



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE  
Faculté des Sciences et Techniques  
Béni Mellal



*Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques*

*Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

## THÈSE

Présentée par

**Maria Ihsane El BAHI**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur**

*Spécialité : Mathématiques*

---

### **Symétrie de Lie des équations différentielles fractionnaires non linéaires.**

---

Soutenue le 05/Juin/2021 devant le jury composé de :

Pr. Elhoussine AZROUL	Faculté des Sciences, Fès	Président
Pr. Hassan EL AMRI	Ecole Normale Supérieure, Casablanca	Rapporteur
Pr. Lala Saadia CHADLI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Mohamed OUKESSOU	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Examineur
Pr. Ahmed KAJOUNI	Ecole supérieure de technologie, Béni Mellal	Invité
Pr. Abdelaziz QAFFOU	Ecole supérieure de technologie, Béni Mellal	Invité
Pr. Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Encadrant

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Khalid HILAL, qui m'a honoré par la confiance qu'il m'a accordé, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'il m'a donnée.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements au Professeur Saïd MELLIANI, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" (LMACS), pour son aide capitale, pour sa disponibilité, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement utiles.

J'exprime ensuite mes sincères remerciements aux Professeurs Hassan EL AMRI, Lala Saadia CHADLI et Mohamed OUKESSOU, qui m'ont fait l'honneur d'avoir rapporté ma thèse, ils ont pris de leur temps pour examiner et évaluer mon travail. Leurs remarques et leurs conseils m'ont permis d'envisager ce travail sous un meilleur angle. Pour tout cela je les en remercie vivement.

Tous mes remerciements vont également aux Professeurs qui me font l'honneur de participer au jury. Je voudrais leur remercier très chaleureusement pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour examiner mon travail.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à ma mère, mon père et mon frère, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leur patience

et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.

Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>10</b>
<b>1 Calcul fractionnaire</b>	<b>14</b>
1.1 Fonctions spéciales utilisés dans le calcul fractionnaire	14
1.1.1 Fonction Gamma	14
1.1.2 Fonctions de Mittag-Leffler	15
1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
1.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	17
1.4 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	18
1.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	19
1.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	19
<b>2 Symétrie de Lie et conservation des lois des équations aux dérivées partielles fractionnaires</b>	<b>21</b>
2.1 Symétrie de Lie	21
2.1.1 La symétrie	21
2.1.2 Groupe de Lie	23
2.1.3 Groupe de symétries	24
2.1.4 Transformation infinitésimale	24
2.1.5 Générateur infinitésimal et l'algèbre de Lie	25
2.2 Symétries de Lie des équations différentielles.	27
2.2.1 Présentation du cadre	27
2.2.2 Prolongement de groupe de Lie	29
2.2.3 Invariance des équations différentielles	30
2.2.4 Exemple : l'équation de Burger	31
2.3 Symétrie de Lie des équations différentielles fractionnaires	35
2.4 Solutions invariantes	39
2.5 Les lois de conservation pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires	40

<b>3</b>	<b>Lie symétrie, solutions exactes et lois de conservation de l'équation de type KdV</b>	<b>43</b>
3.1	Symétries de Lie l'équation de type KdV-Like. . . . .	43
3.2	Réductions et solutions invariantes de KdV. . . . .	45
3.3	Solution exacte en utilisant la méthode des séries entière. . . . .	50
3.4	Les lois de conservation pour l'équation de type KdV . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Symétrie de Lie pour l'équation fractionnaire généralisée de type KdV</b>	<b>57</b>
4.1	Les symétrie de Lie pour KdV . . . . .	57
4.2	Lois de conservation. . . . .	61
4.3	Solution développable en séries entière. . . . .	62
<b>5</b>	<b>Symétrie de Lie pour l'équation fractionnaire généralisée de Drainage des Mousses (DM)</b>	<b>68</b>
5.1	Les symétrie de (DM) . . . . .	68
5.2	Les lois de conservation. . . . .	72
5.3	solution développable en série entière. . . . .	74
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Résumé

Dans ce travail, nous étudions la théorie des groupes de Lie pour certaines équations différentielles aux dérivées partielles fractionnaires non linéaires en physique mathématique. Les solutions exactes et les lois de conservation sont obtenues. La méthode est appliquée à l'équation de Korteweg-de Vries, à l'équation généralisée de Korteweg-de-Vries et à l'équation de Drainage des Mousses.

L'équation du type Korteweg-de-Vries est étudiée par la méthode du groupe de Lie. Nous montrons que cette équation admet une algèbre de Lie de dimension 3. Les réductions et les solutions exactes associées à chaque champ de vecteurs sont obtenues en utilisant la méthode de symétrie de Lie en combinaison avec la méthode des séries entières. Nous présentons après les lois de conservation en utilisant la méthode d'Ibragimov.

L'équation du type Korteweg-de-Vries généralisée est étudiée en utilisant la symétrie de Lie. Les réductions et les solutions exactes sont obtenues, en utilisant aussi la méthode des séries entières pour trouver d'autres solutions. En plus, les lois de conservation de l'équation sont trouvées en utilisant le théorème de conservation dû à Ibragimov.

Enfin, l'équation de Drainage de Mousse est étudiée à l'aide de la méthode de symétrie de Lie. Les réductions sont obtenues en utilisant la méthode de symétrie de Lie, d'autres solutions supplémentaires sont données en utilisant la méthode des séries entières. Les lois de conservation sont également obtenues en utilisant l'approche d'Ibragimov.

# Abstract

In this work we study the applications of Lie symmetry analysis to certain nonlinear evolution fractional equations of mathematical physics. Exact solutions and conservation laws are obtained for such equations. The equations which are considered in this thesis are a Korteweg-de Vries-Like equation, a generalized Korteweg-de Vries-Like equation and a Foam Drainag equation.

A Korteweg-de Vries-Like equation is investigated from the point of view of Lie group. We show that this equation admits a treedimensional Lie algebra. Their associated symmetry reductions and exact solutions are obtained using the Lie symmetry method in conjunction with the power serie method. We also present conservation laws which are derived using the Ibragimov approach.

A generalized Korteweg-de Vries-Like equation is investigated using Lie symmetry analysis. The similarity reductions and exact solutions with the aid of power serie methods are obtained. In addition to this, the conservation laws for the equation are derived using the conservation theorem due to Ibragimov.

Finally, a Foam Drainag equation is analyzed using Lie symmetry method. The similarity reductions are obtained using the Lie symmetry method and extra solution are driven using power serie method. Conservation laws are also obtained by employing the Ibragimove approach.

# Déclaration de publications

Détails de la contribution aux publications qui font partie de cette thèse.

## Chapitre 3

M.I.El Bahi, K.Hilal, Symmetry analysis, invariant solutions and consevation laws of fractional KdV-like equation., Journal of Advances in Mathematical Physics, vol. 2021, Article ID 6690436, 2021.

## Chapitre 4

M.I.El Bahi, K.Hilal, Lie Symmetry Analysis, Exact Solutions, and Conservation Laws for the Generalized Time-Fractional KdV-Like Equation, Journal of Function Spaces, vol. 2021, Article ID 6628130, 10 pages, 2021.



# liste des abréviations

- EDP : Équation aux dérivée partielle
- EDO : Équation différentielle ordinaire
- EDPF : Équation aux dérivée partielle fractionnaire
- EDPF : Équation différentielle ordinaire fractionnaire
- KdV : Korteweg-de Vries
- DM : Drainage de Mousse
- LC : Lois de Conservation

# Introduction générale

Jusqu'à aujourd'hui, les physiciens mathématiciens ont cherché à comprendre de nombreux phénomènes de la physique afin de les modéliser sous différentes classes d'équations. La plupart du temps, les équations qui représentent les phénomènes de façon exacte sont non linéaires. Les équations aux dérivées partielles fractionnaires sont une classe d'équations couvrant la modélisation d'une bonne partie de ces phénomènes voir ([5, 38, 51, 56, 50, 15, 7, 13, 25, 30, 11]). Ainsi, il est important d'étudier les solutions explicites et les lois de conservation, permettant leurs constructions.

Malheureusement, les solutions exactes d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire sont parfois trop compliquées à atteindre en raison de la complexité des parties non linéaires les impliquant. Trouver les solutions d'une telle équation est une tâche ardue et ce n'est que dans certains cas particuliers que l'on peut écrire les solutions explicitement. Cependant, ces dernières années, des progrès importants ont été réalisés et de nombreuses méthodes efficaces pour obtenir des solutions explicites d'équations différentielles fractionnaires non linéaires ont été proposées. Parmi les méthodes les plus importantes trouvées dans la littérature, on peut citer : la méthode de Sub-equation, la méthode de perturbation d'homotopie, la méthode de l'intégrale première et la méthode de Groupe de Lie voir ([23, 18, 3, 66, 67, 69, 26]).

Les symétries apparaissent de façon naturelle dans les lois de la physique. Elles sont souvent présentes de façon intrinsèque, dans le système d'équations différentielles décrivant le modèle. Leur connaissance permet de mieux comprendre les phénomènes physiques complexes, de simplifier et de résoudre des problèmes et aussi d'approfondir la compréhension de certains phénomènes. Afin de trouver les solutions exactes des d'équations différentielles, on utilise souvent la théorie de Lie (ou théorie des groupes continus).

On doit la théorie des groupes continus aux mathématiciens Marius Sophus Lie et Felix, qui ont débuté leurs recherches en 1869 à l'école des mathématiques de Berlin sous la direction du professeur T.W. Weirstrass. Leurs recherches ont porté sur les courbes homogènes qui demeurent invariantes sous l'effet d'un certain groupe de transformations. Ainsi, ils ont élaboré la théorie

des groupes de discrets et continus et la notion de symétrie à travers des transformations projectives. Ils ont aussi contribué à l'étude des relations entre les algèbre et les groupe de Lie.

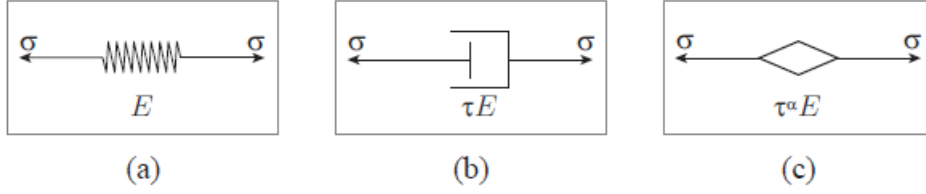
Lorsqu'une symétrie est associée à une équation différentielle, on peut alors exploiter celle-ci afin d'obtenir une simplification, et dans ce cas les variables dépendantes et indépendantes pourront habituellement être combinées dans le but de réduire le nombre de variables indépendantes (voir [52, 31, 53, 70, 71, 72])

Les lois de conservation jouent un rôle important dans le processus de résolution des équations différentielles. Il est bien connu que trouver les lois de conservation d'un système d'équations différentielles est souvent la première étape vers la recherche d'une solution. Les lois de conservation sont utiles dans l'intégration numérique d'équations aux dérivées partielles, par exemple pour le contrôler des erreurs numériques. Les lois de conservation jouent également un rôle important dans la théorie des transformations non classiques, formes normales et intégrabilité asymptotique . Récemment, les lois de conservation ont été utilisées pour construire des solutions d'équations aux dérivées partielles.

Le calcul fractionnaire a connu un grand développement dans ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à cette théorie car elle généralise les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non-entiers.

L'histoire de la dérivée d'ordre non-entier s'étale de la fin du 17ème siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand l'Hopital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  lorsque  $n = \frac{1}{2}$ . La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [49, 34]).

L'une des applications les plus importantes du calcul fractionnaire se manifeste dans l'étude des modèles rhéologiques (relatif à la rhéologie, branche de la mécanique qui étudie le comportement des matériaux du point de vue de la viscosité, la rigidité ou l'élasticité) utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués de ressorts et d'amortisseurs. Les lois de comportement de ces éléments rhéologiques peuvent être généralisées à partir de l'utilisation des dérivées fractionnaires.



**FIG. 1: Éléments rhéologiques de la viscoélasticité.**

La loi du comportement associée à la réponse d'un élément élastique est décrite simplement par  $\sigma = \tau^0 E D^0 \varepsilon = E \varepsilon$ , où  $\tau$  est le temps de relaxation,  $E$  le module élastique et  $D^0$  l'opérateur différentiel temporel d'ordre zéro. Cela caractérise le comportement d'un ressort (voir Fig. 1(a)). La loi du comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par  $\sigma = \tau^1 E D^1 \varepsilon = \tau E \dot{\varepsilon}$ , où  $\tau E$  correspond à la viscosité du matériau et  $D^1$  à l'opérateur différentiel temporel d'ordre un. Cela caractérise le comportement d'un amortisseur (voir Fig. 1 (b)). Afin de généraliser les deux cas précédents, la loi du comportement linéaire peut s'écrire sous la forme  $\sigma = \tau^\alpha E D^\alpha \varepsilon$  (\*), où  $D^\alpha$  est l'opérateur différentiel d'ordre fractionnaire, avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . L'élément rhéologique associé à l'équation (\*) présente des caractéristiques intermédiaires entre celles du ressort (*spring*) et de l'amortisseur (*dashpot*), d'où la désignation de *spring-pot* (voir Fig. 1(c)).

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles fractionnaires non linéaires en utilisant la méthode de symétrie de Lie. Ainsi, on va considérer les symétries continues d'une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire, contenant une variable  $u$  dépendant des variables indépendantes  $x$  et  $t$  ( voir [1, 62, 63, 10, 68, 33, 61]). Dans le but d'aborder les différents aspects traités dans cette thèse, nous avons organisé ce travail en cinq chapitres suivis par une conclusion générale et des perspectives.

**Chapitre 1** : Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires et les généralités sur le calcul fractionnaire, dont on aura besoin dans la suite.

**Chapitre 2** : Le deuxième chapitre a pour but, l'étude du groupe de symétries de Lie et sont prolongement pour les équations aux dérivée partielles fractionnaires, les lois de conservation et les solutions invariantes seront étudiées.

**Chapitre 3** : Le troisième chapitre, est consacré à l'étude des solutions explicites et les lois

de conservation de l'équation différentielle fractionnaire de type Kdv. On étudiera les réductions et les solutions invariantes et aussi les solutions explicites par la méthode des séries entière.

**Chapitre 4** : Dans ce chapitre, on établit des résultats sur l'étude de l'équation fractionnaire généralisée de type KdV.

**Chapitre 5** : Ce chapitre est consacré à l'étude des symétries de Lie pour l'équation fractionnaire généralisée de Drainage des Mousses.

Enfin, nous terminons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives.

# Chapitre 1

## Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires et des généralités sur la théorie du calcul fractionnaire qui seront utilisés dans la suite.

### 1.1 Fonctions spéciales utilisés dans le calcul fractionnaire

#### 1.1.1 Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

**Définition 1.1.1.** [17]

Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(cette intégrale est convergente pour tout  $x > 0$ ).

**Proposition 1.1.1.** [17]

Pour tout  $x > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!,$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

*Cas particuliers*

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}.$$

### 1.1.2 Fonctions de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle  $\exp(z)$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [43]) et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t > 0.$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle est donnée par la définition suivante :

**Définition 1.1.2.** [16, 24] Soient  $\alpha, \beta > 0$ . La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres notée  $E_{\alpha,\beta}(t)$  est définie par le développement en série entière :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

En particulier, pour  $\beta = 1$ ,  $E_{\alpha,1}(t)$  est la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre  $E_\alpha(t)$ , i.e.,  $E_{\alpha,1}(t) = E_\alpha(t)$ .

**Lemme 1.1.1.** [16]

Soit  $0 < \alpha < 1$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors pour chaque  $t \in [0, T]$ , on a

(1)- Pour tous  $K, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K(t - \tau)^\alpha) U(D^\alpha x)(\tau) d\tau &= Ux(t) - E_\alpha(\lambda^\alpha) Ux(0) \\ &\quad - K \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-K(t - s)^\alpha) Ux(s) ds \end{aligned}$$

(2)-

$$D_0^\alpha \left[ \int_0^t f(t-s)g(s)ds \right] (t) = \int_0^t D_0^\alpha [f(t)](s)g(t-s)ds + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} [{}_t I_{0^+}^{1-\alpha} f](t).$$

**Lemme 1.1.2.** [35, 24]

Pour  $a$  et  $t > a$ , on a

$$(a)- D_{a^+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha](x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha], \quad (\Re(\alpha) > 0, \lambda \in \mathbb{C})$$

$$(b)- (I_{a^+}^{\alpha'}(t-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^\mu]) (x) = (x-a)^{\alpha'+\beta-1} E_{\mu,\alpha'+\beta}[\lambda(x-a)^\mu],$$

avec  $\alpha' > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\mu > 0$ .

$$(c)- \int_0^z t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$$

$$(d) |E_{\alpha,\beta}(z)| \leq C_1 \exp(\sigma |z|^\rho), \text{ pour tout } \sigma > 1 \text{ et } \rho = \frac{1}{\Re(\alpha)}.$$

**Remarque 1.1.1.**  $D^\alpha$  et  $I^\alpha$  sont respectivement la dérivée et l'intégrale fractionnaire au sens de Caputo qu'on va définir par la suite.

## 1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ , selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

**Définition 1.2.1.** Soit  $f \in L^1([a, b])$ . L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$ , d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ , notée  $I_a^\alpha f$  est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma donnée précédemment.

**Théorème 1.2.1.** [17, 49]

Si  $f \in L^1([a, b])$ , alors  $I_a^\alpha f$  existe pour presque tout  $x \in [a, b]$  et de plus  $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$



**Proposition 1.2.1.** [17, 49]

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tels que  $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$ . Pour toute fonction  $f \in L^1([a, b])$ , on a :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f)(x) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(x) = I_a^\beta(I_a^\alpha f)(x)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ . Si de plus  $f \in C([a, b])$ , alors cette identité est vraie pour tout  $x \in [a, b]$ .

### 1.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.3.1.** [17, 49]

Soit  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$ , d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ , ( $\Re(\alpha) > 0$ ) notée  $D_a^\alpha f$  est définie par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt,$$

où  $n - 1 < [\Re(\alpha)] < n$  et  $x > a$ .

En particulier, pour  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ , on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left( \frac{d}{dx} \right) \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left( \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \right) \int_a^x f(t) dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x)$$

Par suite, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.3.1.**

$$(D_a^\alpha)(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n-\alpha})(x),$$

pour  $n = [\Re(\alpha)] + 1$  et  $x > a$ .

La proposition suivante donne une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire. On rappelle que l'espace  $AC^n([a, b])$  est donné par

**Proposition 1.3.1.** [17, 49]

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n([a, b])$ , alors la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha f$  existe presque partout sur  $[a, b]$  et de plus, elle est donnée par

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} (x - a)^{j - \alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(t) dt$$

## 1.4 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

**Théorème 1.4.1.** [17, 49]

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  existent. Alors pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$  existe et on a :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x)$$

**Lemme 1.4.1.** Soit  $\alpha \in ]n-1, n[$  et  $f$  une fonction vérifiant  $D_a^\alpha f = 0$  alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n}$$

**Théorème 1.4.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques, alors

$$D_t^\alpha(f(x,t)g(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} f(x,t) D_t^n g(x,t),$$

avec

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1} a \Gamma(n-a)}{\Gamma(1-a) \Gamma(n+1)}.$$

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivante :

**Proposition 1.4.1.** [17, 49]

Soient  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $n-1 \leq \alpha \leq n$ ,  $m-1 \leq \beta < m$ .

1. Pour  $f \in L^1([a, b])$ , l'égalité :

$$D_a^\alpha(I_a^\alpha f(t)) = f(t),$$

est vraie presque partout sur  $[a, b]$ .

2. Si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1([a, b])$ , la relation :

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha-\beta} f)(x),$$

est vraie presque partout sur  $[a, b]$ .

3. Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  $D_a^{\beta-\alpha}$  existe, alors on a :

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x).$$

4. Si  $f \in L^1([a, b])$  et  $I^{n-\alpha} \in AC^n([a, b])$  avec  $n = [\Re(\alpha)] + 1$ , alors :

$$[I_a^\alpha(D_a^\beta f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow a^+} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x).$$

## 1.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) se sont rendus compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

**Définition 1.5.1.** [17, 49]

Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(\alpha) > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n - 1 < \Re(\alpha) < n$  et  $f \in C^n([a, b])$ .

La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$  notée  ${}^c D_a^\alpha f$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &:= I_a^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

**Remarque 1.5.1.** La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in ]n-1, n[$  s'obtient par une application de la dérivée classique d'ordre  $n$  suivit par l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre  $n-\alpha$ , alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

## 1.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

**Théorème 1.6.1.** [17, 49]

Soient  $\alpha \geq 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f$  possède  $(n - 1)$  dérivée en  $a$  et si  $D_a^\alpha f$  existe, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right]$$

presque partout sur  $[a, b]$ .

**Remarque 1.6.1.** Le résultat du théorème précédent signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction  $f$  est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de  $f$ .

Un autre opérateur de dérivation fractionnaire qu'on va l'utiliser dans cette thèse est l'opérateur différentiel fractionnaire d'Erdélyi-Kober qu'est défini par

$$\left( P_\lambda^{\delta, \alpha} g \right) (\zeta) = \prod_{i=0}^{m-1} \left( \delta + i - \frac{1}{\lambda} \zeta \frac{d}{d\zeta} \right) (K^{\delta + \alpha, m - \alpha} g) (\zeta), \quad (1.1)$$

$$m = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec,  $K_\lambda^{\delta, \alpha}$  est l'opérateur intégral fractionnaire d'Erdélyi-Kober donné par :

$$\begin{cases} (K_\lambda^{\delta, \alpha} g) (\zeta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (z - 1)^{\alpha - 1} z^{-(\delta + \alpha)} g(\zeta z^{\frac{1}{\lambda}}) dz, & \alpha > 0, \\ g(\zeta), & \alpha = 0. \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Symétrie de Lie et conservation des lois des équations aux dérivées partielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions essentielles concernant la méthode du groupe de Lie ou symétrie de Lie. Ces notions serviront par la suite, pour construire une méthodologie de recherche des symétries pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires.

### 2.1 Symétrie de Lie

Pour bien comprendre la notion de symétrie de Lie, on va commencer par définir celle d'une symétrie d'un simple objet dans le plan. De manière générale, un objet est symétrique quand on peut permuter ses éléments en laissant sa forme inchangée, et les transformations pour lesquelles l'objet reste inchangé, sont les symétries.

#### 2.1.1 La symétrie

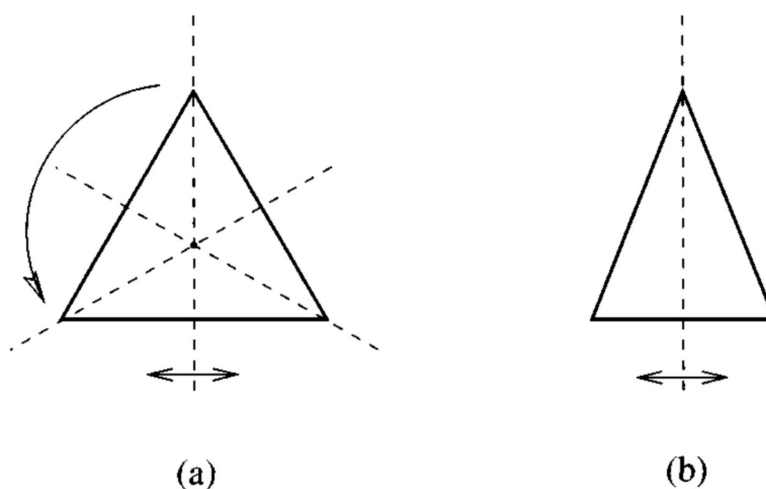
**Définition 2.1.1.** [31] Une symétrie (en terme de transformation) se caractérise par trois propriétés :

1. La transformation préserve la structure de l'objet.
2. La transformation et son inverse sont lisses, c'est-à-dire différentiable en tout point (difféomorphisme).
3. La transformation déplace l'objet de façon à ce qu'il redevienne lui même.

En fait, si les transformations satisfont (1) et (2), cela est suffisant. Par contre, certaines transformations sont des symétries si elles satisfont aussi la propriété (3), connue sous le nom de condition de symétrie.

Prenons les exemple suivants :

**Exemple 2.1.1.** Les deux triangles suivants admettent des symétries. Le premier (a) est un triangle équilatéral et l'autre (b) est un triangle isocèle. Les lignes pointillées représentent les réflexions possibles du triangle et la flèche, le fait que cette figure puisse subir une rotation. On voit que (a) admet trois réflexions et peut subir des rotations de  $\frac{2\pi}{3}x$  tour, où  $x$  est un entier. Par contre, le triangle (b) n'a qu'un seul axe de symétrie et ne peut subir qu'une seule rotation, soit d'un tour complet.



Les propriétés symétriques d'un objet peuvent habituellement être exprimées à l'aide d'un ensemble de matrices tel que lorsqu'une transformation est appliquée sur l'objet, le résultat des opérations matricielles nous redonne une matrice de l'ensemble. Il existe par contre certaines lois régissant les symétries d'objets géométriques. L'une d'elle est que chaque symétrie a un inverse, et cet inverse est aussi une transformation symétrique. L'action combinée d'une symétrie et son inverse laisse l'objet inchangé. Par exemple, si nous revenons à l'exemple précédent et que  $r$  dénote la rotation du triangle équilatéral (a) de  $\frac{2\pi}{3}$ , alors  $T^{-1}$  (l'inverse de  $T$ ) est une rotation de  $\frac{4\pi}{3}$ .

Nous nous concentrons, par simplicité, sur les symétries dites lisses. Supposons que  $x$  représente la position générale d'un objet. Si

$$T : x \longmapsto \bar{x}(x), \tag{2.1}$$

est une symétrie quelconque, alors  $\bar{x}$  est différentiable par rapport à  $x$ . De plus, puisque  $T^{-1}$  est aussi une symétrie, alors  $x$  est également différentiable par rapport à  $\bar{x}$ . Donc comme  $T$

est injective et différentiable, tout comme son inverse,  $T$  est un difféomorphisme. Les symétries doivent aussi préserver leur structure, c'est-à-dire que l'objet ne doit pas subir de déformation sous l'action de la transformation.

## 2.1.2 Groupe de Lie

**Définition 2.1.2.** [52] (Groupe de Lie)

Une structure algébrique  $G$  est un groupe de Lie lorsque :

- 1  $G$  est une variété différentielle.
- 2  $G$  un groupe munie de deux opérations (multiplication) et (inversion).
- 3 les applications de multiplication et d'inversion

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & G &\rightarrow G, \\ (\mathbf{g}, \mathbf{h}) &\rightarrow \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} & \mathbf{g} &\rightarrow \mathbf{g}^{-1}, \end{aligned}$$

sont analytiques.

La dimension  $r$  d'un groupe de Lie  $G$  est définie comme sa dimension en tant que variété,  $G$  est alors appelé groupe de Lie à  $r$  paramètres.

**Exemple 2.1.2.**

Le première exemple est le groupe linéaire  $GL(n, \mathbb{K})$ . Il s'agit du groupe des matrices inversibles de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\}.$$

Le groupe  $GL(n, \mathbb{K})$  est effectivement un groupe pour la multiplication des matrices. Ce groupe est ouvert dans  $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$  en tant que pré-image de l'ouvert  $\mathbb{K}^n$  par l'application continue  $\det$ . Il est isomorphe à  $\mathbb{K}^{2n}$ . Autrement dit,  $GL(n, \mathbb{K})$  est une variété différentielle. Pour que ce soit un groupe de Lie, il suffit de constater que la loi de multiplication et l'opération de passage à l'inverse sont différentiables, ce qui est clairement le cas puisque

$$(ab)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A),$$

où  $\text{Com}(A)$  désigne la comatrice de  $A$ . Alors  $GL(n, \mathbb{K})$  est bien un groupe de Lie.

**Exemple 2.1.3.** Un autre exemple simple est le groupe des matrices de rotation dans le plan  $2 \times 2$ , noté  $G = SO(2, \mathbb{R})$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} : 0 \leq \epsilon \leq 2\pi \right\}, \quad (2.2)$$

Il est paramétré par un seul angle  $\epsilon$  : sa variété est donc unidimensionnelle (un cercle). C'est bien un groupe car l'inverse d'un élément de paramètre  $\epsilon$  est donné par l'élément de paramètre  $-\epsilon$  et le produit des éléments de paramètres  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  est donné par l'élément de paramètre  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ .

### 2.1.3 Groupe de symétries

**Définition 2.1.3.** [31]

Un groupe de symétries de Lie est un groupe de transformations dépendant continuellement d'un paramètre  $\epsilon$  tel que tout élément  $g \in G$  est décrit par la valeur du paramètre  $\epsilon$ , i. e.  $g = g(\epsilon)$ , opérant sur une variété différentielle  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} T : G \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ T(g_\epsilon.x) &\equiv g_\epsilon.x \rightarrow \bar{x} \end{aligned}$$

avec les propriétés suivantes :

$$1 : T(e,x)=x$$

$$2 : T(g_{\epsilon_1}, T(g_{\epsilon_2}, x)) = T(g_{\epsilon_1}g_{\epsilon_2}, x)$$

3 : L'action T est infiniment différentiable

Pour tout  $x \in \mathcal{M}$  et  $g_{\epsilon_1}, g_{\epsilon_2} \in G$  et e est l'élément neutre de G.

**Exemple 2.1.4.** Le groupe de symétries de rotation dans le plan

$$T_\epsilon : \begin{cases} \bar{x} = x \cos \epsilon + y \sin \epsilon \\ \bar{y} = y \cos \epsilon - x \sin \epsilon. \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut facilement vérifier qu'il est un groupe de symétries.

### 2.1.4 Transformation infinitésimale

La compréhension cruciale de Lie était que ce problème pouvait prévaloir en considérant l'action infinitésimale du groupe. Afin de définir les infinitésimaux, nous avons défini un groupe de Lie à un paramètre de la forme

$$\bar{x} = T(x; \epsilon), \quad (2.4)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\epsilon$  est le paramètre de groupe, qui, sans perte de généralité, sera supposé être défini de telle manière que l'élément identité  $\epsilon_0 = 0$ . D'où



$$x = T(x; \epsilon) |_{\epsilon=0} . \quad (2.5)$$

**Définition 2.1.4.** [52] (Transformation infinitésimal)

Soit un groupe de Lie de transformations à un paramètre (2.4), nous développons  $\bar{x} = T(x; \epsilon)$  en série de Taylor en  $\epsilon$  au voisinage de  $\epsilon = 0$ , puis, en utilisant (2.5), nous obtenons ce que l'on appelle les transformations infinitésimales du groupe de Lie de transformations (2.4)

$$\bar{x} = x + \epsilon \xi(x) + O(\epsilon^2), \quad (2.6)$$

avec

$$\xi(x) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} . \quad (2.7)$$

Les composantes du vecteur  $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x))$  sont appelées les infinitésimaux de (2.4).

**Exemple 2.1.5.** Les transformations infinitésimales de (2.3) sont données par

$$\begin{cases} \bar{x} = x + y\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \bar{y} = y - x\epsilon + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.1.5 Générateur infinitésimal et l'algèbre de Lie

**Définition 2.1.5.** [52](Générateur infinitésimal)

L'opérateur

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.9)$$

est appelé le générateur (opérateur) infinitésimal du groupe de Lie de transformations à un paramètre (2.4).

**Exemple 2.1.6.** Le générateur infinitésimale de groupe de symétries (2.3) est

$$\bar{X} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.10)$$

**Théorème 2.1.1.** [52]

Pour tous générateur  $X$ , le groupe de transformations (2.4) peut être reconstruire en résolvant l'équation de Lie :

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \epsilon} = \xi_i(\bar{x}), \quad \bar{x}_i |_{\epsilon=0} = x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

ce qu'est équivalent à

$$\bar{x}_i = e^{\epsilon \bar{X}} x_i = \left(1 + \frac{\epsilon \bar{X}}{1!} + \frac{\epsilon^2 \bar{X}^2}{2!} + \dots\right) x_i. \quad (2.12)$$

**Exemple 2.1.7.**

Dans cet exemple, on vérifie que l'opérateur  $\bar{X} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ , engendre une rotation dans le plan

$$\begin{cases} \bar{x} = e^{\epsilon \bar{X}} x = \left(1 + \frac{\epsilon \bar{X}}{1!} + \frac{\epsilon^2 \bar{X}^2}{2!} + \dots\right) x \equiv x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, \\ \bar{y} = e^{\epsilon \bar{X}} y = \left(1 + \frac{\epsilon \bar{X}}{1!} + \frac{\epsilon^2 \bar{X}^2}{2!} + \dots\right) y \equiv y \cos \epsilon - x \sin \epsilon. \end{cases} \quad (2.13)$$

De plus, chaque constante dans un groupe de Lie de transformations à un paramètre conduit à un générateur de symétrie (qui est un opérateur linéaire). Ces générateurs de symétrie appartiennent à un espace vectoriel linéaire unidimensionnel dans lequel toute combinaison linéaire de générateurs est également un opérateur linéaire et la manière de commander les générateurs n'est pas importante, c'est-à-dire que le groupe de symétrie de transformation commute, ce qui conduit à la structure supplémentaire dans l'espace vectoriel mentionné appelé commutateur.

**Définition 2.1.6.** [52]

Soit  $G$  un groupe de Lie de transformations à un paramètre (2.4) avec  $X_i, i = 1, \dots, r$  sont des générateurs infinitésimaux donnés par (2.9). Le commutateur ( crochet de Lie)  $[\cdot, \cdot]$  entre deux générateurs  $X_i, X_j$  est un opérateur du première ordre définir par

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i. \quad (2.14)$$

**Définition 2.1.7.** [52] (Algèbre de Lie)

Une algèbre de Lie  $L$  sur  $K$  est un espace vectoriel  $E$  sur  $K$  muni d'une application bilinéaire  $(X, Y) \longrightarrow [X, Y]$  satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $X, Y \in L$  on a  $[X, Y] \in L$ .
2.  $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$ .
3.  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
4.  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Il est bien connu que les applications du groupe de symétries aux équations différentielles comprennent

1. Transformation des solutions en d'autres solutions, plus maniables.
2. Intégration des équations différentielles ordinaires.
3. Construire des solutions invariantes, c'est-à-dire des solutions invariantes sous l'action d'un sous-groupe du groupe admis.
4. Construire les lois de conservation.

## 2.2 Symétries de Lie des équations différentielles.

Nous avons introduit dans la section précédente les outils de base pour l'étude des groupes de transformations. Toutefois, afin de les utiliser lors de la recherche des symétries d'équations différentielles, il est nécessaire de se placer dans un cadre géométrique approprié. Ce cadre est fourni par les espaces de jets.

### 2.2.1 Présentation du cadre

Soit  $X = \mathbb{R}^p$  (respectivement  $U = \mathbb{R}^q$ ) muni des coordonnées canoniques  $x = (x_1, \dots, x_p)$  (respectivement  $u = (u_1, \dots, u_q)$ ). Le cadre naturel pour travailler sur des applications de  $X$  dans  $U$  est l'espace total  $E = X \times U$ . Dans ce contexte, les variables  $x_1, \dots, x_p$  seront appelées variables indépendantes, et  $u_1, \dots, u_q$ , variables dépendantes.

**Définition 2.2.1.** [52] Un espace de jets est l'espace  $E$  dont on a agrandi la composante  $U$  en y adjoignant des coordonnées correspondant aux dérivées partielles. Concrètement, on appelle  $n$ -ième espace de jets l'espace  $J^n E$  constitué du produit cartésien de l'espace des variables dépendantes  $X$  et de copies de l'espace des variables dépendantes  $U$  en nombre suffisant pour incorporer des coordonnées pour chaque dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à  $n$  :

$$J^n E := X \times U^{(n)} := X \times \underbrace{U \times \dots \times U}_{\binom{p+n}{n} \text{ fois}}. \quad (2.15)$$

Puisqu'une application  $u = f(x)$  de  $X$  dans  $U$  de classe  $C^\infty$  admet  $\binom{p+n}{n}$  fois dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à  $n$ . Alors,  $J^n E$  admet des coordonnées de forme  $(x, u^{(n)})$ , où

$$u^{(n)} = (u_J^a)_{\substack{1 \leq a \leq q \\ 0 \leq k \leq n}}, \quad u_J = \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}},$$

sont les coordonnées des variables dépendantes et de leurs dérivées.

Pour simplifier les notations, nous allons considérer un système d'une seule équation différentielle plutôt que le cas général d'un système d'équations.

Soit une équation différentielle défini par une fonction différentielle  $\Delta : J^n E \rightarrow \mathbb{R}$  d'ordre  $n$ , donnée par la forme suivante

$$\Delta(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (2.16)$$

**Définition 2.2.2.** [52] Un groupe de transformations locales de Lie  $G$  agissant sur  $E = X \times U$ , est appelé groupe de symétries d'équations différentielle (2.16) si  $u = u(x)$  est une solution, alors  $\bar{u} = g_\epsilon.u(x) = \bar{u}(\bar{x})$  est aussi une solution pour tout  $g_\epsilon \in G$ .

Donc il nous faudra trouver groupe de transformations  $G$  tel que ses éléments  $T_\epsilon$  agissent sur  $E$  par difféomorphismes locaux :

$$T_\epsilon : \begin{cases} \bar{x}_i = \phi_i(x, u, \epsilon), & i = 1, \dots, p, \\ \bar{u} = \psi(x, u, \epsilon). \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $\phi_i$  et  $\psi$  sont des fonctions localement lisses.

Selon la théorie de symétrie de Lie, la construction du groupe de symétrie  $G$  est équivalente à la détermination des transformations infinitésimaux associées à ce groupe, qui sont données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_i \approx x_i + \epsilon \xi_i(x, u) + O(\epsilon^2), & i = 1, \dots, p, \\ \bar{u} \approx u + \epsilon \eta(x, u) + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (2.18)$$

Maintenant, on va travailler sur l'algèbre de Lie  $L$  associée à ce groupe de Lie  $G$ . Cela implique alors que l'on peut travailler uniquement avec les générateurs infinitésimaux associés à  $G$  puisqu'ils forment un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie dont les opérateurs différentiels sont de la forme :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^p \xi_i(x, u) \partial_{x_i} + \eta(x, u) \partial_u. \quad (2.19)$$

## 2.2.2 Prolongement de groupe de Lie

La transformation des variables  $x$  et  $u$  engendrée par (2.19) induit naturellement une transformation des dérivées de  $u$ .

On entend prolongement d'un groupe  $G$  l'action de prolonger le groupe de transformations afin qu'il agisse aussi sur l'espace de jet  $J^n E := X \times U^n$ .

Donc, si on considère la nième prolongation de (2.18), la prolongation du  $G$  est décrite par :

$$\begin{aligned} pr^{(n)}G : \quad & \{x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}\} \longrightarrow \\ & \{\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(n)}\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notons que l'information contenue dans la prolongation  $pr^{(n)}G$  est aussi entièrement contenue dans la transformation  $G$  elle-même. Dans le cas des transformations infinitésimales, il est clair que les dérivées écrites en terme des nouvelles variables diffèrent peu de celles écrites en terme des anciennes :

$$\bar{u}_J = u_J + \epsilon \eta_J + O(\epsilon^2), \quad (2.21)$$

où les coefficients  $\eta_J$  de la prolongation sont donnés par la formule

$$\eta_J = D_J \left( \eta - \sum_{i=1}^p \xi_i u_i \right) + \sum_{i=1}^p \xi_i u_{J,i}, \quad (2.22)$$

où  $J = (j_1, \dots, j_k)$  tel que  $1 \leq j_k \leq p$ ,  $k = j_1 + j_2 + \dots + j_k$ . Il est à noter que  $D_J$  est une dérivée totale décrite comme suit :

$$Dx_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_{x_i}} + \dots \quad (2.23)$$

Maintenant, il est important de comprendre comment la prolongation agit sur le champ de vecteurs (2.19). Ainsi, on peut ensuite déterminer l'algorithme qui permet de calculer l'algèbre de symétries d'une équation différentielle. Par conséquent, le champ de vecteurs qui génère l'action prolongée du groupe associé au champ de vecteurs (2.19)) est décrit par

$$pr^{(n)}\hat{X} = \hat{X} + \sum_{k=1}^n \sum_J \eta^J \frac{\partial}{\partial u_J}. \quad (2.24)$$

### 2.2.3 Invariance des équations différentielles

Sachant comment les dérivées de  $u$  se transforment sous l'action d'un groupe  $G$ , nous sommes maintenant en mesure de formaliser le concept de symétrie d'une équation différentielle.

**Définition 2.2.3.** [52]

Soit une équation différentielle donnée par (2.16),  $G$  est son groupe de symétries si

$$\Delta(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(n)}) = 0, \quad \text{dès que (2.16) est satisfaite.} \quad (2.25)$$

Du point de vue pratique, la définition 2.2.3 n'est pas d'une grande utilité, puisqu'il est difficile de trouver toutes les symétries d'un système d'équations différentielles à partir du critère (2.25). Cependant, il est possible de formuler une condition d'invariance infinitésimale simple et algorithmique, qui permet de développer des routines informatiques capables de calculer les symétries des équations différentielles.

**Théorème 2.2.1.** [52](Critère infinitésimal de symétrie)

Un groupe  $G$  est un groupe de symétries d'une équation aux dérivée partielle si et seulement si le condition

$$pr^{(n)}\bar{X} \cdot \Delta|_{\Delta=0} = 0. \quad (2.26)$$

est vérifiée par tous les générateurs infinitésimaux  $\bar{X}$  dès que  $(\Delta)$  est satisfait.

Cette dernière condition nous permet d'extraire un système d'équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  pour les coefficients  $\xi_i$  et  $\eta$  de (2.19), coefficients qui dépendent uniquement de  $x$  et

de  $u$ . On voit facilement que la condition (2.26) contient les dérivées de  $u$ . C'est en posant à zéro tous les coefficients de ces dérivées que l'on obtient des nouvelles équations que l'on baptise équations déterminantes.

## 2.2.4 Exemple : l'équation de Burger

Afin de mieux comprendre la procédure, considérons le cas de l'équation de Burger

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 \quad (2.27)$$

où  $u = u(x, t)$ . Posons maintenant cette équation comme

$$\Delta \equiv u_t - u_{xx} + u_x^2 = 0, \quad (2.28)$$

On écrit le champ de vecteurs (2.19) sous la forme

$$\hat{X} = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \eta(x, t, u)\partial_u. \quad (2.29)$$

Puisque l'équation (2.27) est de deuxième ordre, on doit considérer la seconde prolongation du champ de vecteur  $\hat{X}$ , c'est-à-dire

$$pr^{(2)}\hat{X} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u + \eta_x\partial u_x + \eta_t\partial u_t + \eta_{xx}\partial u_{xx} + \eta_{xt}\partial u_{xt} + \eta_{tt}\partial u_{tt}, \quad (2.30)$$

et la condition d'invariance s'écrit comme suite

$$pr^{(2)}.\Delta \Big|_{\Delta=0}, \quad (2.31)$$

on obtient alors,

$$\eta_t - \eta_{xx} - 2u_x\eta_x \Big|_{\Delta=0} = 0. \quad (2.32)$$

On calcule les coefficients  $\eta_t, \eta_x, \eta_{xx}$  en utilisant l'équation (2.22), et on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_t &= D_t\eta - D_t\xi.u_x - D_t\tau.u_t + \xi.u_{tx} + \tau.u_{tt}, \\
&= \eta_t + \eta u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2, \\
&= \eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_t - \xi_u u_t^2, \\
\eta_x &= D_x\eta - D_x\xi.u_x - D_t\tau.u_t + \xi.u_{tx} + \tau.u_{tt}, \\
&= \eta_x + \eta u_x - \xi_x u_x - \tau_u u_t u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_t^2,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{xx} &= D_x\eta^x - D_x\xi.u_{xx} - D_x\tau.u_{xt}, \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - \tau_{xx}u_t \\
&\quad - 2\tau_x u_{xt} - \tau_{uu}u_t u_x^2 - \tau_u u_{xx}u_t - 2\tau_u u_x u_{xt} - \xi_{uu}u_x^3 - 3\xi^u u^x u^{xx} - 2\tau_{xu}u^x u^t.
\end{aligned}$$

En insérant ces équations dans l'équation (2.32), on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\eta_t - \eta_{xx} + (\xi_{xx} + \eta_u - \tau_t)u_t + (\xi_{xx} - 2\tau_{xu} - \xi_t - 2\eta_x)u_x + (2\tau_{xu} - \xi_u + 2\tau_x)u_x u_t \\
&+ (2\xi_{xu} - \eta_{uu} + 2\xi_x - 2\eta_u)u_x^2 + (\tau_{uu} + 2\xi_u)u_x^2 u_t + (\xi_{uu} + 2\xi_u)u_x^3 + 2\tau_u u_x u_{xt} \\
&+ 3\xi_u u_x u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + (2\xi_x - \eta_u)u_{xx} - \tau_u u_t^2 + \tau_u u_t u_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

On doit maintenant substituer tous les termes  $u_t$  ainsi que leurs dérivées qui se trouvent dans la dernière équation. Par la suite, cela va nous permettre de pouvoir en dégager les équations déterminantes. La substitution nous donne

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \quad u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx}, \quad u_t^2 = u_{xx}^2 + 2u_{xx}u_x^2 + u_x^4,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\eta_t - \eta_{xx} - 2u_x \eta_x = \eta_t - \eta_{xx} + (2\xi_{xu} + 2\xi_x + \xi_{xx} - \tau_t - \eta_u - \eta_{uu})u_x^2 + (\tau_{uu} + \tau_u)u_x^4 \\
&+ (2\xi_{xu} + 2\xi_u + 6\xi_x)u_x u_{xx} + (2\xi_{xu} + 2\tau_x + \xi_{uu} - \xi_u)u_x^3 + (\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x)u_{xx} \\
&(\tau_{uu} + 5\tau_u)u_x^2 u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xxx} + (\xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu} - 2\eta_x)u_x = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$



Puisque  $\xi, \tau$  et  $\eta$  ne dépendent que de  $x, t$  et  $u$ , on peut annuler tous les coefficients qui sont entre parenthèses. Cela nous permet finalement de trouver les équations déterminantes qui suivent :

1.  $\eta_t - \eta_{xx} = 0,$
2.  $\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0,$
3.  $2\xi_{xu} + 2\xi_x + \xi_{xx} - \tau_t - \eta_u - \eta_{uu} = 0,$
4.  $\xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu} - 2\eta_x = 0,$
5.  $\tau_{uu} + 5\tau_u = 0,$
6.  $\tau_{uu} + \tau_u = 0,$
7.  $2\xi_{xu} + 2\xi_u + 6\xi_x = 0,$
8.  $2\xi_{xu} + 2\tau_x + \xi_{uu} - \xi_u = 0,$
9.  $2\tau_x = 0,$
10.  $2\tau_u = 0.$

(2.36)

Ces équations sont en réalité des équations différentielles linéaires ; donc simples à résoudre en les intégrant, on trouve la solution générale. En effet :

$$\begin{aligned}
 \tau &= c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \\
 \xi &= \frac{1}{2}(c_2 + 2c_3 t)x + c_4 + c_5 t, \\
 \eta &= -k(x, t)e^{-u} - \frac{1}{4}c_3 x^2 - \frac{1}{2}c_5 x - \frac{1}{2}c_3 t + c_6,
 \end{aligned}$$
(2.37)

où  $c_1, \dots, c_6$  sont des constantes d'intégration et  $-k(x, t)e^{-u}$  est une solution quelconque de l'équation de Burger. C'est donc par les 6 champs de vecteurs suivants que l'équation de Burger est générée,

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \partial_t, \\
 X_2 &= \partial_x, \\
 X_3 &= \partial_u, \\
 X_4 &= tx\partial_x + 2t\partial_t, \\
 X_5 &= 2t\partial_x - x\partial_u, \\
 X_6 &= 4t^2\partial_t - x^2\partial_u - 2t\partial_u + 4tx\partial_x,
 \end{aligned}$$
(2.38)

et par la sous-algèbre de dimension infinie

$$X_\infty = k(x, t)e^{-u}\partial_u, \quad (2.39)$$

où  $k(x, t)$  est une solution de l'équation de la chaleur. La partie infinie ne reflète que le principe de superposition des équations différentielles linéaires. Les groupes à un paramètre  $c_i$  générés par les champs de vecteurs  $X_i$  sont obtenus en utilisant (2.11). On trouve

$$\begin{aligned} G_1 & : (x + \epsilon, t, u), \\ G_2 & : (x, t + \epsilon, u), \\ G_3 & : (x, t, e^\epsilon u), \\ G_4 & : (e^\epsilon x, e^\epsilon t, u), \\ G_5 & : (x + 2\epsilon t, t, u \exp(-\epsilon x - \epsilon^2 t)), \\ G_6 & : \left( \frac{x}{1 - 4\epsilon}, \frac{t}{1 - 4\epsilon}, u\sqrt{1 - 4\epsilon} \exp\left\{ \frac{-\epsilon x^2}{1 - 4\epsilon} \right\} \right), \\ G_\infty & : (x, t, u + \epsilon k(x, t)). \end{aligned} \quad (2.40)$$

On remarque que l'algèbre de symétries de l'équation de Burger (2.27) est d'une grande similarité avec celle de l'équation de la chaleur (voir [52]), pour le groupe de symétrie. En effet, si on remplace  $u$  par  $w = e^u$ , alors  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_\infty$  prendront la même forme que ceux de l'algèbre de symétries de l'équation de la chaleur avec  $w$  en remplacement de  $u$ . Effectivement, si on place  $w = e^u$  dans l'équation de Burger, on trouve

$$w_t = u_t e^u, \quad w_{xx} = (u_{xx} + u_x^2) e^u, \quad (2.41)$$

ce qui satisfait l'équation de la chaleur

$$w_t = w_{xx}. \quad (2.42)$$

Une transformation célèbre existe et permet de réduire les solutions de l'équation de Burger en solutions positives de l'équation de la chaleur. C'est la transformation de Hopf-Cole qui pour le cas particulier de l'équation de Burger, prend la forme suivante :

$$v = (\log w)_x = \frac{w_x}{w}, \quad (2.43)$$

Nous n'aurions pas pu déduire cette transformation directement de (2.27). Ici, c'est l'algèbre de symétries qui a permis de trouver cette transformation. En fait, l'équivalence de deux algèbres de symétries qui correspondent à deux équations distinctes est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour conclure que ces deux équations sont équivalentes.

## 2.3 Symétrie de Lie des équations différentielles fractionnaires

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires à la recherche du groupe des symétries des équations aux dérivées partielles, tâche à laquelle nous nous attelons sans plus tarder.

On considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire s'écrit sous la forme

$$\partial_t^\alpha u = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \quad (2.44)$$

tel que  $\partial_t^\alpha u = D_t^\alpha u$  est la dérivé au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ . Le groupe de Lie de transformations infinitésimales de (2.44) sont défini par

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t + \epsilon\tau + O(\epsilon^2), \\ \hat{x} &= x + \epsilon\xi + O(\epsilon^2), \\ \hat{u} &= u + \epsilon\eta + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $\epsilon$  est le paramètre du groupe et son algèbre de Lie associée est engendré par

$$X = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.46)$$

avec

$$\tau = \frac{d\hat{t}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \quad \xi = \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \quad \eta = \frac{d\hat{u}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad (2.47)$$

Pour utiliser la méthode du groupe de Lie pour construire le groupe de symétries pour les équations différentielles fractionnaires, le groupe local de transformations de Lie (2.45) doit être prolongé à toutes les dérivées fractionnaires impliquées dans les équations.

L'action des transformations infinitésimales sur la dérivée fractionnaire est décrite par

$$(D_a^\alpha \bar{u})(\bar{x}) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{d\bar{x}} \right)^n \int_{\bar{a}_i}^{\bar{x}_i} (\bar{x}_i - s)^{n-\alpha-1} \bar{u}(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (2.48)$$

**Remarque 2.3.1.** Pour que l'intégrale dans (2.48) garde la même forme, la condition initiale suivante doit être ajoutée

$$\xi(x, u(x)) = 0 \Big|_{x \rightarrow a}. \quad (2.49)$$

**Théorème 2.3.1.** [22]

L'action des transformations infinitésimales (2.45) sur la dérivée fractionnaire sont données par

$$(D_a^\alpha \bar{u})(\bar{x}) = (D_a^\alpha u)(x) + \epsilon \eta_t^\alpha + O(\epsilon) \quad (2.50)$$

où  $\eta_t^\alpha$  est la prolongation de  $\eta$  d'ordre  $\alpha$  donnée par

$$\eta_t^\alpha = D_t^\alpha(\eta) + \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) + D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha-1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u), \quad (2.51)$$

où l'opérateur  $D_t^\alpha$  est la dérivée totale d'ordre fractionnaire et  $D_t^n$  est l'opérateur de différentiation d'ordre entier  $n$ . En utilisant la règle de Leibniz généralisée d'ordre fractionnaire pour (2.51), on obtient

$$\begin{aligned} \eta_t^\alpha &= D_t^\alpha(\eta) - \alpha D_t(\tau) \partial_t^\alpha u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n} u. \end{aligned} \quad (2.52)$$

D'après la règle de chaîne :

$$\frac{d^m f(g(t))}{d^m} = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{1}{k!} [-g(t)]^r \frac{d^m}{dt^m} [g(t)^{k-r}] \frac{d^k f(g)}{dg^k}, \quad (2.53)$$

et en posant  $f(t) = 1$ , on obtient

$$D_t^\alpha(\eta) = \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + \eta_u \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} D_t^{\alpha-n}(u) + \mu \quad (2.54)$$

où

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{r}{k} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \quad (2.55)$$

$$\times [-u]^r \frac{d^m}{dt^m} [u^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} \eta_u}{\partial t^{n-m} \partial u^k}.$$

la forme explicite de  $\eta_t^\alpha$  d'ordre  $\alpha$  est donne par

$$\begin{aligned} \eta_t^\alpha &= \partial_t^\alpha(\eta) + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) \partial_t^\alpha u - u \partial_t^\alpha(\eta_u) + \mu \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) \right] \partial_t^{\alpha-n} u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) \partial_t^{\alpha-n}(u_x), \end{aligned} \quad (2.56)$$

**Remarque 2.3.2.** l'expression de  $\mu$  devenir nul quand  $\eta(x, t, u)$  est linear par rapport aux variable  $u$ , c-à-d

$$\eta(x, t, u) = u(x, t) f(x, t) + h(x, t) \Rightarrow \mu = 0. \quad (2.57)$$

**Définition 2.3.1.** Le prolongement de (2.46) d'ordre  $\alpha$  est

$$\bar{X}^{(\alpha, n)} = X + \eta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha u} + \eta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \quad (2.58)$$

**Théorème 2.3.2.** [27]

Si le champ vectoriel (2.46) génère les symétries de l'équation (2.45), alors la condition d'invariance de (2.44) est :

$$\bar{X}^{(\alpha, n)}(\Delta) |_{\Delta=0}, \quad \Delta = \partial_t^\alpha - F. \quad (2.59)$$

**Exemple 2.3.1.** Considérons une équation linéaire de diffusion à une dimension avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.60)$$

Le critère infinitésimal de symétrie (2.59) nous permet d'écrire :

$$(\eta_t^\alpha - \eta_{xx}) = 0, \quad \text{dès que} \quad D_t^\alpha = u_{xx}, \quad (2.61)$$

On insère  $\eta_t^\alpha$  et  $\eta_{xx}$  dans l'équation (2.61), et en remplaçant  $u_{xx}$  par  $D_t^\alpha$ , Cette équation contient les variables  $t, x, u, u_x, u_t, u_{tx}$  et les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  et  $\alpha+1$  par rapport à  $t$ . Lors de la première étape, nous isolons les termes contenant  $u_x, u_{tx}$  et  $D_t^{\alpha-k}u_x$ . Cela nous permet de trouver les équations déterminantes suivantes

$$u_x^3 : \quad \xi_{uu} = 0, \quad u_x u_t : \quad \tau_{xu} = 0,$$

$$u_x^2 : \quad \eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \quad u_x D_t^\alpha u : \quad \xi_u = 0,$$

$$u_x^2 u_t : \quad \tau_{uu} = 0, \quad u_x u_{tx} : \quad \tau_u^0 = 0,$$

$$u_x : \quad 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0, \quad u_{tx} : \quad \tau_x = 0$$

$$D_t^{\alpha-k}u_x : \quad D_t^k \xi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ici, on utilise la règle de Leibniz généralisée pour  $D_t^\alpha(\xi u_x)$ , En résolvant le système obtenu, on obtient

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x, t) + \left(\frac{1}{2}\xi_x + p(t)\right)u, \quad (2.62)$$

où  $p(t)$  est une fonction arbitraire, En substituant (2.62) dans la partie restante de l'équation déterminante, et en appliquant la règle de Leibniz généralisée, on obtient

$$D_t^\alpha \eta - \eta_{xx} + (2\xi_x - \alpha\tau_t - \frac{1}{2}\xi_{xx}u)D_t^\alpha u + \sum_{k=1}^{\infty} D_t^{\alpha-k}u(p^{(k)} - \frac{k-\alpha}{k+\alpha}(\tau)^{(k+1)}) = 0. \quad (2.63)$$

En séparant cette équation par rapport à  $u$ ,  $D_t^\alpha u$  et  $D_t^{\alpha-k} u$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), on obtient le système

$$D_t^\alpha \eta = \eta_{xx}, \quad 2\xi_x = C, \quad \alpha\xi_t = C, \quad p^{(k)} = \frac{k-\alpha}{k+1}, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

où  $C$  est une constante arbitraire. La solution de ce système vérifiant la condition d'invariance (2.49) ( $\tau(0) = 0$ ) est,

$$\tau = 2C_0 t, \quad \xi = \alpha C_2 x + C_1, \quad p(t) = C_3, \quad \eta = g(x, t), \quad (2.64)$$

où  $C_1, C_2 = \frac{C}{2\alpha}$  et  $C_3$  sont des constantes arbitraires et  $g(t, x)$  est une solution arbitraire de l'équation  $D_t^\alpha g = g_{xx}$ .

Les générateurs infinitésimaux de l'équation (2.60) sont alors donnés par

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = g(x, t) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.65)$$

## 2.4 Solutions invariantes

Le groupe de Lie  $G$  associé à une EDPF transforme toute solution en une nouvelle solution, si une solution est transformée à elle-même, on dit que cette solution est invariante sous l'action du groupe  $G$ . Tout d'abord on va définir une fonction invariante d'une façon générale.

**Définition 2.4.1.** Une fonction est dite invariante sous l'action du groupe de transformations  $G$  si

$$f(\hat{x}, \hat{u}) = f(g_\epsilon x, g_\epsilon u) = f(x, u), \quad \forall g_\epsilon \in G, \quad (2.66)$$

**Théorème 2.4.1.** [52]

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit invariante est

$$\bar{X}f(x, u) \equiv \xi_i(x, u) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad (2.67)$$

D'après le théorème ci-dessus chaque groupe de transformations admet  $(n-1)$  fonctions invariantes indépendantes, qui peuvent être considérées comme le côté gauche de toutes les premières intégrales

$$J_1(x, u) = c_1, \dots, J_{n-1}(x, u) = c_n, \quad (2.68)$$

des équations caractéristiques

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)}. \quad (2.69)$$

## 2.5 Les lois de conservation pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Dans cette section, en se basant sur les symétries de l'équation (2.44) et en utilisant le nouveau théorème de conservation dû à Ibragimov [32], les lois de conservation seront construites.

Tout vecteur  $C = (C_t, C_x)$  vérifie l'équation de conservation suivante

$$D_t(C_t) + D_x(C_x) = 0, \quad (2.70)$$

pour toute solution de l'équation (2.44), est appelé loi de conservation de (2.44), avec  $D_t$  et  $D_x$  sont les dérivées totales par rapport à  $t$  et  $x$  respectivement.

Le lagrangien formel de l'équation (2.44) est donné par

$$\mathfrak{L} = \theta \left[ \partial_t^\alpha u - F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) \right], \quad (2.71)$$

où  $\theta(x, t)$  est une nouvelle variable dépendante. L'équation adjointe de l'équation (2.44) s'écrit :

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u} = 0, \quad (2.72)$$

où  $\frac{\delta}{\delta u}$  est l'opérateur d'Euler-Lagrange défini par :

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} - D_x \frac{\partial}{\partial (u_x)} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial (u_{xx})} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial (u_{xxx})} + \dots, \quad (2.73)$$

et  $(D_t^\alpha)^*$  est l'opérateur adjoint de  $D_t^\alpha$

$$(D_t^\alpha)^* = (-1)^n P_T^{n-\alpha} (D_T^n) = {}^t D_t^\alpha, \quad (2.74)$$

avec



$$P_t^{n-\alpha} f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^s \frac{f(x, s)}{(s-t)^{1+\alpha-n}} ds, \quad n = [\alpha] + 1. \quad (2.75)$$

et  $(D_t^\alpha)^*$ , est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de caputo. L'identité fondamentale de Neoter est donnée par

$$X^{(\alpha,3)} + D_t(\tau) + D_x(\xi) = W_i \frac{\delta}{\delta u} + D_t(N_t) + D_x(N_x), \quad (2.76)$$

où  $N_x, N_t$  sont des opérateurs de Neoter, et  $X^{(\alpha,3)}$  est donné par (2.58) et  $W_i$  sont les fonctions caractéristiques écrites sous la forme

$$W_i = \eta_i - \tau_i u_t - \xi_i u_x. \quad (2.77)$$

Le composant  $x$  de l'opérateur de Noeter est introduit par  $N_x$

$$N_x = \xi + W_i \left[ \frac{\partial}{\partial u_x} - D_x \left( \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \right) + D_{xx} \left( \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_x(W_i) \left[ \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x \left( \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_{xx}(W_i) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \quad (2.78)$$

Pour la dérivée fractionnaire au sens de R-L,  $N_t$  est déterminé par

$$N_t = \tau + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k D^{\alpha-1-k}(W_i) D_t^k \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} - (-1)^m I \left( W_i, D_t^m \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha)} \right), \quad (2.79)$$

où  $I$  est défini par

$$I(f, h) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x) h(\phi, x)}{(\phi-\tau)^{\alpha+1-m}} d\phi d\tau. \quad (2.80)$$

En appliquant (2.76) dans (2.71) pour  $X_i$  et pour toute solution, en déduit que  $X^{(\alpha,3)} + D_t(\tau)\mathfrak{L} + D_x(\xi)\mathfrak{L} = 0$ , et  $\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u} = 0$ , alors

$$D_t(N_t \mathfrak{L}) + D_x(N_x \mathfrak{L}) = 0, \quad (2.81)$$

En observant que (2.81) satisfait (2.70), alors on peut réécrire les composantes du vecteur conservé comme la suit

$$\begin{aligned}
C_t &= N_t \mathcal{L} = \tau \mathcal{L} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k D^{\alpha-1-k}(W_i) D_t^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^{\alpha} u} - (-1)^m I \left( W_i, D_t^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha)} \right), \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k D^{\alpha-1-k}(W_i) D_t^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^{\alpha} u} - (-1)^m I \left( W_i, D_t^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha)} \right), \\
C_x &= N_x \mathcal{L} = \xi \mathcal{L} + W_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) \right. \\
&\quad \left. + D_{xx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_x(W_i) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_{xx}(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}, \\
&= W_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) + D_{xx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_x(W_i) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_{xx}(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}. \tag{2.82}
\end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Lie symétrie, solutions exactes et lois de conservation de l'équation de type KdV

Dans ce chapitre, on va étudier l'équation de type KdV-Like de la forme suivante

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{3}{2} \frac{u_x^2}{u^2} u_x - \lambda u_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

en utilisant la méthode de groupe de Lie décrite dans les chapitre précédents, nous pouvons déterminer les symétries, les solutions invariante et les lois conservation de l'équation (3.1).

### 3.1 Symétries de Lie l'équation de type KdV-Like.

Supposons que l'équation (3.1) est invariante sous l'action de groupe (2.45), alors en appliquant la 3<sup>ieme</sup> prolongation  $X^{\alpha,3}$  sur l'équation (3.1), on obtient Le critère infinitésimal de symétrie. Cela nous permet alors d'obtenir l'expression

$$\eta_t^\alpha - \frac{3u_x^3}{u^3} \eta + \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u^2} \eta_x - \lambda \eta_{xxx} = 0. \quad (3.2)$$

En remplaçant les expressions explicites de  $\eta, \eta_x, \eta_{xxx}$  et  $\eta_t^\alpha$  dans (3.2), Le critère infinitésimale de symétrie revêt alors la forme d'une équation polynomiale en les dérivées de  $u$ , dont les coefficients sont formée de  $\xi, \tau, \eta$  et de leurs dérivée.



Maintenant, on peut obtenir l'algèbre de Lie tridimensionnelle générée par les champs vectoriels décrits par les formules suivantes

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.4)$$

Par conséquent, nous obtenons trois groupes de Lie de transformations associés à l'équation (3.1)

$$G_1 : (x, t, u) \longrightarrow (x + \epsilon, t, u),$$

$$G_2 : (x, t, u) \longrightarrow (e^{\alpha\epsilon}x, e^{3\epsilon t}, u), \quad (3.5)$$

$$G_3 : (x, t, u) \longrightarrow (x, t, e^\epsilon u).$$

C'est-à-dire, si  $f(x, t)$  est une solution de (3.1) alors  $g_i (i = 1, 2, 3)$  sont aussi des solutions de l'équation (3.1)

$$g_1 = f(x + \epsilon, t),$$

$$g_2 = f(e^{\alpha\epsilon}x, e^{3\epsilon t}), \quad (3.6)$$

$$g_3 = e^\epsilon f(x, t).$$

## 3.2 Réductions et solutions invariantes de KdV.

Dans cette section, on se propose de réduire l'ordre de l'équation (3.1) en plusieurs formes, pour obtenir les solutions invariantes de KdV, à partir du champ de vecteurs correspondant.

*Cas 1* : Réduction par  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,

en intégrant l'équation caractéristique

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}, \quad (3.7)$$

on obtient la variable  $z = t$  et la fonction  $f(z) = u_1$ . Ainsi, on a

$$u_1 = f(t). \quad (3.8)$$

En remplaçant (3.8) dans (3.1), l'équation (3.1) est réduit à une EDOF, de la forme suivante :

$$D_t^\alpha f(t) = 0. \quad (3.9)$$

Par conséquent, le groupe des solutions invariantes est de la forme suivante :

$$u_1 = k_1 t^{\alpha-1}, \quad (3.10)$$

où  $k_1$  est constante arbitraire.

La figure (3.1) présente le graphe des solutions  $u_1(x, t)$  pour quelque différentes valeurs de  $\alpha$ .

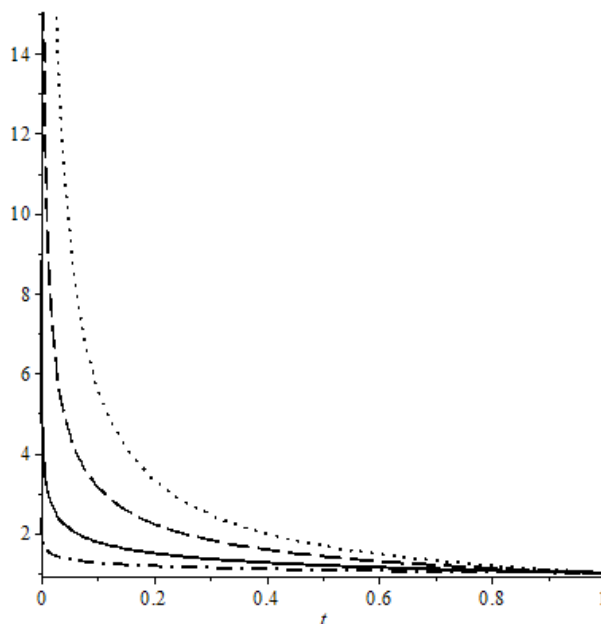


FIGURE 3.1 – La solution  $u_1(x, t)$  de l'équation (3.1) pour  $K_1 = 1$  et (.....  $\alpha = 0.9$ , —  $\alpha = 0.75$ , - - -  $\alpha = 0.5$ , ······  $\alpha = 0.25$ )

*Cas 2* : Réduction par  $X_{1,3} = aX_1 + bX_3$  :

Le variable  $z$  et la fonction  $f(z)$  sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique associées aux générateur  $X_{1,3}$  :

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{a} = \frac{du}{bu}, \quad (3.11)$$

On obtient alors,

$$z = t, \quad f(z) = e^{-\frac{b}{a}x}u.$$

Ainsi, la solution invariante correspondante de l'équation (3.1) est de la forme  $u_2 = e^{\frac{b}{a}x}f(t)$ . Après avoir substitué cette fonction dans l'équation (3.1), nous obtenons l'équation réduite :

$$D_t^\alpha f(t) + \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 f(t) = 0. \quad (3.12)$$

La solution de l'équation (3.12) est alors,

$$f(t) = K_2 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 t^\alpha\right],$$

où  $E_{\alpha,\beta}$  est la fonction de Mittag-Leffler et  $K_2$  est une constante arbitraire.

Par suite, la solution explicite de l'équation (3.1) est de la forme suivante

$$u_2(x, t) = K_2 e^{\frac{b}{a}x} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^3 t^\alpha\right]. \quad (3.13)$$

La figure(3.2) présente le graphe de solution  $u_2(x, t)$  pour quelques valeurs différentes de  $\alpha$ .

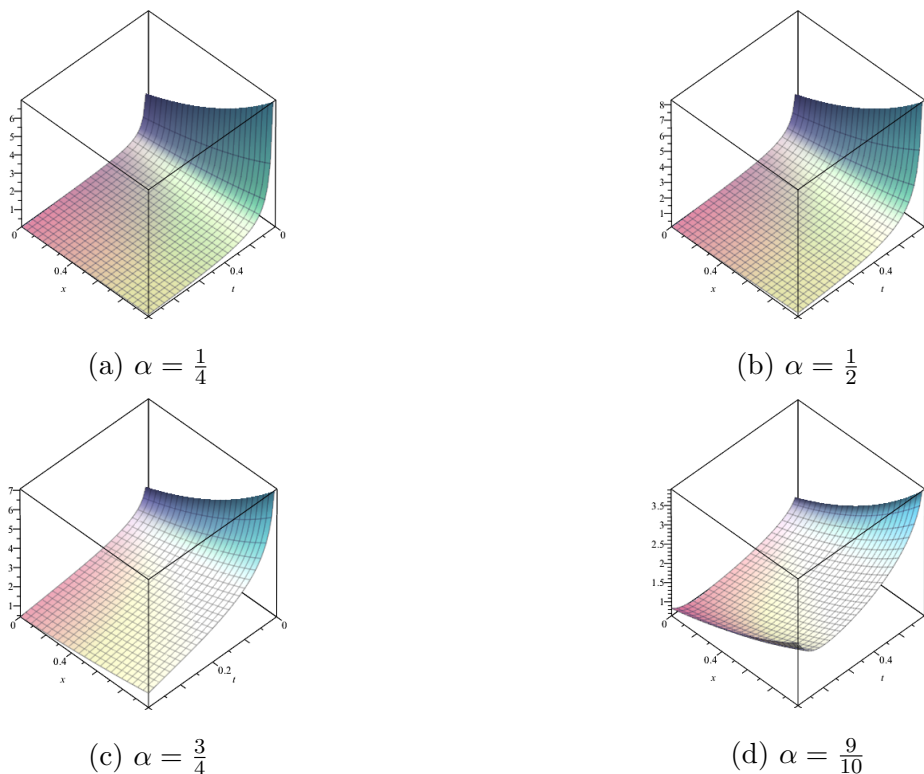


FIGURE 3.2 – La solution  $u_2(x, t)$  de Eq.(3.1) pour  $K_2 = a = b = \lambda = 1$  et pour  $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$

*Case 3* : Réduction par  $X_3$ .

Pour ce générateur , on obtient une solution trivial.

*Case 4* : Réduction par  $X_2$  :

La variable  $z$  et la transformation  $f(z)$  correspondante à  $X_2$ , est déduites par intégration de l'équation caractéristique

$$\frac{dt}{3t} = \frac{dx}{\alpha x}. \quad (3.14)$$

On obtient

$$z = xt^{-\frac{\alpha}{3}}, \quad f(z) = u,$$

Ainsi, le groupe de solutions invariantes est donné par

$$u = f(z), \quad z = xt^{-\frac{\alpha}{3}}. \quad (3.15)$$

**Theoreme**



Si on considère les transformations (3.15), l'équation fractionnaire de type KdV est réduite à une équation différentielle ordinaire fractionnaire non linéaire de la forme

$$f^2(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} f)(z) + \frac{3}{2}f_z^3 - \lambda f^2 f_{zzz} = 0, \quad (3.16)$$

où  $(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} f)(z)$  est l'opérateur de Erdélyi-Kober défini par (1.1).

**Preuve :** En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour la nouvelle variable de transformation

$$u = f(xt^{-\frac{\alpha}{3}}),$$

on a

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(xs^{-\frac{\alpha}{3}}) ds \right]. \quad (3.17)$$

On pose  $v = \frac{t}{s}$ , alors on a  $ds = \frac{-t}{v^2} dv$ . Donc l'expression ci-dessus peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\alpha} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-(n-\alpha+1)} f(zv^{\frac{\alpha}{3}}) dv \right]. \\ \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1,n-\alpha} f)(z) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

D'autre part, on a

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(z) = -tx \frac{\alpha}{3} t^{-\frac{\alpha}{3}-1} f'(z) = -\frac{\alpha}{3} z f'(z).$$

et comme  $z = xt^{-\frac{\alpha}{3}}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1,n-\alpha} f)(z) \right] &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (t^{n-\alpha} (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1,n-\alpha} f)(z)) \right] \\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\alpha-1} \left( n - \alpha - \frac{\alpha}{3} \right) (K_{\frac{3}{\alpha}}^{1,n-\alpha} f)(z) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

⋮

En répétant cette procédure (n-1) fois, on obtient

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{3} \right) \left( K_{\frac{3}{\alpha}}^{1,n-\alpha} f \right)(z) = t^\alpha (P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} f)(z)$$

En calculant  $u_x$ ,  $u_{xx}$  et  $u_{xxx}$  et en remplaçant les dans l'équation (3.1), l'équation fractionnaire de type KdV-Like est réduite à la forme suivante :

$$f^2(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} f)(z) + \frac{3}{2}f_z^3 - \lambda f^2 f_{zzz} = 0. \quad (3.20)$$

La preuve devient donc complète.

### 3.3 Solution exacte en utilisant la méthode des séries entière.

Dans cette section, on utilise la méthode des séries entière, pour trouver la solution analytique de l'équation (3.20). Une fois que la solution explicite de la forme réduite est obtenue, on peut facilement extraire la solution de l'équation (3.1) sous la forme d'une série entière.

On pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.21)$$

Alors, on a

$$(P_{\frac{3}{2}}^{1-\alpha} f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 - 2\alpha + \frac{n\alpha}{3})}{\Gamma(2 - \alpha + \frac{n\alpha}{3})} a_n z^n \quad (3.22)$$

et

$$\begin{aligned} f_z &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} f_{zzz} &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n z^{n-3}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) a_{n+3} z^n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En substituant (3.22), (3.21), (3.23) et (3.24) dans (3.20) on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2-2\alpha + \frac{n\alpha}{3})}{\Gamma(2-\alpha + \frac{n\alpha}{3})} a_n z^n + \frac{3}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n\right)^3 \quad (3.25)$$

$$-\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} z^n\right) = 0,$$

pour  $n = 0$ , on obtient

$$a_3 = \frac{1}{6\lambda} \left( \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} a_0 + \frac{3}{2} \frac{a_1^3}{a_0^2} \right), \quad (3.26)$$

où  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sont arbitraires.

De la relation (3.25), on en déduit pour  $n \geq 1$ ,

$$a_{n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\lambda a_0^2} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} a_{n-k} \frac{\Gamma\left(2-2\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)} \right. \quad (3.27)$$

$$\left. + \frac{3}{2} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j (j+1)(k-j+1)(n-j+1) a_{k+1} a_{j-k+1} a_{n-j+1} \right].$$

En utilisant (3.27), tous les coefficients  $a_n, n > 3$  de la solution sous forme de série entière sont obtenus par un calcul systématique en choisissant des constantes arbitraires appropriées  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  où ( $a_0 \neq 0$ ).

Par conséquent, la solution sous forme de série entière de l'équation(3.20) est donnée par

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3} z^{n+3} \\
&= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \frac{1}{6\lambda} \left( \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} a_0 + \frac{3 a_1^3}{2 a_0^2} \right) z^3 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\lambda a_0^2} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} a_{n-k} \frac{\Gamma\left(2-2\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (j+1)(k-j+1)(n-k+1) a_{j+1} a_{k-j+1} a_{n-k+1} \right] z^{n+3}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

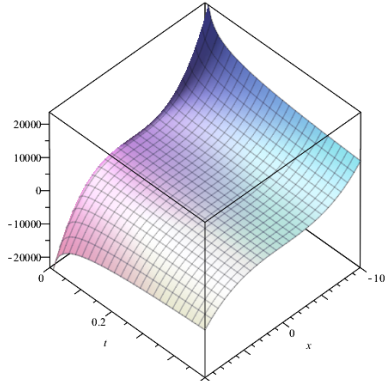
Finalemment, la solution exact de l'équation(3.1) est représentée par

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= a_0 + a_1 x t^{\frac{-\alpha}{3}} + a_2 x^2 t^{\frac{-2\alpha}{3}} + \frac{1}{6\lambda} \left( \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} a_0 + \frac{3 a_1^3}{2 a_0^2} \right) x^3 t^{-\alpha} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\lambda a_0^2} \left[ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} a_{n-k} \frac{\Gamma\left(2-2\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)}{\Gamma\left(2-\alpha + \frac{(n-k)\alpha}{3}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (j+1)(k-j+1)(n-k+1) a_{j+1} a_{k-j+1} a_{n-k+1} \right] x^{n+3} t^{\frac{-n\alpha}{3}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

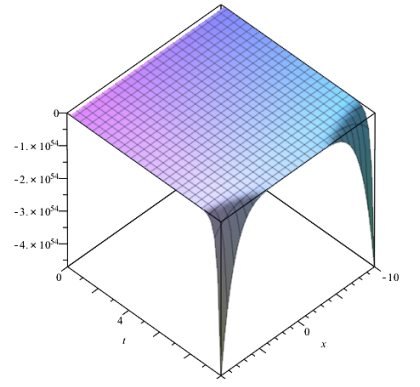
Le graphe de la solution est présenté dans les figures suivantes pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Cas 1.** Pour  $\alpha = 0.25$ .

**Case 2.** Pour  $\alpha = 0,75$ .

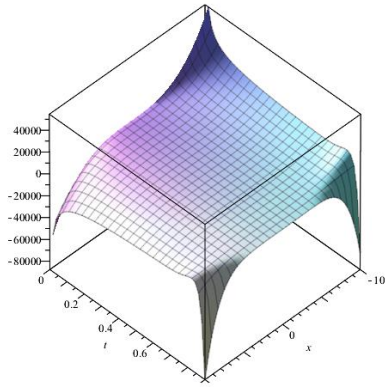


(a)  $0 \leq t \leq 0.5$ ;  $-10 \leq x \leq 10$ .

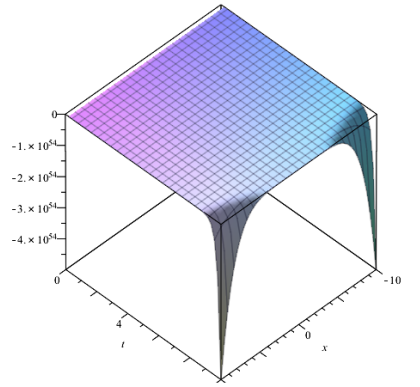


(b)  $0 \leq t \leq 10$ ;  $-10 \leq x \leq 10$ .

FIGURE 3.3 – La solution  $u_3(x, t)$  de l'équation (3.1) pour  $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 1$ .



(a)  $0 \leq t \leq 0.9$ ;  $-10 \leq x \leq 10$ .



(b)  $0 \leq t \leq 10$ ;  $-10 \leq x \leq 10$ .

FIGURE 3.4 – La solution  $u_3(x, t)$  de l'équation (3.1) pour  $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 1$ .

### 3.4 Les lois de conservation pour l'équation de type KdV

En utilisant la méthode d'Ibragimov [32], nous pouvons obtenir les LC pour l'équation fractionnaire de type KdV.

Tout d'abord, nous commençons par définir le lagrangien formel de l'équation fractionnaire de type KdV

$$\mathfrak{L} = v(u_t^\alpha + \frac{3}{2} \frac{u_x^2}{u^2} u_x - \lambda u_{xxx}). \quad (3.30)$$

où  $v(x, t)$  est une nouvelle variable dépendante.

Un vecteur  $C = (C_t, C_x)$  qui satisfait l'équation suivante :

$$D_t(C_t) + D_x(C_x) = 0, \quad (3.31)$$

quand  $u(x, t)$  est une solution de (3.1), est dit vecteur conservé pour l'équation fractionnaire de type KdV et l'équation (3.31) est appelée équation de conservation.

L'équation adjointe de l'équation de type KdV est exprimée par la formule suivante :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad (3.32)$$

où  $\frac{\delta}{\delta u}$  est l'opérateur d'Euler-Lagrange qui se présente comme suit :

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} - D_x \frac{\partial}{\partial (u_x)} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial (u_{xx})} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial (u_{xxx})} + \dots, \quad (3.33)$$

où  $(D_t^\alpha)^*$  est l'opérateur adjoint de  $D_t^\alpha$

$$(D_t^\alpha)^* = (-1)^n P_t^{n-\alpha} (D_t^n) =_c D_t^\alpha, \quad (3.34)$$

et  $(D_t^\alpha)^*$  est l'opérateur fractionnaire au sens de caputo, et

$$P_t^{m-\alpha} h(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^S \frac{h(x, s)}{(s-t)^{1+\alpha-m}} ds. \quad (3.35)$$

La construction des lois de conservation pour les EDPF se fait de la même manière que pour les EDP, donc on obtient

$$Pr X_t^\alpha + D_t(\tau)\mathcal{L} + D_x(\xi)\mathcal{L} = W_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + D_t(C_t) + D_x(C_x), \quad (3.36)$$

où  $W_i$  sont les fonctions caractéristique associée a chaque générateur infinitésimal  $X_i(i=1,2,3)$  donnée par

$$W_i = \eta_i - \tau_i u_t - \xi_i u_x.$$

D'autre part, pour la dérivée fractionnaire au sens de R-L,  $C_t$  est déterminé par

$$C_t = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j D^{\alpha-1-j}(W_i) D_t^j \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} - (-1)^m I \left( W_i, D_t^m \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha)} \right), \quad (3.37)$$

où  $I$  est défini par

$$I(f, h) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x) h(\phi, x)}{(\phi - \tau)^{\alpha+1-m}} d\phi d\tau. \quad (3.38)$$

Alors, les composantes  $C_x, C_t$  sont exprimées par

$$C_t = D_t^{\alpha-1}(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha u)} + I \left[ W_i, D_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha u)} \right) \right], \quad (3.39)$$

$$C_x = W_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) + D_{xx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_x(W_i) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \right] + D_{xx}(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}.$$

En utilisant la définition donnée ci-dessus, on peut calculer les lois de conservation de l'équation (3.1).

Comme nous l'avons déjà vu précédemment, l'équation fractionnaire de type KdV admet trois générateurs infinitésimaux définis dans la section (3.1) :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Les fonctions caractéristiques correspondantes à chaque générateur sont données par les formules suivantes :

$$W_1 = -u_x, \quad W_2 = -3tu_t - \alpha xu_x, \quad W_3 = u.$$

En substituant  $W_i (i = 1, 2, 3)$  dans les composantes du vecteur (3.39), on obtient les vecteurs conservés de l'équation (3.1)

$$C_t^1 = vD_t^{\alpha-1}(-u_x) + I(-u_x, v_t),$$

$$\begin{aligned} C_x^1 &= -u_x \left[ \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u^2} v + D_{xx}(-\lambda v) \right] + D_x(-u_x) \left[ D_x(\lambda v) \right] + D_{xx}(-u_x) \left[ -\lambda v \right], \\ &= \lambda v_{xx} u_x - \frac{9}{2} \frac{u_x^3}{u^2} v - \lambda v_x u_{xx} + \lambda v u_{xxx}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$C_t^2 = vD_t^{\alpha-1}(-3tu_t - \alpha x u_x) + I(-3tu_t - \alpha x u_x, v_t),$$

$$\begin{aligned} C_x^2 &= (-3tu_t - \alpha x u_x) \left[ \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u^2} v + D_{xx}(-\lambda v) \right] + D_x(-3tu_t - \alpha x u_x) \left[ D_x(\lambda v) \right] \\ &\quad + D_{xx}(-3tu_t - \alpha x u_x) \left[ -\lambda v \right], \\ &= (-3tu_t - \alpha x u_x) \left[ \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u^2} v - \lambda v_{xx} \right] - \left( \alpha u_x + \alpha x u_{xx} + 3tu_{xt} \right) \left[ \lambda v_x \right] \\ &\quad + \left( 2\alpha u_{xx} + \alpha x u_{xxx} + 3tu_{xxt} \right) \left[ \lambda v \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$C_t^3 = vD_t^{\alpha-1}(u) + I(u, v_t),$$

$$\begin{aligned} C_x^3 &= u \left[ \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u^2} v + D_{xx}(-\lambda v) \right] + D_x(u) \left[ D_x(\lambda v) \right] + D_{xx}(u) \left[ -\lambda v \right], \\ &= -\lambda v_{xx} u + \lambda v_x u_x + \frac{9}{2} \frac{u_x^2}{u} v - \lambda v u_{xx}. \end{aligned} \quad (3.42)$$



# Chapitre 4

## Symétrie de Lie pour l'équation fractionnaire généralisée de type KdV

Dans ce chapitre, on va étudier le groupe de Lie de symétries de l'équation généralisée de type KdV.

### 4.1 Les symétrie de Lie pour KdV

On considère l'équation généralisée de type KdV

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \left( 3(1 - \delta)u + (\delta + 1)\frac{u_{xx}}{u} \right) u_x - \delta u_{xxx} = 0, \quad \delta \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Le groupe de symétries de l'équation. (4.1) est généré par le champ de vecteurs (2.58), donc en appliquant le troisième prolongement  $X^{(\alpha,3)}$  à l'équation (4.1), on obtient le critère infinitésimal d'invariance correspondant à l'équation (4.1), exprimé comme suit

$$\eta_t^\alpha + \eta \left[ 3(1 - \delta) - (\delta + 1)\frac{u_{xx}}{u^2} \right] u_x + \eta_x \left[ 3(1 - \delta)u + (\delta + 1)\frac{u_{xx}}{u} \right] + \eta_{xx}(\delta + 1)\frac{u_x}{u} - \eta_{xxx}\delta = 0. \quad (4.2)$$

En remplaçant les expressions explicites de  $\eta, \eta_x, \eta_{xxx}$  et  $\eta_t^\alpha$  dans (4.2), le critère infinitésimal de symétries revêt alors la forme d'une équation polynomiale en les dérivées de  $u$ , dont les coefficients sont formée de  $\xi, \tau, \eta$  et de leurs dérivée. Mais comme  $\xi, \tau, \eta$  ne dépendent que de  $x, t$  et  $u$ , les dits coefficients sont forcément tous nuls, d'où le système d'équations déterminantes avec la condition initial. Lorsque le système d'équations déterminantes est finalement résolu, on trouve

$$\begin{aligned}
\tau(t, x, u) &= 3C_1t, \\
\xi(t, x, u) &= C_1\alpha x + C_2, \\
\eta(t, x, u) &= -2C_1\alpha u,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

avec  $C_1, C_2$  sont des constants arbitraires. Alors, l'algèbre de Lie correspondante à ce groupe est donnée par

$$X = (C_1\alpha x - C_2)\frac{\partial}{\partial x} + 3C_1t\frac{\partial}{\partial t} - 2C_1\alpha u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.4}$$

si on pose

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.5}$$

on peut vérifier facilement que  $X_1, X_2$  est fermé sous les crochet de Lie qu'est défini par  $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ , en effet

$$[X_1, X_2] = \alpha X_1, \quad [X_2, X_1] = 0.$$

Donc, l'algèbre de Lie  $X$  est générée par le champs de vecteurs  $X_i$  ( $i=1,2$ ), c-à-d

$$X = C_1X_1 + C_2X_2. \tag{4.6}$$

En résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{dt}{\tau(x, t, u)} = \frac{dx}{\xi(x, t, u)} = \frac{du}{\eta(x, t, u)}, \tag{4.7}$$

à partir de  $X_1$  et  $X_2$ , nous pouvons obtenir les formes réduites de l'équation généralisée de type KdV sous la forme des équation différentielles ordinaire fractionnaires.

Case 1. Réduction par  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  :

En résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}, \tag{4.8}$$

on obtient la variable et la transformation de similarité suivantes :

$$\zeta = t, \quad u = f(t), \quad (4.9)$$

où  $f(t)$  vérifiée

$$D_t^\alpha f(t) = 0. \quad (4.10)$$

Par suite, la solution invariante du groupe correspondant à  $X_1$ , est présentée par

$$u_1 = k_1 t^{\alpha-1}, \quad (4.11)$$

où  $k_1$  est une constante arbitraire. La figure (4.1) représente le graphe de la solution  $u_1(x, t)$  pour certaines valeurs de  $\alpha$ ,

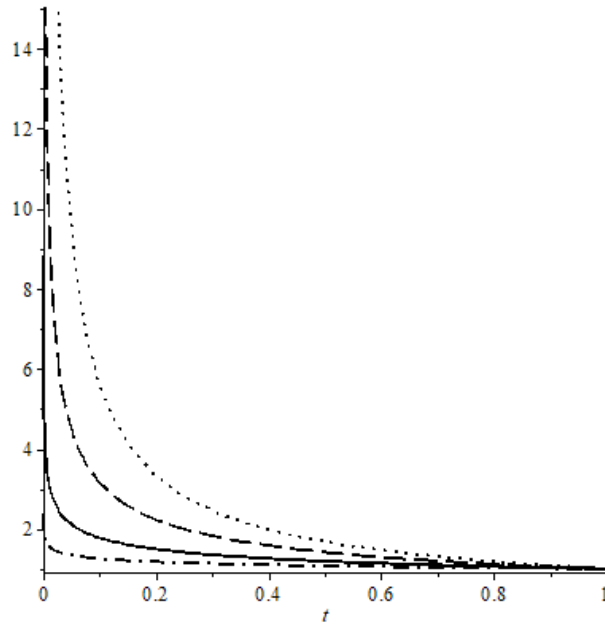


FIGURE 4.1 – La solution  $u_1(x, t)$  de l'équation (4.1) pour  $K_1 = 1$  et (.....  $\alpha = 0.9$ , —  $\alpha = 0.75$ , - - -  $\alpha = 0.5$ , ·····  $\alpha = 0.25$ )

Case 2. Réduction par  $X_2 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}$ .

La variable  $\zeta$  et la transformation  $f(\zeta)$  correspondantes au générateur infinitésimal  $X_2$  sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique

$$\frac{dt}{3t} = \frac{dx}{\alpha x} = \frac{du}{-2\alpha u}, \quad (4.12)$$

On obtient alors,

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{3}}, \quad f(\zeta) = t^{\frac{2\alpha}{3}} u. \quad (4.13)$$

Par suite,

$$u = t^{-\frac{2\alpha}{3}} f(xt^{-\frac{\alpha}{3}}). \quad (4.14)$$

**Théorème 4.1.1.** En insérant la transformation (4.14) dans (4.1), l'équation généralisée de type KdV est transformée en une équation différentielle ordinaire fractionnaire non linéaire donnée par

$$\left( P_{\frac{\alpha}{3}}^{-\frac{5\alpha}{3}+1, \alpha} f \right) (\zeta) + \left( 3(1-\delta)f + (\delta+1) \frac{f_{\zeta\zeta}}{f} \right) f_{\zeta} - \delta f_{\zeta\zeta\zeta} = 0, \quad (4.15)$$

avec  $\left( P_{\lambda}^{\delta, \alpha} f \right) (\zeta)$  est l'opérateur différentiel Erdélyi-Kober.

**Preuve**

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour la transformation

$$u = t^{-\frac{2\alpha}{3}} f(xt^{-\frac{\alpha}{3}}),$$

on a

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{2\alpha}{3}} f(xs^{-\frac{\alpha}{3}}) ds \right]. \quad (4.16)$$

On pose  $v = \frac{t}{s}$ , alors  $ds = \frac{-t}{v^2}$ . Donc l'expression ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{5\alpha}{3}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^{\infty} (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-(n+1-\frac{5\alpha}{3})} f(\zeta v^{\frac{\alpha}{3}}) dv \right] \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{5\alpha}{3}} (K_{\frac{\alpha}{3}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} f)(\zeta) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En utilisant la relation (4.13), on a

$$t \frac{\partial}{\partial t} \phi(\zeta) = -tx \frac{\alpha}{3} t^{-\frac{\alpha}{3}-1} \phi'(\zeta) = -\frac{\alpha}{3} \zeta \phi'(\zeta),$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n u}{\partial t^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{n-\frac{5\alpha}{3}} \left( K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} f \right) (\zeta) \right) \right] \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{5\alpha}{2}-1} \left( n - \frac{5\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} f \right) (\zeta) \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

En répétant cette procédure  $(n-1)$  fois, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n u}{\partial t^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{5\alpha}{2}-1} \left( n - \frac{5\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} f \right) (\zeta) \right] \\
&\quad \vdots \\
&= t^{-\frac{5\alpha}{3}} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{5\alpha}{3} + j - \frac{\alpha}{3} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3}, n-\alpha} f \right) (\zeta) \\
&= t^{-\frac{5\alpha}{3}} \left( P_{\frac{3}{\alpha}}^{-\frac{5\alpha}{3}+1, \alpha} f \right) (\zeta).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En poursuivant le calcul de  $u_x$ ,  $u_{xx}$  et  $u_{xxx}$  et en les remplaçant dans l'équation (4.1), nous trouvons que l'équation fractionnaire généralisée de type KdV est réduite à une équation différentielle ordinaire fractionnaire donnée par :

$$\left( P_{\frac{3}{\alpha}}^{-\frac{5\alpha}{3}+1, \alpha} f \right) (\zeta) + \left( 3(1-\delta)f + (\delta+1) \frac{f_{\zeta\zeta}}{f} \right) f_{\zeta} - \delta f_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \tag{4.20}$$

La preuve devient donc complète.

## 4.2 Lois de conservation.

Dans cette section, basée sur les symétries de Lie et le théorème de conservation d'Ibragimov [32], les lois de conservation de l'équation de type KdV généralisée sont construites.

Maintenant, en utilisant les définitions et les résultats décrits ci-dessus, nous pouvons construire les lois de conservation de l'équation (4.1). Selon la section précédente, l'équation fractionnaire de type KdV généralisée accepte deux générateurs infinitésimaux définis dans la section 3 par :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Les fonctions caractéristiques correspondantes à chaque générateur sont présentées par :

$$W_1 = -u_x, \quad W_2 = -2\alpha u - 3tu_t - \alpha xu_x. \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} C_t^1 &= \theta D_t^{\alpha-1}(-u_x) + I(-u_x, \theta_t), \\ C_x^1 &= -u_x \left[ \left( 3(1-\delta)u + \frac{u_{xx}}{u} \right) \theta - D_x \left( \frac{u_x \theta}{u} \right) + D_{xx}(-\delta\theta) \right] - D_x(u_x) \left[ \frac{u_x \theta}{u} - D_x(-\delta\theta) \right], \\ &\quad + D_{xx}(u_x)(\delta\theta) \\ &= \delta\theta_{xx}u_x - 3(1-\delta)\theta uu_x + \theta_x \frac{u_x^2}{u} - \theta \frac{u_x^3}{u^2} - \delta\theta_x u_{xx} - \theta \frac{u_x u_{xx}}{u} + \delta\theta u_{xxx}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} C_t^2 &= \theta D_t^{\alpha-1}(-2\alpha u - 3tu_t - \alpha xu_x) + I(-2\alpha u - 3tu_t - \alpha xu_x, \theta_t), \\ C_x^2 &= -\left( 2\alpha u + 3tu_t + \alpha xu_x \right) \left[ \left( 3(1-\delta)u + \frac{u_{xx}}{u} \right) \theta - D_x \left( \frac{u_x \theta}{u} \right) + D_{xx}(-\delta\theta) \right] \\ &\quad - D_x \left( 2\alpha u + 3tu_t + \alpha xu_x \right) \left[ \frac{u_x \theta}{u} - D_x(-\delta\theta) \right] + D_{xx} \left( 2\alpha u + 3tu_t + \alpha xu_x \right) (\delta\theta) \\ &= -\left( 2\alpha u + 3tu_t + \alpha xu_x \right) \left[ 3(1-\delta)\theta u - \theta_x \frac{u_x}{u} + \theta \frac{u_x^2}{u^2} - \delta\theta_{xx} \right] \\ &\quad - \left( 3\alpha u_x + \alpha xu_{xx} + 3tu_{xt} \right) \left( \theta \frac{u_x}{u} + \delta\theta_x \right) + (4\alpha u_{xx} + \alpha xu_{xxx} + 3tu_{xxt})(\delta\theta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.3 Solution développable en séries entière.

Dans cette section, une solution exacte supplémentaire est extraite en appliquant la méthode des série entière, la convergence de la solutions est également prouvée.

Tout d'abord, on va utiliser la transformation fractionnaire complexe donnée par :

$$u(x, t) = u(\zeta), \quad \zeta = ax - \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (4.24)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes arbitraires. En remplaçant (4.24) dans l'équation (4.1), on obtient

$$-bu_\zeta + \left(3(1-\delta)u + (\delta+1)a^2\frac{u_{\zeta\zeta}}{u}\right)au_\zeta - a^3\delta u_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \quad (4.25)$$

Par suite,

$$-bu_\zeta u + \left(3(1-\delta)u^2 + (\delta+1)a^2u_{\zeta\zeta}\right)au_\zeta - a^3\delta uu_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \quad (4.26)$$

En intégrant l'équation (4.26) par rapport à  $\zeta$ , on obtient

$$-\frac{1}{2}bu^2 + a(1-\delta)u^3 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)a^3u_\zeta^2 - a^3\delta uu_{\zeta\zeta} + c = 0, \quad (4.27)$$

où  $c$  est une constante d'intégration.

Maintenant, on cherche une solution de l'équation (4.27) sous la forme d'une série entière

$$u(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(ax - \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^n. \quad (4.28)$$

Par dérivation de  $u(\zeta)$ , on a

$$u_\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\zeta^n, \quad (4.29)$$

$$u_{\zeta\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}\zeta^n. \quad (4.30)$$

En remplaçant (4.28), (4.29) et (4.30) dans (4.27), on obtient

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n\right)^2 + a(1-\delta)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n\right)^3 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)a^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\zeta^n\right)^2 \\
& -\delta a^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}\zeta^n\right) + c = 0,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

donc

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n a_{n-i}a_i\zeta^n + a(1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^i a_{n-i}a_{i-j}a_j\zeta^n \\
& + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)a^3\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n (n-i+1)(i+1)a_{n-i+1}a_{i+1}\zeta^n \\
& -\delta a^3\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n (n-i+2)(n-i+1)a_{n-i+2}a_i\zeta^n + c = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

En comparant les coefficients de  $\zeta$ , pour  $n = 0$ , on obtient

$$a_2 = \frac{-ba_0^2 + 2a(1-\delta)a_0^3 + (2\delta+1)a^3a_1^2 + 2c}{4\delta a^3 a_0}, \tag{4.33}$$

et pour  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_{n+2} = & \frac{1}{\delta a^3 a_0 (n+2)(n+1)} \left[ -\frac{1}{2}b\sum_{i=0}^n a_{n-i}a_i + a(1-\delta)\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^i a_{n-i}a_{i-j}a_j \right. \\
& \left. + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)a^3\sum_{i=0}^n (n-i+1)(i+1)a_{n-i+1}a_{i+1} \right], \quad n = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

par conséquent, la solution sous la forme d'une séries entière de l'équation (4.1) devient



$$\begin{aligned}
u(\zeta) &= a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}\zeta^{n+2}, \\
&= a_0 + a_1 \left( ax - \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + \left( \frac{-ba_0^2 + 2a(1-\delta)a_0^3 + (2\delta+1)a^3a_1^2 + 2c}{4\delta a^3 a_0} \right) \left( ax - \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\delta a^3 a_0 (n+2)(n+1)} \left[ -\frac{1}{2}b \sum_{i=0}^n a_{n-i}a_i + a(1-\delta) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{n-i}a_{i-j}a_j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\delta + \frac{1}{2})a^3 \sum_{i=0}^n (n-i+1)(i+1)a_{n-i+1}a_{i+1} \right] \right] \times \left( ax - \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{n+2}, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des constantes arbitraires.

En utilisant les relations (4.33) et (4.34), tous les coefficients de la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  peuvent être calculés. Nous pouvons maintenant prouver la convergence de la solution développable en série entière.

observons que

$$|a_{n+2}| \leq C \left[ \sum_{i=0}^n a_{n-i}a_i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{n-i}a_{i-j}a_j + \sum_{i=0}^n (n-i+1)(i+1)a_{n-i+1}a_{i+1} \right], \tag{4.36}$$

$$\text{où } C = \max \left\{ \left| \frac{-b}{2\delta a^3 a_0} \right|, \left| \frac{a(1-\delta)}{\delta a^3 a_0} \right|, \left| \frac{(2\delta+1)a^3}{2\delta a^3 a_0} \right| \right\}.$$

Maintenant, en introduisant une autre série entière définie par :

$$M(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \zeta^n, \tag{4.37}$$

avec

$$m_0 = |a_0|, \quad m_1 = |a_1|, \quad m_2 = |a_2|$$

$$m_{n+1} = C \left[ \sum_{i=0}^n |a_{n-i}| |a_i| + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i |a_{n-i}| |a_{i-j}| |a_j| + \sum_{i=0}^n |a_{n-i+1}| |a_{i+1}| \right], \quad n = 2, \dots, \quad (4.38)$$

On vérifie que  $|a_n| \leq m_n$ , pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ainsi  $M(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \zeta^n$  est une série entière majorant de la série donnée par (4.28). Il reste à montrer que  $M(\zeta)$  a un rayon de convergence positif.

$$\begin{aligned} M(\zeta) &= m_0 + m_1 \zeta + m_2 \zeta^2 + C \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n m_{n-i} m_i \zeta^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i m_{n-i} m_{i-j} m_j \zeta^{n+2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n m_{n-i+1} m_{i+1} \zeta^{n+2} \right] \\ &= m_0 + m_1 \zeta + m_2 \zeta^2 + C \left[ (M^2 - m_0^2) \zeta^2 + (M^3 - m_0^3) \zeta^2 + (M - m_0)^2 \zeta - m_1^2 \zeta^2 \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

Pour justifier la positivité du rayon de convergence de la série  $M(\zeta)$ , on définit une équation fonctionnelle implicite par rapport à la variable indépendante  $\zeta$  par :

$$R(\zeta, r) = r - m_0 - m_1 \zeta - m_2 \zeta^2 - C \left[ (M^2 - m_0^2) \zeta^2 + (M^3 - m_0^3) \zeta^2 + (M - m_0)^2 \zeta - m_1^2 \zeta^2 \right]. \quad (4.40)$$

Alors, à partir de (4.40), il est clair que  $R(\zeta, r)$  est analytique au voisinage de  $(0, m_0)$ , avec

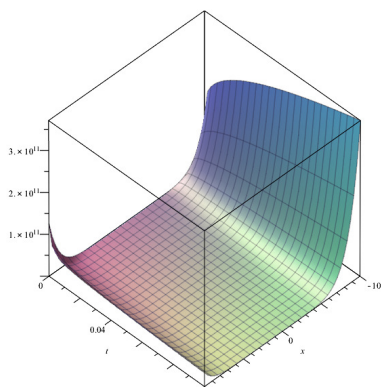
$$R(0, m_0) = 0, \quad R'_m(0, m_0) = 1 \neq 0. \quad (4.41)$$

à l'aide du théorème de fonction implicite [58, 4],  $M(\zeta)$  est analytique au voisinage de  $(0, m_0)$  avec un rayon positif, par conséquent, la série entière  $M(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \zeta^n$  converge au voisinage de  $(0, m_0)$ . Par suite, la série donnée par (4.28) est convergente au voisinage de  $(0, m_0)$ . Donc

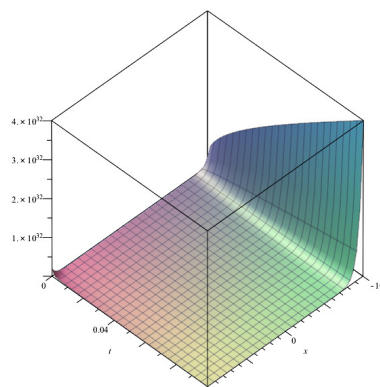
la preuve est complète.

Enfin, les graphes des solutions de série entière (4.35) sont données dans la figure (4.2) et la figure (4.3) en choisissant les paramètres appropriés pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Cas :1**  $\alpha = 0.25$



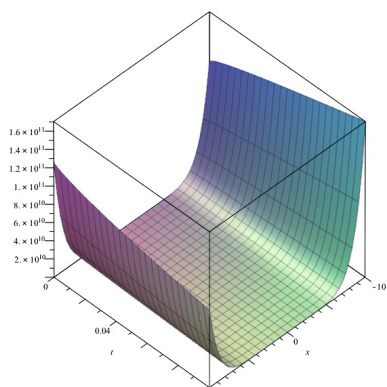
(a) n=6



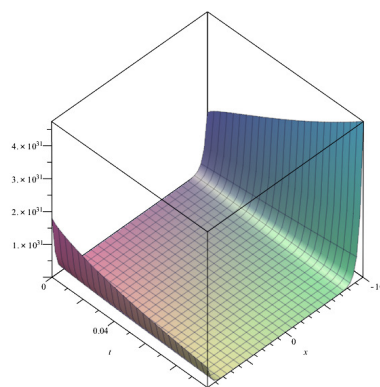
(b) n=20

FIGURE 4.2 – La solution  $u_2(x, t)$  l'équation (4.1) pour  $a_0 = 2, a_1 = 3, \delta = 3, c = 1, a = 2, b = 5,$

**Cas :2**  $\alpha = 0.75$



(a) n=6



(b) n=20

FIGURE 4.3 – La solution  $u_2(x, t)$  de l'équation(4.1) pour n  $a_0 = 2, a_1 = 3, \delta = 3, c = 1, a = 2, b = 5.$

# Chapitre 5

## Symétrie de Lie pour l'équation fractionnaire généralisée de Drainage des Mousses (DM)

Dans ce chapitre on va étudier le groupe de Lie de symétries de l'équation généralisée de (DM) de la forme suivante

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - (u^m u_x)_x + 2uu_x = 0, \quad , \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

### 5.1 Les symétrie de (DM)

Supposons que l'équation (5.1) est invariante sous l'action du groupe donné par (2.45). Donc on obtient

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial \bar{t}^\alpha} - (\bar{u}^m \bar{u}_{\bar{x}})_{\bar{x}} + 2\bar{u}\bar{u}_{\bar{x}} = 0, \quad (5.2)$$

où  $u = u(t, x)$  satisfait l'équation (5.1).

En appliquant le deuxième prolongement  $X^{(\alpha,2)}$  à l'équation (5.1), on obtient le critère infinitésimal d'invariance correspondant à l'équation (5.1), exprimé par

$$\eta_t^\alpha - [m(m-1)u^{m-1}u_x^2 + mu^{m-1}u_{xx} - 2u_x]\eta + 2(u - mu^{m-1}u_x)\eta^x - u^m\eta^{xx} = 0, \quad (5.3)$$

En remplaçant les expressions explicites de  $\eta, \eta_x, \eta_{xx}$  et  $\eta_t^\alpha$  dans (5.3), Le critère infinitésimal

de symétrie revêt alors la forme d'une équation polynomiale en les dérivées de  $u$ , dont les coefficients sont formée de  $\xi, \tau, \eta$  et de leurs dérivée. Mais comme  $\xi, \tau, \eta$  ne dépendent que de  $x, t$  et  $u$ , les dits coefficients sont forcément tous nuls, d'où le système d'équations déterminantes avec la condition initiale. Lorsque le système d'équations déterminantes est finalement résolu , on trouve

$$\begin{aligned}\tau(t, x, u) &= C_1 m t - 2C_1 t, \\ \xi(t, x, u) &= C_1 \alpha m x - C_1 \alpha x + C_2, \\ \eta(t, x, u) &= u \alpha C_1,\end{aligned}\tag{5.4}$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes arbitraires. L'algèbre de Lie correspondante est de la forme suivante

$$X = (C_1 \alpha m x - C_1 \alpha x + C_2) \frac{\partial}{\partial x} + (C_1 m t - 2C_1 t) \frac{\partial}{\partial t} + (u \alpha C_1) \frac{\partial}{\partial u}.\tag{5.5}$$

Soient

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (m - 2)t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(m - 1)x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u}.\tag{5.6}$$

On peut vérifier facilement que  $X_1, X_2$  est fermé sous les crochet de Lie qu'est défini par  $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ , Donc, L'algèbre de Lie  $X$  est générée par le champs de vecteurs  $X_i$  ( $i=1,2$ ), c-à-d

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2.\tag{5.7}$$

Afin de trouver les formes réduites et les solution exactes, nous devons résoudre l'équation caractéristique correspondante à chaque générateur infinitésimal, qui est décrite par :

$$\frac{dt}{\tau(x, t, u)} = \frac{dx}{\xi(x, t, u)} = \frac{du}{\eta(x, t, u)}.\tag{5.8}$$

Cas 1. Réduction par  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  :

En intégrant l'équation caractéristique

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0},\tag{5.9}$$

le générateur  $X_1$ , nous donne le groupe de solutions invariante

$$u = f(t),\tag{5.10}$$

et  $f(t)$  satisfait l'équation différentielle fractionnaire

$$D_t^\alpha f(t) = 0. \quad (5.11)$$

Donc, le groupe de solution invariants correspondant à  $X_1$ , est donnée par :

$$u_1 = k_1 t^{\alpha-1}, \quad (5.12)$$

où  $k_1$  est une constante arbitraire.

La figure (5.1) présente le graphe de la solution  $u_1(x, t)$  pour certaines valeurs différentes de  $\alpha$ .

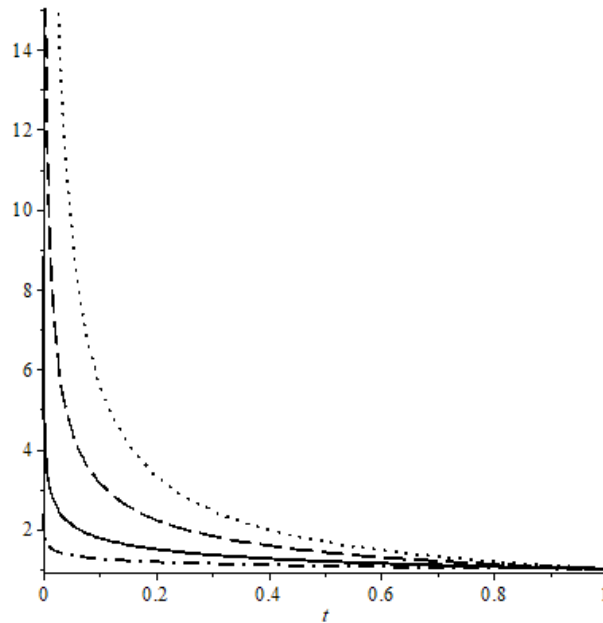


FIGURE 5.1 – La solution  $u_1(x, t)$  de l'équation (5.1) pour  $K_1 = 1$  et (.....  $\alpha = 0.9$ , —  $\alpha = 0.75$ , - - -  $\alpha = 0.5$ , ·····  $\alpha = 0.25$ )

Cas 2. Réduction par :  $X_2 = (m - 2)t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(m - 1)x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u}$ .

La variable  $z$  et la transformation  $f(z)$  correspondant au générateur infinitésimal  $X_2$  s'obtient en résolvant l'équation caractéristique associée donnée par :

$$\frac{dt}{(m-2)t} = \frac{dx}{\alpha(m-1)x} = \frac{du}{\alpha u}. \quad (5.13)$$

Alors, pour  $m = 2$ , les variables sont

$$z = t, \quad f(z) = u, \quad (5.14)$$

$$z = xt^{\frac{\alpha(1-m)}{m-2}}, \quad f(z) = ut^{\frac{-\alpha}{m-2}}. \quad (5.15)$$

donc

$$u = t^{\frac{\alpha}{m-2}} f\left(xt^{\frac{\alpha(1-m)}{m-2}}\right). \quad (5.16)$$

**Théorème 5.1.1.** En insérant la transformation (5.15) dans (5.1), on observe que l'équation fractionnaire de DM est transformée en une EDO non linéaire fractionnaire sous la forme suivante :

$$\left(P_{\frac{\alpha(3-m)}{m-2}+1, \alpha} f\right)(z) - (f^m f_z)_z + (f^2)_z = 0, \quad (5.17)$$

où  $\left(P_{\lambda}^{\delta, \alpha} f\right)(\zeta)$  est l'opérateur différentiel de Erdélyi-Kober.

**Preuve**

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour la transformation

$$u = t^{\frac{\alpha}{m-2}} f\left(xt^{\frac{\alpha(1-m)}{m-2}}\right),$$

on obtient,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{\frac{\alpha}{m-2}} f\left(xs^{\frac{\alpha(1-m)}{m-2}}\right) ds \right] \quad (5.18)$$

On pose  $v = \frac{t}{s}$ , alors  $ds = \frac{-t}{v^2}$ .

Donc l'expression (5.18) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-(n+1-\frac{\alpha(m-3)}{m-2})} f\left(zv^{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}\right) dv \right] \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}} \left(K_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{1+\frac{\alpha}{m-2}, n-\alpha} f\right)(z) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

D'autre par, on a

$$t \frac{\partial}{\partial t} \phi(z) = tx \frac{\alpha(1-m)}{m-2} t^{\frac{\alpha(1-m)}{m-2}-1} \phi'(z) = \frac{\alpha(1-m)}{m-2} z \phi'(z).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{n-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}} \left( K_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{1+\frac{\alpha}{m-2}, n-\alpha} f \right) (z) \right) \right] \\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}-1} \left( n - \frac{\alpha(m-3)}{m-2} - \frac{m-2}{\alpha(m-1)} z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( K_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{1+\frac{\alpha}{m-2}, n-\alpha} f \right) (z) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

En répétant cette procédure (n-1) fois, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}-1} \left( n - \frac{\alpha(m-3)}{m-2} - \frac{m-2}{\alpha(m-1)} z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( K_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{1+\frac{\alpha}{m-2}, n-\alpha} f \right) (z) \right] \\ &\quad \vdots \\ &= t^{-\frac{\alpha(m-3)}{m-2}} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{\alpha(m-3)}{m-2} + j - \frac{m-2}{\alpha(m-1)} z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( K_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{1+\frac{\alpha}{m-2}, n-\alpha} f \right) (z) \\ &= t^{\frac{\alpha(3-m)}{m-2}} \left( P_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{\frac{\alpha(3-m)}{m-2}+1, \alpha} f \right) (z). \end{aligned} \quad (5.21)$$

En poursuivant le calcul de  $u_x$  et  $u_{xx}$  pour (5.16) et en remplaçant dans l'équation. (5.1), l'équation fractionnaire de (DM) se réduit à l'équation différentielle ordinaire fractionnaire donnée par

$$\left( P_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{\frac{\alpha(3-m)}{m-2}+1, \alpha} f \right) (z) - m f^{m-1} f_z^2 - f^m f_{zz} + 2 f_z f = 0. \quad (5.22)$$

Ce qui est équivalent à

$$\left( P_{\frac{\alpha(m-1)}{m-2}}^{\frac{\alpha(3-m)}{m-2}+1, \alpha} f \right) (z) - (f^m f_z)_z + (f^2)_x = 0. \quad (5.23)$$

La preuve devient donc complète.

## 5.2 Les lois de conservation.

Sur la base du théorème de conservation introduit par Ibragimov [32], nous pouvons déduire, dans cette section, les lois de conservation de l'équation de (DM).



Maintenant, nous pouvons établir les lois de conservation de l'équation. (5.1) en utilisant (2.82). Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'équation de (DM) admet deux générateurs infinitésimaux définis dans la section 3 par :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (m-2)t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(m-1)x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Les fonctions caractéristiques correspondantes à chaque générateur sont données par les formules suivantes :

$$W_1 = -u_x, \quad W_2 = \alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x. \quad (5.24)$$

Nous traitons deux cas de  $\alpha$  pour chaque  $W_1$  et  $W_2$ .

**Cas 1** (Pour  $\alpha \in (0, 1)$ )

$$\begin{aligned} C_t^1 &= \psi D_t^{\alpha-1}(-u_x) + I(-u_x, \psi_t), \\ C_x^1 &= -u_x \left[ 2(u - mu^{m-1}u_x)\psi + D_x(u^m\psi) \right] + D_x(-u_x)(-u^m\psi) \\ &= -2\psi uu_x + \psi mu^{m-1}u_x^2 - \psi_x u_x u^m + \psi u^m u_{xx}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Cas 2** (Pour  $\alpha \in (1, 2)$ )

$$\begin{aligned} C_t^1 &= \psi D_t^{\alpha-1}(-u_x) + I(-u_x, \psi_t) - \psi_t D_t^{\alpha-2}(-u_x) - I(-u_x, \psi_{tt}), \\ C_x^1 &= -u_x \left[ 2(u - mu^{m-1}u_x)\psi + D_x(u^m\psi) \right] + D_x(-u_x)(-u^m\psi) \\ &= -2\psi uu_x + \psi mu^{m-1}u_x^2 - \psi_x u_x u^m + \psi u^m u_{xx}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

**Cas 1** (Pour  $\alpha \in (0, 1)$ )

$$\begin{aligned}
C_t^2 &= \psi D_t^{\alpha-1}(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x) + I(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x, \psi_t), \\
C_x^2 &= (\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x) \left[ 2(u - mu^{m-1}u_x)\psi + D_x(u^m\psi) \right] \\
&\quad + D_x \left( \alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x \right) (-u^m\psi) \\
&= \left( \alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x \right) \left[ 2\psi u - \psi mu^{m-1}u_x \right] \\
&\quad + \left( \alpha(2-m)u_x + \alpha(1-m)xu_{xx} + (2-m)tu_{tx} \right) (-u^m\psi).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

**Cas 2** (Pour  $\alpha \in (1, 2)$ )

$$\begin{aligned}
C_t^2 &= \psi D_t^{\alpha-1}(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x) + I(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x, \psi_t) \\
&\quad - \psi_t D_t^{\alpha-2}(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x) - I(\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x, \psi_{tt}) \\
C_x^2 &= (\alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x) \left[ 2(u - mu^{m-1}u_x)\psi + D_x(u^m\psi) \right] \\
&\quad + D_x \left( \alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x \right) (-u^m\psi), \\
&= \left( \alpha u + (2-m)tu_t + \alpha(1-m)xu_x \right) \left[ 2\psi u - \psi mu^{m-1}u_x \right] \\
&\quad + \left( \alpha(2-m)u_x + \alpha(1-m)xu_{xx} + (2-m)tu_{tx} \right) (-u^m\psi).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

### 5.3 solution développable en série entière.

Dans cette section, en utilisant la méthode des séries entières, nous pouvons extraire un autre type de solution exacte. De plus, la convergence des solutions sous la forme d'une séries entière est montrée.

À l'aide de la transformation fractionnaire complexe donnée par :

$$u(x, t) = u(z), \quad z = cx - \frac{vt^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}. \tag{5.29}$$

où  $C$  et  $v$  sont deux constantes arbitraire.

En remplaçant (5.29) dans l'équation (5.1), on obtient

$$-vu' - c^2u^m u'' - C^2mu^{m-1}u'^2 + 2cuu' = 0. \quad (5.30)$$

Ainsi en intégrant l'équation (5.30) par rapport à  $z$ , on obtient

$$-vu - C^2mu^m u' + Cu^2 + k = 0, \quad (5.31)$$

où  $k$  est une constante d'intégration. Ensuite, nous supposons que la solution de (5.31) est sous la forme d'une série entière donnée par :

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( cx - \frac{vt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^n. \quad (5.32)$$

Par dérivation, on a

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\zeta^n. \quad (5.33)$$

remplacement (5.32) et (5.33) dans (5.31) on obtient

$$-v \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - C^2m \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\zeta^n + C \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^2 + k = 0, \quad (5.34)$$

alors,

$$\begin{aligned} -v \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - C^2m \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_m=0}^{j_{m-1}} (n - j_1 + 1) a_{n-j_1+1} a_{j_1-j_2} a_{j_2-j_3} \cdots a_{j_m} z^n \\ + C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_{n-j} a_j z^n + k = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

En comparant les coefficients de  $z^n$ , on obtient

Pour  $n=0$ , on a

$$a_1 = \frac{-va_0 + Ca_0^2 + k}{C^2ma_0^m}. \quad (5.36)$$

Et pour  $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{C^2m(n+1)a_0^m} \left[ -va_n + C \sum_{j=0}^n a_{n-j}a_j \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Ainsi, la solution sous la forme d'une série entière de l'équation. (5.1) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= a_0 + a_1z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1} \\ &= a_0 + \left( \frac{-va_0 - Ca_0^2 + k}{C^2ma_0^m} \right) \left( Cx - \frac{vt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C^2m(n+1)a_0^m} \sum_{j=0}^n \left[ -va_n + C \sum_{j=0}^n a_{n-j}a_j \right] \\ &\quad \times \left( Cx - \frac{vt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où  $a_0$  est une constante arbitraire.

En utilisant (5.36) et (5.37), tous les coefficients de la suite  $(a_n)_{n \geq 2}$  peuvent être calculés. Il reste à prouver la convergence de série entière.

On peut remarquer que

$$|a_{n+1}| \leq M \left[ |a_n| + \sum_{i=0}^n |a_{n-i}| |a_i| \right], \quad (5.39)$$

où  $M = \max\left\{ \left| \frac{v}{mC^2a_0^m} \right|, \left| \frac{1}{mCa_0^m} \right| \right\}$ . Maintenant, nous prenons une autre série entière de la forme

$$Q = Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n, \quad (5.40)$$

avec

$$q_0 = |a_0|, \quad q_1 = |a_1| \quad q_{n+1} = M \left[ q_n + \sum_{i=0}^n q_{n-i} q_i \right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.41)$$

on peut observer que  $|a_n| \leq q_n$ , pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ , alors  $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$  est une série majorant de (5.32). Montrons maintenant que que  $Q(z)$  a un rayon de convergence positif.

$$\begin{aligned} Q(z) &= q_0 + q_1 z + M \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n q_{n-i} q_i z^{n+1} \right] \\ &= q_0 + q_1 z + M \left[ (Q - q_0)z + (Q - q_0)(Q + q_0)z \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

De la même manière qu'auparavant, on constitue l'équation fonctionnelle implicite par rapport à la variable indépendante  $z$

$$B(z, \delta) = \delta - q_0 - q_1 z - M \left[ (Q - q_0)z + (Q - q_0)(Q + q_0)z \right]. \quad (5.43)$$

On peut conclure à partir de (5.43), que  $B(z, \delta)$  est analytique au voisinage de  $(0, q_0)$ , avec

$$B(0, q_0) = 0, \quad B'_q(0, q_0) = 1 \neq 0. \quad (5.44)$$

En utilisant le théorème des fonctions implicite donné dans [58, 4],  $Q(z)$  est analytique au voisinage de  $(0, q_0)$  avec un rayon positif, ce qui montre que la série entière  $Q = Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$  converge au voisinage de  $(0, q_0)$ , donc (5.32) est convergente dans un voisinage de  $(0, q_0)$ .

Enfin, nous pouvons présenter les graphes des solutions développable en série entière donnée dans les figures suivantes en choisissant les paramètres appropriés et différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Cas :1**  $\alpha = 0.25$

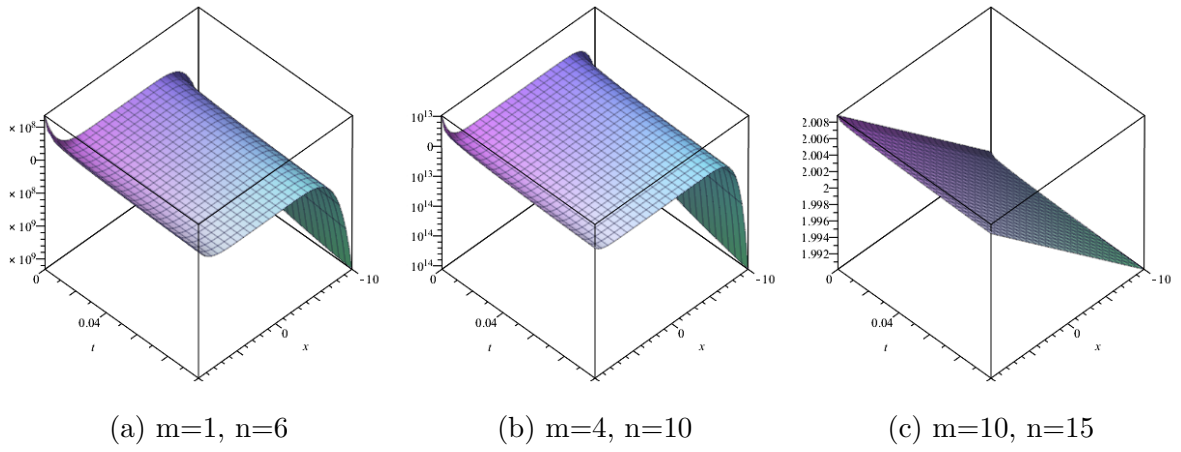


FIGURE 5.2 – La solution  $u_3(x, t)$  de l'équation (5.1) pour  $a_0 = 2, C = 1, v = 2, k = 9$

**Cas :2**  $\alpha = 0.75$

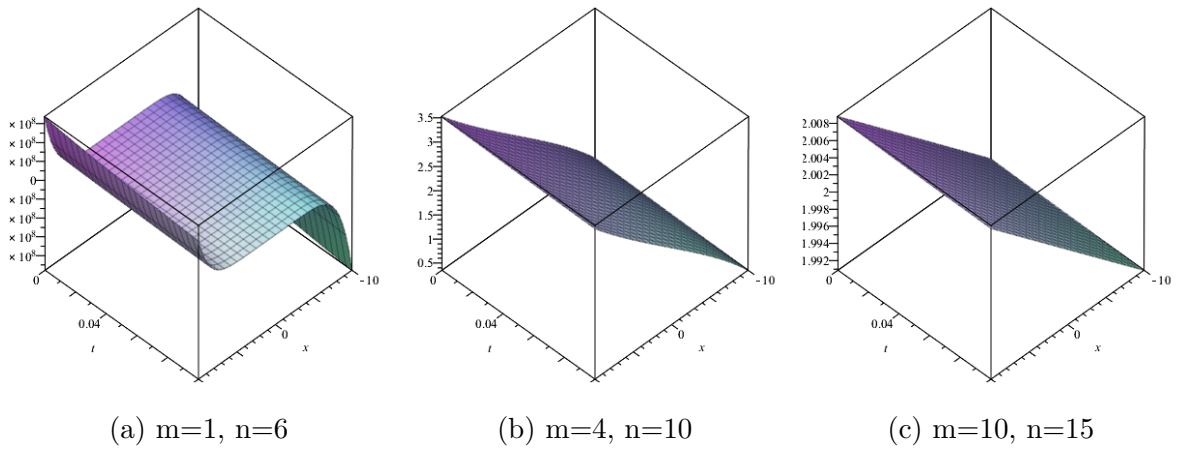


FIGURE 5.3 – La solution  $u_3(x, t)$  de l'équation (5.1), pour  $a_0 = 2, C = 1, v = 2, k = 9$

# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons d'abord rappelé quelques définitions et résultats importants de la théorie des groupes de Lie et des lois de conservation, qui sont ensuite utilisés dans ce travail.

Aux troisième chapitre, le groupe de Lie a été réalisé sur l'équation de Korteweg-de Vries-Like qui admet trois champs de vecteurs. Les réductions et les solutions exactes associées. La méthode des séries entières est utilisée pour résoudre une réduction sous la forme d'une equation différentielle ordinaire fractionnaire où l'opérateur de dérivation est Erdélyi-Kober. Les lois de conservation sont aussi calculés.

Aux quatrième chapitre, nous avons étudié l'équation généralisée de Korteweg-de Vries-Like, Les symétries de cette équation sont obtenues et sont utilisées pour réduire l'équation d'origine à une équation différentielle ordinaire fractionnaire liée par l'opérateur Erdélyi-Kober. D'autre solutions sont calculées en utilisant la méthode des séries entières. Par suite les lois de conservation sont formulés.

Dans le chapitre 5, la méthode de symétries de Lie est utilisé pour l'équation généralisée de Drainage des Mousses, les symétries et les champs de vecteurs sont calculées. L'équation de Drainage des Mousses est réduite à une équation différentielle ordinaire fractionnaire où l'opérateur de dérivation est Erdélyi-Kober. La méthode des séries entières est utilisée pour trouver d'autre solutions de cette equation, la convergence de ces solutions est étudiée. Due Ibragimove méthode les lois de conservation sont présentés.

À l'avenir, nous avons l'intention d'utiliser les solutions exactes trouvées dans cette thèse comme repères par rapport aux simulations numériques et les vecteurs conservés seront également utilisés pour construire des solutions. D'autre par, la méthode de symétrie de Lie pour les équation différentielle ordinaire fractionnaire qui sont liés à l'opérateur d'Erdélyi-Kober n'est pas encore explorée dans le domaine du calcul fractionnaire. Par conséquent, il sera éligible en tant que futur sujet de travaux.

# Bibliographie

- [1] A.H.Abdel kader, M.S.Abdel latif, F.EL Biaty, A.Elsaid, Symmetry analysis and some new exact solution of some nonlinear KdV-Like equation, Asian-European journal of mathematics, Vol.11, NO.1(2018)1850040.
- [2] B. Ahmad, S. Sivasundaram, *Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations*, *Nonlinear Anal. :HS 3 (2009) 251–258*.
- [3] A.Arikoglu, I.Ozkol. Solution of fractional differential equations by using differential transform method. *Chaos Solit Fractals*. 2007 ;34(5) :1473–1481.
- [4] N.H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Machine Press, Beijing : China, 2nd edition, 2005.
- [5] RL, Bagley, PJ, Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J Rheol*. 1983 ;27 :201-210
- [6] K. Balachandran, S. Kiruthika, *Existence of solutions of abstract fractional impulsive semi-linear evolution equations*, *Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ.* 2010 (4) (2010) 1–12.
- [7] D.Baleanu, Machado JAT, Luo ACJ. *Fractional dynamics and control*. New York : Springer, 2011.
- [8] S.Bano, I.Khan, D.Baleanu , K.Nisar. (2020). Lie Symmetry Analysis, Explicit Solutions and Conservation Laws of a Spatially Two-Dimensional Burgers–Huxley Equation. *Symmetry*. 12. 170.10.3390/sym12010170.
- [9] DJ.Benney. Long nonlinear waves in fluid flows. *J Math Phys* 1966 ;45 :52–69.
- [10] N.Bildik. (2019). On the Solution of KdV-Like Equations by the Optimal Perturbation Iteration Technique. *International Journal of Applied Physics and Mathematics*. 9. 29-37. 10.17706/ijapm.2019.9.1.29-37.
- [11] M.Bouaouid, K.Hilal, S.Melliani, Nonlocal telegraph equation in frame of the conformable time-fractional derivative. *Adv. Math. Phys.*, 2019.
- [12] D.Y.Chen, *Introduction to Solitons*, Science Press, Beijing, 2006 (in Chinese).



- [13] L.Debnath. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. Int JMath Math Sci, 2003 ;2003(54) :3413-3442.
- [14] K.Devendra, S.Jagdev, K.Sunil,B.P Sushila. Singh, Numerical computation of nonlinear shock wave equation of fractional order, Ain Shams Eng. J. Eng. Phys. Math. (2014).
- [15] Diethemk, The Analysis of fractional Differential Equations, 2012, Springer, Berlin
- [16] X.L. Ding<sup>1</sup>, Y.L Jiang, *waveform relaxation method for fractional differential-algebraic equations,Fractional calculus and applied analysis, vol 17, 3 (2014).*
- [17] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).*
- [18] VS.Ertürk, S.Momani. Solving systems of fractional differential equations using differential transform method. J Comput Appl Math. 2008 ;215(1) :142–151.
- [19] M. Feckan, Y. Zhou, J. Wang, *On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17 (2012) 3050–3060.*
- [20] MK.Fung. Kdv equation as an Euler–Poincare’ equation. Chin J Phys. 1997 ;35 :789–796.
- [21] R.K.Gazizov, A.A.Kasatkin and S.Y.Lukashchuk, continuous traonsformations groups of fractional differntial equation, Vestnik USATU 9(2007) 125-135.
- [22] R.Gazizov, A.Kasatkin,S.Lukashchuk. (2019). Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. 10.1515/9783110571660-016.
- [23] B.Ghazanfari, Sepahvandzadeh A. Adomian decomposition method for solving fractional Bratutype equations. J Math Comput Sci. 2014 ;8 :236–244.
- [24] R. Gorenflo , A.A. Kilbas, F. Mainardi , S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.*
- [25] K.Guida, K.Hilal, L.Ibnelazyz. (2020). Existence Results for a Class of Coupled Hilfer Fractional Pantograph Differential Equations with Nonlocal Integral Boundary Value Conditions. 10.1155/2020/8898292.
- [26] S.Guo,L.Mei, Y.Li, et al. The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in fluid mechanics. Phys Lett A. 2012 ;4 :407–411.
- [27] H.Hashemi, M. Baleanu, Dumitru. (2020). Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equations. 10.1201/9781003008552.
- [28] H.Hashimi, T.Taniuti. Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude. Phys Rev Lett 1966 ;17 :996–8.

- [29] E. Hernández, D. O'Regan : *On a new class of abstract impulsive differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 141, 1641-1649 (2013).*
- [30] K.Hilal, L.Ibnelazyz, K.Guida, Melliani.S. (2020). Fractional Langevin Equations with Nonseparated Integral Boundary Conditions. *Advances in Mathematical Physics.* 2020. 1-8. 10.1155/2020/3173764.
- [31] PE, Hydon (2002). *Symmetry Methode for differential Aquations*, Compridge university Press. UK 185 :430-441
- [32] NH.Ibragimov. A new conservation theorem.*J Math App*, 2007 ;333 :311-328.
- [33] D.Kaya. (1999). On the solution of a KdV like equation by the decomposition method. *International Journal of Computer Mathematics.* 72. 10.1080/00207169908804874.
- [34] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed VanMill , Amsterdam, (2006).*
- [35] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.*
- [36] DJ.Korteweg, G.Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Philos Mag.* 1895 ;39 :422–443.
- [37] N. Kosmatov, *Initial value problems of fractional order with fractional impulsive conditions, Results Math. 63 (2013) 1289–1310.*
- [38] VV.Kulish, JL.Lage. Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J Fluid Eng.* 2002 ; 124(3) :803-806
- [39] Liu, Jian-Gen, Xiao-Jun, Yang, Feng, Yi-Ying, Zhang, Hong-Yi. (2019). On the Generalized time Fractional Diffusion Equation : Symmetry Analysis, Conservation Laws, Optical System and Exact Solutions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.* 17. 10.1142/S0219887820500139.
- [40] SY.Lukashchuk. Conservation laws for time-fractional subdiffusion and difusion-wave equation. *Nonlinear Dyn.* (2015) ;80 :791-802.
- [41] W.Ma, D.Zhou, On solitary wave solutions to a generalized KdV equation, *Acta Phys. Sinica* 42 (1993) 1731–1734 (in Chinese).
- [42] F. Mainardi, *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals 7 (9), 1461-1477, 1996.*
- [43] R. Magin,*Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.*

- [44] A.Naderifard, S.R.Hejazi, E.Dastranj : Symmetry properties, conservation Laws and exact solutions of time-fractional irrigation, *Wave in Rondon and complex Media*, 29 :1,178-194
- [45] A.Nakamura, A direct method of calculating periodic wave solutions to nonlinear evolution equations, II, *J. Phys. Soc. Japan* 48 (1980) 1365–1370.
- [46] R.R. Nigmatullin, *On the theory of relaxation with "remnant" memory*, *Phys. Status Solidi B*, 124(1), (1984) 389-393.
- [47] R.R. Nigmatullin, *TO the theoretical explanation of the "universal" response*, *Phys. Status Solidi B*, 123(2), (1984) 739-745.
- [48] S.Rashidi, S.Reza Hejazi, Lie symmetry approach for the Vlasov-Maxwell system of equations, *Journal of Geometry and physics*(2018).
- [49] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, *Gordon and Breach, New York, 1993*.
- [50] S.Samko, A.A.Kilbas and O.Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives :theory and Applications* (Gordon and Breach Science, Yverdon, Switzerland, 1993 )
- [51] K.B.Oldhan, F.Spanier, *the fractional calculus*, Academic Press, New York, (1974)
- [52] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, *Grad. Texts in Math.*, vol. 107, Springer, New York, 1993.
- [53] M.S. Osman, D. Baleanu, A.R. Adem, K. Hosseini, M. Mirzazadeh, M. Eslami, Double-wave solutions and Lie symmetry analysis to the  $(2 + 1)$ -dimensional coupled Burg-ers equations, *Chinese Journal of Physics*(2019).
- [54] A. Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, *Hermès, Paris, 1995*.
- [55] I. Podlubny, *Fractional-order system and fractional-order controllers*, *Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia (1994)*.
- [56] I.Podlubny, *Fractional Differential Equationq, An Introduction to fractional Derivatives, Fractional Differantial equations, Some methods of thier Applications*, Academic Press, San Diego, CA, (1999).
- [57] P.E. Rouse, *The theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. The Journal of Chemical Physics*, 21 :1272–1280, 1953.
- [58] W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Ed, China Machine Press, Beijing, 2004.

- [59] A.Sen, D.P.Ahalpara, A.Thyagaraja,G.Krishnaswami. S2012 A KdV-like advection-dispersion equation with someremarkable propertiesCommun. Nonlinear Sci. Numer.Simul.174115–24
- [60] G. Wang, L. Zhang, G. Song, *Systems of first order impulsive functional differential equations with deviating arguments and nonlinear boundary conditions*, *Nonlinear Anal. :TMA* 74 (2011) 974–982.
- [61] Z.Wang, X.Liu. (2019). Bifurcations and exact traveling wave solutions for the KdV-like equation. *Nonlinear Dynamics*. 95. 10.1007/s11071-018-4576-4.
- [62] A.M.Wazwaz, Peakon and solitonic solution for KdV-Like equation, *Phys.Scri*, 90(2015), 045203, 9pp
- [63] A.M.Wazwaz. (2015). Peakon and solitonic solutions for KdV-like equations. *Physica Scripta*. 90. 10.1088/0031-8949/90/4/045203.
- [64] Y.J.Xiao, H.Jordan, M.S.Hari, A.Bashir, Modelling fractal waves on shallow water surfaces via local fractional korteweg-de vries equation, *Abstr. Appl. Anal.* 4 (2014).
- [65] NJ.Zabusky,MD.Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys Rev Lett* 1965 ;15 :240–3.
- [66] X.Zhang, J.Zhao, J.Liu, et al. Homotopy perturbation method for two dimensional time-fractional wave equation. *Appl Math Model*. 2014 ;38(23) :5545–5552.
- [67] S.Zhang. Application of Exp-function method to a KdV equation with variable coefficients. *PhysLett A*. 2007 ;365(56) :448–453.
- [68] YI.Zhang, Ma.Wen-Xiu. (2015). Rational solutions to a KdV-like equation. *Applied Mathematics and Computation*. 256. 252-256. 10.1016/j.amc.2015.01.027.
- [69] Zhang S, Zhang HQ. Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs. *Phys Lett A*. 2011 ;375(7) :1069–1073.
- [70] Z.Zhao. Conservation laws and nonlocally related systems of the Hunter–Saxton equation for liquid crystal. *Anal.Math.Phys.* 9, 2311–2327 (2019).
- [71] Z.Zhao. Bäcklund transformations, rational solutions and soliton–cnoidal wave solutions of the modified Kadomtsev–Petviashvili equation, *Applied Mathematics Letters*, *Appl. Math. Lett.* 89, 103-110 (2019)
- [72] Z.Zhao, Han, B. Residual symmetry, Bäcklund transformation and CRE solvability of a  $(2++1)$ -dimensional nonlinear system. *Nonlinear Dyn* 94, 461–474 (2018).
- [73] Z.Zhu, The soliton solutions of generalized KdV equation, *Acta Phys. Sinica* 41 (1992) 1057–1062 (in Chinese).

