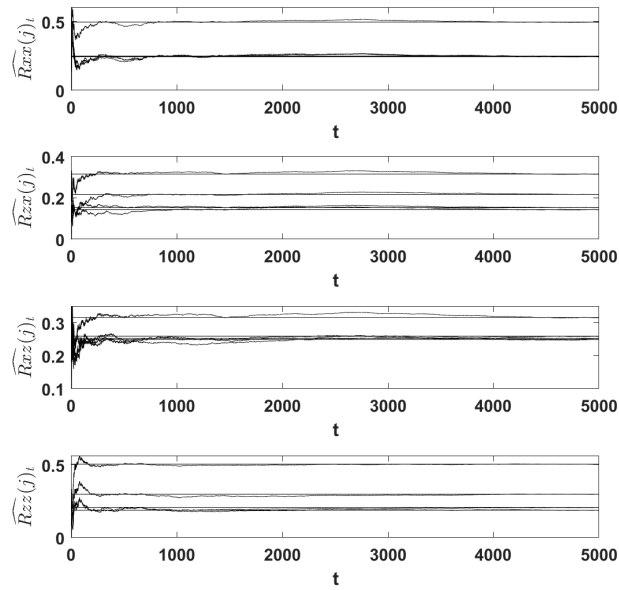


Figure 3.10 – Algorithme 5 :  $\widehat{R}_{xx}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{zx}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{xz}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{zz}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 5000$  en absence du bruit.

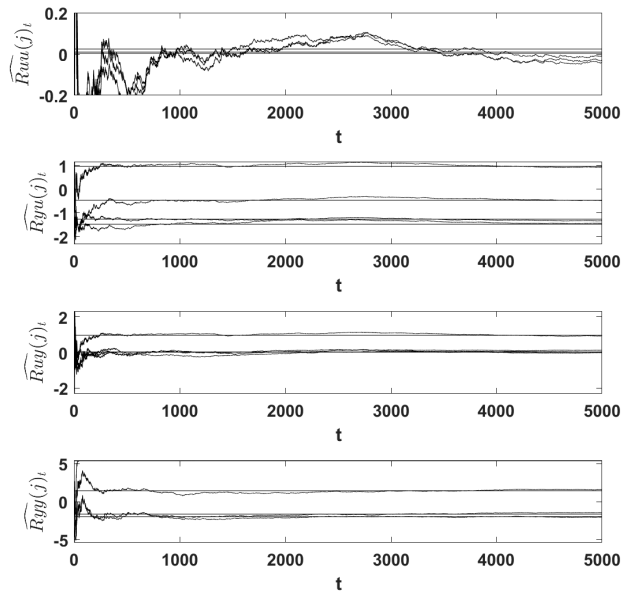


Figure 3.11 – Algorithme 5 :  $\widehat{R}_{uu}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{yu}(j)_t$ ,  $\widehat{R}_{uy}(j)_t$  et  $\widehat{R}_{yy}(j)_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0$  et  $N = 5000$  en absence du bruit.

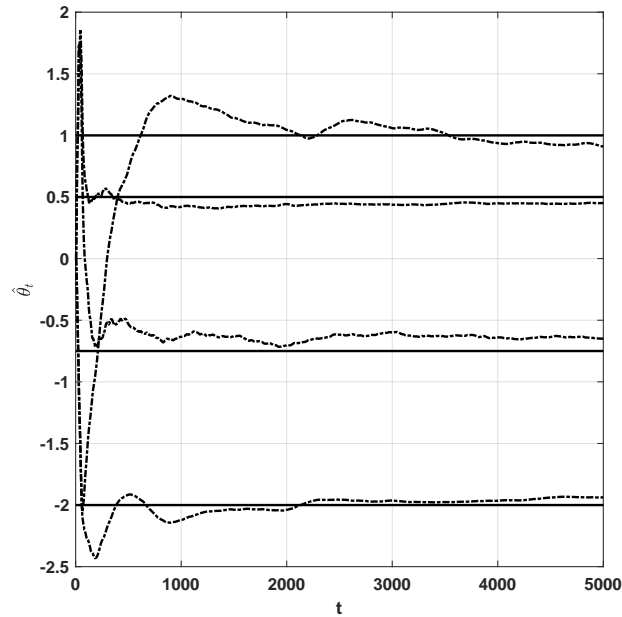


Figure 3.12 – Algorithme 5 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  :  $C = 0$  et  $N = 5000$  en absence du bruit.

Dans une deuxième expérience, nous traitons l'influence de  $C$  sur la convergence de l'algorithme proposé. Nous considérons toujours le **Systeme 1**. Les données sont générées avec  $N = 5000$  et en absence du bruit. Les figures 3.13 et 3.14 montrent la capacité de l'algorithme proposé à estimer les paramètres du système dans le cas où  $C$  est différent de zéro.

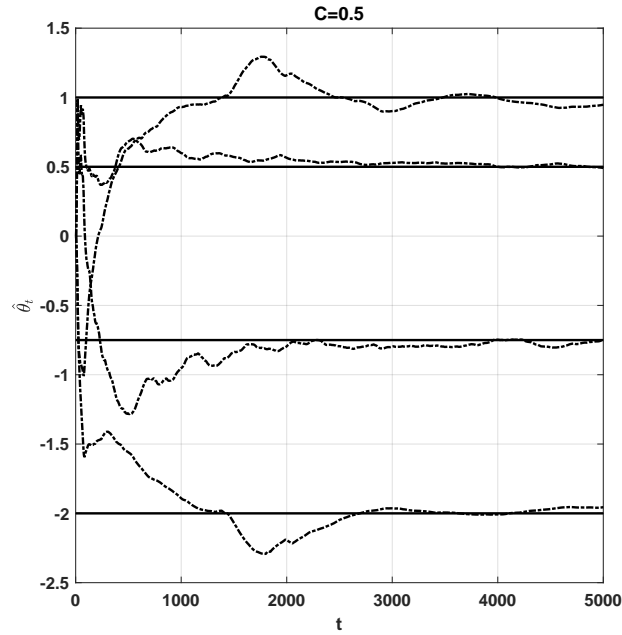


Figure 3.13 – Algorithme 5 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 0.5$  et  $N = 5000$  en absence du bruit.

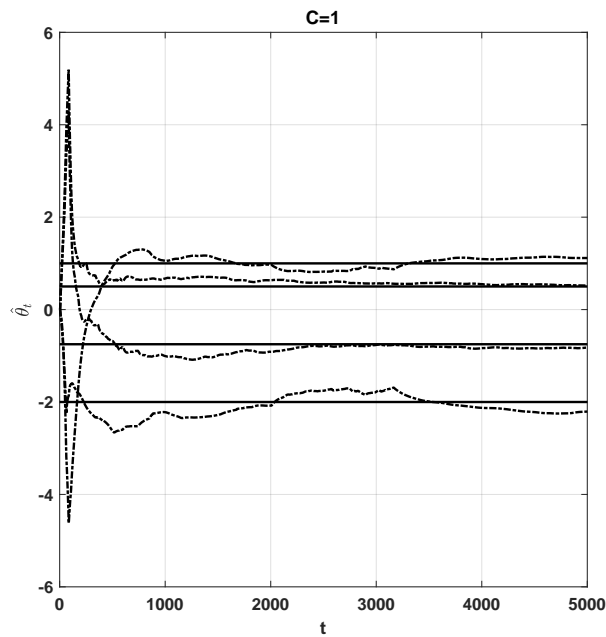


Figure 3.14 – Algorithme 5 :  $\hat{\theta}_t$  en fonction de  $t$  pour  $C = 1$  et  $N = 5000$  en absence du bruit.

### Influence du bruit

Dans cette expérience nous étudions l'impact du bruit sur l'algorithme 2. Nous considérons le système 2 et nous proposons deux simulations de Monte-Carlo avec 100 réalisations pour  $SNR \in [0dB; 20dB]$  et  $C = 0$  : la première avec  $N = 10^3$ , la seconde avec  $N = 10^4$ . Nous considérons l'erreur :

$$Er = \log_{10} \text{moyenne}\{||\theta^* - \hat{\theta}_N||\} \quad (3.73)$$

La figure 3.15 présente  $Er$  en fonction de  $SNR$  pour les deux valeurs de  $N$ . Il apparaît qu'un faible SNR dégrade les performances de l'algorithme, la variance est en effet élevée pour SNR proche de 0. Néanmoins, pour un SNR plus fort, la variance peut être réduite en augmentant le nombre d'échantillons.

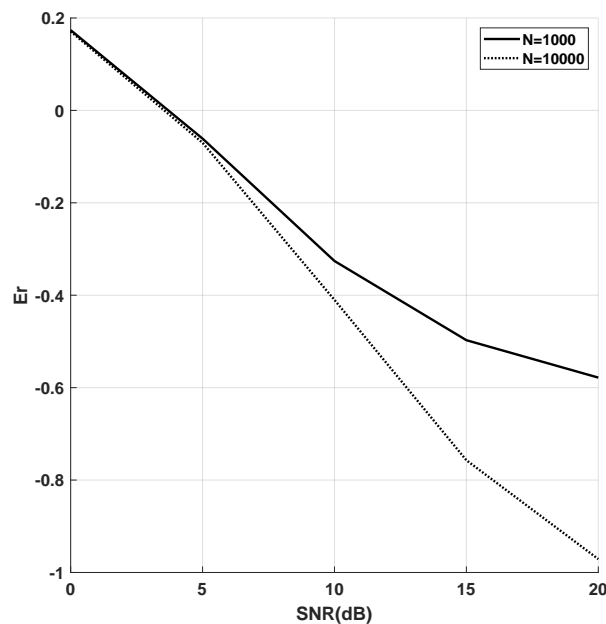


Figure 3.15 – Algorithme 5 :  $Er$  en fonction de  $SNR$  pour  $N=1000$  et  $N = 10000$  avec  $C = 0$

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé deux algorithmes d'identification d'un système RII à partir de données binaires sur l'entrée et sur la sortie. A ce jour et à notre connaissance, aucun algorithme pour ce type de problème n'a été proposé dans la littérature. La première approche est un algorithme non récursif. Il est basé sur l'algorithme de Wiener et ensuite, sur une estimation de fonctions de corrélation. Une analyse de convergence et de variance sont proposées dans ce chapitre. Le deuxième algorithme est une version récursive du premier algorithme. Il correspond à une adaptation aux systèmes RII des algorithmes présentés dans le chapitre précédent. Différents résultats de simulations sont présentés afin d'évaluer les performances

de ces algorithmes et confirmer nos analyses. A noter que le premier algorithme a fait l'objet d'un article en cours d'expertise pour la revue "Journal of the Franklin Institute". Le deuxième algorithme a fait l'objet d'un article publié dans la revue "International Journal of Modelling, Identification and Control".

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes concentrés sur des structures de type RIF et RII. Ces systèmes ne sont pas interconnectés avec aucun autre système et la structure de l'entrée peut être choisie par l'utilisateur (distribution gaussienne). L'objectif du chapitre suivant est d'étudier le problème d'identification dans le cas de systèmes opérant en boucle fermée et à base de mesures binaires.

## Chapitre 4

# Identification en boucle fermée des systèmes à partir de mesures binaires

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons le problème d'identification des systèmes en boucle fermée à partir de mesures binaires. C'est un problème ouvert pour lequel aucune solution n'a été proposée jusqu'à l'écriture de ce rapport. Ce chapitre est organisé comme suit : l'identification en boucle fermée des systèmes ayant une sortie binaire est formulée dans la section 4.2. Dans cette section, nous présentons deux approches, une première solution est présentée sous forme d'une approche indirecte, la seconde approche est basée sur l'erreur de sortie en boucle fermée. Nous considérons le problème d'identification en boucle fermée des systèmes linéaires à base de mesures binaires de l'entrée et de la sortie dans la section 4.3. Comme dans la section précédente, nous introduisons le problème de l'identification en boucle fermée des systèmes ayant une entrée et une sortie binaires. Puis nous proposons deux approches, la première est indirecte permettant de caractériser ce type de système et la seconde méthode d'identification est basée sur l'approche utilisée dans les **chapitres 2 et 3**. Les algorithmes proposés ont été testés sur une application numérique et les résultats sont donnés dans la section 4.4. La section 4.5 conclut ce chapitre.

## 4.2 Identification en boucle fermée des systèmes ayant une sortie binaire

Considérons un système linéaire à temps discret en boucle fermée comme l'illustre la figure 4.1. Le système est modélisé par

$$\begin{cases} y_t = G^*(q)u_t \\ u_t = r_t - Cor(q)y_t \end{cases} \quad (4.1)$$

$r_t$  est l'entrée d'excitation de la boucle fermée.

$G^*(q)$  est la fonction de transfert donnée par :

$$G^*(q) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)} \quad (4.2)$$

Avec

$$\begin{cases} A^*(q) = 1 + a_1^*q^{-1} + \dots + a_n^*q^{-n_a} \\ B^*(q) = q^{-1}(b_0^* + b_1^*q^{-1} + \dots + b_m^*q^{-n_b}) \end{cases} \quad (4.3)$$

$n_a$  et  $n_b$  sont les degrés, respectivement, de  $A^*(q)$  et  $B^*(q)$ .

$Cor(q) = \frac{R(q)}{S(q)}$  est la fonction de transfert du correcteur.

Comme représenté sur la figure 4.1, la sortie du système est inconnue. Elle est mesurée via un capteur binaire et la seule information disponible est  $z_t$  définie par :

$$z_t = Q_C(y_t + v_t^y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t + v_t^y \geq C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $C$  est un seuil constant et  $v_t^y$  est le bruit sur la sortie du système. Dans la suite, afin de simplifier la présentation, le seuil sera supposé nul. Les méthodes proposées



peuvent être étendues au cas d'un seuil non nul.

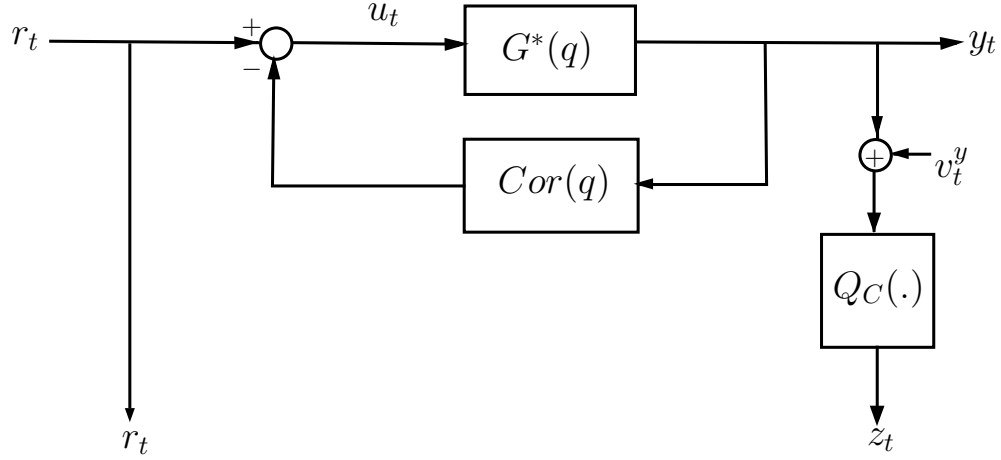


Figure 4.1 – Système en boucle fermée à sortie binaire

L'objectif de ce chapitre est de proposer des algorithmes permettant d'identifier le système  $G^*(q)$ , étant donné l'ensemble des observations  $\{r_t, z_t\}_{t=1}^N$ .

### 4.2.1 Approche indirecte

À partir de (4.1),  $y_t$  peut s'exprimer comme suit :

$$y_t = \frac{G^*(q)}{1 + G^*(q)Cor(q)} r_t = G_{bf}^*(q) r_t \quad (4.5)$$

L'approche présentée dans cette partie est une méthode indirecte assez naturelle qui permet d'estimer  $G^*(q)$  à partir d'une pré-estimation de  $G_{bf}^*(q)$ . Cette méthode est composée de deux étapes :

— **Étape 1 : Estimation de  $G_{bf}^*(q)$  :**

Tout d'abord, l'objectif dans cette première étape est de reconstruire un signal de sortie à haute résolution. Un système à RII stable peut être approximé par un modèle RIF d'ordre plus important. Par conséquent,  $G_{bf}^*(q)$  peut être approximée par un RIF d'ordre  $n \gg 1$  :

$$y_t = \sum_{k=0}^n h_k^* r_{t-k} \quad (4.6)$$

Afin d'estimer  $y_t$  il suffit alors d'appliquer tout d'abord un des algorithmes usuels d'identification des systèmes RIF présentés dans le **chapitre 1** en utilisant les données  $\{r_t, z_t\}$ . Notons  $\hat{y}_t$  l'estimation de  $y_t$ .

Ensuite, la disposition de  $\widehat{y}_t$  permet l'estimation de  $G_{bf}^*(q)$ . Nous proposons ici l'utilisation de la méthode d'erreur de prédiction du fait de sa disponibilité sur différents logiciels de calcul numérique. Le modèle estimé est noté  $\widehat{G}_{bf}(q)$ .

— **Étape 2 : Estimation de  $G^*(q)$  :**

A partir de  $\widehat{G}_{bf}(q)$  et connaissant  $Cor(q)$ , l'estimation de  $G^*(q)$  est donnée par :

$$\widehat{G}(q) = \frac{\widehat{G}_{bf}(q)}{1 - Cor(q)\widehat{G}_{bf}(q)} \quad (4.7)$$

L'algorithme proposé est résumé dans le tableau (6).

---

**Algorithme 6 :** Estimation de  $G^*(q)$  par approche indirecte

---

**Entrée :**  $\{r_t\}, \{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$  et  $Cor(q)$

— **Étape 1 :** Estimation de  $G_{bf}^*(q)$ .

— **Étape 2 :** Estimation de  $G^*(q)$ .

---

Les hypothèses de mise en œuvre de cette première méthode sont les suivantes :

- **H1 :**  $Cor(q)$  est connue.
- **H2 :** hypothèses de mise en œuvre des méthodes du **chapitre 1** : à savoir les hypothèses sur la notion du signal d'excitation, sur la notion du bruit et sur une connaissance a priori permettant la normalisation de  $\widehat{y}_t$ .

Cette première méthode pour l'identification en boucle fermée est assez rudimentaire puisque d'une part elle va conduire à l'estimation d'un modèle d'ordre important et d'autre part, du fait des deux étapes d'estimation dans la première étape, elle va conduire, probablement, à une variance importante. Néanmoins cette procédure montre qu'il est possible de réaliser une identification en boucle fermée à partir des connaissances de  $\{r_t\}$  et  $\{z_t\}$ .

Il convient aussi de noter que nous avons proposé ici une procédure particulière basée sur une estimation de  $G_{bf}^*(q)$ . A partir de la connaissance de  $\widehat{y}_t$  il est possible de proposer d'autres variantes à partir de la littérature de l'identification en boucle fermée.

## 4.2.2 Approche indirecte basée sur l'algorithme de l'erreur de sortie en boucle fermée

### 4.2.2.1 Principe

Considérons ici  $v_t^y = 0$ . Le cas de la présence du bruit est étudié par un exemple numérique dans la section 4.5.

Comme pour la première approche indirecte, l'approche basée sur l'erreur de sortie en boucle fermée consiste à prendre en compte le comportement global de la boucle fermée entre  $r_t$  et  $z_t$ . Nous avons :

$$y_t = \frac{G^*(q)}{1 + G^*(q)Cor(q)} r_t \quad (4.8)$$

Cependant à la différence de l'approche précédente,  $G^*(q)$  est directement paramétrée sous la forme :

$$G^*(q) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)} \quad (4.9)$$

Il ne sera donc pas nécessaire de réduire le modèle.

Dans cette approche nous considérons le seuil nul  $C = 0$  et la sortie  $s_t$  est définie comme suit

$$s_t = 2z_t - 1 \quad (4.10)$$

En absence du bruit,  $s_t$  est ainsi défini par :

$$s_t = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Notons que si la boucle fermée est stable, alors il existe  $\mu$  tel que

$$-\mu < y_t < \mu \quad (4.12)$$

et donc

$$-2 < \frac{y_t}{\frac{\mu}{2}} < 2. \quad (4.13)$$

Distinguons ici deux cas :

— Si  $s_t = 1$ , alors on obtient

$$-1 < s_t - \frac{y_t}{\frac{\mu}{2}} < 1 \quad (4.14)$$

et donc

$$\left| s_t - \frac{y_t}{\frac{\mu}{2}} \right| < 1 \quad (4.15)$$

— De même, si  $s_t = -1$  alors on a aussi

$$-1 < s_t - \frac{y_t}{\frac{\mu}{2}} < 1 \quad (4.16)$$

et donc

$$\left| s_t - \frac{y_t}{\frac{\mu}{2}} \right| < 1 \quad (4.17)$$

ainsi  $s_t$  peut être écrit sous la forme suivante

$$s_t = \frac{G^*(q)}{1 + G^*(q)Cor(q)} \gamma r_t + v_t \quad (4.18)$$

avec  $\gamma = \frac{2}{\mu}$  et  $|v_t| < 1$ .

Le problème d'identification sur  $G^*(q)$  devient ainsi un problème d'identification en boucle fermée en présence de perturbations bornées. Ce type de problème peut être résolu à partir de l'algorithme proposé dans [62], c'est ce que nous développons dans la suite.

**Remarque 4.1 :** L'objectif consiste à estimer un modèle  $\widehat{G}(q)$  tel que  $\widehat{y}_t = \frac{\widehat{G}(q)}{1 + \widehat{G}(q)Cor(q)} r_t$  et  $z_t$  aient le même signe. Ce principe est celui utilisé en boucle ouverte dans [66].

#### 4.2.2.2 Algorithme d'identification en boucle fermée en présence de bruit borné

Définissons tout d'abord les estimations a priori et a posteriori de  $y_t$  par

$$\begin{cases} \widehat{y}_{t|t-1} = \widehat{\phi}_t^T \widehat{\theta}_{t-1} \\ \widehat{y}_{t|t} = \widehat{\phi}_t^T \widehat{\theta}_t \end{cases} \quad (4.19)$$

avec  $\widehat{\theta}_t$  représente l'estimation à l'instant  $t$  du vecteur des paramètres  $\theta^*$  défini par

$$\theta^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_{n_a}^* \\ b_0^* \\ \vdots \\ b_{n_b}^* \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$\widehat{\phi}_t$  est le vecteur d'observations défini par

$$\phi_t = \begin{pmatrix} -\widehat{y}_{t-1|t-1} \\ \vdots \\ -\widehat{y}_{t-n_a|t-n_a} \\ \widehat{u}_{t-1} \\ \vdots \\ \widehat{u}_{t-1-n_b} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

avec  $\widehat{u}_{t-i} = \gamma r_{t-i} - Cor(q) \widehat{y}_{t-i|t-i}$ .

L'algorithme d'identification en boucle fermée en présence de perturbation bornée va permettre le calcul d'un vecteur de paramètres  $\widehat{\theta}_t$  tel que

$$\left| s_t - \frac{\widehat{G}(q)}{1 + \widehat{G}(q)Cor(q)} \gamma r_t \right| < 1 \quad (4.22)$$

Pour cela, définissons ainsi un filtre  $F(q)$  monic, dit filtre d'adaptation. Ce filtre est appliqué comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} F(q)r_{t-i}^F = r_{t-i} \\ F(q)s_t^F = s_t \\ F(q)\widehat{\phi}_t^F = \widehat{\phi}_t \\ \widehat{y}_{t|t-1}^F = (\widehat{\phi}_t^F)^T \widehat{\theta}_{t-1} \\ \widehat{y}_{t|t}^F = (\widehat{\phi}_t^F)^T \widehat{\theta}_t \\ \widehat{u}_{t-i}^F = \gamma r_{t-i}^F - Cor(q)\widehat{y}_{t-i|t-i}^F \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Les erreurs d'adaptation a priori et a posteriori sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{t|t-1} = \varepsilon_{t|t-1}^F + (F(q) - 1)\varepsilon_{t|t}^F \\ \eta_{t|t} = F(q)\varepsilon_{t|t}^F \end{array} \right. \quad (4.24)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{t|t-1}^F = s_t^F - \widehat{y}_{t|t-1}^F \\ \varepsilon_{t|t}^F = s_t^F - \widehat{y}_{t|t}^F \end{array} \right. \quad (4.25)$$

L'algorithme d'identification en boucle fermée en présence de perturbation bornée est donné ci-dessous

---

**Algorithme 7** : Estimation en boucle fermée de  $\theta^*$

---

**Entrée** :  $\gamma, n_a, n_b, \lambda, \delta, F(q), Cor(q), P_0$  et  $\widehat{\theta}_0$ .

Pour  $t \in [0, N]$  faire :

$$\widehat{\theta}_t = \widehat{\theta}_{t-1} + \Gamma_t \eta_{t|t-1}$$

où

$$\begin{aligned} & \text{--- } \Gamma_t = \frac{P_{t-1} \widehat{\phi}_t^F \sigma_t}{\lambda + (\widehat{\phi}_t^F)^T P_{t-1} \widehat{\phi}_t^F \sigma_t} \\ & \text{--- } P_t = \frac{1}{\lambda} \left( I_n - \Gamma_t (\widehat{\phi}_t^F)^T \right) P_{t-1} \\ & \text{--- } \eta_{t|t-1} = \varepsilon_{t|t-1}^F + (F(q) - 1)\varepsilon_{t|t}^F \\ & \text{--- } \sigma_t = \begin{cases} \frac{\lambda}{(\widehat{\phi}_t^F)^T P_{t-1} \widehat{\phi}_t^F} (|\frac{\eta_{t|t-1}}{\delta}| - 1), & \text{si } \eta_{t|t-1} > \delta \text{ et } (\widehat{\phi}_t^F)^T P_{t-1} \widehat{\phi}_t^F \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$


---

Dans cet algorithme,  $\lambda$  est le facteur d'oubli et  $\delta$  est une borne sur l'erreur d'adaptation. Dans notre cas, comme l'objectif est de contraindre l'erreur en deçà de 1,  $\delta$  est pris strictement inférieur à 1.

$\hat{\theta}_0$  est la valeur initiale de  $\hat{\theta}_t$ .  $P_0$  est la valeur initiale de  $P_t$ .  $P_0$  peut être choisi comme suit :  $P_0 = p_0 I_n$  avec  $p_0 > 0$ .

**Remarque 4.2 :** Cet algorithme est dédié à l'identification en boucle fermée en présence de perturbations bornées. Cet algorithme est similaire dans sa structure et dans ces paramètres de synthèse à celui, plus connu, proposé par Landau dans [47]. Ce dernier algorithme est développé dans le cadre d'une identification en boucle fermée en présence d'un bruit stochastique.

La mise en œuvre de cet algorithme en boucle fermée consiste à étendre le principe utilisé en boucle ouverte dans [66]. Sa mise en œuvre nécessite un choix sur le filtre  $F(q)$ . Comme dans [66], le filtre idéal est  $F(q) = \frac{A^*(q)S(q)+q^{-d}B^*(q)R(q)}{S(q)}$ .

Comme  $A^*(q)$  et  $B^*(q)$  sont inconnus, il est proposé d'appliquer l'algorithme via une procédure itérative, notons le nombre maximum d'itérations est  $i_{\max}$ . L'algorithme est composé des étapes suivantes :

- **Étape 1 :** C'est une étape d'initialisation, elle est composée de deux étapes. L'objectif de cette première étape est de reconstruire le signal  $y_t$ . Pour estimer  $y_t$ , il suffit d'appliquer d'abord l'un des algorithmes d'identification des systèmes à réponse impulsionnelle finie utilisant une mesure binaire en sortie existant dans la littérature ([36], [43], [64], [83],[84]...), en approximant le système  $\frac{G^*(q)}{1+G^*(q)Cor(q)}$  par une réponse impulsionnelle finie d'ordre élevé. La disposition de  $\hat{y}_t$  permet de calculer  $\hat{u}_t$ . Puis dans un second temps, nous utilisons l'un des algorithmes d'identification classique pour avoir une estimation de  $G^*(q)$  notée  $\tilde{G}(q)$ .
- **Étape 2 :** Compte tenu de cette première estimation, concevoir le filtre  $F(q) = \frac{\hat{A}(q)S(q)+q^{-d}\hat{B}(q)R(q)}{S(q)}$  où  $\hat{A}(q)$  et  $\hat{B}(q)$  sont les estimations obtenues à la première étape.
- **Étape 3 :** Appliquer l'algorithme 7 pour obtenir une nouvelle  $\hat{G}(q)$ . Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à un nombre fini d'itérations ( $i_{\max}$ ).

L'algorithme itératif proposé est résumé dans le tableau 8

---

**Algorithme 8 :** Estimation de  $G^*(q)$  par approche basée sur l'algorithme de l'erreur de sortie

---

**Entrée :**  $\{r_t\}$ ,  $\{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$  et  $Cor(q)$ .

- **Étape 1 :** Initialisation.
  - **Étape 2 :**  $F(q) = \frac{\hat{A}(q)S(q)+q^{-d}\hat{B}(q)R(q)}{S(q)}$  avec  $\hat{A}(q)$  et  $\hat{B}(q)$  sont les estimations obtenues dans l'étape d'initialisation.
  - **Étape 3 :** pour  $i = 1 : i_{\max}$ 
    - Calculer  $\hat{G}(q)$  par l'Algorithm 7.
    - $F(q) = \frac{\hat{A}(q)S(q)+q^{-d}\hat{B}(q)R(q)}{S(q)}$ .
-

Les hypothèses de mise en œuvre de cet algorithme sont les suivantes :

- **H1** : Seuil nul  $C = 0$  .
- **H2** :  $Cor(q)$  est supposé connu.
- **H3** : La boucle fermée est stable.
- **H4** :  $b_0^*$  est supposé être égale à 1.

**Remarque 4.3** : L'hypothèse H4 est une hypothèse courante, elle est utilisée pour obtenir une représentation unique du système. Une conséquence de cette hypothèse est le fait que le 1<sup>ère</sup> terme non nul de la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert  $\frac{G^*(q)}{1+G^*(q)Cor(q)}$  est égal à 1.

A noter que le choix de  $\gamma$  peut être obtenu via l'hypothèse de normalisation. En effet, l'étape d'initialisation va permettre une estimation de  $y_t$ . Par la suite, il est possible de définir  $\gamma$  par :

$$\gamma = \frac{2}{\max |\hat{y}_t|} \quad (4.26)$$

Comme précisé précédemment, un des points forts de cette méthode est la paramétrisation directe par  $\theta^*$  et donc l'absence de réduction de modèle. Néanmoins, cette méthode est sensible à l'initialisation. A noter aussi que le principe de cet algorithme est proposé dans le cas où  $v_t^y = 0$ , la présence d'un bruit important peut perturber le bon comportement de l'algorithme.

### 4.3 Identification en boucle fermée des systèmes à base de mesures binaire de l'entrée et de la sortie

Dans cette section, nous formulons le problème d'identification des systèmes à base de mesures binaire de l'entrée et de la sortie. le problème est identique à celui de la section précédente, sauf que la connaissance sur le signal qui excite la boucle fermée est également binaire, comme l'illustre la figure 4.2. Comme dans la section 4.2 le système est modélisé par :

$$\begin{cases} y_t = G^*(q)u_t \\ u_t = r_t - Cor(q)y_t \end{cases} \quad (4.27)$$

$r_t$  représente la séquence qui permet d'exciter la boucle fermée.  $G^*(q)$  est la fonction de transfert paramétrée comme suit :

$$G^*(q) = \frac{B^*(q)}{A^*(q)} \quad (4.28)$$

avec

$$\begin{cases} A^*(q) = 1 + a_1^*q^{-1} + \dots + a_n^*q^{-n_a} \\ B^*(q) = b_0^* + b_1^*q^{-1} + \dots + b_m^*q^{-n_b} \end{cases} \quad (4.29)$$

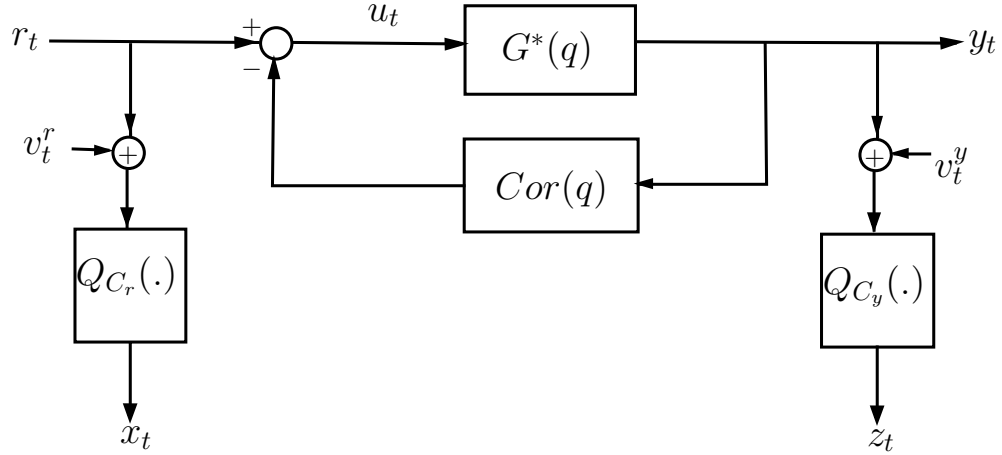


Figure 4.2 – Système en boucle fermée à entrée et sortie binaires

$n_a$  et  $n_b$  sont les degrés, respectivement, de  $A^*(q)$  et  $B^*(q)$ .

$Cor(q) = \frac{R(q)}{S(q)}$  est la fonction de transfert du correcteur.

Les séquences  $r_t$  et  $y_t$  sont supposées inconnues. Les seuls échantillons disponibles sont ceux de  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  définis par :

$$\begin{aligned} x_t = Q_{C_r}(r_t + v_t^r) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{r_t + v_t^r}{\sigma_{r+v^r}} \geq C_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ z_t = Q_{C_y}(y_t + v_t^y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{y_t + v_t^y}{\sigma_{y+v^y}} \geq C_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.30)$$

où  $C_r$  et  $C_y$  sont deux seuils qui peuvent être différents de zéro.  $\{v_t^r\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont des séquences de bruit, respectivement, sur l'entrée et sur la sortie,  $\sigma_{r+v^r}^2$  et  $\sigma_{y+v^y}^2$  sont des variances, respectivement, de  $\{r_t + v_t^r\}$  et de  $\{y_t + v_t^y\}$ . Exemple de  $r_t$ ,  $y_t$ ,  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  est présenté dans la figure 4.4

L'objectif de ce chapitre est de proposer des algorithmes permettant l'identification d'un système RII, étant donné l'ensemble des observations  $\{x_t, z_t\}_{t=1}^N$ .

### 4.3.1 Approche indirecte

Comme vu dans (4.5),  $y_t$  peut s'exprimer comme suit :

$$y_t = \frac{G^*(q)}{1 + G^*(q)Cor(q)} r_t = G_{bf}^*(q) r_t \quad (4.31)$$

La méthode proposée dans cette section est similaire à celle proposée dans la section précédente. Cette méthode consiste à estimer dans un premier temps la fonction de transfert  $G_{bf}^*(q)$  puis dans un second temps à estimer  $G^*(q)$ .



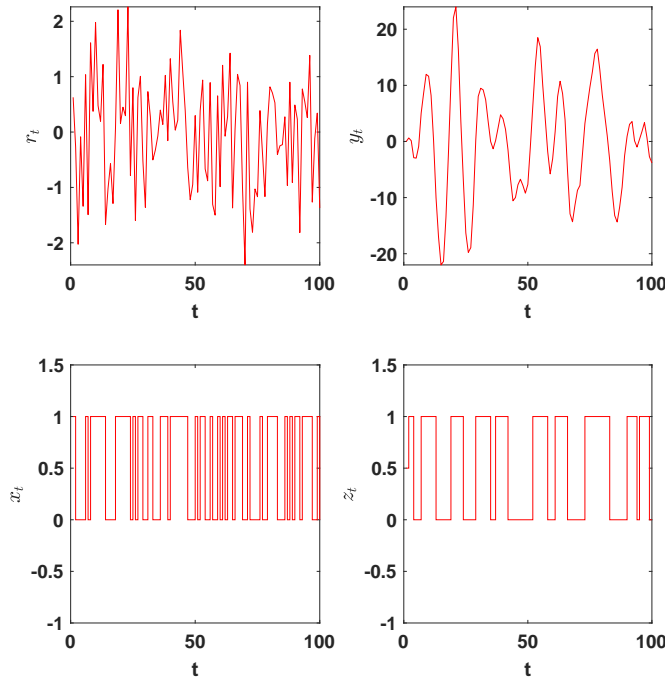


Figure 4.3 –  $r_t$ ,  $y_t$ ,  $x_t$  et  $z_t$  en fonction du temps (100 échantillons)

Cette approche est composée de deux étapes :

— **Étape 1 : Estimation de  $G_{bf}^*(q)$  :**

Cette première étape consiste en l'application de l'Algorithme 4 du chapitre **chapitre 3** sur la base de la connaissance des échantillons de  $x_t$  et de  $z_t$ . Ceci permet l'estimation d'un modèle RII pour  $G_{bf}^*(q)$ . Cette estimation est notée  $\widehat{G}_{bf}(q)$ .

— **Étape 2 : Estimation de  $G^*(q)$  :**

Cette seconde étape consiste à estimer  $G^*(q)$  à partir du résultat de la première étape. Il a été vu dans le **chapitre 4** que l'estimation de  $G^*(q)$  est donnée par :

$$\widehat{G}(q) = \frac{\widehat{G}_{bf}(q)}{1 - Cor(q)\widehat{G}_{bf}(q)} \quad (4.32)$$

avec  $\widehat{G}_{bf}(q)$  l'estimation de  $G_{bf}^*(q)$  obtenue dans la première étape.

L'algorithme est résumé dans le tableau 9

---

**Algorithme 9** : Estimation de  $G^*(q)$  par approche indirecte
 

---

**Entrée** :  $\{r_t\}$  et  $\{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$  et  $Cor(q)$

- **Étape 1** : Estimation de  $G_{bf}^*(q)$ .
  - **Étape 2** : Estimation de  $G^*(q)$ .
- 

Les hypothèses pour cette approche sont les suivantes :

- **H1** :  $\{r_t\}$  est une séquence stationnaire avec une distribution normale de moyenne nulle.
- **H2** :  $\sigma_r$  et  $\sigma_y$  sont connus.
- **H3** :  $\{v_t^r\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle,  $\sigma_{v_r}^2$  et  $\sigma_{v_y}^2$  sont connus.  $\{v_t^r\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont indépendants de  $r_t$  et indépendants entre eux.

Cette approche est basique. Elle consiste simplement en une inversion de paramétrisation de la fonction de transfert de la boucle fermée. Cette approche conduit à l'estimation d'un modèle surparamétré. Afin d'obtenir un modèle d'ordre  $n_b$  et  $n_a$  sur le numérateur et le dénominateur il serait nécessaire d'insérer une étape réduction de modèle conduisant probablement à une perte de qualité du modèle.

## 4.3.2 Approche indirecte basée sur la variable instrumentale

### 4.3.2.1 Description de l'algorithme

L'approche indirecte proposée ici va permettre d'éviter la sur-paramétrisation de l'approche indirecte précédente.

D'après (4.27),  $y_t$  peut s'exprimer comme suit

$$y_t = \phi_t^T \theta^* \quad (4.33)$$

où les vecteurs  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  et  $\phi_t \in \mathbb{R}^n$  sont donnés par :

$$\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \vdots \\ u_{t-n_b} \\ -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-n_a} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

et

$$\theta^* = \begin{pmatrix} b_0^* \\ \vdots \\ b_{n_b}^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_{n_a}^* \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

avec  $n = n_a + n_b + 1$ .

Introduisons ici un vecteur  $\psi_t \in \mathbb{R}^n$  en utilisant le principe de la variable instrumentale, ceci donne :

$$\psi_t y_t = \psi_t \phi_t^T \theta^* \quad (4.36)$$

Si  $\psi_t$  est construit à partir d'une séquence stationnaire ergodique alors on a :

$$\mathcal{E} \{ \psi_t y_t \} = \mathcal{E} \{ \psi_t \phi_t^T \} \theta^* \quad (4.37)$$

Si  $\psi_t$  est suffisamment corrélé avec  $\phi_t$  alors  $\mathcal{E} \{ \psi_t \phi_t^T \}$  est inversible et ceci donne :

$$\theta^* = (\mathcal{E} \{ \psi_t \phi_t^T \})^{-1} \mathcal{E} \{ \psi_t y_t \} \quad (4.38)$$

Dans la suite, nous proposons de construire cette variable instrumentale à partir de la séquence  $\{r_t\}$  de la manière suivante

$$\psi_t = \begin{pmatrix} r_t \\ \vdots \\ r_{t-n_b-n_a} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$\mathcal{E} \{ \psi_t \phi_t^T \}$  et  $\mathcal{E} \{ \psi_t y_t \}$  font intervenir les termes de corrélation  $R_{ry}(j)$  et de  $R_{ru}(j)$ . L'estimation de  $\theta^*$  est donc basée sur une reconstruction de ces termes de corrélation puis la mise en œuvre de (4.38). Dans la suite nous définissons  $M(R_{ru}, R_{ry})$  et  $N(R_{ry})$  par

$$M(R_{ru}, R_{ry}) = \mathcal{E} \{ \psi_t \phi_t^T \} \quad (4.40)$$

$$L(R_{ry}) = \mathcal{E} \{ \psi_t y_t \} \quad (4.41)$$

L'algorithme est organisé en trois étapes :

— **Étape 1 : Estimation de  $R_{xx}(j)$  et  $R_{xz}(j)$**

Pour  $j \in [0; n]$ , les estimations de  $R_{xx}(j)$  et  $R_{xz}(j)$  sont

$$\begin{cases} \widehat{R}_{xx}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N x_t x_{t-j} \\ \widehat{R}_{xz}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=j+1}^N x_t z_{t-j} \end{cases} \quad (4.42)$$

— **Étape 2 : Estimation de  $R_{rr}(j)$ ,  $R_{ry}(j)$  et  $R_{ru}(j)$**

Comme vu dans l'étape 2 du l'**algorithme 4**, il est possible de déterminer  $R_{rr}(j)$  et  $R_{ry}(j)$  à partir des estimations respectives  $\widehat{R}_{xx}(j)$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)$ . Ces estimations sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{R}_{rr}(j) = \sigma_{r+v^r}^2 P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xx}(j) \right) - \sigma_{v^r}^2 \delta(j) \\ \widehat{R}_{ry}(j) = \sigma_{r+v^r} \sigma_{y+v^y} P_C^{-1} \left( \widehat{R}_{xz}(j) \right) \end{cases} \quad (4.43)$$

où  $\sigma_{r+vr} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_{vr}^2}$ ,  $\sigma_{y+vy} = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{vy}^2}$  et  $P_C^{-1}(\cdot)$  sont définis au **chapitre 2**.

On suppose ici que  $Cor(q)$  est connue et strictement stable.  $Cor(q)$  peut donc être approximée par sa réponse impulsionnelle. Notons  $\{h_k^c\}_{k \in [0, n_c]}$  les  $(n_c + 1)$  termes de cette réponse impulsionnelle.  $u_t$  peut ainsi s'exprimer comme suit :

$$u_t = r_t - \sum_{k=0}^{n_c} h_k^c y_{t-k} \quad (4.44)$$

ainsi on a

$$R_{ru}(j) = R_{rr}(j) - \sum_{k=0}^{n_c} h_k^c R_{ry}(k+j). \quad (4.45)$$

L'estimation de  $R_{ru}(j)$  est obtenue à partir de

$$\widehat{R}_{ru}(j) = \widehat{R}_{rr}(j) - \sum_{k=0}^{n_c} h_k^c \widehat{R}_{ry}(k+j). \quad (4.46)$$

— **Étape 3 : Estimation de  $\theta^*$**

L'équation (4.38) montre que  $\theta^*$  dépend de  $R_{ry}(j)$  et  $R_{ru}(j)$  pour  $j \in [0; n]$ . l'estimation de  $\theta^*$  est donnée par :

$$\widehat{\theta}_N = M(\widehat{R}_{ru}, \widehat{R}_{ry})^{-1} L(\widehat{R}_{ry}) \quad (4.47)$$

L'algorithme proposé est résumé dans le tableau 10.

---

**Algorithme 10** : Estimation de  $G^*(q)$  par approche indirecte

---

**Entrée** :  $Cor(q)$ ,  $\{x_t\}$  et  $\{z_t\}$  avec  $t \in [1; N]$ .

- **Étape 1** : Pour  $j \in [0; n]$  calculer  $\widehat{R}_{xx}(j)$  et  $\widehat{R}_{xz}(j)$  à partir de (4.42).
  - **Étape 2** : Pour  $j \in [0; n]$  calculer  $\widehat{R}_{rr}(j)$ ,  $\widehat{R}_{ry}(j)$  et  $\widehat{R}_{ru}(j)$  à partir de (4.43) et (4.46).
  - **Étape 3** : Calculer  $\widehat{\theta}_N$  à partir de (4.47).
- 

Les hypothèses pour cette approche sont les suivantes :

- **H1** :  $\{r_t\}$  est une séquence stationnaire avec une distribution normale et une moyenne nulle.
- **H2** :  $\sigma_r$  et  $\sigma_y$  sont connus.
- **H3** :  $\{v_t^r\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle,  $\sigma_{vr}^2$  et  $\sigma_{vy}^2$  sont connus.  $\{v_t^r\}$  et  $\{v_t^y\}$  sont indépendants de  $r_t$  et indépendants entre eux.
- **H4** :  $S(q)$  est connue et strictement stable.

L'hypothèse **H3** est une hypothèse commune et utilisée dans les approches proposées dans les chapitres 2 et 3, c'est une hypothèse de normalisation comme celles utilisées dans [43], [44] et [64] dans le cas d'une identification en boucle ouverte.

Parfois, les  $\sigma_{u+vu}$ ,  $\sigma_{y+vy}$ ,  $\sigma_{vu}$  et  $\sigma_{vy}$  ne sont pas toujours facilement accessibles. Cependant, il peut être remarqué que, pour  $C$  différent de zéro et du fait que  $\{u_t + v_t^u\}$  est de moyenne nulle avec une distribution normale,  $\sigma_{u+vu}$  peut être estimée en utilisant

$$\sigma_{u+vu} = \frac{C}{F^{-1}(1 - \mu_x)} \quad (4.48)$$

où  $\mu_x = \mathcal{E}\{x_t\}$  et  $F(\cdot)$  est la fonction de distribution cumulative normale. Les  $\sigma_{y+vy}$ ,  $\sigma_{vu}$  et  $\sigma_{vy}$  peuvent être estimés de la même manière (l'estimation des  $\sigma_{vu}$  et  $\sigma_{vy}$  nécessite une expérience sans entrée).

## 4.4 Simulations et résultats

### 4.4.1 Données d'identification

Dans cette section, différents résultats de simulations sont présentés afin d'illustrer les performances des approches proposées dans ce chapitre. Les méthodes développées sont appliquées sur l'exemple numérique où le système et le contrôleur sont définis par :

$$\begin{cases} G^*(q) = \frac{q^{-1}(1-1.45q^{-1}-0.72q^{-2})}{1-1.98q^{-1}+1.5q^{-2}-0.46q^{-3}} \\ Cor(q) = \frac{-0.1246+0.1836q^{-1}-0.0749q^{-2}}{1-1.5q^{-1}+0.095q^{-2}} \end{cases} \quad (4.49)$$

### 4.4.2 Système à sortie binaire

Pour chaque expérience, l'excitation  $r_t$  est un bruit blanc gaussien. La sortie a été générée selon l'équation (4.4) où le seuil est  $C = 0$ . Le bruit  $v_t^y$  est un bruit blanc et son amplitude est ajustée pour avoir différents niveaux de SNR. Sur chaque figure l'estimation du diagramme de bode en module est donnée en rouge et le réel en noir.

#### 4.4.2.1 Résultats d'identification par l'Algorithme 6 (page 90)

Les performances numériques de l'algorithme 6 sont présentées dans un premier temps. À noter que pour la mise en oeuvre de cet algorithme, nous avons utilisé l'algorithme de Pouliquen et al.- 2016 - [64] pour reconstruire le signal de sortie à haute résolution et les fonctions disponibles dans la librairie 'Système Identification' (System Identification toolbox) fournies par Matlab. Les résultats présentés dans la suite ne tiennent pas compte de l'étape de réduction de modèle qu'il pourrait être nécessaire de rajouter.

#### En absence du bruit

Dans cette première expérience, nous effectuons une simulation Monte-Carlo avec 100 réalisations. Le nombre de données est  $N = 5000$ . Les figures 4.4 et 4.5 présentent le diagramme de Bode module de  $G_{bf}^*(q)$  et de  $G^*(q)$ . Il apparaît que la première étape

permet une estimation consistante de  $G_{bf}^*(q)$ , néanmoins l'estimation de  $G^*(q)$  est plus difficile en basse fréquence et en haute fréquence.

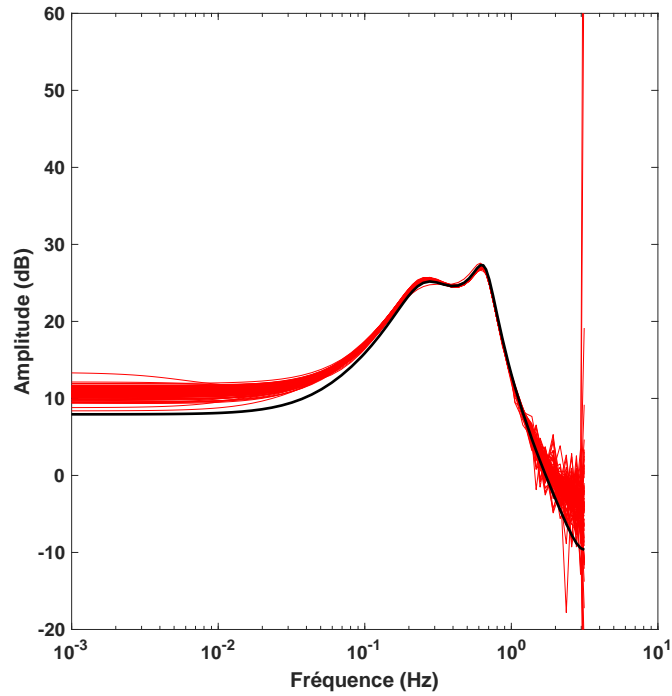
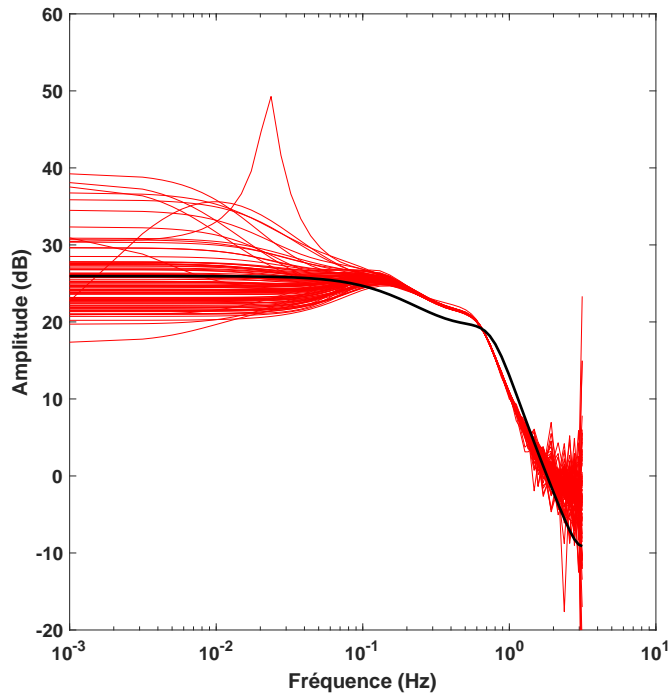


Figure 4.4 – Algorithme 6 : Diagramme de Bode du module de  $G_{bf}^*(q)$

Figure 4.5 – Algorithme 6 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$ 

Dans une deuxième expérience, nous testons l'impact du nombre de données disponibles. La figure 4.6 présente les diagrammes de Bode module de la fonction de transfert réelle et les 100 modèles estimés pour différentes valeurs de  $N$  :  $N = 500$ ,  $N = 1000$ ,  $N = 5000$  et  $N = 10000$ . Ces résultats sont obtenus avec des simulations de Monte Carlo effectuées pour 100 réalisations. Il apparaît que pour  $N$  faible, l'estimation pour certaines séries de données est fortement dégradée. Néanmoins, pour  $N$  grand il apparaît que l'estimation est de meilleure qualité : peu biaisée et de variance faible.

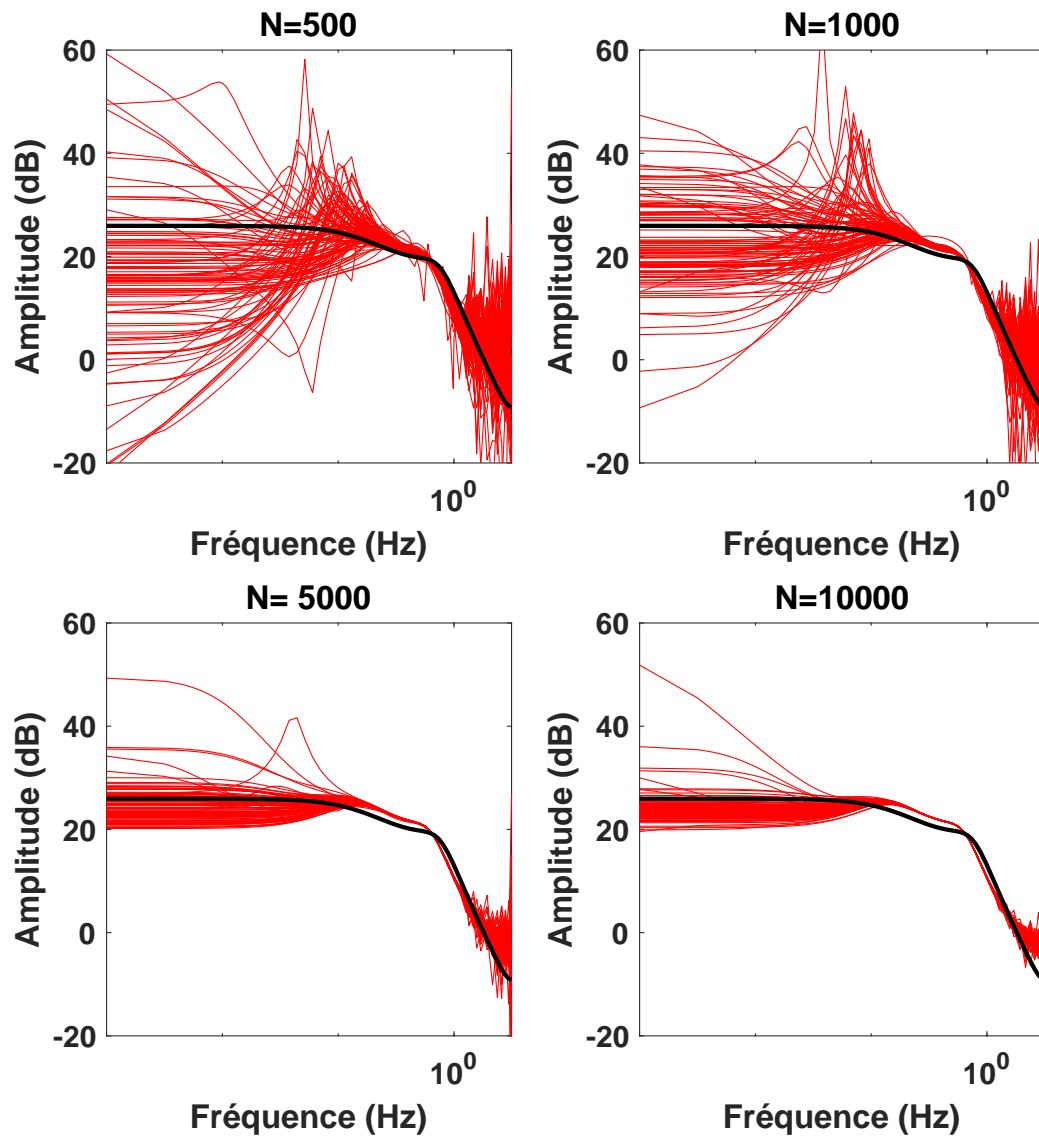


Figure 4.6 – Algorithme 6 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 500$ ,  $N = 1000$ ,  $N = 5000$  et  $N = 10000$ .

### Influence du bruit

Dans une troisième expérience, afin d'observer l'impact du niveau de bruit sur la qualité d'estimation, une simulation Monte-Carlo avec 100 réalisations a été réalisée pour différentes valeurs de  $SNR = \{5, 10, 15, 20\}dB$  avec  $N = 10000$ . La figure 4.7 montre que les estimations du diagramme de Bode module de  $G^*(q)$  sont biaisées pour un faible SNR.



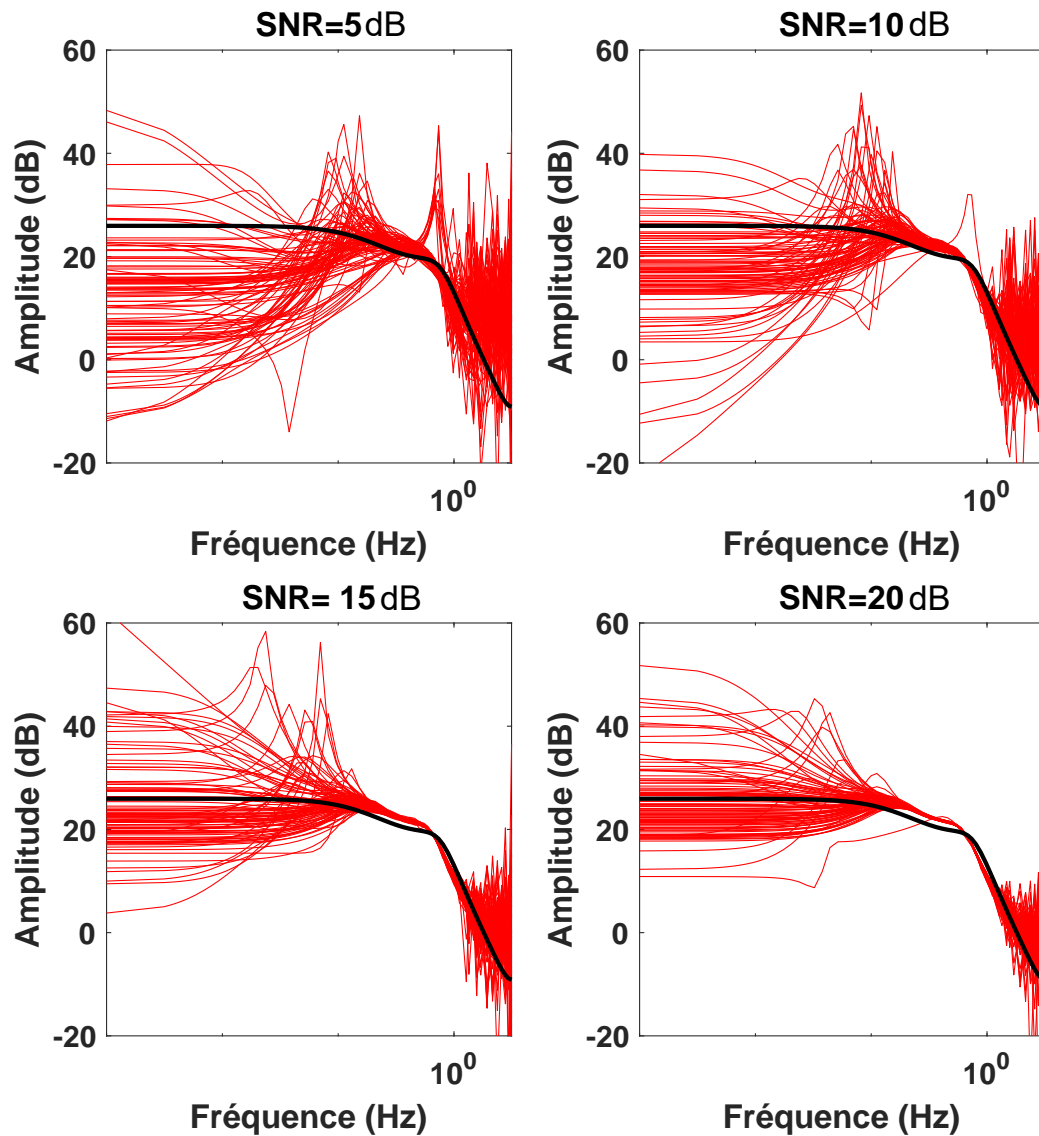


Figure 4.7 – Algorithme 6 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $SNR = 20dB$ ,  $SNR = 10dB$  et  $SNR = 5dB$  avec  $N = 5000$ .

#### 4.4.2.2 Résultats d'identification par l'Algorithme 8 (page 95)

Dans cette section, différents résultats de simulations sont présentés afin d'illustrer les performances de l'algorithme itératif proposé. Pour chacun d'entre eux, la valeur par défaut du nombre d'itérations a été fixée à 20 (comme dans Matlab), le facteur d'oubli  $\lambda$  a été choisi égal à 0.999 et  $\delta$  est égal à 0.999.

##### En absence du bruit

Dans une première expérience le nombre d'échantillons est  $N = 5000$ . Dans cette première expérience, nous réalisons une simulation Monte-Carlo avec 100 réalisations. Les diagrammes de Bode module de 100 modèles identifiés sont présentés dans la figure 4.8. Deux observations peuvent être faites à partir de ces résultats : l'identification est sans biais et la variance est faible. Cette expérience montre l'efficacité de l'algorithme pour l'estimation de la fonction de transfert du système.

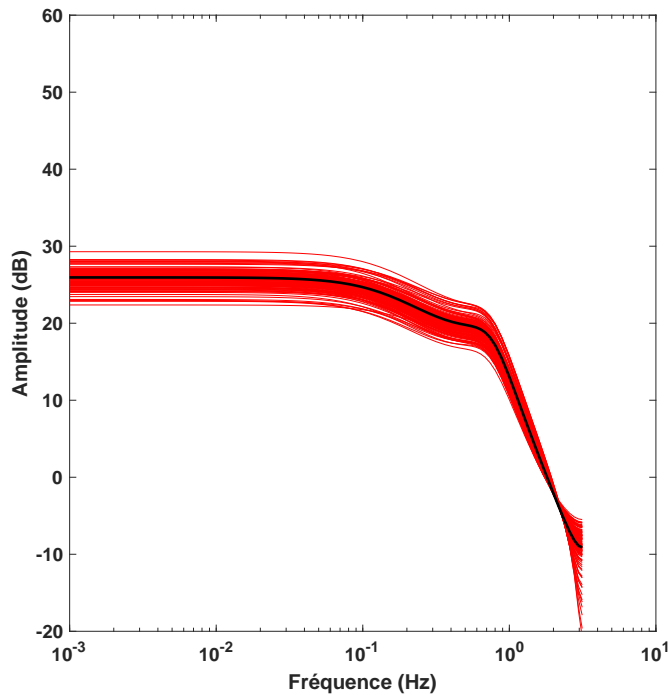


Figure 4.8 – Algorithme 8 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$ .

La figure 4.9 montre la valeur de  $\hat{\theta}$  à la fin de chaque itération pour une réalisation. On remarque que  $\hat{\theta}$  converge vers les vraies valeurs après quelques itérations.

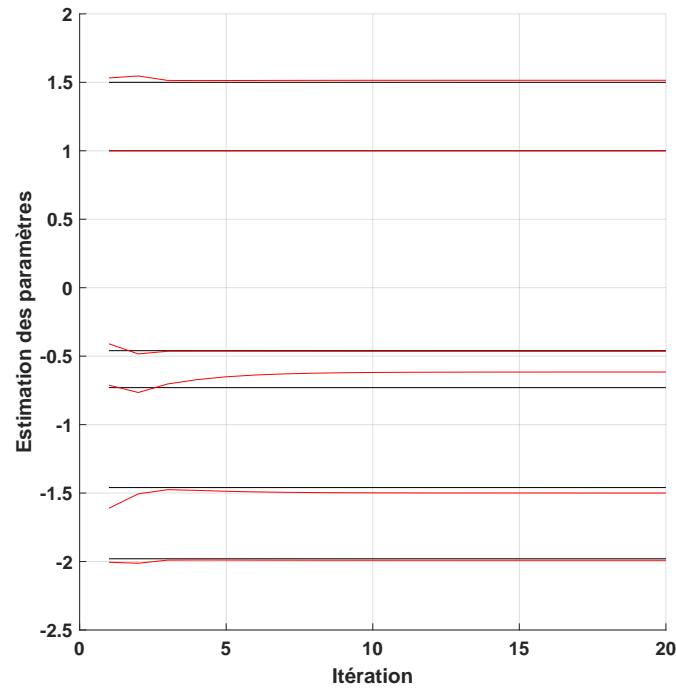


Figure 4.9 – Algorithme 8 : Estimation des paramètres à chaque itération.

Dans une deuxième expérience, nous étudions l'influence du nombre d'échantillons  $N$ . Des simulations de Monte Carlo avec 100 réalisations sont effectuées pour  $N = 500$ ,  $N = 1000$ ,  $N = 5000$  et  $N = 10000$ . La figure 4.10 présente les diagrammes de Bode du module de 100 modèles identifiés pour chaque valeur de  $N$ , il apparaît que la variance est importante pour  $N$  faible. Cette variance est réduite pour  $N$  grand.

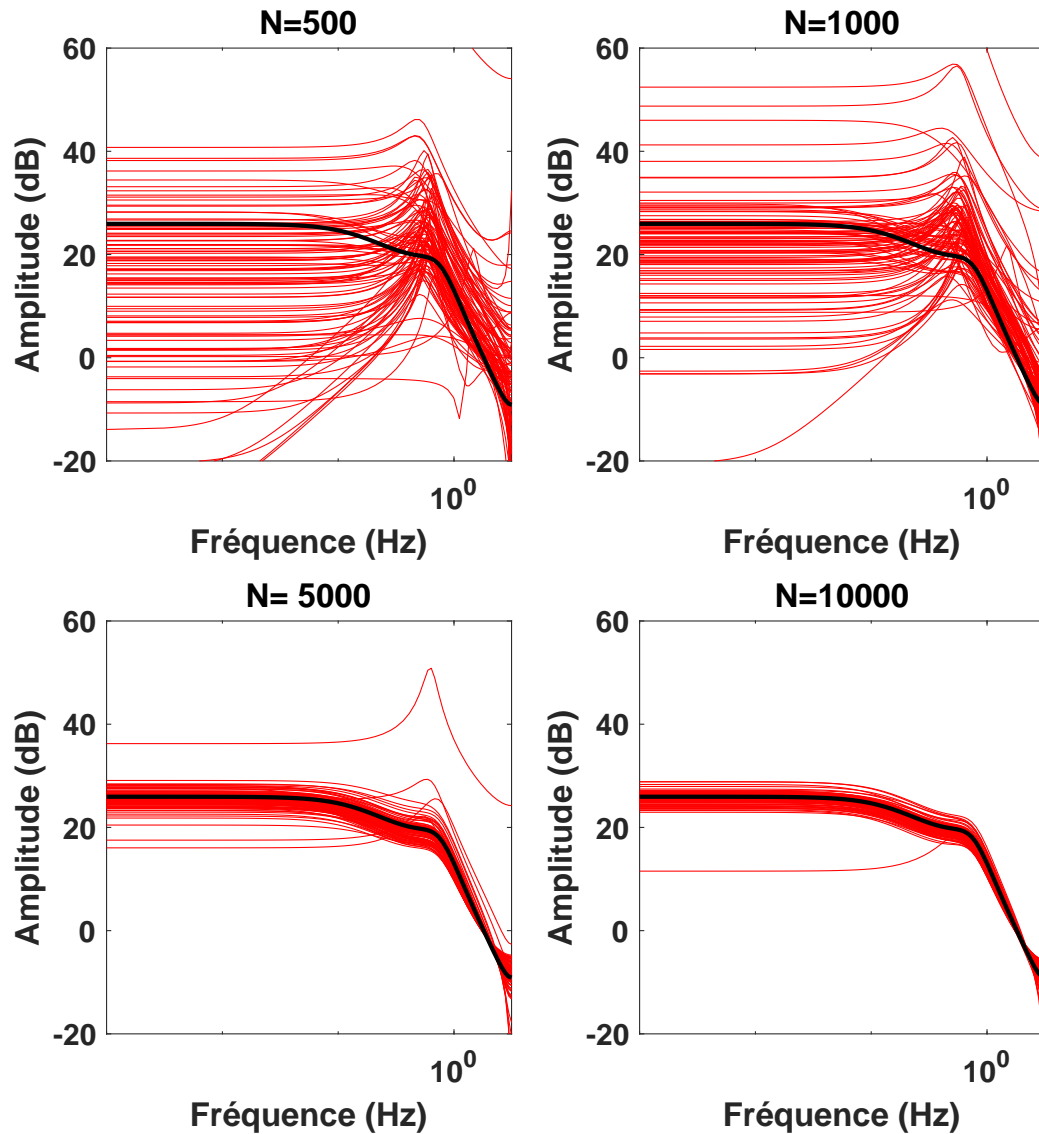


Figure 4.10 – Algorithme 8 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 500$ ,  $N = 1000$ ,  $N = 5000$  et  $N = 10000$ .

### Influence du bruit

Dans une troisième expérience nous étudions l'influence de bruit. Des simulations de Monte Carlo avec 100 réalisations sont effectuées pour  $SNR = \{5, 10, 15, 20\}dB$  avec  $N = 10000$ . La figure 4.11 présente les diagrammes de Bode module de 100 modèles identifiés pour chaque valeur de SNR. Les résultats obtenus lors de cette expérience montre la capacité de l'algorithme proposé à estimer la fonction de transfert du système dans un milieu bruité. L'influence du bruit est similaire à ceux du nombre d'échantillons, la variance est importante pour des SNR faibles.

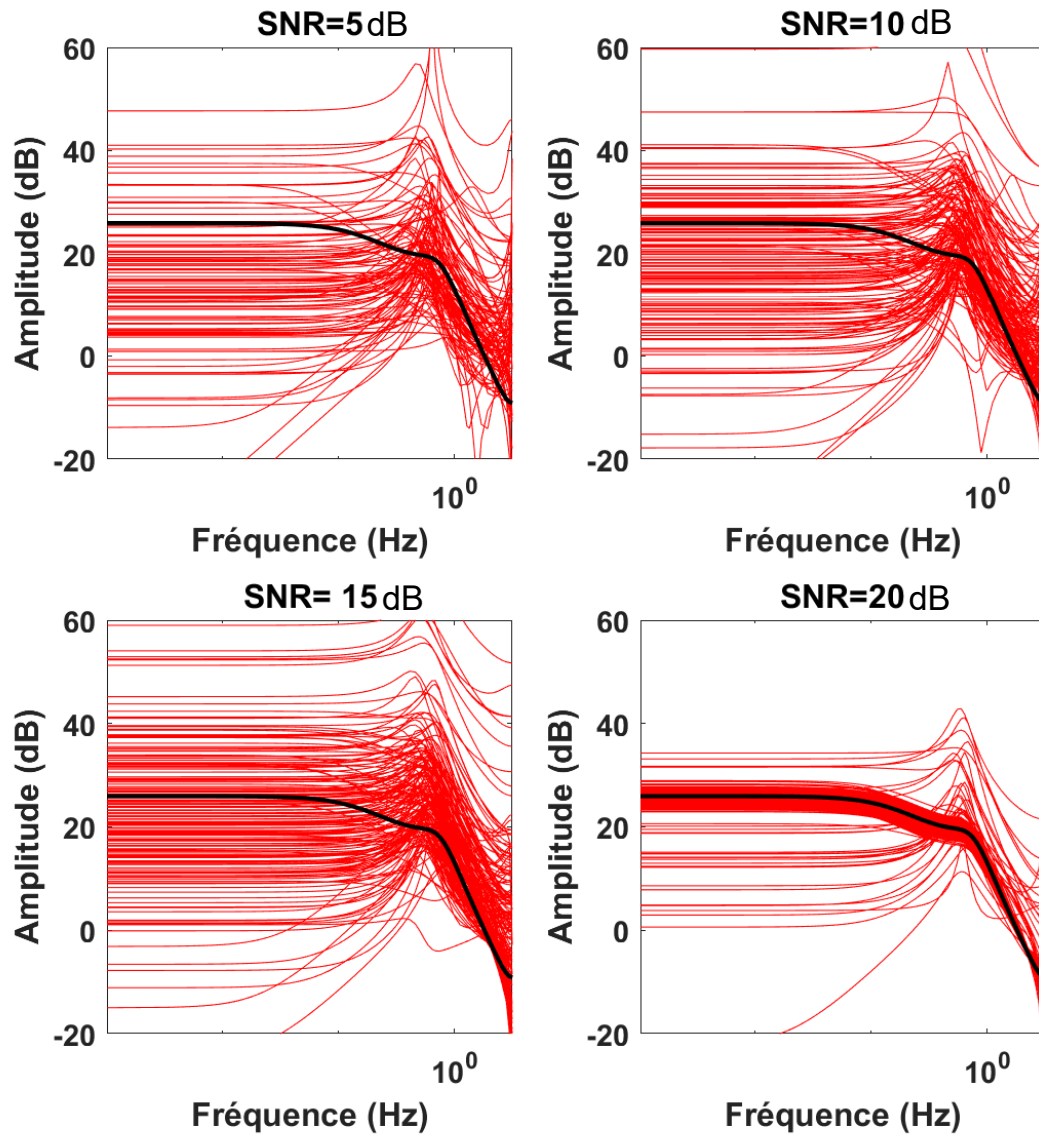


Figure 4.11 – Algorithme 8 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $SNR = 20dB$ ,  $SNR = 15dB$ ,  $SNR = 10dB$  et  $SNR = 5dB$  avec  $N = 5000$ .

### 4.4.3 Système à entrée et sortie binaires

Pour chaque expérience,  $r_t$  est un bruit blanc gaussien. Les bruits  $v_t^y$  et  $v_t^r$  sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et leur amplitude est ajustée pour avoir différents niveaux de SNR.

#### 4.4.3.1 Résultats d'identification par l'algorithme 9 (page 98)

À noter que pour la mise en oeuvre de l'algorithme, nous avons utilisé l'algorithme 4 présenté dans le **chapitre 3** afin d'estimer dans un premier temps  $G_{bf}^*(q)$ . Pour

chaque expérience, nous choisissons le seuil  $C = 0$ .

### En absence du bruit

Dans une première expérience, nous nous sommes concentrés sur les performances de l'approche indirecte. Le nombre de données est  $N = 10^7$ . Dans cette première expérience, nous réalisons une simulation Monte-Carlo avec 100 réalisations. Les figures 4.12 et 4.13 présentent les diagrammes de Bode module, respectivement, de  $G_{bf}^*(q)$  et  $G^*(q)$ . Ces figures montrent les résultats de deux étapes de l'algorithme : la première étape permet une estimation efficace de  $G_{bf}^*(q)$  (ces résultats confirment ceux du **chapitre 3**), néanmoins l'estimation de  $G^*(q)$  est biaisée et la variance est grande.

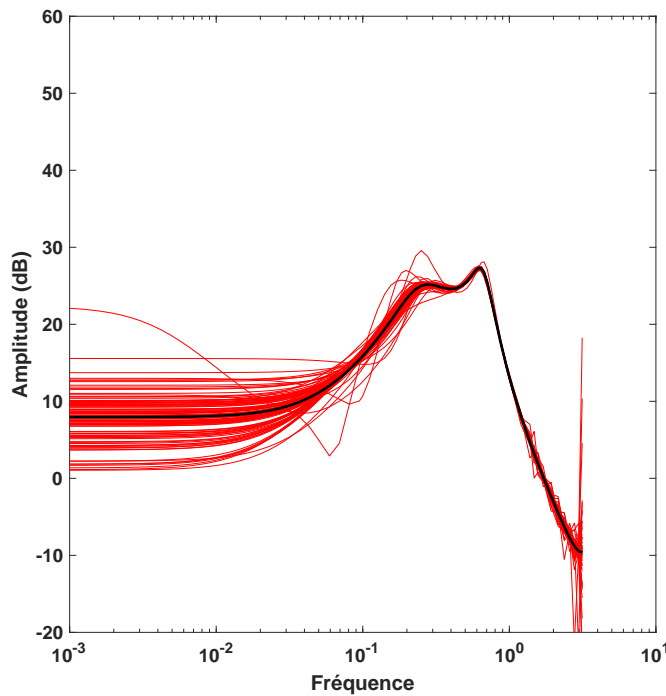


Figure 4.12 – Algorithme 9 : Diagramme de Bode du module de  $G_{bf}^*(q)$  pour  $N = 10^7$  et  $C = 0$ .

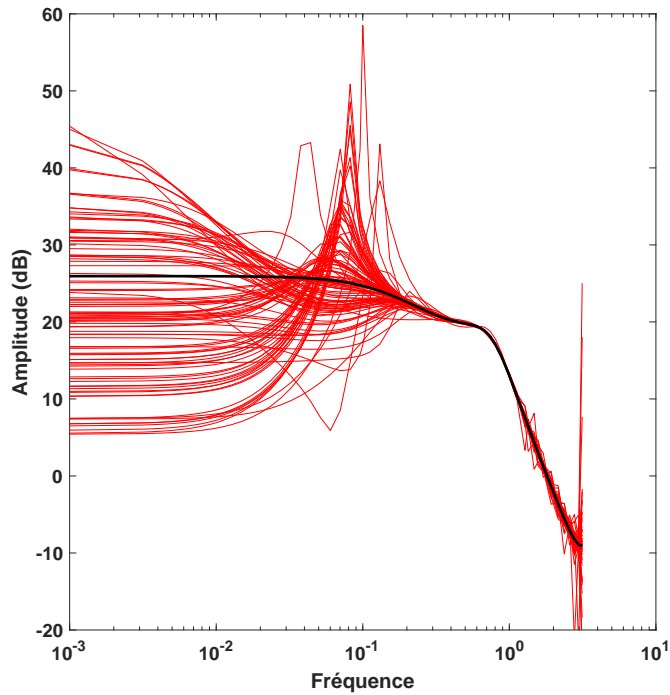


Figure 4.13 – Algorithme 9 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 10^7$  et  $C = 0$ .

La deuxième expérience est consacrée à l'étude de l'influence de données disponibles sur l'algorithme. Dans cette deuxième expérience, nous effectuons quatre simulations de Monte Carlo avec 100 ensembles de données : la première en utilisant  $N = 5000$ , la seconde en utilisant  $N = 10000$ , dans la troisième  $N = 50000$  et la quatrième en utilisant  $N = 100000$ , en absence du bruit. La figure 4.14 présente les diagrammes de Bode module de la fonction de transfert réelle et les 100 modèles estimés pour différentes valeurs de  $N$ . Il apparaît qu'un nombre insuffisant de données dégrade assez naturellement la qualité de l'identification.

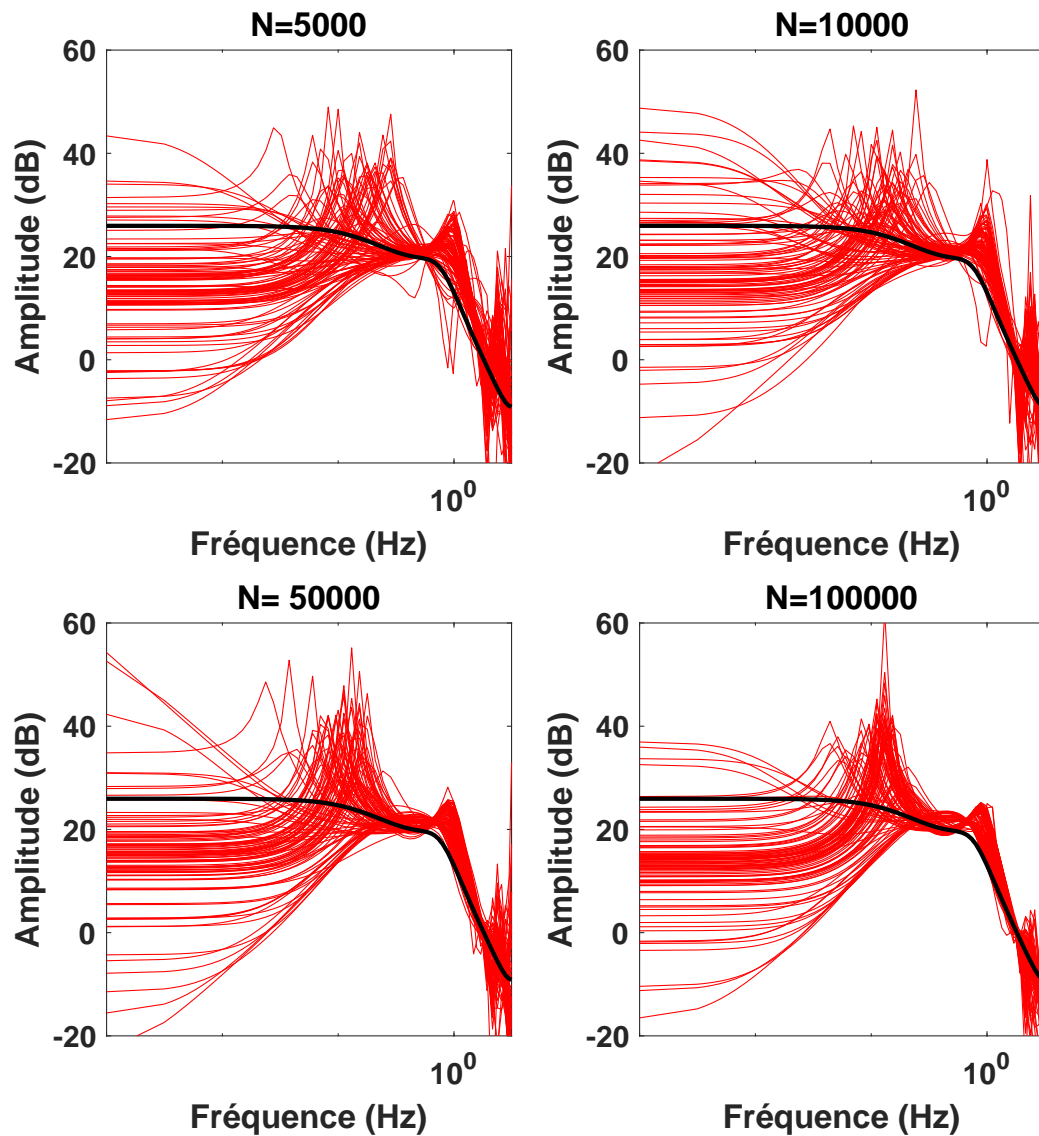


Figure 4.14 – Algorithme 9 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 5000$ ,  $N = 10000$ ,  $N = 50000$  et  $N = 100000$ .

### Influence du bruit

Dans une troisième expérience, nous testons l'impact du niveau de bruit sur la qualité d'estimation, des simulations Monte-Carlo avec 100 réalisations pour  $N = 10000$  a été réalisée pour différentes valeurs de  $SNR = \{5, 10, 15, 20\}dB$ . La figure 4.15 montre que les estimations du diagramme de Bode module de  $G^*(q)$  sont biaisées pour les différents niveaux de bruit et que la variance est importante pour un faible SNR.



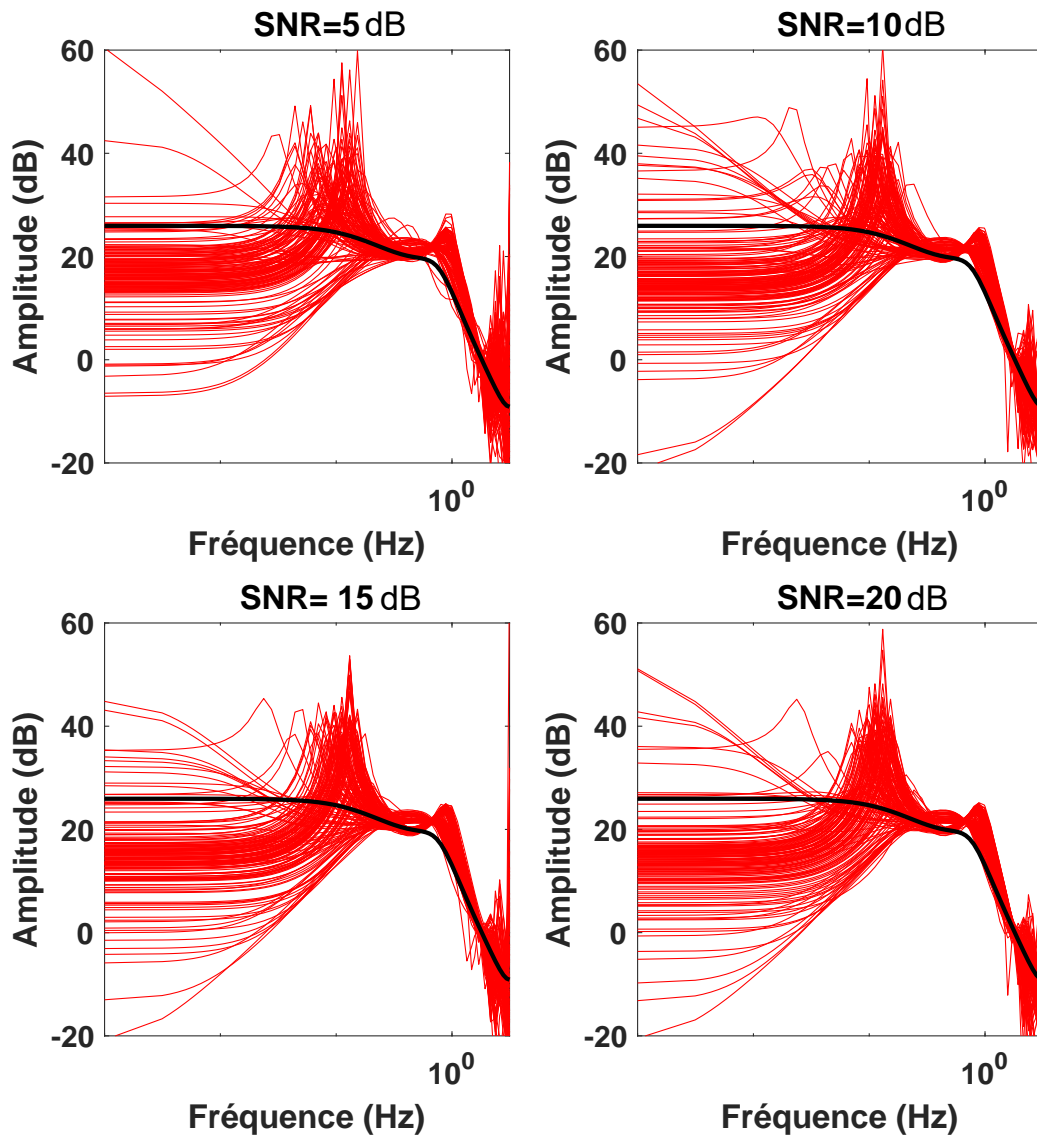


Figure 4.15 – Algorithme 9 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $SNR = 20dB$ ,  $SNR = 10dB$  et  $SNR = 5dB$  avec  $N = 10^6$ .

#### 4.4.3.2 Résultats de l'identification par l'algorithme 10 (page 100)

Dans cette section, différents résultats de simulations sont présentés afin d'illustrer les performances de l'algorithme 10. Pour chacun d'entre eux, nous choisissons le seuil  $C = 0$ .

**En absence du bruit**

$\theta^*(i)$	$moyenne(\widehat{\theta}(i)) \pm \sigma_{\widehat{\theta}(i)}$
1	$0.9996 \pm 0.0335$
-1.4599	$-1.4602 \pm 0.0257$
-0.7299	$-0.7284 \pm 0.0362$
-1.9800	$-1.9814 \pm 0.0114$
1.5000	$1.5025 \pm 0.0517$
-0.4600	$-0.4625 \pm 0.0534$

Tableau 4.1 – Algorithme 10 : Estimation des paramètres du système pour  $N = 10^7$  et  $C = 0$ .

La première expérience montre l'efficacité de l'algorithme pour l'estimation de la fonction du transfert du système. Dans cette expérience le nombre d'échantillons est  $N = 10^7$ . Et nous réalisons une simulation Monte-Carlo avec 100 réalisations. Les diagrammes de Bode module de 100 modèles identifiés sont présentés dans la figure 4.16. Ces résultats montrent l'efficacité de l'algorithme proposé.

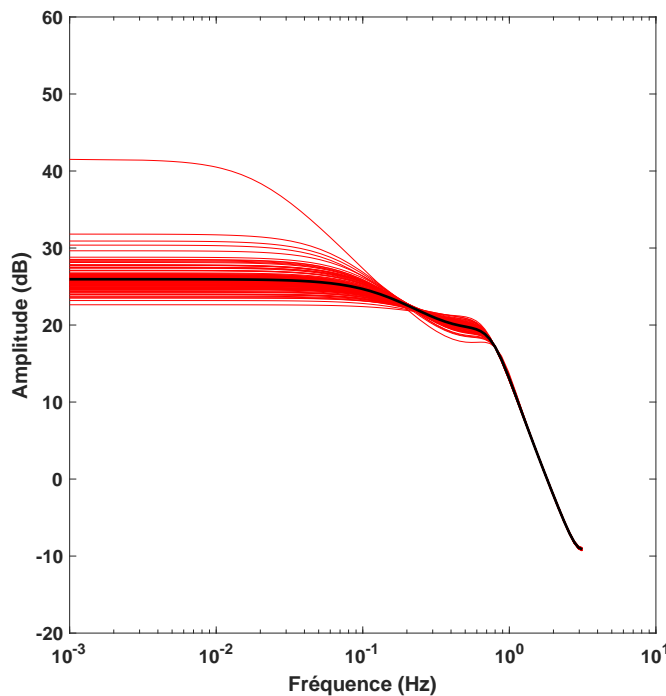


Figure 4.16 – Algorithme 10 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 10^7$  et  $C = 0$ .

Comme l'algorithme proposé permet l'identification paramétrique du système, le tableau 4.1 présente les moyennes et les écarts types moyens des paramètres estimés dans l'expérience précédente.  $\widehat{\theta}(i)$  présente l'estimation du  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur des paramètres  $\theta^*$ . Ces résultats montrent que l'algorithme proposé permet l'identification directe des paramètres.

Dans une deuxième expérience, nous étudions l'influence du nombre d'échantillons  $N$ . Des simulations de Monte Carlo avec 100 réalisations sont effectuées pour  $N = 5000$ ,  $N = 10000$ ,  $N = 50000$  et  $N = 100000$ . La figure 4.10 présente les diagrammes de Bode module de 100 modèles identifiés pour chaque valeur de  $N$ . Si on compare par rapport à la figure 5.7 il apparaît que les performances sont dégradées pour un faible nombre d'échantillons. Pour  $N$  suffisamment grand, l'identification est réalisée correctement.

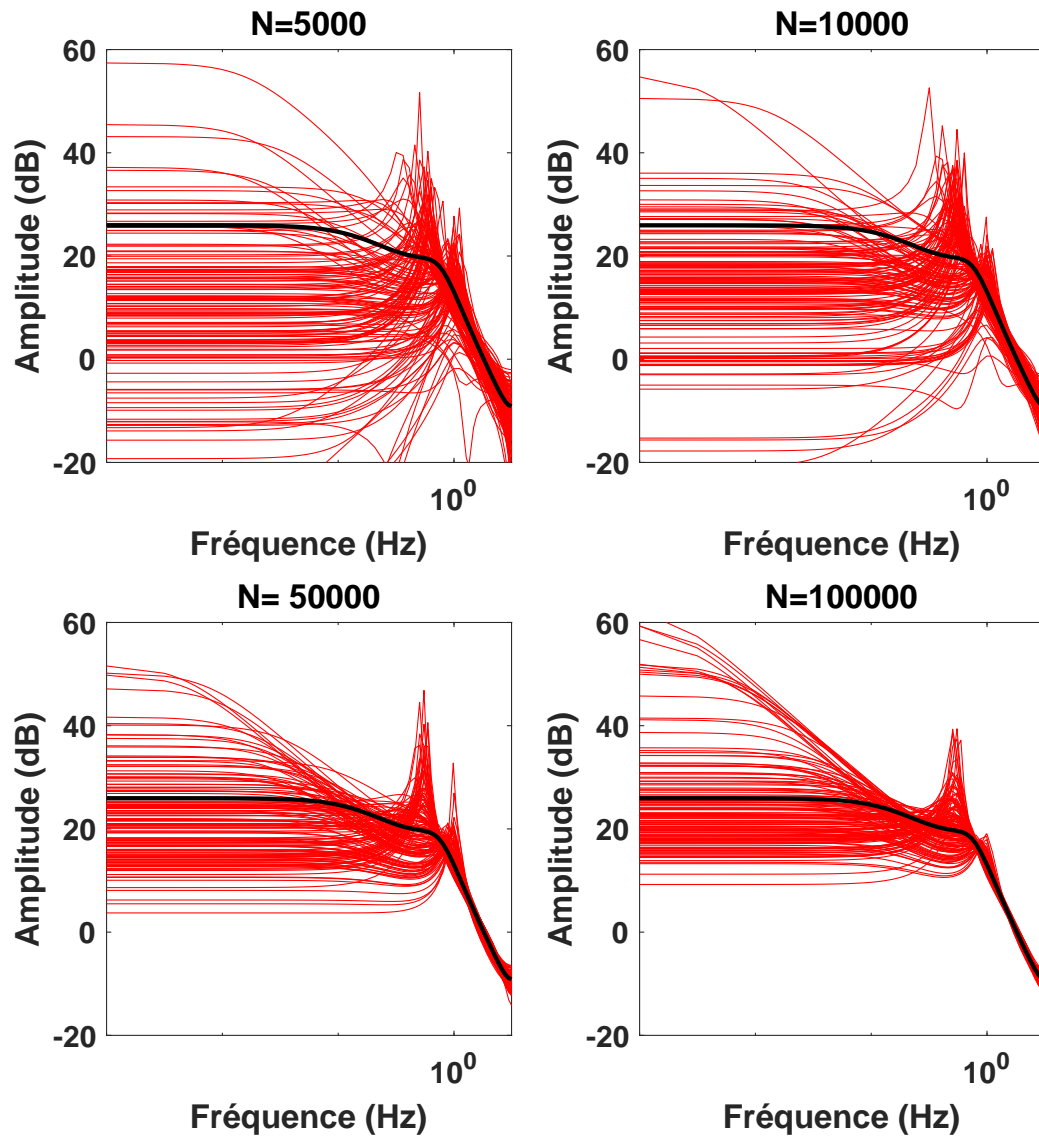


Figure 4.17 – Algorithme 10 : Diagramme de Bode du module de  $G^*(q)$  pour  $N = 5000$ ,  $N = 10000$ ,  $N = 50000$  et  $N = 100000$ .

### Influence du bruit

Dans une troisième expérience nous étudions l'influence de bruit. Ici encore, des

simulations de Monte Carlo avec 100 réalisations sont effectuées pour :  $SNR = \{5, 10, 15, 20\}dB$  pour  $N = 10^7$  échantillons. La figure 4.18 présente les diagrammes de Bode module de 100 modèles identifiés pour chaque valeur de SNR. Les résultats obtenus lors de cette expérience montrent la capacité de l'algorithme proposé à estimer la fonction de transfert du système dans un milieu bruité.

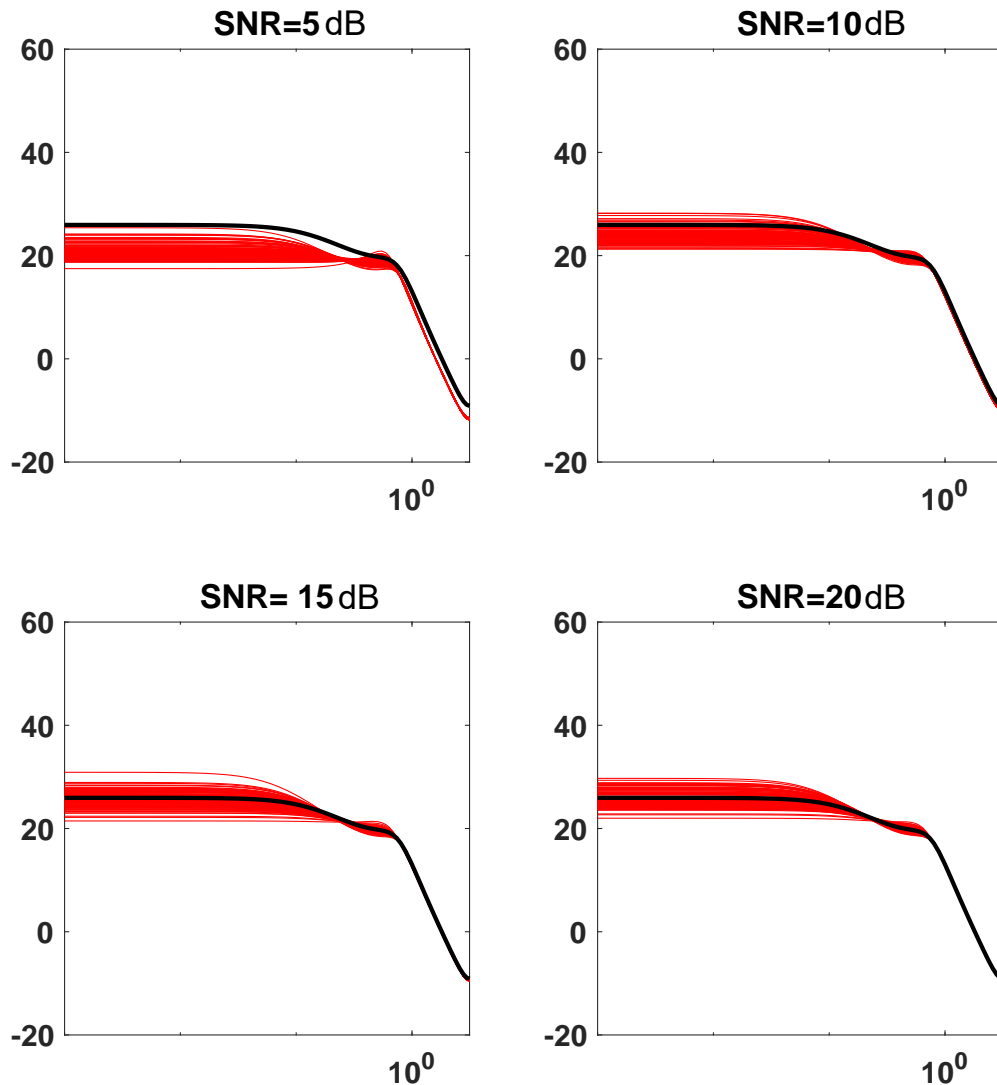


Figure 4.18 – Algorithme 10 : Diagramme de Bode module de  $G^*(q)$  pour  $SNR = 20dB$ ,  $SNR = 10dB$  et  $SNR = 5dB$  avec  $N = 10^7$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé les premières solutions au problème d'identification de système en boucle fermée à base de données binaires, des mesures binaire

de la sortie de système, l'entrée et à haute résolution et des mesures binaires de l'entrée et de la sortie du système. A ce jour et à notre connaissance il n'y a aucune solution proposée à ce problème dans la littérature. Nous avons proposé deux approches pour l'identification des systèmes à sortie binaire, la première est une approche indirecte basée sur la reconstruction du signal de sortie du système et puis l'estimation de sa fonction du transfert. La deuxième approche qui est aussi indirecte, est basée sur l'erreur de sortie en boucle fermée. Cette approche permet d'estimer directement les paramètres du système sans passer par une étape de réduction de modèle comme dans le cas dans la première approche. A noter que le deuxième algorithme a fait l'objet d'une publication à IEEE ICSC 2021. La première approche a permis de montrer qu'il est possible de réaliser l'identification en boucle fermée assez simplement. La seconde approche a permis d'améliorer les performances de la première proposition. Comme il a été vu dans les simulations numériques, l'identification en boucle fermée reste difficile, notamment en présence de bruit ou avec peu de données. Ces résultats, bien qu'encourageants, restent donc largement perfectibles. Dans le même esprit des approches développées pour les systèmes à sortie binaire, deux approches sont proposées pour les systèmes à base de mesures binaires de l'entrée et de la sortie. La première approche est une méthode indirecte basée sur l'utilisation de l'algorithme 4, présenté dans le **chapitre 3**. Cette méthode indirecte conduit à l'estimation d'un modèle d'ordre élevé et requiert par conséquent une étape de réduction de modèle. La deuxième approche est aussi indirecte, elle permet d'estimer directement les paramètres du système sans passer par une étape de réduction du modèle présentée dans la première approche. Cette approche est basée sur l'utilisation de la variable instrumentale et l'estimation des fonctions de corrélation du système à partir de signaux binaires disponibles de l'excitation de la boucle et la sortie du système. A noter que le deuxième algorithme a fait l'objet d'une publication acceptée à la conférence CoDIT 2022. Les résultats de simulation montrent la difficulté dans la mise en oeuvre fiable de la première approche et les meilleures performances de la seconde approche. A noter tout de même que cette seconde approche nécessite un très grand nombre de données pour pouvoir être efficace. C'est le prix à payer pour la binarisation des données.

# Conclusion générale et Perspectives

Le développement de nouvelles méthodes d'identification des systèmes à base de données binaires constitue la principale motivation de cette thèse. La démarche suivie pour justifier ce travail a débuté par une synthèse des méthodes d'identification basées sur des données binaires. Cette étude bibliographique a permis de classer ces solutions en deux catégories : méthodes d'identification en boucle ouverte à sortie binaire et méthodes permettant l'identification en boucle ouverte des systèmes ayant une entrée et sortie binaires. Ces dernières ne sont pas nombreuses. Cette synthèse a montré aussi l'inexistence des méthodes pour l'identification en boucle fermée à base de données binaires, pour surmonter les limitations présentées en boucle ouverte (raisons d'instabilité, bon fonctionnement, raisons de sécurité...).

L'exploitation des méthodes analysées lors de notre étude bibliographique nous a permis, d'une part, d'enrichir la littérature d'identification en boucle ouverte des systèmes à base de mesures binaire de l'entrée et la sortie par :

- Le développement de deux nouvelles méthodes permettant l'identification des système RIF à base de mesures binaire de l'entrée et la sortie. La première permet l'estimation de l'amplitude de la réponse fréquentielle du système considéré. Cette méthode permet de faire l'analyse fréquentielle des systèmes à entrée et sortie binaires. La deuxième méthode estime en temps réel ses paramètres. Ces méthodes reposent sur l'estimation des fonctions de corrélation. Elles s'inspirent des méthodes développées dans [67]. Une analyse de convergence et de variance de ces algorithmes a été réalisée. Cette dernière montre l'efficacité des algorithmes proposés et cela a été confirmé par des simulations numériques.
- Le développement des solutions dédiées à une structure des systèmes plus complexes, plus précisément les systèmes RII en utilisant des mesures binaires de l'entrée et de la sortie. Ces méthodes sont une extension de celles dédiées aux systèmes RIF et sont les pionnières dans la littérature pour ce type de systèmes. Deux méthodes sont proposées pour l'identification de systèmes RII. La première est batch et permet d'estimer ses paramètres. La deuxième est l'extension en temps réel de la première, par l'utilisation de l'algorithme du gradient stochastique. Dans le même esprit d'analyse, une étude de convergence et de variance des méthodes développées ont été proposées. Des simulations numériques montrent l'efficacité de ces solutions.

D'autre part, nous avons pu aborder le problème d'identification en boucle fermée des systèmes à base de données binaires par :

- Le Développement de deux premières méthodes permettant l'identification en boucle fermée des systèmes à base de mesures binaires de la sortie. La première est rudimentaire basée sur l'utilisation des méthodes qui existent dans la littérature pour reconstruire le signal de sortie et puis estimer sa fonction de transfert. La deuxième méthode est une version étendue à la boucle fermée de l'algorithme utilisé en boucle ouverte dans [66]. Cette méthode est basée sur l'erreur de sortie en boucle fermée.
- Le Développement de deux méthodes permettant l'identification en boucle fermée des systèmes en utilisant des mesures binaires de l'entrée et de la sortie. La première est basée sur l'utilisation de la méthode développée dans le chapitre 3 pour estimer la boucle fermée (système + correcteur) et puis passer par la réduction du modèle. La deuxième méthode est basée sur l'estimation des corrélations afin d'identifier directement les paramètres du système.

Le tableau 4.2 résume certaines caractéristiques des algorithmes développés.

	Chapitre	Boucle	Système	entrée	Sortie	Type
<b>Chap 2</b>	algorithme 1	ouverte	RIF	binaire	binaire	analyse fréquentielle.
	algorithme 2	ouverte	RIF	binaire	binaire	récuratif
	algorithme 3	ouverte	RIF	binaire	binaire	récuratif.
<b>Chap 3</b>	algorithme 4	ouverte	RII	binaire	binaire	batch
	algorithme 5	ouverte	RII	binaire	binaire	récuratif
<b>Chap 4</b>	algorithme 6	fermée	RII	haute résolution	binaire	batch
	algorithme 8	fermée	RII	haute résolution	binaire	batch
	algorithme 9	fermée	RII	binaire	binaire	batch
	algorithme 10	fermée	RII	binaire	binaire	batch

Tableau 4.2 – Résumé des caractéristiques des algorithmes d'identification développés dans ce mémoire

## Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse permet d'envisager de nombreuses perspectives. Quelques-unes de ces perspectives sont les suivantes :

- Tout d'abord il semble intéressant de poursuivre le développement des algorithmes proposés dans le chapitre 4 via une analyse de la convergence et de la variance.
- Ensuite il serait intéressant d'appliquer les méthodes proposées sur des procédés industriels pour confirmer leurs performances et mettre en évidence leurs limitations éventuelles.
- De nombreuses méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur permettent l'identification des systèmes à base de données à haute résolution ([76],[68],[69]...). Il serait, donc, intéressant de développer des algorithmes

basés sur les statistiques d'ordre supérieur permettant l'identification des systèmes à base de données binaires, à fin de minimiser l'effet du bruit sur l'identification.

- Enfin, dans l'ingénierie, les systèmes dynamiques sont souvent connectés les uns aux autres, comme les robots distribués et les réseaux de capteurs mobiles. La boucle fermée présentée dans le chapitre 4 présente le cas simple de deux systèmes connectés (système et correcteur). Une brève discussion sur les systèmes multi-agents en réseau et leur importance sont présentées dans [57]. L'identification des systèmes statiques interconnectés avec d'autres systèmes dans le cas de mesures binaires est présentée dans [1] et quelques applications de ce cadre sont également présentées. Ainsi, l'identification d'un réseau de systèmes ( systèmes interconnectés avec d'autres systèmes) à base de données binaires peut être une piste de recherche abordée par la suite.



# Bibliographie

- [1]
- [2] R. Auber. *Contribution à la reconnaissance d'activités à partir d'un objet connecté*. Thèse de Doctorat, Université de Caen normandie, 2019.
- [3] R. Auber, M. Pouliquen, E. Pigeon, P.A. Chapon, and S. Moussay. Activity recognition from binary data. *UKACC International Conference on Control, Sheffield*, 2018.
- [4] E. W. Bai and J. Reyland. Towards identification of wiener systems with the least amount of a priori information on the nonlinearity. *Automatica*, 44 :910–919, 2008.
- [5] G. Bottegal, H. Hjalmarsson, and G. Pillonetto. A new kernel-based approach to system identification with quantized output data. *Automatica*, 85 :145–152, 2017.
- [6] L. Bourgois and J. Juillard. Convergence analysis of an online approach to parameter estimation problems based on binary noisy observations. *IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, 2012*.
- [7] L. Bourgois and J. Juillard. A recursive nonlinear system identification method based on binary measurements. *International Conference on Integrated Modelling and Analysis Applied Control and Automation*, 2011.
- [8] M. Boutayeb, Y. Becis, and M. Darouach. Recursive identification of linear multivariable systems with bounded disturbances. *IFAC World Congress, Barcelona, 2002*.
- [9] C. Canudas-De-Wit and J. Carrillo. A modified EW-RLS algorithm for systems with bounded noise. *Automatica*, 26(3) :599–606, 1990.
- [10] M. Casini, A. Garulli, and A. Vicino. Optimal input design for identification of systems with quantized measurements. *IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008*.
- [11] M. Casini, A. Garulli, and A. Vicino. Set-membership identification of ARX models with quantized measurements. *IEEE Conference on Decision and Control - European Control Conference, Orlando, 2011*.

- [12] M. Casini, A. Garulli, and A. Vicino. Time complexity and input design in worst-case identification using binary sensors. *IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, 2007*.
- [13] M. Casini, A. Garulli, and A. Vicino. Input design in worst-case system identification using binary sensors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(5) :1186–1191, 2011.
- [14] M. Casini, A. Garulli, and A. Vicino. Input design in worst-case system identification with quantized measurements. *Automatica*, 48(12) :2997–3007, 2012.
- [15] V. Cerone. Feasible parameter set for linear models with bounded errors in all variables. *Automatica*, 29(6) :1551–1555, 1993.
- [16] V. Cerone. Parameter bounds for ARMAX models from records with bounded errors in variables. *International Journal of Control*, 57(1) :225–235, 1993.
- [17] V. Cerone, D. Piga, and D. Regruto. Set-Membership Error-in-Variables identification through convex relaxation techniques. *Transactions Automatic Control*, 57(2) :517–522, 2012.
- [18] V. Cerone, D. Piga, and D. Regruto. Fixed-order FIR approximation of linear systems from quantized input and output data. *Systems and Control Letters*, 62 :1136–1142, 2013.
- [19] T. Chen, Y. Zhao, and L. Ljung. Impulse response estimation with binary measurements : A regularized FIR model approach. *IFAC Symposium on System Identification, Brussels, 2012*.
- [20] L. Chisci, A. Garulli, A. Vicino, and G. Zappa. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification. *Automatica*, 34(1) :15–22, 1998.
- [21] T. Clement and S. Gentil. Recursive membership set estimation for output error models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32(5) :505–513, 1990.
- [22] E. Colinet and J. Juillard. A weighted least-squares approach to parameter estimation problems based on binary measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1) :148 –152, 2010.
- [23] Balazs Csanad Csaji and Erik Weyer. Recursive estimation of ARX systems using binary sensors with adjustable thresholds. *IFAC Symposium on System Identification, Brussels, 2012*.
- [24] A.V. Dandawate and G.B. Giannakis. Asymptotic properties and covariance expressions of kth-order sample moments and cumulants. *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, 1993*.
- [25] S. Dasgupta and Y.F. Huang. Asymptotically convergent modified recursive least square with data-dependent updating and forgetting factor for systems with bounded noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33(3) :383–392, 1987.

- [26] B. Depraetere, G. Pinte, and J. Swevers. Identification of linear systems using output measurements with only two possible values. *IEEE Control and Decision Conference - European Control Conference, Orlando, 2011*.
- [27] B. Depraetere, J. Stoev, G. Pinte, and J. Swevers. Identification of linear systems with binary outputs using short independent experiments. *IFAC Symposium on System Identification, Brussels, 2012*.
- [28] S. Ko E. Weyer and M. C. Campi. Finite sample properties of system identification with quantized output data. *IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, 2009*.
- [29] G. Ferreres and M. M'Saad. Estimation of Output Error models in the presence of unknown but bounded disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11(2) :115–140, 1997.
- [30] E. Fogel and Y.F. Huang. On the value of information in system identification - bounded noise case. *Automatica*, 18(2) :229–238, 1982.
- [31] B.I. Godoy, G.C. Goodwin, J.C. Ag uero, D. Marelli, and T. Wigren. On identification of FIR systems having quantized output data. *Automatica*, 47(9) :1905–1915, 2011.
- [32] B.I. Godoy, P.E. Valenzuela, C.R. Rojas, J.C. Aguero, and B. Ninness. A novel input design approach for systems with quantized output data. *European Conference on Control, Strasbourg, 2014*.
- [33] A. Goudjil, M. Pouliquen, E. Pigeon, O. Gehan, and M. M'Saad. Identification of systems using binary sensors via support vector machines. *IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, 2015*.
- [34] J. Guo, L.Y. Wang, G. Yin, Y. Zhao, and J.F. Zhang. Asymptotically efficient identification of FIR systems with quantized observations and general quantized inputs. *Automatica*, 57(1) :113–122, 2015.
- [35] J. Guo, L.Y. Wang, G. Yin, Y. Zhao, and J.F. Zhang. Identification of Wiener systems with quantized inputs and binary-valued output observations. *Automatica*, 78 :280–286, 2017.
- [36] J. Guo and Y. Zhao. Recursive projection algorithm on FIR system identification with binary-valued observations. *Automatica*, 49(11) :3396–3401, 2013.
- [37] J. Guo, Y. Zhao, C.Y. Sun, and Y. Yu. Recursive identification of FIR systems with binary-valued outputs and communication channels. *Automatica*, 60(1) :165–172, 2015.
- [38] Jin Guo, Ji-Feng Zhang, and Yanlong Zha. Adaptive tracking control of a class of first-order systems with binary-valued observations and time-varying threshold. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(12).

- [39] Jin Guo, Ji-Feng Zhang, and Yanlong Zha. Adaptive tracking via binary-valued observations with fixed threshold. *IFAC Symposium on System Identification Brussels*, July 11-13, 2012.
- [40] F. Gustafsson and R. Karlsson. Statistical results for system identification based on quantized observations. *Automatica*, 45(12) :2794–2801, 2009.
- [41] Q. He, G.G. Yin, and L.Y. Wang. System identification under regular, binary, and quantized observations : Moderate deviations error bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6) :1635–1640, 2015.
- [42] T. J. R. Hughes, W. K. Liu, and A. Brooks. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*, 30(1) :1–60, 1979.
- [43] K. Jafari, J. Juillard, and E. Colinet. A recursive system identification method based on binary measurements. *IEEE Control and Decision Conference, Atlanta, 2010*.
- [44] K. Jafari, J. Juillard, and M. Roger. Convergence analysis of an online approach to parameter estimation problems based on binary observations. *Automatica*, 48(11) :2837–2842, 2012.
- [45] D. Joachim and J. R. Deller Jr. Multiweight optimization in optimal bounding ellipsoid algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2) :679–690, 2006.
- [46] V. Krishnamurthy. Estimation of quantized linear errors-in-variables models. *Automatica*, 31 :1459–1464, 1995.
- [47] I. D. Landau and A. Karimi. Recursive algorithms for identification in closed-loop : a unified approach and evaluation. *Automatica*, 33(8) :1499–1523, 1499–1523.
- [48] A.S. Leong, E. Weyer, and G.N. Nair. On the identification of FIR systems with binary input and output observations. *IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2016*.
- [49] A.S. Leong, E. Weyer, and G.N. Nair. Identification of FIR systems with binary input and output observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(3) :1190–1198, 2021.
- [50] G. Li and C. Wen. Identification of Wiener systems with clipped observations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(7) :3845–3852, 2012.
- [51] Y. Lian, Z. Luo, E. Weyer, and G. N. Nair. Parameter estimation with binary observations of input and output signals. *in Proc. AUCC, Newcastle, Australia*, page 226–231, Nov. 2016.

- [52] Xian'en Liu, Jiandong Wang, and Qinghua Zhang. A quadratic programming-based method for quantized system identification. *IFAC World Congress, Milano*, 2011.
- [53] L. Ljung. *System Identification - Theory for the User*. Prentice-Hall, 1999.
- [54] D. Marelli, K. You, and M. Fu. Identification of ARMA models using intermittent and quantized output observations. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2011.
- [55] D. Marelli, K. You, and M. Fu. Identification of ARMA models using intermittent and quantized output observations. *Automatica*, 49 :360–369, 2013.
- [56] H. Mei, L.Y. Wang, and G. Yin. Almost sure convergence rates for system identification using binary, quantized, and regular sensors. *Automatica*, 50(8) :2120–2127, 2014.
- [57] Mehran Mesbahi and Magnus Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton Univ. Press,, 2010.
- [58] H. Oualla, M.Pouliquen, M. Frikel, and S. Safi et T. Bonargent. Spectral analysis for system identification from input/output binary measurements. *European Control Conference 2020, ECC 2020*, 2020.
- [59] H. Oualla, M.Pouliquen, M. Frikel, and S. Safi. Comparison of algorithms for identification of IIR systems from binary measurements on the output. *International Conference of Computer Science and Renewable Energies, Morocco, 2020*.
- [60] H. Oualla, M.Pouliquen, M. Frikel, and S. Safi. Spectrum estimation for time-series based on binary data. *International Colloquium on Signal, Automatic Control and Telecommunications, France, 2020*.
- [61] H. Oualla, M.Pouliquen, M. Frikel, and S. Safi. Comparison of algorithms for real-time identification of FIR systems from binary measurements on the output. *2020 28th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2020*, 2020.
- [62] M. Pouliquen, O. Gehan, and E. Pigeon. Bounded-error identification for closed-loop systems. *Automatica*, 50(7) :1884–1890, 2014.
- [63] M. Pouliquen, A. Goudjil, O. Gehan, and E. Pigeon. Continuous-time system identification using binary measurements. *IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2016*.
- [64] M. Pouliquen, T. Menard, E. Pigeon, O. Gehan, and A. Goudjil. Recursive system identification algorithm using binary measurements. *European Conference on Control, Aalborg, 2016*.

- [65] M. Pouliquen, E. Pigeon, and O. Gehan. Output Error identification for multi-input multi-output systems with bounded disturbances. *IEEE Conference on Decision and Control - European Control Conference, Orlando, 2011*.
- [66] M. Pouliquen, E. Pigeon, O. Gehan, and A. Goudjil. Identification using binary measurements for IIR systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(2) :786 – 793, 2019.
- [67] M. Pouliquen, E. Pigeon, O. Gehan, A. Goudjil, and R. Auber. Impulse response identification from input/output binary measurements. *Automatica*, 123 :109307, 2021.
- [68] S. SAFI and A. Zeroual. Ma system identification using higher order cumulants application to modelling solar radiation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 72(7) :533–548, 2002.
- [69] S. SAFI and A. Zeroual. Blind parametric identification of non-gaussian fir systems using higher order cumulants. *International Journal of Systems Science*, 35(15) :855–867, 2004.
- [70] F.C. Schweppe. *Uncertain dynamic systems*. Prentice-Hall, 1973.
- [71] W.F. Sheppard. On the application of the theory of error to cases of normal distribution and normal correlation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, pages 101–167, 1898.
- [72] Q. Song. Recursive identification of systems with binary-valued outputs and with ARMA noises. *Automatica*, 93 :106–113, 2018.
- [73] J.C. Spall. Identification for systems with binary subsystems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59 :3–17, 2014.
- [74] G. Tan, C. Wen, and Y.C. Soh. Identification for systems with bounded noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7) :998–1001, 1997.
- [75] C. Tianshi, Z. Yanlong, and L. Ljung. Impulse response estimation with binary measurements : A regularized FIR model approach. *IFAC Symposium on System Identification-Brussels*, 2012.
- [76] V. Tsoukas, P. Koukoulas, and N. Kalouptsidis. Identification of input-output bilinear systems using cumulants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11) :2753–2761, 2001.
- [77] A. Vicino and G. Zappa. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6) :774–785, 1996.
- [78] J. Wang and Q. Zhang. Identification of FIR systems based on quantized output measurements : a quadratic programming-based method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 :1439–1444, 2015.

- [79] L. Wang, G. Yin, J. Zhang, and Y. Zhao. *System Identification with quantized observation*. Springer, 2010.
- [80] Le Yi Wang and G. George Yin. Asymptotically efficient parameter estimation using quantized output observations. *Automatica*, 43, 2007.
- [81] L.Y. Wang, G.G. Yin, and J. Zhang. Joint identification of plant rational models and noise distribution functions using binary-valued observations. *Automatica*, 42(4) :535–547, 2006.
- [82] L.Y. Wang, G.G. Yin, J.F. Zhang, and Y. Zhao. *System identification with quantized observations*. Birkhauser, 2010.
- [83] L.Y. Wang, G.G. Yin, Y. Zhao, and J. Zhang. Identification input design for consistent parameter estimation of linear systems with binary-valued output observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(4) :867–880, 2008.
- [84] L.Y. Wang, J.F. Zhang, and G. Yin. System identification using binary sensors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11) :1892–1907, 2003.
- [85] T. Wang, M. Hu, and Y. Zhao. Adaptive tracking control of FIR systems under binary-valued observations and recursive projection identification. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 2019.
- [86] Torbjöm Wigren. Adaptive filtering using quantized output measurements. *IEEE Transactions on signal processing*, pages 3423–3426, 1898.
- [87] S. Yasini and T. Wigren. Convergence in networked recursive identification with output quantization. *IFAC Symposium on System Identification, Stockholm, 2018*.
- [88] S. Yasini and T. Wigren. Counterexamples to parametric convergence in recursive networked identification. *American Control Conference, Milwaukee, 2018*.
- [89] K. You, E. Weyer, and G.N. Nair. Identification of a gain system with binary input and output measurements. *IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, 2015*.
- [90] Y. Zhao, L.Y Wang, G.G. Yin, and J.F. Zhang. Identification of Wiener systems with binary-valued output observations. *Automatica*, 43(10) :1752–1765, 2007.