N° d'ordre :342 /21

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Ahmed CHAFIKI

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Dérivées fractionnaires conformes dans l'algèbre de Colombeau

---

Soutenue le 29 mai 2021 devant le jury composé de :

Pr. Khalid HILAL,	P.E.S à la F.S.T de Béni Mellal,	(Président/Rapporteur)
Pr. Adil ABBASSI,	Professeur Habilité à la F.S.T de Béni Mellal,	Rapporteur
Pr. Abdelmajid EL HAJAJI,	Professeur Habilité à l'E.N.C.G d'El Jadida,	Rapporteur
Pr. Brahim El BOUKARI,	Professeur Habilité à l'E.S.T de Béni Mellal,	Examinateur
Pr. Zeriab Mohamed ES-SADEK,	Professeur Habilité à l'E.N.S.A.M de Rabat,	Examinateur
Pr. Abderrahmane RAJI,	Professeur Assistant à la F.S.T de Béni Mellal	Invité
Pr. Mohamed OUKESSOU,	P.E.S à la F.S.T de Béni Mellal,	Encadrant

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant de thèse, le Professeur Mohamed OUKESSOU, qui m'a honoré par la confiance qu'il m' accordée, par son soutien et ses précieuses directives durant ces années de thèse. Je tiens à le remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour sa précieuse formation dont j'ai beaucoup profité.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, les plus sincères remerciements à Monsieur Said MELLIANI, le Directeur du laboratoire de recherche de Mathématique Appliquées et Calcul Scientifique et responsable du master Génie Mathématiques et Applications, pour son aide capitale, pour sa disponibilité et son inconditionnelle patience tout au long de la réalisation de ce travail, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix, pour ses conseils qui ont été particulièrement la source de réussite de cette thèse. Je tiens aussi à remercier Monsieur, K.HILAL, pour ses remarques pertinentes et ses interventions de valeurs.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.
Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, qui m'ont soutenu le long de prépaaration de cette thèse eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Mes expressions de respect les plus chaleureuses sont destinées à tous les membres de ma famille, pour leur soutien et leur encouragement permanents, leur patience et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail.

Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Table des matières

Résume

Ce travail est réalisé au sein du laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, il est intitulé Dérivées fractionnaires conformes dans l'algèbre de Colombeau.

Notre but était l'introduction de la notion de la dérivée fractionnaire dite conforme dans l'algèbre de colombeau après avoir prouver dans chaque problème que cet opérateur de dérivation fractionnaire est dans cet algèbre, sinon on la régularise.

Tout d'abord, on a donné des résultats et des définitions de l'algèbre de colombeau et des opérateurs de dérivation fractionnaire conformes utilisés.

En suite, on a définit les dérivés fractionnaire conformes et leurs intégrales associées de cet algèbre de colombeau.

Finalement, on a traité des problèmes de Cauchy moyennant des opérateurs de dérivation fractionnaire définient ultérieurement (type1- type2), considérés dans cet algèbre de colombeau. Enfin on a prouver que les solutions trouvées restent dans cet algèbre.

Introduction

Le concept de ce qu'on appelle aujourd'hui "distribution" est très ancien, il remonte à l'époque de Heaviside et Dirac quand ils ont considéré d'une manière intuitive ce type de concepts pour répondre à des questions concrètes dans la physique. Au fil du temps, le mathématicien Laurent Schwartz a proposé un cadre fonctionnel pour étudier d'une manière rigoureuse ce type d'objets introduit intuitivement par Heaviside et Dirac et il a appelé ce cadre théorique "théorie de distributions". C'est une théorie qui a trouvé ses applications dans plusieurs domaines de la science, ce qui a permis à Laurent Schwartz de recevoir un médial fields en 1950. Dans la même époque de Laurent Schwartz, cette nouvelle théorie a été bien développée et plusieurs problématiques et conjectures ont été rencontrées par exemple le produit de deux distributions est l'un des plus grands problèmes de la théorie des distributions et pour donner un sens au produit de deux distributions Laurent Schwartz a proposé d'injecter l'espace des distributions $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$ dans un espace $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ plus grand de telle sorte que cette opération sera bien définie. Mais malheureusement il a prouvé que cette espace n'existe pas dans le sens, où :
1)La loi $\bullet$ associative, commutative.
2)$\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte linéairement dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ avec $f \equiv 1$ son unité.
3)La dérivé dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, coincide avec la dérivée au sens des distributions.
4)La loi $\bullet$ sur $C(\mathbb{R}^n) \times C(\mathbb{R}^n)$ coincide avec le produit usuel.

Pour cela, on propose un aperçu sur la preuve de Laurent Schwartz.

Impossibilité 1

Soit H la fonction Heaviside définie par :

$$\begin{cases} H(x) = 1, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ H(x) = 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

On a $H = H^2$ et $H^2 = H^3$.

Donc

$$H^{'} = 2HH^{'} = 3H^2H^{'} = 3HH^{'} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

Et

$$2HH^{'} = 3H^2H^{'} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

D'où

$$2HH^{'} = 3HH^{'} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$HH^{'} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

Et par conséquent

$$H^{'} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}).$$

Ce qui est absurde, car $H^{'} = \delta$ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

Impossibilité 2 Soit $vp(\frac{1}{x})$ la valeur principale de Cauchy définie comme suit :

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \phi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right].$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta &= (x \bullet vp(\frac{1}{x})) \bullet \delta \\ &= (vp(\frac{1}{x}) \bullet x) \bullet \delta \\ &= vp(\frac{1}{x}) \bullet (x \bullet \delta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Car $x \bullet \delta = 0$ au sens des distributions.

Or $\delta \neq 0$ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

Impossibilité 3

Supposons que $\delta^2 \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que

1) $supp(\rho_n) \to \{0\}$, quand $n \to +\infty$.

2) $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, ...$

Il est évident que $\rho_n \to \delta$ dans $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = 1$ au voisinage de 0 et $supp(\rho_n) \subset supp(\varphi)$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle \rho_n^2, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2(x)dx. \end{aligned}$$

(ρ_n) est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R})$, alors (ρ_n) admet une sous-suite qui converge dans $L^2(\mathbb{R})$. Or δ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$.

Dans l'objectif de répondre aux postulats proposés par Laurent Schwartz, le mathématicien français Jean François COLOMBEAU parvient, en 1980, à élaborer une algèbre nommée l'algèbre des fonctions généralisées notée $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ vérifiant les propriétés (1),(2) et (3) et la propriété suivante à la place de (4) :
4') La restriction de la loi $\bullet$ sur $C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec le produit usuel. Les livres [1], [2] et [3] de Jean François COLOMBEAU exposent d'une manière détaillée la base fondamentale sur laquelle repose sa théorie des fonctions généralisées.

Notre objectif dans ce travail de thèse est de donner un sens aux dérivées fractionnaires conforme dans l'algèbre de Colombeau.

Les dérivées fractionnaires sont bien adaptées pour étudier les systèmes dynamiques possédant un effet mémoire. Pour plus de détails concernant les applications et l'histoire du calcul fractionnaire on propose les références [Kilabas, Miller, Oldhma, Podlubni].

La dérivée fractionnaire conforme a été introduite par Khalil [26] en 2014 comme suit :

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration d'ordre non-entier.

L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière que nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous.

Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [24], thermiques [14] et viscoélastiques [3],[16], sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est pas donc appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [23].

Dans la littérature, l'histoire du calcul fractionnaire a commencé par la lettre : Que signifie "$\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$", adresser par l'Hospital en 1965 à Leibniz qui a introduit avec Newton le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée apparament entière d'une fonction f. Cette lettre était le premier indice d'une nouvelle théorie de dérivation d'ordre arbitraire appelée dérivation fractionnaire et qui unifie et généralise la dérivation d'ordre entier (classique). Et depuis ce temps, cette théorie a attiré l'attention des célèbres mathématiciens comme Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann et Laurent.

Les concepts de dérivation et intégration fractionnaires sont souvent associés au noms de Riemann et Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.

Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés à cette théorie et les champs de ses applications se sont diversifiés, elle a donc connu récemment un grand intérêt vue qu'elle possède un effet de mémoire qu'elle partage avec plusieurs matériaux viscoélastiques ou polymères.

Deux raisons principales semblent expliquer cet intérêt grandissant : d'une part, l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier dans le cadre d'applications variées (automatique, analyse d'image, viscoélasticité, diffusion fractale, etc...) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie ([17], [15], [30], [25]). D'autre part, et d'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant [Srivastava et Owa 1989].

Le reste de notre travail va développer plusieurs points qui sera organisé comme suit :

Dans le chapitre 1 on rappellera quelques résultats et définitions de l'algèbre de J.F. Colombeau et calcul fractionnaire.

Dans le chapitre 2 on se propose de définir les dérivées fractionnaires conformes et leurs intégrales associées dans l'algèbre de J.F. Colombeau.

Le chapitre 3 sera réservé à l'étude de quelques problèmes avec une dérivée fractionnaire conforme dans l'algèbre de J.F. Colombeau.

On finira par une conclusion et des perspectives

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Algèbre de J.F. Colombeau

1.1.1 Introduction

L'algèbre de Colombeau est une algèbre qui contient l'espace des distributions de Schwartz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. Alors que dans la théorie classique de la distribution, une multiplication générale des distributions n'est pas possible, l'algèbre de Colombeau fournit un cadre rigoureux pour cela. Une telle multiplication des distributions a longtemps été considérée comme impossible en raison du résultat d'impossibilité de L. Schwartz, qui déclare essentiellement qu'il ne peut pas y avoir d'algèbre différentielle contenant l'espace des distributions et préservant le produit des fonctions continues. Cependant, si l'on veut seulement conserver le produit des fonctions régulières, une telle construction devient possible, comme a été démontré pour la première fois par J.F. Colombeau.

En tant qu'outil mathématique, on peut dire que l'algèbre de Colombeau combine un traitement des singularités, de la différenciation et des opérations non linéaires dans un même cadre, levant les limites de la théorie de la distribution. Cet algèbre a trouvé de nombreuses applications dans les domaines des équations aux dérivées partielles, de la géophysique, de l'analyse microlocale et de la relativité générale jusqu'à présent.

Certaines solutions au problème de multiplication ont été proposées. L'une est basée sur une définition très simple et intuitive d'une fonction généralisée donnée par Yu. V. Egorov ([31]) qui permet des opérations arbitraires sur et entre les fonctions généralisées.

Une autre solution du problème de multiplication est dictée par la formulation intégrale du chemin de la mécanique quantique. Puisque cela doit être équivalent à la théorie de Schrödinger de la mécanique quantique qui est invariante sous les transformations de coordonnées, cette propriété doit être partagée par les intégrales de chemin. Cela corrige tous les produits de fonctions généralisées comme l'ont montré H. Kleinert et A. Chervyakov ([12]). Le résultat est équivalent à ce qui peut être dérivé de la régularisation dimensionnelle ([11]). Plusieurs algèbres de fonctions généralisées ont été proposé par exemple celles de Yu. M. Shirokov ([32]) et ceux d'E. Rosinger, Y. Egorov et R. Robinson ([31]). Dans le premier cas, la multiplication est déterminée avec une certaine régularisation de la fonction généralisée. Dans le second cas, l'algèbre est construite comme une multiplication des distributions.

1.1.2 Préliminaires

Dans cette section, on va présenter la construction de l'algèbre de colombeau, et on va rappeler quelques résultats et définitions qui seront nécessaires pour notre travail. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mathcal{A}_q$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_q = \{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) / \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \phi(t)dt = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq |\alpha| \leq q\},$$

avec

$$t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \quad \text{et} \quad t^\alpha = t_1^{\alpha_1} ... t_n^{\alpha_n}.$$

Proposition 1.1.1. Nous avons les résultats suivants :

1. La famille $(\mathcal{A}_q)_{q\geq 1}$ est strictement décroissante au sens de l'inclusion c-à-d $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset ... \supset \mathcal{A}_q \supset \mathcal{A}_{q+1} \supset ...$
2. $\mathcal{A}_q \neq \emptyset \qquad \forall q = 1, 2, ...$
3. L'intersection $\bigcap_{q=1}^{\infty} \mathcal{A}_q$ est vide.

Notation 1.1.1. On note par $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ l'ensemble des fonctions

$$u : \mathcal{A}_1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(\phi, x) \longmapsto u(\phi, x),$$

qui sont définies C^∞ par rapport à x.

Proposition 1.1.2. $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ est une algèbre.

1.1.3 Algèbre des fonctions généralisées de Colombeau

Définition 1.1.1. Soit u élément de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$.
On dit que u est modéré si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, pour tout opérateur de dérivation

∂^α, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{A}_N$ nous avons

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

avec $u_\varepsilon(x) = u(\phi_\varepsilon, x)$ ou $\phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{t}{\varepsilon})$. On note par $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ l'ensemble des éléments modérés de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$.

Remarque 1.1.1. On a l'équivalence suivante :
$\phi_\varepsilon \in \mathcal{A}_N$ si est seulement si $\phi \in \mathcal{A}_N$.

Proposition 1.1.3. $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ est une algèbre.

Exemple 1.1.1. Soit $u(\phi, x) = \phi(x)$. Alors

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \phi_\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Alors pour tout opérateur de dérivation, on a

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}\partial^\alpha \phi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+|\alpha|}} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(\frac{x}{\varepsilon})| \\ &\leq \varepsilon^{-n-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Donc $u \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$.

Exemple 1.1.2. Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$.
On pose $v(\phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)dy$. Alors

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dy. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial^\alpha v_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|+n}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial^\alpha\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K}|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\phi(t)dt| &\leq \sup_{x\in K, t\in supp(\phi), \delta\in[0,1]}|f(x-\delta t)|\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha\phi(t)|dt\\ &\leq c.\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha v_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Donc $\quad v \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$.

Définition 1.1.2. On dit qu'un élément u de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ est nul si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et pour tout opérateur de dérivation ∂^α, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq N$ et $\phi \in \mathcal{A}_q$, nous avons

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^q) \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

On note par $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ l'ensemble des éléments nuls de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$.

Exemple 1.1.3.

! Soit $\phi \in \mathcal{A}_1$, on note par $d(\phi)$ le diamètre de ϕ c-à-d : $d(\phi) = \sup_{x,y\in supp(\phi)}\{|x-y|\}$. On a

$$d(\phi_\varepsilon) = \varepsilon d(\phi).$$

On pose

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x) &= \exp\big(\frac{-1}{d(\phi_\varepsilon)}\big)\\ &= \exp\big(\frac{-1}{\varepsilon d(\phi)}\big)\end{aligned}$$

On remarque que $u_\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ d'une manière exponentielle quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Alors

$$|u_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon^p, \qquad \forall p.$$

Donc $u \in \mathcal{N}[\mathbb{R}]$.

Proposition 1.1.4. $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ est un idéal de $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$.

Définition 1.1.3. L'algèbre des fonction généralisées de Colombeau notée $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ est définie comme suit :

$$\mathcal{G}[\mathbb{R}^n] = \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]/\mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

Remarque 1.1.2. Soit $u \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$, alors

$$\begin{aligned} u &= (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \qquad \text{avec} \quad (u_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n] \\ &= [(u_\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Définition 1.1.4. Soient u, v deux éléments de $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$, tels que

$$u = (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \qquad \text{avec} \quad (u_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n],$$

$$v = (v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \qquad \text{avec} \quad (v_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n].$$

Alors :
1) On défini l'égalité comme suit : $u = v$ si et seulement $(u_\varepsilon) - (v_\varepsilon) \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$.
2) On définit la somme par : $u + v = [(u_\varepsilon) + (v_\varepsilon)]$.
3) Produit : $u \bullet v = [(u_\varepsilon).(v_\varepsilon)]$.

Maintenant, nous introduirons l'algèbre des fonction généralisées de Colombeau $G^k[\mathbb{R}^n]$. On note par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M^k(\mathbb{R}^n) &= \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) / \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n, \forall m \in \mathbb{N}_0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ &\quad \sup_{x\in K} |D^m u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), m \in \{0, ..., k\}, \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^k(\mathbb{R}^n) &= \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) / \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n, \forall m \in \mathbb{N}_0, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \\ &\quad \sup_{x\in K} |D^m u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{p}), m \in \{0, ..., k\} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0\}. \end{aligned}$$

L'algèbre des fonction généralisées de Colombeau notée $G^k[\mathbb{R}^n]$ est définie par :

$$\mathcal{G}^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_M^k(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}^k(\mathbb{R}^n).$$

1.1.4 Propriétés de l'algèbre $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$

Dans ce paragraphe, nous allons présenter successivement l'injection de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^0(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$.

Proposition 1.1.5. L'espace $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$.

Démonstration. Considérons l'application f suivante :

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto (f_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n],$$

avec

$$f_\varepsilon(x) = f(x).$$

Cette application est bien définie. En effet, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $f_\varepsilon(.) = f(.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
D'autre part, pour tout opérateur de dérivation, on a $\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \partial^\alpha f(x)$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| &= \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \\ &= c \\ &\leq c\varepsilon^{-N}. \end{aligned}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \to 0$.
Donc $(f_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$.
D'autre part, on a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, $(f_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] = \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$.

De plus, d'après la définition de $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{x\in K} |f(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Donc $f = 0$. $\square$

Lemme 1.1.1. Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = f(x),$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dt.$$

Comme $\phi \in \mathcal{A}_1$ et f est continue. Alors on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et on obtient le résultat. $\square$

Proposition 1.1.6. L'espace $C^0(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$.

Démonstration. Considérons l'application f suivante :

$$f \in C^0(\mathbb{R}^n) \mapsto (f_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n],$$

avec

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy,$$

où $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\phi \in \mathcal{A}_1$, alors

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy. \end{aligned}$$

Alors, pour tout opérateur de dérivation

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|+n}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial^\alpha\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\partial^\alpha\phi(t)dt\Big| &\le \sup_{x\in K, t\in supp(\phi), \theta\in[0,1]} |f(x-\theta t)| \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha\phi(t)|dt \\ &\le c. \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha f_\varepsilon(x)| \le c\varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Donc

$$(f_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n].$$

Il reste à montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ et $(f_\varepsilon) \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, alors $f = 0$.
Soit $(f_\varepsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\sup_{x\in K}|f_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Nous appliquons le lemme précédent, on obtient $f = 0$ sur tout compact K et donc $f = 0$. □

Remarque 1.1.3. On a les inclusions suivantes

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{G}[\mathbb{R}^n].$$

En effet, soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$.
Si on considère la première injection, d'où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto (g_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$$

avec

$$g_\varepsilon(x) = f(x).$$

Si on considère la deuxième injection alors

$$C^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}[\mathbb{R}^n].$$

Et

$$f \in C^0(\mathbb{R}^n) \mapsto (f_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n],$$

avec

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dt - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-\varepsilon t)\phi(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x-\varepsilon t) - f(x))\phi(t)dt. \end{aligned}$$

Puisque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous pouvons appliquer la formule de Taylor jusqu'à l'ordre q de f au point $x$comme suit.

$$f(x+\varepsilon t) - f(x) = \sum_{k=1}^{q} \frac{(-\varepsilon t)^k}{k!}\partial^{(k)} f(x) + \frac{(-\varepsilon t)^{q+1}}{(q+1)!}\partial^{(q+1)} f(x+\theta\varepsilon t),$$

avec $0 < \theta < 1$.

Alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sup_{x\in K} |(f_\varepsilon - f)(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1})$$

quand $\varepsilon \to 0$.

De la même manière, on montre que pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha(f_\varepsilon - f)(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{q+1}), \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Donc

$$(f_\varepsilon) - (g_\varepsilon) \in \mathcal{N}[\mathbb{R}].$$

Théorème 1.1.1.

L'injection $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ est définie par

$$u \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n) \mapsto (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$$

avec

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= (u * \phi_\varepsilon)(x) \\ &= \langle u(y), \phi_\varepsilon(x-y)\rangle, \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.4.

La distribution de Dirac δ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ comme suit :

$$(\delta_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon(x) &= (\delta * \phi_\varepsilon)(x) \\ &= \langle \delta(y), \phi_\varepsilon(x-y)\rangle \\ &= \phi_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

où $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.4.

On définit l'opérateur ∂^α par :

$$\partial^\alpha : \mathcal{G}[\mathbb{R}^n] \longrightarrow \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$$

$$u \longmapsto \partial^\alpha u \quad \text{avec} \quad \partial^\alpha u = (\partial^\alpha u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

On a

$$\partial^\alpha \mathcal{G}[\mathbb{R}^n] \subset \mathcal{G}[\mathbb{R}^n] \quad \text{et} \quad \partial^\alpha \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \subset \mathcal{N}[\mathbb{R}^n],$$

pour tout opérateur de dérivation ∂^α.
Il s'ensuit que l'opérateur de dérivation ∂^α est linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

Exemple 1.1.5.
Soit H la fonction de Heaviside. Alors, $H \in \mathcal{G}[\mathbb{R}]$ et on a

$$H = (h_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}].$$

Avec

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_\varepsilon(y)dy,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors

$$H^{'} = (h_\varepsilon^{'}) + \mathcal{N}[\mathbb{R}],$$

où

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^{'}(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \phi_\varepsilon(y)dy \\ &= \phi_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Donc $H^{'} = \delta \qquad \text{dans} \quad \mathcal{G}[\mathbb{R}]$.

Définition 1.1.5. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite lentement croissante à l'infini s'il existe $c > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|)^N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par $O_M(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions qui sont $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et leurs dérivées sont lentement croissantes à l'infini.

Remarque 1.1.5. Tout polynôme est un élément de $O_M(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.1.2. Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^n)$. Si u_1, u_2,...,$u_m \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ et $(u_{1,\varepsilon})$, $(u_{2,\varepsilon})$,...,$(u_{m,\varepsilon})$ leurs représentants
respectivement, alors $f(u_1, u_2, ..., u_m)$ est un élément de $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ de représentant $(f(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, ..., u_{m,\varepsilon}))$.

Démonstration.
Si f est un élément de $O_M(\mathbb{R}^m)$ et $u = (u_1, u_2,...,u_m) \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]^m$, alors $f(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, ..., u_{m,\varepsilon})$, ainsi que ses dérivées sont majorées par des polynômes en fonction de $u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, ..., u_{m,\varepsilon}$. Donc

$$(f(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}, ..., u_{m,\varepsilon})) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n].$$

Pour tout $1 \leq k \leq m$, on note par $(\widetilde{u}_{k,\varepsilon})$ un autre représentant de u_k.
Alors $n_{k,\varepsilon} = u_{k,\varepsilon} - \widetilde{u}_{k,\varepsilon}$, avec $n_{k,\varepsilon} \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$.

Donc

$$|f(u_\varepsilon(x)) - f(\widetilde{u}_\varepsilon(x))| \leq |n_\varepsilon(x)| + \int_0^1 |(Df)(\widetilde{u}_\varepsilon(x) + \sigma n_\varepsilon(x))| d\sigma.$$

Alors

$$f(u_\varepsilon(x)) - f(\widetilde{u}_\varepsilon(x)) \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

□

Exemple 1.1.6. On a e^{ix} est un élément de $O_M(\mathbb{R})$. Comme δ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}]$ sous la forme :

$$\phi(x) + \mathcal{N}[\mathbb{R}] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}]$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Alors d'après le théorème précédent $e^{i\delta}$ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}]$ sous la forme :

$$e^{i\phi} + \mathcal{N}[\mathbb{R}] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}],$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}$.

1.1.5 Association

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nous avons $x\delta = 0$ et $H^m = H$ pour tout $m = 2, 3, ...$ Cependant, $x\delta \neq 0$ et $H^m \neq H$ pour tout $m = 2, 3, ...$ dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$. J.F. Colombeau s'est trouvé donc, dans le besoin d'établir un concept d'égalité faible dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ qui permet de surmonter cette digression.

Définition 1.1.6. Soit $u, v \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$, tel que

$$u = (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n],$$

$$v = (v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

On dit que u et v sont associées et on note $u \approx v$ si :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)(x)\psi(x)dx = 0, \text{ pour tout}\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 1.1.7. Soient

$$u = (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n],$$

$$v = (v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

Tel que

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\rho(\frac{x}{2\varepsilon}).$$

Avec

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

On a

$$u_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Et

$$v_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon(x)dx = 1.$$

De plus

$$supp(u_\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \text{et} \quad supp(v_\varepsilon) = [-2\varepsilon, 2\varepsilon].$$

On a

$$(u_\varepsilon), (v_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}].$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, comme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{2\varepsilon}\rho(\frac{x}{2\varepsilon})\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Alors $u \approx v$.

Exemple 1.1.8. Soit H la fonction de Heaviside.

Alors

$$H = (h_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}].$$

Avec

$$h_\varepsilon(x) = \int_{\frac{-x}{\varepsilon}}^{+\infty} \phi(y)dy,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Par conséquent

$$H^m = (h_\varepsilon^m) + \mathcal{N}[\mathbb{R}] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}],$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$. On pose

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy.$$

On a $\quad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{x\to-\infty} \chi(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \chi(x) = 1$

et $\quad \chi'(x) = \phi(x) \quad$ pour tout $\quad x \in \mathbb{R}$.

Nous voyons que

$$h_\varepsilon(x) = 1 - \chi\big(\frac{-x}{\varepsilon}\big), \qquad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\begin{aligned}
k(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)(h_\varepsilon^m(x) - h_\varepsilon(x))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\big([1-\chi(\frac{-x}{\varepsilon})]^m - [1-\chi(\frac{-x}{\varepsilon})]\big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)w_\varepsilon(x)dx.
\end{aligned}$$

Avec

$$w_\varepsilon(x) = [1-\chi(\frac{-x}{\varepsilon})]^m - [1-\chi(\frac{-x}{\varepsilon})].$$

Nous remarquons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \neq 0, \\ (1-\chi(0))^m - (1-\chi(0)), & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$|w_\varepsilon(x)| \leqslant (1+M)^m + (1+M),$$

où $\quad M = \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)|dy < +\infty$.

Ce qui nous permet d'appliquer le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = 0.$$

Donc

$$H \approx H^m, \qquad m = 1, 2, ...$$

Exemple 1.1.9. On a δ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}]$, sous la forme

$$\delta = (\delta_\varepsilon) + \mathcal{G}[\mathbb{R}].$$

Avec

$$\delta_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(x),$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors $x\delta$ s'injecte dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}]$, sous la forme

$$x\delta = (h_\varepsilon) + \mathcal{G}[\mathbb{R}].$$

Avec

$$h_\varepsilon(x) = x\phi_\varepsilon(x),$$

pour tout $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi(x)h_\varepsilon(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\phi_\varepsilon(x)dx \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} t\psi(\varepsilon t)\phi(t)dt.\end{aligned}$$

Comme $|\psi(\varepsilon t)| \leqslant M$avec $\quad M = \sup_{t \in supp\psi, \theta \in [0,1]} |\psi(\theta t)| < \infty$. D'après le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, on aura

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)h_\varepsilon(x)dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon \int_{\mathbb{R}} t\psi(\varepsilon t)\phi(t)dt\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où $x\delta \approx 0$.

Remarque 1.1.6.
la relation d'association($\approx$) est une relation d'équivalence.

Proposition 1.1.7. Soient $u, v \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$, tels que

$$u = (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n],$$

$$v = (v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

On a $u \approx v \Rightarrow \partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v, \qquad \forall \alpha \quad$ un multi-indice.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$, alors

$$u = (u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \qquad \text{avec} \quad (u_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n],$$

$$v = (v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n] \qquad \text{avec} \quad (v_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n].$$

Donc

$$\partial^\alpha u = (\partial^\alpha u_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n],$$

$$\partial^\alpha v = (\partial^\alpha v_\varepsilon) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

D'autre part, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha u_\varepsilon - \partial^\alpha v_\varepsilon)\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\partial^\alpha \psi(x)dx.$$

Comme $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $u \approx v$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha u_\varepsilon - \partial^\alpha v_\varepsilon)\psi(x)dx = 0.$$

Ainsi

$$\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v.$$

□

Remarque 1.1.7. Soit $u, v \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$. Alors, $u \approx v$ n'implique pas que $u = v$.

En effet, on a $x\delta \approx 0$ dans $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$.

Mais

$$x\delta \neq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}[\mathbb{R}^n].$$

Donc

$$u \approx v \quad \text{n'implique pas} \quad u = v.$$

1.1.6 Nombres réels généralisés

L'algèbre $\mathcal{G}[\mathbb{R}^n]$ des fonctions généralisées étant définie, alors nous avons besoin de donner un sens à la valeur d'une fonction généralisée F en chaque point x appartenant à $\mathbb{R}^n$. C'est été la raison pour laquelle J.F. Colombeau a procédé à la construction de l'algèbre des nombres réels généralisés.

Notation 1.1.2.

- On note par $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $r \in \mathcal{E}_0$. On note

$$r_\varepsilon = r(\phi_\varepsilon), \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_1.$$

Remarque 1.1.8. L'ensemble $\mathcal{E}_0$ est une algèbre.

Définition 1.1.7. On dit qu'un élément $r \in \mathcal{E}_0$ est modéré s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{A}_N$ on a

$$|r_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

On note par $\mathcal{E}_M$ l'ensemble des éléments modérés de $\mathcal{E}_0$.

Exemple 1.1.10.

-Soit $\phi \in \mathcal{A}_1$ et $r(\phi) = 1 + e^{-\frac{1}{d(\phi)}}$ avec $d(\phi)$ est le diamètre de support de ϕ, alors $r \in \mathcal{E}_M$.
En effet,soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$ et $\phi \in \mathcal{A}_1$, alors

$$r(\phi) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad supp(\phi) \subset [0, +\infty[, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Donc est un élément de $\mathcal{E}_M$.

Proposition 1.1.8. L'ensemble $\mathcal{E}_M$ est une sous algèbre de $\mathcal{E}_0$.

Définition 1.1.8. On dit qu'un élément $r \in \mathcal{E}_M$ est nul s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{A}_N$, on a

$$|r_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^q), \qquad \forall q \qquad \text{et } \varepsilon \to 0.$$

On note par $\mathcal{I}$ l'ensemble des éléments nuls de $\mathcal{E}_M$.

Remarque 1.1.9. L'ensemble $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{E}_M$.

Définition 1.1.9. L'algèbre des nombres réels généralisés notée $\widetilde{\mathbb{R}}$ est définie par :

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_M / \mathcal{I}.$$

Chaque élément de $\widetilde{\mathbb{R}}$ est appelé un nombre réel généralisé.

Notation 1.1.3. Soit $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$, alors

$$\begin{aligned} r &= (r_\varepsilon) + \mathcal{I} \qquad \text{avec} \quad (r_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M \\ &= [(r_\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.10. Soit x, y deux nombres réels généralisés, tel que

$$x = (x_\varepsilon) + \mathcal{I} \qquad \text{avec} \quad (x_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M$$

$$y = (y_\varepsilon) + \mathcal{I} \qquad \text{avec} \quad (y_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M$$

Alors

1) $x = y$ si et seulement $(x_\varepsilon) - (y_\varepsilon) \in \mathcal{I}$.

2) $x + y = [(x_\varepsilon) + (y_\varepsilon)]$.

3) $x.y = [(x_\varepsilon).(y_\varepsilon)]$.

Remarque 1.1.11. L'ensemble des nombres réels s'injecte dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, comme suit

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$$

$$x \mapsto (x_\varepsilon) + \mathcal{I},$$

avec $x_\varepsilon = x$ et $\forall \phi \in \mathcal{A}_1$.

Chapitre 2

Dérivées fractionnaires conformes dans l'algèbre de Colombeau

2.1 La dérivée fractinnaire conforme

2.1.1 Introduction

La théorie de la dérivée fractionnaire est une théorie très ancienne, qui remonte à une conversation au 30 septembre 1695 entre Hôpital et Leibniz concernant la définition de l'opérateur $\frac{d^n}{dx^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Ainsi, au fil du temps, certaines approches ont été données dans la littérature comme la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo. Dans ce paragraphe on va rappeler quelques définitions et résultats de la théorie de dérivation fractionnaire dérivée fractionnaire

Définition 2.1.1 (56)**.** Pour $\alpha \in (0,1)$, la dérivée fractionnaire d'une fonction f au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$$ {}_aD_R^{\alpha} f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds. \tag{2.1} $$

Où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par l'intégrale suivante :

$$ \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. $$

Nous remarquons que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas forcement nulle, mais cette propriété est vraie pour la dérivée fractionnaire au sens de Caputo définie par :

Définition 2.1.2. La définition fractionnaire au sens de Caputo est définie par :

$$ {}_aD_C^{\alpha} f(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f^{(')}(s) ds. \tag{2.2} $$

Il est clair que les deux définitions précédentes ne satisfont pas certaines propriétés de la dérivée classique, comme la formule de Leibniz et la formule d'intégration par parties. Donc, la question est peut-on trouver une définition fractionnaire similaire à la dérivée classique ?. Rappelons que, si on note par T_1 l'opérateur de la dérivée classique. Alors, on a les propriétés suivantes :

1. $T_1(af + bg) = aT_1(g) + bT_1(f)$, pour tout a,b $\in \mathbb{R}$ et f, g dans le domaine de T_1.
2. $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$.
4. $T_1(\frac{f}{g}) = \frac{fT_1(g)+gT_1(f)}{g^2}$
5. $T_1(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.

A la base de cette idée Khalil a proposé une dérivée dite dérivée conforme définie comme suit.

Définition 2.1.3. [26] Soit la fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, la dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ est définie par :

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

pour tout $t > 0$. On dit que f est α-différentiable au point t, lorsque la limite précédente existe. Si f est α-différentiable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ et $\lim_{t \to 0^+} T_\alpha(f)(t)$ existe, alors on note

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} T_\alpha(f)(t).$$

Théorème 2.1.1. Si une fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est α-différentiable à $t_0 > 0$, alors f est continue à t_0.

Démonstration. Puisque $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon} \times \varepsilon$. Alors $\lim_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \times \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$.
Soit $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$. Alors,
$\lim_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \times 0$, ce que implique que $\lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$.
Par conséquent, f est continue à t_0. $\square$

Théorème 2.1.2. [26] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et f, g deux fonctions α-différentiables sur $[0, +\infty[$. Alors

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$, pour tout a,b $\in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constantes $f(t) = \lambda$.

4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.

5. $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)}{g^2}$.

6. Si f est différentiable, alors $T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha}f'(t)$.

Démonstration. Les propriétés (1) à (3) découlent directement de la définition. Nous choisissons de prouver (4) et (6) seulement parce qu'ils sont cruciaux. Alors, soit $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\ &= T_\alpha f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha g(t). \end{aligned}$$

Puisque g est continue à t alors $\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$. Ceci complète la preuve de la propriété (4). (5) peut être prouver dans une semblable façon. Pour prouver (6), posons $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dans la définition (1.2.4). Donc,

$$\begin{aligned} T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{1-\alpha}} \\ T_\alpha f(t) &= t^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ T_\alpha f(t) &= t^{1-\alpha}f'(t). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.1.1. Pour $0 < \alpha \leq 1$ on a :

1. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

2. $T_\alpha(1) = 0$.

3. $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.

4. $T_\alpha(\sin(bx)) = bx^{1-\alpha}\cos(bx)$, $b \in \mathbb{R}$.

5. $T_\alpha(\cos(bx)) = -bx^{1-\alpha}\sin(bx)$, $b \in \mathbb{R}$.

6. $T_\alpha(\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = 1$.

Exemple 2.1.2. Cependant, on a les dérivées fractionnaires conformes des fonctions suivantes :

1. $T_\alpha(\sin(\frac{1}{\alpha}t^\alpha x)) = \cos(\frac{1}{\alpha}t^\alpha x)$.

2. $T_\alpha(\cos(\frac{1}{\alpha}t^\alpha x)) = -\sin(\frac{1}{\alpha}t^\alpha x)$.
3. $T_\alpha(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

Notons que la dérivée fractionnaire conforme est meilleure que la dérivée classique pour les fonctions non régulières. En effet, par exemple la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ n'est pas différentiable en 0^+, mais elle est α-différentiable en 0^+. De plus, ona

$$T_{\frac{1}{2}}(f)(0) = \lim_{t\to 0^+} T_{\frac{1}{2}}(f)(t) = 1.$$

D'où $T_{\frac{1}{2}}(f)(0) = 1$.
Le cas où $\alpha \in (0,1)$ est le plus important, mais R. khalil a introduit la dérivée fractionnaire dans le cas $\alpha \in (n, n+1)$ avec n entière naturale de la façon suivante :

Définition 2.1.4. [26] Soient $\alpha \in (n, n+1)$ et la fonction f est n-différentiable en $t > 0$, alors la dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α est définie par :

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t + \varepsilon t^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon}.$$

Avec $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Remarque 2.1.1. En conséquence de la définition précédente, on peut facilement montrer que :

$$T_\alpha f(t) = t^{[\alpha]-\alpha} f^{([\alpha]-1)}(t).$$

Où $\alpha \in (n, n+1)$ et f est $(n+1)$-différentiable en $t > 0$

Remarque 2.1.2. Les définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo ne permettent pas d'étudier l'analyse des fonctions α-différentiables. Cependant, la dérivée fractionnaire conforme nous permettons de prouver des théorèmes d'analyse comme le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finies.

Théorème 2.1.3. (le théorème de Rolle) Soient $a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction satisfait les propriétés suivantes :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est α-différentiable pour $\alpha \in]0, 1[$,
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe un $c \in]a, b[$, tel que $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Démonstration. Puisque f est une fonction continue sur $[a,b]$, et $f(a) = f(b)$, alors f admet un extremum local en $c \in]a,b[$. Sans perte de généralité, supposons que c est un point de minimum local. Donc

$$T_\alpha f(c) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}.$$

Mais, la première limite n'est pas négative et la deuxième limite n'est pas positive. Donc $f^{(\alpha)}(c) = 0$. □

Théorème 2.1.4. (le théorème accroissements finies) Soient $a > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction satisfait les propriétés suivantes :

1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est α-différentiable pour $\alpha \in]0,1[$.

Alors, il existe un $c \in]a,b[$, tel que

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(a) = f(b)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha}.$$

Démonstration. Considérons la fonctions

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(a) = f(b)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha} (\frac{1}{\alpha} x^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha).$$

Alors la fonction g satisfait les conditions du théorème de Rolle. Donc, il existe un $c \in]a,b[$, tel que $g^{(\alpha)}(c) = 0$. En utilisant le fait que $T_\alpha(\frac{1}{\alpha} t^\alpha) = 1$, donc on obtient le résultat. □

Dans la même procédure, on peut utiliser le théorème des accroissements finies pour prouver la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction α-différentiable pour $\alpha \in]0,1[$.

- Si f^α est bornée sur $[a,b]$, où $a > 0$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$ et donc f est bornée.
- Si f^α est bornée sur $[a,b]$ et continue au point a. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$ et donc f est bornée.

2.1.2 L'intégral fractionnaire conforme

En matière d'intégration, la classe des fonctions la plus importante pour définir l'intégrale est l'espace des fonctions continues. Ainsi, en utilisant le théorème de Weierstrass, il suffit de définir l'intégrale fractionnaire sur les polynômes. Pour ceci, soit $\alpha \in]0,1[$. On définie $J_\alpha(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$, et $\alpha \neq -p$.

Si $f(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, alors on définit J_α par $J_\alpha(f)=\sum_{k=0}^{n} b_k J_\alpha(t^k)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$.
Si $f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$, où la série est uniformément convergente, alors on définie $J_\alpha(f)$ par $J_\alpha(f)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$.
Clairement, J_α est linéaire sur son domaine de définition. De plus, si $\alpha=1$, alors J_α est l'intégrale usuelle. exemple, si $\alpha=\frac{1}{2}$, alors $J_\alpha(\sin(t))=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+\frac{3}{2}}}{(2n+\frac{3}{2})(2n+1)}$.
De même pour $\cos(t)$ et e^t pour tout $\alpha \in]0,1[$.
Ces exemples suggèrent la définition suivante de l'intégrale α-fractionnelle d'une fonction f à partir d'un $a \geq 0$

Définition 2.1.5. [26] Pour $\alpha \in (0,1)$ et $a \geq 0$, l'intégrale fractionnaire conforme d'une fonction continue est définie par :

$$I_\alpha^a(f)(t)=\int_a^t s^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Théorème 2.1.5. [26] Supposons que $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ est continue et $0<\alpha\leq 1$. Alors, pour tout $t>a$ on a

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t)=f(t).$$

Démonstration. Puisque f est continue, alors $I_\alpha^a f(t)$ est différentiable. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt} I_\alpha^a(f)(t). \\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t s^{\alpha-1} f(s)ds. \\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt} t^{\alpha-1} f(t). \\ &= f(t). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.1.1. [29] Soit $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable et $0<\alpha<1$. Alors, pour tout $t>a$, on a

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t)=f(t)-f(a).$$

2.1.3 Applications

Maintenant, nous allons résoudre des équations différentielles fractionnaires avec une dérivée fractionnaire conforme.

Exemple 2.1.1. $y^{\frac{1}{2}} + y = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}}$, $y(0) = 0$. C'est l'équation que nous avons mentionné dans l'introduction avec l'approximant $\Gamma(2.5) = 1.33$ à 1.
Trouvons une solution y_h de l'équation homogène $y^{\frac{1}{2}} + y = 0$. Nous recherchons une solution de la forme $y_h = e^{r\sqrt{x}}$ $y^{\frac{1}{2}} + y = 0$, alors $\frac{r}{2}e^{r\sqrt{x}} + e^{r\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}r + 1 = 0$. Par conséquent $y_h = e^{-2\sqrt{x}}$. Il est facile de vérifier que $y_p(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation non homogène.

Et par suite, la solution générale est donnée par $y(x) = y_h + y_p(x) = Ae^{-2\sqrt{x}} + x^2$, où A est une constante. Finalement, la condition initiale $y(0) = 0$ implique que $A = 0$. Ainsi, $y(x) = x^2$.
Remarquons que cette équation est difficile à résoudre si on considère la dérivé fractionnaire au sens de Caputo ou Riemann-Liouville, mais dans le cadre conforme nous arrivions à donner une solution explicite.

Exemple 2.1.2. On peut facilement montrer que l'équation caractéristique pour $y^{\alpha} + y = 0$, avec $0 < \alpha \leq 1$ est donnée par $\alpha r + 1 = 0$, donc $y(x) = e^{-\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}}$.

Remarque 2.1.3. Nous signalons que la méthode de factor intégrant reste valable dans le cadre de la dérivé fractionnaire conforme.

Exemple 2.1.3. $y^{(\frac{1}{2})} + \sqrt{x}y = xe^{-x}$. Nous résolvons cette équation en la multipliant par e^x. Alors $e^x y^{(\frac{1}{2})} + \sqrt{x}e^x y = x \Longrightarrow (e^x y)^{(\frac{1}{2})} = x \Longrightarrow e^x y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \Longrightarrow y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}e^{-x} + Ce^{-x}$, avec C est une constante, ce qui peut être facilement vérifié comme étant une solution de l'équation ci-dessus.

Exemple 2.1.4. $y^{(\frac{1}{2})} = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y\sqrt{x}}{2x+3y}$. Nous supposons que nous recherchons une fonction différentiable y. Donc, par (1) du théorème 2.1.2, on a $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\frac{dy}{dx}$.
Par conséquent, l'équation différentielle fractionnaire devient $y^{'}\sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y\sqrt{x}}{2x+3y}$. Donc, $y^{'} = \frac{x+y}{2x+3y}$. Il s'agit d'une équation différentiel homogène du premier ordre qui facile à résoudre.

Avant de terminer ce paragraphe, on va donner une deuxième définition de la dérivée conforme.

Définition 2.1.6. Soit la fonction $f : [0, \infty) \rightarrow R$, la dérivée fractionnaire conforme de type 2 de f d'ordre α est définie par :

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon e^{(1-\alpha)t}) - f(t)}{\varepsilon},$$

pour tout $t > 0 et \alpha \in (0,1)$.

Si f est différentiable d'ordre α dans $(0,a), a > 0$ et $\lim_{t\to 0^+} T_\alpha(f)(t)$ existe, alors

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} T_\alpha(f)(t).$$

Lemme 2.1.2. Soient $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonctions tel que $T_\alpha^a f(t)$ existe pour tout $t > a$ et f est différentiable dans $(0,a)$, alors

$$T_\alpha^a f(t) \quad = \quad e^{(1-\alpha)(t)} f'(t), \tag{2.3}$$

pour tout $t > a$.

Définition 2.1.7. L'intégrale fractionnaire associée à la dérivée fractionnaire de type 2 est définie par :

$$I_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t e^{(\alpha-1)s} f(s)ds.$$

Lemme 2.1.3. Supposons que $f[a,\infty) \to R$ est continue et $0 < \alpha \leq 1$. Alors, pour tout $t > a$ on a

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t).$$

Lemme 2.1.4. Soit $f : (a,b) \to R$ une fonction différentiable et tel que $0 < \alpha \leq 1$. Alors, pour tout $t > a$, on a

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a).$$

2.2 Semi-groupes fractionnaires conformes

2.2.1 Introduction

Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X,X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur X. Une famille $T(t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X,X)$ est appelée un semi-groupe à un paramètre si :

- $T(0) = I$, l'opérateur d'identité sur X.
- $T(s+t) = T(s)T(t)$ pour tout $s,t \geq 0$.

Si, pour chaque $x \in X$, $T(t)x \to x$ quand $t \to 0^+$, alors le semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ est appelé C_0 semi-groupe ou semi-groupe fortement continu.

Les semi-groupes d'opérateurs se sont un outil très utile pour résoudre des équations différentielles. L'une des équations différentielles à valeurs vectorielles classiques est le problème de Cauchy de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{u'(t) = Au(t)}, & t > 0, \\ \text{u(0) = x}. \end{cases}$$

Où $A : D(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire et x est un élément de X et $u : [0, +\infty[\to X$ est la fonction inconnue.

2.2.2 Semi-groupe fractionnaire conforme

Définition 2.2.1. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et X un espace de Banach, une famille $T(t)_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X, X)$ est appelée α-semi-groupe fractionnaire si :

- $T(0) = I$,
- $T((s+t)^{\frac{1}{\alpha}}) = T(s^{\frac{1}{\alpha}})T(t^{\frac{1}{\alpha}})$ pour tout $s, t \in [0, +\infty[$.

Clairement, si $\alpha = 1$, alors les 1-semi-groupes ne sont que les semi-groupes habituels.

Exemple 2.2.1. Soit A un opérateur linéaire borné sur X. On pose $T(t) = e^{2\sqrt{t}A}$. Alors $T(t)_{t \geq 0}$ est un $\frac{1}{2}$-semi-groupe. En effet :

- $T(0) = e^{0A} = I$,
- $T(s+t)^2 = e^{2\sqrt{(s+t)^2}A} = e^{2(s+t)A} = e^{2sA}e^{2tA} = T(s^2)T(t^2)$ pour tout $s, t \in [0, +\infty[$.

Exemple 2.2.2. Soit $X = C([0, +\infty[)$ l'espace des fonctions continues à valeur réelle sur $[0, +\infty[$. On définie $(T(t)f)(s) = f(s + 2\sqrt{t})$. On peut facilement montrer que T est un $\frac{1}{2}$ semi-groupe.

Définition 2.2.2. Un α-semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$ est appelé C_0-semi-groupe si, pour tout $x \in X, T(t)x \to x$ quand $t \to 0^+$.

On appelle α-générateur infinitésimal d'un α-semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$, l'opérateur défini par :

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \to 0^+} T^{\alpha}(t)x \text{ existe}\},$$
$$Ax = \lim_{t \to 0^+} T^{\alpha}(t)x.$$

Théorème 2.2.1. Soit $T(t)_{t \geq 0}$ un $C_0 - \alpha$-semi-groupe avec A son α-générateur infinitésimal et $0 < \alpha \leq 1$. Si T(t) est continument α-différentiable et $x \in D(A)$. Alors

$$T^{\alpha}(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} T^{\alpha}(t)x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(t + \varepsilon t^{1-\alpha})x - T(t)x}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(t^{\alpha} + (t + \varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}x - T(t)x}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(t^{\alpha} + ((t + \varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}))^{\frac{1}{\alpha}}x - T(t)x}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puisque $T((t)_{t\geq 0})$ est un α-semi-groupe, alors $T(a+b)^{\frac{1}{\alpha}} = T(a^{\frac{1}{\alpha}})T(b^{\frac{1}{\alpha}})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T^{\alpha}(t)x &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{T(t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}})T((t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}x - T(t)x}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{T(t)[T((t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}x - T(0)x]}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème des accroissements finies pour la dérivée fractionnaire conforme [26], on obtient

$$\frac{T(t)[T((t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}x - T(0)x]}{\varepsilon} = T(t)T^{\alpha}(c)x\frac{[(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}]}{\alpha\varepsilon},$$

avec $0 < c < (t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}$.
Si $\varepsilon \to 0$, alors $c \to 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T^{\alpha}(c) = T^{\alpha}(0) = A$. Par conséquent,
$T^{\alpha}(t)x = T(t)Ax\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{[(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}]}{\alpha\varepsilon}$.
En utilisant la règle d'hôpital, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}]}{\alpha\varepsilon} = 1.$$

Donc $T^{\alpha}(t)x = AT(t)x$ De même, on peut montrer que $T(t)x \in D(A)$ et $T^{\alpha}(t)x = AT(t)x$. Ceci termine la preuve. $\square$

Exemple 2.2.3. Soit $X = C[0, +\infty[$ l'espace des fonctions continues à valeur réelle muni la norme sup, telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est finie. Soit $T : [0, +\infty[\to \mathcal{L}(X, X)$ l'opérateur défini par

$$(T(t)f)(s) = f(s + \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}).$$

$T(t)_{t\geq 0}$ est un α-semi-groupe. En effet, on a

$$\begin{aligned} (T(t+k)^{\frac{1}{\alpha}}f)(s) &= f(s + \frac{1}{\alpha}[(t+k)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha}), \\ &= f(s + \frac{1}{\alpha}t + \frac{1}{\alpha}k) \\ &= (T(t^{\frac{1}{\alpha}})T(k^{\frac{1}{\alpha}})f)(s). \end{aligned}$$

Il est claire que $T(0) = I$ et $T(t)f \in X$ pour tout $f \in X$ et par suite $\| T(t)f \|_{\infty} \leq \| f \|_{\infty}, t \geq 0$. Ainsi, $T(t) \in \mathcal{L}(X, X)$. Puisque l'opérateur $T(t)_{t\geq 0}$ est un opérateur de translation, alors T (t) f est continu à droite en 0. Donc $T(t)_{t\geq 0}$ est un α-semi groupe.

Théorème 2.2.2. Le générateur infinitésimal du semi-groupe ci-dessus est donné par :

$$\begin{aligned} Af(s) &= f^{'}(s), \\ D(A) &= \{f \in X : f^{'} \text{existe et continue sur } [0, +\infty[\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $f \in C([0,+\infty[)$ on a :

$$\begin{aligned}
T^{\alpha}(t)f(s) &= t^{1-\alpha}T^{'}(t)f(s), \\
&= t^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T(t+\varepsilon)f(s)-T(t)f(s)}{\varepsilon}, \\
&= t^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon)^{\alpha})-f(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{\varepsilon}, \\
&= t^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon)^{\alpha})-f(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{\varepsilon}.\frac{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)}{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)}, \\
&= t^{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon)^{\alpha})-f(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)}.\frac{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On a : $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)}{\varepsilon} = f^{'}(s+t)$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon)^{\alpha})-f(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)} = \frac{0}{0}$.
Utilisez la règle de L'Hôpital on obtient
$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(s+\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon)^{\alpha})-f(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{f(s+t+\varepsilon)-f(s+t)} = \frac{(t)^{1-\alpha}f^{'}(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})}{f^{'}(s+t)}$.
Ainsi, le produit donne $T^{\alpha}(t)f(s) = f^{'}(s+\frac{1}{\alpha}(t)^{\alpha})$. Maintenant, prenez la limite quand $t\to 0$ on obtient $T^{\alpha}(0)f(s) = f^{'}(s)$.
Par conséquent $Af = f^{'}$. Ceci qui termine la preuve. □

Montrons comment cette théorie peut être appliquée pour obtenir des informations sur les solutions de certains problèmes. On va utiliser cette approche pour étudier le problème suivant

$$\begin{cases} u^{\alpha}(t) = Au(t), \quad t>0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Définition 2.2.3. Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire et $u_0 \in X$. Une fonction $u : [0,+\infty[\to X$ est dite une solution intégrale du problème (2.4). Si :

1. u est continu sur $[0,\infty[$,
2. u est continument α-différentiable sur $]0,+\infty[$,
3. $u(t) \in D(A)$ pour $t>0$,
4. u satisfait l'équation (2.4).

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2.3. Soit X un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $T(t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X,X)$. Si $u_0 \in D(A)$, alors le problème (2.4) admet une unique solution u, tel que,
$u(t) = T(t)u_0$.

Démonstration. Il est facile de vérfier que $u(t) = T(t)x$ est une solution du problème (2.4). Pour l'unicité, soit u une solution de (2.4). Alors

$$\begin{aligned}
[T(t-s)u(s)]^{\alpha} &= T(t-s)u^{\alpha}(s) - AT(t-s)u(s),\\
&= T(t-s)u^{\alpha}(s) - T(t-s)Au(s),\\
&= T(t-s)[u^{\alpha}(s) - Au(s)],\\
&= 0.
\end{aligned}$$

En appliquent I_{α}^{0} par rapport à s, on obtient $T(t-t)u(t) - T(t)u_0 = 0$, ainsi $u(t) = T(t)u_0$.

$\square$

Remarque 2.2.1. Soit $X = C([0, +\infty[)$ l'espace des fonctions continues à valeur réelle telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est finie. On définie l'opérateur A par :

$$Af(s) = f^{'}(s),$$

$$D(A) = \{f \in X : f^{'}\text{existe dans } X\}.$$

Alors A est le générateur le α-semi-groupe de translation ci-dessus. Si $u_0 \in D(A)$, alors le problème (2.4) a une unique solution $u(t) = T(t)u_0$ où $T(t)_{t\geq 0}$ est un α-semi-groupe généré par A.
On voit que si g est continument différentiable sur $[0, +\infty[$, alors $u(x,t) = g(x + \frac{1}{\alpha}t^{\alpha})$ est l'unique solution du problème

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial u}{\partial t}, x > 0, t > 0,\\
u(x,0) &= g(x), x > 0.
\end{aligned}$$

2.3 Semi-groupes fractionnaires conformes généralisées

Tout d'abord, nous cherchons s'il est possible de définir une application $A : \mathcal{G}[\mathbb{R}] \to \mathcal{G}[\mathbb{R}]$ au moyen d'une famille donnée $(A_{\varepsilon})_{\varepsilon\in]0,1[}$ des applications $A_{\varepsilon} : X \to X$ où A_{ε} est un opérateur linéaire et continu. L'exigence générale est donnée dans ce qui suit. Pour ceci on pose $X = \mathcal{E}[\mathbb{R}]$.

Lemme 2.3.1. [20] Soit $(A_{\varepsilon})_{\varepsilon\in]0,1[}$ une famille d'application $A_{\varepsilon} : X \to X$. Pour chaque $(x_{\varepsilon})_{\varepsilon} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ et $(y_{\varepsilon})_{\varepsilon} \in \mathcal{N}[\mathbb{R}]$, nous supposons que

1. $(A_{\varepsilon}x_{\varepsilon})_{\varepsilon} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$.

2. $(A_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon))_\varepsilon - (A_\varepsilon x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}[\mathbb{R}]$.

Alors,

$$\begin{aligned} A : \mathcal{G}[\mathbb{R}] &\to \mathcal{G}[\mathbb{R}] \\ x = [x_\varepsilon] &\mapsto Ax = [A_\varepsilon x_\varepsilon] \end{aligned}$$

est bien défini.

Démonstration. D'après la première hypothèse, nous voyons que la classe $[(A_\varepsilon x_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}]$. Soit $x_\varepsilon + y_\varepsilon$ un représentant de $x = [x_\varepsilon]$. D'après la deuxième hypothèse, nous avons $(A_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon))_\varepsilon - (A_\varepsilon x_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}[\mathbb{R}]$ et on a $[(A_\varepsilon(x_\varepsilon + y_\varepsilon))_\varepsilon] = [(A_\varepsilon x_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}[\mathbb{R}]$. Ainsi A est bien défini. □

Définition 2.3.1. [20] Soit $S\mathcal{E}_M[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ l'espace des familles $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ d'applications fortement continues $S_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})$, qui vérifient pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et pour tout $T > 0$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t\in[0,T[} |S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})| = \mathcal{O}(\varepsilon^a) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Et $S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ l'espace des familles $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ d'applications fortement continues $N_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})$, qui vérifient pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $T > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t\in[0,T[} || = \mathcal{O}(\varepsilon^b) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.6}$$

Par conséquent il existe $t_0 > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t<t_0} |\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}| = \mathcal{O}(\varepsilon^a) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.7}$$

Ainsi il existe une famille $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\mathfrak{L}_\mathfrak{c}(X)$ et $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que

$$\lim_{t\to 0} \frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t} x = H_\varepsilon x, x \in X, \tag{2.8}$$

et pour tout $b > 0$

$$\| H_\varepsilon \| = \mathcal{O}(\varepsilon^b) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.9}$$

Proposition 2.3.1. [20] $S\mathcal{E}_M[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ est une algèbre stable par composition et $S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ est un idéal de $S\mathcal{E}_M[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$.

Démonstration. Soit $S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}) \in S\mathcal{E}_M[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ et $N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}) \in S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$.
Nous démontrons seulement la deuxième affirmation, c'est-à-dire que :

$(S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}))_\varepsilon, (N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}))_\varepsilon \in S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathfrak{L}_\mathfrak{c}(\mathbb{X})]$ où $S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})$ désigne la composition.

Soit $\varepsilon_0 \in]0,1[$ d'après les relations de la définition précédente on a pour $a, b \in \mathbb{R}$.
$\|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\| \leq \|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\|\|N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{a+b})$. De même pour$N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})$. De plus,

$$\begin{aligned} \sup_{t<t_0} \|\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}\| &\leq \sup_{t<t_0} S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}) \sup_{t<t_0} N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}), \\ &= \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a). \end{aligned}$$

Pour $t_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sup_{t<t_0} \|\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a).$$

Pour $t_0 > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]0,1[$ fixé. On a

$$\begin{aligned} \|\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\| &= \|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x - S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})H_\varepsilon x + S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})H_\varepsilon x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\| \\ &\leq \|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\|\|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x - S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})H_\varepsilon x\| + \|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})H_\varepsilon x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\|. \end{aligned}$$

D'après la première et la cinquième propriétés de la définition, ainsi que par la continuité de la famille $t \to S_\varepsilon(t)H_\varepsilon x$ au point 0, il vient que la derniere expression tend vers zero quand t tend vers zero.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x - H_\varepsilon S_\varepsilon(0)x\| &= \|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - \frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}S_\varepsilon(0)x + \frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}S_\varepsilon(0)x - H_\varepsilon S_\varepsilon(0)x\| \\ &\leq \|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}\|\|S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - S_\varepsilon(0)x\| + \|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}(S_\varepsilon(0)x) - H_\varepsilon(S_\varepsilon(0)x)\| \end{aligned}$$

L'hypothèses (4),(5) et (2) impliquent que la dernière expression tend vers zéro quand t tend vers zero. Ainsi (5) est prouvé dans les deux cas.

□

Nous définissons maintenant l'algèbre de Colombeau $S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$ comme suit :

$$S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})] = S\mathcal{E}_M[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]/S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})].$$

Un élément de $S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$ sera notée par $S = [S_\varepsilon]$, où $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant de S dans $S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$.

Définition 2.3.2. [20] Un élément $S \in S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$ est appelé un C_0-Semi groupe de généralisé s'il a un représentant de $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ de telle sorte que, pour un $\varepsilon_0 > 0, S_\varepsilon$ est C_0-Semi groupe, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$

Exemple 2.3.1. Nous prenons $\mathcal{G} = \mathcal{G}[\mathbb{R}_+]$ et nous nous définissons $T_\varepsilon u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x + \frac{t^\alpha}{\alpha})$. Alors $T(t) = \overline{(T_\varepsilon(t))_\varepsilon}$ définit un semi-groupe conforme généralisé sur $\mathcal{G}$.

Dans la suite, nous n'utiliserons des représentants $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ d'un C_0- semi-groupe généralisé S qui sont des C_0 semi-groupes, pour ε assez petit.

Proposition 2.3.2. [20] Soient $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ deux représentants d'un C_0-semi-groupe généralisé S, avec les générateurs infinitésimaux A_ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\tilde{A}_\varepsilon$, $\varepsilon < \tilde{\varepsilon_0}$, respectivement. Alors, $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \overline{\varepsilon} = \min(\tilde{\varepsilon_0}, \varepsilon_0)$ et $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ est admet une extension dans $\mathcal{L}(X)$, noté à nouveau $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$. En autre, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$$\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a).$$

Démonstration. On pose $N_\varepsilon(S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon \in S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$ et soit $\varepsilon < \overline{\varepsilon_0}$, fixé et $x \in X$. On a

$$\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} - \frac{\tilde{S}_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} = \frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x.$$

Cela implique que t tend vers zero, alors $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$. Maintenant nous avons

$$\begin{aligned}
(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x &= \lim_{t\to 0}\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{S}_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}x \\
&= H_\varepsilon x, \quad x \in D(A_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Puisque $D(A_\varepsilon)$ est dense dans X, les propriétés (4),(5) et (7) impliquent que pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a).$$

□

Nous définissons maintenant le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe généralisé S. On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires $((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon)$ où (A_ε) est un opérateur linéaire fermé sur X, avec le domaine $(D(A_\varepsilon))$ est dense dans X, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.
Nous introduisons une relation d'équivalence dans $\mathcal{A}$ par : $((A_\varepsilon)_\varepsilon, (D(A_\varepsilon))_\varepsilon) \sim ((\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon, (D(\tilde{A}_\varepsilon))_\varepsilon)$ s'il existe $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ tel que $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $C > 0$ et $\varepsilon_a < \varepsilon_0$, tel que pour $x \in D(A_\varepsilon)$, $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| \leq C\varepsilon^a\|x\|$, $\varepsilon < \varepsilon_a$.
Puisque A_ε est de domaine dense dans X, $R_\varepsilon := A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ peut être prolonger par un opérateur dans $\mathfrak{L}_\mathfrak{c}(X)$ satisfait $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a)$. pour tout $a \in \mathbb{R}$. Cet opérateur R_ε est appelé l'opérateur nul.
On note par A un élément de l'espace quotient $\mathcal{A}/\sim$. En raison de la proposition (2.3), On peut introduire la définition suivante.

Définition 2.3.3. [20] $A \in \mathcal{A}/\sim$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe généralisé S s'il existe un représentant $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ de A tel que A_ε soit le générateur infinitésimal de S_ε, pour ε assez petit.

En basent par la référence [Pazy], nous avons les résultats suivants.

Proposition 2.3.3. Soit S un C_0 semi-groupe généralisé avec de générateur infinitésimal A. Alors il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que :

1. l'application $t \longmapsto S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est continue pour tout $x \in X$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$,
2. $\lim\limits_{h\to 0} \displaystyle\int_t^{t+h} S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})xds_\alpha = S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x, \varepsilon < \varepsilon_0, x \in X$
3. $\int_0^t S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})xds_\alpha \in D(A_\varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $x \in X$
4. pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$ et $t > 0$ $S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x \in D(A_\varepsilon)$ et $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x = A_\varepsilon S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x = S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})A_\varepsilon x, \varepsilon < \varepsilon_0$.
5. Soient $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ deux représentants d'un C_0-semi-groupe Colombeau de S, avec les générateurs infinitésimaux A_ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\tilde{A}_\varepsilon$, $\varepsilon < \tilde{\varepsilon_0}$, respectivement. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ $\|\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}) - \tilde{A}_\varepsilon S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^a)$
6. pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$ et pour tout $t, s \geq 0$. $S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x = \int_s^t S_\varepsilon(y^{\frac{1}{\alpha}})A_\varepsilon x dy_\alpha$

Théorème 2.3.1. [20] Soient S et $\tilde{S}$ deux représentants d'un C_0-semi-groupe généralisé, de générateurs infinitésimaux A et $\tilde{A}$, respectivement. Si $A = \tilde{A}$ alors $S = \tilde{S}$

Démonstration. Soit ε assez petit et $x \in D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$ proposition (2.3) propriété (4) implique que pour $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto \tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x, t \geq s \geq 0$ est différentiable et $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{S}_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x = -\tilde{A}_\varepsilon\tilde{S}_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x + \tilde{S}_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}A_\varepsilon S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x, t \geq s \geq 0$.
L'hypothèse $A = \tilde{A}$ implique que $A_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon + R_\varepsilon$ où R_ε est un opérateur nul. Puisque A_ε commute avec $\tilde{S}_\varepsilon$, pour tout $x \in D(A_\varepsilon)$
$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{S}_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x = S_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}R_\varepsilon S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}})x, t \geq s \geq 0$.
Et cela implique

$$\tilde{S}_\varepsilon(t-s)^{\frac{1}{\alpha}}S_\varepsilon(s^{\frac{1}{\alpha}}x = \int_0^s \tilde{S}_\varepsilon(t-u)^{\frac{1}{\alpha}}R_\varepsilon S_\varepsilon(u^{\frac{1}{\alpha}})xdu_\alpha, t \geq s \geq 0. \tag{2.10}$$

Posons $s = t$ dans (6), on obtient :
$(S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}) - \tilde{S}_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}}))x = \int_0^s \tilde{S}_\varepsilon((t-u)^{\frac{1}{\alpha}})R_\varepsilon S_\varepsilon(u^{\frac{1}{\alpha}})xdu_\alpha$ Puisque $D(A_\varepsilon)$ est dense dans X, le bornage uniforme de S et $\tilde{S}$ sur $[0, t[$ implique que (6) est vrai pour tout $y \in X$.
Prouvons que $(N_\varepsilon)_\varepsilon = (S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon \in S\mathcal{N}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{X})]$. La formule (2.10) et la définition (**??**) impliquent que pour un $C > 0$ et $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T[}\left|N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x\right| &\leq \sup_{t\in[0,T[}\int_0^t\left|\tilde{S}_\varepsilon((t-u)^{\frac{1}{\alpha}})\|\|R_\varepsilon\|\|S_\varepsilon(u^{\frac{1}{\alpha}})\|\|x\|du_\alpha\right| \\ &\leq TC\varepsilon^{a+\tilde{a}}\|R_\varepsilon\|\|x\|, x \in X. \end{aligned}$$

Puisque $\|R_\varepsilon\| = \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^b)$, pour tout $b \in \mathbb{R}$ $(N_\varepsilon(t))_\varepsilon$ satisfait la condition (3) de la définition (??). La condition (3) découle du bornage $(S_\varepsilon)_\varepsilon, (\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ sur $[0, t[$. Les propriétés de $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ et l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\|\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t}\| &= \|\frac{1}{t}\int_0^s \tilde{S}_\varepsilon((t-u)^{\frac{1}{\alpha}})R_\varepsilon S_\varepsilon(u^{\frac{1}{\alpha}})x du_\alpha\| \\
&\leq |\tilde{S}_\varepsilon((t)^{\frac{1}{\alpha}})\|\|R_\varepsilon\|\|x\| \\
&\leq constante, x \in X, t \leq t_0.
\end{aligned}$$

Pour un $t_0 > 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{N_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{S}_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{S_\varepsilon(t^{\frac{1}{\alpha}})x - x}{t} \\
&= R_\varepsilon x, \forall x \in D(A_\varepsilon)
\end{aligned}$$

Alors, ceci complète la preuve. □

2.4 Dérivation fractionnaire conforme de type 1.

Définition 2.4.1. Soit$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. La dérivée fractionnaire conforme de type 1 de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x). \tag{2.11}$$

Lemme 2.4.1. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $D^\alpha u_\varepsilon(x)$ est modérée.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|D^\alpha u_\varepsilon(x)\right| = \sup_{x\in[0,T]}\left|x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\right| &\leq T^{1-\alpha}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\right| \\
&\leq T^{1-\alpha}C\varepsilon^{-N} \\
&\leq C_{\alpha,T}\varepsilon^{-N}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.2. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)$ est négligeable.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x)-D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x)-x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\Big|x^{1-\alpha}(\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x)-\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\Big| \\
&\leq T^{1-\alpha}\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x)-\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Puisque $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ représentent le même élément u dans l'algèbre de Colombeau, alors on a
$\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x)-\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est négligeable. Donc, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x)-D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est aussi négligeable. $\square$

Définition 2.4.2. Soit $u\in\mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau sur $[0,\infty)$ la dérivée fractionnaire conforme d'ordre α de u, est notée $D^\alpha u(x)$, est donnée par : $D^\alpha u(x)=[D^\alpha u_\varepsilon(x)]$

Remarque 2.4.1. D'après les deux lemmes précédents, on déduit que $D^\alpha u(x)$ est un élément de $\mathcal{G}^0([0,\infty))$ satisfaisant (2.11).
- Pour $0<\alpha<1$ la première dérivée

$$\frac{d}{dx}D^\alpha u_\varepsilon(x)=(1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)+x^{1-\alpha}\frac{d^2}{dx^2}u_\varepsilon(x)$$

ne sont pas atteint leurs bornes . En générale, les dérivées d'ordre k c-a-d

$$\frac{d^k}{dx^k}D^\alpha u_\varepsilon(x)$$

n'est pas atteint son borne dans l'intervalle $[0,\infty)$ et par suite, on propose une définition basée sur la régularisation suivant :

Définition 2.4.3. Soit$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau de $u\in\mathcal{G}([0,\infty))$. La nouvelle régularisation de la dérivation fractionnaire de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par :

$$\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)=\begin{cases}(D^\alpha u_\varepsilon*\varphi_\varepsilon)(x), 0<\alpha<1.\\ u'_\varepsilon(x)=\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x),\end{cases}\tag{2.12}$$

avec $D^\alpha u_\varepsilon(x)$ est donnée dans (2.11) et $\varphi_\varepsilon(x)$est donnée dans (**??**).
La convolution dans (2.4.3) est $D^\alpha u_\varepsilon*\varphi_\varepsilon(x)=\int_0^\infty D^\alpha u_\varepsilon(s)\varphi_\varepsilon(x-s)ds.$

Lemme 2.4.3. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u\in\mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $\alpha>0$ et pour tout $k\in\{0,1,2,...\}$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est modérée.

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|(D^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x)\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,T]}\left|\int_0^\infty D^\alpha u_\varepsilon(s)\varphi_\varepsilon(x-s)ds\right| \\
&\leq \sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|\sup_{x\in[0,T]}\left|\int_K \varphi_\varepsilon(x-s)ds\right| \\
&\leq C\sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|.
\end{aligned}$$

Avec C est une constante tel que $C > 0$

D'aprés le Lemme 3.1, $\sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|$ est modérée, pour tout $\alpha > 0$, et par suite on a, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\right|$ est modérée aussi.

Pour tout ordre de dérivation, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\right| &\leq \sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|\sup_{x\in[0,T]}\left|\int_K \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\varepsilon(x-s)ds\right| \\
&\leq \frac{C}{\epsilon^k}\sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|
\end{aligned}$$

Avec $k \in \mathbb{N}$ et C est une constante tel que $C > 0$. Ainsi,d'après le Lemme 3.1, $\sup_{s\in K}\left|D^\alpha u_\varepsilon(s)\right|$ est modérée.

Donc, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\right|$ est aussi modérée. □

Lemme 2.4.4. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{D}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{D}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{D}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{D}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}((D^\alpha u_{1,\varepsilon} * \varphi_\varepsilon)(x) - (D^\alpha u_{2,\varepsilon} * \varphi_\varepsilon)(x))\right| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}((D^\alpha u_{1,\varepsilon} - D^\alpha u_{2,\varepsilon}) * \varphi_\varepsilon)(x)\right| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\left|((D^\alpha u_{1,\varepsilon} - D^\alpha u_{2,\varepsilon}) * \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\varepsilon)(x)\right| \\
&\leq \sup_{s\in K}\left|(D^\alpha u_{1,\varepsilon} - D^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\right|\sup_{x\in[0,T]}\left|\int_K \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\varepsilon(x-s)ds\right| \\
&\leq C\sup_{s\in K}\left|(D^\alpha u_{1,\varepsilon} - D^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\right|.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.2, on a $\sup_{s\in K}\Big|(D^\alpha u_{1,\varepsilon} - D^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\Big|$ est négligeable et par suite $\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{D}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{D}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\Big|$ est négligeable. □

Maintenant, on propose la définition du la dérivée fractionnaire conforme dans l'algèbre de Colombeau généralisée dans $[0,\infty)$ de la manière suivante.

Définition 2.4.4. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ élément de l'algèbre de Colombeau généralisée dans $[0,\infty)$. La dérivé fractionnaire de u, notée $\tilde{D}^\alpha u(x) = [\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)]$ est un élément de $\mathcal{G}([0,\infty))$ satisfait (2.4.3).

Remarque 2.4.2. Nous avons $|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon - |D^\alpha u_\varepsilon| \approx 0$.
En effet,

$$\begin{aligned}
|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| &= |(D^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| \\
|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| &= |(D^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x) - D^\alpha u_\varepsilon * \delta(x)| \\
|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| &= |D^\alpha u_\varepsilon * (\varphi_\varepsilon(x) - \delta(x))| \\
|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| &= |\int_{\mathbb{R}} D^\alpha u_\varepsilon(x-s)(\varphi_\varepsilon(s) - \delta(s))ds| \\
|\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)| &\le \int_{\mathbb{R}} |D^\alpha u_\varepsilon(x-s)||(\varphi_\varepsilon(s) - \delta(s))ds|
\end{aligned}$$

Or $\lim |(\varphi_\varepsilon(s) - \delta(s)) = 0$ quand $\varepsilon \to 0$, alors $\int_{\mathbb{R}} |D^\alpha u_\varepsilon(x-s)||(\varphi_\varepsilon(s) - \delta(s))ds| \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, par suite $\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon \approx D^\alpha u_\varepsilon$.

2.5 Intégrale fractionnaire conforme associée à la dérivée fractionnaire conforme de type 1

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant du $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. L'intégrale fractionnaire conforme associée à la dérivée fractionnaire conforme du type 1 de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par :

$$I^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_0^x (s^{\alpha-1} u_\varepsilon(s))ds. \tag{2.13}$$

Lemme 2.5.1. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est modéré.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^{\alpha}u_{\varepsilon}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (s^{\alpha-1}u_{\varepsilon}(s))ds\Big| \\
&\le \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{\varepsilon}(s)\Big|\int_0^x (s^{\alpha-1})ds \\
&\le \frac{T^{\alpha}}{\alpha}\sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{\varepsilon}(s)\Big| \\
&\le C_{\alpha,T}\varepsilon^{-N}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 2.5.2. Soit $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^{\alpha}u_{1,\varepsilon}(x) - I^{\alpha}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^{\alpha}u_{1,\varepsilon}(x) - I^{\alpha}u_{2,\varepsilon}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (s^{\alpha-1}u_{1,\varepsilon}(s))ds - \int_0^x (s^{\alpha-1}u_{2,\varepsilon}(s))ds\Big| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (s^{\alpha-1}(u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s))ds\Big| \\
&\le \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s)\Big|\ \int_0^x (s^{\alpha-1})ds\Big| \\
&\le \frac{T^{\alpha}}{\alpha}\sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s)\Big|.
\end{aligned}$$

Puisque $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants du même élément u dans l'algèbre de Colombeau. Alors on a

$$\sup_{x\in[0,T]}\Big|u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$$

est négligeable. Donc,

$$\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^{\alpha}u_{1,\varepsilon}(x) - I^{\alpha}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$$

est aussi négligeable. □

Définition 2.5.1. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau sur $[0,\infty)$ l'intégrale fractionnaire conforme d'ordre α de u, notée $I^{\alpha}u(x)$, est donnée par : $I^{\alpha}u(x) = [I^{\alpha}u_{\varepsilon}(x)]$.

Remarque 2.5.1. D'après les deux lemmes précédents, on déduit que $I^{\alpha}u(x)$ est un élément de $\mathcal{G}^0([0,\infty))$ satisfaisant (2.16).

Pour $0 < \alpha < 1$ la première dérivée

$$\frac{d}{dx}I^{\alpha}u_{\varepsilon}(x) = x^{\alpha-1}u_{\varepsilon}(x)$$

n'est pas atteint sa borne . En générale, les dérivées d'ordre k c-à-d $\frac{d^k}{dx^k} I^\alpha u_\varepsilon(x)$ ne sont pas atteints leur borne dans l'intervalle $[0,\infty)$ et par suite on propose une définition basée sur la régularisation suivant :

La nouvelle intégrale fractionnaire dans l'algèbre de colombeau de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ n'est pas un élément de $\mathcal{G}([0,\infty))$, alors pour cela, on a besoin de la régularisation de l'intégrale fractionnaire .

Définition 2.5.2. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. La régularisation de la nouvelle intégrale fractionnaire de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par :

$$\tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x) = (I^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x), 0 < \alpha < 1, \tag{2.14}$$

avec $I^\alpha u_\varepsilon(x)$ est donné par (2.16) et $\varphi_\varepsilon(x)$est donné par (**??**).
La convolution donnée dans (2.14) est $I^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon(x) = \int_0^\infty I^\alpha u_\varepsilon(s)\varphi_\varepsilon(x-s)ds$.

Lemme 2.5.3. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $k \in \{0,1,2,...\}$,

$$\sup_{x\in[0,T]} \left| \frac{d^k}{dx^k} \tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x) \right|$$

sont modérés.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in (0,1)$ $0 < \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]} \left| \tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x) \right| &= \sup_{x\in[0,T]} \left| (I^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x) \right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,T]} \left| \int_0^\infty I^\alpha u_\varepsilon(s)\varphi_\varepsilon(x-s)ds \right| \\
&\leq \sup_{s\in K} \left| I^\alpha u_\varepsilon(s) \right| \sup_{x\in[0,T]} \left| \int_K \varphi_\varepsilon(x-s)ds \right| \\
&\leq C \sup_{s\in K} \left| I^\alpha u_\varepsilon(s) \right|.
\end{aligned}$$

Avec la constante $C > 0$.
Puis, d'après le Lemme 3.1, $\sup_{s\in K} \left| I^\alpha u_\varepsilon(s) \right|$ est modéré, pour tout $\alpha > 0$. Ainsi, $\sup_{x\in[0,T]} \left| \tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x) \right|$ est modéré, aussi.
pour toute ordre de dérivation, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]} \left| \frac{d^k}{dx^k} \tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x) \right| &\leq \sup_{s\in K} \left| I^\alpha u_\varepsilon(s) \right| \sup_{x\in[0,T]} \left| \int_K \frac{d^k}{dx^k} \varphi_\varepsilon(x-s)ds \right| \\
&\leq \frac{C}{\epsilon^k} \sup_{s\in K} \left| I^\alpha u_\varepsilon(s) \right|.
\end{aligned}$$

Où $k \in \mathbb{N}$ et C constante strictement positive.
D'après le Lemme 3.1, $\sup_{s\in K}\left|I^\alpha u_\varepsilon(s)\right|$ est modéré. Donc $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}\tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x)\right|$ est modéré aussi. □

Lemme 2.5.4. Soit $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux différents représentants de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{I}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{I}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$$

est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{I}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{I}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}((I^\alpha u_{1,\varepsilon} * \varphi_\varepsilon)(x) - (I^\alpha u_{2,\varepsilon} * \varphi_\varepsilon)(x))\right| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}((I^\alpha u_{1,\varepsilon} - I^\alpha u_{2,\varepsilon}) * \varphi_\varepsilon)(x)\right| \\
&= sup_{x\in[0,T]}\left|((I^\alpha u_{1,\varepsilon} - I^\alpha u_{2,\varepsilon}) * \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\varepsilon)(x)\right| \\
&\leq \sup_{s\in K}\left|(I^\alpha u_{1,\varepsilon} - I^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\right| \sup_{x\in[0,T]}\left|\int_K \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\varepsilon(x-s)ds\right| \\
&\leq C\sup_{s\in K}\left|(I^\alpha u_{1,\varepsilon} - I^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\right|.
\end{aligned}$$

Dans le Lemme 4.2 $\sup_{s\in K}\left|(I^\alpha u_{1,\varepsilon} - I^\alpha u_{2,\varepsilon})(s)\right|$ est négligeable .
Alors, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(\tilde{I}^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - \tilde{I}^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable. □

Nous allons introduire la régularise de l' intégrale fractionnaire dans l'algèbre de Colombeau dans $[0,\infty)$ de la manière suivante.

Définition 2.5.3. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau dans $[0,\infty)$. La α intégrale fractionnaire de u, ce noté

$$\tilde{I}^\alpha u(x) = [\tilde{I}^\alpha u_\varepsilon(x)]$$

est un élément de $\mathcal{G}([0,\infty))$ satisfait (2.16).

Proposition 2.5.1. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$, alors

$$D^\alpha I^\alpha u = u.$$

Démonstration. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$

$$\begin{aligned} Ona \quad D^\alpha I^\alpha(u_\varepsilon)(x) &= (x^{1-\alpha})\frac{d}{dx}I^\alpha(u_\varepsilon(x)) \\ &= (x^{1-\alpha})\frac{d}{dx}\int_0^x (s^{\alpha-1}u_\varepsilon(s))ds \\ &= (x^{1-\alpha})(x^{\alpha-1}u_\varepsilon(x)) \\ &= u_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.2. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$, alors

$$I^\alpha D^\alpha u = u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0) \quad \text{et} \quad I^\alpha D^\alpha u \in \mathcal{G}([0,\infty)).$$

Démonstration. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de l'algèbre de Colombeau $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.

$$\begin{aligned} Ona I^\alpha D^\alpha(u_\varepsilon)(x) &= \int_0^x (s^{\alpha-1})D^\alpha(u_\varepsilon(s))ds \\ &= \int_0^x (s^{\alpha-1}(s^{1-\alpha})\frac{d}{ds}u_\varepsilon(s))ds \\ &= \int_0^x \frac{d}{ds}u_\varepsilon(s)ds \\ &= u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

Alors

$$I^\alpha D^\alpha u \in \mathcal{G}([0,\infty)).$$

□

2.6 Dérivée fractionnaire conforme de type 2

Soit$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. La dérivée fractionnaire du type 2 de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = e^{(1-\alpha)x}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x). \tag{2.15}$$

Lemme 2.6.1. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$. $\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est modérée.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_\varepsilon(x)\Big| = \sup_{x\in[0,T]}\Big|e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\Big| &\leq C\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\Big| \\ &\leq \tilde{C}\varepsilon^{-N} \end{aligned}$$

Où $\tilde{C}$ est une constante positive. $\square$

Lemme 2.6.2. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\Big|e^{(1-\alpha)t}(\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\Big| \\
&\leq C\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Où C est une constante positive. Puisque $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ représentent le même élément u de l'algèbre de Colombeau, alors on a
$\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est négligeable. Donc $\sup_{x\in[0,T]}\Big|D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est aussi négligeable. $\square$

Après avoir démontré les deux lemmes précédents, nous pouvons présenter la dérivée fractionnaire d'ordre α d'un élément de l'algèbre de Colombeau dans $[0,\infty)$.

Définition 2.6.1. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau sur $[0,\infty)$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de u, notée $D^\alpha u(x) = [D^\alpha u_\varepsilon(x)]$ est un élément de $\mathcal{G}^0([0,\infty))$ satisfaisant (3.16).

Lemme 2.6.3. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $0 < \alpha < 1$ et pour tout $k \in \{0,1,2,...\}$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}\tilde{D}^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est modérée.

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 1$, pour tout ordre de dérivation, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}D^\alpha u_\varepsilon(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\Big| \\
&\leq C_1\sup_{s\in K}\Big|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\Big| + C_2\sup_{s\in K}\Big|\frac{d^2}{dx^2}u_\varepsilon(x)\Big| + ... + C_{k+1}\sup_{s\in K}\Big|\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u_\varepsilon(x)\Big|
\end{aligned}$$

Avec $k \in \mathbb{N}$ et C_i sont des constantes tels que $C_i > 0$ et $i \in \{1,2,...,k+1\}$.
Puisque, $\sup_{s\in K}\Big|\frac{d^k}{dx^k}u_\varepsilon(x)\Big|$ est modérée, pour tout ordre de dérivation. Alors $\sup_{x\in[0,T]}\Big|\frac{d^k}{dx^k}D^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est aussi modérée. $\square$

Lemme 2.6.4. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $k \in \{0,1,2,...\}$, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - e^{(1-\alpha)t}\frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\right| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}e^{(1-\alpha)t}(\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\right| \\
&\leq C\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}e^{(1-\alpha)t}(\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\right| \\
&\leq C_1\sup_{x\in[0,T]}\left|(\frac{d}{dx}u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d}{dx}u_{2,\varepsilon}(x))\right| + \\
&+ C_2\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^2}{dx^2}(u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d^2}{dx^2}u_{2,\varepsilon}(x))\right| + ... \\
&+ C_{k+1}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(u_{1,\varepsilon}(x) - \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u_{2,\varepsilon}(x))\right| \\
&\leq C_1\sup_{x\in[0,T]}\left|(\frac{d}{dx}(u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x)))\right| + \\
&\quad C_2\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^2}{dx^2}(u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x))\right| + ... \\
&+ C_{k+1}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x))\right|.
\end{aligned}$$

On a $\sup_{s\in K}\left|(\frac{d^k}{dx^k}u_{1,\varepsilon} - \frac{d^k}{dx^k}u_{2,\varepsilon})(s)\right|$ est négligeable, alors $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable. □

Nous allons introduire la dérivée fractionnaire dans l'algèbre de Colombeau généralisée dans $[0,\infty)$ de la manière suivante.

Définition 2.6.2. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau généralisée dans $[0,\infty)$ La α dérivé fractionnaire de u, notée $D^\alpha u(x) = [D^\alpha u_\varepsilon(x)]$, est un élément de $\mathcal{G}([0,\infty))$ satisfait (3.16).

2.7 Intégrale fractionnaire conforme associée à la dérivée fractionnaire conforme de type 2

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau généralisée de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. L'intégrale fractionnaire de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par :

$$I^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_0^x e^{(\alpha-1)s} u_\varepsilon(s) ds. \tag{2.16}$$

Lemme 2.7.1. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_\varepsilon(x)\Big|$ est modéré.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_\varepsilon(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (e^{(\alpha-1)s} u_\varepsilon(s)) ds\Big| \\
&\leq \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_\varepsilon(s)\Big| \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (e^{(\alpha-1)s}) ds\Big| \\
&\leq \frac{e^{-T}-1}{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_\varepsilon(s)\Big| \\
&\leq C_{\alpha,T}\varepsilon^{-N}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.7.2. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants différents de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$ est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big| &= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (e^{(\alpha-1)s} u_{1,\varepsilon}(s)) ds - \int_0^x (s^{\alpha-1} u_{2,\varepsilon}(s)) ds\Big| \\
&= \sup_{x\in[0,T]}\Big|\int_0^x (e^{(\alpha-1)s}(u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s)) ds\Big| \\
&\leq \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s)\Big|\ \int_0^x (e^{(\alpha-1)s}) ds\Big| \\
&\leq \frac{e^{-T}-1}{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]}\Big|\ u_{1,\varepsilon}(s) - u_{2,\varepsilon}(s)\Big|.
\end{aligned}$$

Puisque $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux représentants du même élément u dans l'algèbre de Colombeau. Alors on a

$$\sup_{x\in[0,T]}\Big|u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$$

est négligeable. Donc,

$$\sup_{x\in[0,T]}\Big|I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x)\Big|$$

est aussi négligeable. □

Après avoir prouvé les deux lemmes précédents, nous pouvons introduire la α intégrale fractionnaire dans l'algèbre de Colombeau sur $[0,\infty)$.

Définition 2.7.1. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$ un élément de l'algèbre de Colombeau sur $[0,\infty)$ La α intégrale fractionnaire de u, est noté par $I^\alpha u(x) = [I^\alpha u_\varepsilon(x)]$ est un élément de $\mathcal{G}^0([0,\infty))$ satisfait (2.16).

Lemme 2.7.3. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$.
Alors, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $k \in \{0,1,2,...\}$,

$$\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}I^\alpha u_\varepsilon(x)\right|$$

sont modéré.

Démonstration. Soit $0<\alpha<1$, pour tout ordre de dérivation, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}I^\alpha u_\varepsilon(x)\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{(\alpha-1)s}u_\varepsilon(x)\right| \\ &\leq C_0\sup_{s\in K}\Big|u_\varepsilon(x)\Big|+C_1\sup_{s\in K}\left|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)\right|+...+C_{k-1}\sup_{s\in K}\left|\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u_\varepsilon(x)\right|.\end{aligned}$$

Avec $k\in\mathbb{N}$ et les constantes $C_i>0$, $i\in\{0,1,2,...,k-1\}$.
On a, $\sup_{s\in K}\left|\frac{d^k}{dx^k}u_\varepsilon(x)\right|$ est modéré pour tout $k\in\{0,1,2,...\}$. Donc $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}I^\alpha u_\varepsilon(x)\right|$ est modéré aussi. □

Lemme 2.7.4. Soient $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ et $(u_{2,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ sont deux différentes représentants de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. Alors, pour tout $\alpha>0$,et pour tout $k\in\{0,1,2,...\}$,

$$\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x)-I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$$

est négligeable.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x)-I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right| &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}((I^\alpha u_{1,\varepsilon})(x)-(I^\alpha u_{2,\varepsilon})(x))\right| \\ &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(e^{(\alpha-1)x}u_{1,\varepsilon}-e^{(\alpha-1)x}u_{2,\varepsilon})(x)\right| \\ &= \sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}e^{(\alpha-1)x}(u_{1,\varepsilon}-u_{2,\varepsilon})(x)\right| \\ &\leq C_0\sup_{x\in[0,T]}\Big|u_{1,\varepsilon}(x)-u_{2,\varepsilon}(x)\Big|+C_1\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d}{dx}(u_{1,\varepsilon}(x)-u_{2,\varepsilon}(x))\right| \\ ...+&\ C_{k-1}\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(u_{1,\varepsilon}(x)-u_{2,\varepsilon}(x))\right|.\end{aligned}$$

Or $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(u_{1,\varepsilon}(x) - u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable . Alors, $\sup_{x\in[0,T]}\left|\frac{d^k}{dx^k}(I^\alpha u_{1,\varepsilon}(x) - I^\alpha u_{2,\varepsilon}(x))\right|$ est négligeable. $\square$

Maintenant, nous allons introduire l'intégrale fractionnaire conforme associée à la dérivée fractionnaire conforme du type 2 comme suit :

Définition 2.7.2. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$, on définit l'intégrale fractionnaire conforme associé à la dérivée fractionnaire conforme du type 2 comme suit :

$$I^\alpha u(x) = [I^\alpha u_\varepsilon(x)].$$

Remarque 2.7.1. D'après les lemmes précédents, on peut conclure que $I^\alpha u(x)$ est un élément de $\mathcal{G}([0,\infty))$ satisfait (2.16).

Proposition 2.7.1. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$, alors

$$D^\alpha I^\alpha u = u.$$

Démonstration. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau de $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$

$$\begin{array}{rcl} Ona \quad D^\alpha I^\alpha(u_\varepsilon)(x) & = & (e^{(1-\alpha)x})\dfrac{d}{dx}I^\alpha(u_\varepsilon(x)) \\ & = & (e^{(1-\alpha)x})\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (e^{(\alpha-1)s}u_\varepsilon(s))ds \\ & = & (e^{(1-\alpha)x})(e^{(\alpha-1)x}u_\varepsilon(x)) \\ & = & u_\varepsilon(x). \end{array}$$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 2.7.2. Soit $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$, alors

$$I^\alpha D^\alpha u = u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0) \quad \text{et} \quad I^\alpha D^\alpha u \in \mathcal{G}([0,\infty)).$$

Démonstration. Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant dans l'algèbre de Colombeau $u \in \mathcal{G}([0,\infty))$. On a

$$\begin{array}{rcl} I^\alpha D^\alpha(u_\varepsilon)(x) & = & \displaystyle\int_0^x (e^{(\alpha-1)s})D^\alpha(u_\varepsilon(s))ds \\ & = & \displaystyle\int_0^x (e^{(\alpha-1)s}(e^{(1-\alpha)s})\dfrac{d}{ds}u_\varepsilon(s))ds \\ & = & \displaystyle\int_0^x \dfrac{d}{ds}u_\varepsilon(s)ds \\ & = & u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0). \end{array}$$

Et par suite

$$I^\alpha D^\alpha u \in \mathcal{G}([0,\infty)).$$

$\square$

Chapitre 3

Problème de Cauchy avec une dérivée fractionnaire conforme dans l'algèbre de Colombeau

Dans ce chapitre, nous allons prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = F(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans l'algèbre de Colombeau des fonctions généralisées où $F \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+]$ tel que son gradient $\nabla_x F$ est de L^{∞}-*log-type* (voir définition (3.0.3)), $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}^+}$ et D^{α} est la dérivée fractionnaire conforme d'ordre $0 < \alpha < 1$.

Définition 3.0.3. On dit qu'une fonction généralisée $U \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$ est L^{∞}-*log-type* si pour tout représentant u il existe $N \in \mathbb{N}$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^+$ nous avons

$$\sup_{t \in K} |u_{\varepsilon}(t)| = \mathcal{O}(\ln(\varepsilon^{-N})) \text{ quand} \varepsilon \to 0.$$

Exemple 3.0.1. On considère le problème

$$\begin{cases} D^{\alpha}x_{\varepsilon}(t) & = & F_{\varepsilon}(t, x_{\varepsilon}(t)), \\ x_{\varepsilon}(0) & = & a_{\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec $0 < \alpha < 1$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}^+}$ et $F_{\varepsilon}(t, x_{\varepsilon}(t)) = x_{\varepsilon}(t) \ln |x_{\varepsilon}(t)| - x_{\varepsilon}(t)$
On a $\nabla F_{\varepsilon} = \ln |x_{\varepsilon}(t)|$. Alors ∇F_{ε} est L$^{\infty}$-*log*-type.

3.1 Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy avec la dérivée fractionnaire conforme de type 1

Théorème 3.1.1. Soit $F \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$ et $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type*. Pour chaque $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}^+}$ le problème (3.1) admet une unique solution $x \in \mathcal{G}^0([0,\infty))$, c-à-d. dans l'algèbre des fonctions généralisées.

Démonstration.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x_\varepsilon(t) = F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)), \\ x_\varepsilon(0) = x_{0,\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.3}$$

La solution intégrale du problème est donnée par :

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + I^\alpha F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)).$$

C-à-d

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + \int_0^t (s)^{\alpha-1} F_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds.$$

Alors

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + \int_0^t (s)^{\alpha-1} F_\varepsilon(s,0)ds + \int_0^t (s)^{\alpha-1} \int_0^1 \nabla_x F_\varepsilon(s, \sigma x_\varepsilon) d\sigma x_\varepsilon(s) ds$$

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_{0,\varepsilon}| + \int_0^t (s)^{\alpha-1} |F_\varepsilon(s,0)| ds + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1} |x_\varepsilon(s)| ds$$

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha} |F_\varepsilon| + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1} |x_\varepsilon(s)| ds.$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on aura

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha} |F_\varepsilon|) \exp(|\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1} ds).$$

Ainsi $|x_\varepsilon| \leq (|x_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha} |F_\varepsilon|) \exp(\frac{T^\alpha}{\alpha} |\nabla_x F_\varepsilon|)$.

Comme $x_{0,\varepsilon} \in \widetilde{\mathbb{R}^+}^n$ et $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type*, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Pour montrer l'unicité, supposons que le problème de Cauchy (3.1) admet deux solutions x, y avec $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont leurs représentants respectivement. Alors, nous avons :

$$\begin{cases} D^\alpha(x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)) = F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)) + n_\varepsilon(t), \\ x_\varepsilon(0) - y_\varepsilon(0) = n_{0,\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $n_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^+)$ et $n_{0,\varepsilon} \in \mathcal{N}_0(\mathbb{R}^+)$.

De la même manière que l'étape précédente, on va montrer que $(x_\varepsilon - y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est un élément de $\mathcal{N}(\mathbb{R}^+)$. On considère la solution intégrale de l'équation (3.4), alors on a

$$x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) = n_{0,\varepsilon} + I^\alpha(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t))) + I^\alpha(n_\varepsilon(t)).$$

C-à-d

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) &= n_{0,\varepsilon} + \int_0^t (s)^{\alpha-1}(F_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - F_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s)))ds \\ &+ \int_0^t (s)^{\alpha-1} n_\varepsilon(s)ds. \end{aligned}$$

La première approximation de F_ε donne

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) &= n_{0,\varepsilon} + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1}(x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s))ds \\ &+ \int_0^t (s)^{\alpha-1} N_\varepsilon(s)ds + \int_0^t (s)^{\alpha-1} n_\varepsilon(s)ds. \end{aligned}$$

Avec $N_\varepsilon(t)$ c'est la partie négligeable. On a

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| &\leq |n_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|N_\varepsilon| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|n_\varepsilon| \\ &+ |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1}|x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)|ds. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall,on a

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| = (|n_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|N_\varepsilon| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|N_\varepsilon|) \exp(|\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t (s)^{\alpha-1}ds).$$

On obtient

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = (|n_{0,\varepsilon}| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|N_\varepsilon| + \frac{T^\alpha}{\alpha}|n_\varepsilon|)\exp(\frac{T^\alpha}{\alpha}|\nabla_x F_\varepsilon|).$$

Comme $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type* et $n_\varepsilon, N_\varepsilon$ deux éléments de $\mathcal{N}(\mathbb{R}^+)$ et $n_{0,\varepsilon} \in \mathcal{N}_0(\mathbb{R}^+)$, alors

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^q), \qquad \forall q \in \mathbb{N}.$$

□

Conclusion on a montré que le problème (3.1) admet une unique solution $x \in \mathcal{G}^0([0,\infty))$.

Remarque 3.1.1. On remarque que la dérivée conforme donnée par :

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x)$$

a un défaut concernant le fait que les dérivées d'ordre k n'appartient pas à $\mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$. De plus si on raisonne sur sa forme régularisée :

$$\tilde{D}^\alpha u(x) = (D^\alpha u_\varepsilon * \varphi_\varepsilon)(x),$$

alors une difficulté se posera au niveau de la composée de l'intégral et sa dérivée associée et pour enlever cette difficulté majore, on proposera d'étudier le problème de Cauchy (3.1) avec une dérivée fractionnaire conformes de type 2 au lieu de la dérivée fractionnaire conformes type 1 .

3.2 Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy avec la dérivée fractionnaire conforme de type 2

Théorème 3.2.1.
Soit $F \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$ et $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type*. Pour chaque $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}^+}$, le problème (3.1) admet une unique solution $x \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$.

Démonstration. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x_\varepsilon(t) = F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)), \\ x_\varepsilon(0) = x_{0,\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.5}$$

La solution intégrale du problème (4.4) est donnée par

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + I^\alpha F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)).$$

C-à-d

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + \int_0^t e^{(\alpha-1)s} F_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s))ds.$$

Alors

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + \int_0^t e^{(\alpha-1)s} F_\varepsilon(s, 0)ds + \int_0^t e^{(\alpha-1)s} \int_0^1 \nabla_x F_\varepsilon(s, \sigma x_\varepsilon)d\sigma x_\varepsilon(s)ds.$$

Donc $|x_\varepsilon(t)| \leq |x_{0,\varepsilon}| + \int_0^t e^{(\alpha-1)s}|F_\varepsilon(s,0)|ds + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}|x_\varepsilon(s)|ds.$

Ainsi, $|x_\varepsilon(t)| \leq |x_{0,\varepsilon}| + \frac{1}{1-\alpha}|F_\varepsilon| + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}|x_\varepsilon(s)|ds.$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_{0,\varepsilon}| + \frac{1}{1-\alpha}|F_\varepsilon|) \exp(|\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}ds).$$

Et par suite $|x_\varepsilon| \leq (|x_{0,\varepsilon}| + \frac{1}{1-\alpha}|F_\varepsilon|) \exp(\frac{1}{1-\alpha}|\nabla_x F_\varepsilon|).$

Comme $x_{0,\varepsilon} \in \widetilde{\mathbb{R}^+}$ et $\nabla_x F$ sont L^∞-*log-type*, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

On sait que

$$x_\varepsilon(t) = x_{0,\varepsilon} + I^\alpha F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)).$$

Alors

$$x_\varepsilon^{'}(t) = \frac{d}{dt} I^\alpha F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)),$$
$$x_\varepsilon^{'}(t) = e^{(\alpha-1)t} F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)).$$

Donc

$$|x_\varepsilon^{'}(t)| \;\; \leq \;\; |e^{(\alpha-1)t} F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t))|,$$

Ainsi,

$$|x_\varepsilon^{'}(t)| \quad \leq \quad |F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t))|.$$

Comme $F \in \mathcal{G}[\mathbb{R}^+]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_\varepsilon^{'}| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

On fait le même raisonnement pour les autres dérivées de x_ε,

on obtient

$$|x_\varepsilon^{(n)}| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

Pour montrer l'unicité, supposons que le problème de Cauchy (3.1) admet deux solutions x, y avec $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ leurs représentants respectivement.
Alors, nous avons

$$\begin{cases} D^\alpha(x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)) = F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)) + n_\varepsilon(t), \\ x_\varepsilon(0) - y_\varepsilon(0) = n_{0,\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.6}$$

avec $n_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^+)$ et $n_{0,\varepsilon} \in \mathcal{N}_0(\mathbb{R}^+)$.

De la même manière que l'étape précédente on va montrer $(x_\varepsilon - y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est un élément de $\mathcal{N}(\mathbb{R}^+)$.
On considère la solution intégrale de l'équation (4.5), on aura

$$x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) = n_{0,\varepsilon} + I^\alpha(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t))) + I^\alpha(n_\varepsilon(t)).$$

C-à-d

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) \quad &= \quad n_{0,\varepsilon} + \int_0^t e^{(\alpha-1)s}(F_\varepsilon(s, x_\varepsilon(s)) - F_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s)))ds \\ &+ \quad \int_0^t e^{(\alpha-1)s} n_\varepsilon(s)ds. \end{aligned}$$

La première approximation de F_ε donne

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) &= n_{0,\varepsilon} + |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}(x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s))ds \\ &+ \int_0^t e^{(\alpha-1)s} N_\varepsilon(s)ds + \int_0^t e^{(\alpha-1)s} n_\varepsilon(s)ds, \end{aligned}$$

Avec $N_\varepsilon(t)$ est la partie négligeable.
Donc

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| &\leq |n_{0,\varepsilon}| + \mathbf{k}|N_\varepsilon| + \mathbf{k}|n_\varepsilon| \\ &+ |\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}|x_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s)|ds. \end{aligned}$$

Avec $\mathbf{k} = \frac{e^{\alpha T}-1}{\alpha}$.

D'après l'inégalité de Gronwall on a

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| = (|n_{0,\varepsilon}| + \mathbf{k}|N_\varepsilon| + \mathbf{k}|n_\varepsilon|) \exp(|\nabla_x F_\varepsilon| \int_0^t e^{(\alpha-1)s}ds)$$

Ainsi $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = (|n_{0,\varepsilon}| + \mathbf{k}|N_\varepsilon| + \mathbf{k}|n_\varepsilon|) \exp(\mathbf{k}|\nabla_x F_\varepsilon|)$.

Comme $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type*, $n_\varepsilon, N_\varepsilon$ deux éléments de $(\mathcal{N}(\mathbb{R}^+))$ et $n_{0,\varepsilon} \in (\mathcal{N}_0(\mathbb{R}^+))$, alors

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon^q), \qquad \forall q \in \mathbb{N}, \text{ quand } \quad \varepsilon \to 0.$$

Pour la première dérivée, nous avons :

$$(x_\varepsilon^{'}(t) - y_\varepsilon^{'}(t)) = \frac{d}{dt} I^\alpha(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t))) + \frac{d}{dt} I^\alpha(n_\varepsilon(t)),$$

$$(x_\varepsilon^{'}(t) - y_\varepsilon^{'}(t)) = e^{(\alpha-1)t}(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t))) + e^{(\alpha-1)t}(n_\varepsilon(t)).$$

Ainsi,

$$|(x_\varepsilon^{'}(t) - y_\varepsilon^{'}(t))| \leq |e^{(\alpha-1)t}(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t))) + e^{(\alpha-1)t}(n_\varepsilon(t))|.$$

D'où

$$|x_\varepsilon^{'} - y_\varepsilon^{'}| \leq |(F_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) - F_\varepsilon(t, y_\varepsilon(t)))| + |(n_\varepsilon(t))|.$$

Comme $\nabla_x F$ est L^∞-*log-type*, $n_\varepsilon, N_\varepsilon$ deux éléments $(\mathcal{N}(\mathbb{R}^+))$ et $n_{0,\varepsilon} \in (\mathcal{N}(\mathbb{R}^+))$, alors

$$|x_\varepsilon^{'} - y_\varepsilon^{'}| = \mathcal{O}(\varepsilon^q), \quad \forall q \in \mathbb{N}, \text{ quand} \varepsilon \to 0.$$

On fait le même raisonnement pour les autres dérivées d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de $x_\varepsilon^{'} - y_\varepsilon^{'}$. Ce qui termine la démonstration du théorème. □

3.3 Application (problème de Schrödinger)

On considère le problème de Schrödinger avec des conditions non régulières suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) + v(x)u(t,x) = 0, \\ v(x) = \delta(x), \quad u(0,x) = \delta(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

Où v est un potentiel non régulier.

Nous utiliserons la régularisation de mesure de Dirac suivante :

$$v_\varepsilon(x) = \delta_\varepsilon(x) = (\phi_\varepsilon(x)) = |\ln\varepsilon|^c \phi(x|\ln\varepsilon|^c),$$

avec $c > 0$ $x \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{A}_1$, $\phi(x) \geq 0$.
Et pour la condition initiale on utilise la régularisation suivante :

$$u_{0,\varepsilon}(x) = |\ln\varepsilon|^a \phi(x|\ln\varepsilon|^a), \quad a > 0$$

$x \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{A}_1$, $\phi(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

3.3.1 Existence et unicité de la solution dans l'algèbre de Colombeau

Théorème 3.3.1. La régularisation du problème (3.7) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t u_\varepsilon(t,x) - \triangle u_\varepsilon(t,x) + v_\varepsilon(x)u_\varepsilon(t,x) = 0 \\ v_\varepsilon(x) = \delta_\varepsilon(x), \quad u_{0,\varepsilon}(x) = \delta_\varepsilon(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

avec v_ε et $u_{0,\varepsilon}$ c'est la régularisation de v et u_0, respectivement. Alors le problème admet une unique solution dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

Démonstration.

La solution intégrale du problème du (3.8) est donnée par :

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)u_{0,\varepsilon}(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)v_\varepsilon(y)u_\varepsilon(\tau,y)dyd\tau$$

avec $S_1(t,x)$ le noyau de Schrödinger.
On a :

$$\begin{aligned} ||u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-.)||_{L^1}||u_{0,\varepsilon}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &+ \int_0^t ||S_1(t-\tau,x-.)||_{L^1}||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau \end{aligned}$$

Et par suite on a :

$$||u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C||u_{0,\varepsilon}||_{L^\infty(\mathbb{R})} + C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^t ||u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau.$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$||u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C|\ln\varepsilon|^a \exp(CT|\ln\varepsilon|^b)$$

Alors il existe $N>0$ tel que

$$||u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-N}$$

Pour la première dérivée de x nous avons,

$$\begin{aligned} \partial_x u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)\partial_{y_i}u_{0,\varepsilon}(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)(\partial_{y_i}v_\varepsilon(y)u_\varepsilon(\tau,y) + v_\varepsilon(y)\partial_y u_\varepsilon(\tau,y))dyd\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-.)||_{L^1}||\partial_y u_{0,\varepsilon}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &+ \int_0^t ||S_1(t-\tau,x-.)||_{L^1}(||\partial_y v_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_\varepsilon||_{L^\infty} \\ &+ \varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})})d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C|\ln\varepsilon|^{2a} + C\int_0^t |\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty}\\
&+ |\ln\varepsilon|^b|||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C(|\ln\varepsilon|^{2a} + T|\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty})\\
&+ C|\ln\varepsilon|^b|\int_0^t ||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Gronwall,on obtient

$$
||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(|\ln\varepsilon|^{2a} + T|\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty})\exp(CT|\ln\varepsilon|^b)
$$

Et d'après l'étape présidente, il existe $N > 0$ tel que

$$
||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-N}
$$

Pour la deuxième dérivée de x, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\partial_x\partial_x u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)(\partial_y\partial_Y u_{0,\varepsilon}(y)dy\\
&+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)\Big(\partial_y\partial_Y v_\varepsilon(y)u_\varepsilon(\tau,y) + \partial_Y v_\varepsilon(y)\partial_y u_\varepsilon(\tau,y)\\
&+ \partial_y v_\varepsilon(y)\partial_Y u_\varepsilon(\tau,y) + v_\varepsilon(y)\partial_y\partial_Y u_\varepsilon(\tau,y)\Big)dyd\tau.
\end{aligned}
$$

Et par suite on a :

$$
\begin{aligned}
||\partial_x\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-y)||_{L^1}||\partial_y\partial_Y u_{0,\varepsilon}(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&+ \int_0^t ||S_1(t-\tau,x-.)||_{L^1}\Big(||\partial_y\partial_Y v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_\varepsilon||_{L^\infty}\\
&+ \partial_Y v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_y u_\varepsilon||_{L^\infty} + ||\partial_y v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_Y u_\varepsilon||_{L^\infty}\\
&+ \varepsilon(.)||_{L^\infty}||\partial_y\partial_Y u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big)d\tau\\
&\leq C\Big(|\ln\varepsilon|^{3a} + |\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty}\\
&+ |\ln\varepsilon|^{2b}||\partial_y u_\varepsilon||_{L^\infty}\\
&+ |\ln\varepsilon|^{2b}||\partial_Y u_\varepsilon||_{L^\infty}\Big) + C|\ln\varepsilon|^{bn}\int_0^t ||\partial_y\partial_Y u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité Gronwall, nous avons :

$$\begin{aligned}||\partial_x\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C\Big(|\ln\varepsilon|^{3a)} + |\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty} \\ &+ |\ln\varepsilon|^{2b}||\partial_y u_\varepsilon||_{L^\infty} + |\ln\varepsilon|^{2b}||\partial_Y u_\varepsilon||_{L^\infty}\Big)\exp(CT|\ln\varepsilon|^b)\end{aligned}$$

D'après l'étape précédente il existe $N > 0$ tel que

$$||\partial_x\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-N}$$

Pour montrer l'unicité de la solution, supposons que le problème (3.8) admet deux solutions $u_{1,\varepsilon}(t,.)$, $u_{2,\varepsilon}(t,.)$, alors

$$\begin{cases}\frac{1}{i}\partial_t(u_{1,\varepsilon}(t,x) - u_{2,\varepsilon}(t,x)) - \triangle(u_{1,\varepsilon}(t,x) - u_{2,\varepsilon}(t,x)) \\ +v_\varepsilon(x)(u_{1,\varepsilon}(t,x) - u_{2,\varepsilon}(t,x)) = N_\varepsilon(t,x) \\ N_\varepsilon(t,x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}),\ N_{0,\varepsilon}(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R})\end{cases} \tag{3.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}u_{1,\varepsilon}(t,x) - u_{2,\varepsilon}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)N_{0,\varepsilon}(y)dy \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)v_\varepsilon(y)(u_{1\varepsilon}(\tau,y) - u_{2\varepsilon}(\tau,y))dyd\tau \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)N_\varepsilon(\tau,y)dyd\tau \\ ||u_{1,\varepsilon}(t,.) - u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-.)||_{L^1}||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &+ ||S_1(t,x-.)||_{L^1}\int_0^t ||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_{1\varepsilon}(\tau,.) \\ &- u_{2\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau||S_1(t,x-.)||_{L^1}||N_\varepsilon||_{L^\infty}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||u_{1,\varepsilon}(t,.) - u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C(||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||N_\varepsilon||_{L^\infty}) \\ &+ C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_0^t ||u_{1\varepsilon}(\tau,.) - u_{2\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a :

$$||u_{1,\varepsilon}(t,.) - u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\Big(||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||N_\varepsilon||_{L^\infty}\Big)\exp\Big(CT||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big)$$

Alors

$$||u_{1,\varepsilon}(t,.) - u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^q \qquad \forall q \in \mathbb{N}$$

Alors le problème (3.8) admet une unique solution dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. □

3.4 Association

Soit w_1 solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t w_1(t,x) - \triangle w_1(t,x) = 0, \\ w_1(0,x) = \delta(x). \end{cases} \tag{3.10}$$

Et w_2 la solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t w_2(t,x) - \triangle w_2(t,x) + v(x)w_{2,\varepsilon}(t,x) = 0, \\ v(x) = \delta(x), \quad w_2(0,x) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Proposition 3.4.1. La solution généralisée u du problème (3.8) est associée avec w_1+w_2.

Démonstration. Soit $w_{1,\varepsilon}$ la solution classique du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t w_{1,\varepsilon}(t,x) - \triangle w_{1,\varepsilon}(t,x) = 0 \\ w_{1,\varepsilon}(0,x) = \delta_\varepsilon(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

$w_{2,\varepsilon}$ la solution classique du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t w_{2,\varepsilon}(t,x) - \triangle w_2(t,x) + v_\varepsilon(x)(w_{2,\varepsilon}(t,x) + m(t,x)) = 0 \\ v_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad w_{2,\varepsilon}(0,x) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\partial_t(u_\varepsilon(t,x) - w_{1,\varepsilon}(t,x) - w_{2,\varepsilon}(t,x)) \quad &- \quad \triangle(u_\varepsilon(t,x) - w_{1,\varepsilon}(t,x) - w_{2,\varepsilon}(t,x)) \\ &+ \quad v_\varepsilon(x)(u_\varepsilon(t,x) - w_{2,\varepsilon}(t,x) - m(t,x)) = 0 \end{aligned}$$

$$u_\varepsilon(0,x) - w_{1,\varepsilon}(0,x) - w_{2,\varepsilon}(0,x) = 0$$

D'après la solution intégrale on a :

$$
\begin{aligned}
(u_\varepsilon(t,x) - w_{1,\varepsilon}(t,x) - w_{2,\varepsilon}(t,x)) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau, x-y) \\
& \quad v_\varepsilon(y)(u_\varepsilon(\tau,y) - w_{2,\varepsilon}(\tau,y) - m(\tau,y))dyd\tau \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau, x-y) \\
& \quad v_\varepsilon(y)(u_\varepsilon(\tau,y) - w_{1,\varepsilon}(\tau,y) - w_{2,\varepsilon}(\tau,y))dyd\tau \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau, x-y) \\
& \quad v_\varepsilon(y)(w_{1,\varepsilon}(\tau,y) - m(\tau,y))dyd\tau
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
||u_\varepsilon(t,.) - w_{1,\varepsilon}(t,.) - w_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \int_0^t ||S_1(t-\tau, x-.)||_{L^1} \\
& \quad ||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||(w_{1,\varepsilon}(\tau,.) - m(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau \\
&+ \int_0^t ||S_1(t-\tau, x-.)||_{L^1} \\
& \quad ||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_\varepsilon(\tau,.) - w_{1,\varepsilon}(\tau,.) \\
&- w_{2,\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau \\
&\leq C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
& \quad \int_0^t ||(w_{1,\varepsilon}(\tau,.) - m(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau \\
&+ C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
& \quad \int_0^t ||u_\varepsilon(\tau,.) - w_{1,\varepsilon}(\tau,.) - w_{2,\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Gronwall, nous avons :

$$
\begin{aligned}
||u_\varepsilon(t,.) - w_{1,\varepsilon}(t,.) - w_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \big[C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^t ||(w_{1,\varepsilon}(\tau,.) - m(\tau,.)) \\
& \quad ||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau\big] \exp(CT||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}).
\end{aligned}
$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$u \approx w_1 + w_2.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

$\square$

3.4.1 Existence et unicité de la solution dans le cadre de la dérivée fractionnaire conforme

Dans cette partie, on va traiter des applications des $\alpha - C_0$ -semi-groupes de Colombeau dans la résolution de l'équation de Schrödinger avec des potentiels singuliers et des données singulières. Avant de discuter le problème (3.7), nous définirons quelques espaces sur lesquels nous travaillerons.

Définition 3.4.1. On définit $H^{2,\alpha}$ par : $H^{2,\alpha} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \tilde{D}^\alpha f \in L^2(\mathbb{R})\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{H^{2,\alpha}} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|\tilde{D}^\alpha f\|_2^2}.$$

Avec $\|.\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|.\|_2$ Rappelons que l'algèbre de Colmbeau est défini comme suit

$$\mathcal{G}[H^{2,\alpha}] = \mathcal{E}_M[H^{2,\alpha}]/\mathcal{N}[H^{2,\alpha}].$$

Où $\mathcal{E}_M[H^{2,\alpha}]$ est l'espace vectoriel des familles $(G_\varepsilon)_\varepsilon \in H^{2,\alpha}$ qui vérifient la propriété : pour tout $T > 0$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\|G_\varepsilon\|_{H^{2,\alpha}} = \mathcal{O}(\varepsilon^a)$.
Et $\mathcal{N}_M[H^{2,\alpha}]$ est l'espace vectoriel des familles $(G_\varepsilon)_\varepsilon \in H^{2,\alpha}$ qui vérifient la propriété : pour tout $T > 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $\|G_\varepsilon\|_{H^{2,\alpha}} = \mathcal{O}(\varepsilon^b)$. Nous signalons que $\mathcal{G}[H^{2,\alpha}]$ est un espace vectoriel.

Définition 3.4.2. Soit l'espace $\mathcal{E}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{N}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$) un espace vectoriel des familles des fonctions $(G_\varepsilon)_\varepsilon$, $G_\varepsilon \in C([0,T], H^{2,\alpha}) \bigcap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ tel que pour tout $T_1 \in]0,1[$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$(respectivement, pour tout $a \in \mathbb{R}$) tel que

$$\max\{\sup_{t\in[0,T_1]} \|G_\varepsilon\|_{H^{2,\alpha}}, \sup_{t\in[T_1,T]} \|\tilde{D}^\alpha G_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}\} = \mathcal{O}(\varepsilon^a) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

Aussi l'espace :

$$\mathcal{G}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R}) = \mathcal{E}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})/\mathcal{N}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel généralisé.

Remarque 3.4.1. La multiplication d'un potentiel $v_\varepsilon \in \mathcal{G}_{H^{2,\alpha}}$ par $u_\varepsilon \in \mathcal{G}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],)$ qui devrait être une solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t,x) = (\triangle - v_\varepsilon(x))u_\varepsilon(t,x), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ v_\varepsilon(x) = \delta_\varepsilon(x), \quad u_\varepsilon(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x) = \delta_\varepsilon(x), \end{cases} \tag{3.14}$$

n'a pas de solution dans le cas classique.

Définition 3.4.3. Soit A un représentant des familles $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ d'opérateurs linéaires avec le domaine commun $H^{2,\alpha}(\mathbb{R})$ et l'image est $L^2(\mathbb{R})$. Une fonction généralisée $G \in \mathcal{G}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$ est dite solution de l'équation $D^\alpha G = AG$ si

$$\sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha G_\varepsilon(t,.) - AG_\varepsilon(t,.)\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

Théorème 3.4.1. Soit $v_\varepsilon \in \mathcal{G}H^{2,\alpha}$ une fonction log-type alors,

1. La dérivation de $A_\varepsilon u_\varepsilon = (\triangle - v_\varepsilon)u_\varepsilon$, $u_\varepsilon \in H^{2,\alpha}(\mathbb{R})$, sont des générateurs infinitésimaux des semi-groupes conformables T_ε, pour tout $\varepsilon > 0$, et $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ est un représentant d'un C_0 semi-groupe conforme de Colombeau. $T(t) \in S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{L}^{\not{2}}(\mathbb{R}))]$.
2. Soit $v_\varepsilon \in \mathcal{G}H^{2,\alpha}$ et T_ε qui donnée dans le point 1. Alors, pour tout $T > 0$ le problème (3.14) admet une unique solution dans $\mathcal{G}H^{2,\alpha}(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, par la formule de Feynman-Kac, l'opérateur A_ε est le générateur infinitésimal du semi-groupe correspondant
$T_\varepsilon(t)\psi(x) = \int_\Omega (\exp(-\int_0^{t^\alpha} V_\varepsilon(\omega(s))ds))\psi(\omega(t^\alpha))d\mu_x(\omega)$ avec $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, où $\Omega = \prod_{t\geq 0}\overline{\mathbb{R}}$ et μ_x est la mesure Wiener concentrée avec $x \in \mathbb{R}$.
Lorsque V est de log-type, alors il existe $C > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}
|T_\varepsilon(t)\psi(x)| &\leq \exp(t^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|V_\varepsilon(s)|) \int_\Omega |\psi(\omega(t))| d\mu_x(\omega) \\
&\leq \varepsilon^{Ct^\alpha} \frac{1}{2\sqrt{\Pi t^\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4t^\alpha})|\psi(y)|dy.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante C_0 tel que $\sup_{x\in]0,T]} \|T_\varepsilon(t)\psi(x)\|_2 \leq C_0\varepsilon^{CT^\alpha}\|\psi\|_2$.
Donc, $(T_\varepsilon)_\varepsilon \in S\mathcal{G}[\mathbb{R}_+ : \mathcal{L}(\mathbb{L}^{\not{2}}(\mathbb{R}))]$

2. a) Par le principe de Duhamel, la solution $u_\varepsilon(t,x)$ de l'équation (3.14) satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} E(t^\alpha, x-y)b_\varepsilon(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} E((t-s)^\alpha, x-y)V_\varepsilon(y)u_\varepsilon(s,y)dyds. \quad (3.15)$$

Avec

$$E(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}}(\exp\frac{|x|^2}{4t})$$

Par l'inégalité de Young nous avons :
$\|u_\varepsilon(t,.)\|_2 \leq \|b_\varepsilon\|_2 + \int_0^t \|V_\varepsilon(.)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,.)\|_2 ds.$
l'inégalité de Gronwall donne $\|u_\varepsilon(t,.)\|_2 \leq \|b_\varepsilon\|_2 \exp\int_0^t \|V_\varepsilon(.)\|_{L^\infty}ds$, $\forall t \in]0,T]$.
Puisque $V \in \mathcal{G}H^{2,\alpha}$ est log-type et $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{E}H^{2,\alpha}$ alors $\sup_{t\in]0,T]} \|u_\varepsilon(t,.)\|_2$ est modéré.
La dérivation de l'équation (3.15) par rapport à la variable x on trouve :

$\frac{d}{dx}u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} E(t^\alpha, y)\frac{d}{dx}b_\varepsilon(x-y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} E((t-s)^\alpha, y)(\frac{d}{dx}V_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(s,x-y) + V_\varepsilon(x-y)\frac{d}{dx}u_\varepsilon(s,x-y))dyds.$

Alors $\|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(t,.)\|_2 \leq \|\frac{d}{dx}b_\varepsilon\|_2 + \int_0^t \|\frac{d}{dx}V_\varepsilon(.)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,.)\|_2 + \|V_\varepsilon(.)\|_{L^\infty}\|\frac{d}{dx}u_\varepsilon(s,.)\|_2 ds$

L'inégalité de Gronwall implique également que $\sup_{t\in]0,T]}\|\dfrac{d}{dx}u_\varepsilon(t,.)\|_2$ est modéré.

Donc de la même façon pour les autres dérivées nous avons $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$.

b) Pour l'unicité on suppose que le problème (3.14) admet deux solutions u_ε et v_ε on pose $G_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$, alors on a :

$G_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} E(t^\alpha, x-y)N_\varepsilon(y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} E((t-s)^\alpha, x-y)V_\varepsilon(y)G_\varepsilon(s,y)dyds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} E((t-s)^\alpha, x-y)V_\varepsilon(y)N_\varepsilon(y)dyds.$

Avec, $N_\varepsilon(x) = G_\varepsilon(0,x)$ et $N_\varepsilon = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}G_\varepsilon - (\triangle - V)G_\varepsilon$.

Ensuite, les inégalités de Young et de Gronwall impliquent :

$\|G_\varepsilon(t,.)\|_2 \leq \|N_\varepsilon\|_2 + \int_0^t \|V_\varepsilon(.)\|_{L^\infty}\|G_\varepsilon(s,.)\|_2 ds + \int_0^t \|N_\varepsilon(s,.)\|_2 ds_\alpha$

Alors G_ε est négligeable, de la même façon nous avons $G_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,H^{2,\alpha}}([0,T],\mathbb{R})$

□

3.4.2 Extension de M.Stojanovic

Définition 3.4.4. Soit $I = (0,1]$.

On note par :

$$\mathcal{E}_M^e[\mathbb{R}] = \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in (C^\infty(\mathbb{R}))^I : \quad \forall K \subset \mathbb{R}, \forall 0 < \alpha \leq 1 \cup \{0\}, \exists N \in \mathbb{N}$$
$$\text{tel que} \quad \sup_{x\in K}|D^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \text{ quand } \varepsilon \to 0\}$$

et

$$\mathcal{N}^e[\mathbb{R}] = \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in (C^\infty(\mathbb{R}))^I : \quad \forall K \subset \mathbb{R}, \forall 0 < \alpha \leq 1 \cup \{0\}, \forall q \in \mathbb{N}$$
$$\text{tel que} \quad \sup_{x\in K}|D^\alpha u_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{q}), \text{ quand } \varepsilon \to 0\}$$

avec D^α la dérivée fractionnaire est la dérivée conforme de type 2.

Remarque 3.4.2. $\mathcal{E}_M^e[\mathbb{R}]$ est une algèbre.
$\mathcal{N}^e[\mathbb{R}]$ est un idéal de $\mathcal{E}_M^e[\mathbb{R}]$.

Définition 3.4.5. On définit l'extension de l'algèbre des fonctions généralisées de Colombeau $\mathcal{G}^e[\mathbb{R}]$ par

$$\mathcal{G}^e[\mathbb{R}] = \mathcal{E}_M^e[\mathbb{R}]/\mathcal{N}^e[\mathbb{R}]$$

Théorème 3.4.2. On considère la régularisation (3.8) du problème (3.7), Si u une solution du problème (3.7) dans $\mathcal{G}$, alors u est solution du problème (3.7) dans $\mathcal{G}^e$.
Avec $D^\alpha u$ est la dérivée conforme de type 2

Démonstration. La solution intégrale du problème du (3.8) est :

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)u_{0,\varepsilon}(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)v_\varepsilon(y)u_\varepsilon(\tau,y)dyd\tau,$$

avec $S_1(t,x)$ est le noyau de Schrödinger.
Soit$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un représentant de $u \in \mathcal{G}$. La dérivée fractionnaire de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, est définie par

$$D^\alpha u_\varepsilon(t,x) = e^{(1-\alpha)x}\partial_x u_\varepsilon(t,x). \tag{3.16}$$

Il faut montrer que

$$D^\alpha u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)(\partial_x)^\alpha u_{0,\varepsilon}(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)v_\varepsilon(y)D^\alpha u_\varepsilon(\tau,y)dyd\tau$$

est modérée.
Nous avons :

$$\begin{aligned} ||D^\alpha u_\varepsilon(t,x)|| &= ||e^{(1-\alpha)x}\partial_x u_\varepsilon(t,x)||, \\ &\leq ||\partial_x u_\varepsilon(t,x)||. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_x u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)\partial_y u_{0,\varepsilon}(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)(\partial_y v_\varepsilon(y)u_\varepsilon(\tau,y) + v_\varepsilon(y)\partial_y u_\varepsilon(\tau,y))dyd\tau. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} ||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-.)||_{L^1}||\partial_y u_{0,\varepsilon}||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &+ \int_0^t ||S_1(t-\tau,x-.)||_{L^1}(||\partial_y v_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})}||u_\varepsilon||_{L^\infty} \\ &+ \varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})})d\tau \\ &\leq C|\ln\varepsilon|^{2a} + C\int_0^t |\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty} \\ &+ |\ln\varepsilon|^b|||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau. \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} ||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C(|\ln\varepsilon|^{2a} + T|\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty}) \\ &+ C|\ln\varepsilon|^b|\int_0^t ||\partial_y u_\varepsilon(\tau,.))||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(|\ln\varepsilon|^{2a} + T|\ln\varepsilon|^{2b}||u_\varepsilon||_{L^\infty})\exp(CT|\ln\varepsilon|^b).$$

Et d'après l'étape présidente, il existe $N > 0$ tel que

$$||\partial_x u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-N}.$$

Ainsi, on a :

$$||D^\alpha u_\varepsilon(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-N}.$$

Maintenant soient $D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,.)$ et $D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,.)$ deux représentants différents de $D^\alpha u_\varepsilon(t,.)$ vérifiant le problème précédent, alors,

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\partial_t(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,x)) - \triangle(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,x)), \\ +v_\varepsilon(x)(D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,x)) = N_\varepsilon(t,x), \\ N_\varepsilon(t,x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}),\ N_{0,\varepsilon}(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.17}$$

Donc

$$\begin{aligned} D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,x) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} S_1(t,x-y)N_{0,\varepsilon}(y)dy \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)v_\varepsilon(y)(D^\alpha u_{1\varepsilon}(\tau,y) - D^\alpha u_{2\varepsilon}(\tau,y))dyd\tau \\ &+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} S_1(t-\tau,x-y)N_\varepsilon(\tau,y)dyd\tau. \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} ||D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,.) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||S_1(t,x-.)||_{L^1}||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &+ ||S_1(t,x-.)||_{L^1}\int_0^t ||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}||D^\alpha u_{1\varepsilon}(\tau,.) \\ &- D^\alpha u_{2\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau||S_1(t,x-.)||_{L^1}||N_\varepsilon||_{L^\infty}. \\ &\leq C(||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||N_\varepsilon||_{L^\infty}) \\ &+ C||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_0^t ||D^\alpha u_{1\varepsilon}(\tau,.) - D^\alpha u_{2\varepsilon}(\tau,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$||D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,.) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\Big(||N_{0,\varepsilon}(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||N_\varepsilon||_{L^\infty}\Big)\exp\Big(CT||v_\varepsilon(.)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big).$$

D'où

$$||D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,.) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,.)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^q, \qquad \forall q.$$

Alors $D^\alpha u_{1,\varepsilon}(t,.) - D^\alpha u_{2,\varepsilon}(t,.)$ est négligeable de la même façon pour les autres dérivées. On conclure que u est un solution du problème (3.7) dans $\mathcal{G}^e$.

$\square$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons donné un sens aux dérivées fractionnaires conformes et leurs intégrales fractionnaires associées dans l'algèbre de Colombeau, ainsi que la notion de semi-groupe conforme généralisée.

Dans un premier temps, nous avons défini une dérivée fractionnaire conforme (type1 :$D^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\epsilon}$, pour tout $t > 0$.) Mais malheureusement, concernant ce type nous avons rencontré des difficultés pour que la solution du problème de cauchy y'associé soit dans l'algèbre de colombeau $\mathcal{G}[\Omega]$.

Ceci était notre motivation principale pour définir une deuxième dérivé fractionnaire nommé type 2 ($D^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon e^{(\alpha-1)t})-f(t)}{\epsilon}$,. Cette dérivée fractionnaire conforme associée à ce type est bien cohérente avec la théorie de l'algèbre de J.F. Colombeau.

Aussi, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution pour quelques problèmes de Cauchy avec les dérivées fractionnaires conformes dans l'algèbre de J.F. Colombeau. Pour illustrer les applications de nos résultats abstraits, nous avons proposé une application concrète de l'équation de Schrödinger. Aussi, nous avons utilisé la notion de semi-groupe conforme généralisée pour montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de Schrödinger.

L'esprit de ce travail restera valable et applicable sur un bon nombre d'applications de problèmes non réguliers dans plusieurs domaines de la science par exemple : théorie de contrôle et théorie floue. Ces perspectives seront notre prochain travail de recherche.

Bibliographie

[1] Abdeljawad, T., On Conformable Fractional Calculus,Journal of Computational ad Applied Mathematics,Vol. 279, 1 May 2015, 57-66, arXiv : 1402.6892v1 [math D, S] 27 Feb 2014.

[2] A. Delcroix. Fonctions généralisées et analyse non standard. Monatsh. Math. Sous presse.

[3] C.R. Serment. Synthese d'un isolateur vibratoire d'ordre non entier fondee sur une architecture arborescente d'elements viscoelastiques quasi-identiques. PhD thesis, Universite Bordeaux 1, France, 2001.

[4] D. Rajterc Ciric and M. Stojanovic, Convolution-Type Derivatives And Transforms Of Colombeau Generalized Stochastic Processes, Integral Transforms Spec. Funct. 22(4-5) (2011) 319-326.

[5] D. Rajterc Ciric And M. Stojanovic Fractional Derivatives Of Multidimensional Colombeau Generalized Stochastic Processes ,Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 16, No 4 (2013), pp. 949–961 ;

[6] D. Rajter-Ciric, A Note On Fractional Derivatives Of Colombeau Generalized stochastic Processes, Novi Sad J. Math. 40, No 1 (2010), 111–121.

[7] D. Rajterc Ciric A Note On Fractional Derivatives Of Colombeau generalized stochastic processes ,Vol. 40, No. 1, 2010, 111-121

[8] D. Scarpalezos. Colombeau generalized functions : topological structures ; microlocal properties. A simplified point of view. Prépublication de l'Université de Paris 7, 1993.

[9] E.E. Rosinger. Generalized solutions of nonlinear partial differential equations. North Holland, Amsterdam, 1990.

[10] H.A. Biagoni. A nonlinear theory of generalized functions. Lecture Notes in Math, 1421, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[11] H. Kleinert et A. Chervyakov (2000). "Coordonner l'indépendance des intégrales quantiques de la voie mécanique" (PDF) . Phys. Lett . A 269 (1-2) : 63. arXiv : quant-

ph / 0003095 . Bibcode : 2000PhLA..273 .... 1K . doi : 10.1016 / S0375-9601 (00) 00475-8 .

[12] H. Kleinert et A. Chervyakov (2001). "Règles pour les intégrales sur les produits de distributions de l'indépendance des coordonnées des intégrales de chemin" (PDF) . EUR. Phys. J. C. 19 (4) : 743-747. arXiv : quant-ph / 0002067 . Bibcode : 2001EPJC ... 19..743K . doi :10.1007 / s100520100600 .

[13] J.F. Colombeau, Elementary Introduction in New Generalized Functions, North Holland, Amsterdam, 1985.

[14] J.L. Battaglia, L.L. Lay, J. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Utilisation de modeles d'identifcation non entiers pour la resolution de problemes inverses en conduction. International journal of thermal sciences, 39(3) :374389, 2000.

[15] K. Diethelm and A.D. Freed. On the solution of nonlinear fractional order diferential equations used in the modeling of viscoplasticity. Sc. Comp. Chem. Eng., 39(3) :217224, 1999.

[16] L.R. Bagley and J. Torvik. Fractional calculus - a diferent approach to the analysis of viscoelastically damped structures. AIAA journal, 21(5) :741748, 1983.

[17] M. Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. Annals of Geophysics, 19(4) :383393, 1966.

[18] Mirjana Stojanovic a Extension Of Colombeau Algebra to Derivatives Of Arbitrary Order D^α ; $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$: Application to ODEs and PDEs With Entire And Fractional Derivatives, Nonlinear Analysis 71 (2009) 5458-5475.

[19] Mirjana Stojanovic, Fondation Of The Fractional Calculus In Generalized Function Algebras, Analysis And Applications, Vol. 10, No. 4 (2012) 439-467.

[20] M'hamed Elomari, Said Melliani, and Lalla Saadia Chadli, Generalized Heat Equation Under Conform Derivative, Sarajevo Journal Of Mathematics, Vol.15 (28), No.2, (2019), 265 – 281.

[21] M. Oberguggenberger, Generalized Functions In Nonlinear Models A Survey, Nonlinear Analysis 47(2001) 5049-5040.

[22] M. Oberguggenberger. Nonlinear theories of generalized functions. Proceedings of the International Conference on Applications of Nonstandard Analysis, Functional Analysis and Probability Theory. Blaubeuren, 1992.

[23] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identifcation. Proc.IFAC SYSID, pages 2123, 2000.

[24] R. Darling and J. Newman. On the short-time behavior of porous intercalation electrodes. J.Elect. Soc., 144(9) :30573063, 1997.

[25] R. Hilfer. Applications of fractional calculus in physics. World Scientifc, 2000.

[26] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, And M. Sababheh, A Newdefinition Of Fractional Derivative, Journal Of Computational And Applied Mathematics, vol. 264, pp. 65-70, 2014.

[27] S. MELLIANI, A. CHAFIKI, L. S. CHADLI, AND M. OUKESSOU New Fractional Derivative In Colombeau Algebra Journal of Universal Mathematics Vol.1 No.2 pp.180-189 (2018) ISSN-2618-5660

[28] SAID MELLIANI, AZIZ MOUJAHID, LALLA SAADIA CHADLI AND M'HAMED ELOMARI Generalised Solutions For Fractional Cauchy J. Adv. Math. Stud. Vol. 9(2016), No. 1, 17-25 http ://journal.fairpartners.ro

[29] T. Abdeljawad, On Conformable Fractional Calculus (Submitted For Publication)

[30] V. Gafiychuk, B. Datsko, and V. Meleshko. Mathematical modeling of time fractional reaction-difusion systems. Comp.Appl.Math., 220(1) :215225, 2008.

[31] Yu. V. Egorov. A contribution to the theory of generalized functions. Russian Math. Surveys 45 :5 (1990), 1-49. Translated from : Uspekhi Mat. Nauk 45 :5, 1990, 3-40.

[32] Yu. M. Shirokov (1979). "Algèbre des fonctions généralisées unidimensionnelles" . Physique théorique et mathématique . 39 (3) : 291-301. Bibcode : 1979TMP .... 39..471S . doi : 10.1007 / BF01017992 .