UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal

Centre des Études Doctorales: Sciences et Techniques

Formation doctorale: Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Abdellah TAQBIBT

Pour l'obtention du

Diplôme De Doctorat

Spécialité : Mathématiques

Point fixe dans l'algèbre de Colombeau et application

Soutenue le 04/06/2021 devant le jury composé de:

Pr. Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal	Président
Pr. Hassan EL AMRI	École Normale Supérieure, Casablanca	Rapporteur
Pr. Mohamed OUKESSOU	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Elhoussine AZROUL	Faculté des Sciences et Technique Dhar-Mahraz, Fès	Examinateur
Pr. Hannaa HACHIMI	Université Sultan Moulay Slimane, Béni Mellal	Examinateur
Pr. M'hamed EL OMARI	Faculté Polydisciplinaire, Béni Mellal	Invité
Pr. Lalla Saadia CHADLI	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal	Encadrant
Pr. Said MELLIANI	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal	Co-encadrant

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à ma directrice de thèse, Madame, le Professeur Lalla Saadia CHADLI, qui m'a honoré par la confiance qu'elle m'a accordée, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à la remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'elle m'a donnée.

Je tiens également à adresser, du fond du coeur, mes plus sincères remerciements à mon cher Co-directeur de thèse Monsieur, le professeur Said MELLIANI, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" et responsable du master "Génie Mathématiques et Applications", pour son aide capitale, pour sa disponibilité et son inconditionnelle patience tout au long de la réalisation de ce travail, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement la source de réussite de cette thèse.

J'assure très sincèrement de ma gratitude, le Professeur Mr. EL OMARI, qui à dirigé une partie du mon travail et m'a longuement, Il m'a donné beaucoup de conseils pour améliorer la qualité de mon travail.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à ma mère, mon père, mes soeurs et mes frères, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leur patience et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.
Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Contents

Résumé

Dans cette thèse nous allons travailler sur quelques problèmes de Cauchy, le problème d'évolution, le problème de Sine-Gordon et le problème de la chaleur, qui sont des problèmes non réguliers et qui n'admettent même pas des solutions faibles (au sens des distributions), ce qui va nous amener à exploiter la théorie de J.F.Colmbeau. Pour cela, dans un premier temps, on transforme chacun des problèmes précédents à l'algèbre de Colombeau, ensuite on montre l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes par la méthode de point fixe dans cette algèbre, et on cherche des solutions classiques qui sont associées avec les solutions qui existent dans l'algèbre des fonctions généralisées. Finalement nous avons introduit la continuité des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires, et contraction, puis on a prouvé l'existence et l'unicité de point fixe des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires définies de $\mathcal{G}^s$ l'algèbre de Colombeau dans lui même, par l'introduction d'une famille des pseudo-semi-normes définies sur $\mathcal{G}^s$.

Introduction

Le présent travail est réalisé, au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la faculté des sciences et techniques de Beni mellal, pour obtenir le diplôme de doctorat en mathématiques de l'université Sultan Moulay Slimane pour l'année 2020/2021.

Les algèbres des fonctions généralises, plus particulier l'algèbre de J. F. Colombeau sont un outil polyvalent pour étudier des problèmes singuliers, et non réguliers en analyse géométrie et la physique mathématiques voir [17] [18] [46] [48]. Au cours de la dernière décennie, l'intérêt structurale de ces algèbres s'est accru, en particulier ce qui concerne l'analyse fonctionnelle et la topologie. Une large utilisé des distributions dans plusieurs branches de mathématique et dans différent sciences(physique théorique) ont imposés la nécessité de résoudre deux problèmes principaux dans lequel la théorie des distributions à été rencontré: la multiplication des distributions (on ne peut pas multiplie deux distributions) et différentier un produit des distributions(la dérivée du produit des distributions ne satisfait toujours la règle de Leibniz).Puis de nombreuses tentatives ont été faites pour donner un sens au produit de distributions [7] [8] [9] [43] [44]. Encore il y avait plusieurs tentatives d'injecter l'espace des distributions dans une algèbre différentielle [47] [40].

Dès le début, certaines questions de nature algébrique ont joué un rôle très important dans la théorie de Colombeau. Parmi eux il y a la solutions des équations algébriques dans la théorie des fonctions généralisées. Plus généralement par exemple on peut résoudre des équations algébriques, seulement en possédant les solutios classiques dans un cadre avec une dépendance continue des paramétrés.

Les travaux autours des algèbres de fonctions généralisées sont multiples, ces dernières années afin de résoudre des problèmes des équations différentielles qui n'admettent pas de solution au sens des distributions. Au cœur de ces problèmes se trouve souvent l'impossibilité de donner un sens au produit de distributions. Cette difficulté se contourne en injectant l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans une algèbre $\mathcal{G}^s(\Omega)$, appelée algèbre de fonctions généralisées simplifiée de J.F. Colombeau, où l'on peut donner un sens au produit des distributions voir [27]. L'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ s'injecte également dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ et les opérateurs de $\mathcal{G}^s(\Omega)$ restreintes à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, prolongent celles de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à un "infiniment petit près".

On énonce des théorèmes généraux d'existence et d'unicité pour des formulations du problème de Cauchy dans un espace de fonctions généralisées. L'existence générale de solutions est obtenue au prix de devoir accepter comme solutions des fonctions généralisées qui ne sont pas en général des distributions. L'unicité est obtenue en formulant le problème d'une façon très précise, ce qui implique un choix non contenu dans la formulation classique.

Dans le premier chapitre de cette thèse on a introduit quelques motivations, exemples, et l'impossibilité de Laurent Schwartz, pour entamer la théorie des fonctions généralisées de Colombeau. Ainsi que le besoin de cette théorie dans l'analyse.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction de l'algèbre des fonctions généralises $\mathcal{G}$, il regroupe les rappels nécessaires à l'utilisation de $\mathcal{G}^s$.
Aux définition et propriétés de bases, on ajoute des exemples permettant d'intérêt n'est plus à démontrer lors des produits de distributions.

Le troisième chapitre a été consacré à la définition et quelques propriétés de la notion de point fixe dans le sens de l'algèbre de Colombeau. Puis les chapitres 4,5,et 6 sont consacrés aux certains résultats, dans ce cadre à savoir: la résolution d'un problème d'évolution et d'un problème fractionnaire à l'aide de l'introduction de la notion de semi-groupe généralisée (dans $\mathcal{G}$). Ainsi que les problèmes de l'équation de la chaleur, et celle de sine-Gordan avec des données initiales sont des fonctions généralisées. Finalement le dernier chapitre contient quelques théorèmes concernant la théorie de point fixe généralisée.

Chapitre 0

Motivation et Impossibilité de Schwartz

0.1 Motivation

Le but de cette section est de fournir un exemple de motivation impliquant des produits ou même des opérations non linéaires plus générales avec des distributions.

Exemple : Le modèle proie-prédateur

On considère le modèle proie-prédateur de Yoshikawa-Yamaguti [4] et Hashimoto [30]:

$$\begin{cases} (\partial_x + \partial_t)u = uv \\ (\partial_x - \partial_t)v = -uv \end{cases}$$

Qui décrit les densités de deux espèces se déplacent le long de l'axe des x avec des vitesses ± 1 et ayant des taux de croissance proportionnel à leur produit. Supposons d'abord que, les populations se concentrent aux points $x = -1$ et $x = +1$, respectivement, c'est-à-dire.

$$\begin{cases} u(x, 0) = \delta(x + 1) \\ v(x, 0) = \delta(x - 1) \end{cases}$$

Pour peu de temps, aucune interaction ne se produit, et les deux populations migrent simplement avec leurs vitesses respectives:

$$\begin{cases} u(x, t) = \delta(x - t + 1) \\ v(x, t) = \delta(x + t - 1) \end{cases}$$

Cependant, au temps t = 1 les deux populations se rencontrent: mathématiquement, cela engendre le produit de deux mesures de Dirac.

0.2 Impossibilité de Schwartz

Est-t-il vrai qu'une multiplication générale des distributions est impossible? Pour se rapprocher d'une réponse à cette question, examinons exactement ce qui pourrait être impossible, quels obstacles attendre? Nous devrons examiner deux catégories d'exemples.Le premier traite de ce qu'on pourrait appeler une multiplication intrinsèque des distributions. la tentative de définir le produit de deux distributions afin que le résultat soit une nouvelle distribution. En effet, une prescription qui donnerait une valeur raisonnable pour le produit d'une paire donnée de distributions semble être impossible. Il vaut la peine de souligner que les problèmes commencent déjà avec le produit usuel de deux fonctions en général, il n'est pas stable en ce qui concerne la régularisation et le passage à la limite. La deuxième catégorie de contre-exemples concerne les algèbres différentielles contenant l'espace des distributions. Dans une telle algèbre, le produit de deux distributions est défini. Ce qui devient impossible maintenant, c'est d'avoir certaines propriétés algébriques (comme l'associativité ou la commutativité) et en même temps la cohérence du nouveau produit et les nouvelles dérivées avec les opérations classiques correspondantes sur ces sous-espaces où ces derniers sont définis.

Exemples:

1)Considérons la mesure de Dirac $\delta(x)$ et $vp\frac{1}{x}$ la valeur principale de Cauchy de $\frac{1}{x}$. On a

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Alors

$$\begin{aligned}\delta &= (vp(\frac{1}{x}).x).\delta \\ &= vp(\frac{1}{x}).(x.\delta) \\ &= 0\end{aligned}$$

Car $x.\delta = 0$ au sens des distributions. Ce qui est contradictoire avec $\delta \neq 0$ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

2) Considérons la fonction signe $\eta(x) = signe(x)$. Ensuite, η et η^2 sont dans L^∞ et $\eta^2 = 1$. Si dans une telle algèbre dont l'unité est 1, nous avons un produit sur $\mathcal{D}'$ satisfaisant la règle de Leibniz, et coïncidant avec le produit usuel sur L^∞, puis

$$0 \;=\; (\eta^2)' \;=\; 2\eta.\delta + 2\delta\eta$$

Donc

$$(\eta^2)' \;=\; \eta.\delta \;=\; -\delta\eta$$

Si $\eta.\delta \neq 0$, le produit n'est pas commutatif.

Si $\eta.\delta = 0$, on conclut que

$$\delta \;=\; (\eta\eta)\delta \;=\; \eta(\eta\delta) = 0.$$

Donc on n'a pas l'associativité.

Dans l'objectif de surmonter ce problème de la non linéarité des distributions, hirata-Ogata, Minkowski, M. Iltano [43] [44] [45], Fisher [6] [7] [8] [9] ont proposés, en 1957, une définition du produit des distributions.

Définition 0.1 *:*

Soit $(\rho_n) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} supp(\rho_n) &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx &= 1.\end{aligned}$$

On dit que le produit des distributions S et T existe si pour toute suite (ρ_n),

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (S * \rho_n)(T * \rho_n) \qquad \textit{existe dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Mais, malgré cette définition, le problème de la non linéarité est toujours en vigueur puisque δ^2 n'a pas de sens avec cette définition.
En effet: supposons que $\delta^2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
On voit que $\rho_n \longrightarrow \delta$ dans $\mathcal{D}'$.
Choisissons une fonction test φ telle que $\varphi = 1$ au voisinage de 0 et $Supp(\rho_n) \subset Supp(\varphi)$, on trouve que

$$\begin{aligned} < \rho_n^2, \varphi > \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x)\varphi(x)\, dx \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x) dx \end{aligned}$$

alors $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 et, par conséquent, elle admet une sous-suite convergente L^2.
Donc

$$\delta \in L^2$$

ce qui est absurde.
On permet de collecter certaines exigences naturelles pour injecter $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans une algèbre $(A(\Omega), +, \circ)$. On vérifie si c'est possible de construire des algèbres associatives, commutatives et satisfaisant
(i) $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'injecte linéairement dans $A(\Omega)$ de sorte que la fonction constante $f(x) = 1$ devient l'unité dans $A(\Omega)$.
(ii) Il existe un opérateur de dérivé partiel $\partial_i : A(\Omega) \longrightarrow A(\Omega)$ $(i = 1, ..., n)$ qui est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.
(iii) La restriction de ∂_i sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ coïncide avec la dérivée partielle usuelle.
(iv) La restriction de $\circ$ sur $L^\infty_{loc}(\Omega) \times L^\infty_{loc}(\Omega)$ coïncide avec le produit usuel.
La condition **(ii)** signifie que $A(\Omega)$ est une algèbre différentielle. Malheureusement, dans toute algèbre associative et commutative satisfaisant **(i)** et **(ii)**, les propriétés **(iii)** et **(iv)** s'écartent mutuellement comme on le voit immédiatement de l'exemple suivant.
Exemple:
Soit A une algèbre associative, commutative munie d'une dérivation (satisfaisant la règle de Leibniz). Alors tout élément H de A tel que $H.H = H$ est nécessairement une constante (c'est-à-dire $H' = 0$).
En effet:
on a

$$(H^2)' = 2H.H'$$

et

$$(H^3)' = 3H^2.H' = 3H\, H'$$

Maintenant, $H = H^2 = H^3$
Implique

$$H' = 2H.H' = H' = 3H.H'$$

Donc,

$$H.H' = 0$$

D'où

$$H' = 0.$$

En particulier, si on considère la fonction Heaviside $H(x) = (signe(x) + 1)/2$, $\mathcal{D}'$ s'injecte dans une telle algèbre A, et on a $H.H = H$ en $\mathcal{D}'$, alors

$$H' = \delta$$

Ainsi, la substitution de **iv)** par
v) $\circ / \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega)$, coïncide avec le produit usuel des fonctions. Cette situation a déjà été examinée par Schwartz [40], résultat d'impossibilité suivant:

Théorème 0.2 *:*

Il n'y a pas d'algèbre associative, commutative $(A(\Omega), +, \circ)$ satisfaisant **(i)** - **(iii)** et **(v)**.

Preuve 0.3 *:*

Supposons que $(A(\mathbb{R}), +, \circ))$ est une telle algèbre, et D la dérivation sur A.
On considère $x_+(x) = \int_0^x H(t)dt$. Ensuite **(v)**implique

$$x_+ \circ x = x^2 \ et \ x \circ (x \ log|x| - x) = x^2 log|x| - x^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} D^2(x_+) \circ x &= D^2(x_+ \circ x) - 2D(x_+) \circ D(x) - x_+ \circ D^2(x) \\ &= D^2(x^2) - 2D(x_+) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \circ D^2(xlog|x| - x) &= D^2(x \circ (xlog|x| - x)) - 2D(x)D(xlog|x| - x) \\ &\quad -D^2x \circ (xlog|x| - x) \\ &= D^2(x^2log|x| - x^2) - 2D(xlog|x| - x) \\ &= D(2xlog|x| - x) - D(2xlog|x| - 2x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D^2(x_+) &= D^2(x_+) \circ (x \circ D^2(xlog|x| - x)) \\ &= (D^2(x_+) \circ x) \circ D^2(xlog|x| - x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En contradiction avec

$$\begin{aligned} D^2(x_+) &= D(H) \\ &= \delta \neq 0. \end{aligned}$$

Envers le postulat de Laurent Schwartz affirmant qu'il n'existe pas d'algèbre associative commutative et vérifiant **(i) - (v)**.
Après toutes les impossibilités discutées dans le théorème ci-dessus, le mathématicien français Jean Francois COLOMBEAU parvient, en 1980,à élaborer une algèbre nommée l'algèbre des fonctions généralises notée $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ commutatives, associatives, satisfaisant **(i) - (iii)** et
(vi) $\circ/\mathcal{C}^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ coïncide avec le produit usuel des fonctions.
Les livres [17] et [18] de Jean Francois COLOMBEAU exposent d'une manière détaillée la base fondamentale sur laquelle repose sa théorie des fonctions généralisées.

Chapitre 1

Algèbre de Colombeau

1.1 Algèbre spéciale

Avant d'aborder la définition des algèbres spéciales de Colombeau, permettez-nous d'abord introduire une description alternative de l'espace des distributions qui affichera déjà certaines des caractéristiques de base des constructions qui sont à suivre. Comme indiqué dans la section précédente, la régularisation des distributions sera la notion clé de l'injection de $\mathcal{D}'$ dans une algèbre de fonctions généralisées. Nous verrons que cette procédure permet également d'obtenir une représentation séquentielle de $\mathcal{D}'$ pour nos recherches supplémentaires.
Soit $I = (0, 1]$

$$\begin{aligned} \nu &:= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^I / \exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ avec \ u_\varepsilon \longrightarrow u \ dans \ \mathcal{D}'\} \\ \nu_0 &:= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^I / u_\varepsilon \longrightarrow 0 \ dans \ \mathcal{D}'\} \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *:*

L'application linéaire

$$\begin{aligned} \psi : \ \nu/\nu_0 &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ (u_\varepsilon)_\varepsilon + \nu_0 &\longrightarrow \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} u_\varepsilon \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve 1.2 *:*

L'injectivité de ψ est claire.
Choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\int \varphi(x) dx = 1.$$

Et on définit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Alors $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $\mathcal{D}'$.
D'où ψ est surjective .
Pour injecter l'espace $\mathcal{D}'$ dans une algèbre en gardant les propriétés **(i)** - **(iii)** et **(vi)**.
Les auteurs ont choisi un idéal $\mathcal{I}$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I$ avec $\mathcal{I} \subseteq \nu_0$ et on injecté $\mathcal{D}'$ de la façon suivante

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I/\mathcal{I} \\ u & \longrightarrow & \Big(u * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I} \end{array}$$

Dans cette présentation **(vi)** signifie que

$$\Big((f * \varphi_\varepsilon).(g * \varphi_\varepsilon)\Big) + \mathcal{I} \quad = \quad \Big((fg) * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
On considère une autre injection de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I/\mathcal{I}$ par l'injection constante

$$f \quad \rightarrow \quad (f)_\varepsilon + \mathcal{I}.$$

D'autre part on peut injecter $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\Big)^I/\mathcal{I}$ par:

$$f \quad \rightarrow \quad \Big(f * \varphi_\varepsilon\Big)_\varepsilon + \mathcal{I}$$

1.1.1 Définition et propriétés de base

Définition 1.3 *:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^s(\Omega) & := & (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^I \\ \mathcal{E}^s_M(\Omega) & := & \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega)/\forall K \subset\subset \Omega \ \forall \alpha \in \mathbb{N} \ \exists N \in \mathbb{N}, \sup\limits_{x \in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^{-N})\} \\ \mathcal{N}^s(\Omega) & := & \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega)/\forall K \subset\subset \Omega \ \forall \alpha \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N}, \sup\limits_{x \in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^{m})\} \end{array}$$

les éléments de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ (resp $\mathcal{N}^s(\Omega)$) sont appelées fonctions modérées (resp. fonctions négligeables).
L'algèbre de Colombeau sur Ω est définie comme suit:

$$\mathcal{G}^s(\Omega) \quad = \quad \mathcal{E}^s_M(\Omega)/\mathcal{N}^s(\Omega)$$

L'espace $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ des suites modérées est une algèbre différentielle avec les opérations usuelles. On peut voir que c'est la plus grande sous-algèbre différentielle (c'est-à-dire stable par des dérivées partielles) de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ dans lequel $\mathcal{N}^s(\Omega)$ est un idéal, par conséquent,$\mathcal{G}^s(\Omega)$ est une algèbre différentielle associative, commutative. Dans ce qui suit, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ est un représentant d'un élément $u \in \mathcal{G}^s(\Omega))$, on écrit $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$. Il est évident que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}^s(\Omega)$.

Exemples 1.4 *:*

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *on note*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0.$$

1) On pose $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ avec

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \varphi_\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Alors, pour tout opérateur de dérivation, on a

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\partial^\alpha\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(\frac{x}{\varepsilon})| \\ &\leq C\,\varepsilon^{-n-|\alpha|} \end{aligned}$$

Donc

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$$

2) Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on pose

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{x^2}{x^4+\varepsilon^4}}$$

Alors

$$|u_\varepsilon(x)| \leq 1, \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

D'autre part, les dérives de u_ε sont de la forme suivante

$$u^{(k)}_\varepsilon(x) = r_k\Big(x, \varepsilon, \log(\varepsilon)\Big)\, u_\varepsilon(x)$$

où r_k est une fonction rationnelle.

Donc

$$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R})$$

Ainsi

$$u := [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \ \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$$

3) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

On pose

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= (f * \varphi_\varepsilon)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\, t)\,\varphi(t)dt \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial^\alpha v_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial^\alpha\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\, t)\partial^\alpha\varphi(t)dt \end{aligned}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K}|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\varphi(t)dt| &\le \sup_{x\in K, t\in\ supp(\phi), \delta\in[0,1]} |f(x-\delta t)|\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\varphi(t)|dt \\ &\le c \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha v_\varepsilon(x)| \le C\,\varepsilon^{-|\alpha|}$$

Donc

$$(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$$

D'où

$$[(v_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$$

Remarque 1.5 *:*

Soient u, v deux éléments de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$u = (u_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n) \quad \textit{avec } (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$$

$$v = (v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n) \quad \textit{avec } (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$$

Alors

$$u = v \ \textit{ dans } \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{si et seulement si} \quad (u_\varepsilon)_\varepsilon - (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$u+v = (u_\varepsilon + v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$u\circ v = (u_\varepsilon\cdot v_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

Le résultat suivant présente une caractérisation très utile de $\mathcal{N}^s$ comme un sous-espace de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$. Il montre que un élément $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ appartient à $\mathcal{N}^s$ si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait les estimations $\mathcal{N}^s$ dans le cas $\alpha = 0$.

Théorème 1.6 *:*

$(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$ est négligeable si et seulement si :

$$\forall K \subset\subset \Omega \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \sup_{x\in K} |u_\varepsilon(x)| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^m).$$

Si $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et Ω' est un sous-ensemble ouvert de Ω, la restriction $u/\Omega' \in \mathcal{G}^s(\Omega')$ est définie comme $(u/\Omega')_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega')$. (Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la restriction aux sous-espaces est également définie par les composantes). Nous disons que u est nul sur Ω' si ($u/\Omega' = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega')$).
Le support de u est défini comme

$$(\cup\{\Omega' \subseteq \Omega \ \ \textit{ouvert}, \ \ u/\Omega' = 0\})^c$$

Soient Ω'' et Ω' deux ouverts de Ω tel que $\Omega'' \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$, il est clair que

$$(u/\Omega')/\Omega'' = u/\Omega''$$

Théorème 1.7 *:*

Soit $(\Omega_\lambda)_\lambda \in \Lambda$ un recouvrement d'ouverts de Ω, On a
• Si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $u/\Omega_\lambda = v/\Omega_\lambda \ \ \forall\lambda \in \Lambda$, alors

$$u = v.$$

. • Si pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on donne $u_\lambda \in \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda)$ tel que $u_\lambda/\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = u_\mu/\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$, pour tout λ, μ avec $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$, alors il existe

$$u \in \mathcal{G}^s(\Omega) \ \textit{avec} \ u/\omega = u_\lambda \ \ \forall\lambda \in \Lambda..$$

Théorème 1.8 *:*

Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) $\exists v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ tel que $u\,v = 1$.
2) Pour chaque représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de u, et chaque $K \subset\subset \Omega$, alors $\exists\varepsilon_0 > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $\inf_{x\in K} |u_\varepsilon(x)| \geq \varepsilon^m$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Si P est un polynôme et $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, il est claire que $P(u) = (P(u_\varepsilon))_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)$ est un élément de $\mathcal{G}^s(\Omega)$.
On définit $\mathcal{O}_M(\Omega)$ par

$$\mathcal{O}_M(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)/\ \forall\alpha \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \ \sup_{x\in\Omega}(1 + |x|)^{-p}|\partial^\alpha f(x)| < \infty\}$$

Et on définit $\mathcal{S}(\Omega)$ par

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega)/\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall\alpha \in \mathbb{N}, \ \sup_{x\in\Omega}(1 + |x|)^p|\partial^\alpha f(x)| < \infty\}$$

Proposition 1.9 *:*

Si $u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathcal{G}^s(\Omega)^m$ et $v \in \mathcal{O}_M(\mathbb{K}^m)$ alors

$$v \circ u := [v \circ u_\varepsilon)_\varepsilon] \ \in \mathcal{G}^s(\Omega).$$

Définition 1.10 *:*

On dit que $(u_\varepsilon)_\varepsilon = (u^1_\varepsilon, \cdots, u^m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M{}^m$ est un élément c-borné de Ω dans Ω' si

$$\forall K \subset \Omega, \exists K' \subset \Omega', \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \textit{tel que } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \ u_\varepsilon(K) \subseteq K'. \tag{1.1}$$

On note l'espace des fonctions modérées c-bornées de Ω dans Ω' par $\mathcal{E}^s_M[\Omega, \Omega']$.
Un élément de $\mathcal{G}^s(\Omega)^m$ est dit c-borné s'il possède un représentant satisfaisant (1.1).
Notation :
$\mathcal{G}^s[\Omega, \Omega']$ l'espace des fonctions généralisées c-bornées de Ω dans Ω'.

Proposition 1.11 *(composition des fonctions):*

Soit $u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathcal{G}^s(\Omega)^m$ est un c-bornée dans Ω' et $v \in \mathcal{G}^s(\Omega')$. Alors

$$v \circ u := [(v_\varepsilon \circ u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\Omega)$$

est bien définit dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$.

1.1.2 L'injection de $\mathcal{D}'(\Omega)$

La construction de $\mathcal{G}^s(\Omega)$ a été faite de telle sorte que l'injection de l'espace des distributions devrait être possible par produit de convolution. Dans cette section , nous aurons besoin d'une fonction $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\int \rho(x)dx = 1 \tag{1.2}$$

$$\int x^\alpha \rho(x)dx = 0 \ \ \forall |\alpha| \geq 1 \tag{1.3}$$

Et nous notons toujours

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(\frac{x}{\varepsilon})$$

Le premier problème avec ce type de ρ est qu'il ne peuvent pas être convoles avec des éléments de $\mathcal{D}'$ sans restriction. Pour commencer, nous allons nous restreindre aux distributions à support compact.

Notation :

- On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des distributions à support compact.

Propriétés 1.12 *:*

L'application suivante

$$\begin{array}{rcl} i_0 : \mathcal{E}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & ((\omega * \rho_\varepsilon)/\Omega)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{array}$$

est linéaire et injective.

- On note l'injection constante de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ par:

$$\begin{array}{rcl} \sigma \ : \ \mathcal{C}^\infty(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(\Omega) \\ f & \longmapsto & (f)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{array}$$

En effet:

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Alors

$$f_\varepsilon(.) = f(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

D'autre part, pour tout opérateur de dérivation, on a

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \partial^\alpha f(x),$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ on a:

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{x \in K} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| & = & \sup\limits_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \\ & = & c \\ & \leq & c\varepsilon^{-N}, \qquad N \in \mathbb{N} \end{array}$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Donc

$$(f_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$$

D'où

$$[(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_s(\mathbb{R}^n)$$

- On note l'injection de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ par:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 \ : \ \mathcal{C}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(\Omega) \\ f & \longmapsto & (f * \varphi_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{array}$$

En effet:

D'après **3)** dans **Exemples 1.4)**

Propriétés 1.13 *:*

$i_0/\mathcal{D}(\Omega) = \sigma$
donc i_0 est un homomorphisme injective sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

La construction de l'injection de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ sera faite en plusieurs étapes. Premièrement, on choisit un recouvrement d'ouverts $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de Ω tel que $\overline{\Omega}_\lambda$ est compact dans Ω.
Soit $(\psi_\lambda)_\lambda$ la famille des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\psi_\lambda = 1$ sur tout voisinage de $\overline{\Omega}$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on définit

$$\begin{array}{rcl} i_\lambda : \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda) \\ \omega & \longmapsto & (((\psi_\lambda\omega) * \rho_\varepsilon)/\Omega_\lambda)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda) \end{array}$$

Propriété 1.14 *:*

Pour tout $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la famille $(i_\lambda(\omega))_{\lambda\in\Lambda}$ est cohérente

$$(i.e \quad : \quad i_\lambda(\omega)/\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = i_\mu(\omega)/\Omega_\mu \cap \Omega_\lambda \quad \forall\lambda, \mu \in \Lambda$$

Théorème 1.15 *:*

$$i : D'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega)$$

est linéaire et injective.

Proposition 1.16 *:*

1) On a

$$\begin{array}{rcl} i/\mathcal{E}'(\Omega) & = & i_0 \\ i/\mathcal{C}^\infty(\Omega) & = & \sigma \end{array}$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \mathcal{D}'$, alors

$$\partial^\alpha\left((\omega)\right) = i(\partial^\alpha\omega)$$

Exemples 1.17 *:*

1) La distribution de Dirac δ s'injecte dans $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ sous la forme:

$$i(\delta) = (\delta_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \delta_\varepsilon(x) & = & (\delta * \rho_\varepsilon)(x) \\ & = & < \delta(y), \rho_\varepsilon(x-y) > \\ & = & \rho_\varepsilon(x) \end{array}$$

2) On a

$$i(x)i(\delta) \;=\; (x\rho_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

Il est claire que $x.\delta \;=\; 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, mais $i(x)i(\delta) \;=\; [(x\rho_\varepsilon)_\varepsilon] \neq 0 \quad dans \quad \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$.

En effet:

On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\rho(x_0) \neq 0$ posons $x = \varepsilon\, x_0$

alors $x\rho_\varepsilon(x) = x_0\rho_\varepsilon(x_0) \neq 0$

$$\sup_{x\in[-1+x_0,x_0+1]} |x\rho_\varepsilon(x)| \nrightarrow 0 \;(\varepsilon \longrightarrow 0)$$

donc $(x\rho_\varepsilon))_\varepsilon \notin \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$.

3) On a $\quad i(sin(\delta)) \;=\; (\; sin(\rho_\varepsilon)_\varepsilon) + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}) \qquad$ (la proposition **1.9**).

4) On a $i(H) \;=\; (h_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$ avec

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy$$

On a $i(H)^2 \neq i(H)$.

Remarque 1.18 *:*

On définit l'opérateur ∂^α par:

$$\begin{array}{rcll} \partial^\alpha \;:\; \mathcal{G}^s(R) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(R) & \\ u & \longmapsto & \partial^\alpha u = (\partial^\alpha u_\varepsilon) + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}), & \qquad \alpha \in \mathbb{N} \end{array}$$

pour tout opérateur de dérivation ∂^α.

Il s'ensuit que l'opérateur de dérivation est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

Exemple 1.19 *:*

Soit H la fonction heaviside. Alors $i(H) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ et on a:

$$i(H) \;=\; (h_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

avec

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy$$

Donc

$$i(H)' \;=\; (h'_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

avec

$$\begin{aligned} h'_\varepsilon(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy \\ &= \rho_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

D'où

$$i(H') = i(\delta) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$$

1.1.3 Les fonctions généralisées tempérées

L'algèbre $\mathcal{G}^s_\tau$ des fonctions généralisées tempérées a été introduite par J. F. Colombeau dans [17] afin de développer la théorie des distributions tempérées dans l'algèbre de fonctions généralisées. L'intérêt principal dans cette classe d'algèbre de Colombeau consiste d'une part à justifier la composition par composantes des applications indéfiniment différentiables, et d'autre part dans la théorie des transformations des groupes, pour plus de détail voir [29].

Définition 1.20 *:*

Soit $I = (0,1]$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^s_\tau(\Omega) &:= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (C^\infty(\Omega))^I / \forall\alpha \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{-N}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{-N})\} \\ \mathcal{N}^s_\tau(\Omega) &:= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in (C^\infty(\Omega))^I / \forall\alpha \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \\ &\qquad \sup_{x\in\Omega}(1+|x|)^{-p}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{m})\}\end{aligned}$$

- $\mathcal{N}^s_\tau(\Omega)$ *est un idéal de* $\mathcal{E}^s_\tau(\Omega)$

L'algèbre des fonctions généralisées tempérées sur Ω est définie par

$$\mathcal{G}^s_\tau(\Omega) = \mathcal{E}^s_\tau(\Omega)/\mathcal{N}^s_\tau(\Omega)$$

1.1.4 Les nombres généralisés et la valeur en un point d'une fonction généralisée

Dans la théorie de la distribution classique, une définition des valeurs de point pour distributions a été introduite par Lojasiewicz dans [56]. Cependant, ce concept ne peut pas être appliqué à des distributions arbitraires à des points arbitraires. De plus, il n'y a aucun moyen de caractériser les distributions par leur valeurs en un point quelconque de telle manière que ce soit similaire aux fonctions classiques. D'autre part, pour les éléments des algèbres de Colombeau il y a une manière très naturelle et directe d'obtenir des valeurs de points, notamment en insérant des points pour les représentants. Les objets tirés d'une telle opération sont les suites des nombres qui ne sont pas à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, considérées comme étant des représentants des nombres généralisés.

Définition 1.21 *:*

Soit $I = (0,1]$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^s_r &:= \{(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{K}^I / \exists N \in \mathbb{N}, |r_\varepsilon| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{-N})\} \\ \mathcal{N}^s_r &:= \{(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{K}^I / \forall m \in \mathbb{N}, |r_\varepsilon| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{m})\}\end{aligned}$$

• $\mathcal{N}_r^s$ est un idéal $\mathcal{E}_r^s$

L'algèbre des nombres généralisés sur Ω est définie par

$$\mathcal{G}_r^s = \mathcal{E}_r^s / N_r^s$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors $\mathcal{G}_r^s = \tilde{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathcal{G}_r^s = \tilde{\mathbb{C}}$).

Corollaire 1.22 *:*

• $\mathcal{G}_r^s$ n'est pas un corps

Preuve 1.23 *:*

Soit

$$r_\varepsilon = \begin{cases} 0 & si \ \ \varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ \\ 1 & si\ non \end{cases}$$

On a

$$(r_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_r^s$$

et

$$(r_\varepsilon)_\varepsilon \notin \mathcal{N}_r^s$$

supposons que $\exists s = [(s_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_r^s$ tel que $r.s = 1$

donc pour $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_r^s$, on a

$$r_\varepsilon . s_\varepsilon + n_\varepsilon = 1 \ \forall \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on trouve que

$$n_\varepsilon = 1$$

ce qui est absurde (quand $\varepsilon \longrightarrow 0$).

• On note l'injection constante de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{G}_r^s$ par:

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ \mathbb{K} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{G}_r^s \\ r \quad &\longmapsto \quad (r)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \end{aligned}$$

Définition 1.24 *:*

Pour $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ ou $u \in \mathcal{G}_\tau^s(\Omega))$ et $x_0 \in \Omega$, la valeur de u en x_0 est définie comme la classe de $u_\varepsilon(x_o))_\varepsilon$ dans $\mathcal{G}_r^s$, c'est à dire

$$u(x_0) = [(u_\varepsilon(x_0))_\varepsilon]$$

Exemples 1.25 *:*

1) Si $f \in C^\infty$ et $x_0 \in \Omega$, alors

$$i(f)(x_0) = \sigma(f)(x_0) = f(x_0) \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_r^s$$

2) Si $f \in C(\Omega)$ le résultat n'est pas vrai en général
En effet: pour $x_0 = 0$ on a

$$\begin{aligned} i(x_+)(x_0) &= (x_+ * \rho_\varepsilon(x_0))_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ i(x_+)(x_0) &= (\int_0^\infty y\rho_\varepsilon(x_0 - y)dy)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ i(x_+)(0) &= (\varepsilon \int_0^\infty y\rho(-y)dy)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \end{aligned}$$

Donc $i(x_+)(0)$ dépend de ρ en général on a $i(x_+)(0) \neq 0$ dans $\mathcal{G}_r^s$, mais la valeur classique est $x_+(0) = 0$.
3) On a $i(x)i(\delta) \neq 0$ dans $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$.
De plus la valeur de $i(x)i(\delta)$ en tout point est nulle.
En effet:
- si $x_0 = 0$ évidente
- si $x_0 \neq 0$ alors

$$x_0\rho(x_0) = \frac{x_0}{\varepsilon}\rho(\frac{x_0}{\varepsilon}) \longrightarrow 0$$

car $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

1.2 Intégration

La prochaine construction de la théorie non linéaire des fonctions généralisées est le concept d'intégration sur $\mathcal{G}^s$. Ce n'est pas surprenant que l'idée de base de la présentation suivante consistera en élevant les définitions par composant au niveau des classes d'équivalence.

Proposition 1.26 *:*

Soit M un ensemble Lebesgue-mesurable tel que $\overline{M} \subset\subset \Omega$ et $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, alors

$$\textstyle\int_M u(x)dx = (\int_M u_\varepsilon(x)dx)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \quad \in \mathcal{G}_r^s$$

Preuve 1.27 *:*

On a $(u_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$ donc,

$$(\int_M u_\varepsilon(x)dx)_\varepsilon \in \mathcal{E}_r^s$$

d'où

$$\textstyle\int_M u(x)dx \in \mathcal{G}_r^s$$

Propriétés 1.28 *:*

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et soient M_1, M_2, M_3 des ensembles λ-mesurable tels que $\overline{M}_i \subset \Omega,\ \ i = 1, 2, 3.$

De plus, si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $\alpha \in \mathcal{G}^s_r$, alors

i) On a

$$\int_M (u + \alpha v) = \int_M u + \alpha \int_M v$$

ii) Si $\lambda(M) = 0$ alors

$$\int_M u = 0$$

iii) Si $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$ alors

$$\int_{M_1 \cup M_2} u = \int_{M_1} u + \int_{M_2} u$$

iv) Si $\overline{M} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ alors

$$\int_M u = \int_M (u/\Omega')$$

v) Si $f \in C^\infty(\Omega)$ alors

$$\textstyle\int_M i(f) = \int_M f \ \ dans\ \mathcal{G}^s_r$$

Exemple 1.29 *:*

• Soit $K = [-a, a]$, alors

$$\begin{aligned} \int_K i(\delta)(x)dx &= (\int_{-a}^{a} \rho_\varepsilon(x)dx)_\varepsilon + \mathcal{N}^s_r \\ &= 1 \ dans\ \mathcal{G}^s_r \end{aligned}$$

En effet: $\forall r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |1 - \int_{-a}^{a} \rho_\varepsilon(x)dx| &= |\int_{|y| \geq \frac{a}{\varepsilon}} \rho(y)dy| \\ &\leq C_r \varepsilon^r \end{aligned}$$

Définition 1.30 *:*

Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ avec $supp(u) = K$ compact dans Ω on définit

$$\int_\Omega u(x)dx := \int_L u(x)dx$$

où L est un compact de Ω contient K .

Exemples 1.31 *:*

1) On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} i(\delta)(x)dx &= \int_K i(\delta)(x)dx \\ &= 1\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} i(\delta)^2(x)dx &= (\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon^2(x)dx)_\varepsilon + \mathcal{N}_r^s \\ &= (\frac{1}{\varepsilon}\int_K \rho^2(x)dx)_\varepsilon \, + \mathcal{N}_r^s\end{aligned}$$

Théorème 1.32 *:*

Si $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$\textstyle\int_\Omega i(\omega)(x)i(\varphi)(x)dx = \langle \omega, \varphi\rangle \ \textit{dans } \mathcal{G}_r^s$$

Corollaire 1.33 *:*

Si $\omega \in D'(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$ alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega i(\omega)_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle \omega, \varphi\rangle$$

1.3 Concept d'association

Dans cette partie, nous allons présenter un outil technique pour identifier en $\mathcal{G}^s$ objet non linéairement distincts mais linéairement équivalents, ceci est fait par introduire une relation d'équivalence dans $\mathcal{E}_M^s$ plus grossière que l'égalité en $\mathcal{G}^s$.

Définition 1.34 *:*

Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$

On dit que u et 0 sont associés(on note $u \approx 0$) si

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

• Soient $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, alors

$$u \approx v \Leftrightarrow u - v \approx 0$$

Définition 1.35 *:*

Soient $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et on suppose que $u \approx i(\omega)$ alors, u est dit une distribution associée à ω. Dans ce cas pour simplifier l'écriture on note $(u \approx \omega)$.

D'après le corollaire **1.33** $u \approx \omega$ est équivalent à dire que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle \omega, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Propriétés 1.36 *:*

L'association est incohérente avec la multiplication

$$u_1 \approx u_2 \not\Rightarrow u\, u_1 \approx u\, u_2$$

avec u, u_1, u_2 des éléments de $\mathcal{G}^s(\Omega)$.
Par contre l'association est cohérente avec la dérivation

$$u_1 \approx u_2 \Rightarrow Du_1 \approx Du_2.$$

Preuve 1.37 *:*

On sait que

$$i(H)^n \approx i(H)$$

Soit en dérivant:

$$n\, i(H)i(H') \approx i(H')$$

en changement n par $n+1$ on aura:

$$\textbf{(i)} \qquad i(H)i(H') \approx \frac{1}{n+1} i(H')$$

Si on suppose qu'on peut multiplier chacun des membres de cette equation par $i(H)$, tout en gardant l'association des résultats obtenus on obtiendrait:

$$\textbf{(ii)} \qquad i(H)^2 i(H') \approx \frac{1}{2} i(H')i(H)$$

sachant que

$$i(H)i(H') \approx \frac{1}{2} i(H')$$

il vient:

$$i(H)^2 i(H') \approx \frac{1}{4} i(H')$$

D'autre part, en écrivant **(i)** pour n=2, on a

$$i(H)^3 \approx i(H)$$

Il vient:

$$3\, i(H)^2 i(H') \approx i(H')$$

$$i(H)^2 i(H') \approx \frac{1}{3} i(H')$$

ce qui prouve la multiplication n'est pas cohérente avec l'association.

Proposition 1.38 *:*

Si $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $i(\omega) \approx 0$ alors

$$\omega = 0$$

Preuve 1.39 *:*

Soit $\omega \in D'(\Omega)$ et $i(\omega) \approx 0$.
D'après le corollaire **1.33**, on a

$$\langle \omega, \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

d'où

$$\omega = 0$$

Exemples 1.40 *:*

1) $i(x)i(\delta) \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, on a

$$i(x)i(\delta) \approx 0$$

En effet:
Soit $\varphi \in D'(\mathbb{R})$

$$\int_\Omega x\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varepsilon \int \rho(y)\varphi(\varepsilon y)dy \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \longrightarrow 0)$$

2) $i(\delta)^2 \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$. Pour $\varphi(0) \neq 0$ on a

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon^2(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\varepsilon} \int \rho^2(y)\varphi(\varepsilon y)dy \longrightarrow \infty \qquad (\varepsilon \longrightarrow 0)$$

donc $i(\delta)^2 \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ ne peut pas être associé à aucune distribution.

Définition 1.41 *:*

Soit $r \in \mathcal{G}_r^s$ on dit que r est associé avec 0 ($r \approx 0$) si

$$r_\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \longrightarrow 0)$$

Proposition 1.42 *:*

i) Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\omega \in D'(\Omega)$ alors

$$i(f)i(\omega) \approx i(f\omega)$$

ii) Si $f, g \in C^(\Omega)$, alors

$$i(f)i(g) \approx i(f\ g)$$

iii) Si $f \in C(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, alors

$$i(f)(x_0) \approx f(x_0)$$

iv) Soit $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est de classe C^∞ et $f \in C(\Omega_2)$, alors

$$i(f \circ g)) \approx i(f) \circ g$$

Proposition 1.43 *:*

Si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $u \approx v$, alors

i) $\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}$

ii) $i(f)u \approx i(f)v \quad \forall f \in C^\infty$.

Exemple 1.44 *:*

• On a $i(x\delta) \approx i(x)i(\delta) \approx 0$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $i(H)^n \approx i(H)$

En effet :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int (H * \rho_\varepsilon)^n(x)\varphi(x)dx = \langle H^n, \varphi\rangle = \langle H, \varphi\rangle$$

• On a $i(H)^2 \approx H \;(\quad i(H^2) \neq i(H) \; \textit{dans} \; \mathcal{G}^s(\mathbb{R}))$.

D'après la proposition précédente, on a

$$i(H)i(\delta) \approx \frac{1}{2} i(\delta).$$

Dans ce chapitre on a rappelé la définition de l'algèbre spéciale notée $\mathcal{G}^s$ introduite pour la première fois par J.F.Colombeau, et certaines de ses propriétés fondamentales. Puis la manière d'injecter quelques algèbres dans $\mathcal{G}^s$ à savoir l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables, et les espaces des distributions. Ainsi la définition des nombres généralisés, et les valeurs des fonctions généralisées en un point donné. Et on a clôturé ce chapitre par le rappel de la notion de l'intégrale généralisée et la notion d'association.

Chapitre 2

Dérivée fractionnaire dans $\mathcal{G}^s$

Dans ce chapitre, nous introduisons l'approche de la dérivée fractionnaire contenant des singularités basée sur la théorie des algèbres de fonctions généralisées dans l'algèbre de Colombeau $\mathcal{G}^s$.

Les calculs fractionnaires est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration. Ces dérivées ou intégrations fractionnaires rentrent dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels. Par exemple, on peut se demander comment interpréter convenablement la racine carrée $D^{1/2}$.

2.1 Dérivée fractionnaire conforme

On rappelle quelques notations, définitions, et résultats concernant la dérivée conforme utilisée dans cette partie. On note l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ par $C(I,\mathbb{R})$. Pour surmonter certaines de ces difficultés les auteurs , Khalil et Al. [55],introduit la définition limite de la dérivée d'une fonction donnée par ce qui suit T^α

$$T^\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon\, x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Dans [54], Almeida et Al. introduit la définition limite de la dérivée d'une fonction par:

$$T^\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon\, k(x)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Dans [38] Katugampola introduit l'idée de la dérivée fractionnaire conforme

$$T^\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x\, e^{\varepsilon\, x^{-\alpha}}) - f(x)}{\varepsilon}.$$

[2] Akkurt, Esra Yildirim, et Huseyin Yildirim, introduisent la définition de la dérivée conforme d'une fonction f

$$T^\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x - k(x) + k(x)\, e^{\varepsilon \frac{k(x)^{-\alpha}}{k'(x)}}) - f(x)}{\varepsilon}$$

avec $k : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive telle que $k'(t) \neq 0$, quand $t > a$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0,1)$. En utilisant une définition de dérivée fractionnaire conforme introduite par les auteurs Khalil et al. in [55] pour injecte cette dérivée dans l'algèbre des fonctions généralisées $\mathcal{G}^s$.

Définition 2.1 *:*

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors la dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α est définie par:

$$T^\alpha(f)(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x - \varepsilon\, x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}$$

si f est $\alpha-$différentiable, (i.e. $T^\alpha(f)(x)$ existe.) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f^\alpha(x)$ existe, on définit alors

$$f^\alpha(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f^\alpha(x)$$

Théorème 2.2 *:*

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en t, $t > a$, alors f est $\alpha-$différentiable en t et

$$f^\alpha(x) = x^{1-\alpha \frac{d\,f}{d\,x}}(x) \qquad (*)$$

Définition 2.3 *:*

Soient $a > 0$, $t \geq a$, et f une fonction définie sur $(0, t]$ et $\alpha > 0$ alors, l'intégrale fractionnaire conforme d'ordre α est définie par

$$I_a^\alpha f(x) = \int_a^x t^{\alpha-1} f(t) dt$$

Théorème 2.4 *:*

On a

$$T^\alpha(I_a^\alpha f(x)) = f(x)$$

Et

$$I_a^\alpha(T^\alpha f(x)) = f(x) - f(a)$$

2.2 Dérivée fractionnaire conforme dans $\mathcal{G}^s$

Définition 2.5 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}^s([0, \infty))$.
Par $(*)$, la dérivée fractionnaire conforme de u_ε est définie par

$$T^\alpha u_\varepsilon(x) = x^{1-\alpha \frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}}(x)$$

Lemme 2.6 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+),\ (\exists N \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \quad \sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_\varepsilon(x)| \le C\varepsilon^{-N}$$

Preuve 2.7 *:*

On sait que

$$T^\alpha u_\varepsilon(x) = x^{1-\alpha}\frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}(x)$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_\varepsilon(x)| = \sup_{x\in[0,a]} |x^{1-\alpha}\frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}(x)|$$

Soit $a > 0$, alors on a

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_\varepsilon(x)| \le a^{1-\alpha} \sup_{x\in[0,a]} |\frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}(x)|$$

Puisque $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M([0,\infty))$, donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_\varepsilon(x)| \le C_{\alpha,a}\ \varepsilon^{-N}$$

Lemme 2.8 *:*

Soient $(u_{1\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+),\ (\forall m \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \quad \sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - T^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| \le C\,\varepsilon^m$$

Preuve 2.9 *:*

On sait que

$$T^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - T^\alpha u_{2\varepsilon}(x) = |x^{1-\alpha}[\frac{d\,u_{1\varepsilon}}{d\,x}(x) - \frac{d\,u_{2\varepsilon}}{d\,x}(x)]$$

Ainsi

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - T^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| = \sup_{x\in[0,a]} |x^{1-\alpha}[\frac{d\,u_{1\varepsilon}}{d\,x}(x) - \frac{d\,u_{2\varepsilon}}{d\,x}(x)]|$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - T^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| \le a^{1-\alpha} \sup_{x\in[0,a]} |\frac{d\,u_{1\varepsilon}}{d\,x}(x) - \frac{d\,u_{2\varepsilon}}{d\,x}(x)|$$

Puisque $\Big(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}\Big)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$, alors

$$\sup_{x\in[0,a]} |T^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - T^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| \le C\,\varepsilon^m$$

Remarque 2.10 *:*

Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\frac{d}{dx}T^\alpha u_\varepsilon(x) = (1-\alpha)\,x^{-\alpha}\frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}(x) + x^{1-\alpha}\frac{d\,u_\varepsilon}{d\,x}(x)$$

En général, $\sup_{x\in K} |\frac{d^n}{d\,x^n}T^\alpha u_\varepsilon(x)|$ n'atteint pas la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Donc pour injecte la dérivée fractionnaire dans l'algèbre des fonctions généralisées $\mathcal{G}^s([0,\infty))$, on propose un définition régularisante suivante.

Définition 2.11 *:*

Soit $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$ la dérivée conforme d'ordre α de u est définie par

$$\tilde{T}^{\alpha}u(x) = [(\tilde{T}^{\alpha}u_{\varepsilon}(x))_{\varepsilon}] = [(T^{\alpha}u_{\varepsilon} * \rho_{\varepsilon}(x))_{\varepsilon}]$$

Lemme 2.12 *:*

Soient $(u_{1\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$(\tilde{T}^{\alpha}u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{T}^{\alpha}u_{2\varepsilon}(x))_{\varepsilon} \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$$

Preuve 2.13 *:*

On sait que

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\alpha}u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{T}^{\alpha}u_{2\varepsilon}(x) &= T^{\alpha}u_{1\varepsilon} * \rho_{\varepsilon}(x) - T^{\alpha}u_{2\varepsilon} * \rho_{\varepsilon}(x) \\
&= [T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}] * \rho_{\varepsilon}(x)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{T}^{\alpha}u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{T}^{\alpha}u_{2\varepsilon}(x)\Big) &= \frac{d^n}{dx^n}\Big([T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}] * \rho_{\varepsilon}(x)\Big) \\
&= [T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}] * \frac{d^n}{dx^n}\rho_{\varepsilon}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,a]} |\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{T}^{\alpha}u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{T}^{\alpha}u_{2\varepsilon}(x)\Big)| &= \sup_{x\in[0,a]} |[T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}] * \frac{d^n}{dx^n}\rho_{\varepsilon}(x)| \\
&\leq \sup_{x\in[0,a]} |T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}| \sup_{x\in[0,a]} |\int \frac{d^n}{dx^n}\rho_{\varepsilon}(x-s)ds| \\
&\leq C_1 \sup_{x\in[0,a]} |T^{\alpha}u_{1\varepsilon} - T^{\alpha}u_{2\varepsilon}|
\end{aligned}$$

D'apres le lemme **2.16** , alors

$$(\tilde{T}^{\alpha}u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{T}^{\alpha}u_{2\varepsilon}(x))_{\varepsilon} \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$$

Lemme 2.14 *:*

Soit $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$\tilde{T}^{\alpha}u(x) \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$$

Preuve 2.15 *:*

On sait que

$$\tilde{T}^\alpha u_\varepsilon(x) = T^\alpha u_\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{T}^\alpha u_\varepsilon(x)\Big) &= \frac{d^n}{dx^n}\Big(T^\alpha u_\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)\Big)\\ &= T^\alpha u_\varepsilon * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,a]}\Big|\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{T}^\alpha u_\varepsilon(x)\Big)\Big| &= \sup_{x\in[0,a]}\Big|T^\alpha u_\varepsilon * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)\Big|\\ &\leq \sup_{x\in[0,a]}|T^\alpha u_\varepsilon| \sup_{x\in[0,a]}\Big|\int \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x-s)ds\Big|\\ &\leq C_1 \sup_{x\in[0,a]}|T^\alpha u_\varepsilon(x)|\end{aligned}$$

D'après le lemme **2.14**, on a

$$(\tilde{T}^\alpha u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M([0,\infty))$$

D'où,

$$\tilde{T}^\alpha u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$$

2.3 Intégrale fractionnaire conforme dans $\mathcal{G}^s$

Définition 2.16 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$ l'intégrale fractionnaire de u_ε est définie par

$$I^\alpha_a u_\varepsilon(x) = \textstyle\int_a^x t^{\alpha-1}u_\varepsilon(t)dt$$

Lemme 2.17 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+),\ (\exists N \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \quad \sup_{x\in[0,a]}|I^\alpha_a u_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-N}$$

Preuve 2.18 *:*

On a

$$I^\alpha_a u_\varepsilon(x) = \int_a^x t^{\alpha-1}u_\varepsilon(t)dt$$

Et soit $T > 0$, alors on a

$$\sup_{x\in[0,T]}|I^\alpha_a u_\varepsilon(x)| = \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_a^x t^{\alpha-1}u_\varepsilon(t)dt\Big|$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,T]} |I_a^\alpha u_\varepsilon(x)| &\leq \sup_{x\in[0,T]} |u_\varepsilon(x)|\,|\int_a^x t^{\alpha-1}| \\ &\leq \frac{T^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \sup_{x\in[0,T]} |u_\varepsilon(x)|\end{aligned}$$

Finalement

$$\sup_{x\in[0,T]} |I_a^\alpha u_\varepsilon(x)| \leq C_{T,\alpha}\varepsilon^{-N}$$

Lemme 2.19 *:*

Soient $(u_{1\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $(u_{2\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ deux représentants de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+),\ (\forall m \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \quad \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| \leq C\,\varepsilon^m$$

Preuve 2.20 *:*

On a

$$I_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x) = \int_a^x t^{\alpha-1}[u_{1\varepsilon(t)} - u_{2\varepsilon}(t)]dt$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,T]} |I_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x)| &= \sup_{x\in[0,T]} |\int_a^x t^{\alpha-1}[u_{1\varepsilon(t)} - u_{2\varepsilon}(t)]dt| \\ &\leq \frac{(T^\alpha - a^\alpha)}{\alpha} \sup_{x\in[0,T]} |u_{1\varepsilon(t)} - u_{2\varepsilon}(t)|\end{aligned}$$

Et puisque $(u_{1\varepsilon(t)} - u_{2\varepsilon}(t))_\varepsilon \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$, alors

$$(I_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$$

Remarque 2.21 *:*

Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha u_\varepsilon(x) = x^{\alpha-1}\, u_\varepsilon$$

En général, $\sup_{x\in K} |\frac{d^n}{d\,x^n} I_a^\alpha u_\varepsilon(x)|$ n'atteint pas la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Donc pour injecte l'intégrale fractionnaire dans l'algèbre des fonctions généralisées $\mathcal{G}^s([0,\infty))$, on propose un définition régularisante suivante.

Définition 2.22 *:*

Soit $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$, la dérivée conforme d'ordre α de u est définie par

$$\tilde{I}_a^\alpha u(x) = [(\tilde{I}_a^\alpha u_\varepsilon(x))_\varepsilon] = [(I_a^\alpha u_\varepsilon * \rho_\varepsilon(x))_\varepsilon]$$

Lemme 2.23 *:*

Soient $(u_{1\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $\alpha > 0$, on a

$$(\tilde{I}_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{I}_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$$

Preuve 2.24 *:*

On sait que

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{I}_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x) &= I_a^\alpha u_{1\varepsilon} * \rho_\varepsilon(x) - I_a^\alpha u_{2\varepsilon} * \rho_\varepsilon(x) \\ &= [I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}] * \rho_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{I}_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{I}_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x)\Big) &= \frac{d^n}{dx^n}\Big([I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - T^\alpha u_{2\varepsilon}] * \rho_\varepsilon(x)\Big) \\ &= [I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}] * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,a]} |\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{I}_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{I}_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x)\Big)| &= \sup_{x\in[0,a]} |[I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}] * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - I_a^\alpha u_{2\varepsilon}| \sup_{x\in[0,a]} |\int \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x-s)ds| \\ &\leq C_1 \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_{1\varepsilon} - I^\alpha u_{2\varepsilon}|\end{aligned}$$

D'apres le lemme **2.27**, alors

$$(\tilde{I}_a^\alpha u_{1\varepsilon}(x) - \tilde{I}_a^\alpha u_{2\varepsilon}(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}^s([0,\infty))$$

Lemme 2.25 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$.
Alors pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$\tilde{I}_a^\alpha u(x) \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$$

Preuve 2.26 *:*

On sait que

$$\tilde{I}_a^\alpha u_\varepsilon(x) = I_a^\alpha u_\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{I}_a^\alpha u_\varepsilon(x)\Big) &= \frac{d^n}{dx^n}\Big(I_a^\alpha u_\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)\Big) \\ &= I_a^\alpha u_\varepsilon * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,a]} |\frac{d^n}{dx^n}\Big(\tilde{I}_a^\alpha u_\varepsilon(x)\Big)| &= \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_\varepsilon * \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x)| \\
&\leq \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_\varepsilon| \sup_{x\in[0,a]} |\int \frac{d^n}{dx^n}\rho_\varepsilon(x-s)ds| \\
&\leq C_1 \sup_{x\in[0,a]} |I_a^\alpha u_\varepsilon(x)|
\end{aligned}$$

D'après le lemme **2.25**, on a

$$(\tilde{I}_a^\alpha u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s([0,\infty))$$

D'où,

$$\tilde{I}_a^\alpha u \in \mathcal{G}^s([0,\infty))$$

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans l'algèbre de Colombeau

Définition 2.27 *:*

L'intégrale fractionnaire d'ordre α est définie par :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \qquad \alpha > 0$$

avec , $\quad 0 < \alpha < 1.$

Définition 2.28 *:*

La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo est définie par:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau$$

avec, $\quad m-1 < \alpha < m, \qquad m \in \mathbb{N}^*.$

Lemme 2.29 *:*

Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}$, on a

$$(\forall T \in \mathbb{R}^+),\ (\exists N \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \qquad \sup_{x\in[0,T]} |D^\alpha u_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-N}$$

Preuve 2.30 *:*

Soit f_ε un représentant de $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, alors

$$D^\alpha f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f_\varepsilon^{'}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mid D^{\alpha} f_{\varepsilon}(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \mid \int_0^t \frac{f_{\varepsilon}^{'}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \mid \\
\sup_{t\in[0,T]} \mid D^{\alpha} f_{\varepsilon}(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \frac{f_{\varepsilon}^{'}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \parallel f_{\varepsilon}^{'} \parallel_{L^{\infty}([0,T])} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} C\, \varepsilon^{-N} \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&\leq C_{T,\alpha}\, \varepsilon^{-N}
\end{aligned}$$

En général , pour $m-1 \ < \alpha \ < \ m, \quad m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mid D^{\alpha} f_{\varepsilon}(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \mid \int_0^t \frac{f_{\varepsilon}^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \mid \\
\sup_{t\in[0,T]} \mid D^{\alpha} f_{\varepsilon}(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \frac{f_{\varepsilon}^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \parallel f_{\varepsilon}^{(m)} \parallel_{L^{\infty}([0,T])} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \mid .
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \mid D^{\alpha} f_{\varepsilon}(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} C\, \varepsilon^{-N} \frac{T^{m-\alpha}}{m-\alpha} \\
&\leq C_{T,\alpha}^{'}\, \varepsilon^{-N}
\end{aligned}$$

Où $C_{T,\varepsilon}, \ C_{T,\varepsilon}^{'}$ sont des constantes dépendants de deux paramètres α et T .

On va suivre la même démarche qu'on a déjà vu dans la dérivé fractionnaire conforme dans l'algèbre de colombeau pour injecte la dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans cette l'algèbre

Définition 2.31 *:*

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo dans l'algèbre de Colombeau est définie par:

$$D_c^{\alpha}\, F \ = \ [(D_c^{\alpha}\, f_{\varepsilon} * \rho_{\varepsilon})_{\varepsilon}], \qquad\qquad 0 \ < \alpha \ < \ 1$$

avec $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est un représentant de $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$.

Lemme 2.32 *:*

Soit $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ un représentant de $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$(\forall a \in \mathbb{R}^{+}),\ (\exists N \in \mathbb{N}),\ (\exists C > 0) \qquad \sup_{x\in[0,T]} |I^{\alpha} f_{\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^{-N}$$

Preuve 2.33 *:*

Soit f_ε un représentant de $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, alors

$$I^\alpha f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_\varepsilon(\tau) d\tau, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mid I^\alpha f_\varepsilon(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_\varepsilon(\tau) d\tau \mid \\
\sup_{t\in[0,T]} \mid I^\alpha f_\varepsilon(t) \mid &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_\varepsilon(\tau) d\tau \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \parallel f_\varepsilon \parallel_{L^\infty([0,T])} \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} C\, \varepsilon^{-N}\, T^\alpha \\
&\leq C_{T,\alpha}\, \varepsilon^{-N}
\end{aligned}$$

De la même manière l'intégrale fractionnaire au sens de Caputo s'injecte dans l'algèbre de Colombeau par la définition suivante

Définition 2.34 *:*

Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, alors l'intégrale fractionnaire dans l'algèbre de Colombeau est définie par :

$$I^\alpha F = [(I^\alpha f_\varepsilon * \rho_\varepsilon)_\varepsilon] \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Chapitre 3

Point fixe dans l'algèbre de Colombeau

Dans [36] J.M.Martin a donné pour la première fois la notion de point fixe dans l'algèbre de Colombeau. Dans ce chapitre on a rappeler plusieurs propriétés concernant le point fixe généralisé, et on a appliquer ceci dans un problème de Cauchy.

3.1 Contractions dans les espaces convexes et complètes

Ce paragraphe est consacré à discuter la contraction des applications dans les espaces localement convexes, qui nous a conduit à définir la contraction des applications dans l'algèbre de Colombeau.

Définition 3.1 *:*

Soit E un espace vectoriel muni d'une famille des semi-normes $(p_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$, on note τ_i la topologie définie par la semi-norme p_i.
Soit τ la topologie générée par les classes $\cup_{i\in I}\tau_i$.
Le couple (E, τ) est appelé un espace localement convexe.
• La boule dans E de centre a est de la forme suivante

$$B(a, r_i) = \{x \in E/p_i(x - a) < r_i\}$$

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E si

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall i \in I)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N} \text{ } si \text{ } n \geq n_0 \Rightarrow p_i(x_{n+p} - x_n) < \varepsilon)$$

• E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Définition 3.2 *:*

Soit E un espace localement convexe et complet
l'application $f : E \longrightarrow E$ est contractante si

$$(\forall i \in I)(\exists k_i < 1) \text{ } tel \text{ } que \text{ } \forall(x, y) \in E \times E, \text{ } p_i(f(x) - f(y)) \leq k_i p_i(x - y)$$

Notations :

• (E, τ) est un espace topologique défini par la famille des semi-norme $(p_i)_{i\in I}$

• $(E,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est la famille des espaces topologique (E,τ_λ) définis par la famille des semi-norme $Q_\lambda=(q_{\lambda,i})_{i\in I}$
• $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille des applications contractantes $f_\lambda:(E,\tau_\lambda)\longrightarrow(E,\tau_\lambda)$.

Théorème 3.3 *:*

Avec les notations précédentes
f_λ admet un point fixe $z_\lambda\in E$
De plus si(E,τ) est séparé et $\forall i\in I,\lambda\in\Lambda,\exists a_{\lambda,i}>0$ tel que $a_{\lambda,i}p_i\leq q_{\lambda,i}$
alors z_λ est unique.

3.2 Contractions dans l'algèbre de Colombeau

Tout d'abord nous cherchons s'il est possible de définir une application $\phi:\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ par la famille des applications $\phi_\lambda:C^\infty(\mathbb{R}^n)\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$
On pose $\quad p_{K,i}(f)=\{\sup\limits_{x\in K}|\partial^i f(x)|,K\subset\mathbb{R}^n,i\in\mathbb{N}\}$
On rappelle que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n) &:= \{(u_\lambda)_\lambda\in(C^\infty(\mathbb{R}^n))^\Lambda/\forall K\subset\mathbb{R}^n,\forall i\in\mathbb{N},(p_{K,i}(u_\lambda))_\lambda\in|\mathcal{E}^s_r|\}\\
\mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n) &:= \{(u_\lambda)_\lambda\in(C^\infty(\mathbb{R}^n))^\Lambda/\forall K\subset\mathbb{R}^n,\forall i\in\mathbb{N},(p_{K,i}(u_\lambda))_\lambda\in|\mathcal{N}^s_r|\}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}^s_r| &:= \{\ (|r_\lambda|)_\lambda\ /\quad (r_\lambda)_\lambda\in\mathcal{E}^s_r\}\\
|\mathcal{N}^s_r| &:= \{\ (|r_\lambda|)_\lambda\ /\quad (u_\lambda)_\lambda\in\mathcal{N}^s_r\}
\end{aligned}$$

L'algèbre de Colombeau est définie par:

$$\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)\ =\ \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

Lemme 3.4 *:*

Soit $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille des applications $\phi_\lambda:C^\infty(\mathbb{R}^n)\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$
On suppose que $(u_\lambda)_\lambda\in\mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$ et $(v_\lambda)_\lambda\in\mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$
i) $(\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda\in\mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^n)$
ii) $(\phi_\lambda(u_\lambda+v_\lambda))_\lambda-(\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda\in\mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$
Alors

$$\begin{aligned}
\phi:\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)\\
u=[(u_\lambda)_\lambda] &\longmapsto \phi(u)=[\phi_\lambda(u_\lambda)]
\end{aligned}$$

est bien définie.

Preuve 3.5 *:*

Par **i)** on a $[\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$
Soit $u_\lambda + v_\lambda$ un autre représentant de $u = [u_\lambda]$
Par **ii)** on a

$$(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda))_\lambda - (\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^n)$$

$$[(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda))_\lambda] = [(\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda] \ dans\ \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$$

Donc ϕ est bien définie.

Définition 3.6 *:*

On dit que l'application $\phi : \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ définie par la famille $(\phi_\lambda)_\lambda$ est contractante si:
a) Pour tout $(u_\lambda)_\lambda \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R})$, on a

$$(\phi_\lambda(u_\lambda))_\lambda \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R})$$

b) chaque ϕ_λ est contractante dans $(C^\infty(\mathbb{R}^n, \tau_\lambda))$ définie par $Q_\lambda = (q_{\lambda,i})_{i\in\mathbb{N}}$ avec la constante de contraction $k_{\lambda,i} < 1$.
c) $\forall K \subset \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda, \exists a_{\lambda,i}$ et $b_{\lambda,i}$ tel que

$$a_{\lambda,i} p_{K,i} \leq q_{\lambda,i} \leq b_{\lambda,i} p_{K,i}$$

d) $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda \in \Lambda$, alors

$$(\tfrac{b_{\lambda,i}}{a_{\lambda,i}})_\lambda \quad et \quad (\tfrac{1}{1-k_{\lambda,i}})_\lambda \quad sont\ dans \quad |\mathcal{E}^s_r|$$

Théorème 3.7 *:*

Si l'application

$$\phi : \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n) \ \longrightarrow \ \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$$

est contractante, alors ϕ admet un point fixe dans $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve 3.8 *:*

• **a)** implique **i)** du lemme **3.4**
Par **c)** on a

$$\begin{aligned} p_{K,i}(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda) - \phi_\lambda(u_\lambda)) &\leq k_{\lambda,i} p_{K,i}(v_\lambda) \\ p_{K,i}(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda) - \phi_\lambda(u_\lambda)) &\leq \frac{k_{\lambda,i}}{a_{\lambda,i}} q_{\lambda,i}(v_\lambda) \\ p_{K,i}(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda) - \phi_\lambda(u_\lambda)) &\leq \frac{b_{\lambda,i}}{a_{\lambda,i}} p_{K,i}(v_\lambda) \end{aligned}$$

Donc

$$p_{K,i}(\phi_\lambda(u_\lambda + v_\lambda) - \phi_\lambda(u_\lambda)) \in |\mathcal{N}^s_r|$$

alors la condition **ii)** du lemme **3.4** est vérifiée.
D'où

$$\phi \textit{ est bien definie}$$

• Par le théorème **3.3**, on sait que ϕ_λ admet un point fixe z_λ obtenu par la limite de suite de Cauchy définie par

$$z_{n+1,\lambda} = \phi_\lambda(z,n\lambda)$$

à partir de $z_0 = [z_{0,\lambda}] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$, on déduit que $z_1 = [\phi_\lambda(z_{0,\lambda})] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ et $z_1 - z_0 \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$
Donc

$$p_{K,i}(z_{1,\lambda} - z_{1,\lambda}) \in |\mathcal{E}_r^s|$$

$\forall n, p \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} q_{\lambda,i}(z_{n+p,\lambda} - z_{0,\lambda}) &\leq \frac{k_{\lambda,i}^n}{1 - k_{\lambda,i}} q_{\lambda,i}(z_{1,\lambda} - z_{0,\lambda}) \\ q_{\lambda,i}(z_{p,\lambda} - z_{0,\lambda}) &\leq \frac{1}{1 - k_{\lambda,i}} q_{\lambda,i}(z_{1,\lambda} - z_{0,\lambda}) \end{aligned}$$

$z_\lambda = \lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} z_{p,\lambda}$ *dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \tau_\lambda)$ alors

$$q_{\lambda,i}(z_\lambda - z_{0,\lambda}) \leq \frac{1}{1 - k_{\lambda,i}} q_{\lambda,i}(z_{1,\lambda} - z_{0,\lambda})$$

Or $q_{\lambda,i}(z_\lambda) \leq q_{\lambda,i}(z_\lambda - z_{0,\lambda}) + q_{\lambda,i}(z_{0,\lambda})$ alors, on a

$$\begin{aligned} q_{\lambda,i}(z_\lambda) &\leq \frac{1}{a_{\lambda,i}} q_{\lambda,i}(z_\lambda) \\ &\leq \frac{b_{\lambda,i}}{a_{\lambda,i}} [\frac{1}{1 - k_{\lambda,i}} (q_{\lambda,i}(z_\lambda - z_{0,\lambda}) + q_{\lambda,i}(z_{0,\lambda}))] \end{aligned}$$

Donc

$$(p_{K,i}(z_\lambda))_\lambda \in |\mathcal{E}_r^s|$$

Ainsi

$$(z_\lambda)_\lambda \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^n)$$

si $z = [z_\lambda]$, on a

$$\phi(z) = [\phi_\lambda(z_\lambda)] = [z_\lambda] = z$$

D'où z est un point fixe de ϕ.

3.3 Problème de Cauchy-Lipschitz dans $\mathcal{G}^s$

Définition 3.9 *:*

Le problème de Cauchy-Lipschitz est défini comme suit

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \\ x(t_0) = \zeta & \zeta \in \tilde{\mathbb{R}}, t_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

avec $f = [(f_\varepsilon)_\varepsilon]$, $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $x = [(x_\varepsilon)_\varepsilon]$, $x_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$.

Définition 3.10 *:*

Soit $g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}^s(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, on dit que g est lipschitzienne si $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in]0,1], \exists k_\varepsilon(t) > 0, \forall (y,z) \in \tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}}$ on a

$$| g_\varepsilon(t, y_\varepsilon) - g_\varepsilon(t, z_\varepsilon) | \leq k_\varepsilon(t) \mid y_\varepsilon - z_\varepsilon \mid$$

avec $\sup\limits_{t\in[0,T]} k_\varepsilon(t) = M_{T,\varepsilon} < +\infty, \qquad \forall T \in \mathbb{R}^+.$

Théorème 3.11 *:*

Si f est lipschitzienne, alors le problème (1) admet une solution unique .

Preuve 3.12 *:*

Pour $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}, f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}),\ x_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$.
Le problème se réduit à trouver un point fixe unique de l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \phi : \tilde{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{R}} \\ x(t) & \longmapsto & \phi(x)(t) = \zeta + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

1') Tout d'abord on montre que ϕ est bien définie
On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) = \zeta_\varepsilon + \int_{t_0}^{t} f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds$$

Il est clair que $\phi_\varepsilon : C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
$(C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau)$ est un espace topologique définie par la famille des semi-normes $(p_T)_{T\in\mathbb{R}^+}$ avec

$$p_T(x_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \mid x_\varepsilon(t) \mid$$

Soient $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R})$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$
On a

$$\begin{array}{rcl} \mid \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) \mid & = & \mid \zeta + \displaystyle\int_0^t f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds \\ & \leq & \mid \zeta \mid + \displaystyle\int_0^t \mid f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds \\ & \leq & \mid \zeta \mid + \sup\limits_{t\in[0,T]} \mid f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) \mid T \end{array}$$

Donc

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in |\mathcal{E}^s_r|$$

c-à-d

$$(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R})$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mid \phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) \mid &= \mid \int_0^t f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s))ds - \int_0^t f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds \mid \\
&\leq \int_0^t \mid f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds \\
&\leq \int_0^t k_\varepsilon(s) \mid y_\varepsilon(s) \mid ds \\
&\leq M_{T,\varepsilon} \int_0^t \mid y_\varepsilon(s) \mid ds
\end{aligned}$$

Donc

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \leq T\ M_{T,\varepsilon}\ \ p_T(y_\varepsilon)$$

c-à-d

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in |\mathcal{N}_r^s|$$

D'où

$$(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon\ \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

D'après le lemme **3.4** donc, l'application ϕ est bien définie

Pour montrer que ϕ est contractante, on va montrer les quatre propriétés de la définition **3.6**

a) D'après **1')** $\forall (x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R})$, on a

$$(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R})$$

b) Tout d'abord on va écrire **(1)** en termes des représentants

$$(1_\varepsilon) \qquad \begin{cases} x'_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) & \zeta_\varepsilon \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \\ x_\varepsilon(t_0) = \zeta_\varepsilon & \zeta_\varepsilon \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Il est clair que $\phi_\varepsilon : C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

On note $(C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$ un espace topologique défini par $(q_{T,\varepsilon})_{T\in\mathbb{R}^+}$ avec $\forall y_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$q_{T,\varepsilon}(y_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid\ \ e^{-tM_{T,\varepsilon}}\}$$

On montre que ϕ_ε est contractante dans $((C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$

On a

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon)(t) &= \int_0^t (f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)))ds \\
&\leq \int_0^t \mid f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds \\
&\leq \int_0^t k_\varepsilon(s) \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid ds \\
&\leq \int_0^t M_{T,\varepsilon} \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid ds
\end{aligned}$$

On pose

$$H = e^{-tM_{T,\varepsilon}} \int_0^t M_{T,\varepsilon} \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid ds.$$

Donc

$$e^{-tM_{T,\varepsilon}} \mid \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon)(t) \mid \quad \leq \quad H$$

Or

$$\begin{aligned}
H &= e^{-tM_{T,\varepsilon}} \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{sM_{T,\varepsilon}} \left(e^{-sM_{T,\varepsilon}} \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid \right) ds \\
&\leq e^{-tM_{T,\varepsilon}} q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{sM_{T,\varepsilon}} ds \\
&\leq e^{-tM_{T,\varepsilon}} q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \left[M_{T,\varepsilon} e^{sM_{T,\varepsilon}} ds \right]_0^t \\
&\leq q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(1 - e^{-tM_{T,\varepsilon}}) \\
&\leq e^{-tM_{T,\varepsilon}} q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(e^{-tM_{T,\varepsilon}} - 1) \\
&\leq q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(1 - e^{-tM_{T,\varepsilon}}).
\end{aligned}$$

Alors

$$q_{T,\varepsilon}(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon)) \quad \leq \quad q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(1 - e^{-TM_{T,\varepsilon}})$$

Ainsi $\alpha_{T,\varepsilon} = (1 - e^{-TM_{T,\varepsilon}}) < 1$.

D'où ϕ_ε est contractante dans $((C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$

c) Soient $T \in \mathbb{R}^+$ et $y_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid \; e^{-tM_{T,\varepsilon}}\} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid \; e^{-tM_{T,\varepsilon}}\} \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \mid y_\varepsilon(t) \mid
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
e^{-TM_{T,\varepsilon}} p_T &\leq q_{T,\varepsilon} \\
&\leq p_T
\end{aligned}$$

d) Soit $T \in \mathbb{R}^+$, on a

$$(e^{T\,M_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \in \mathcal{E}_r^s$$

De plus

$$\begin{aligned}
(1/1 - \alpha_{T,\varepsilon})_\varepsilon &= (1/e^{-T\,M_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \\
&= (e^{T\,M_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \;\; \in \mathcal{E}_r^s
\end{aligned}$$

Donc d'après la définition **3.6**

$$\begin{aligned}
\phi : \tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\
x(t) = [x_\varepsilon(t)] &\longmapsto \phi(x)(t) = [\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t)]
\end{aligned}$$

est contractante .

D'après le théorème **3.7**, ϕ admet un point fixe $z = [z_\varepsilon]$ avec z_ε est un point fixe de ϕ_ε

Donc z est un solution de **(1)**

l'unicité:

On suppose que $y = [y_\varepsilon]$ est un autre point fixe de ϕ.

Alors

$$y_\varepsilon = \phi_\varepsilon(y_\varepsilon) + i_\varepsilon \text{ avec } i_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

c-à-d

$$(p_T(i_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$$

D'autre part, on a

$$z_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) \;=\; \int_0^t f_\varepsilon(s, z_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s))ds - i_\varepsilon(t).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mid z_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) \mid &= \mid i_\varepsilon(t) + \int_0^t f_\varepsilon(s, z_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s))ds \mid \\
&\leq \mid i_\varepsilon(t) \mid + \int_0^t \mid f_\varepsilon(s, z_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s)) \mid ds \\
&\leq \mid i_\varepsilon(t) \mid + M_{T,\varepsilon} \int_0^t \mid z_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid ds.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}
\mid z_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) \mid &\leq \mid i_\varepsilon(t) \mid \; e^{T\, M_{T,\varepsilon}} \\
p_T(z_\varepsilon - y_\varepsilon) &\leq p_T(i_\varepsilon)\, e^{T\, M_{T,\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Or $e^{T\, M_{T,\varepsilon}} \in |\mathcal{E}_r^s|$ et $(p_T(i_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$.

Donc

$$(p_T(z_\varepsilon - y_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$$

D'où

$$y = z \quad \text{dans } \mathcal{G}^s$$

3.4 Problème de Cauchy fractionnaire dans $\mathcal{G}^s$

Cette partie est consacrée à l'existence et l'unicité du problème de Cauchy fractionnaire. On sait qu'il existe plusieurs types de dérivées d'ordre fractionnaire, mais dans ce travail, nous utilisons l'approche de Caputo.

Nous considérons le problème de Cauchy d'ordre fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D_c^q u(t) = g(t, u(t)) & \\ u(0) = u_0 & u_0 \in \tilde{\mathbb{R}} \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec D_c^q la dérivée fractionnaire d'ordre $0 < q < 1$ au sens de Caputo, $u \in \mathcal{G}^s(J), g \in \mathcal{G}^s(J \times \mathbb{R})$, $J = [0, b],\ \ b \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 3.13 *:*

Si g est lipschitzienne, alors **(3.1)** admet une solution unique.

Preuve 3.14 *:*

Pour $u_0 \in \tilde{\mathbb{R}}, u \in \mathcal{G}^s(J)$, et $g \in \mathcal{G}^s(J \times \mathbb{R})$.
Le problème se réduit à trouver un point fixe unique de l'application suivante

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{\mathbb{R}} \ &\longrightarrow \ \tilde{\mathbb{R}} \\ u(t) \ &\longmapsto \ \phi(u)(t) = u_0 + I^q g(t, u(t)) \quad , \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

Maintenant nous vérifierons les hypothèses **a**, **b**, **c** et **d** de la définition **3.6**.
a) On pose

$$\forall t \in J \quad \phi_\varepsilon(u)(t) = u_{\varepsilon 0}) + I^q g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t))$$

Il est claire que $\phi_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$
$(\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R}), \tau)$ est un espace topologique défini par la famille des semi-normes $(p_T)_{T \in J}$ tel que

$$p_T(u_\varepsilon) = \sup_{t \in [0,T]} |u_\varepsilon(t)|, \ \ \textit{pour tout } u_\varepsilon \in C^\infty(J, \mathbb{R})$$

Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(J)$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(J)$, on a

$$\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) = u_{\varepsilon 0} + I^q g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t))$$

Puisque g est est lipschitzienne, alors

$$|g_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - g_\varepsilon(v_\varepsilon(t))| \quad \leq \quad k_\varepsilon(t)|l u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)|$$

D'autre part, on a

$$I^q g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t)) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} g_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) ds$$

Implique

$$|I^q g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t))| \quad \leq \quad \frac{b^q}{\Gamma(q)} \sup_{t \in [0,T]} |g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t))|$$

Donc

$$(I^q g_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(J \times \mathbb{R})$$

Alors

$$|\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t)| \ \ \leq \ \ |u_{\varepsilon 0}| \ + \ |I^q g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t))|$$

D'où

$$p_T(\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)) \in |\mathcal{E}_r^s|$$

c-à-d

$$(\phi_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(J)$$

b) On va écrire (**3.1**) en termes des représentants

$$(1_\varepsilon) \qquad \begin{cases} D^q_c u_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t)), \\ \\ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon} \qquad\qquad\qquad u_{0\varepsilon} \in X \end{cases}$$

On a $\phi_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$

On note la topologie τ_ε définie par la famille dessemi- normes $(q_{T,\varepsilon})_{T\in\mathbb{R}^+}$ tel que $\forall u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$, on a

$$q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \{\mid u_\varepsilon(t) \mid \ e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}\}$$

Pour tout $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(v_\varepsilon)(t) &= I^q(g_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t)) - g_\varepsilon(t, v_\varepsilon(t))) \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(g_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) - g_\varepsilon(s, v_\varepsilon(s)))ds \end{aligned}$$

Donc

$$\mid \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(v_\varepsilon)(t) \mid \ = \ \mid \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}(g_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) - g_\varepsilon(s, v_\varepsilon(s)))ds \mid$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(v_\varepsilon)(t) \mid &\leq \int_0^t \frac{(b)^{q-1}}{\Gamma(q)} M_{T,\varepsilon} \mid u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) \mid ds \\ &\leq \frac{(b)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^t M_{T,\varepsilon} \ \mid u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) \mid ds \end{aligned}$$

Soit

$$B \ = \ e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} \frac{(b)^{q-1}}{\Gamma(q)} \int_0^t M_{T,\varepsilon} \ \mid u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) \mid ds$$

alors, on a

$$e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} \mid \phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(v_\varepsilon)(t) \mid \ \leq \ B$$

Or,

$$\begin{aligned} B \ &= \ e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} \\ &\times \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{-s\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} e^{s\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} \mid u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) \mid ds \\ &\leq e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \\ &\times \int_0^t \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} M_{T,\varepsilon} e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}} ds \\ &\leq q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(1 - e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}) \end{aligned}$$

Alors
$$q_{T,\varepsilon}(\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)-\phi_\varepsilon(v_\varepsilon)) \leq q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon-v_\varepsilon)(1-e^{-b\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}})$$
Ainsi $(1-e^{-b\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}})<1$.

D'où, ϕ_ε est contractante dans $(\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R}),\tau_\varepsilon)$.

c) Pour tout $T\in J$ et $u_\varepsilon\in C^\infty(J,\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\{\| u_\varepsilon(t)\|_X \ e^{-\frac{b^q}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}\} &\leq \sup_{t\in[0,T]}\{| u_\varepsilon(t) | \ e^{-t\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}\}\\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} | u_\varepsilon(t) |\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{-\frac{b^q}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}p_T &\leq q_{T,\varepsilon}\\ &\leq p_T\end{aligned}$$

d) Soit $T\in J$, on a
$$(e^{\frac{b^q}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}})_\varepsilon\in\mathcal{E}_r^s$$

Et
$$(1/1-(1-e^{-b\frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}}))_\varepsilon=(e^{\frac{b^q}{\Gamma(q)}M_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \ \in\mathcal{E}_r^s$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\phi:\tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}\\ u(t)=[u_\varepsilon(t)] &\longmapsto \phi(u)(t)=[(\phi_\varepsilon(u_\varepsilon)(t))_\varepsilon]\end{aligned}$$

est contractante dans $\tilde{\mathbb{R}}$.

D'après le théorème **3.7**, ϕ admet un point fixe $u=[(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ avec u_ε un point fixe de ϕ_ε.

Donc u est une solution de **(3.1)**, et la solution est unique.

En effet:

Soit $v=[(v_\varepsilon)_\varepsilon]$ un autre point fixe de ϕ, on a

$$v_\varepsilon=\phi_\varepsilon(v_\varepsilon)+i_\varepsilon \text{ avec } i_\varepsilon\in\mathcal{N}^s(J)$$

Donc
$$(p_T(i_\varepsilon))_\varepsilon\in|\mathcal{N}_r^s|$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(t)-v_\varepsilon(t) &= I^q g_\varepsilon(t,w_\varepsilon(t))-I^q g_\varepsilon(t,v_\varepsilon(t))-i_\varepsilon(t)\\ &= I^q[g_\varepsilon(t,w_\varepsilon(t))-g_\varepsilon(t,v_\varepsilon(t))]-i_\varepsilon(t)\\ &= -i_\varepsilon+\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\Big(g_\varepsilon(s,w_\varepsilon(s))-g_\varepsilon(s,v_\varepsilon(s))\Big)ds\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mid w_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t) \mid &= \mid -i_\varepsilon + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \Big(g_\varepsilon(s, w_\varepsilon(s)) - g_\varepsilon(s, v_\varepsilon(s)) \Big) \mid ds \\
&\leq \mid i_\varepsilon \mid + \int_0^t M_{T,\varepsilon} \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} \mid w_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) \mid ds
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mid w_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t) \mid \;=\; \mid i_\varepsilon \mid \; e^{M_{T,\varepsilon} \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} t}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mid w_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t) \mid &\leq p_T(i_\varepsilon) \, e^{M_{T,\varepsilon} \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} t} \\
p_T(w_\varepsilon - v_\varepsilon) &\leq p_T(i_\varepsilon) \, e^{M_{T,\varepsilon} \frac{b^{q-1}}{\Gamma(q)} t}
\end{aligned}$$

Et puisque

$$e^{M_{T,\varepsilon} \frac{b^q}{\Gamma(q)}} \in \mathcal{E}_r^s \quad et \quad (p_T(i_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$$

Donc

$$(p_T(w_\varepsilon - v_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}^r|$$

D'où,

$$w = v \quad dans\ \mathcal{G}^s$$

Ce chapitre a été destiné à l'introduction de la notion de point fixe dans le contexte de la théorie des fonctions généralisées, à travers la définition de la contraction généralisée. Puis on a illustré ceci par des problèmes de Cauchy-Lipschitz, avec une donnée initiale un nombre réel généralisé.

Chapitre 4

Problème d'évolution dans $\mathcal{G}^S$

Dans ce chapitre on présente deux exemples de problèmes d'évolution, dans le cadre des fonctions généralisées de Colombeau: Le premier a été traité par la notion de C_0-semi-groupe généralisée dite C_0-semi-groupe de Colombeau, sachant que la notion de semi-groupe joue un rôle crucial pour l'étude des problème d'évolution. Comme nous le savons, de nombreuses recherches sont consacrées à la relation de liaison entre semi-groupe et son générateur infinitésimal, cette relation est donnée par le théorème **3.1** dans [3]. Et le second est traité par le calcul fractionnaire, et plus précisément avec la dérivée fractionnaire de Caputo.

4.1 Semi-groupe dans l'algèbre de Colombeau

Suite à la tentative de nombreux chercheurs qui consiste à donner la relation entre semi-groupe et son générateur infinitésimal. Dans cette section nous discutons la méthode de construire l'algèbre de Colombeau pour donner un sens aux semi-groupes généralisés.

Soit X un espace localement convexe défini par la famille des semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.

On rappelle que:

$$\mathcal{E}_M^s(X) := \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (X)^{(0,1)} / \exists m \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \quad p_i(x_\varepsilon) = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{-m}) \quad \}$$

$$\mathcal{N}(X) := \{(x_\varepsilon)_\varepsilon \in (X)^{(0,1)} / \forall m \in \mathbb{N}^s, \forall i \in I, \quad p_i(x_\varepsilon) = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^{m}) \quad \}$$

• $\mathcal{E}_M^s(X)$ est une algèbre

• $\mathcal{N}(X)$ est un idéal de $\mathcal{E}_M^s(X)$

L'algèbre de Colombeau sur X est définie par :

$$\tilde{X} = \mathcal{E}_M^s(X)/\mathcal{N}^s(X)$$

Définition 4.1 *: [52]*

• $\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est l'espace des applications $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ fortement continues

$S_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}_c(X)$, $\varepsilon \in (0,1)$ avec la propriété: pour tout $T > 0$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t\in[0,T)} \|S_\varepsilon(t)\| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^a) \qquad \textbf{(1)}$$

• $\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est l'espace des applications $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ fortement continues
$N_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}_c(X), \ \ \varepsilon \in (0,1)$ satisfaisant:
pour tout $b \in \mathbb{R}$ et $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T)} \|N_\varepsilon(t)\| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^b) \qquad \textbf{(2)}$$

il existe $t_0 > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t<t_0} \|\frac{N_\varepsilon(t)}{t}\| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^a) \qquad \textbf{(3)}$$

il existe une suite $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathcal{L}_c(X)$ et $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{N_\varepsilon(t)}{t} H_\varepsilon x, \quad x \in X, \quad \varepsilon < \varepsilon_0 \qquad \textbf{(4)}$$

pour tout $b > 0$,

$$\|H_\varepsilon\| = O_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\varepsilon^b) \qquad \textbf{(5)}$$

Remarque 4.2 *: [52]*

On remarque que, à cause de **(3)**, il suffit que **(4)** soit valable pour tout $x \in D$ où D est un sous espace dense dans X.

Proposition 4.3 *: [52]*

$\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est une algèbre et $\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$ est un idéal de $\mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}_c(X))$.
L'algèbre des semi-groupes généralisés sur X est définie par

$$\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X)) = \mathcal{SE}_M(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))/\mathcal{SN}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$$

Les éléments de $\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$ sous la forme $S = [S_\varepsilon]$, avec $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de S.

Définition 4.4 *: [52]*

$S \in \mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$ est appelé un C_0-semi groupe de Colombeau s'il admet un représentant $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ tel que, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, S_ε est un C_0-semi-groupe, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.
Dans la suite on utilise seulement les représentants $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ de C_0-semi-groupe S qui sont des C_0-semi-groupes, pour ε assez petit.

Proposition 4.5 *: [52]*

Soit $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ un représentant de C_0-semi-groupe S de Colombeau, de générateur infinitésimale $A_\varepsilon, \ \ \varepsilon < \varepsilon_0$, et $\tilde{A}_\varepsilon, \ \ \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_0$, respectivement, où ε_0 et $\tilde{\varepsilon}_0$ correspondent (dans le sens de la définition **4.4** à $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$, respectivement.

Alors, $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_0, \tilde{\varepsilon}_0\}$, $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ peut être étendu en un élément de $\mathcal{L}(X)$, noté par $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$.
Par suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| = O_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^a) \qquad \textbf{(6)}$$

Maintenant on définit le générateur infinitésimal du C_0-semi groupe S de Colombeau.
Noté par $\mathcal{A}$ comme étant la paire $((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon)$ où A_ε un opérateur linéaire fermé de X à domaine dense $D(A_\varepsilon) \subset X$, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. On introduit la relation d'équivalence

$$((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon) \sim ((\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon, (D(\tilde{A}_\varepsilon))_\varepsilon).$$

S'il existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ ils existent $C > 0$ et $\varepsilon_a \leq \varepsilon_0$ tel que, pour $x \in A(A_\varepsilon)$, $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| \leq C\varepsilon^a\|x\|$, $x \in D(A_\varepsilon), \varepsilon \leq \varepsilon_a$.
Puisque A_ε est à domaine dense dans X, $R_\varepsilon := A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ peut être étendu à un opérateur dans $\mathcal{L}_c(X)$ satisfaisant $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| = O(\varepsilon^a)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. un tel opérateur R_ε est appelé un opérateur négligeable.
On note par A l'élément de l'espace quotient $\mathcal{A}/\sim$. D'après la définition **4.1**, les résultats suivants ont un sens.

Définition 4.6 *: [52]*

$A \in \mathcal{A}/\sim$ est un générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe généralisé S s'il existe un représentant $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ de A tel que A_ε est un générateur infinitésimal de S_ε, pour ε assez petit.

Proposition 4.7 *: [52]*

Soit S un C_0-semi-groupe généralisée dont le générateur infinitésimal est A. Alors il existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que:
(a) l'application $t \longmapsto S_\varepsilon(t)x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est continue pour tout $x \in X$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$
(b)

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_t^{t+h} S_\varepsilon(s)x ds = S_\varepsilon(t)x, \qquad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad x \in X$$

(c)

$$\int_0^t S_\varepsilon(s)x ds \quad \in D(A_\varepsilon), \qquad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad x \in X$$

(d) Pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$, $t \geq 0$ $S_\varepsilon(t)x \in D(A_\varepsilon)$ et

$$\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)x = A_\varepsilon S_\varepsilon(t)x = S_\varepsilon(t)A_\varepsilon x, \qquad \varepsilon < \varepsilon_0 \qquad \textbf{(7)}$$

(e) Soit $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ des représentants du C_0-semi-groupe généralisé S, dont les générateurs infinitésimaux sont A_ε et $\tilde{A}_\varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, respectivement. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$

$$\|\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t) - \tilde{A}_\varepsilon S_\varepsilon(t)\| = O_{\varepsilon \longrightarrow 0}(\varepsilon^a) \qquad \textbf{(8)}$$

(f) Pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$ et tout $t, s \geq 0$,

$$S_\varepsilon(t)x - S_\varepsilon(s)x = \int_s^t S_\varepsilon(\tau)A_\varepsilon x d\tau = \int_s^t A_\varepsilon S_\varepsilon(\tau)x d\tau$$

Théorème 4.8 *: [52]*

Soient S et $\tilde{S}$ deux C_0-semi-groupes dont les générateurs infinitésimaux sont A et $\tilde{A}$, respectivement.
Si $A = \tilde{A}$ alors

$$S = \tilde{S}.$$

Remarque 4.9 *: [11]*

On suppose que les assertions de la définition **3.1** sont satisfaites. De plus, on suppose une hypothèse plus forte que **(1)**, ils existent $M > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tels que

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq M\varepsilon^a e^{\alpha_\varepsilon t}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad t \geq 0, \quad \textit{où} \ \ 0 < \alpha_\varepsilon < \alpha, \ \textit{pour certain} \ \ \alpha > 0$$

On obtient donc une sous-algèbre de $\mathcal{SG}(\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(X))$. Pour cette sous algèbre le théorème de Hille-Yosida est valable dans le sens usuel.

4.2 Problème d'évolution

Le problème d'évolution est définit comme suit

$$\begin{cases} x'(t) \ = \ A\, x(t) + f(t, x(t)) & \\ x(t_0) \ = \ x_0 = \zeta & \zeta \in \tilde{\mathbb{R}}, t_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec $f = [(f_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $x = [(x_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, et A est un générateur infinitésimal de C$_0$- semi-groupe $S(t)$ [11].

Théorème 4.10 *:*

Si f est lipschitzienne, alors le problème **(4.1)** admet une solution unique.

Preuve 4.11 *:*

Pour $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}, f \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}), x \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$.

Le problème **(4.1)** se réduit à trouver un point fixe unique de ϕ, avec

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ x(t) &\longmapsto \phi(x)(t) = S(t)\zeta + \int_{t_0}^{t} S(t-s) f(s, x(s)) ds \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

On montre que ϕ est contractante dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$.

a)On montre que ϕ est bien définie.

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \phi_\varepsilon(x)(t) = S_\varepsilon(t)\zeta_\varepsilon + \int_0^t S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) ds$$

Et

$$N_{T,\varepsilon} = M_{T,\varepsilon}\, M_\alpha \text{ , where } M_\alpha = \sup_{t \in [0,T]} |M\varepsilon^a e^{\alpha_\varepsilon t}|$$

Il est claire que $\phi_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique défini par la famille des semi-normes $(p_T)_{T \in \mathbb{R}^+}$ avec

$$p_T(x_\varepsilon) = \sup_{t \in [0,T]} \mid x_\varepsilon(t) \mid$$

Soient $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^+)$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\mid \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) \mid \leq \mid S_\varepsilon(t)\zeta_\varepsilon \mid + \int_0^t \mid S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,T]} \mid \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) \mid \quad &\leq \quad M_\alpha \mid \zeta_\varepsilon \mid \\ &+ \quad T\, M_\alpha \sup_{t \in [0,T]} \mid f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) \mid \end{aligned}$$

Donc

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \; \in \; |\mathcal{E}_r^s|$$

c-à-d

$$(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon \; \in \; \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}).$$

Alors la condition **i)** du lemme **3.4** est vérifiée.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) &= \int_0^t S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s))ds \\
&- \int_0^t S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds \\
&= \mid \int_0^t S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s))ds \\
&- \int_0^t S_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds \mid \\
&\leq \int_0^t \mid S_\varepsilon(t-s) \mid \mid f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds \\
&\leq M_\alpha \int_0^t \mid f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) \mid ds \\
&\leq M_\alpha \int_0^t M_{T,\varepsilon} \mid y_\varepsilon(s) \mid ds \\
&\leq \int_0^t N_{T,\varepsilon} \mid y_\varepsilon(s) \mid ds
\end{aligned}$$

Donc

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \leq T\ N_{T,\varepsilon}\ p_T(y_\varepsilon)$$

Part suite

$$p_T(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in |\mathcal{N}_r^s|$$

D'où

$$(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon))_\varepsilon\ \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

D'après le lemme **3.4**, l'application ϕ est bien définie.

b) Écrivons **(4.1)** en termes des représentants

$$(1_\varepsilon) \quad \begin{cases} x'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon \zeta_\varepsilon + f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) \\ \\ x_\varepsilon(t_0) = \zeta_\varepsilon \qquad\qquad \zeta_\varepsilon \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Il est claire que $\phi_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

On note $((\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$ est un espace topologique défini par la familles des semi-normes $(q_{T,\varepsilon})_{T \in \mathbb{R}^+}$

où $\forall y_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$q_{T,\varepsilon}(y_\varepsilon) = \sup_{t \in [0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid\ e^{-tN_{T,\varepsilon}}\}$$

Soient $(x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^+)$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon)(t) &= \int_0^t S_\varepsilon(t-s) \\
&\quad [(f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))]ds.
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\mid (\phi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon))(t) \mid \leq M_\alpha \int_0^t k_\varepsilon(s) \mid (x_\varepsilon - y_\varepsilon)(s)) \mid ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{-tN_{T,\varepsilon}} \mid (\phi_\varepsilon x_\varepsilon - \phi_\varepsilon y_\varepsilon)(t) \mid &\leq e^{-tN_{T,\varepsilon}} \\ &\quad \int_0^t N_{T,\varepsilon} \mid (x_\varepsilon - y_\varepsilon)(s) \mid ds. \end{aligned}$$

Soit

$$\triangle = e^{-tN_{T,\varepsilon}} \int_0^t N_{T,\varepsilon} \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid ds$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \triangle &= e^{-tN_{T,\varepsilon}} \int_0^t N_{T,\varepsilon} e^{sN_{T,\varepsilon}} (e^{-sM_{T,\varepsilon}} \mid x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) \mid) ds \\ &\leq e^{-tN_{T,\varepsilon}} q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{sN_{T,\varepsilon}} ds \\ &\leq q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(1 - e^{-tN_{T,\varepsilon}}). \end{aligned}$$

Donc

$$q_{T,\varepsilon}(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(y_\varepsilon)) \leq (1 - e^{-TN_{T,\varepsilon}}) q_{T,\varepsilon}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)$$

D'où, ϕ_ε est contractante dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$

c) $\forall T \in \mathbb{R}^+$ et $x_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid \ e^{-tN_{T,\varepsilon}}\} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \{\mid y_\varepsilon(t) \mid \ e^{-tN_{T,\varepsilon}}\} \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \mid y_\varepsilon(t) \mid \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{-TN_{T,\varepsilon}} p_T &\leq q_{T,\varepsilon} \\ &\leq p_T \end{aligned}$$

d) Soit $T \in \mathbb{R}^+$, on a

$$(e^{T\,N_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \in \mathcal{E}_r^s$$

Et

$$(1/e^{-T\,N_{T,\varepsilon}})_\varepsilon = (e^{T\,N_{T,\varepsilon}})_\varepsilon \ \in \mathcal{E}_r^s$$

Donc d'après la définition **3.6**,

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{\mathbb{R}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ x(t) = [(x_\varepsilon(t))_\varepsilon] &\longmapsto \phi(x)(t) = [(\phi_\varepsilon(x_\varepsilon)(t))_\varepsilon] \end{aligned}$$

est contractante .

D'après le théorème **3.7**, ϕ admet un point fixe $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ avec u_ε un point fixe de ϕ_ε.

Donc u est une solution de (**4.1**).

Pour l'unicité on suppose que $w = [(w_\varepsilon)_\varepsilon]$ est un autre point fixe de ϕ alors, on a

$$w_\varepsilon = \phi_\varepsilon(w_\varepsilon) + n_\varepsilon \text{ avec } n_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

Donc

$$(p_T(n_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}^r|$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t) &= \int_0^t f_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, w_\varepsilon(s)) ds - n_\varepsilon(t) \\ \mid u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t) \mid &= \mid \int_0^t f_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, w_\varepsilon(s)) ds - n_\varepsilon(t) \mid \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mid u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t) \mid &\leq \mid n_\varepsilon(t) \mid + \int_0^t \mid f_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, w_\varepsilon(s)) \mid ds \\ &\leq \mid n_\varepsilon(t) \mid + M_{T,\varepsilon} \int_0^t \mid u_\varepsilon(s) - w_\varepsilon(s) \mid ds \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mid u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t) \mid \leq \mid n_\varepsilon(t) \mid \; e^{T\, M_{T,\varepsilon}}$$

Ainsi

$$p_T(u_\varepsilon - w_\varepsilon) \leq p_T(n_\varepsilon)\, e^{T\, M_{T,\varepsilon}}$$

Puisque

$$e^{T\, M_{T,\varepsilon}} \in |\mathcal{E}_M^r| \quad et \quad (p_T(n_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$$

alors

$$(p_T(u_\varepsilon - w_\varepsilon))_\varepsilon \in |\mathcal{N}_r^s|$$

c-à-d

$$(u_\varepsilon - w_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$$

D'où

$$w = u \text{ dans } \mathcal{G}^s(\mathbb{R}).$$

Chapitre 5

Solution de l'équation de la chaleur dans $\mathcal{G}^S$ par la notion de point fixe

Cette section est consacrée à la résolution de l'équation de la chaleur dans l'algèbre de Colombeau $\mathcal{G}^s([0,\infty)\times\mathbb{R})$ en utilisant la notion de point fixe. Nous introduisons l'inégalité de Gronwall pour montrer l'unicité de la solution

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + g(u(t,x)) & x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $g = class\ ((g_\varepsilon)_\varepsilon)$ tel que $\| \bigtriangledown g_\varepsilon(x) \|_{L^\infty} < c_2$ et $\| u_{0\varepsilon}(x) \|_{L^\infty} < c_1$.

Théorème 5.1 *:*

if g est lipschitzienne, alors (**5.1**) admet une solution unique .

Preuve 5.2 *:*

Le problème (**5.1**) se réduit à trouver un point fixe unique de l'application suivante

$$\begin{array}{rcll} T:\mathcal{G}([0,\infty)\times\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{G}([0,\infty)\times\mathbb{R}) & \textit{tel que} \quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ u(t,x) & \longmapsto & T(u(t,x)) & \end{array}$$

Avec

$$\begin{aligned} T(u(t,x)) &= E(t,x) * u_0(x) + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} E(t-\tau, x-y) g(u(\tau,x)) dy\, d\tau \end{aligned}$$

Et

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\,\pi\,t)^{1/2}}\, exp(-\frac{x^2}{4\,t}) & ,t\in\mathbb{R}^+,\ x\in\mathbb{R} \\ 0 & ,t=0 \end{cases}$$

Tout d'abord on montre que T est bien définie.

i) On pose

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x)) &= E(t,x) * u_{0\varepsilon}(x) + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} E(t-\tau, x-y) g_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau,x)) dy\, d\tau \end{aligned}$$

Ainsi $T_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note la topologie τ définie par la famille de semi-normes $(p_T)_T$ tel que

$$p_T(u_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \{\| u_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty}\}$$

Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x))| \;&\leq\; |E(t,x) * u_{0\varepsilon}(x)| + \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |E(t-\tau, x-y) g_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau,x))| dy\, d\tau \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \| T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,.)) \|_{L^\infty} \;&\leq\; \| E(t,.) \|_{L^1} \| u_{0\varepsilon} \|_{L^\infty} + \\ & \int_0^t [\| E(t-\tau, x-.) \|_{L^1} \| \bigtriangledown g_\varepsilon(\theta u_\varepsilon) \|_{L^\infty} \\ & \| u_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty}]\, d\tau \\ &\leq\; \| E(t,.) \|_{L^1} \| u_{0\varepsilon} \|_{L^\infty} + \\ & \int_0^t [\| E(t-\tau, x-.) \|_{L^1} \| \bigtriangledown g_\varepsilon(\theta u_\varepsilon) \|_{L^\infty} \\ & \| u_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty}]\, d\tau \\ &\leq\; \| E(t,.) \|_{L^1} \| u_{0\varepsilon} \|_{L^\infty} + \\ & \int_0^t [\| E(t-\tau, x-.) \|_{L^1} \| \bigtriangledown g_\varepsilon(\theta u_\varepsilon) \|_{L^\infty} \\ & \| u_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty}]\, d\tau \end{aligned}$$

Donc,

$$p_T(T_\varepsilon(u_\varepsilon)) \;\leq\; c\, p_T(u_{0\varepsilon}) + T\, c\, c_2\, c\, p_T(u_\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} & p_T(T_\varepsilon(u_\varepsilon)) \in |\mathcal{E}^s_r| \\ \Rightarrow \qquad & (T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

ii) Soient $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, On a

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - T_\varepsilon(u_\varepsilon) \;&=\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}} E(t-\tau, x-y)[\\ & (g_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - g_\varepsilon(u_\varepsilon))(\tau, y)] dy\, d\tau \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon)) - T_\varepsilon(u_\varepsilon))| \;&\leq\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |E(t-\tau, x-y)[\\ & (g_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - g_\varepsilon(u_\varepsilon))(\tau, y)]| dy\, d\tau \end{aligned}$$

Soit

$$D := \| (T_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - T_\varepsilon(u_\varepsilon))(t,.) \|_{L^\infty}$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
D &\leq \int_0^t [\| E(t-\tau,.) \|_{L^1} c_\varepsilon(\tau) \| v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty}] d\tau \\
&\leq \int_0^t [\| E(t-\tau,.) \|_{L^1} c_\varepsilon(\tau) \| v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty}] d\tau \\
&\leq c_T \int_0^t [\| E(t-\tau,.) \|_{L^1} \| v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty}] d\tau
\end{aligned}
$$

Alors

$$p_T(T_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - T_\varepsilon u_\varepsilon)) \leq c\, c_T\, T\, p_T(v_\varepsilon)$$

D'où,

$$T_\varepsilon(u_\varepsilon + v_\varepsilon) - T(u_\varepsilon) \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Alors T est bien définie.

Pour montrer que T est contractante, on va montrer les quatre propriétés de la définition **3.6**

a)D'après **i)**, $\forall (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$(T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

b) (**5.1**) en terme de représentants est :

$$
(P_\varepsilon)\begin{cases}
\partial_t u_\varepsilon(t,x) = \Delta u_\varepsilon(t,x) + g_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x)),\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\
\\
u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x) = v_\varepsilon(x)
\end{cases}
$$

Il est claire que $T_\varepsilon : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note la topologie τ_ε définie par la famille de semi-normes $(q_{T,\varepsilon})_{T \in \mathbb{R}^+}$ tel que $\forall u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{t \in [0,T]} \{\, e^{-M_T t} \ \| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty} \}$$

avec $M_{T,\varepsilon} = c_T \ \| E(t,.) \|_{L^1}$.

Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon, (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$
\begin{aligned}
T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x)) - T_\varepsilon(v_\varepsilon(t,x)) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} & E(t-\tau, x-y) \\
& [g_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau,y)) - g_\varepsilon(v_\varepsilon(\tau,y))] dy\, d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x)) - T_\varepsilon(v_\varepsilon(t,x))| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} & |E(t-\tau, x-y) \\
& [g_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau,y)) - g_\varepsilon(v_\varepsilon(\tau,y))]| dy\, d\tau
\end{aligned}
$$

Soit

$$Q := \| (T_\varepsilon(u_\varepsilon) - T_\varepsilon(v_\varepsilon))(t,.) \|_{L^\infty}$$

On obtient

$$Q \leq \int_0^t \| E(t-\tau,.) \|_{L^1} c_\varepsilon(\tau) \| (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau$$

$$\leq \int_0^t \| E(t-\tau,.) \|_{L^1} c_\varepsilon(\tau) \| (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau$$

$$\leq c_T \int_0^t \| E(t-\tau,.) \|_{L^1} \| (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau$$

$$\Rightarrow \quad Q \leq M_{T,\varepsilon} \int_0^t \| v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{-M_{T,\varepsilon}\, t} Q &\leq e^{-M_{T,\varepsilon}\, t} \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{M_{T,\varepsilon}\, \tau} e^{-M_{T,\varepsilon}\, \tau} \| v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau \\ &\leq e^{-M_{T,\varepsilon}\, t} q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \int_0^t M_{T,\varepsilon} e^{M_{T,\varepsilon}\, \tau} d\tau \\ &\leq q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(1 - e^{-M_{T,\varepsilon}\, t}) \end{aligned}$$

D'où,

$$q_{T,\varepsilon}(T_\varepsilon(u_\varepsilon) - T_\varepsilon(v_\varepsilon)) \leq q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(1 - e^{-M_{T,\varepsilon} T})$$

Puisque $(1 - e^{-M_{T,\varepsilon} T}) < 1$

Alors T_ε est contractante dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \tau_\varepsilon)$

c) $\forall T \in \mathbb{R}^+$ et $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}$,on a

$$\begin{aligned} e^{-M_{T,\varepsilon} T} \sup_{t\in[0,T]} \{\| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty}\} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \{\| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty} \; e^{-M_{T,\varepsilon} t}\} \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{-M_{T,\varepsilon} t} p_T &\leq q_{T,\varepsilon} \\ &\leq p_T \end{aligned}$$

d) Soit $\forall T \in \mathbb{R}^+$,on a

$$(e^{M_{T,\varepsilon} T})_\varepsilon \in |\mathcal{E}_r^s|$$

Et

$$(\frac{1}{1 - e^{-M_{T,\varepsilon} T}})_\varepsilon \; | \in \mathcal{E}_r^s|$$

D'après la définition **3.6**,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{G}([0,\infty) \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{G}([0,\infty) \times \mathbb{R}) \\ u(t,x)) = [u_\varepsilon(t,x)] &\longmapsto T(u(t,x) = [T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,x))] \end{aligned}$$

est contractante.

Par le Théorème **3.7**, alors T admet un point fixe $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ avec u_ε un point fixe de T_ε.

De plus, u est une solution unique **(5.1)**.

Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions au problème (**5.1**).
Si $v = [(v_\varepsilon)_\varepsilon]$ un autre point fixe de T, on a

$$v_\varepsilon = T_\varepsilon(v_\varepsilon) + n_\varepsilon$$

avec $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On a

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(t,x) \quad &= \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} E(t-\tau, x-y)[\\ & \qquad g_\varepsilon(u_\varepsilon(\tau,y)) - g_\varepsilon(v_\varepsilon(\tau,y))]dy\, d\tau + n_\varepsilon(t,x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty} \;&\leq\; \int_0^t \| E(t-\tau,.) \|_{L^1} c_\varepsilon(\tau) \\ & \quad \| (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau + \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty} \\ &\leq\; M_T \int_0^t \| u_\varepsilon(\tau,.) - v_\varepsilon(\tau,.) \|_{L^\infty} d\tau + \\ & \quad \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty} \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty} \leq \; M_T \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty}$$

Puisque $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Donc ,

$$u = v$$

Ainsi, la solution est unique dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Chapitre 6

Solution de l'équation de Sine-Gordon dans $\mathcal{G}^s$ par la méthode de point fixe

Cette section est consacrée à la résolution de l'équation Sine-Gordon dans l'algèbre de Colombeau $\mathcal{G}^s([0,\infty)\times\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \Big(\partial_t^2-\partial_x^2\Big)u(t,x)=2\sin(u(t,x)), \qquad x\in\mathbb{R},\ \ t\in\mathbb{R}^+ \\ u(0,x)=a(x), \quad x\in\mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x)=b(x), \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Théorème 6.1 *:*

Le problème (6.1) admet une solution unique.

Preuve 6.2 *:*

Le problème se réduit à trouver un point fixe de l'application suivante

$$T:\begin{cases} \mathcal{G}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\Big)\longrightarrow\mathcal{G}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\Big) \\ \qquad\qquad u\mapsto T(u), \end{cases}$$

tel que, $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, on a

$$T(u(t,x))=\frac{1}{2}\Big(a(x-t)+a(x+t)\Big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}b(x)dx+\int_0^t\int_{x+s-t}^{x+t-s}\sin\Big(u(s,z)\Big)dzds$$

Soit $K_0=[-k,k]$ un intervalle compact.

Pour $0\le t\le s\le k$, les intervalles I_t et K_s sont definis par

$$\begin{aligned} I_t &= \Big\{x\in\mathbb{R},\ /\ |x|\le k-t\Big\} \\ K_s &= \Big\{(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\ /\ 0\le t\le s,\ \ ,\ x\in I_t\Big\} \end{aligned}$$

Maintenant nous vérifierons les hypothèses **a**, **b**, **c** et **d** de la définition **3.6**.

a)

• On pose

$$T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,x))=\frac{1}{2}\Big(a_\varepsilon(x-t)+a_\varepsilon(x+t)\Big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}b_\varepsilon(x)dx+\int_0^t\int_{x+s-t}^{x+t-s}\sin\Big(u_\varepsilon(s,z)\Big)dzds$$

On a T_ε est définie sur $\mathcal{C}^\infty\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$ à valeur dans $\mathcal{C}^\infty\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$.
$\Bigg(\mathcal{C}^\infty\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big), \tau\Bigg)$ est un espace topologique défini par la famille des semi-normes $(p_T)_{T\in[0,k]}$, tel que

$$p_T(u_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \parallel u_\varepsilon(t,.) \parallel_{L^\infty(K_t)} \Big\}$$

Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$, alors

$$\begin{aligned} \parallel T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big) \parallel_{L^\infty(K_t)} &\leq \parallel a_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ \parallel b_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ 2t \int_0^t \parallel \sin\Big(u_\varepsilon(s,.)\Big) \parallel_{L^\infty(K_s)} ds. \end{aligned}$$

Puisque $|\sin(t)| \leq |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \parallel T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big) \parallel_{L^\infty(K_t)} &\leq \parallel a_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ \parallel b_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ 2t \int_0^t \parallel u_\varepsilon(s,.) \parallel_{L^\infty(K_s)} ds, \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \parallel T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big) \parallel_{L^\infty(K_t)} \Big\} &\leq \parallel a_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ \parallel b_\varepsilon \parallel_{L^\infty(I_0)} \\ &+ 2T^2 \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \parallel u_\varepsilon(s,.) \parallel_{L^\infty(K_t)} \Big\} \end{aligned}$$

Donc,

$$p_T\Big(T_\varepsilon(u_\varepsilon)\Big) \leq p_T(a_\varepsilon) + p_T(b_\varepsilon) + 2T^2 p_T(u_\varepsilon),$$

D'où

$$\begin{aligned} & p_T\Big(T_\varepsilon(u_\varepsilon)\Big) \in |\mathcal{E}^s_r| \\ \Rightarrow \quad & \Big(T_\varepsilon(u_\varepsilon)\Big)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s_M\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big). \end{aligned}$$

• Soient $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$ et $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$, alors on a

$$\begin{aligned} T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,x) + v_\varepsilon(t,x)\Big) - T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,x) &= \int_0^t \int_{x+s-t}^{x+t-s} \Big(\sin\left(u_\varepsilon(s,z) + v_\varepsilon(s,z)\right) \\ &- \sin\left(u_\varepsilon(s,x)\right) \Big) dz ds \end{aligned}$$

Implique que

$$\begin{aligned} \parallel T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.) + v_\varepsilon(t,x)\Big) - T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,.) \parallel_{L^\infty(K_t)} &= 2T \int_0^t \parallel \sin\Big(u_\varepsilon(s,.) \\ &+ v_\varepsilon(s,.)\Big) \\ &- \sin\Big(u_\varepsilon(s,.)\Big) \parallel_{L^\infty(K_t)} ds, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\| T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)+v_\varepsilon(t,x)\Big)-T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,.)\|_{L^\infty(K_t)} &= 2T\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.)\\ &+ v_\varepsilon(s,.)\\ &- u_\varepsilon(s,.)\|_{L^\infty(K_t)}\,ds\end{aligned}$$

On trouve,

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\{\| T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,.)+v_\varepsilon(t,x))-T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,.)\|_{L^\infty(K_t)}\} &= 2T\int_0^t \sup_{0\le t\le T}\{\| u_\varepsilon(s,.)\\ &+ v_\varepsilon(s,.)-u_\varepsilon(s,.)\|_{L^\infty(K_t)}\}ds\end{aligned}$$

Par suite

$$\sup_{0\le t\le T}\{\| T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)+v_\varepsilon(t,x)\Big)-T_\varepsilon(u_\varepsilon)(t,.)\|_{L^\infty(K_t)}\} \le 2T^2\sup_{0\le t\le T}\{\| v_\varepsilon(s,.)\|_{L^\infty(K_t)}\}ds$$

Donc,

$$\begin{aligned}& p_T(T_\varepsilon(u_\varepsilon+v_\varepsilon)-T_\epsilon(u_\varepsilon)) \le 2\,T^2\,p_Tv_\varepsilon\\ \Rightarrow\quad & p_T(T_\varepsilon(u_\varepsilon+v_\varepsilon)-T_\epsilon(u_\varepsilon)) \in |\mathcal{N}_r^s|\\ \Rightarrow\quad & T_\varepsilon(u_\varepsilon+v_\varepsilon)-T_\epsilon(u_\varepsilon) \in \mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R}\Big).\end{aligned}$$

Par le lemme **3.4**, alors T est bien définie.

b) Le problème **(6.1)** en termes des représentants

$$\begin{cases}\Big(\partial_t^2-\partial_x^2\Big)u_\epsilon = 2\sin(u_\epsilon), & x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}^+\\ u_\epsilon(x,0)=a_\epsilon(x), & x\in\mathbb{R},\\ \partial_t u_\epsilon(0,x)=b_\epsilon(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Il est claire que T_ε est définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R}))$ à valeur dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\Big(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R}),\tau_\varepsilon\Big)$ est un espace topologique défini par la famille des semi-normes $(q_{T,\varepsilon})_{T\in\mathbb{R}^+}$, tel que :

$\forall u_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$q_{T,\varepsilon}(y_\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-2tT}\| u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(K_t)}\}$$

Soient $(u_\varepsilon)_\varepsilon,(v_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

$$T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,x)\Big)-T_\varepsilon\Big(v_\varepsilon(t,x)\Big)=\int_0^t\int_{x+s-t}^{x+t-s}\Big(\sin\big(u_\varepsilon(s,z)\big)-\sin\big(v_\varepsilon(s,x)\big)\Big)dzds,$$

Cela implique

$$\begin{aligned}\| T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big)-T_\varepsilon\Big(v_\varepsilon(t,.)\Big)\|_{L^\infty(K_t)} &\le 2t\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.)\\ &- v_\varepsilon(s,.)\|_{L^\infty(K_s)}\,ds,\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big) - T_\varepsilon\Big(v_\varepsilon(t,.)\Big) \|_{L^\infty(K_t)} &\leq 2T\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds. \end{aligned}$$

En multipliant par e^{-2tT}, on obtient

$$\begin{aligned} e^{-2tT} \| T_\varepsilon(u_\varepsilon(t,.)) - T_\varepsilon(v_\varepsilon(t,.)) \|_{L^\infty(K_t)} &\leq 2Te^{-2tT}\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2Te^{-2tT}\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) - v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds &= 2Te^{-2tT}\int_0^t e^{-2sT} \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, e^{2sT} ds, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 2te^{-2tT}\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) - v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds &\leq \sup_{t\in(0,T]} \{e^{-2tT} \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)}\} e^{-2tT}\int_0^t 2Te^{2sT} ds, \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2te^{-2tT}\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) - v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds &\leq \sup_{t\in(0,T]} \{e^{-2tT} \| u_\varepsilon(s,.) - v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)}\} \\ &\times e^{-2tT}\Big(e^{2tT} - 1\Big), \end{aligned}$$

Implique

$$\begin{aligned} 2te^{-2tT}\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) - v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)} \, ds &\leq \sup_{t\in(0,T]} \{e^{-2tT} \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)}\} \Big(1 - e^{-2tT}\Big), \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in(0,T]} \{e^{-2tT} \| T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,.)\Big) - T_\varepsilon\Big(v_\varepsilon(t,.)\Big) \|_{L^\infty(K_t)}\} &\leq \sup_{t\in(0,T]} \{e^{-2tT} \| u_\varepsilon(s,.) \\ &- v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_s)}\} \Big(1 - e^{-2tT}\Big), \end{aligned}$$

Alors

$$q_{T,\varepsilon}(T_\varepsilon(u_\varepsilon) - T_\varepsilon(v_\varepsilon)) \leq q_{T,\varepsilon}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(1 - e^{-2tT}),$$

Puisque $1 - e^{-2tT} < 1$, par conséquence T_ε est contractante dans $\Big(\mathcal{C}^\infty\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big), \tau_\varepsilon\Big)$

c) Soient $T \in \mathbb{R}^+$ et $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{-2T^2} \sup_{t\in[0,T]} \{\| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty(K_t)}\} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \{\| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty(K_t)} \, e^{-2tT}\} \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} \| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty(K_t)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} e^{-2T^2}p_T & \leq & q_{T,\varepsilon} \\ & \leq & p_T. \end{array}$$

d) Pour tout $T \in \mathbb{R}^+$, on a

$$e^{2T^2} \in \mathcal{E}^s_r.$$

Et

$$1/(1 - e^{-2T^2}) \in \mathcal{E}^s_r.$$

Finalement, d'après la définition **3.6** l'application

$$T : \begin{cases} \mathcal{G}^s\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\Big) \longrightarrow \mathcal{G}^s\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\Big) \\ u(t,x)) = \Big[u_\varepsilon(t,x)\Big] \longmapsto T(u(t,x) = \Big[T_\varepsilon\Big(u_\varepsilon(t,x)\Big)\Big], \end{cases}$$

est contractante.

Par le Théorème **3.7**, T admet un point fixe $z = [(z_\varepsilon)_\varepsilon]$ avec z_ε un point de T_ε.

De plus, z est une solution de **6.1**.

Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions au problème (**6.1**).

Si $v = [v_\varepsilon]$ est un autre point fixe de T, alors

$$v_\varepsilon = T_\varepsilon(v_\varepsilon) + n_\varepsilon$$

avec $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big)$.

On a

$$u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(t,x) = \int_0^t \int_{x+s-t}^{x+t-s} (\sin(u_\varepsilon(s,z)) - sin(v_\varepsilon(s,x)))dzds + n_\varepsilon(t,x),$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)} & \leq & 2t \displaystyle\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) \\ & - & v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_t)} \, ds \\ & + & \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)}, \end{array}$$

Cela implique

$$\begin{array}{rcl} \| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)} & \leq & 2T \displaystyle\int_0^t \| u_\varepsilon(s,.) \\ & - & v_\varepsilon(s,.) \|_{L^\infty(K_t)} \, ds \\ & + & \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)} \,. \end{array}$$

Par le lemme de Gronwall

$$\| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)} \leq \; e^{2T} \| n_\varepsilon(t,.) \|_{L^\infty(K_t)},$$

Ainsi

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\parallel u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(t,.)\parallel_{L^\infty(K_t)}\}\leq e^{2T}\sup_{t\in[0,T]}\{\parallel n_\varepsilon(t,.)\parallel_{L^\infty(K_t)}\},$$

c-à-d

$$p_T(u_\varepsilon-v_\varepsilon)\quad\leq\quad e^{2T}p_T(n_\varepsilon)$$

Puisque $(n_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R}\Big)$, alors

$$(u_\varepsilon-v_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{R}\Big)$$

Donc,

$$u=v$$

D'où, la solution est unique dans $\mathcal{G}^s\Big(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\Big)$.

6.1 Association

Soit v la solution du problème

$$\begin{cases}(\partial_x^2-\partial_t^2)v(t,x)=0, & x\in\mathbb{R}\quad t\in\mathbb{R}_+\\ v(0,x)=a(x)\qquad\partial_t v(0,x)=b(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

et w la solution du problème

$$\begin{cases}(\partial_x^2-\partial_t^2)w(t,x)=2\,\sin(u(t,x)+m(x,t)), & x\in\mathbb{R}\quad t\in\mathbb{R}_+\\ w(0,x)=a(x)\qquad\partial_t w(0,x)=b(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

avec

$$m(x,t)\in\mathcal{N}^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$$

H la fonction Heaviside.

Proposition 6.3 *:*

La solution généralisée u du problème (6.1) est associée avec $v+w$.

Preuve 6.4 *:*

Soit v_ε la solution du problème

$$\begin{cases}(\partial_x^2-\partial_t^2)v_\varepsilon(t,x)=0, & x\in\mathbb{R}\quad t\in\mathbb{R}_+\\ v_\varepsilon(0,x)=a_\varepsilon(x)\qquad\partial_t v_\varepsilon(0,x)=b_\varepsilon(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases}(\partial_x^2-\partial_t^2)(u_\varepsilon-v_\varepsilon-w_\varepsilon)=2\sin(u_\varepsilon)-2\sin(w_\varepsilon+m_\varepsilon)\\ (u_\varepsilon-v_\varepsilon-w_\varepsilon)(0,x)=0\qquad\partial_t(u_\varepsilon-v_\varepsilon-w_\varepsilon)=0\end{cases}$$

On passe à la norme L^∞

$$\begin{aligned}
||u_\varepsilon - v_\varepsilon - w_\varepsilon||_{L^\infty(K_t)} &\leq 2T\int_0^T ||\sin(u_\varepsilon) - \sin(w_\varepsilon + m_\varepsilon)||_{L^\infty(K_t)} ds \\
&\leq 2T\int_0^T ||\sin(u_\varepsilon) - \sin(v_\varepsilon + w_\varepsilon)||_{L^\infty(K_t)} ds \\
&+ 2T^2||\sin(v_\varepsilon + w_\varepsilon) - \sin(w_\varepsilon + m_\varepsilon)||_{L^\infty(K_t)} \\
&\leq 2T\int_0^T ||u_\varepsilon - v_\varepsilon - w_\varepsilon||_{L^\infty(K_t)} ds \\
&+ 2T^2||\sin(v_\varepsilon + w_\varepsilon) - \sin(w_\varepsilon + m_\varepsilon)||_{L^\infty(K_T)}
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall

$$||u_\varepsilon - v_\varepsilon - w_\varepsilon||_{L^\infty(K_T)} \leq 2T^2||\sin(v_\varepsilon + w_\varepsilon) - \sin(w_\varepsilon + m_\varepsilon)||_{L^\infty(K_T)} \exp(2T^2)$$

Comme $\sin(v_\varepsilon + w_\varepsilon) - \sin(w_\varepsilon + m_\varepsilon)$ est bornée et converge presque partout vers 0, alors u_ε converge presque partout vers $v + w$.
Donc

$$u \approx v + w$$

Chapitre 7

Continuité et généralisation de point fixe généralisée dans $\mathcal{G}^S$

Le but de ce chapitre est la notion de point fixe dans le cadre des fonctions généralisées de Colombeau, dans ce contexte une attention particulière est donnée à la notion de continuité des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires , et comment utiliser la définition de la contraction des applications définie sur l'algèbre des fonctions généralisées pour prouver certain résultats concernant la théorie de point fixe dans le sens de l'algèbre de Colombeau .On a aussi illustré tout ceci dans un problème de Cauchy, avec un nombre réel généralisé comme donnée initiale.

7.1 Définition et propriétés de base de $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$

Soit $\tilde{\mathbb{C}}$ l'anneau des nombres complexes généralisées obtenu par la quotient de

$$\mathcal{E}_{\mathbb{C}} = \Big\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}^{(0,1]} \ : \ \exists N \in \mathbb{N}, \mid u_\varepsilon \mid = O_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^{-N})\Big\}$$

par l'idéal

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}} := \Big\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{C}^{(0,1]} \ : \ \forall q \in \mathbb{N}, \mid u_\varepsilon \mid = O_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^{q})\Big\}$$

(cf. [47]).$\tilde{\mathbb{C}}$ est trivialement un module sur lui même et on peut le munir d'une structure topologique.

Afin d'expliquer ces propriétés, inspirés de l'analyse [28] et les travaux précédents dans ce sens [13],on définit la fonction suivante

$$\begin{array}{rcl} v : \mathcal{E}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & (-\infty, +\infty] \\ (u_\varepsilon)_\varepsilon & \longrightarrow & sup\Big\{l \in \mathbb{R} \mid u_\varepsilon \mid = O(\varepsilon^l) \ \ quand \ \ \varepsilon \to 0\Big\} \end{array} \tag{7.1}$$

sur $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$. Elle satisfait les conditions suivantes:

(i) $v((u_\varepsilon)_\varepsilon) \ = \ +\infty$ *si seulement si* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \ \in \ \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$,

(ii) $v((u_\varepsilon)_\varepsilon(v_\varepsilon)_\varepsilon) \ \geqslant \ v((u_\varepsilon)_\varepsilon) + v((v_\varepsilon)_\varepsilon)$

(iii) $v((u_\varepsilon)_\varepsilon + (v_\varepsilon)_\varepsilon) \ \geqslant \ min\,\{v((u_\varepsilon)_\varepsilon), v((v_\varepsilon)_\varepsilon)\}$

avec (ii) et (iii) devenant des égalités si les deux termes sont de la forme $(c\varepsilon^b)_\varepsilon$, $c \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$, respectivement. Notons que si $(u_\varepsilon - u'_\varepsilon)\varepsilon \in \mathcal{N}$, (i) combiné avec (iii) impliquent $v((u_\varepsilon)_\varepsilon) = v((u'_\varepsilon)_\varepsilon)$. Ceci signifie qu'on peut utiliser la fonction v pour définir la valuation

$$v_{\tilde{\mathbb{C}}}(u) \;\;:=\;\; v((u_\varepsilon)\varepsilon) \tag{7.2}$$

d'un nombre complexe généralisé $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$, et toutes les propriétés précédentes sont satisfaites pour les éléments de $\tilde{\mathbb{C}}$.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} \mid . \mid_e := \; & \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow [0, +\infty) \\ u \longrightarrow & \mid u \mid_e := \; \exp\{-v_{\tilde{\mathbb{C}}}(u)\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Définition 7.1 *:*

Soit E un espace topologique localement convexe défini par la famille de semi-normes $\{p_i\}_{i\in I}$. les éléments de

$$\mathcal{M}_E := \left\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^{(0,1]} : \exists N \in \mathbb{N}\, \forall i \in I \;\; p_i(u_\varepsilon) = O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-N})\right\} \tag{7.4}$$

et

$$\mathcal{N}_E := \left\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^{(0,1]} : \forall q \in \mathbb{N}\, \forall i \in I \;\; p_i(u_\varepsilon) = O_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{q})\right\} \tag{7.5}$$

sont appelés modérés,et négligeable respectivement. On introduit l'espace des fonctions généralisées basé sur E comme étant l'espace quotient

$$\mathcal{G}_E := \mathcal{E}_E \diagup \mathcal{N}_E$$

Il est claire que la définition de $\mathcal{G}_E$ est indépendante du choix de la famille de semi normes qui détermine l'espace topologique localement convexe E. On adopte la notation $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$ pour la classe u de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathcal{G}_E$.

Par les propriétés de semi normes sur E on donne la définition du produit entre un nombre complexe généralisé et un élément de $\mathcal{G}_E$ par l'application

$$\tilde{\mathbb{C}} \times \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_E$$

Il est naturel d'introduire la p_i-valuation de $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_E$ comme suit

$$v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) \;\;:=\;\; sup\left\{b \in \mathbb{R} / \forall i \in I \;\; p_i(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^b) \; as \; \varepsilon \to 0\right\}. \tag{7.6}$$

Notons que $v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) = v((p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon)$ où la fonction v dans **(7.1)** donne la valuation dans $\tilde{\mathbb{C}}$.

Clairement v_{p_i} est définie sur $\mathcal{M}_E$ à valeur dans $(-\infty, +\infty)$ et les propriétés suivantes sont satisfaites:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{(i)} & v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) \;=\; +\infty \text{ pour tout } i \in I \quad \text{si et seulement si} \quad ((u_\varepsilon)_\varepsilon) \in \mathcal{N}_E, \\
\textbf{(ii)} & v_{p_i}((\lambda_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon) \;\geqslant\; v_{p_i}((\lambda_\varepsilon)_\varepsilon) + v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) \text{ pour tout } (\lambda_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_M \text{ et } (u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_E, \\
\textbf{(ii)} & v_{p_i}((\lambda_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon) \;=\; v_{p_i}((\lambda_\varepsilon)_\varepsilon) + v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) \text{ pour tout } (\lambda_\varepsilon)_\varepsilon =_(c\varepsilon^b), \quad c \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, \\
\textbf{(iv)} & v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon + (v_\varepsilon)_\varepsilon) \;\geqslant\; \min\left\{v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon), v_{p_i}((v_\varepsilon)_\varepsilon)\right\}.
\end{array}$$

Si $(u_\varepsilon - u'_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$, alors **i)** et **iv)** impliquent $v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) = v_{p_i}((u'_\varepsilon)_\varepsilon)$. Ceci signifie qu'on peut utiliser **(7.6)** pour définir la p_i-valuation $v_{p_i}(u) = v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon)$ d'une fonction généralisée $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_E$.
et par suite

$$\mathcal{P}_i(u) := \exp\{-v_{p_i}(u)\}$$

est une ultra pseudo-semi norme sur $\tilde{\mathbb{C}}-$module $\mathcal{G}_E$.
Ainsi $\mathcal{G}_E$ est un espace topologique localement convexe défini par la famille de ultra-pseudo-normes $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$.

7.2 Continuité et Contraction dans $\tilde{\mathbb{C}}$-modules

Définition 7.2 *:*

Soit $T : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$ l'application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire avec $(E, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ et $(F, (\mathcal{Q}_j)_{j\in J})$ deux espaces topologiques localement convexes. On dit qu'une application T est continue si et seulement si

$$\forall j \in J, \exists i_0 \in I, \exists c > 0 \;\; \textit{tel que } \mathcal{Q}_j(Tu) \leqslant c\mathcal{P}_{i_0}(u)$$

Lemme 7.3 *:*

Soit $(T_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ une famille des applications $\mathbb{C}$-linéaire $T_\varepsilon :\; E \to F$, où E et F deux espaces topologiques localement convexes. Si
• $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_E \quad \Rightarrow \quad (T_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_F$
• $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E \quad \Rightarrow \quad (T_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_F$
Alors

$$\begin{array}{rcl}
T \,:\, \mathcal{G}_E & \longrightarrow & \mathcal{G}_F \\
u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] & \longmapsto & Tu = [(T_\varepsilon u_\varepsilon)]
\end{array}$$

est bien définie

Théorème 7.4

Avec les mêmes notations précédentes, si $T_\varepsilon :\ E \to F$ est $\mathbb{C}$-linéaire continue, alors

$$T : \mathcal{G}_E \to \mathcal{G}_F$$

est une application $\tilde{\mathbb{C}}-$linéaire bien définie, et continue.

Preuve 7.5 *:*

Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_E$
donc $u_\varepsilon \in E$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$. Ainsi

$$T_\varepsilon u_\varepsilon \in F$$

De plus $\quad \forall i \in I,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\quad p_i(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{-N})$
d'après la continuité de T_ε, on a

$$\begin{aligned} q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon) &\leqslant cp_i(u_\varepsilon) \\ &\leqslant c \times c^{'} \varepsilon^{-N} = c_2 \varepsilon^{-N} \end{aligned}$$

donc

$$q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon) = O(\varepsilon^{-N})$$

Par suite

$$(T_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_F$$

ce qui implique

$$Tu \in \mathcal{G}_F.$$

Soit $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E, \quad$ i.e

$$(\forall i \in I), (\forall q \in \mathbb{N}),\ p_i(v_\varepsilon) = O(\varepsilon^q).$$

et $T_\varepsilon v_\varepsilon \in F,$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$.
puisque T_ε est linéaire et continue, donc pour tout $j \in J$ il existe $i_0 \in I$, et $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} q_j(T_\varepsilon v_\varepsilon) &\leqslant cp_{i_0}(v_\varepsilon) \\ &\leqslant c^{'} \varepsilon^q \qquad o\grave{u}\ \ c^{'} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$q_j(T_\varepsilon v_\varepsilon) = O(\varepsilon^q)$$

et par suite

$$(T_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_F$$

donc, T est bien définie.

La continuité:

On a pour tout $j \in J$

$$\begin{array}{rcl} v_{q_j}((T_\varepsilon u_\varepsilon)_\varepsilon) & = & v(q_j((T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon) \\ & = & Sup\Big\{b \in \mathbb{R}: \;\; q_j((T_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon) = O(\varepsilon^b\Big\} \\ & := & h \end{array}$$

Puisque T_ε est une application linéaire continue, alors

$$\forall j \in J, \exists i_0 \in I, \exists c > 0 \;\; tel\ que \;\; q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon) \leqslant cp_{i_0}(u_\varepsilon)$$

Soit

$$d := v_{p_i}(u_\varepsilon) = \;\; Sup\Big\{b \in \mathbb{R}: \;\; p_i(u_\varepsilon) = O(\varepsilon^b\Big\}$$

alors

$$q_j((T_\varepsilon(u_\varepsilon)_\varepsilon) \leqslant c \times c^{''}\varepsilon^d = c_0\varepsilon^d \qquad where \quad c_0, c^{''} > 0.$$

donc

$$d \leqslant h$$

c-à-d

$$\begin{array}{rcl} v_{p_{i_0}}(u_\varepsilon) & \leqslant & v_{q_j}(T_\varepsilon u_\varepsilon) \\ e^{-v_{q_j}(T_\varepsilon u_\varepsilon)} & \leqslant & e^{-v_{p_{i_0}}(u_\varepsilon)} \end{array}$$

et par suite

$$\mathcal{Q}_j(Tu) \leqslant \mathcal{P}_{i_0}(u)$$

Conclusion: T est $\tilde{\mathbb{C}}-$linéaire continue.

Théorème 7.6 *:*

Si l'application $\mathbb{C}-$linéaire

$$\begin{array}{rcl} T_\varepsilon : E & \to & F \\ u_\varepsilon & \to & T_\varepsilon u_\varepsilon \end{array}$$

est contractante avec la constante de contraction $k_\varepsilon = M\varepsilon^{k_0}$ avec $k_0,\ M > 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{G}_E & \to & \mathcal{G}_F \\ u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon] & \to & Tu = [(t_\varepsilon u\varepsilon)_\varepsilon] \end{array}$$

est contractante

Preuve 7.7 *:*

Soit $\varepsilon \in (0,1]$ l'application linéaire $T_\varepsilon : (E,(p_i)_{i\in I}) \to (F,(q_j)_{j\in J})$ est contractante. Donc pour tout $j \in J$ il existe $i_0 \in I$, et $k_\varepsilon \in (0,1)$ tel que pour tout $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in E$, on a

$$q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon) \leqslant k_\varepsilon p_{i_0}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \qquad (7).$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} h & = & v_{q_j}(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon) = sup\left\{b \in \mathbb{R} :\ q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon) = O(\varepsilon^b)\right\} \\ d & = & v_{p_{i_0}}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = sup\left\{b \in \mathbb{R} :\ p_{i_0}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = O(\varepsilon^b)\right\} \end{array}$$

grâce à (7)

$$\begin{array}{rcl} q_j(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon) & \leqslant & k_\varepsilon p_{i_0}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) \\ & \leqslant & \varepsilon^{k_0} M\, c\, \varepsilon^d \\ & = & c_1 \varepsilon^{d+k_0} \quad \text{où } c_1 > 0. \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{lrcl} & d + k_0 & \leqslant & h \\ i.e & v_{q_j}(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon) & \geqslant & v_{p_{i_0}}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) + k_0 \\ & e^{-v_{q_j}(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon)} & \leqslant & e^{-k_0}\, e^{-v_{p_{i_0}}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)} \\ & \mathcal{Q}_j(Tu - Tv) & \leqslant & e^{-k_0}\, \mathcal{P}_{i_0}(u - v) \end{array}$$

Conclusion T est contractante.

Proposition 7.8 *:*

L'espace $(\mathcal{G}_E, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ est topologique localement convexe et est séparé.

Preuve 7.9 *:*

Par la définition de $\mathcal{N}_E$, si $u \neq 0$ dans $\mathcal{G}_E$, alors

$$v_{p_i}((u_\varepsilon)_\varepsilon) \neq \infty \ pour\ certain\ i \in I$$

d'où

$$\mathcal{P}_i(u) > 0$$

et par conséquent $(\mathcal{G}_E, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ est séparé .

Proposition 7.10 *[16]:*

L'espace $(\mathcal{G}_E, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ est complet.

7.3 Quelques théorèmes de point fixe dans l'algèbre de Colombeau

Théorème 7.11 *:*

Soit $A : (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I}) \to (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I})$ une application dans une algèbre de Colombeau à valeurs dans lui même telle que

$$\begin{array}{ll} \textbf{1)} & \text{il existe } u_0 \in \mathcal{G}_E, \quad p_i(A_\varepsilon u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon}) \ = \ O(\varepsilon^c), \quad c \in \mathbb{R} \\ \textbf{2)} & \forall\,(i \in I), p_i(A_\varepsilon u_{0,\varepsilon} - A_\varepsilon v_{0,\varepsilon}) \ < \ M\varepsilon^{k_0} p_i(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \quad M, k_0 > 0. \end{array}$$

Alors A admet un point fixe unique .

Preuve 7.12 *:*

On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n \\ x_0 = u_0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{n+1,\varepsilon} = A_\varepsilon x_{n,\varepsilon} + n_\varepsilon \\ x_{0,\varepsilon} = u_{0,\varepsilon} + n_\varepsilon' \end{cases}$$

avec $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$.

On a

$$\begin{array}{rcl} \exp\{-v_{p_i}(x_{n+1,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} & = & \exp\{-v_{p_i}(x_{n+1,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} \\ & = & \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon x_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon x_{n-1,\varepsilon})\} \\ & \leq & \exp\{-k_0\} \exp\{-v_{p_i}(x_{n,\varepsilon} - x_{n-1,\varepsilon})\} \\ & \leq & \exp\{-k_0\} \exp\{-k_0\} \ \times \\ & & \exp\{-v_{p_i}(x_{n-1,\varepsilon} - x_{n-2,\varepsilon})\} \\ & \vdots & \\ & \leq & (\exp\{-k_0\})^n \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon})\} \end{array}$$

Maintenant on prouve que (x_n) est de Cauchy . Soit $m, n \in \mathbb{N} \quad (m > n)$

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} &= \exp\{-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} \\
&\leq \exp\{\sup\left(-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{m-1,\varepsilon}), -v_{p_i}(x_{m-1,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\right)\} \\
&\leq \sup\left(\exp\{-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{m-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(x_{m-1,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\}\right) \\
&\leq \exp\{-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{m-1,\varepsilon})\} \\
&\quad\; + \exp\{-v_{p_i}(x_{m-1,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} \\
&\vdots \\
&\leq (\exp\{-k_0\})^{m-1} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon})\} + ... \\
&\quad ... + (\exp\{-k_0\})^n \exp\{-vp_i(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon})\} \\
&\leq (\exp\{-k_0\})^n (1 + \exp\{-k_0\} + ... \\
&\quad ... + \exp\{-k_0(m-n-1)\}) \exp\{v_{p_i}(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon}\}) \\
&= (\exp\{-k_0\})^n \left(\frac{1 - \exp\{-k_0(m-n)\}}{1 - \exp\{k_0\}}\right) \times \\
&\quad \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Donc

$$\exp\{-v_{p_i}(x_{m,\varepsilon} - x_{n,\varepsilon})\} \leq \frac{(\exp\{-k_0\})^n}{1 - \exp\{k_0\}} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon x_{0,\varepsilon} - x_{0,\varepsilon})\}$$

où le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers zéro quand $n \to +\infty$.
D'où, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{G}, (P_i)_{i \in I})$ qui est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente .
Et par suite il existe u dans $\mathcal{G}_E$ tel que $u = lim_{n \to +\infty} x_n$.
D'autre part, on a si $u, v \in \mathcal{G}_E$, on peut prouver que A est une application continue.
En effet pour tout $u, v \in \mathcal{G}_E$

$$\begin{aligned}
P_i(Au - Av) &= \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\varepsilon v_\varepsilon)\} \\
&\leq \exp\{-k_0\}\ \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} \\
&\leq \exp\{-k_0\}\ P_i(u_- v)
\end{aligned}$$

alors A est continue. Et on a

$$x_{n+1} = Ax_n$$

ce qui implique que

$$u = Au$$

donc A admet un point fixe unique. supposons que A admet un autre point fixe $v \in \mathcal{G}_E$, $Av = v$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} &= P_i(u-v) \\
&= P_i(Au - Av) \\
&= \exp\{-v_{p_i}(Au_\varepsilon - Av_\varepsilon)\} \\
&\leq \exp\{-k_0\}\ \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

ceci entraîne que

$$\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} = 0$$

ce qui signifie

$$v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = +\infty$$

et par suite

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$$

Conclusion

$$u = v \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_E$$

Théorème 7.13 *:*

Soit $A : (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I}) \to (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I})$ une application de $\mathcal{G}_E$ vers $\mathcal{G}_E$ muni de la famille ultra pseudo-semi-normes $(P_i)_{i\in I}$, qui satisfait les conditions suivantes:

1) $\exists u_0 \in \mathcal{G}_E,\ \ p_i(A_\varepsilon u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon}) = O(\varepsilon^c) \qquad \text{avec} \ \ c > 0$

2) $\forall\, (i \in I), p_i(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\varepsilon v_\varepsilon) < M\varepsilon^\lambda \left[p_i(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) + p_i(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\right] \quad \text{avec} \quad \lambda > \ln(2)$

Alors A a un point fixe unique dans $\mathcal{G}_E$.

Preuve 7.14 *:*

On considère la suite

$$\begin{cases} y_{n+1} = Ay_n \\ y_0 = u_0 \in \mathcal{G}_E \end{cases} \iff \begin{cases} y_{n+1,\varepsilon} = A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} + n_\varepsilon \\ y_{0,\varepsilon} = u_{0,\varepsilon} + n'_\varepsilon \end{cases}$$

avec $(n_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$.
On a

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} &= \exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \\
&= \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Et par la définition de la fonction valuation v_{p_i} on peut écrire

$$p_i(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \leq M\varepsilon^\lambda\ .\varepsilon^\ell$$

avec $\quad \ell = \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\right)$.

Donc,

$$v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n+1,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \geq \lambda + \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\right)$$

Ainsi

$$-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n+1,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \leq -\lambda - \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\right)$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} &\leq \exp\{-\lambda\} \ \times \\
&\quad \exp\{-\min(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}))\} \\
&\leq \exp\{-\lambda\} \ \times \\
&\quad \max\left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}\right) \\
&\leq \exp\{-\lambda\} \ \times \\
&\quad \left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} + \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}\right) \\
&\leq \exp\{-\lambda\}\ \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \\
&\qquad + \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} \ \leq \ \frac{\exp\{-\lambda\}}{1 - \exp\{-\lambda\}}\ \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}$$

et par induction on conclut que

$$\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} \leq \left(\frac{\exp\{-\lambda\}}{1 - \exp\{-\lambda\}}\right)^n\ \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon} - y_{0,\varepsilon})\}$$

Maintenat on montre que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Soit $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} &= \exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \\
&\leq \exp\{\max(-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon} - y_{n+p-1,\varepsilon}), -v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}))\} \\
&\leq \max\left(\exp\{-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon} - y_{n+p-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\}\right) \\
&\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon} - y_{n+p-1,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \\
&\ \vdots \\
&\leq \left[\left(\frac{\exp\{-\lambda\}}{1 - \exp\{-\lambda\}}\right)^n + ... + \left(\frac{\exp\{-\lambda\}}{1 - \exp\{-\lambda\}}\right)^{n+p-1}\right] \ \times \\
&\quad \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon} - y_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Alors

$$\exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \leq \left(\frac{\exp\{-\lambda\}}{1-\exp\{-\lambda\}}\right)^n \left(1 - \frac{\exp\{-\lambda\}}{1-\exp\{-\lambda\}}\right)^{-1} \times \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon} - y_{0,\varepsilon})\}$$

et d'après la première propriété du théorème, on a $\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon} - y_{0,\varepsilon})\}$ est finie, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers zéro quand $n \to \infty$.

Alors $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}_E$ qui est complet, alors il existe u dans $\mathcal{G}_E$ tel que $y_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Maintenant on va prouver que u est un point fixe de l'application A.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{\sup(-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - y_{n,\varepsilon}), -v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon))\} \\
&\leq \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - y_{n,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-\lambda\} \times \\
&\quad (\exp\{-\min(v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}), v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\})) \\
&\leq \exp\{-\lambda\} \times \\
&\quad \sup(\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}) \\
&\leq \exp\{-\lambda\} \times \\
&\quad (\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} + \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}) \\
&\leq \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} \\
&\quad + \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} \\
(1 - \exp\{-\lambda\}) \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} \\
&\quad + \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient

$$\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} = 0$$

ce qui implique que

$$v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) = +\infty$$

ce qui signifie que

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$$

D'où

$$Au = u$$

Unicité:

Supposons qu'il y a un autre point fixe v de A, $Av = v$, tel que $u \neq v$.
Donc on écrit

$$\begin{array}{rcl}
\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} & \leq & \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\varepsilon v_\varepsilon)\} \\
& \leq & \exp\{-\lambda\} \quad \times \\
& & \exp\{\sup\left(-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon), -v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\right)\} \\
& \leq & \exp\{-\lambda\} \quad \times \\
& & \sup\left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\}, \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\}\right) \\
& \leq & \exp\{-\lambda\} \quad \times \\
& & \left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} + \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\}\right) \\
& \leq & \exp\{-\lambda\} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} \\
& & \quad + \exp\{-\lambda\} \ \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\}
\end{array}$$

Puisque $\quad Au = u \quad$ *et* $\quad Av = v$, alors

$$\begin{array}{rcl}
v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) & = & v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon) \\
& = & +\infty \\
\Rightarrow \quad \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} & = & 0
\end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) & = & +\infty \\
& \Rightarrow & (u_\varepsilon)_\varepsilon - (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E
\end{array}$$

Conclusion

$$u = v \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_E.$$

Théorème 7.15 *:*

Soit $A : (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I}) \to (\mathcal{G}_E, (P_i)_{i\in I})$ une application de $\mathcal{G}_E$. muni de la famille d'ultra pseudo-semi-normes $(P_i)_{i\in I}$ dans lui même, et satisfait les deux conditions suivantes:

1) $\quad \exists u_0 \in \mathcal{G}_E, \ \ p_i(A_\varepsilon u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon}) = O(\varepsilon^c) \qquad$ avec $\ c > 0$

2) $\quad \forall\, (i \in I), p_i(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\varepsilon v_\varepsilon) < M\varepsilon^\beta \left[p_i(A_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) + p_i(A_\varepsilon v_\varepsilon - u_\varepsilon)\right]$ avec $\ \beta > ln(2)$.

Alors A admet un point fixe unique dans $\mathcal{G}_E$

Preuve 7.16 *:*

Considérons la suite
$\begin{cases} y_{n+1} = Ay_n \\ y_0 = u_0 \in \mathcal{G}_E \end{cases} \iff \begin{cases} y_{n+1,\varepsilon} = A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} + n_\varepsilon \\ y_{0,\varepsilon} = u_{0,\varepsilon} + n'_\varepsilon \end{cases}$
On a

$$\begin{aligned} \exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} &= \exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \\ &= \exp\{-v_i(A_\varepsilon y_{n+1,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} \end{aligned}$$

Et par la définition de la valuation d'une fonction v_{p_i}on peut écrire

$$p_i(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \leq M\varepsilon^\beta \, .\varepsilon^\ell$$

avec $\ell \; = \; \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\right)$
Donc,

$$v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n+1,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \geq \beta + \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\right)$$

$$-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n+1,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon}) \leq -\beta \; - \min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\right)$$

Et par suite

$$\begin{aligned} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} &\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\ &\quad \exp\{-\min\left(v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}), v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\right)\} \\ &\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\ &\quad \sup\left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\}\right) \\ &\leq \exp\{-\beta\} \; \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \\ &\quad + \exp\{-\beta\} \; \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} \end{aligned}$$

Puisque, $(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$, il suit que

$$v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}) = +\infty$$

Alors

$$\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon})\} = 0$$

on peut écrire l'inégalité précédente comme suit

$$\begin{aligned} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon} - A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} &\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\ &\quad \exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \end{aligned}$$

et par les propriétés de la fonction valuation on conclut que

$$\begin{aligned} v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}) &= v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}) \\ &\quad +(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})) \\ &\geq \min\Big(v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon} - y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\Big) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon}) &\leq -\min\Big(v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon}), v_{p_i}(y_{n,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon})\Big)\\
&\leq \max\Big(-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon}), -v_{p_i}(y_{n,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon})\Big)\\
&\leq -v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon})
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon}-A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} &\leq \exp\{-\beta\}\exp\{-v_{p_i}(y_{n+1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\}\\
&\quad +\exp\{-\beta\}\ \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon})\}\\
&\leq \exp\{-\beta\}\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon}-A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\}\\
&\quad +\ \exp\{-\beta\}\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon}-y_{n-1,\varepsilon})\}\\
&\vdots\\
&\leq \left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^n \quad\times\\
&\quad \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon}-y_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{n,\varepsilon}-A_\varepsilon y_{n-1,\varepsilon})\} &\leq \left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^n \quad\times\\
&\quad \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon}-y_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Maintenant on montre que $(y_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{G}_E$.
On a

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\} &= \exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\}\\
&\leq \exp\{\max(-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon}-y_{n+p-1,\varepsilon}), -v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon}))\}\\
&\leq \max\left(\exp\{-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon}-y_{n+p-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\}\right)\\
&\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n+p,\varepsilon}-y_{n+p-1,\varepsilon})\}\\
&\quad +\exp\{-v_{p_i}(y_{n+p-1,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\}\\
&\vdots\\
&\leq \left[\left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^n+...+\left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^{n+p-1}\right]\\
&\quad \times\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon}-y_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(x_{n+p,\varepsilon}-y_{n,\varepsilon})\} &\leq \left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^n\left(1-\frac{\exp\{-\beta\}}{1-\exp\{-\beta\}}\right)^{-1}\\
&\quad \times\ \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon y_{0,\varepsilon}-y_{0,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

d'où $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}_E$ qui est complet, donc il existe $u \in \mathcal{G}_E$ tel que $y_n \to u$ as $n \to +\infty$.
On montre que u est un point fixe de l'application A. on a

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{\sup(-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - y_{n,\varepsilon}), -v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon))\} \\
&\leq \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - y_{n,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-\beta\} \times \\
&\quad (\exp\{-\min(v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon}), v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon))\})
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-\beta\} \times \\
&\quad \sup(\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}, \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}) \\
&\leq \exp\{-\beta\} \times \\
&\quad (\exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} + \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}) \\
&\leq \exp\{-\beta\} - v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \\
&\quad \exp\{-\beta\} + \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} \\
&\quad + \exp\{-\beta\} \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\} \\
&\quad + \exp\{-\beta\} \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(1 - \exp\{-\beta\}) \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon)\} \\
&\quad + \exp\{-\beta\}\ \exp\{-v_{p_i}(y_{n,\varepsilon} - y_{n-1,\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient

$$\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} = 0$$

ce qui implique que

$$v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) = +\infty$$

autrement dit

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$$

Alors

$$Au = u$$

Unicité:

Supposons qu'il existe un autre point fixe v de A, $Av = v$, tel que $u \neq v$, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} &= \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - A_\varepsilon v_\varepsilon)\} \\
&\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\
&\quad \exp\{\sup(-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon), -v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon))\} \\
&\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\
&\quad \sup\left(\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)\}, \exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon v_\varepsilon - v_\varepsilon)\}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} &\leq \exp\{-\beta\} \quad \times \\
&\quad (\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} + \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\}) \\
&\leq \exp\{-\beta\}\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\} \\
&\quad + \exp\{-\beta\}\ \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} \leq \left(\frac{\exp\{-\beta\}}{1 - \exp\{-\beta\}}\right)\exp\{-v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon)\}$$

Puisque $\quad Au = u \quad$,alors

$$v_{p_i}(A_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) = +\infty$$

$$\Rightarrow \exp\{-v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} = 0$$

D'où

$$v_{p_i}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad (u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$$

Conclusion

$$u = v \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_E.$$

7.4 Application

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & si \quad t > 0 \\ x(0) = x \in \tilde{\mathbb{R}} \end{cases} \tag{7.7}$$

Si f_ε satisfait la conditions (2), alors (7.7) admet une unique solution généralisée

$$| f_\varepsilon(s, u_\varepsilon) - f_\varepsilon(s, v_\varepsilon) | \leq k_\varepsilon(s) \ | u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s) | \qquad (2)$$

où $\sup\limits_{s\in[0,T]} k_\varepsilon(s) = M(s)\,\varepsilon^\lambda$ avec $\quad 0 < M(s) < 1$ and $\lambda > 0$.

En effet:

$\tilde{u}$ est une solution du problème (7.7) si et seulement si elle est point fixe de l'application

$$\begin{array}{rcl} T : \tilde{\mathbb{R}} & \to & \tilde{\mathbb{R}} \\ x & \to & x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) \end{array}$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} T_\varepsilon : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x_\varepsilon & \to & T_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon(0) + \int_0^t f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds \end{array}$$

un représentant de T.

Puisque f satisfait la condition (2) et on définit la norme suivante sur $\tilde{\mathbb{R}}$ par

$$P_T(u) = \exp\{-v_{p_T}(u_\varepsilon)\}$$

où $p_T(u_\varepsilon) = \sup\limits_{t\in[0,T]} | u_\varepsilon(t) |$.

on a

$$\begin{array}{rcl} | T_\varepsilon x_\varepsilon - T_\varepsilon y_\varepsilon | & = & | \int_0^t [f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s))]ds | \\ & \leqslant & \int_0^t | f_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s)) | \, ds \\ & \leqslant & \int_0^t M\,\varepsilon^k \, | x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s) | \, ds, \qquad M = \sup\limits_{t\in[0,T]} | M(t) | \\ & \leq & T\,M\,\varepsilon^\lambda \, p_T(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \\ & \leq & C\,\varepsilon^\lambda \, p_T(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \end{array}$$

D'où,

$$p_T(T_\varepsilon x_\varepsilon - T_\varepsilon y_\varepsilon) \ \leq \ C\,\varepsilon^\lambda \, p_T(x_\varepsilon - y_\varepsilon)$$

Grâce à notre premier théorème il existe une solution généralisée du problème de Cauchy.

Unicité:

Supposons qu'il existe un autre point fixe v de T, $Tv = v$, tel que $u \neq v$.

Donc on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \exp\{-v(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} & = & P_T(u - v) \\ & = & P_T(Tu - Tv) \\ & = & \exp\{-v_{p_T}(T_\varepsilon u_\varepsilon - T_\varepsilon v_\varepsilon)\} \\ & \leq & \exp\{-k\} \exp\{-v_{p_T}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} \end{array}$$

par conséquent

$$\exp\{-v_{p_T}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\}(1 - \exp\{-k\}) \leq 0$$

ce qui donne

$$\exp\{-v_{p_T}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\} = 0$$

et par suite

$$v_{p_T}(u_\varepsilon - v_\varepsilon) = +\infty$$

ainsi

$$(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_E$$

$$\Rightarrow \quad u = v \;\; in \;\; \tilde{\mathbb{R}}$$

la solution est unique dans $\tilde{\mathbb{R}}$.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on a rappelé la construction de l'algèbre des fonctions généralisées, ainsi que toutes les propriétés fondamentales de cette algèbre. Puis nous nous somme intéresses à l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour des problèmes non linéaires qui n'admettent pas de solutions dans le cas classique au sens des distributions. A cet égard, nous avons énoncé dans les chapitres 3 et 4 des résultats d'existence et d'unicité de la solution généralisée aux problèmes d'évolution différents. Puis dans le 5ème et 6ème chapitres on a montré l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour l'équation de la chaleur et de Sine-Gordon respectivement. Dans le dernier chapitre nous avons introduit la continuité des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires, et contraction, ensuite on a prouvé l'existence et l'unicité de point fixe des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires définies de $\mathcal{G}^s$ l'algèbre de Colombeau dans lui même, par l'introduction d'une famille des pseudo-semi-normes définies sur $\mathcal{G}^s$.

L'esprit de ce travail reste valable et applicable sur un bon nombre de problèmes non réguliers dans le cas classique, c'est ce qui constituerait l'objet de nos prochains travaux de recherche.

Bibliography

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V, Netherlands, 2006.

[2] A. Akkurt, M. Esra Yildirim, and Huseyin Yildirim, a new generalized fractional derivative and integral.

[3] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985).

[4] A.Yoshikawa, M.Yamaguti, On some further properties of solutions to a certain semi-linear system of partial differential equations. Publ.RIMS, Kyoto Univ. 577-595.

[5] B.Fisher, The product of the distributions x^r and $\delta^{r-1}(x)$, Proc.Camb.Phil.Soc. 72(1972), 201-204.

[6] B.Fisher, On defining the product of distributions. Math.Nachr. 99(1980), 239-249.

[7] B.Fisher, Neutrices and the product of distributions. Studia Math. 57(1976), 263-274.

[8] B.Fisher, The product of distributions. Quart. J.Math. Oxford (2) 22(1971), 299-308.

[9] B.Fisher, The product of the distributions $x_+^{-r-1/2}$ and $x_-^{-r-1/2}$ Proc.Camb.Phil.Soc. 71(1972), 123-130.

[10] Biagioni, H. A, A Nonlinear theory of generalized functions, lecture Notes in Math. 1421, Springer, Berlin, 1990

[11] Biagioni H A, Pilipovi'c, (1998), Colombeau semigroups, Preprint.

[12] Biagioni H A and Oberguggenberger M (1992), Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations, SIAM J. Math. Anal. 23, 923-940.

[13] Biagioni, H. A, *A Nonlinear theory of generalized functions, lecture Notes in Math. 1421, Springer, Berlin, 1990*

[14] Biagioni H.A., The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with generalized functions as initial conditions. Results Math. 14(1988), 231-241.

[15] Claudia Garetto, Topological structures in Colombeau algebras: investigation of the duals of $G_c(\Omega)$, $G(\Omega)$ and $G_S(\mathbb{R}^n)$.

[16] Claudia Garetto , Topological Structures in Colombeau Algebras: Topological $\widetilde{\mathbb{C}}$ -modules and Duality Theory. North Holland, Amsterdam 1985.

[17] Colombeau J. F, Elementary Introduction to New Generalized Functions, North-Holland Math. Stud. 113, Elsevier Science Publishers, 1985

[18] Colombeau J.F., New Generalized Functions and Multiplication of Distributions. North Hollan, Amsterdam 1984.

[19] Colombeau J.F., Multiplication of Distributions, a Tool in Applied Mathematics. Lecture Notes, Preprint 1991.

[20] Colombeau J. F., A.Heibig, M.Oberguggenberger, Generalized solutions to partial differential equations of evolution type. Preprint 1991.

[21] Colombeau J. F., M.Langlais, Existence and uniqueness of solutions of nonlinear parabolic equations with Cauchy data distributions. J.Math.Anal.Appl. 145(1990), 186-196.

[22] Colombeau, J. F., Le Roux, A. Y. Multiplications of distributions in elasticity and hydrodynamics. J. Math. Phys., 29:315-319, 1988.

[23] Colombeau, J. F., Meril, A. Generalized functions and multiplication of distributions on Coo manifolds. J. Math. Anal. Appl., 186:357-364, 1994.

[24] Djapi'c N, KunzingerMand Pilipovi'c S, (2001) Symmetry group analysis of weak solutions, Proc. London Math. Soc., to appear.

[25] Dapic, N., Pilipovic, S. MiCrolocal analysis of Colombeau's generalized functions on a manifold. Indag. Math. (N.S.), 7:293-309, 1996.

[26] Grosser M, Farkas E, Kunzinger M and Steinbauer R (2001) On the foundations of nonlinear generalized functions I, II Mem. Am. Math. Soc., 153.

[27] Grosser M., Kunzinger M, Steinbauer R and Vickers J A (2001) A global theory of algebras of generalized functions, Adv. Math., to appear.

[28] Grosser M., M. Kunzinger, M. Oberguggenberger and R. Steinbauer, Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity, Mathematics and its Applications 537, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[29] Grosser M., Hormann, G., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., editor, Nonlinear Theory of Generalized Functions, volume 401 of Chapman , Hall/CRC Research Notes in Mathematics, pages 85-98. CRC.

[30] H.Hasimoto, Exact solution of a certain semi-linear system of partial differential equations related to a migrating predation problem. Proc.Japan Acad. 50(1974), 623-627.

[31] Hermann R., M. Oberguggenberger, "Ordinary differential equations and generalized functions", Springer, Berlin (1991)

[32] Hormann G. and M. Oberguggenberger, Elliptic regularity and solvability for partial differential equations with Colombeau coefficients, Electron. J. Diff. Eqns. 14 (2004) 1-30.

[33] J. Aragona, A.R.G. Garcia, S.O. Juriaans,"Algebraic theory of Colombeau's generalized numbers", Journal of Algebra. 384 (2013), pp.194-211.

[34] J.-A. Marti: (C,E,P)-sheaf structures and applications. Nonlinear Theory of Generalized

[35] J.-A. Marti: Regularity, Local and Microlocal Analysis in Theories of Generalized Functions. Act. Appl. Math 105, (2006), 267-309.

[36] Jean-André.Marti, Fixed points in algebras of generalized functions and applications (research paper). Laboratoire CEREGMIA, Université des Antilles 2015.

[37] J. Pollewczac: Ordinary differential equations on closd subsets of Fréchet spaces with application to fixed point theorems. Proc. Amer. Math. Soc. 107, (1989), 1005-1012. Press, 1999.

[38] Katumgapola U., A new fractional derivative with classical properties, preprint. a new generalized fractional derivative and integral.

[39] K.S. Miller, B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", John Wiley and Sons, (1993).

[40] L. Schwartz , l'impossibilité de la multiplication des distributions. C. R. Acad. Sci. Paris, 239/847-848, 1954.

[41] M. Arshad: Fixed points in topological vector spaces (tvs) valued cone metric spaces. Advances in Fixed Point Theory, Vol. 5, n 2;(2015), 135-146.

[42] M. Frigon and A. Granas: Résultats de type Leray-Shauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet. Ann. Sci. Math. Québec 22, n 2, (1998), 161-168.

[43] M.Itano, On the multiplicative products of distributions. J.Sci.Hiroshima Univ. A-I. 29(1965), 51-74.

[44] M.Itano, On the multiplicative products of and . J.Sci.Hiroshima Univ. A-I 29(1965), 225-241.

[45] M.Itano, On the theory of multiplicative products of distributions. J.Sci.Hiroshima Univ. A-I, 30(1966), 151-181.

[46] M Oberguggenberger, Multiplication of Distributions And Applications to Partial Differential Equations. Pitman Res. Not.Math.259,Longman Sci.Techn.Essex 1992.

[47] M Oberguggenberger, and Todorov, T. D, An embeding of Schwartz distributions in the algebra of asymtotic functions, Internat, J. Math.Math. Sc. 21(3)(1998).

[48] M. Oberguggenberger, Generalized functions in nonlinear models, Nonlinear Analy. 47 (2001) 5029-5040.

[49] M. Oberguggenberger, Hyperbolic systems with discontinuous coefficients : generalized solution and a transmission problem in acoustic, J. Math. Anal. Appl. 142 (1989) 452-467.

[50] Nakamura S., Lectures on Schrödinger operators, Lectures given at the University of Tokyo, October 1992

[51] Nedeljkov M., M. Oberguggenberger and S. Pilipovic, Generalized solutions to a semilinear wave equation, Non-linear Anal. 61 (2005) 461-475.

[52] Nedeljkov M., S.Pilipovi'c, D.Rajter, semigroup in generalized function algebras. heat equation with singular potential and singular data.

[53] Nedeljkov M., Pilipovi'c S and Scarpalézos D (1998), The Linear Theory of Colombeau Generalized Functions, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Essex.

[54] R. Almeida, M. Guzowska and T. Odzijewicz, A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives, arxiv preprint arxiv:1612.00214.

[55] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, And M. Sababheh, A new definition of fractional derivative,Journal Of Computational And Applied Mathematics, vol. 264, pp. 65-70 (2014).

[56] S. Lojasiewicz, la valeur et la limite d'une distribution en un point. Studia Math., 16:1-36, 1957.

[57] Stojanovi'c Mirjana, Nonlinear Schrödinger equation with singular potential and initial data.

[58] Stojanovic Mirjana, "Extension of Colombeau algebra to derivatives of arbitrary order D^{α}; $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$: Application to ODEs and PDEs with entire and fractional derivatives", Nonlinear Analysis. 71 (2009), pp.5458-5475.

[59] S.Melliani, L.S.Chadli, A.Moujahid, M.Elomari ,"Generalized Solution of Sine- Gordon Equation", Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 7 (2015), 87-92.

[60] S.Melliani, L.S.Chadli, A.Moujahid, M.Elomari "Generalized Solution For Fractional Cauchy Problem", International Journal of Pure and Applied Mathematics. : 96 (2014) pp.47-58.

[61] S. Melliani, A. Taqbibt, M.chaib L. Saadia Chadli, Solving generalized heat equation by mean generalized fixed point. Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics, Beni-Mellal, Morocco. 978-1-7281-6654-4/2031.00 ©2020 IEEE.

[62] S. Melliani,M. Elomari, A. Taqbibt, L. Saadia Chadli, Solving fractional evolution problem in Colombeau algebra by mean generalized fixed point. Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics, Beni-Mellal, Morocco.Journal of Linear and Topological Algebra Vol. 08, No. 01, 2019, 71- 84.