



**UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE**  
**Faculté des Sciences et Techniques**  
**Béni-Mellal**



*Centre d'Études Doctorales : Sciences et Techniques*

*Formation Doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

**THÈSE**

Présentée par

**Abdelhadi HACHLAF**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

*Spécialité : Mathématiques*

*Option : Mathématiques Appliquées*

**Modélisation mathématique et analyse numérique de quelques  
problèmes de contact avec frottement en thermo-piézoélectricité.**

**Soutenue le Samedi 03 Octobre 2020 à 10h00 devant la commission d'examen :**

Mr. Mohamed BAHAJ	Professeur, Université Hassan Premier, F.S.T. de Settat, Maroc.	Président/ Rapporteur
Mr. Karam ALLALI	Professeur, Université Hassan II de Casablanca. F.S.T. de Mohammedia, Maroc.	Rapporteur
Mr. Lekbir AFRAITES	Professeur, Université Sultan Moulay Slimane, F.S.T. de Béni Mellal, Maroc.	Rapporteur
Mr. Khalid ISKAFI	Professeur, Université Sultan Moulay Slimane, F.P. de Khouribga, Maroc.	Examineur
Mr. Salah NAJIB	Professeur, Université Sultan Moulay Slimane, F.P. de Khouribga, Maroc.	Examineur
Mr. Rachid FAKHAR	Professeur, Université Sultan Moulay Slimane, F.P. de Khouribga, Maroc.	Directeur de Thèse



---

# Remerciement

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à Mr le Professeur "Rachid FAKHAR", mon directeur de thèse. Il est très difficile de le remercier en quelques lignes. Tout d'abord, je le remercie de m'avoir permis de le suivre dans cette aventure de Recherche en Mathématiques Appliquées. J'ai apprécié tant son dynamisme que sa rigueur scientifique. Je tiens ensuite à lui exprimer ma gratitude pour tous les précieux conseils qu'il m'a donnés en orientant et en guidant mon travail. J'ai réussi grâce à sa compétence, sa patience et la confiance qu'il m'a accordées. Travailler sous sa direction, fût pour moi un grand plaisir. Par son exceptionnel enthousiasme et par sa constante disponibilité, il m'a consacré beaucoup de son temps précieux et m'a prodigué ses encouragements qui ont rendu ce travail possible. La naissance de cette thèse lui doit tout et je tiens à lui exprimer toute ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement, mon co-encadrant de thèse, Monsieur El-Hassan BENKHIRA pour son aide et son encouragement à terminer cette thèse. Ses éclaircissements continus ont guidé mes recherches tout au long de ce travail.

Ma reconnaissance va à Monsieur Mohamed BAHAJ pour avoir accepté d'être président de ce jury.

Je remercie également Messieurs Karam ALLALI, Lekbir AFRAITES et Mohamed BAHAJ, d'avoir accepté la charge de rapporteurs de cette thèse et pour l'honneur qu'ils me font en apportant leur expertise à ce travail, ainsi qu'en participant au jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens ensuite à remercier Messieurs Khalid ISKAFI et Salah NAJIB d'être examinateur de cette thèse. Leurs présence m'a honoré. Je tiens à leurs mains chaleureusement.

J'aimerais finalement remercier tous les membres de ma famille qui m'ont toujours encouragé tout au long de ma scolarité et qui m'ont facilité les conditions afin d'acquérir une formation

## Remerciements

---

intéressante et motivante. Je remercie également tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation et à la rédaction de ce travail de thèse.

*Abdelhadi HOGLI*

---

# Table des matières

<b>Remerciement</b>	<b>i</b>
<b>Notations et Symboles</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Requis et préliminaires</b>	<b>5</b>
1 Cadre fonctionnel scalaire . . . . .	5
2 Cadre fonctionnel vectoriel . . . . .	10
3 Quelques résultats élémentaires . . . . .	13
4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	14
5 Éléments d'analyse non linéaire . . . . .	15
6 Théorèmes d'existence et d'unicité . . . . .	18
<b>II Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité</b>	<b>23</b>
1 Définitions . . . . .	23
2 Équations d'équilibre . . . . .	24
2.1 Équilibre mécanique . . . . .	24
2.2 Équilibre électrique . . . . .	25
2.3 Équilibre thermique . . . . .	25
3 Lois de comportement thermo-piézoélectrique . . . . .	26
4 Conditions de contact et lois de frottement . . . . .	27
4.1 Conditions de contact mécanique . . . . .	27
4.1.1 Contact unilatéral . . . . .	28

---

4.1.2	Compliance normale . . . . .	29
4.2	Lois de frottement . . . . .	29
4.2.1	Frottement de Tresca . . . . .	29
4.2.2	Frottement de Coulomb . . . . .	30
4.2.3	Frottement sec . . . . .	30
4.3	Conditions de contact thermo-électriques . . . . .	31
4.4	Formulation du problème . . . . .	33
4.4.1	Cadre physique . . . . .	34
4.4.2	Modèles mathématiques . . . . .	35
4.4.3	Notations et hypothèses . . . . .	37
<b>III Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité</b>		<b>41</b>
1	Modèle mathématique . . . . .	41
2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	42
3	Résultat d'existence de la solution du problème discret . . . . .	43
4	Étude de la convergence . . . . .	51
<b>IV Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité</b>		<b>63</b>
1	Modèle mathématique . . . . .	63
2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	64
3	Étude de l'existence de la solution du problème discret . . . . .	66
4	Analyse asymptotique . . . . .	73
<b>V Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale</b>		<b>85</b>
1	Modèle mathématique . . . . .	85
2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	86
3	Résultat d'existence de la solution du problème discret . . . . .	88
4	Étude de la convergence . . . . .	94
<b>VI Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité</b>		<b>107</b>
1	Modèle mathématique . . . . .	107
2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	108

---

3	Existence d'une solution du problème discret . . . . .	109
4	Analyse asymptotique . . . . .	115
5	Dépendance continue . . . . .	123
<b>VII Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité</b>		<b>129</b>
1	Modèle mathématique . . . . .	129
2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	130
3	Approximation entièrement discrète et estimation d'erreur . . . . .	131
4	Méthode de décomposition itérative successive . . . . .	135
4.1	Convergence . . . . .	136
4.2	Algorithme de résolution . . . . .	139
5	Simulation numérique . . . . .	139
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>147</b>
<b>Bibliographie générale</b>		<b>149</b>





---

## Notations et Symboles

$\Omega$	un domaine de $\mathbb{R}^d$ ( $d = 2, 3$ ).
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$(\Gamma_i)_{i=D, N, C}$	une partition mesurable de $\Gamma$ .
$(\Gamma_i)_{i=a, b}$	une partition mesurable de $\Gamma$ .
$meas(\Gamma_i)$	la mesure de Lebesgue de $\Gamma_i$ .
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur $\mathbb{R}$ .
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .
$v_\nu, v_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ de vecteurs $v$ .
$v_{i,j}$	la dérivée partielle $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ de la composante $v_i$ par rapport à la variable $x_j$ .
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\overline{\Omega}$ .
$H$	l'espace produit $L^2(\Omega)^d$ .
$H_1$	l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ .
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d} = \{\sigma = (\sigma_{ij}), \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}$ .
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H}, Div(\sigma) = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace produit $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma$ .
$(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$	le produit de dualité entre $H'_\Gamma$ et $H_\Gamma$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$Supp(f)$	le support de la fonction $f$ .

$\nabla f$	le gradient de la fonction $f$ .
$\operatorname{div}(f)$	la divergence de la fonction $f$ .
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ ( $\mathbb{S}^d \simeq \mathbb{R}_s^{d \times d}$ ).
$\varepsilon(v)$	le tenseur des déformations linéarisé.
$\operatorname{Div}(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma$ .
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de l'espace de Hilbert réel $X$ .
$\ \cdot\ _X$	la norme de l'espace de Hilbert réel $X$ .
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ de $X$ .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ de $X$ .
$\liminf, \underline{\lim}$	la limite inférieure.
$\limsup, \overline{\lim}$	la limite supérieure.
p.p.	presque partout.
$C([0; T]; X)$	l'espace des fonctions continues sur $[0; T]$ à valeurs dans $X$ .
$C^1([0; T]; X)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0; T]$ à valeurs dans $X$ .
$L^p([0; T]; X)$	l'espace des fonctions $f$ fortement mesurables de $]0; T[$ dans $X$ telles que $\int_0^T \ f\ _X^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$ .
$W^{1;p}(0; T; X)$	$\left\{ u / u \in L^p(0; T; X) \text{ et } \dot{u} \in L^p(0; T; X) \right\}$ .

---

# Introduction générale

Les problèmes de contact et les effets qui en résultent sont connus depuis l'Égypte ancienne (ils lubrifiaient les blocs de pierre pour pouvoir les transporter). Ce phénomène est toujours un sujet d'actualité, et à cette raison, nombreux chercheurs se sont intéressés à analyser ce types de problèmes.

La première recherche mathématique sur ce sujet est de Signorini [69]. Il a formulé le contact sans frottement entre un corps élastique et une fondation rigide. Ensuite, Fichera [30] a prouvé l'existence d'une solution en utilisant quelques arguments sur les inéquations variationnelles elliptiques. Mais nous pouvons affirmer que l'étude mathématique des problèmes de contact a déjà commencé avec les travaux de Duvaut et Lions [26], où nous trouvons des nombreux formulations de problèmes de contact. En plus, des résultats de l'existence et de l'unicité de leurs solutions.

L'utilisation des matériaux piézoélectriques, dans les problèmes de contact, est très courante en applications industrielles. Ceci est notamment dû à leur capacité à montrer un couplage entre les variables mécaniques et électriques. En effet, ces matériaux produisent des charges électriques lorsqu'ils sont déformés. Et, inversement, ils subissent des contraintes lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique. Les problèmes impliquant les propriétés électromécaniques des matériaux ont été largement traités. De plus, une extension naturelle de ces modèles électro-élastiques consiste à inclure la température comme variable d'état supplémentaire, afin de tenir compte des effets thermiques en plus des effets piézoélectriques. Dans les modèles de contact avec frottement, de nombreuses complications surviennent lorsque les effets piézoélectriques et thermiques sont couplés. En effet, les mécanismes physiques des forces, de potentiel électrique et de la chaleur sur l'interface de contact lors de ce phénomène sont extrêmement complexes. Ils sont responsables des effets de frottement et d'échauffement avec frottement au niveau de la zone de contact. De

plus, la dissipation de l'énergie ou la production de chaleur, provoque une dilatation qui peut augmenter localement le champ de pression et ainsi modifier les conditions de contact. Et donc, les instabilités du phénomène. La littérature ici est très riche. Nous pouvons voir, par exemple, [7, 35, 52] pour les modèles mathématiques, sur la piézoélectricité, les résultats disponibles sur les problèmes de contact statique avec ou sans frottement pour les matériaux piézoélectriques. Ils sont également considérés dans [13, 47, 49] et [28] sous l'hypothèse que la fondation est électriquement isolatrice et conductrice, respectivement. Dans le cas quasi-statique, certains résultats d'existence et d'unicité peuvent être trouvés. Par exemple, dans [21] en élasticité linéaire, et dans [4, 72] en électro-viscoélasticité non linéaire, et [43–46] pour les problèmes de contact pour les matériaux piézoélectriques et ne prenant pas en compte l'effet thermique sur le processus. Dans notre contribution, nous traitons des modèles thermo-piézoélectriques décrivant l'évolution de l'état thermo-électromécanique d'un corps piézoélectrique en contact frottant avec une fondation qui peut être électriquement et/ou thermiquement conductrice. Nous supposons ici que les forces en action, les tractions et les sources de chaleur varient lentement dans le temps. Et, par conséquent, nous pouvons négliger les termes d'inertie dans les équations de mouvement et utiliser l'approximation quasi-statique. Dans notre analyse, nous négligeons les éventuels effets de viscosité dus aux propriétés visqueuses du corps et toute aimantation spontanée possible du corps en présence de champs électriques ou thermiques externes. Ce qui est le cas d'une classe non ferroïque de matériaux piézoélectriques couramment utilisés tels que les céramiques, les polymères et certaines piézo-composites. De plus, nous prenons en compte les effets thermiques survenant lorsque le contact de frottement s'accompagne d'une génération de chaleur. ces effets sont importants pour prédire le comportement thermo électromécanique, en particulier pour des micro-structures très sensible à la température [40]. La théorie de la thermo-piézoélectricité a été proposée pour la première fois par Mindlin [52]. Il a étudié les équations régissant une plaque thermo-piézoélectrique linéaire. Chandrasekharaiah a généralisé la théorie de la thermo-piézoélectricité de Mindlin, pour tenir compte de la vitesse finie de propagation des perturbations thermiques sur la base de la première et de la deuxième loi de la thermodynamique. Il a dérivé les équations constitutives généralisées applicables aux matériaux thermo-piézoélectriques [17]. Tiersten quant à lui, a dérivé les équations constitutives non linéaires de l'électro-thermo-élasticité, en appliquant les lois de la thermodynamique à un modèle macroscopique [76]. Quelques résultats récents pour des problèmes de contact avec frottement statique impliquant des matériaux thermo-piézoélectriques ont été étudiés dans [11, 12]. Dans ce genre de problème, le couplage thermo-piézoélectrique, entraîne des difficultés mathématiques supplémentaires dans leur analyse variationnelle. La présente thèse est consacrée à l'étude de nouveaux modèles mathématiques, qui décrit le contact quasi-statique avec frottement entre

un corps thermo-piézoélectrique et une fondation conductrice. Contrairement aux références ci-dessus, la nouveauté des modèles réside dans le fait que le contact, l'équation d'énergie et les conditions thermiques, de frottement et de conductivité sont modélisés différemment. Et dans le fait qu'ici, le processus est quasi-statique.

Cette thèse est structurée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques outils de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats utiles pour l'étude des problèmes de contact.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats essentiels de la théorie des milieux continus et nous présentons les conditions aux limites utilisées.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques outils de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats utiles pour l'étude des problèmes de contact.

Dans le troisième chapitre, nous considérons un modèle mathématique décrivant le contact bilatéral avec frottement entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation thermiquement conductrice. Nous modélisons le comportement du matériau avec une loi thermo-électro-élastique linéaire. Le processus est supposé quasi-statique et le contact est modélisé avec un frottement de type sec, dans lequel la chaleur générée par frottement est prise en compte. Nous dérivons la formulation variationnelle du problème, et nous établissons un résultat d'existence de sa solution faible.

Dans le quatrième chapitre, nous analysons un problème de contact unilatéral quasi-statique avec frottement entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation thermiquement et électriquement conductrice. Le matériau est supposé thermo-électro-élastique linéaire et le contact est modélisé par les conditions de Signorini, loi de frottement sec et une condition régularisée de conductivité électrique. Les effets de la chaleur dus au frottement et de la conductivité thermique sur les mécanismes des matériaux sont pris en compte. Pour prouver l'existence d'une solution faible du problème, une formulation discrète est obtenue en utilisant un schéma implicite en temps. Plusieurs estimations sur les solutions discrétisées sont données, ce qui nous permet de passer à la limite en utilisant les résultats de compacité.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons l'existence d'une solution faible pour un problème thermo-piézoélectrique quasi-statique qui décrit un contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation thermiquement et électriquement conductrice. Nous modélisons le comportement des matériaux avec une loi thermo-électro-élastique linéaire et le contact avec une condition de compliance normale, couplée à une variante de frottement sec de type Coulomb, et des conditions de conductivité électrique et thermique dans lesquelles la chaleur de frottement générée au cours du processus est prise en compte. Le modèle est sous la forme d'un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. L'existence

de solutions est obtenue à partir d'inégalités quasi-variationnelles elliptiques, de discrétisation temporelle et du théorème de point fixe de Banach.

Le sixième chapitre traite un problème de contact quasi-statique avec frottement entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation rigide. Le matériau est modélisé par une loi constitutive thermo-électro-élastiques linéaire. Le contact est décrit avec des conditions de Signorini pour les déplacements et la température et une version de la loi de frottement de Coulomb à coefficient dépendant du glissement. Nous en déduisons pour notre modèle la formulation variationnelle suivante : Il s'agit d'un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. Nous prouvons ensuite, sous certaines hypothèses de petitesse sur le coefficient de frottement, l'existence d'une solution faible du problème. Enfin, nous étudions la dépendance continue de la solution par rapport au coefficient de frottement et aux données initiales du déplacement et de la température.

Dans le dernier chapitre, un problème statique de contact avec frottement entre un corps thermo-électro-élastique et une fondation rigide est considéré. Le comportement du matériau est décrit par une loi constitutive thermo-électro-élastique linéaire. Le contact est modélisé avec la condition Signorini et une loi de frottement de type Tresca, et des conditions de conductivité électrique et thermique. La formulation variationnelle se présente sous la forme d'un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. L'existence d'une solution faible est prouvée. Pour résoudre numériquement le problème considéré, une technique d'itération successive est proposée, et sa convergence est établie. Puis, afin d'améliorer le conditionnement du problème itératif, une formulation Lagrangienne augmentée appropriée est utilisée et ceci nous mène à la méthode de relaxation par blocs d'Uzawa. Enfin, les données numériques de tests bidimensionnels relatives à ce problème sont réalisées pour illustrer la performance de l'algorithme proposé.

---

---

# Chapitre I

---

## Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est parait utile de présenter, dans ce chapitre, le cadre fonctionnelle et quelques résultats abstraits sur les équations et les inéquations variationnelles élliptiques. Nous commençons par donner les espaces et les notations adoptées par la suite dans l'étude des problèmes de contact. Ensuite, nous passons en revue de quelques résultats fondamentaux portant sur ce types de problèmes, qui seront les plus utiles notamment dans la démonstration de l'existence et l'unicité des solutions faibles. Les résultats énoncés sont standards ils sont donnés sans démonstration. Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifier dans chacune des paragraphes suivantes :

### 1 Cadre fonctionnel scalaire

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques notions sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Particulièrement, les espaces de *fonctions continues*, de *fonctions continûment différentiables*, de *fonctions p-intégrables* et les *espaces de Sobolev*. Pour plus de détails, il est souhaitable de consulter les ouvrages [2], [15], [67].

Soit  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un point du domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  dont la frontière  $\Gamma$  est régulière. On dénote par  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la dérivation partielle d'une fonction  $u$  par rapport à la variable  $x_i$  et par  $D^\alpha$  l'opérateur différentiel d'ordre  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ . Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un multi-entier de longueur  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ . L'opérateur  $D^\alpha$  est défini par

$$D^\alpha \cdot = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (\text{I.1})$$

### Espaces des fonctions continues et continûment différentiables

On note  $\mathcal{C}(\Omega)$ , respectivement  $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$  l'espace des *fonctions continues* sur  $\Omega$ , respectivement l'espace des *fonctions uniformément continues* sur  $\Omega$ . L'espace  $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$  muni de la norme suivante

$$|v|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \sup\{|v(x)|; x \in \bar{\Omega}\}.$$

est un *espace de Banach*. Pour tout entier positif  $m$ , on désigne par  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , respectivement  $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions  $m$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$ , respectivement sur  $\bar{\Omega}$ ,

$$\mathcal{C}^m(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}(\Omega); D^\alpha v \in \mathcal{C}(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$$

$$\mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); D^\alpha v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace  $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$  est muni d'une structure de Banach pour la norme ci-dessous

$$|v|_{\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}$ ,

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\Omega)$$

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}).$$

Le support d'une fonction  $v$  défini sur  $\Omega$  étant le fermé  $\text{supp}(v) = \overline{\{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}}$ , on s'intéresse à  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support dans  $\Omega$ ,

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); \text{supp}(v) \subset \Omega\}.$$

Particulièrement, si la fonction  $v$  est à support  $\text{supp}(v)$  propre dans  $\Omega$ , alors  $v$  est dite fonction à support compact dans  $\Omega$  et l'inclusion suivante est alors triviale

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

## Espaces des fonctions p-intégrables

Pour  $p \in [1, +\infty[$  donné, on désigne par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $v$ , mesurable au sens de Lebesgue sur  $\Omega$ , telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (\text{I.2})$$



Muni de la norme (I.2), l'espace  $L^p(\Omega)$  est un Banach séparable et réflexif pour  $1 < p < +\infty$ .

Dans le cas particulier  $p = 2$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un Hilbert pour le produit scalaire suivant

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad (\text{I.3})$$

Pour  $p = +\infty$ , l'espace  $L^\infty(\Omega)$  est dit de fonctions  $v$  mesurables et essentiellement bornées, c'est-à-dire, elle existe une constante  $C$  telle que  $v(x) \leq C$  presque partout dans  $\Omega$ . Cet espace est un Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)| = \sup \{ C ; |v(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega \}$$

Pour  $1 \leq p < +\infty$  donné, on désigne par  $L^p_{loc}(\Omega)$ , l'espace des fonctions localement p-intégrables sur  $\Omega$  c'est-à-dire, des fonctions mesurables et p-intégrables sur tout compact  $K$  de  $\Omega$ .

**Remarque** Soit  $v$  une fonction de  $L^p_{loc}(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} u(x) \psi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

alors  $v = 0$  presque pour tout  $x$  de  $\Omega$ .

On termine cette section par un théorème résumant quelques résultats de base sur ces espaces. Soit  $p \in [1, +\infty]$ , on appelle exposant de  $p$  l'élément  $q \in [1, +\infty]$  donné par

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } p \in ]1, +\infty[, \\ +\infty & \text{si } p = 1, \\ 1 & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

**Théorème I.1** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $p \in [1, +\infty]$  d'exposant  $q$ . On a

1) Pour toutes fonctions  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$ , on a inégalité suivante

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad (\text{Inégalité de Hölder}).$$

2) Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace dual de  $L^p(\Omega)$  est l'espace  $L^q(\Omega)$ .

## Espaces de Sobolev d'ordre entier

Pour comprendre le sens de la dérivée faible d'ordre  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  pour une fonction  $v$ . On rappelle quelques notions sur les distributions de  $\Omega$ . L'espace  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ , muni de la topologie inductive, est dit *espace des fonctions test*  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Sur cet espace, la convergence de suites est définie comme suit

$$\{\varphi_n\}_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \iff \begin{cases} (\exists K \text{ compact de } \Omega)(\forall n); \text{ supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K \\ (\forall \alpha \text{ multi-indice}); D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi \text{ uniformément sur } \Omega \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . L'espace  $\mathcal{D}'(\Omega)$  muni de la topologie forte est dite espace des distributions sur  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$\{f_j\}_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} f \iff (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)); \langle f_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle .$$

Soit  $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On appelle dérivée faible (au sens des distributions) d'ordre  $\alpha$  de  $v$  sur  $\Omega$ , la distributions  $D^\alpha v \in \mathcal{D}'(\Omega)$  définie par

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)); \langle D^\alpha v, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, D^\alpha \varphi \rangle . \quad (\text{I.4})$$

La formule (I.4) généralise la dérivée partielle classique d'ordre  $\alpha$ , obtenue par intégration par parties dans la cas  $v \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ , c'est-à-dire ,

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)); \int_{\Omega} D^\alpha v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

Notons qu'à tout élément  $u \in L^p(\Omega)$ , on peut associer la distribution  $\tilde{u}$  défini par

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)); \langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

On obtient ainsi une application  $u \rightarrow \tilde{u}$  de  $L^p(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  injective, linéaire et continue. Toute distribution  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)$  peut être alors identifiée à  $u \in L^p(\Omega)$ , d'où les inclusions suivantes

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Grâce à cette identification, on peut définir la dérivée faible  $D^\alpha u$  d'ordre  $\alpha$  pour tout  $u \in L^p(\Omega)$ . Dans ce sens, Sobolev a pensé élargir les espaces  $L^p(\Omega)$  de manière naturelle, en considérant des fonctions p-intégrables dont les dérivées faibles à un ordre  $m$  donné, appartiennent à  $L^p(\Omega)$ .

Ces espaces, dites *espaces de Sobolev* et notés  $W^{m,p}(\Omega)$ , sont définis [71] comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega) ; D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m \}.$$

Ils sont des espaces de Banach, séparables pour la norme

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} \text{ si } p = +\infty,$$

et réflexifs pour  $1 \leq p < +\infty$ . Dans le cas particulier  $p = 2$ , les espaces  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  sont des Hilbert pour le produit scalaire ci-dessous

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

On finit par noter que  $W_0^{m,p}(\Omega)$  est l'adhérence de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{m,p}(\Omega)$  et  $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ .

**Théorème I.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma$ . Il existe une application linéaire  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1- *Pour tout élément  $v$  de  $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , on a  $\gamma v = v|_\Gamma$ .*
- 2- *l'application  $\gamma$  est continue, c'est-à-dire, il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- 3- *l'application  $\gamma$  est compacte, c'est-à-dire, toute suite bornée  $\{v_n\}$  de  $H^1(\Omega)$ , admet une sous suite  $\{v_{n_k}\}$  telle que  $\gamma v_{n_k}$  converge dans  $L^2(\Gamma)$ .*

L'application  $\gamma$  est dite *opérateur trace* et  $\gamma v$  la trace de  $v$  sur  $\Gamma$ .

## 2 Cadre fonctionnel vectoriel

On introduit dans cette section les espaces de Sobolev fréquemment utilisés en mécanique de contact. On considère les espaces  $H$ ,  $H_1$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}_1$  définis comme suit :

$$u = (u_i) \in H \iff u_i \in L^2(\Omega)$$

$$u = (u_i) \in H_1 \iff u_i \in H^1(\Omega)$$

$$\tau = (\tau_{ij}) \in \mathcal{H} \iff \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)$$

$$\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{H}_1 \iff \sigma \in \mathcal{H} \text{ et } \sigma_{ij,j} \in H.$$

Les espaces  $H$ ,  $H_1$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des Hilberts pour les produits scalaires ci-dessous

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \tau_{ij} \sigma_{ij} dx$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div(\sigma), Div(\tau))_H.$$

Où les opérateurs  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont définis par

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

On rappelle que l'application trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire continue, mais n'est pas surjective. Si  $H_{\Gamma}$  désigne l'image de l'application  $\gamma$ , alors  $H_{\Gamma}$  s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . On note  $H'_{\Gamma}$  l'espace dual de  $H_{\Gamma}$  et  $(\cdot, \cdot)$  le produit de dualité entre  $H_{\Gamma}$  et  $H'_{\Gamma}$ . Puisque  $\Gamma$  est suffisamment régulière, le vecteur normal extérieur  $\nu$  est bien défini. Soit  $n = \gamma\nu$  la trace de  $\nu$  sur  $\Gamma$ , on a pour tout  $\sigma \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément  $\sigma n \in H'_{\Gamma}$  tel que

$$(\sigma n, \gamma v) = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H \quad (\forall v \in H_1).$$

En outre, si  $\sigma$  est suffisamment régulier, on a la formule

$$(\sigma n, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma n \cdot v da \quad (\forall v \in H_1).$$

Il en découle la dite *formule de Green pour l'élasticité*

**Proposition I.3** *Soient  $\sigma$  un élément de  $\mathcal{H}_1$  et  $v$  élément de  $H_1$ . Alors*

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma n \cdot v da.$$

On considère  $\mathcal{W} = \{D = (D_i) \in H; div(D) = (D_{i,i}) \in L^2(\Omega)\}$ , muni du produit scalaire

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = (D, E)_H + (\operatorname{div}(D), \operatorname{div}(E))_{L^2(\Omega)}.$$

Cet espace est un Hilbert. En plus, si  $D \in \mathcal{W}$  est suffisamment régulier, on a la formule suivante

**Proposition I.4** *Soient  $D$  un élément de  $\mathcal{W}$  et  $v$  élément de  $H^1(\Omega)$ . Alors*

$$(D, \nabla v)_H + (\operatorname{div}(D), v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D n \cdot v \, da. \quad (\text{formule de Green}).$$

On s'intéresse au sous espace fermé  $V = \{v \in H_1; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$  de  $H_1$  qu'on munit du produit scalaire  $(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$  et de la norme associée  $\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}$  pour tout  $u$  et  $v$  de  $V$ . Étant donné que  $\operatorname{meas}(\Gamma_1) > 0$ , l'inégalité de Korn appliquée à  $V$ , implique

$$(\exists c_1 > 0), (\forall v \in V); \quad \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq c_1 \|v\|_{H_1}.$$

Il s'en suit que les normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_{H_1}$  sont équivalentes et ainsi,  $(V, (\cdot, \cdot)_V)$  est un Hilbert. En outre, il découle du théorème de trace de Sobolev qu'il existe  $c_0 > 0$  qui dépend uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$(\forall v \in V); \quad \|v\|_{(L^2(\Gamma_3))^d} \leq c_0 \|v\|_V. \quad (\text{I.5})$$

On s'intéresse, également aux sous espaces fermés  $W$  et  $Q$  de  $H^1(\Omega)$  définis par

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \quad Q = \{\eta \in H^1(\Omega); \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}. \quad (\text{I.6})$$

Munis des produits scalaires  $(\varphi, \psi)_W = (\varphi, \psi)_{H^1(\Omega)}$ ,  $(\theta, \eta)_Q = (\theta, \eta)_{H^1(\Omega)}$  et de leurs normes euclidiennes associées, les espaces  $W$  et  $Q$  sont des Hilberts, et le théorème de Friedrichs-Poincaré, appliquée à  $W$  et  $Q$  implique

- Puisque  $\operatorname{meas}(\Gamma_1) > 0$ , alors il existe  $c_F > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$\|\nabla \psi\|_{(L^2(\Omega))^d} \geq c_F \|\psi\|_W, \quad (\forall \psi \in W).$$

- Puisque  $\operatorname{meas}(\Gamma_a) > 0$ , alors il existe  $c_F > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telle que

$$\|\nabla \eta\|_{(L^2(\Omega))^d} \geq c_F \|\eta\|_Q, \quad (\forall \eta \in Q).$$

D'après le théorème de Sobolev, il existe  $c_1$  ne dépendant que de  $\omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_C$  tel que

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_1 \|\psi\|_W, \quad (\forall \psi \in W). \quad (\text{I.7})$$

De plus, il existe une constante  $c_2 > 0$  qui ne dépend que de  $\omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_C$  tel que

$$\|\eta\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_2 \|\eta\|_Q, \quad (\forall \eta \in Q). \quad (\text{I.8})$$

Plus de détails sur ces deux inégalités voir [56] et [57].

Pour finir cette section, nous introduisons les deux sous-ensembles convexes fermés  $K_1$  et  $K_2$  respectivement de  $V$  et  $Q$ , définis par :

$$K_1 = \{v \in V, v_\nu - g \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}; \quad K_2 = \{\eta \in Q, \eta - \theta_F \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}, \quad (\text{I.9})$$

où  $g$  est la fonction gap et  $\theta_F$  est la température de la fondation. Ils sont dits respectivement *l'ensemble des déplacements admissibles* et *l'ensemble des températures admissibles*, et généralement utilisés dans le cas où le contact mécanique ou thermique est modélisé par les conditions de Signorini.

### 3 Quelques résultats élémentaires

Dans ce paragraphe,  $X$  est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $\|\cdot\|_X$ . Soient  $X'$  le dual de  $X$  et  $(\cdot, \cdot)_{X', X}$  le produit de dualité entre  $X'$  et  $X$ .

**Théorème I.5** *Pour tout  $\varphi \in X'$ , il existe un élément  $f_\varphi \in X$  unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{X', X} = \langle f_\varphi, v \rangle_X \quad (\forall v \in X).$$

*En plus, on a*

$$\|\varphi\|'_X = \|f_\varphi\|_X.$$

Ce théorème dit *de représentation de Riesz* montre que toute forme linéaire continue sur  $X$  peut s'écrire de manière unique à l'aide du produit scalaire de  $X$ . L'application  $\varphi \rightarrow f_\varphi$  identifie l'espace  $X$  à son dual  $X'$ .

**Définition** On dit qu'une suite  $\{x_n\}$  de  $X$  converge faiblement vers  $x \in X$  si et seulement si la suite  $(x_n, v)_X$  converge fortement vers  $(x, v)_X$  pour tout  $v \in X$  et on écrit

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \in X \Leftrightarrow (\forall v \in X), (x_n, v)_X \rightarrow (x, v)_X.$$

Notons qu'il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la convergence forte de  $\{x_n\}$  dans  $X$

implique sa convergence faible dans  $X$ . La réciproque n'est pas toujours vraie, néanmoins, il découle de la réflexivité de tout espace de Hilbert les résultats suivants :

**Théorème I.6** *Soit  $\{x_n\}$  une suite de l'espace de Hilbert  $X$ .*

1. *Si  $\{x_n\}$  est bornée dans  $X$ , alors elle admet une sous suite  $\{x_{n_k}\}$  qui converge faiblement vers un élément  $x$  de  $X$ .*
2. *Si tout les sous suites de  $\{x_n\}$  convergent faiblement vers la même limite  $x$  de  $X$ , alors la suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers  $x$ .*

## 4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe,  $X$  est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $\|\cdot\|_X$  et  $T > 0$ . Pour  $p \in [1; \infty]$ . On définit l'espace

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{x \in \mathcal{D}'(0, T; X) ; D_j x \in L^p(0, T; X) \text{ pour } j = 0; 1\},$$

où  $D_j$  est la dérivée d'ordre  $j$  au sens de distribution. Il est un espace de Sobolev pour la norme

$$\|x\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|x\|_X^p + \|\dot{x}\|_X^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

D'autre part  $W^{1,\infty}(0, T; X)$  est un espace de Sobolev pour la norme

$$\|x\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \|x\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|\dot{x}\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

De plus, nous dénotons par  $C([0, T]; X)$  l'espace des fonctions continues sur  $[0; T]$  à valeurs dans  $X$  muni de norme

$$\|x\|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X.$$

**Lemme I.1 (de Gronwall)** *Soient  $f, g \in C([0, T]; \mathbb{R}_+)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  alors si*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s)\varphi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

alors

$$\varphi(t) \leq \left( a + \int_0^t f(s) ds \right) \exp\left( \int_0^t g(s) ds \right), \quad t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier  $f \equiv 0$ , le lemme de Gronwall devient :

**Corollaire I.1** Soient  $f \in C([0, T]; \mathbb{R}_+)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  alors si  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t g(s)\varphi(s) ds, \text{ alors } \varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right).$$

Dans cette section, on présente quelques éléments du cadre fonctionnel relatif aux *inéquations variationnelles* et *quasi-variationnelles* ainsi que quelques résultats classiques sur l'existence et l'unicité de la solution pour ces inéquations. La littérature sur ce sujet est très riche. On se renvoyons par exemple à [14], [39], [64].

## 5 Éléments d'analyse non linéaire

Ce paragraphe est un bref rappel sur les fonctions convexes, les fonctions semi-continues inférieurement, les fonctions Gâteaux-différentiables et les opérateurs fortement monotones de Lipschitz. On considère  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_X$ .

**Définition** Soit  $j$  une fonction de  $X$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ .

1. la fonction  $j$  est dite *propre* s'elle n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , c'est-à-dire,

$$(\exists u \in X); \quad j(u) < +\infty.$$

2. la fonction  $j$  est dite *convexe* si pour tout  $u$  et  $v$  de  $X$ , on a

$$(\forall t \in [0, 1]); \quad j(tu + (1-t)v) \leq tj(u) + (1-t)j(v).$$

3. la fonction  $j$  est dite *semi-continue inférieurement* en  $u \in X$  si pour tout suite  $(u_n)$  de  $X$  convergente vers  $u$  dans  $X$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) > j(u).$$

4. la fonction  $j$  est dite *faiblement semi-continue inférieurement* en  $u \in X$  si pour tout suite  $(u_n)$  de  $X$  faiblement convergente vers  $u$  dans  $X$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) > j(u).$$

Les deux notions de (*resp. faible*) *semi-continuité inférieure* sont liées par la proposition suivante



**Proposition I.7** *La fonction  $j$  de  $X$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$  est convexe, propre et semi-continue inférieurement si et seulement si  $j$  est faiblement semi-continue inférieurement.*

Tenons compte de la remarque ci-dessous, cette proposition peut être d'un bon usage pour les fonctions indicatrices  $\chi_K$  des sous ensembles non vides, convexes et fermés  $K$  de  $X$ .

**Remarque** Le sous ensemble non vide  $K$  est un convexe fermé si et seulement si  $\chi_K$  est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Dans la mécanique de contact, la notion de Gâteaux-différentiabilité est très utilisée. On dit qu'une fonction  $j$  de  $X$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$  est *Gâteaux-différentiable* en  $u \in X$  s'il existe un élément, noté  $\nabla j(u) \in X$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(u + tv) - j(u)}{t} = (\nabla j(u), v), \quad (\forall v \in X).$$

L'élément  $\nabla j(u)$  s'appelle gradient de  $j$  en  $u$  et le réel  $j'(u, v) = (\nabla j(u), v)$  est dit dérivée directionnelle de  $j$  en  $u$  dans la direction  $v$ . Cette notion de Gâteaux-différentiabilité permet de caractériser la convexité (I.2) et la semi-continuité inférieure (I.3) d'une fonction.

**Lemme I.2** *Si la fonction  $j : X \rightarrow ] -\infty, +\infty]$  est Gâteaux-différentiable, alors elle est convexe si et seulement si elle vérifie*

$$j(v) - j(u) \geq (\nabla j(u), v - u), \quad (\forall u, v \in X).$$

**Lemme I.3** *Si la fonction  $j : X \rightarrow ] -\infty, +\infty]$  est convexe et Gâteaux-différentiable, alors elle est semi-continue inférieurement.*

On continue par un rappel sur les opérateurs (resp. fortement) monotones et de Lipschitz.

**Définition** On considère un opérateur non linéaire  $A : X \rightarrow X$ . On dit que

1. l'opérateur  $A$  est *monotone*, s'il vérifie

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \quad (\forall u, v \in X).$$

2. l'opérateur  $A$  est *fortement monotone*, s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2, \quad (\forall u, v \in X).$$

3. l'opérateur  $A$  est de Lipschitz, s'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$(Au - Av, u - v)_X \leq M \|u - v\|_X^2, \quad (\forall u, v \in X).$$

**Proposition I.8** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

1. *Si  $A$  est inversible, alors son inverse  $A^{-1}$  est fortement monotone et de Lipschitz.*
2. *Si  $B$  est un opérateur monotone, alors  $A + B$  est fortement monotone et de Lipschitz.*

Le théorème suivant dit de *Minty-Browder* caractérise l'inversibilité d'un opérateur  $A$  [15].

**Lemme I.4** *Soit  $A : X \rightarrow X$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ , ( $A$  est inversible).*

Remarquons que si une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, c'est-à-dire,

$$(\exists M > 0); \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad (\forall u, v \in X).$$

Il en résulte du théorème de Riesz qu'il existe un opérateur  $A : X \rightarrow X$  défini par

$$(Au, v)_X = a(u, v), \quad (\forall u, v \in X).$$

En plus, si la forme bilinéaire  $a$  est  $X$ -elliptique, c'est-à-dire,

$$(\exists m > 0); \quad |a(u, u)| \geq m \|u\|_X^2, \quad (\forall u \in X).$$

Alors, l'opérateur  $A$  est fortement monotone et les équivalences suivantes sont immédiates

**Lemme I.5** *Soit  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. Alors,*

1. *la forme  $a$  est continue  $\iff$  l'opérateur  $A$  est de Lipschitz.*
2. *la forme  $a$  est  $X$ -elliptique  $\iff$  l'opérateur  $A$  est fortement monotone.*

On finit par introduire l'importante notion de pseudo-monotonie qui généralise la notion de monotonie. Pour plus de détails, on peut consulter [14], [39] et [66].

**Définition** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur borné. On dit que  $A$  est pseudo-monotone si pour toute suite  $(u_n)$  convergente faiblement vers  $u$  dans  $X$  telle que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0$ , l'inégalité suivante est satisfaite

$$(Au, u - v)_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X, \quad (\forall v \in X).$$

## 6 Théorèmes d'existence et d'unicité

Dans cette section, on énonce quelques théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour des inéquations variationnelles utilisées dans un bon nombre de problèmes en mécanique de contact. On désigne toujours par  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ .

**Lemme I.6** *Soient  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, continue,  $X$ -elliptique et  $f$  un élément de  $X$ . Alors, il existe un unique élément  $u \in X$  tel que*

$$a(u, v) = (f, v)_X, \quad (\forall v \in X).$$

Ce théorème classique, dit de *Lax-Milgram*, admet les deux généralisations suivantes qui traitent le problème des *inéquations variationnelles elliptiques de seconde espèce sur  $X$*  [14],[27].

**Théorème I.9** *Soient  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz,  $K$  un convexe fermé et non vide de  $X$  et  $j : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. Alors, pour tout  $f \in X$ , il existe un unique  $u \in K$  tel que*

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X, \quad (\forall v \in K).$$

**Corollaire I.2** *Soient  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $j$  une fonction propre convexe et semi continue inférieurement de  $X$  à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ . Alors, pour tout  $f \in X$ , il existe un élément unique  $u \in X$  tel que*

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X, \quad (\forall v \in X).$$

Notons que l'étude de certains problèmes de contact conduit à des inéquations variationnelles elliptiques, dans lesquelles la fonctionnelle  $j$  est définie sur  $X \times X$  [23], non différentiable et dépend de la solution elle-même [20]. Le théorème suivant traite ce type d'inéquations dites *quasi-variationnelles* et a été obtenu dans [55]. On considère le problème quasi-variationnelle elliptique : Soient  $A : X \rightarrow X$  un opérateur et  $j : X \times X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une foctionnelle telle que. Trouver  $x$  de  $X$  telle que pour tout  $y \in X$ , on a

$$(Ax, y - x)_X + j(x, y) - j(x, x) \geq (f, y - x)_X. \tag{I.10}$$

## Chapitre I. Requis et préliminaires

---

Pour étudier le problème I.10, nous considérons les hypothèses suivantes :

$$(h_1) : \begin{cases} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad (Ax - Ay, x - y)_X \geq m \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \\ (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|Ax - Ay\|_X \leq M \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X. \end{cases}$$

La fonctionnelle  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$(h_2) : j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe sur } X, \quad \forall \eta \in X,$$

tenant compte  $(h_2)$ , alors il existe une dérivée directionnelle de  $j'_2$  définie par

$$(h_3) : j'_2(\eta, x; y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, x + \lambda y) - j(\eta, x)], \quad \forall \eta, x, y \in X.$$

Par la suite, nous considérons les conditions sur  $j$ , où la constante  $m$  est définie dans  $(h_1)$ .

$$(J_1) : \begin{cases} \text{Pour toute suite } \{x_n\} \subset X \text{ avec } \|x_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{pour toute suite } \{t_n\} \subset [0, 1], \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x_n\|_X^2} j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) < m. \end{cases}$$

$$(J_2) : \begin{cases} \text{Pour toute suite } \{x_n\} \subset X \text{ avec } \|x_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{pour toute suite bornée } \{\eta_n\} \subset X, \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x_n\|_X^2} j'_2(\eta_n, x_n; -x_n) < m. \end{cases}$$

$$(J_3) : \begin{cases} \text{Pour toutes suites } \{x_n\} \subset X \text{ et } \{\eta_n\} \subset X \text{ telles que} \\ x_n \rightharpoonup x \in X, \eta_n \rightharpoonup \eta \in X, \text{ pour tout } y \in X, \text{ on a} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} j(\eta_n, y) - j(\eta_n, x_n) \leq j(\eta, y) - j(\eta, x). \end{cases}$$

$$(J_4) : \begin{cases} \text{Il existe } \alpha < m \text{ telle que} \\ j(x, y) - j(x, x) + j(y, x) - j(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \end{cases}$$

Sous toutes ces considérations, on a le résultat suivant :

**Théorème I.10** *Supposons que  $(h_1)$ - $(h_2)$  est vérifiées. Alors :*

1. *Sous les hypothèses  $(J_1)$ - $(J_3)$ , le problème (I.10) a au moins une solution  $x \in X$ .*

2. Sous  $(J_1)$ - $(J_4)$ , le problème (I.10) a une unique solution et qui est fonction lipshitzienne continue par rapport à  $f$ .

On note que la démonstration de ce résultat est basée sur des techniques de point fixe. Maintenant, on considère le problème suivant qu'est une perturbation compact d'une inéquation quasi-variationnelle elliptique où l'opérateur  $A$  est perturbé par un autre opérateur  $B$ . Trouver  $x$  de  $X$  telle que pour tout  $y \in X$ , on a

$$(Ax, y - x)_X + (Bx, y - x)_X + j(x, y) - j(x, x) \geq (f, y - x)_X. \quad (\text{I.11})$$

Pour étudier le problème ci-dessus, on a besoin des hypothèses suivantes

1. L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et lipshitz continue, i.e ;

$$(h_1) : \begin{cases} (a) \text{ Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad (Ax - Ay, x - y)_X \geq m \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X, \\ (b) \text{ Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|Ax - Ay\|_X \leq M \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X. \end{cases}$$

2. L'opérateur  $B : X \rightarrow X$  satisfait

$$(h_2) : \text{ Il existe } C > 0 \text{ telle que } (Bx, x)_X \geq -C \|x\|_X^2, \quad \forall x \in X.$$

$$(h_3) : \begin{cases} \text{ Pour toute suite } \{\eta_n\} \subset X \text{ telle que } \eta_n \rightarrow \eta \in X, \text{ alors il} \\ \text{ existe une suite } \{\eta_{n'}\} \subset X \text{ telle que } B\eta_{n'} \rightarrow B\eta_n \text{ fortement dans } X. \end{cases}$$

$$(h_4) : (Bx - By, y - x)_X < (m - \alpha) \|x - y\|_X^2, \quad \forall x \neq y \in X.$$

$$(h_5) : \begin{cases} \text{ Il existe } 0 \leq \beta < (m - \alpha) \text{ telle que} \\ (Bx - By, y - x)_X \leq \beta \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \end{cases}$$

3. La fonctionnelle  $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$(h_6) : \text{ Pour tout } \eta \in X, \text{ la fonctionnelle } j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe sur } X.$$

Comme on le sait la dérivée directionnelle existe  $j'_2$  et donnée par

$$(h_7) : j'_2(\eta, x; y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, x + \lambda y) - j(\eta, x)], \quad \forall \eta, x, y \in X.$$

4. Les hypothèses suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}
 (J_1) : & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{x_n\} \subset X \text{ avec } \|x_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{et pour toute suite } \{t_n\} \subset [0, 1], \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|x_n\|_X^2} j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) \right] < m - C. \end{array} \right. \\
 (J_2) : & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{x_n\} \subset X \text{ avec } \|x_n\|_X \rightarrow \infty, \\ \text{et pour toute suite bornée } \{\eta_n\} \subset X, \text{ on a} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\|x_n\|_X^2} j'_2(\eta_n, x_n; -x_n) \right] < m. \end{array} \right. \\
 (J_3) : & \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toutes suites } \{x_n\} \subset X \text{ et } \{\eta_n\} \subset X \text{ telles que} \\ x_n \rightharpoonup x \in X, \eta_n \rightharpoonup \eta \in X, \text{ pour toute } y \in X, \text{ on a} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, y) - j(\eta_n, x_n)] < j(\eta, y) - j(\eta, x). \end{array} \right. \\
 (J_4) : & j(x, y) - j(x, x) + j(y, x) - j(y, y) \leq m \|x - y\|_X^2, \quad \forall x \neq y \in X. \\
 (J_5) : & \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \alpha < m \text{ telle que pour tout } x, y \in X, \text{ on a} \\ j(x, y) - j(x, x) + j(y, x) - j(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Sous toutes ces considérations, le resultat d'existence et d'unicité est verifié.

**Théorème I.11** *Supposons que les hypothèses (h<sub>1</sub>)-(h<sub>3</sub>) et (h<sub>6</sub>) sont vérifiées, alors*

1. *Sous (J<sub>1</sub>)-(J<sub>3</sub>) et (J<sub>5</sub>), le problème (I.11) a au moins une solution  $x \in X$ .*
2. *Sous (J<sub>1</sub>)-(J<sub>3</sub>), (J<sub>5</sub>) et (h<sub>4</sub>), le problème (I.11) a une unique solution.*
3. *Sous (J<sub>1</sub>)-(J<sub>3</sub>), (J<sub>5</sub>) et (h<sub>5</sub>), le problème (I.11) a une unique solution  $x = x_f$  et qui est fonction lipshitzienne continue par rapport à  $f$  avec la constante de Lipschitz est  $(m - \alpha - \beta)^{-1}$ .*

Pour une idée sur la démonstration de ces théorèmes, voir [19], [55].







---

---

# Chapitre II

---

## Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

Dans ce chapitre, on rappelle les différentes équations du problème que l'on veut résoudre. On précise tout d'abord qu'on se place ici dans le cadre d'un processus quasi-statique et sous l'hypothèse de petites déformations. Le matériau intervenant dans les problèmes est assimilé à des milieux continus et homogènes. Le comportement thermo-électro-élastique de la matière lors de la mise en forme vérifie les principes fondamentaux de la physique, en particulier ceux de la mécanique des milieux continus, qui sont la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de l'énergie et vérifiant les équations de Maxwell. On va aborder dans une première partie la modélisation du problème mécanique. La deuxième partie traitera le cadre physique et le modèle mathématique. Enfin, on terminera par les notations et les hypothèses qu'on utilisera ultérieurement.

### 1 Définitions

Jacques et Pierre Curie ont découvert en 1880 [22] l'effet piézoélectrique, c'est-à-dire, la capacité qu'ont certains matériaux à produire une charge électrique proportionnelle à la contrainte mécanique qui les déforme. La déformation résultante de l'application d'un potentiel électrique est appelée l'effet inverse. Il a été suggéré par Lippman en 1881 et confirmé expérimentalement par les frères Curie [16], [35]. Dans l'industrie, ces matériaux sont utilisés à la fois comme sensor et actuator, permettant ainsi à la fois d'avoir une jauge de déformations et inversement de contrôler le déplacement d'une structure en contrôlant la tension aux bornes du matériau piézoélectrique [3], [6]. Parmi ces matériaux, il existe une classe dite pyroélectriques qui possèdent naturellement une polarisation électrique qui varie avec la température, à savoir par exemple les céramiques. Ces derniers sont majoritairement utilisés dans les applications industrielles de

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

---

la piézoélectricité et parmi eux les plus connues sont les Zirconotitanates de Plomb (PZT). Il est donc bien établi que les propriétés électriques de ces matériaux dépendent de la température. Inversement, sous une variation cyclique de champ électrique, la polarisation de ces matériaux présente un effet d'hystérésis qui entraîne une perte d'énergie (variation de température) [37]. L'interaction entre les trois chargements mécaniques, électriques et thermiques exhibe les trois types de comportements existant dans ces matériaux, à savoir la thermo-élasticité, la piézo-électricité et la pyro-électricité. En raison de ce couplage thermo-électro-élastique, ces matériaux dits thermo-piézoélectriques, présentent un intérêt majeur pour les mathématiques appliquées et particulièrement pour les problèmes de contact mécanique.

## 2 Équations d'équilibre

Dans cette section, on présente l'ensemble des équations régissant le comportement thermo-électro-élastique d'un corps matériel impliquant un contact avec frottement. On se place dans le cadre d'un processus quasi-statique et sous l'hypothèse de petites déformations.

### 2.1 Équilibre mécanique

L'évolution d'un corps matériel soumis à des forces extérieures de densité volumique  $f_0$  respecte le *premier principe de la dynamique* qu'on peut traduire par

$$\operatorname{Div} \sigma + f_0 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

où  $\rho$  est la masse volumique du milieu continu. Dans l'approximation quasi-statique le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  est nul, alors l'équation précédente se réduit à :

$$\operatorname{Div} \sigma + f_0 = 0. \tag{II.1}$$

Cette équation, décrivant le mouvement de tous points du corps matériel en réponse à l'action de forces extérieures, est dite *équation d'équilibre mécanique*.

## 2.2 Équilibre électrique

Dans un milieu diélectrique non aimanté et de densité volumique de charge électrique  $q_0$ , les phénomènes électriques sont décrits par les *équations de Maxwell* [76] suivantes

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{div} D = q_0 \quad (\text{II.4})$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (\text{II.5})$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. Ce système d'équations contient de nouvelles inconnues, à savoir, le champ électrique  $E$ , le champ magnétique  $B$  et le déplacement électrique  $D$ . La loi de conservation du flux magnétique (II.5) implique que  $B$  dérive d'un potentiel vectoriel  $A$  dit *potentiel magnétique* [65]

$$B = \operatorname{rot} A.$$

Cette équation combinée avec l'équation (II.2) implique que  $E + \frac{\partial A}{\partial t}$  est à rotationnel nul et donc dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$  dit *potentiel électrique* [65]

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Si en plus, on néglige l'effet magnétique devant l'effet de l'interaction électro-mécanique, le potentiel magnétique  $A$  s'annule et alors

$$E = -\nabla\varphi. \quad (\text{II.6})$$

## 2.3 Équilibre thermique

Sous l'hypothèse que le matériau suit la loi de conduction de Fourier, le flux de chaleur s'exprime en fonction du tenseur  $\mathcal{K}$  de la conductivité thermique

$$q = -\mathcal{K} \nabla\theta. \quad (\text{II.7})$$

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

Et dans l'approximation quasi-statique, l'équation d'équilibre thermique s'écrit

$$\dot{\theta} + \operatorname{div} q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_{th}. \quad (\text{II.8})$$

Le système d'équations (II.7)-(II.8) permet de décrire le phénomène de conduction thermique dans tout corps matériel sujet à un chargement thermique de densité surfacique  $q_{th}$  où  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  sont respectivement tenseur d'expansion thermique et tenseur des déformations pyroélectriques. Notons que dans le cas statique l'équation (II.8) devient :

$$\operatorname{div} q = q_{th}.$$

### 3 Lois de comportement thermo-piézoélectrique

La thermo-piézoélectricité est un couplage entre les trois phénomènes mécaniques, électriques et thermiques. Il est naturel donc qu'on retrouve dans les lois de comportement thermo-piézoélectrique des variables piézoélectriques et pyroélectriques qui relient les grandeurs mécaniques (*déformations, contraintes*) aux grandeurs électriques (*potentiel électrique, champ électrique*) et aux grandeurs thermiques (*flux de chaleur, température*). Les équations gouvernant le comportement thermo-piézo-élastique ont été introduites en 1961 par Mindlin [52] dans le cas linéaire et généralisées en 1971 par Tiersten [77] à la piézo-thermo-élasticité non-linéaire. Plus de détails sur la théorie générale de la piézoélectricité peuvent être trouvés dans [17, 60] et pour de récents développements [5]. Si on néglige les effets thermiques, les différentes variables intervenantes dans les lois de comportement piézoélectrique seront

Grandeur	Terme	Définition
Electrique	$D$	Déplacement électrique.
	$\beta$	Tenseur de permittivité électrique.
	$E$	Champ électrique.
Mécanique	$\sigma$	Tenseur des contraintes.
	$\varepsilon$	Tenseur des déformations mécaniques.
	$\mathfrak{F}$	Tenseur de l'élasticité.
Piézo-électrique	$\mathcal{E}$	Tenseur des déformations piézo-électriques.

Tableau 1-1 : Variables de la loi de comportement piézo-électrique.

## II.4 Conditions de contact et lois de frottement

---

Selon le standard IEEE de la piézoélectricité [1], les lois de comportement en piézoélectricité linéaire comprennent les deux équations suivantes

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) \quad (\text{II.9})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi). \quad (\text{II.10})$$

Pour exprimer le couplage thermo-électrique, il est nécessaire d'introduire dans ces équations le tenseur des déformations pyroélectriques et les coefficients d'expansion thermique suivants

Grandeur	Terme	Définition
Pyroélectrique	$\mathcal{P}$	Tenseur des déformations pyroélectriques.
Thermo-mécanique	$\mathcal{M}$	Tenseur d'expansion thermique.

Tableau 1-2 : Les variables pyroélectriques.

En tenant compte des couplages *Température/Déformations* et *Température/Déplacement électrique* dans les équations (II.9)-(II.10), les lois de comportement thermo-piézoélectrique s'écrivent

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \theta \mathcal{M}, \quad (\text{II.11})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \theta \mathcal{P}.$$

## 4 Conditions de contact et lois de frottement

On expose ici l'ensemble des conditions de contact et de frottement intervenant dans la modélisation des problèmes de contact à étudier. On suppose que le processus est quasi-statique et soit  $[0; T]$  notre intervalle de temps, il s'agit d'un corps à comportement thermo-piézoélectrique occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  et soumis sur des parties de sa frontière  $\Gamma$  à des chargements mécaniques, électriques et thermiques. Ce corps est en contact sur une partie  $\Gamma_C$  de  $\Gamma$  avec une fondation qu'on suppose électriquement et/ou thermiquement conductrice. Les lois de comportement (II.11) ne sont que des données de premier type et par conséquent, des spécifications sur les conditions aux limites sont nécessaires pour assurer la solvabilité des problèmes proposés. Ces spécifications se feront sur les grandeurs mécaniques, électriques et thermiques.

### 4.1 Conditions de contact mécanique

On entend par condition de contact une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements et des contraintes. Supposons que la frontière  $\Gamma$  est suffisamment

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

---

régulière de telle sorte qu'en tout point de  $\Gamma$ , il existe une normale  $\nu$  extérieure à  $\Omega$ . Sur la surface de contact  $\Gamma_C$  le vecteur de déplacement  $v$  et le tenseur des contraintes  $\sigma$  peuvent alors se décomposer suivant la normale  $\nu$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} v_\nu &= v \cdot \nu & v_\tau &= v - v_\nu \nu \\ \sigma_\nu &= (\sigma \nu) \cdot \nu & \sigma_\tau &= (\sigma \nu) - \sigma_\nu \nu. \end{aligned}$$

Précisons que les composantes normales  $v_\nu$  et  $\sigma_\nu$  sont des scalaires, tandis que les composantes tangentielles  $v_\tau$  et  $\sigma_\tau$  sont des vecteurs tangents à  $\Gamma$ .

### 4.1.1 Contact unilatéral

On suppose dans ce cas que la fondation est rigide. Alors, elle ne subira pas de déformation et le corps matériel ne pourra pas y pénétrer. Cette propriété se traduit par la relation

$$u_\nu \leq 0,$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal. Si  $u_\nu < 0$ , le corps se sépare de la fondation et les contraintes normales sont alors nulles

$$\sigma_\nu = 0.$$

Si  $u_\nu = 0$ , le corps est maintenu en contact avec la fondation et celle-ci exerce alors une réaction normale orientée vers  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$\sigma_\nu \leq 0.$$

Ces trois conditions modélisent le contact avec une fondation rigide et s'appellent *conditions de contact unilatéral* ou encore *conditions de Signorini* [69]. Elles se résument en

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0 \\ \sigma_\nu \leq 0 \\ \sigma_\nu \cdot u_\nu = 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

si le gap entre le corps et la fondation  $g = 0$  et sinon, il suffit de remplacer  $u_\nu$  par  $u_\nu - g$ .

**Remarque** Le cas d'un contact bilatéral (le contact est maintenu durant le processus) se traduit par la seule relation  $u_\nu = 0$ .

### 4.1.2 Compliance normale

Ici, la fondation est supposée légèrement déformable et donc le corps matériel peut y pénétrer. Cette propriété est traduite par la condition suivante, dite de *compliance normale*

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, s'annulant pour  $u_\nu < g$ . Cette condition exprime que lorsque le corps pénètre dans la fondation ( $u_\nu \geq g$ ), celle-ci exerce une réaction sur le corps en fonction de sa pénétration  $u_\nu - g$ . Des conditions de contact avec compliance normale ont été proposées dans [42] et utilisées par exemple dans [32] et [55]. Un exemple concret consiste à définir la fonction de compliance  $p_\nu$  de la manière suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Cette loi régularise les conditions de Signorini et offre ainsi une certaine simplicité mathématique dans l'étude des problèmes de contact avec compliance normale.

## 4.2 Lois de frottement

Les lois de frottement modélisent le comportement de la contrainte tangentielle  $\sigma_\tau$ . Historiquement, les premières lois de frottement sont dues à Amontons et Coulomb. Dans cette section, on en présente quelques exemples.

### 4.2.1 Frottement de Tresca

Cette loi est à seuil de glissement fixe, supposé connu et ne dépendant pas de la contrainte normale. Elle est alors, plus simple, mais moins réaliste que la loi de Coulomb et elle s'exprime dans le cas statique par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq S \\ \|\sigma_\tau\| < S & \text{si } u_\tau = 0 \\ -\sigma_\tau = S \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} & \text{si } u_\tau \neq 0. \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

### 4.2.2 Frottement de Coulomb

C'est l'une des lois les plus répandues. Elle respecte une certaine proportionnalité entre les deux composantes de la contrainte  $\sigma$ . Dans le cas statique, il s'énonce

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p(\sigma_\nu - g) \\ \|\sigma_\tau\| < p(\sigma_\nu - g) & \text{si } u_\tau = 0 \\ \sigma_\tau = -p(\sigma_\nu - g) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} & \text{si } u_\tau \neq 0. \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Où  $p$  est une fonction positive représentant le *seuil de frottement*  $S$ . Tant que le seuil  $S$  n'est pas atteint, le corps matériel est immobile  $u_\tau = 0$ . Dès que ce seuil est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

Dans le cas quasi-statique, il se traduit de la façon suivante

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p(\sigma_\nu - g) \\ \|\sigma_\tau\| < p(\sigma_\nu - g) & \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \\ \sigma_\tau = -p(\sigma_\nu - g) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0. \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Cette loi sert à modéliser le contact avec frottement d'un corps et une fondation rigide, la fonction  $p$  est donnée dans le cas du contact unilatéral [28] par

$$p(\sigma_\nu) = \mu |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|,$$

où  $R$  est un opérateur de régularisation et  $\mu$  désigne le *coefficient de frottement*. Dans le cas du contact avec compliance normale, la fonction  $p$  est donnée [32] par

$$p(\sigma_\nu) = p_\tau(u_\nu - g).$$

où  $p_\tau$  est une fonction positive donnée, et pour un exemple, il suffit de prendre  $p_\tau(r) = c_\tau r_+$  où  $c_\tau$  est une constante positive.

### 4.2.3 Frottement sec

La modélisation mathématique du frottement sec s'énonce dans le cas quasi-statique [4] par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \\ \|\sigma_\tau\| < \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+), \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau. \end{cases} \quad (\text{II.16})$$



Où  $\mu$  est le coefficient de frottement,  $u_\tau$  est le glissement tangentiel relatif du corps et  $G$  est la limite de frottement de sorte que  $\mu G$  est la résistance maximale du frottement sur la surface. La condition (II.16) peut être interprétée physiquement de la manière suivante : la frontière adhère à la fondation et se déplace avec elle lorsque la contrainte tangentielle appliquée est inférieure à la valeur limite  $\mu G$ . La partie de  $\Gamma_C$  où cela se produit s'appelle zone d'adhérence. La partie où la contrainte tangentielle atteint sa valeur limite et ne se déplace pas en tandem avec la fondation est appelée zone de glissement et la direction relative du glissement  $y$  est indiquée par le multiplicateur inconnu  $\lambda$ .

**Remarque** Le cas de contact sans frottement bien que n'ayant aucune réalité physique, ce modèle est souvent utilisé dans un souci de simplification (*glissement parfait*). Dans ce cas, les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par la condition

$$\sigma_\tau = 0.$$

### 4.3 Conditions de contact thermo-électriques

Étant donné que le corps matériel considéré est à comportement thermo-piézoélectrique et que la fondation est supposée électriquement et thermiquement conductrice. Il est naturel d'introduire des lois qui permettent de modéliser le contact électro-thermique. On s'inspire des articles [25, 38] pour proposer les conditions de contact thermo-électrique suivantes

$$\begin{cases} D \cdot \nu = \psi(u_\nu) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \\ Q \cdot \nu = k_c(u_\nu) \phi_L(\theta - \theta_F) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Les équations ci-dessus constituent des conditions régularisées du contact thermo-électrique. Elle traduisent le fait que lorsqu'il y a décollement ( $u_\nu < 0$ ), l'écart entre le corps et la fondation est considérée comme isolant (rempli d'air par exemple). Par conséquent, les composantes normales du champ de déplacement électrique et du flux de chaleur s'annulent, c'est-à-dire

$$u_\nu < 0 \Rightarrow D \cdot \nu = 0, \quad Q \cdot \nu = 0 \quad (\text{II.18})$$

et lors du contact ( $u_\nu \geq 0$ ), la composante normale du champ de déplacement électrique, respectivement du flux de chaleur, est supposée proportionnelle à la différence du potentiel

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

---

électrique, respectivement à la différence de température, c'est-à-dire

$$u_\nu \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} D \cdot \nu = k_e (\varphi - \varphi_F) \\ Q \cdot \nu = k_c (\theta - \theta_F) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

avec  $k_e$  et  $k_c$  des constantes positives, appelées *coefficient de conductivité électrique* et *coefficient de conductivité thermique*. Notons que (II.19) et (II.20) peuvent se réécrire comme suit

$$\begin{cases} D \cdot \nu = k_e \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u_\nu) (\varphi - \varphi_F) \\ Q \cdot \nu = k_c \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u_\nu) (\theta - \theta_F) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

où  $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, +\infty[$ . La condition (II.20) décrit un contact thermo-électrique parfait. Elle peut être rendue plus réaliste sous la forme régularisée (II.17). D'une part,  $k_e \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$  a été remplacée par la fonction  $\psi$  définie par [38]

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ k_e \delta r & \text{si } 0 \leq r \leq 1/\delta \\ k_e & \text{si } 1/\delta \leq r \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

avec  $\delta$  est un paramètre positif suffisamment petit. D'autre part, la fonction  $k_c \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$  a été substituée par une fonction croissante et Lipschitzienne  $k_c$  telle que [25]

$$\begin{cases} k_c(r) = 0 & \text{si } r < 0 \\ k_c(r) > 0 & \text{si } r \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Notons enfin que  $\phi_L$  est une fonction de troncature, définie par

$$\phi_L(r) = \begin{cases} -L & \text{si } r < -L \\ r & \text{si } -L \leq r \leq L \\ L & \text{si } L \leq r. \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Elle est introduite pour des raisons mathématiques et elle ne pose aucun problème sur le plan modélisation. En effet, si  $L$  suffisamment grande, on a

$$\phi_L(\varphi - \varphi_F) = \varphi - \varphi_F \quad \text{et} \quad \phi_L(\theta - \theta_F) = \theta - \theta_F.$$

## II.4 Conditions de contact et lois de frottement

---

On précise que dans le cas  $k = \lambda = 0$ , les fonctions  $\psi$  et  $\kappa$  seront identiquement nulles et donc

$$D \cdot \nu = 0 \quad \text{et} \quad Q \cdot \nu = 0. \quad (\text{II.24})$$

Cette condition modélise le cas où la fondation est un parfait isolant électrique et thermique.

**Remarque** Dans le cas quasi-statique on a pris en compte la chaleur générée par frottement et le flux de de chaleur à travers la partie de contact et alors on écrit

$$q \cdot \nu = -\mu p(\sigma_\nu) S_c(\cdot, \|\dot{u}_\tau\|) + k_c(\theta - \theta_F), \quad (\text{II.25})$$

où  $p$  est une fonction donnée par  $p(\sigma_\nu) = p_\tau(u_\nu - g)$  si le contact est modélisé par compliance normale et  $p(\sigma_\nu) = G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|)$  en cas de frottement sec. La relation (II.25) représente l'échange de flux thermique entre le corps et la fondation. Nous notons que cette condition se compose de deux parties ; la première  $\mu p(\sigma_\nu) S_c(\cdot, \|\dot{u}_\tau\|)$  résulte de la dissipation de frottement et qui dépend du coefficient de frottement  $\mu$ , le glissement tangentiel relatif du corps  $\dot{u}_\tau$  et le stress normal  $\sigma_\nu$  dans lequel  $S_c(\cdot, r)$  est une fonction généralisant la norme  $\|\cdot\|$  (voir [4]). La deuxième partie  $k_c(u_\nu - g)\phi_L(\theta - \theta_F)$  représente l'échange de chaleur résultant des différentes températures des corps à l'interface de contact, où  $k_c$  est la conductivité thermique et  $\theta_F$  est la température de la fondation.

**Remarque** On peut modéliser le flux thermique sur la partie de contact de façon similaire au conditions de Signorini pour les déplacements et les contraintes comme suit :

$$q_\nu(u, \varphi, \theta) \leq 0, \quad \theta - \theta_F \leq 0, \quad q_\nu(u, \varphi, \theta)(\theta - \theta_F) = 0. \quad (\text{II.26})$$

Nous supposons ici que le flux thermique est unilatéral, c'est-à-dire qu'il se fait de la fondation au corps, et que la température du corps ne dépasse pas celle de la fondation sur la zone de contact.

### 4.4 Formulation du problème

Dans cette section, on introduit le cadre physique et les modèles mathématiques associés aux problèmes de contact étudiés dans ce mémoire. On introduit également certaines hypothèses sur les données qu'on utilisera dans les chapitres suivants.

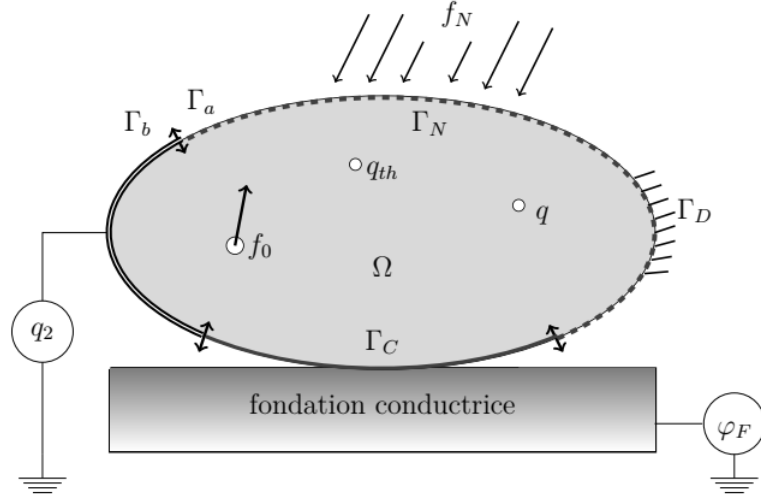


Fig. II.1 – Un corps piézoélectrique en contact avec une fondation.

#### 4.4.1 Cadre physique

On envisage un corps piézoélectrique qui occupe un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ) avec une frontière régulière  $\Gamma$ . On suppose que  $\Gamma$  est partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_C$  telles que  $meas(\Gamma_D) > 0$  et que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N$  est partitionnée en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  telles que  $meas(\Gamma_a) > 0$ . Soit  $[0, T]$  notre intervalle de temps, le corps  $\Omega$  est encastré sur  $\Gamma_D \times [0, T]$ , à potentiel électrique fixe sur  $\Gamma_a \times [0, T]$  et à température nulle sur  $\Gamma_D \cup \Gamma_N \times [0, T]$ . Il est soumis dans  $\Omega \times [0, T]$  à des forces volumiques de densité  $f_0$ , à des charges électriques de densité volumique  $q_0$  et à un flux thermique de densité volumique  $q_{th}$ . Il est également soumis à des tractions surfaciques de densité  $f_N$  sur  $\Gamma_N \times [0, T]$  et à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$  sur  $\Gamma_b \times [0, T]$ . Ce corps est en contact sur  $\Gamma_N \times [0, T]$  avec une fondation conductrice dont le potentiel électrique  $\varphi_F$  et la température  $\theta_F$  sont maintenus fixes.

Ici et dans la suite, pour simplifier, on n'indique pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $x \in \Omega \cup \Gamma$  et on adopte la convention de sommation sur les indices répétés. Les indices  $i, j, k$  et  $l$  varient de 1 à 3 et l'indice qui suit la virgule indique la dérivée partielle. Soit  $\mathbb{S}^3$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ). Nous désignons par “ $\cdot$ ” et  $\|\cdot\|$  le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ils sont donnés par

$$u \cdot v = u_i \cdot v_i \quad , \quad \|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}^d)$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij} \quad , \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d).$$

## II.4 Conditions de contact et lois de frottement

---

Sous l'hypothèse des petites déformations, le tenseur des déformations linéarisées s'écrit

$$\varepsilon(u) = \left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right) \quad (\text{II.27})$$

Les équations d'équilibre mécanique, électrique et thermique sont données par

$$\begin{cases} \text{Div } \sigma + f_0 = 0 \\ \text{div } D = q \\ \dot{\theta} + \text{div } q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_{th}. \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Tenant compte du cadre physique considéré, les conditions aux limites s'expriment

$$\begin{cases} u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \times [0, T] \\ \sigma \cdot n = f_N \text{ sur } \Gamma_N \times [0, T]. \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times [0, T] \\ D \cdot n = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times [0, T]. \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \text{ sur } \Gamma_N \cup \Gamma_D \times [0, T]. \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Les équations (II.28)-(II.31) associées aux conditions aux limites, les lois de comportement thermo-électriques (II.11) et les conditions aux limites sur  $\Gamma_C \times [0, T]$  (lois de contact et de frottement) constituent le modèle mathématique qui décrit l'évolution thermo-piézoélectrique d'un corps matériel en contact avec frottement.

### 4.4.2 Modèles mathématiques

Le cadre physique est tel qu'il a été décrit dans la figure précédente. Les lois de comportement thermo-piézoélectrique sont de la forme (II.11), les équations d'équilibres et les conditions aux limites sont données par (II.28)-(II.31). Sous ces considérations, le problème thermo-électro-élastique quasi-statique à étudier peut se formuler de la manière suivante

**Problème ( $P_1$ ).** *Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :*

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \mathcal{M} \theta \quad (\text{II.32})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) - \mathcal{P} \theta \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (\text{II.33})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta. \quad (\text{II.34})$$

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

$$Div \sigma + f_0 = 0 \quad (II.35)$$

$$\operatorname{div} D = q_0 \quad (II.36)$$

$$\dot{\theta} + \operatorname{div} q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_{th} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (II.37)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \times [0, T]. \quad (II.38)$$

$$\sigma n = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_N \times [0, T]. \quad (II.39)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (II.40)$$

$$D \cdot n = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (II.41)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \times [0, T]. \quad (II.42)$$

$$\text{Conditions de contact sur } \Gamma_C. \quad (II.43)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (II.44)$$

On note que ce problème est un système à couplage thermo-électro-élastique, impliquant le champ des déplacements  $u$ , le potentiel électrique  $\varphi$  et la température  $\theta$ . Dans les chapitres suivants, différentes conditions de contact avec frottement seront considérées et des approches adéquates pour la résolution de ces problèmes seront adoptées.

Dans le cas statique, le problème thermo-électro-élastique est donné par

**Problème** ( $P_2$ ). *Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :*

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \mathcal{M} \theta \quad (II.45)$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) - \mathcal{P} \theta \quad \text{dans } \Omega. \quad (II.46)$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta. \quad (II.47)$$

$$Div \sigma + f_0 = 0 \quad (II.48)$$

$$\operatorname{div} D = q_0 \quad (II.49)$$

$$\operatorname{div} q = q_{th} \quad \text{dans } \Omega. \quad (II.50)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D. \quad (II.51)$$

$$\sigma n = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (II.52)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a. \quad (II.53)$$

$$D \cdot n = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b. \quad (II.54)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N. \quad (II.55)$$

$$\text{Conditions de contact sur } \Gamma_C. \quad (II.56)$$

### 4.4.3 Notations et hypothèses

Pour l'étude mathématique de ces problèmes, nous donnons toutes les hypothèses sur les données qui seront utilisées toutes au long de ce rapport.

(H<sub>1</sub>) : Le tenseur d'élasticité  $\mathfrak{F} = (f_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait les conditions

$$\begin{aligned} f_{ijkl} &= f_{jikl} = f_{klij} = f_{ijlk} \in L^\infty(\Omega), \\ f_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} &\geq \alpha_0 \|\xi\|^2, \quad \forall \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

(H<sub>2</sub>) : (a) Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait la condition

$$e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega).$$

Nous rappelons ici que le tenseur transposé  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$  est donné par  $e_{ijk}^* = e_{kij}$  et qu'il satisfait

$$\mathcal{E}\sigma \cdot v = \sigma \cdot \mathcal{E}^*v, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Le tenseur de dilatation thermique  $\mathcal{M} = (m_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait la condition

$$m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega).$$

(c) Le champ vectoriel pyroélectrique  $\mathcal{P} = (p_i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait la condition

$$p_i \in L^\infty(\Omega).$$

Les conditions ci-dessus, nous permettent de définir les deux constantes suivantes

$$M_{\mathcal{M}} = \sup_{ij} \|m_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{P}} = \sup_i \|p_i\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

(H<sub>3</sub>) : (a) La permittivité électrique  $\beta = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est telle que

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega), \\ \beta_{ij} b_i b_j &\geq m_\beta \|b\|^2, \quad \forall b = (b_i) \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

(b) La conductivité thermique  $\mathcal{K} = (k_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est telle que

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \\ k_{ij} z_i z_j &\geq m_{\mathcal{K}} \|z\|^2, \quad \forall z = (z_i) \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

## Chapitre II. Formulation mathématique du problème de contact en thermo-piézoélectricité

---

(H<sub>4</sub>) : Le coefficient de frottement satisfait  $\mu \geq 0 \in L^\infty(\Gamma_C)$  p.p. sur  $\Gamma_C$ , et on pose

$$\bar{\mu} = \sup_{t \in [0, T]} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_C)}.$$

(H<sub>5</sub>) : L'application  $R : H'_{\Gamma_C} \rightarrow L^2(\Gamma_C)$  est linéaire continue et compact, et on pose  $c_R = \|R\|$ .

(H<sub>6</sub>) : La fonction  $G : \Gamma_C \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait

- (a)  $(\exists L_1 > 0), (\forall a, b \in \mathbb{R}^+), |G(\cdot, a) - G(\cdot, b)| < L_1|a - b|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto G(x, a)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Gamma_C$ ,
- (c) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto G(x, a)$  est  $g^*$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ .

(H<sub>7</sub>) : La fonction  $S_c : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait

- (a)  $(\exists L_2 > 0), (\forall a, b \in \mathbb{R}^+), |S_c(\cdot, a) - S_c(\cdot, b)| < L_2|a - b|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) l'application  $S_c : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est Borel mesurable,
- (c) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto S_c(x, a)$  est  $S^*$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ .

(H<sub>8</sub>) : Les forces, tractions, charges, densités de chaleur et le potentiel électrique et la température de la fondation satisfont

$$\begin{aligned} f_0 &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \phi_0, q_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \quad \varphi_F \in L^2(\Gamma_C) \\ f_N &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_N)^d), \quad \phi_b \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad \theta_F \in L^2(\Gamma_C). \end{aligned}$$

(H<sub>9</sub>) La fonction de conductivité électrique de surface  $\psi : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait

- (a)  $(\exists L_\psi > 0), \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, |\psi(\cdot, r_1) - \psi(\cdot, r_2)| < L_\psi|r_1 - r_2|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) l'application  $x \mapsto \psi(x, u)$  est mesurable sur  $\Gamma_C$ ,
- (c)  $(\forall r \in \mathbb{R})$ , l'application  $x \mapsto \psi(x, r)$  est  $M_\psi$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (d)  $x \mapsto \psi(x, u) = 0$  pour tout  $u \leq 0$ .

(H<sub>10</sub>) Le coefficient d'échange thermique  $k_c : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait

- (a)  $(\exists L_{k_c} > 0, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+), |k_c(\cdot, r_1) - k_c(\cdot, r_2)| < L_{k_c}|r_1 - r_2|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) l'application  $x \mapsto k_c(x, u)$  est mesurable sur  $\Gamma_C$ ,
- (c)  $(\forall r \in \mathbb{R}^+)$ , l'application  $x \mapsto k_c(x, r)$  est  $M_{k_c}$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ ,



(d)  $x \mapsto k_c(x, u) = 0$  pour tout  $u \leq 0$ .

(H<sub>11</sub>) : La fonction compliance normale  $p_r : \Gamma_C \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait pour  $r = \nu, \tau$

- (a)  $(\exists L_r > 0), (\forall a, b \in \mathbb{R}^+), |p_r(\cdot, a) - p_r(\cdot, b)| < L_r |a - b|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto p_r(x, a)$  est mesurable sur  $\Gamma_C$ ,
- (c) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto p_\nu(x, a)$  est  $L_{p_\nu}$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (d)  $x \mapsto p_r(x, u) = 0$  pour  $u \leq 0$ , p.p.  $x \in \Gamma_C$ .

Lorsque le coefficient de frottement dépend du glissement, on utilise l'hypothèse suivante :

(H<sub>12</sub>) : Le coefficient de frottement  $\mu : \Gamma_C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

- (a)  $(\exists L_\mu > 0), (\forall a, b \in \mathbb{R}^+), |\mu(\cdot, a) - \mu(\cdot, b)| < L_\mu |a - b|$  p.p. sur  $\Gamma_C$ ,
- (b) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto \mu(x, a)$  est mesurable sur  $\Gamma_C$ ,
- (c) pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$ , l'application  $x \mapsto \mu(x, a)$  est  $\bar{\mu}$ -bornée p.p. sur  $\Gamma_C$ .

(H<sub>13</sub>) : Les forces, tractions, charges et densités de chaleur, le potentiel électrique et la température de la fondation satisfont

$$\begin{aligned} f_0 &\in L^2(\Omega)^d, & \phi_0, q_0 &\in L^2(\Omega), & \varphi_F &\in L^2(\Gamma_C) \\ f_N &\in L^2(\Gamma_N)^d, & \phi_b &\in L^2(\Gamma_b), & \theta_F &\in L^2(\Gamma_C). \end{aligned}$$

On note que dans chaque chapitre on n'utilise que les hypothèses qui sont nécessaires pour la résolution du problème considéré et qu'elles seront complétées par d'autres hypothèses supplémentaires spécifiques à la nature de ce problème.



---

---

# Chapitre III

---

## Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique décrivant le contact bilatéral avec frottement entre un corps à comportement thermo-piézoélectrique linéaire et une fondation thermiquement conductrice. Le processus est supposé quasi-statique et le contact est modélisé avec une loi de frottement sec, dans lequel la chaleur générée par frottement au cours du processus est prise en compte. Nous déduisons la formulation variationnelle du problème et nous établissons l'existence d'une solution faible. Le résultat principal de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans le journal "Mathematical Methods in the Applied Sciences" [8].

### 1 Modèle mathématique

Dans cette section, nous supposons que le contact est bilatéral ( $u_\nu = 0$ ) couplé avec une loi de frottement sec (II.16), et donc le problème mécanique considéré est le suivant :

**Problème (P).** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \mathcal{M} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.1})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \mathcal{P} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.2})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.3})$$

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.4})$$

$$\text{div} D = \phi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.5})$$

$$\dot{\theta} + \text{div} q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.6})$$

## Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0, T), \quad (\text{III.7})$$

$$\sigma \nu = f_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{III.8})$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \\ \|\sigma_\tau\| < \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{III.10})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (\text{III.11})$$

$$D \cdot \nu = \phi_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T), \quad (\text{III.12})$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{III.13})$$

$$q \cdot \nu = -\mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) S_c(\cdot, \|\dot{u}_\tau\|) + k_c(\theta - \theta_F) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{III.14})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (\text{III.15})$$

## 2 Formulation variationnelle du problème

Utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $q_e : [0, T] \rightarrow W$  et  $\Theta : [0, T] \rightarrow Q$  comme suit

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N v \, da, \quad \forall v \in V, \quad (\text{III.16})$$

$$(q_e, \xi)_W = \int_{\Omega} \phi_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} \phi_b \xi \, da, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{III.17})$$

$$(\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} q_0 \eta \, dx + \int_{\Gamma_C} k_c \theta_F \eta \, da, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{III.18})$$

Nous considérons aussi  $j : X \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\chi : X \times V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\omega : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  données par

$$j((u, \varphi, \theta); v) = \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \|v_\tau\| \, da, \quad (\text{III.19})$$

$$\chi((u, \varphi, \theta); v; \eta) = \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) S_c(\cdot, \|v_\tau\|) \eta \, da, \quad (\text{III.20})$$

$$\omega(\theta, \eta) = \int_{\Gamma_C} k_c \theta \eta \, da, \quad (\text{III.21})$$

pour tout  $(u, \varphi, \theta) \in X = V \times W \times Q$ ,  $v \in V$  et  $\eta \in Q$ .

### III.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

De plus, nous introduisons les hypothèses suivantes sur les données initiales

$u_0 \in V$  et  $\theta_0 \in Q$  tel que pour tout  $(v, \xi) \in V \times W$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\varepsilon(u_0), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_0, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{M}\theta_0, \varepsilon(v))_H + j(u_0, \varphi_0, \theta_0; v) &\geq (f(0), v)_V, \\ (\beta \nabla \varphi_0, \nabla \xi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_0), \nabla \xi)_H + (\mathcal{P}\theta_0, \nabla \xi)_H + (q_e(0), \xi)_W, \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Il existe  $T_0 \in L^2(\Omega)$  telle que

$$(\mathcal{K} \nabla \theta_0, \nabla \eta)_H + \omega(\theta_0, \eta) - (\Theta(0), \eta)_{L^2(\Omega)} = (T_0, \eta)_{L^2(\Omega)}.$$

Selon toutes ces notations et par une procédure standard basée sur les formules de Green, nous pouvons énoncer la formulation variationnelle du problème  $(P)$ , en termes de déplacement, de potentiel électrique et de température (voir [21]).

**Problème  $(PV)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  et la température  $\theta : [0, T] \rightarrow Q$  tels que*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - \dot{u}))_H - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v - \dot{u}))_H \\ + j((u, \varphi, \theta), v) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) \geq (f, v - \dot{u})_V, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$(\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P}\theta, \nabla \xi)_H = (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M}\dot{\varepsilon}(u), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ - \chi((u, \varphi, \theta); \dot{u}; \eta) + \omega(\theta, \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q, \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{III.26})$$

Le résultat d'existence principal que nous allons prouver dans la suite, est le suivant

**Théorème III.1** *Supposons que les hypothèses  $(H_1)$ - $(H_8)$  et (III.22) sont vérifiées, alors, pour un coefficient de frottement assez petit, le problème  $(PV)$  a au moins une solution.*

## 3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

Le problème  $(PV)$  peut être discrétisé dans le temps par un schéma implicite. Soit la subdivision uniforme  $t_0 = 0 < \dots < t_n = T$  de l'intervalle de temps  $[0, T]$  où  $t_i = i\Delta t$  pour  $i = 0, \dots, n$  et  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . Pour toute fonction  $\omega$ , on note  $\omega^i$  l'approximation de la valeur  $\omega(t_i)$  et par  $\Delta\omega^i$  la différence  $\omega^{i+1} - \omega^i$ . Si  $\omega$  est une fonction continue, nous utilisons la notation

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

$\omega^i = \omega(t_i)$ . Dans chaque pas de temps, nous obtenons alors les problèmes incrémentales  $(PV^i)$  définis pour  $u(\cdot, 0) = u_0$ ,  $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$  et  $\theta(\cdot, 0) = \theta_0$  comme suit :

**Problème  $(PV^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u^{i+1} \in V$ , le potentiel électrique  $\varphi^{i+1} \in W$  et la température  $\theta^{i+1} \in Q$  tels que :*

$$(\mathfrak{F} \varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \quad (\text{III.27})$$

$$+ j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), v - u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^{i+1} - u^i) \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in V,$$

$$(\beta \nabla \varphi^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta^{i+1}, \nabla \xi)_H = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{aligned} & (\theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta^{i+1}, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & - \Delta t \chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta) + \Delta t \omega(\theta^{i+1}, \eta) \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

$$= \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q.$$

Nous définissons, pour tout  $z \in L^2(\Gamma_C)$ , la fonction  $\chi_z : Q \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\chi_z(\eta) = \int_{\Gamma_C} z \eta, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{III.30})$$

Nous considérons le problème intermédiaire  $(PV_z^i)$  suivant, dans lequel  $z$  est supposé connu.

**Problème  $(PV_z^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u^{i+1} \in V$ , le potentiel électrique  $\varphi^{i+1} \in W$  et la température  $\theta^{i+1} \in Q$  tels que :*

$$(\mathfrak{F} \varepsilon(u_z^{i+1}), \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H \quad (\text{III.31})$$

$$+ j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), v - u^i) - j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), u_z^{i+1} - u^i) \geq (f^{i+1}, v - u_z^{i+1})_V, \quad \forall v \in V,$$

$$(\beta \nabla \varphi_z^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_z^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta_z^{i+1}, \nabla \xi)_H = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{aligned} & (\theta_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta_z^{i+1}, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u_z^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & + \Delta t \omega(\theta_z^{i+1}, \eta) - \Delta t \chi_z(\eta) \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

$$= \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q.$$

Soit  $\Theta_z^{i+1}$  l'élément de  $Q$  défini pour tout  $\eta \in Q$  par

$$(\Theta_z^{i+1}, \eta)_Q = (\Delta t \Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t \chi_z(\eta).$$

### III.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

Pour résoudre le problème  $(PV_z^i)$ , soient  $X = V \times W \times Q$  et  $Y = L^2(\Gamma_C)^d \times (L^2(\Gamma_C))^2$ , muni des produits scalaires ci-dessous et de leurs normes euclidiennes  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$  donnés par

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \xi)_W + (\theta, \eta)_Q, \quad (\text{III.34})$$

$$(z, z')_Y = (z_1, z'_1)_{L^2(\Gamma_C)^d} + (z_2, z'_2)_{L^2(\Gamma_C)} + (z_3, z'_3)_{L^2(\Gamma_C)}, \quad (\text{III.35})$$

pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$ ,  $y = (v, \xi, \eta) \in X$  et  $z = (z_1, z_2, z_3)$ ,  $z' = (z'_1, z'_2, z'_3) \in Y$ .

Ensuite, nous définissons les opérateurs  $A : X \rightarrow X$  et  $B : X \rightarrow X$  donnés par

$$\begin{aligned} (Ax, y)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + (\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H, \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{aligned} (Bx, y)_X &= -(\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \nabla \varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t \omega(\theta, \eta) \\ &\quad - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), y = (v, \xi, \eta) \in X, \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

la fonctionnelle  $J : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$J(x, y) = j((u, \varphi, \theta); v), \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), y = (v, \xi, \eta) \in X, \quad (\text{III.38})$$

et l'élément  $f_z^{i+1}$  de  $X$  donné par

$$f_z^{i+1} = (f^{i+1}, q_e^{i+1}, \Theta_z^{i+1}). \quad (\text{III.39})$$

Sous toutes ces notations, nous avons le lemme suivant :

**Lemme III.1** *Le problème  $(PV_z^i)$  est équivalent à trouver  $x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in X$  tel que pour tout  $y \in X$ , on a*

$$\begin{aligned} (Ax_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + (Bx_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + J(x_z^{i+1}, y - x_z^{i+1}) \\ - J(x_z^{i+1}, x_z^{i+1} - x^i) \geq (f_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

**Preuve** Soient  $x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in X$  solution de  $(PV_z^i)$  et  $y = (v, \xi, \eta) \in X$ . Nous utilisons la fonction test  $\xi - \varphi_z^{i+1}$  dans (III.32) et  $\eta - \theta_z^{i+1}$  dans (III.33). Nous ajoutons les inégalités correspondantes à (III.31) et utilisons (III.36)-(III.39) pour trouver (III.40). Inversement, on considère  $x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in X$  solution de l'inégalité quasi-variationnelle (III.40). Si on prend  $y = (v, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1})$  dans (III.40) et que  $v$  est un élément arbitraire de  $V$ , nous trouvons

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

(III.31) et si nous prenons successivement  $y = (v, \varphi_z^{i+1} + \xi, \theta_z^{i+1})$  et  $y = (v, \varphi_z^{i+1} - \xi, \theta_z^{i+1})$  dans (III.40) et  $\xi$  est un élément arbitraire de  $W$ , on en déduit (III.32). De la même manière, nous prenons successivement  $y = (v, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1} + \eta)$  et  $y = (v, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1} - \eta)$  dans (III.40) et  $\eta$  est un élément arbitraire de  $Q$  pour obtenir (III.33). Ainsi, le lemme est prouvé.  $\square$

En utilisant le lemme précédent, on obtient le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème  $(PV_z^i)$  suivant.

**Lemme III.2** *Pour tout  $z \in L^2(\Gamma_C)$ , le problème  $(PV_z^i)$  admet une unique solution*

$$x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in V \times W \times Q.$$

La preuve est basée sur le théorème I.11 et pour l'appliquer, nous acceptons l'inégalité suivante  $\bar{\mu}L_1c_R \max(c_0, c_1, c_2) + 2M_P \leq m$ . D'abord, nous étudierons les propriétés des opérateurs  $A$ ,  $B$  et la fonctionnelle  $J$  donnés par (III.36)-(III.37) et (III.38). Nous avons les lemmes suivants :

**Lemme III.3** *L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et Lipschitz continu.*

**Preuve.** Soient  $x_1 = (u_1, \varphi_1, \theta_1)$  et  $x_2 = (u_2, \varphi_2, \theta_2)$  deux éléments de  $X$ . Utilisons (III.36), on a

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u_1) - \mathfrak{F} \varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\beta \nabla \varphi_1 - \beta \nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_1 - \Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_2, \nabla \theta_1 - \nabla \theta_2)_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1 - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_1) - \mathcal{E} \varepsilon(u_2), \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H. \end{aligned}$$

Notons que  $(\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u))_H = (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \varphi)_H$ , alors on trouve

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u_1) - \mathfrak{F} \varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\beta \nabla \varphi_1 - \beta \nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_1 - \Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_2, \nabla \theta_1 - \nabla \theta_2)_H. \end{aligned}$$

Combinons cette égalité avec les hypothèses  $(H_1)$ - $(H_3)$ , donc il existe une constante  $m > 0$  qui ne dépend que de  $\mathfrak{F}$ ,  $\beta$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_a$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \left( \|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|_Q^2 \right).$$

Ainsi, il découle de (III.34) que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \|x_1 - x_2\|_X^2. \quad (\text{III.41})$$



### III.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

De la même façon, les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$  impliquent qu'il existe  $c_4 > 0$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq c_4 \left( \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V + \|u_1 - u_2\|_V \|\xi\|_W + \|\theta_1 - \theta_2\|_Q \|\eta\|_Q + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|v\|_V \right).$$

Alors, nous obtenons

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq 5c_4 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X, \quad \forall y \in X.$$

Si on pose  $y = Ax_1 - Ax_2$  et  $M = 5c_4$ , nous trouvons

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq M \|x_1 - x_2\|_X. \quad (\text{III.42})$$

Par conséquent, le lemme III.3 est établi. □

Ensuite, nous rappelons que la fonctionnelle  $J$  satisfait  $(h_6)$ . De plus, nous avons

**Lemme III.4** *La fonctionnelle  $J$  satisfait les hypothèses  $(J_1)$ ,  $(J_2)$  et  $(J_3)$ .*

**Preuve.** Soient  $x = (u, \varphi, \theta)$ ,  $\eta = (v, \xi, \omega) \in X$  et  $\lambda \in ]0, 1]$ . Il résulte de (III.19) et (III.38) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, x - \lambda x) - j(\eta, x)] &= \frac{1}{\lambda} \left[ \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) (\|u_\tau - \lambda u_\tau\| - \|u_\tau\|) da \right] \\ &= - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) \|u_\tau\| da. \end{aligned}$$

En utilisant  $(h_7)$ , nous déduisons que pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $\eta = (v, \xi, \omega)$  de  $X$ , nous avons

$$j'_2(\eta, x; -x) \leq - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) \|u_\tau\| da. \quad (\text{III.43})$$

Si  $\{x_n\} = \{(u_n, \varphi_n, \theta_n)\} \subset X$  et  $\{t_n\} \subset ]0, 1]$  sont deux suites telles que  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ , alors

$$j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(t_n u_n, t_n \varphi_n, t_n \theta_n)|) \|u_\tau\| da, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque  $G \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_C$ , nous obtenons  $j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et alors la condition  $(J_1)$  est obtenue. Ensuite, nous allons prouver que  $J$  satisfait  $(J_2)$ . Soient  $\{x_n\}$  et  $\{\eta_n\}$  deux suites de  $X$  telles que

$$(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \|\eta_n\|_X \leq C \text{ et } \|x_n\| \rightarrow \infty. \quad (\text{III.44})$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

De (III.43) et (H<sub>6</sub>) (c), on peut voir que

$$j_2'(\eta_n, x_n; -x_n) \leq \bar{\mu} g^* \int_{\Gamma_C} \|u_{n\tau}\| da \leq \bar{\mu} g^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|u_{n\tau}\|_{L^2(\Gamma_C)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prenant en compte (I.5) et (III.34), nous avons

$$j_2'(\eta_n, x_n; -x_n) \leq \bar{\mu} g^* c_0 \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|x_n\|_X. \quad (\text{III.45})$$

Par suite, la fonctionnelle  $J$  satisfait la condition ( $J_2$ ). Finalement, soient  $\{x_n\} = \{(u_n, \varphi_n, \theta_n)\}$  et  $\{\eta_n\} = \{(v_n, \xi_n, \omega_n)\}$  deux suites de  $X$  telles que

$$x_n \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X, \quad \eta_n \rightharpoonup \eta = (v, \xi, \omega) \in X.$$

Rappelant la compacité de l'application trace, nous obtenons  $u_{n\tau} \rightarrow u_\tau$  et  $\|u_{n\tau}\| \rightarrow \|u_\tau\|$  dans  $L^2(\Gamma_C)$ . Puisque l'opérateur  $R$  est compact et que la fonction  $G$  est continue, nous avons  $G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n)|) \rightarrow G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|)$  dans  $L^2(\Gamma_C)$ . Par conséquent, nous utilisons la définition de  $J$  pour conclure que

$$J(\eta_n, y) \rightarrow J(\eta, y), \quad \forall y \in X \quad \text{et} \quad J(\eta_n, x_n) \rightarrow J(\eta, x),$$

ce qui conduit à la condition ( $J_3$ ). □

**Lemme III.5** *Si l'hypothèse (H<sub>6</sub>) est vérifiée, la fonctionnelle  $J$  vérifie l'inégalité suivante :*

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{III.46})$$

**Preuve.** Soient  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $y = (v, \xi, \omega)$  de  $X$ . Utilisons (III.19) et (III.38), nous obtenons

$$\begin{aligned} & J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \\ &= \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) (\|v_\tau\| - \|u_\tau\|) da + \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)|) (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &= \int_{\Gamma_C} \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \right] (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da. \end{aligned}$$

Prenons  $\alpha = \bar{\mu} L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2)$ , alors nous trouvons

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \bar{\mu} L_1 c_R \|x - y\|_Y^2 \leq \alpha \|x - y\|_X^2.$$

□

### III.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

**Lemme III.6** *L'opérateur  $B : X \rightarrow X$  satisfait les conditions  $(h_2)$ ,  $(h_3)$  et  $(h_5)$ .*

**Preuve.** En utilisant l'hypothèse  $(H_2)$  (c) sur l'opérateur  $\mathcal{P}$ , nous obtenons

$$(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H + (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} = 2(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H \leq 2M_{\mathcal{P}} \|\nabla\varphi\|_H \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq 2M_{\mathcal{P}} \|\varphi\|_W \|\theta\|_Q.$$

Par conséquent, pour  $C = M_{\mathcal{P}}$ , nous déduisons  $(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H + (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} \leq M_{\mathcal{P}} \|x\|_X^2$  et alors

$$-(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} \geq -C \|x\|_X^2. \quad (\text{III.47})$$

Combinons (III.47) avec  $(\mathcal{M}\theta, \varepsilon(u))_H = (\mathcal{M}\varepsilon(u), \theta)_{L^2(\Omega)}$  et  $(\theta, \theta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t \omega(\theta, \theta) \geq 0$ , alors

$$(Bx, x)_X \geq -C \|x\|_X^2, \quad \forall x \in X. \quad (\text{III.48})$$

Alors la condition  $(h_2)$  est satisfaite. Maintenant, soit la suite  $x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n)$  de  $X$  telle que

$$x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n) \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X.$$

Il résulte de (III.35) et (III.37) qu'il existe une constante  $c_6 \geq 0$  telle que

$$\begin{aligned} (Bx_n - Bx, y)_X &= -(\mathcal{P}\theta_n - \mathcal{P}\theta, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi_n - \mathcal{P}\nabla\varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta_n - \theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \Delta t \omega(\theta_n - \theta, \eta) - (\mathcal{M}\theta_n - \mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u_n) - \mathcal{M}\varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_6 \|x_n - x\|_X \|y\|_X, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X. \end{aligned}$$

Prenons  $y = Bx_n - Bx$  dans l'inégalité précédente, on trouve que

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq c_6 \|x_n - x\|_X. \quad (\text{III.49})$$

D'autre part, de (III.40) où  $x_z^{i+1} \in X$  est encore noté  $x \in X$ , on a

$$(Ax_n - Ax, x_n - x)_X + (Bx_n - Bx, x_n - x)_X \leq J(x, x_n) - J(x, x) + J(x_n, x) - J(x_n, x_n).$$

En appliquant (III.41), (III.48) et (III.46), nous obtenons  $(m-C) \|x_n - x\|_X^2 \leq \bar{\mu} L_1 c_R \|x_n - x\|_Y^2$ .

Notons que  $\alpha \leq m - C$ , on constate que  $\alpha \|x_n - x\|_X^2 \leq \bar{\mu} L_1 c_R \|x_n - x\|_Y^2$  et alors

$$\|x_n - x\|_X \leq \sqrt{\frac{\bar{\mu} L_1 c_R}{\alpha}} \|x_n - x\|_Y \leq \sqrt{\frac{1}{\max(c_0, c_1, c_2)}} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{III.50})$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Combinons (III.49) et (III.50), on en déduit que

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq c_6 \sqrt{\frac{1}{\max(c_0, c_1, c_2)}} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{III.51})$$

L'application trace  $\gamma : X \rightarrow Y$  étant compact, alors la convergence faible  $x_n \rightharpoonup x$  conduit à la convergence forte  $x_n \rightarrow x$  dans  $Y$ . Ensuite, nous concluons que  $Bx_n \rightarrow Bx$  dans  $X$  fortement pour une sous-suite, et donc la condition  $(h_3)$  est prouvée. Enfin, pour tous éléments  $x_1 = (u_1, \varphi_1, \theta_1)$  et  $x_2 = (u_2, \varphi_2, \theta_2)$  de  $X$ , l'équation (III.37) implique que

$$(Bx_1 - Bx_2, x_2 - x_1)_X = 2(\mathcal{P}\theta_1 - \mathcal{P}\theta_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \leq \beta \|x_1 - x_2\|_X,$$

où  $\beta = C = M_{\mathcal{P}} > 0$ . Or on a  $\alpha + C \leq m$ , alors  $0 \leq \beta \leq m - \alpha$ , ainsi  $(h_5)$  est satisfaite.  $\square$

Maintenant, nous utilisons les lemmes III.1-III.6 et le théorème I.11 pour conclure que le problème  $(PV_z^i)$  admet une unique solution et qui est une fonction Lipschitzienne en  $z^{i+1} \in L^2(\Gamma_C)$ . Dans l'étape suivante, nous considérons l'opérateur  $\Lambda : L^2(\Gamma_C) \rightarrow L^2(\Gamma_C)$  défini par

$$\Lambda z^{i+1} = \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1})|) S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z\tau}^{i+1} - u^i\|), \quad \forall z^{i+1} \in L^2(\Gamma_C).$$

Soit  $\{z_k^{i+1}\}_{k=1,2} \subset L^2(\Gamma_C)$  données et  $x_{z_k}^{i+1} = (u_{z_k}^{i+1}, \varphi_{z_k}^{i+1}, \theta_{z_k}^{i+1})$  la solution de  $(PV_{z_k}^i)$ , alors

$$\begin{aligned} & \Lambda z_1^{i+1} - \Lambda z_2^{i+1} \\ &= \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}^{i+1}, \varphi_{z_1}^{i+1}, \theta_{z_1}^{i+1})|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_2}^{i+1}, \varphi_{z_2}^{i+1}, \theta_{z_2}^{i+1})|) \right] S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) \\ & \quad + \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_2}^{i+1}, \varphi_{z_2}^{i+1}, \theta_{z_2}^{i+1})|) \left[ S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) - S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_2\tau}^{i+1} - u^i\|) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} & \|\Lambda z_1^{i+1} - \Lambda z_2^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & \leq \left\| \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}^{i+1}, \varphi_{z_1}^{i+1}, \theta_{z_1}^{i+1})|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_2}^{i+1}, \varphi_{z_2}^{i+1}, \theta_{z_2}^{i+1})|) \right] S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & \quad + \left\| \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_2}^{i+1}, \varphi_{z_2}^{i+1}, \theta_{z_2}^{i+1})|) \left[ S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) - S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_2\tau}^{i+1} - u^i\|) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)}. \end{aligned}$$

Puisque  $x_{z_k}^{i+1}$  est Lipschitzienne en  $z_k^{i+1}$ , il résulte de  $(H_6)$ - $(H_7)$  qu'il existe  $c_7 > 0$  telle que

$$\|\Lambda z_1^{i+1} - \Lambda z_2^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_7 \bar{\mu} \|z_1^{i+1} - z_2^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_C)}.$$

Finalement, si  $\bar{\mu} \leq \mu_0 = \frac{1}{c_7}$ , nous déduisons, en utilisant le théorème de point fixe de Banach, que l'opérateur  $\Lambda$  admet un unique point fixe  $z_*^{i+1}$  et alors l'élément  $x_{z_*}^{i+1} = (u_{z_*}^{i+1}, \varphi_{z_*}^{i+1}, \theta_{z_*}^{i+1}) \in X$  est une solution unique du problème  $(PV^i)$ .  $\square$

## 4 Étude de la convergence

Pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , considérons  $x^{i+1} = (u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})$  l'unique solution du problème  $(PV^i)$ . Afin d'étudier la convergence de  $\{x^{i+1}\}_{i=0, \dots, n-1}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , nous introduisons les fonctions continues suivantes définies sur  $[t_i, t_{i+1}]$  par

$$u^n(t) = u^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta u^i, \quad \varphi^n(t) = \varphi^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \varphi^i, \quad \theta^n(t) = \theta^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \theta^i, \quad (\text{III.52})$$

les fonctions constantes par morceaux suivantes définies sur  $(t_i, t_{i+1}]$  par

$$\bar{u}^n(t) = u^{i+1}, \quad \bar{\varphi}^n(t) = \varphi^{i+1}, \quad \bar{\theta}^n(t) = \theta^{i+1}, \quad \bar{g}^n(t) = g^{i+1}, \quad (\text{III.53})$$

et la fonction  $g : [0, T] \rightarrow X$  est donnée par

$$g = (f, q_e, \tilde{\Theta}) = (f, q_e, \Delta t \Theta) \in C([0, T], X). \quad (\text{III.54})$$

**Lemme III.7** *Il existe deux constantes positives  $a_1$  et  $a_2$  telles que*

$$\|x^{i+1}\|_X \leq a_1 \sum_{j=0}^{i+1} \|g^j\|_X + a_2. \quad (\text{III.55})$$

**Preuve.** En utilisant (III.36)-(III.38) et (III.31)-(III.33), on a

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & - \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X, \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

où

$$\tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) = \chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta - \theta^{i+1}).$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Prenons  $y = 0$  dans (III.56), on trouve que

$$\begin{aligned}
& (Ax^{i+1}, x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, x^{i+1})_X \\
& \leq (g^{i+1}, x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) + \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) \\
& + (\theta^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{III.57}$$

En utilisant (I.5), (III.19), (III.38) et l'hypothèse  $(H_6)(c)$ , donc

$$\begin{aligned}
J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) & = j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^{i+1} - u^i) \\
& \leq \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})|) \|u_\tau^{i+1}\| da \\
& \leq c_0 \bar{\mu} g^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|x^{i+1}\|_X.
\end{aligned} \tag{III.58}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) & = \Delta t \chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \theta^{i+1}) \\
& = \Delta t \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})|) S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) \theta^{i+1} da \\
& \leq \Delta t c_2 \bar{\mu} g^* S^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|x^{i+1}\|_X.
\end{aligned} \tag{III.59}$$

Combinons (III.41), (III.49) et (III.57)-(III.59), donc

$$\begin{aligned}
\alpha \|x^{i+1}\|_X^2 & \leq \|g^{i+1}\|_X \|x^{i+1}\|_X + c_0 \bar{\mu} g^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|x^{i+1}\|_X \\
& + c_2 \bar{\mu} \Delta t g^* S^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} \|x^{i+1}\|_X + \sqrt{3} \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|x^i\|_X \|x^{i+1}\|_X.
\end{aligned}$$

Et par conséquent, on trouve que

$$\alpha \|x^{i+1}\|_X \leq \|g^{i+1}\|_X + \sqrt{3} \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|x^i\|_X + c_0 \bar{\mu} g^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2} + c_2 \bar{\mu} \Delta t g^* S^* \text{meas}(\Gamma_C)^{1/2}.$$

Alors, le lemme III.7 est établi.  $\square$

**Lemme III.8** *Si  $\mu$  est suffisamment petit, alors il existe une constante  $a_3 > 0$  telle que*

$$\|\Delta x^i\|_X \leq a_3 \sum_{j=0}^i \|\Delta g^j\|_X. \tag{III.60}$$

**Preuve.** Prenons (III.56) pour  $t_{i+1}$  et  $t_i$ , on obtient que pour tout  $y \in X$

$$\begin{aligned}
 & (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\
 & - \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\
 & \quad + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{III.61}$$

et

$$\begin{aligned}
 & (Ax^i, y - x^i)_X + (Bx^i, y - x^i)_X + J(x^i, y - x^{i-1}) - J(x^i, x^i - x^{i-1}) - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, y - x^i) \\
 & \geq (g^i, y - x^i)_X + (\theta^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^{i-1}), \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{III.62}$$

Prenons  $y = x^i$  dans (III.61),  $y = x^{i+1}$  dans (III.62) et combinons les inégalités obtenues, il vient que

$$\begin{aligned}
 & (Ax^{i+1} - Ax^i, x^{i+1} - x^i)_X + (Bx^{i+1} - Bx^i, x^{i+1} - x^i)_X \\
 & \leq (g^{i+1} - g^i, x^{i+1} - x^i)_X + J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) \\
 & + \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) + (\Delta\theta^{i-1}, \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i) - \mathcal{M}\varepsilon(u^{i-1}), \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)} \\
 & - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i - \mathcal{P}\nabla\varphi^{i-1}, \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{III.63}$$

Ensuite, appliquons les propriétés de  $J$  et  $\left| |u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}| - |u_\tau^i - u_\tau^{i-1}| \right| \leq |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i|$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
 J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) & = j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i + \Delta u^{i-1}) - j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^{i-1}) \\
 & \leq j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) = J(x^i, \Delta x^i),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J(x^i, \Delta x^i) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) & = j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), \Delta u^i) \\
 & = \int_{\Gamma_C} \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^i, \varphi^i, \theta^i)|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})|) \right] \|\Delta u_\tau^i\| da \\
 & \leq c_0 \bar{\mu} L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2.
 \end{aligned} \tag{III.64}$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) \\
&= \chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \Delta \theta^i) - \chi((u^i, \varphi^i, \theta^i); \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t}; \Delta \theta^i) \\
&= \int_{\Gamma_C} \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^i, \varphi^i, \theta^i)|) \right] S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) \Delta \theta^i da \\
&+ \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^i, \varphi^i, \theta^i)|) \left[ S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) - S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^i - u_\tau^{i-1}\|) \right] \Delta \theta^i da.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) \\
&\leq c_2 \bar{\mu} S^* L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2 \\
&+ \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^i, \varphi^i, \theta^i)|) \left[ S_c(\cdot, \|\Delta u_\tau^i\|) - S_c(\cdot, \|\Delta u_\tau^{i-1}\|) \right] \Delta \theta^i da \\
&\leq c_2 \bar{\mu} S^* L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2 + \bar{\mu} g^* L_2 \int_{\Gamma_C} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}\| \Delta \theta^i da \\
&\leq c_2 \bar{\mu} S^* L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) &\leq c_2 \bar{\mu} S^* L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2 \\
&+ c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X. \quad (\text{III.65})
\end{aligned}$$

En utilisant (III.63)-(III.65), on obtient que

$$\begin{aligned}
(m - C) \|\Delta x^i\|_X^2 &\leq \|\Delta g^i\|_X \|\Delta x^i\|_X + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X \\
&+ \bar{\mu} \left[ \Delta t S^* L_1 c_2 c_R \max(c_0, c_1, c_2) + c_0 c_2 g^* L_2 \right] \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 \\
&+ \sqrt{3} c_2 \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Par suite, il en résulte que

$$\begin{aligned}
& \left[ \alpha - \bar{\mu} \left( \Delta t S^* L_1 c_2 c_R \max(c_0, c_1, c_2) + c_0 c_2 g^* L_2 \right) \right] \|\Delta x^i\|_X^2 \\
&\leq \|\Delta g^i\|_X \|\Delta x^i\|_X + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X + \sqrt{3} c_2 \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Finalement, pour  $\mu$  suffisamment petit, le lemme III.8 est prouvé.  $\square$



**Proposition III.2** *À partir de  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$ , on peut extraire des sous-suites, toujours notées  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$  telles que*

$$\begin{aligned} u^n &\rightarrow u && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \varphi^n &\rightarrow \varphi && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \theta^n &\rightarrow \theta && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q). \end{aligned} \tag{III.66}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &\rightarrow \dot{u} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \dot{\varphi}^n &\rightarrow \dot{\varphi} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \dot{\theta}^n &\rightarrow \dot{\theta} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q). \end{aligned} \tag{III.67}$$

**Preuve.** De (III.54) et  $(H_8)$ , on peut facilement voir que  $g \in W^{1,\infty}(0, T; X)$  et alors, on a

$$\|g^i\|_X \leq \|g\|_{L^\infty(0,T;X)}, \quad \left\| \frac{\Delta g^i}{\Delta t} \right\|_X \leq \|\dot{g}\|_{L^\infty(0,T;X)}. \tag{III.68}$$

Soit  $x^n = x^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta x^i$ , il vient des lemmes III.7 et III.8 qu'il existe  $d > 0$  telle que

$$\|x^n\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} \leq d. \tag{III.69}$$

En se rappelant (III.34), nous en déduisons que

$$\|u^n\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq d, \quad \|\varphi^n\|_{W^{1,\infty}(0,T;W)} \leq d \quad \text{et} \quad \|\theta^n\|_{W^{1,\infty}(0,T;Q)} \leq d. \tag{III.70}$$

Les suites  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$  sont uniformément bornées, respectivement dans  $W^{1,\infty}(0, T; V)$ ,  $W^{1,\infty}(0, T; W)$  et  $W^{1,\infty}(0, T; Q)$ . Ensuite, on peut en extraire encore des sous-suites notées  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$  telles que (VI.15) et (VI.16). Ainsi, la proposition III.2 est prouvée.  $\square$

**Proposition III.3** *Il existe des sous-suites de  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$ , encore notées  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$  telles que*

$$\begin{aligned} \bar{u}^n(t) &\rightarrow u(t) && \text{faiblement dans } V, \\ \bar{\varphi}^n(t) &\rightarrow \varphi(t) && \text{faiblement dans } W, \quad \text{pour p.p } t \in [0, T]. \\ \bar{\theta}^n(t) &\rightarrow \theta(t) && \text{faiblement dans } Q. \end{aligned} \tag{III.71}$$

**Preuve.** Il découle de (III.68) que  $(\bar{u}^n)$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$  et alors  $(\bar{u}^n)$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

converge faiblement  $*$  pour une sous-suite dans  $L^\infty(0, T; V)$ . De plus, on a

$$\|u^n(t) - \bar{u}^n(t)\|_V \leq \frac{T}{n} \|\dot{u}^n(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T].$$

Cette inégalité combinée avec (III.70) conduit à

$$\|u^n(t) - \bar{u}^n(t)\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq d \frac{T}{n}. \quad (\text{III.72})$$

On déduit donc de (III.72) que

$$(\bar{u}^n) \rightarrow u \text{ faiblement } * \text{ pour une sous-suite dans } L^\infty(0, T; V). \quad (\text{III.73})$$

D'autre part, (III.72), (III.73) et  $W^{1, \infty}(0, T; V) \subset C(0, T; V)$  implique que

$$u^n(t) \rightarrow u(t) \text{ faiblement dans } V \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (\text{III.74})$$

De (III.72)-(III.74), on trouve que p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\bar{u}^n(t) \rightarrow u(t)$  faiblement dans  $V$  pour une sous-suite, et par la même méthode, nous terminons la preuve.  $\square$

**Remarque** Soient  $\bar{f}^n(t) = f^{i+1}$ ,  $\bar{q}_e^n(t) = q_e^{i+1}$  et  $\bar{\Theta}^n(t) = \Theta^{i+1}$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Sous l'hypothèse  $(H_8)$ , on a  $f \in W^{1, \infty}(0, T; V)$ ,  $q_e \in W^{1, \infty}(0, T; W)$  et  $\Theta \in W^{1, \infty}(0, T; Q)$ , et alors

$$\begin{aligned} \bar{f}^n &\rightarrow f && \text{forttement dans } L^2(0, T; V), \\ \bar{q}_e^n &\rightarrow q_e && \text{forttement dans } L^2(0, T; W), \\ \bar{\Theta}^n &\rightarrow \Theta && \text{forttement dans } L^2(0, T; Q). \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

**Proposition III.4** *Le triplet  $(u, \varphi, \theta) \in L^2(0, T; V \times W \times Q)$  est solution du problème (PV).*

**Preuve.** Après la substitution de  $v$  par  $u^i + v \Delta t$  dans (III.31), nous le divisons par  $\Delta t$  et, en combinant les inégalités résultantes, on en déduit que le problème  $(PV^i)$  peut s'écrire, pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , comme suit :

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_H + (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_H \\ &- (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_H + j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V, \\
 & (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H = (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W, \\
 & (\frac{d}{dt}\theta^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H + (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} \\
 & - (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} - \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) + \omega(\bar{\theta}^n(t), \eta(t)) \\
 & = (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés des inégalités précédentes sur  $[0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V dt, \\
 & \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & = \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt, \\
 & \int_0^T (\frac{d}{dt}\theta^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt \\
 & + \int_0^T \omega(\bar{\theta}^n(t), \eta(t)) dt = \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

En ajoutant les inégalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T \omega(\bar{\theta}^n(t), \eta(t)) dt + \int_0^T (\frac{d}{dt}\theta^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \tag{III.76} \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt - \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V dt + \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt + \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Pour compléter la preuve de la proposition III.4, nous avons besoin des lemmes suivants.

**Lemme III.9** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{III.77})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \quad (\text{III.78})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \quad (\text{III.79})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{III.80})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{III.81})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{III.82})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \bar{\theta}^n(t), \eta(t) \right)_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{III.83})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt, \quad (\text{III.84})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon \left( \frac{d}{dt} u^n(t) \right), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{III.85})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt} \varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{III.86})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \omega(\bar{\theta}^n(t), \eta(t)) dt = \int_0^T \omega(\theta(t), \eta(t)) dt, \quad (\text{III.87})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt = \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt, \quad (\text{III.88})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt} u^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \quad (\text{III.89})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt = \int_0^T (q_e(t), \xi)_W dt, \quad (\text{III.90})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \quad (\text{III.91})$$

**Preuve.** Tout d'abord, nous pouvons montrer que (voir [21, 54])

$$\begin{aligned} \bar{u}^n &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } L^2(0, T, V), \\ \bar{\varphi}^n &\rightharpoonup \varphi && \text{faiblement dans } L^2(0, T, W), \\ \bar{\theta}^n &\rightharpoonup \theta && \text{faiblement dans } L^2(0, T, Q), \\ \dot{u}^n &\rightharpoonup \dot{u} && \text{faiblement dans } L^2(0, T, V), \\ \dot{\varphi}^n &\rightharpoonup \dot{\varphi} && \text{faiblement dans } L^2(0, T, W), \\ \dot{\theta}^n &\rightharpoonup \dot{\theta} && \text{faiblement dans } L^2(0, T, Q). \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Ensuite, la preuve du lemme III.9 provient de (III.92).  $\square$

**Lemme III.10** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt \geq \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{III.93})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) \geq \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt, \quad (\text{III.94})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt} u^n(t); \eta(t)) dt \geq \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt. \quad (\text{III.95})$$

**Preuve.** Pour montrer (III.93), on se réfère à [21] et pour (III.94), on écrit

$$\begin{aligned} j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) &= j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) - j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) \\ &\quad + j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) - j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) dt \\ &\leq \bar{\mu} L_1 \left\| R(\sigma_\nu(\bar{u}^n, \bar{\varphi}^n, \bar{\theta}^n) - \sigma_\nu(u, \varphi, \theta)) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_C))} \|\dot{u}_\tau^n\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^d)}. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur  $R$  est compact, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(\sigma_\nu(\bar{u}^n, \bar{\varphi}^n, \bar{\theta}^n) - \sigma_\nu(u, \varphi, \theta)) = 0$ , et alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) - j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) dt \leq 0.$$

Ensuite, nous concluons que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) dt \geq \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt.$$

De la même manière, nous pouvons montrer (III.94) et terminons ainsi la preuve du lemme III.10.  $\square$

Revenons à la preuve de la proposition III.4. En passant à la limite dans (III.76), on obtient

$$\int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt$$

### Chapitre III. Problème de contact quasi-statique bilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{P}\theta(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt \quad (\text{III.96}) \\
& - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt - \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt \\
& \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt + \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques que dans la preuve du lemme III.1, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla\varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
& \quad - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt \\
& \quad - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \\
& \int_0^T (\beta \nabla\varphi(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\theta(t), \nabla\xi(t))_H dt \\
& = \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt, \\
& \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K}\nabla\theta(t), \nabla\eta(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
& \quad - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt \\
& \quad + \int_0^T \omega(\theta(t), \eta(t)) dt = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

Prenons

$$v(t) = \begin{cases} v & \text{pour } t \in (s, s + \lambda), \\ \dot{u}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \xi(t) = \xi, \quad \eta(t) = \eta \quad \text{pour } t \in (s, s + \lambda).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}^* \nabla\varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
& \quad - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v) dt \\
& \quad - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \geq \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (f(t), v - \dot{u}(t))_V dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi)_H dt \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (q_e(t), \xi)_W dt, \\
 & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\dot{\theta}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta)_H dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta)_{L^2(\Omega)} dt \\
 & \quad - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt \\
 & \quad + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \omega(\theta(t), \eta) dt = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\Theta(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

En passant à la limite en  $s$  dans les inégalités ci-dessus, nous concluons par le théorème de Lebesgue que le triplet  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait le problème  $(PV)$ , et ainsi, la proposition III.4 est établie.  $\square$





---

---

# Chapitre IV

---

## Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Ce chapitre traite un problème de contact unilatéral quasi-statique avec frottement entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation thermiquement et électriquement conductrice. Le matériau est supposé posséder un comportement thermo-électro-élastique linéaire et le contact est modélisé par les conditions de Signorini, une loi de frottement sec et une condition de conductivité électrique régularisée. Les effets de la chaleur due au frottement et à la conductivité thermique sont pris en considération. Afin de prouver l'existence d'une solution faible du problème, une formulation discrétisée est obtenue en utilisant un schéma temporel implicite. Plusieurs estimations pour les solutions incrémentales sont données, et ceci nous permettra de passer à la limite en utilisant des résultats de compacité. Notons enfin que le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article accepté pour publication dans le journal "Indian Journal of Pure and Applied Mathematics".

### 1 Modèle mathématique

Le problème mécanique qui modélise le contact unilatéral entre une fondation thermiquement, électriquement conductrice et un corps à comportement thermo-électro-élastique linéaire avec frottement sec se formule sous la forme suivante :

**Problème (P).** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

$\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \mathcal{M} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.1})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \mathcal{P} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.2})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{div} D = \phi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.5})$$

$$\dot{\theta} + \text{div} q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{IV.6})$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0, T), \quad (\text{IV.7})$$

$$\sigma \nu = f_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{IV.8})$$

$$\sigma_\nu(u, \varphi, \theta) \leq 0, (u_\nu - g) \leq 0, \sigma_\nu(u, \varphi, \theta) (u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \\ \|\sigma_\tau\| < \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{IV.10})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (\text{IV.11})$$

$$D \cdot \nu = \phi_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T), \quad (\text{IV.12})$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{IV.13})$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{IV.14})$$

$$q \cdot \nu = -\mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) S_c(\cdot, \|\dot{u}_\tau\|) + k_c(u_\nu - g) \phi_L(\theta - \theta_F) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{IV.15})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (\text{IV.16})$$

## 2 Formulation variationnelle du problème

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les fonctions  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $q_e : [0, T] \rightarrow W$  et  $\Theta : [0, T] \rightarrow Q$  par les expressions suivantes :

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N v \, da, \quad \forall v \in V, \quad (\text{IV.17})$$

$$(q_e, \xi)_W = \int_{\Omega} \phi_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} \phi_b \xi \, da, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{IV.18})$$

$$(\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} q_0 \eta \, dx, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{IV.19})$$

## IV.2 Formulation variationnelle du problème

Soit  $X = V \times W \times Q$ , nous considérons les fonctionnelles  $j : X \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\chi : X \times V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega : V \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\ell : V \times W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  données par

$$j((u, \varphi, \theta); v) = \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \|v_\tau\| da, \quad (\text{IV.20})$$

$$\chi((u, \varphi, \theta); v; \eta) = \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) S_c(\cdot, \|v_\tau\|) \eta da, \quad (\text{IV.21})$$

$$\omega((u, \theta); \eta) = \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu - g) \phi_L(\theta - \theta_F) \eta da, \quad (\text{IV.22})$$

$$\ell((u, \varphi); \xi) = \int_{\Gamma_C} \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \xi da. \quad (\text{IV.23})$$

De plus, nous avons besoin des hypothèses supplémentaires sur les données initiales du problème

$$(H_{14}) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad (u_0, \varphi_0, \theta_0) \in K_1 \times W \times Q \text{ tels que} \\ (\mathfrak{F} \varepsilon(u_0), \varepsilon(v - u_0))_H + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_0, \varepsilon(v - u_0))_H - (\mathcal{M} \theta_0, \varepsilon(v - u_0))_H + j(u_0, \varphi_0, \theta_0; v - u_0) \\ \geq (f(0), v - u_0)_V, \quad \forall (v, \xi, \eta) \in K_1 \times W \times Q, \\ (\beta \nabla \varphi_0, \nabla \xi)_H = (\mathcal{E} \varepsilon(u_0), \nabla \xi)_H + (\mathcal{P} \theta_0, \nabla \xi)_H + (q_e(0), \xi)_W - \ell((u_0, \varphi_0); \xi). \\ (b) \quad \text{Il existe } T_0 \in L^2(\Omega), \text{ telle que} \\ (\mathcal{K} \nabla \theta_0, \nabla \eta)_H + \omega((u_0, \theta_0), \eta) - (\Theta(0), \eta)_{L^2(\Omega)} = (T_0, \eta)_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Enfin, nous acceptons la condition de petitesse suivante

$$(H_{15}) \quad L_\psi L c_0 c_1 + M_\psi c_1^2 + M_{\mathcal{P}} < m,$$

impliquant les constantes de trace  $c_0$  et  $c_1$ , les constantes de bornitude et de Lipschitzianité de  $\psi$ , la norme de  $\mathcal{P}$  et les constantes de coercivité de  $\mathfrak{F}$ ,  $\beta$  et  $\mathcal{K}$ . Nous notons que cette condition est considérée pour des raisons mathématiques et ne semble pas être lié à aucune contrainte physique inhérentes au problème. Par suite, la suppression de cette condition reste une question pour les recherches futures.

Par une procédure standard basée sur les formules de Green, nous dérivons la formulation variationnelle du problème ( $P$ ).

**Problème ( $PV$ ).** *Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow K_1$ , le potentiel électrique*

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

$\varphi : [0, T] \rightarrow W$  et la température  $\theta : [0, T] \rightarrow Q$  tels que pour tout  $(v, \xi, \eta)$  de  $V \times W \times Q$ , on a

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - \dot{u}))_H - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v - \dot{u}))_H \\ & + j((u, \varphi, \theta), v) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) \geq (f, v - \dot{u})_V + \langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta), v_\nu - \dot{u}_\nu \rangle, \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

$$\langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta), z_\nu - u_\nu \rangle \geq 0, \quad \forall z \in K_1, \quad (\text{IV.25})$$

$$(\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H + \ell((u, \varphi); \xi) = (q_e, \xi)_W, \quad (\text{IV.26})$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}, \eta)_{L^2(\Omega)}, \\ & - \chi((u, \varphi, \theta); \dot{u}; \eta) + \omega((u, \theta), \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{IV.28})$$

Maintenant, nous énonçons notre résultat principal que nous prouverons dans la suite.

**Théorème IV.1** *Supposons  $(H_1)$ - $(H_{10})$  et  $(H_{14})$ - $(H_{15})$  satisfaites, s'il existe  $\mu^* > 0$  telle que*

$$\bar{\mu} + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c} \leq \mu^*,$$

*alors, le problème  $(PV)$  a au moins une solution.*

Dans ce théorème, il n'est pas possible d'expliquer complètement la valeur de petitesse de la relation  $\mu^*$ , et donc de préciser la notion de frottement faible qui dépend des caractéristiques du matériau. Physiquement, il semble que lorsque la valeur de  $\mu^*$  devienne importante, elle favorise les phénomènes d'instabilité dus aux effets de collage/glissement ou de glissement saccadé (succession d'états statiques et d'états de glissement).

### 3 Étude de l'existence de la solution du problème discret

Le problème  $(PV)$  peut être discrétisé dans le temps par un schéma implicite. Soit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  une subdivision uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de pas  $\Delta t = \frac{T}{n}$  ( $t_i = i\Delta t$ ). Pour toute fonction  $\omega$ , on note  $\omega^i$  l'approximation de  $\omega$  à l'instant  $t_i$  et par  $\Delta\omega^i$  la différence  $\omega^{i+1} - \omega^i$ . Pour une fonction continue  $\omega(t)$ , nous utilisons la notation  $\omega^i = \omega(t_i)$ . Nous considérons une suite de problèmes incrémentales  $(PV^i)$  définie pour  $u(\cdot, 0) = u_0$ ,  $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$  et  $\theta(\cdot, 0) = \theta_0$  comme suit

**Problème  $(PV^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u^{i+1} \in K_1$ , le potentiel électrique  $\varphi^{i+1} \in$*

### IV.3 Étude de l'existence de la solution du problème discret

$W$  et la température  $\theta^{i+1} \in Q$  tels que

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H - (\mathcal{M}\theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \\ & + j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), v - u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^{i+1} - u^i) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1, \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$\begin{aligned} & (\beta\nabla\varphi^{i+1}, \nabla\xi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u^{i+1}), \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\theta^{i+1}, \nabla\xi)_H + \ell((u^{i+1}, \varphi^{i+1}); \xi) \\ & = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{aligned} & (\theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t(\mathcal{K}\nabla\theta^{i+1}, \nabla\eta)_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P}\nabla\varphi^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} - \Delta t\chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta) \\ & + \Delta t\omega((u^{i+1}, \theta^{i+1}), \eta) = \Delta t(\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Pour tout  $z_1 \in L^2(\Gamma_C)$ ,  $z_2 \in L^2(\Gamma_C)$  et  $z_3 \in L^2(\Gamma_C)$ , on définit les fonctionnelles

$$\chi_{z_1}(\eta) = \int_{\Gamma_C} z_1\eta da, \quad \omega_{z_2}(\eta) = \int_{\Gamma_C} z_2\eta da, \quad \forall \eta \in Q, \quad \ell_{z_3}(\xi) = \int_{\Gamma_C} z_3\xi da, \quad \forall \xi \in W. \quad (\text{IV.32})$$

Soit  $z = (z_1, z_2, z_3)$  est supposé connu, nous construisons le problème suivant.

**Problème ( $PV_z^i$ ).** Trouver le champ des déplacements  $u_z^{i+1} \in K_1$ , le potentiel électrique  $\varphi_z^{i+1} \in W$  et la température  $\theta_z^{i+1} \in Q$  tels que

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u_z^{i+1}), \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H - (\mathcal{M}\theta_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H \\ & + j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), v - u^i) - j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), u_z^{i+1} - u^i) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u_z^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1, \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$\begin{aligned} & (\beta\nabla\varphi_z^{i+1}, \nabla\xi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_z^{i+1}), \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\theta_z^{i+1}, \nabla\xi)_H + \ell_{z_3}(\xi) \\ & = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

$$\begin{aligned} & (\theta_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t(\mathcal{K}\nabla\theta_z^{i+1}, \nabla\eta)_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u_z^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P}\nabla\varphi_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t\omega_{z_2}(\eta) - \Delta t\chi_{z_1}(\eta) = \Delta t(\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Nous introduisons l'élément  $\Theta_z^{i+1}$  de  $Q$ , défini comme suit

$$\begin{aligned} (\Theta_z^{i+1}, \eta)_Q &= (\Delta t \Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t \chi_{z_1}(\eta) - \Delta t \omega_{z_2}(\eta), \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned}$$

Soient  $X = V \times W \times Q$  et  $Y = L^2(\Gamma_C)^d \times L^2(\Gamma_C)^2$  les structures hilbertiennes produits définies par

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \xi)_W + (\theta, \eta)_Q, \quad (\text{IV.36})$$

$$(z, z')_Y = (z_1, z'_1)_{L^2(\Gamma_C)^d} + (z_2, z'_2)_{L^2(\Gamma_C)} + (z_3, z'_3)_{L^2(\Gamma_C)}, \quad (\text{IV.37})$$

et leurs normes euclidiennes associées  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$ . Nous considérons le sous-ensemble convexe fermé non vide  $U = K_1 \times W \times Q$  de  $X$  et les opérateurs  $A : X \rightarrow X$  et  $B : X \rightarrow X$  donnés, pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$ ,  $y = (v, \xi, \eta) \in X$ , par

$$\begin{aligned} (Ax, y)_X &= (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\Delta t \mathcal{K} \nabla\theta, \nabla\eta)_H + (\beta\nabla\varphi, \nabla\xi)_H \\ &\quad + (\mathcal{E}^* \nabla\varphi, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\xi)_H, \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

$$\begin{aligned} (Bx, y)_X &= -(\mathcal{P}\theta, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Nous définissons également la fonctionnelle  $J : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  et l'élément  $f_z^{i+1} \in X$  par

$$J(x, y) = j((u, \varphi, \theta); v), \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), y = (v, \xi, \eta) \in X, \quad (\text{IV.40})$$

$$f_z^{i+1} = (f^{i+1}, q_e^{i+1} - \ell_{z_3}(\xi), \Theta_z^{i+1}). \quad (\text{IV.41})$$

Sous toutes ces considérations, nous avons le lemme suivant.

**Lemme IV.1** Le problème  $(PV_z^i)$  est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in U \text{ telle que} \\ (Ax_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + (Bx_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + J(x_z^{i+1}, y - x^i) \\ - J(x_z^{i+1}, x_z^{i+1} - x^i) \geq (f_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X, \quad \forall y \in U. \end{array} \right. \quad (\text{IV.42})$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III. □

En utilisant ce lemme, nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

### IV.3 Étude de l'existence de la solution du problème discret

---

**Lemme IV.2** *Pour tout  $z$  de  $L^2(\Gamma_C)^3$ , le problème  $(PV_z^i)$  admet une unique solution*

$$x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in U = K_1 \times W \times Q.$$

La preuve de ce lemme est basée sur le théorème I.11, et pour appliquer le résultat abstrait fourni par ce théorème, nous rappelons que l'inégalité  $(H_{15})$  implique que  $m - M_{\mathcal{P}} > 0$ , et donc, pour  $\bar{\mu}$  suffisamment petit, on peut avoir

$$(\mathcal{I}) : \quad \bar{\mu} L_{HC_R} \max(c_0, c_1, c_2) + M_{\mathcal{P}} < m.$$

Maintenant, commençons par examiner les propriétés des opérateurs  $A$  et  $B$ , ainsi que la fonctionnelle  $J$  donnée par (IV.38)-(IV.40).

**Lemme IV.3** *L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et Lipschitz continu.*

**Preuve.** Nous considérons deux éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $X$ , et nous utilisons les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  et la définition (IV.38) pour trouver qu'ils existent  $m > 0$  et  $M > 0$  telles que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \|x_1 - x_2\|_X^2, \quad (\text{IV.43})$$

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq M \|x_1 - x_2\|_X. \quad (\text{IV.44})$$

Par conséquent, le lemme IV.3 est établi. □

Nous rappelons que la fonctionnelle  $J$  vérifie la condition  $(h_6)$ . De plus, nous avons

**Lemme IV.4** *La fonctionnelle  $J$  vérifie les hypothèses  $(J_1)$ ,  $(J_2)$  et  $(J_3)$ .*

**Preuve.** Soient  $x = (u, \varphi, \theta)$ ,  $\eta = (v, \xi, \omega) \in X$  et  $\lambda \in ]0, 1]$ . Il résulte de la définition (IV.20) et (IV.40) des fonctionnelles  $j$  et  $J$  que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} [j(\eta, x - \lambda x) - j(\eta, x)] &= \frac{1}{\lambda} \left[ \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) (\|u_\tau - \lambda u_\tau\| - \|u_\tau\|) da \right] \\ &= - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) \|u_\tau\| da. \end{aligned}$$

En utilisant  $(h_7)$ , nous déduisons que pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $\eta = (v, \xi, \omega)$  de  $X$ , on a

$$j'_2(\eta, x; -x) \leq - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)|) \|u_\tau\| da. \quad (\text{IV.45})$$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Ensuite, si  $\{x_n\} = \{(u_n, \varphi_n, \theta_n)\} \subset X$  et  $\{t_n\} \subset ]0, 1]$  sont deux suites telles que  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ , alors

$$j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq - \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(t_n u_n, t_n \varphi_n, t_n \theta_n)|) \|u_\tau\| da \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $G \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_C$ , on trouve  $j'_2(t_n x_n, x_n; -x_n) \leq 0$ , alors la condition  $(J_1)$  est vérifiée.

Maintenant, nous allons prouver que la fonctionnelle  $J$  satisfait  $(J_2)$ , et pour cela, nous considérons  $\{x_n\}$  et  $\{\eta_n\}$  deux suites de  $X$  telles que

$$\|\eta_n\|_X \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \|x_n\| \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.46})$$

où  $C$  est une constante positive. Appliquons (VI.45) et  $(H_6)(c)$ , on peut voir que

$$\begin{aligned} j'_2(\eta_n, x_n; -x_n) &\leq \bar{\mu} g^* \int_{\Gamma_C} \|u_{n\tau}\| da, \\ &\leq \bar{\mu} g^* \text{meas}(\Gamma_C)^{\frac{1}{2}} \|u_{n\tau}\|_{L^2(\Gamma_C)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En prenant en compte les deux inégalités (I.5) et (IV.36), on trouve

$$j'_2(\eta_n, x_n; -x_n) \leq \bar{\mu} g^* c_0 \text{meas}(\Gamma_C)^{\frac{1}{2}} \|x_n\|_X. \quad (\text{IV.47})$$

Donc la fonctionnelle  $J$  vérifie la condition  $(J_2)$ . Enfin, nous considérons deux suites  $\{x_n\} = \{(u_n, \varphi_n, \theta_n)\}$  et  $\{\eta_n\} = \{(v_n, \xi_n, \omega_n)\}$  de  $X$  telles que

$$x_n \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X, \quad \eta_n \rightharpoonup \eta = (v, \xi, \omega) \in X.$$

De la compacité de l'application trace, nous obtenons

$$u_{n\tau} \rightarrow u_\tau \text{ dans } L^2(\Gamma_C), \quad \|u_{n\tau}\| \rightarrow \|u_\tau\|.$$

De plus, de la compacité de  $R$  et de la continuité de  $G$ , nous déduisons que

$$G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n)|) \rightarrow G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \text{ dans } L^2(\Gamma_C).$$

Et

$$J(\eta_n, y) \rightarrow J(\eta, y), \quad \forall y \in X \quad \text{et} \quad J(\eta_n, x_n) \rightarrow J(\eta, x).$$

La condition  $(J_3)$  est donc obtenue. □



### IV.3 Étude de l'existence de la solution du problème discret

---

**Lemme IV.5** *Si l'hypothèse  $(H_6)$  est vérifiée, alors la fonctionnelle  $J$  satisfait*

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{IV.48})$$

**Preuve.** Soient  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $y = (v, \xi, \omega) \in X$ , en utilisant (IV.20) et (IV.40), on obtient

$$\begin{aligned} & J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \\ &= \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|)(\|v_\tau\| - \|u_\tau\|) da + \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)|)(\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &= \int_{\Gamma_C} \mu \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)|) \right] (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da. \end{aligned}$$

Par conséquent, il découle des propriétés des fonctions  $\mu$ ,  $G$  et  $R$  que

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \bar{\mu} L_1 c_R \|x - y\|_Y^2. \quad (\text{IV.49})$$

Il existe donc une constante  $\alpha = \bar{\mu} L_G c_R \max(c_0, c_1, c_2) > 0$  telle que

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2.$$

Alors, le lemme IV.5 est prouvé. □

**Lemme IV.6** *L'opérateur  $B : X \rightarrow X$  satisfait les conditions  $(h_2)$ ,  $(h_3)$  et  $(h_5)$ .*

**Preuve.** En utilisant les hypothèses sur l'opérateur  $\mathcal{P}$  (voir  $(H_2)$ ), nous obtenons

$$(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H + (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} \leq 2 M_{\mathcal{P}} \|\nabla\varphi\|_H \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 M_{\mathcal{P}} \|\varphi\|_W \|\theta\|_Q \leq M_{\mathcal{P}} \|x\|_X^2.$$

Comme  $(\mathcal{M}\theta, \varepsilon(u))_H = (\mathcal{M}\varepsilon(u), \theta)_{L^2(\Omega)}$  et  $(\theta, \theta)_{L^2(\Omega)} \geq 0$ , en utilisant (IV.41) nous trouvons

$$(Bx, x)_X \geq -C \|x\|_X^2, \quad \forall x \in X, \quad (\text{IV.50})$$

où  $C = M_{\mathcal{P}}$ , alors  $(h_2)$  est prouvée. Ensuite, nous considérons la suite  $x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n)$  de  $X$  telle que  $x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n) \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X$  dans  $X$ . Il résulte de (IV.38) et (IV.41) qu'il existe une constante  $c_6 \geq 0$  telle que

$$\begin{aligned} (Bx_n - Bx, y)_X &= -(\mathcal{P}\theta_n - \mathcal{P}\theta, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi_n - \mathcal{P}\nabla\varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta_n - \theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\mathcal{M}\theta_n - \mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u_n) - \mathcal{M}\varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_6 \|x_n - x\|_X \|y\|_X, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X. \end{aligned}$$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

En prenant  $y = Bx_n - Bx$  dans l'inégalité précédente, nous trouvons

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq c_6 \|x_n - x\|_X. \quad (\text{IV.51})$$

De plus, il découle de (IV.42), où  $x_z^{i+1} \in X$  est toujours noté  $x \in X$ , que

$$(Ax_n - Ax, x_n - x)_X + (Bx_n - Bx, x_n - x)_X \leq J(x, x_n) - J(x, x) + J(x_n, x) - J(x_n, x_n).$$

En appliquant les inégalités (IV.43), (IV.49) et (IV.50), on obtient

$$(m - C) \|x_n - x\|_X^2 \leq \bar{\mu} L_1 c_R \|x_n - x\|_Y^2.$$

Rappelons que l'inégalité (I) peut être réécrite sous la forme  $\alpha + C < m$ , alors

$$\|x_n - x\|_X \leq \sqrt{\frac{\bar{\mu} L_1 c_R}{\alpha}} \|x_n - x\|_Y \leq \sqrt{\frac{1}{\max(c_0, c_1, c_2)}} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{IV.52})$$

En combinant les deux inégalités (IV.51) et (IV.52), on en déduit

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq c_6 \sqrt{\frac{1}{\max(c_0, c_1, c_2)}} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{IV.53})$$

Puisque l'application trace  $\gamma : X \rightarrow Y$  est un opérateur compact, la convergence faible  $x_n \rightharpoonup x$  conduit à la convergence forte  $x_n \rightarrow x$  dans  $Y$ , et donc  $Bx_n \rightarrow Bx$  fortement dans  $X$  pour une sous-suite. Alors, la condition  $(h_3)$  est prouvée. Et enfin, pour tout  $x_1 = (u_1, \varphi_1, \theta_1)$  et  $x_2 = (u_2, \varphi_2, \theta_2)$  de  $X$ , il découle de (IV.41) que

$$(Bx_1 - Bx_2, x_2 - x_1)_X = 2(\mathcal{P}\theta_1 - \mathcal{P}\theta_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \leq \beta \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

où  $\beta = C > 0$ . Comme  $\alpha + C < m$ , alors  $0 \leq \beta < m - \alpha$ , et donc  $(h_5)$  est satisfaite.  $\square$

À présent, nous utilisons les lemmes IV.1-IV.6 et le théorème I.11 pour conclure que  $(PV_z^i)$  a une solution unique. De plus, il est facile de montrer que cette solution est une fonction Lipschitzienne en  $z^{i+1} \in L^2(\Gamma_C)^3$ .

Dans l'étape suivante, nous considérons l'opérateur  $\Lambda : L^2(\Gamma_C)^3 \rightarrow L^2(\Gamma_C)^3$  défini, pour tout

$z = (z_1, z_2, z_3) \in L^2(\Gamma_C)^3$ , comme suit

$$\begin{aligned} \Lambda z = & \left[ \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}^{i+1}, \varphi_{z_1}^{i+1}, \theta_{z_1}^{i+1})|) S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1}^{i+1} - u^i\|); \right. \\ & \left. \psi(u_{z_2\nu} - g) \phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F); k_c(u_{z_3\nu} - g) \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) \right]. \end{aligned}$$

Commençons par contrôler la quantité  $I = \|\Lambda z - \Lambda z'\|_{L^2(\Gamma_C)^3}$ , nous avons

$$\begin{aligned} I \leq & \left\| \mu S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1}^{i+1} - u^i\|) \left[ G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}^{i+1}, \varphi_{z_1}^{i+1}, \theta_{z_1}^{i+1})|) - G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}'^{i+1}, \varphi_{z_1}'^{i+1}, \theta_{z_1}'^{i+1})|) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & + \left\| \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u_{z_1}^{i+1}, \varphi_{z_1}^{i+1}, \theta_{z_1}^{i+1})|) \left[ S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1}^{i+1} - u^i\|) - S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1}'^{i+1} - u^i\|) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & + \left\| [\psi(u_{z_2\nu}^{i+1} - g) - \psi(u_{z_2\nu}'^{i+1} - g)] \phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & + \left\| \psi(u_{z_2\nu}^{i+1} - g) [\phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F) - \phi_L(\varphi_{z_2}'^{i+1} - \varphi_F)] \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & + \left\| [k_c(u_{z_3\nu}^{i+1} - g) - k_c(u_{z_3\nu}'^{i+1} - g)] \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & + \left\| k_c(u_{z_3\nu}^{i+1} - g) [\phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) - \phi_L(\theta_{z_3}'^{i+1} - \theta_F)] \right\|_{L^2(\Gamma_C)}. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses  $(H_4)$ - $(H_{10})$  et que la solution  $x_z^{i+1}$  est Lipschitz continue par rapport à  $z^{i+1}$ , on trouve qu'il existe une constante  $c_7 > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|\Lambda z - \Lambda z'\|_{L^2(\Gamma_C)^3} & \leq c_7 \bar{\mu} \|z_1 - z_1'\|_{L^2(\Gamma_C)} + (L_\psi L + M_\psi) \|z_2 - z_2'\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & \quad + (L_{k_c} L + M_{k_c}) \|z_3 - z_3'\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ & \leq c_7 (\bar{\mu} + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c}) \|z - z'\|_{L^2(\Gamma_C)^3}. \end{aligned}$$

Soit  $\mu^* = \frac{1}{c_7}$ , donc si  $\bar{\mu} + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c} \leq \mu^*$ , nous en déduisons que  $\Lambda$  est une contraction, et d'après le théorème du point fixe de Banach l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $z^*$ . Par conséquent,  $x_{z^*}^{i+1} = (u_{z^*}^{i+1}, \varphi_{z^*}^{i+1}, \theta_{z^*}^{i+1}) \in X$  est la solution unique du problème  $(PV^i)$ .  $\square$

## 4 Analyse asymptotique

Pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , soit  $x^{i+1} = (u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})$  la solution unique de  $(PV^i)$ . Afin d'étudier la convergence de  $\{x^{i+1}\}_{0 \leq i \leq n-1}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , nous introduisons les fonctions

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

continues suivantes définies sur  $[t_i, t_{i+1}]$  par

$$u^n(t) = u^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta u^i, \quad \varphi^n(t) = \varphi^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \varphi^i, \quad \theta^n(t) = \theta^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \theta^i, \quad (\text{IV.54})$$

$$\bar{u}^n(t) = u^{i+1}, \quad \bar{\varphi}^n(t) = \varphi^{i+1}, \quad \bar{\theta}^n(t) = \theta^{i+1}, \quad \bar{g}^n(t) = g^{i+1}, \quad \forall t \in (t_i, t_{i+1}], \quad (\text{IV.55})$$

où la fonction  $g : [0, T] \rightarrow X$  est définie comme suit

$$g = (f, q_e, \tilde{\Theta}) = (f, q_e, \Delta t \Theta) \in C([0, T], X). \quad (\text{IV.56})$$

**Lemme IV.7** *Il existe deux constantes positives  $a_1$  et  $a_2$  telles que*

$$\|x^{i+1}\|_X \leq a_1 \sum_{j=0}^{i+1} \|g^j\|_X + a_2. \quad (\text{IV.57})$$

**Preuve.** Prenons (IV.36)-(IV.41), il découle de (IV.33)-(IV.35) que

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & - \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) \\ & \leq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X, \end{aligned} \quad (\text{IV.58})$$

où les fonctionnelles  $\tilde{\chi}, \tilde{\omega}, \tilde{\ell} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \chi((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta - \theta^{i+1}), \\ \tilde{\omega}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \omega((u^{i+1}, \theta^{i+1}), \eta - \theta^{i+1}), \\ \tilde{\ell}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \ell((u^{i+1}, \varphi^{i+1}), \xi - \varphi^{i+1}). \end{aligned}$$

En prenant  $y = 0$  dans l'inégalité (IV.58), on trouve

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, x^{i+1})_X \\ & \leq (g^{i+1}, x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & + \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) + \tilde{\omega}(x^{i+1}, x^{i+1}) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, x^{i+1}) \\ & + (\theta^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

Ensuite, nous utilisons (I.5), (IV.20) et (IV.40), et l'hypothèse  $(H_6)(c)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) &\leq \int_{\Gamma_C} \mu G(\cdot, |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})|) \|u_\tau^{i+1}\| da \\ &\leq c_0 \bar{\mu} g^* (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} \|x^{i+1}\|_X, \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

et

$$\Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) \leq \Delta t c_2 \bar{\mu} g^* S^* (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} \|x^{i+1}\|_X, \quad (\text{IV.61})$$

$$\Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, x^{i+1}) \leq \Delta t c_2 M_\psi L (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} \|x^{i+1}\|_X, \quad (\text{IV.62})$$

$$\tilde{\ell}(x^{i+1}, x^{i+1}) \leq c_1 M_{k_c} L (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} \|x^{i+1}\|_X. \quad (\text{IV.63})$$

Ensuite, nous combinons (IV.59)-(IV.63), (IV.43) et (IV.50) pour conclure que

$$\begin{aligned} \alpha \|x^{i+1}\|_X &\leq \|g^{i+1}\|_X + \sqrt{3} \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|x^i\|_X \\ &\quad + c_0 \bar{\mu} g^* (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} + \Delta t c_2 \bar{\mu} g^* S^* (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} \\ &\quad + c_2 \Delta t M_\psi L (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2} + c_1 M_{k_c} L (\text{meas}(\Gamma_C))^{1/2}. \end{aligned}$$

Rappelant que la condition  $(H_{14})$  implique la bornitude de  $x^0$ , alors on a (IV.57).  $\square$

**Lemme IV.8** *Pour  $\bar{\mu}$  et  $\Delta t$  suffisamment petits, il existe une constante  $a_3 > 0$  telle que*

$$\|\Delta x^i\|_X \leq a_3 \sum_{j=0}^i \|\Delta g^j\|_X. \quad (\text{IV.64})$$

**Preuve.** Écrivons (IV.58) au temps  $t_{i+1}$  pour  $y = x^i$ , et au temps  $t_i$  pour  $y = x^{i+1}$ , et combinons les deux inégalités obtenues, il vient

$$\begin{aligned} &(Ax^{i+1} - Ax^i, x^{i+1} - x^i)_X + (Bx^{i+1} - Bx^i, x^{i+1} - x^i)_X \\ &\leq (g^{i+1} - g^i, x^{i+1} - x^i)_X + J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) \\ &\quad - J(x^{i+1}, \Delta x^i) + \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, \Delta x^i) \\ &\quad - \Delta t \tilde{\omega}(x^i, \Delta x^i) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\ell}(x^i, \Delta x^i) + (\Delta \theta^{i-1}, \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i) - \mathcal{M}\varepsilon(u^{i-1}), \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla \varphi^i - \mathcal{P}\nabla \varphi^{i-1}, \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

En utilisant les propriétés de  $J$  et l'inégalité suivante

$$\left| |u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}| - |u_\tau^i - u_\tau^{i-1}| \right| \leq |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i|,$$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

on en déduit que

$$\begin{aligned} & J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) \\ &= j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i + \Delta u^{i-1}) - j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^{i-1}) \\ &\leq j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) = J(x^i, \Delta x^i), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & J(x^i, \Delta x^i) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) \\ &= j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), \Delta u^i) \\ &\leq c_0 \bar{\mu} L_1 c_R \max(c_0, c_1, c_2) \|\Delta x^i\|_X^2. \end{aligned} \tag{IV.66}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) \\ &\leq c_2 \bar{\mu} c_R S^* L_1 \max(c_0, c_1, c_2) \Delta t \|\Delta x^i\|_X^2 \\ &+ c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} g^* L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X, \end{aligned} \tag{IV.67}$$

$$\tilde{\omega}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\omega}(x^i, \Delta x^i) \leq (L_{k_c} L c_0 c_2 + M_{k_c} c_2^2) \|\Delta x^i\|_X^2, \tag{IV.68}$$

$$\tilde{\ell}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\ell}(x^i, \Delta x^i) \leq (L_\psi L c_0 c_1 + M_\psi c_1^2) \|\Delta x^i\|_X^2. \tag{IV.69}$$

Ensuite, nous utilisons les inégalités (IV.65) - (IV.69) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left[ (m - C - (L_\psi L c_0 c_1 + M_\psi c_1^2)) - \bar{\mu} \Delta t S^* L_1 c_R c_2 \max(c_0, c_1, c_2) \right. \\ & \left. - \bar{\mu} L_1 c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_2) - \bar{\mu} g^* L_2 c_0 c_2 - \Delta t (L_{k_c} L c_0 c_2 + M_{k_c} c_2^2) \right] \|\Delta x^i\|_X \\ & \leq \|\Delta g^i\|_X + (\bar{\mu} g^* L_2 c_0 c_2 + \sqrt{3} c_2 \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}})) \|\Delta x^{i-1}\|_X. \end{aligned}$$

En utilisant  $(H_{14})$ , nous obtenons que  $m - C - (L_\psi L c_0 c_1 + M_\psi c_1^2) > 0$ , et donc, pour un coefficient de frottement  $\bar{\mu}$  et  $\Delta t = \frac{T}{n}$  suffisamment petits, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= (m - C - (L_\psi L c_0 c_1 + M_\psi c_1^2)) - \bar{\mu} \Delta t g^* L_1 c_R c_2 \max(c_0, c_1, c_2) \\ & - \bar{\mu} L_1 c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_2) - \bar{\mu} g^* L_2 c_0 c_2 - \Delta t (L_{k_c} L c_0 c_2 + M_{k_c} c_2^2) > 0. \end{aligned}$$

En combinant avec la bornitude des conditions initiales, on obtient (IV.64).  $\square$

**Proposition IV.2** *À partir des suites  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$ , nous pouvons extraire des sous-suites,*

encore notées  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$  telles que

$$\begin{aligned} u^n &\rightarrow u && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \varphi^n &\rightarrow \varphi && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \theta^n &\rightarrow \theta && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q), \end{aligned} \tag{IV.70}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &\rightarrow \dot{u} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \dot{\varphi}^n &\rightarrow \dot{\varphi} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \dot{\theta}^n &\rightarrow \dot{\theta} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q). \end{aligned} \tag{IV.71}$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Proposition IV.3** *Il existe des sous-suites de  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$ , encore notées  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$ , telles que, pour presque tout les  $t \in [0, T]$ , on a*

$$\begin{aligned} \bar{u}^n(t) &\rightarrow u(t) && \text{faiblement dans } V, \\ \bar{\varphi}^n(t) &\rightarrow \varphi(t) && \text{faiblement dans } W, \\ \bar{\theta}^n(t) &\rightarrow \theta(t) && \text{faiblement dans } Q. \end{aligned} \tag{IV.72}$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Remarque.** Soient  $\bar{f}^n(t) = f^{i+1}$ ,  $\bar{q}_e^n(t) = q_e^{i+1}$  et  $\bar{\Theta}^n(t) = \Theta^{i+1}$  sur  $[t_i, t_{i+1}]$ , alors, sous l'hypothèse  $(H_8)$ , on a  $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ ,  $q_e \in W^{1,\infty}(0, T; W)$  et  $\Theta \in W^{1,\infty}(0, T; Q)$ . De plus, les résultats de convergence suivants sont valables

$$\begin{aligned} \bar{f}^n &\rightarrow f && \text{forttement dans } L^2(0, T; V), \\ \bar{q}_e^n &\rightarrow q_e && \text{forttement dans } L^2(0, T; W), \\ \bar{\Theta}^n &\rightarrow \Theta && \text{forttement dans } L^2(0, T; Q). \end{aligned} \tag{IV.73}$$

**Proposition IV.4** *Le triplet  $(u, \varphi, \theta) \in V \times W \times Q$  est la solution du problème (PV).*

**Preuve.** Si nous substituons  $v$  par  $u^i + v \Delta t$  dans (IV.29) et divisons l'inégalité résultante par  $\Delta t$ , le problème  $(PV^i)$  sera écrit pour tous  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

comme suit

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H \\
& - (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H + j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) \\
& - j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) \\
& \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V + \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle \\
& (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H \\
& + \ell((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)), \xi(t)) = (\bar{q}_e^n(t), \xi(t))_W \\
& (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H + (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} \\
& - (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} - \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) \\
& + \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) = (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés des inégalités précédentes sur  $[0, T]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left( \mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)) \right)_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T \left( \mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)) \right)_H dt \\
& - \int_0^T \left( \mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)) \right)_H dt \\
& + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \\
& \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle dt \\
& \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
& + \int_0^T \ell((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)), \xi(t)) dt = \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt \\
& \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt \\
& + \int_0^T \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) dt = \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$



En sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) dt \\
 & + \int_0^T (\frac{d}{dt} \bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt} \varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt + \int_0^T \ell((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)), \xi(t)) dt \\
 & - \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt \\
 & \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V + \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt \\
 & + \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle dt.
 \end{aligned} \tag{IV.74}$$

Pour compléter la preuve de la proposition IV.4, nous avons besoin des lemmes suivants.

**Lemme IV.9** *Pour  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt, \tag{IV.75}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt \\
 & = \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt,
 \end{aligned} \tag{IV.76}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt \\
 & = \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt,
 \end{aligned} \tag{IV.77}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{IV.78}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{IV.79}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{IV.80}$$

**Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\frac{d}{dt} \theta^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{IV.81})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt, \quad (\text{IV.82})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{IV.83})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt} \varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{IV.84})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) dt = \int_0^T \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt, \quad (\text{IV.85})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \ell((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)), \xi(t)) dt = \int_0^T \ell((u(t), \varphi(t)), \xi(t)) dt, \quad (\text{IV.86})$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt \\ &= \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt, \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt} u^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \quad (\text{IV.88})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt = \int_0^T (q_e(t), \xi)_W dt, \quad (\text{IV.89})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \quad (\text{IV.90})$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Lemme IV.10** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt \geq \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{IV.91})$$

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) dt \\ & \geq \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt, \end{aligned} \quad (\text{IV.92})$$

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \chi((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); \frac{d}{dt} u^n(t); \eta(t)) dt \\ & \geq \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt. \end{aligned} \quad (\text{IV.93})$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

Nous revenons à la preuve de proposition IV.4. En passant à limite dans (IV.74), il vient que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt \\
 & + \int_0^T \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt + \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \tag{IV.94} \\
 & - \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \int_0^T \ell((u(t), \varphi(t)), \xi(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt \\
 & + \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt.
 \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques que dans la preuve du lemme (IV.1), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt, \\
 & \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt + \int_0^T \ell((u(t), \varphi(t)), \xi(t)) dt \\
 & = \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt, \\
 & \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & - \int_0^T \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \int_0^T \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt \\
 & = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

## Chapitre IV. Problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement en thermo-piézoélectricité

Posons dans les trois inégalités précédentes

$$v(t) = \begin{cases} v & \text{pour } t \in (s, s + \lambda) \\ \dot{u}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \quad \xi(t) = \xi, \quad \eta(t) = \eta, \quad \forall t \in (s, s + \lambda).$$

On obtient alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v) dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \\ & \geq \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (f(t), v - \dot{u}(t))_V dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt, \\ & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_H dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P}\theta(t), \nabla \xi)_H dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \ell((u(t), \varphi(t)), \xi(t)) dt \\ & = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (q_e(t), \xi)_W dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\dot{\theta}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta)_H dt \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta)_{L^2(\Omega)} dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \chi((u(t), \varphi(t), \theta(t)); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt \\ & = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\Theta(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Passant à la limite en respectant  $s$  dans les inégalités ci-dessus, nous concluons en utilisant le théorème de Lebesgue que  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait (IV.24), (IV.26) et (IV.27). De plus, l'inégalité variationnelle (IV.29) conduit à

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \\ & + j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); v - u^{i+1}) \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1. \end{aligned}$$

De (IV.55), nous intégrons l'inégalité précédente pour trouver que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_H dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_H dt \\
& + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); v(t) - \bar{u}^n(t)) dt \\
& \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \bar{u}^n(t))_V dt,
\end{aligned}$$

pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$  tel que  $v(t) \in K_1$  p.p.  $t \in [0, T]$ . Passant à la limite, il vient que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t) - u(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t) - u(t)))_H dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t) - u(t)))_H dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)); v(t) - u(t)) dt \\
& \geq \int_0^T (f(t), v(t) - u(t))_V dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, on en déduit que le triplet  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v - u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - u))_H - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v - u))_H \\
& + j((u, \varphi, \theta); v - u) \geq (f, v - u)_V,
\end{aligned} \tag{IV.95}$$

pour tout  $v \in K_1$  p.p.  $t \in [0, T]$ . Ensuite, nous appliquons la formule Green à l'inégalité (IV.95), comme indiqué dans [21], pour obtenir que le triplet  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait (IV.25), et par conséquent,  $(u, \varphi, \theta)$  est une solution du problème (PV).  $\square$



---

---

# Chapitre V

---

## Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

Dans ce chapitre, nous présentons l'existence d'une solution faible pour un problème thermo-piézoélectrique quasi-statique qui décrit un contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation conductrice thermiquement et électriquement. Nous modélisons le comportement du matériau avec une loi de comportement thermo-électro-élastique linéaire et le contact avec une condition de compliance normale et une loi de frottement de type sec incluant les conditions de conductivité électrique et thermique dans lesquelles la chaleur générée par frottement au cours du processus est prise en compte. Le modèle se présente sous forme d'un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. L'existence d'une solution faible est obtenue à partir d'une inégalité quasi-variationnelle elliptique, d'une discrétisation temporelle et d'un argument de point fixe de Banach. Notons enfin que le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis pour publication dans le journal "Afrika Mathematica springer".

### 1 Modèle mathématique

Dans cette section, on suppose que le contact est en compliance normale, avec frottement de type sec (II.16), et donc le problème mécanique considéré se formule comme suit :

**Problème (P).** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compli-ance normale

---

$\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\sigma = \mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathcal{E}^* E(\varphi) - \mathcal{M} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.1})$$

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \mathcal{P} \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.2})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.3})$$

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.4})$$

$$\text{div} D = \phi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.5})$$

$$\dot{\theta} + \text{div} q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.6})$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0, T), \quad (\text{V.7})$$

$$\sigma \nu = f_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{V.8})$$

$$\sigma_\nu(u) = -p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{V.9})$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g) \\ \|\sigma_\tau\| < p_\tau(u_\nu - g) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = p_\tau(u_\nu - g) \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+), \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{V.10})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T), \quad (\text{V.11})$$

$$D \cdot \nu = \phi_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T), \quad (\text{V.12})$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{V.13})$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{V.14})$$

$$q \cdot \nu = -\mu p_\nu(u_\nu - g) S_c(\cdot, \|\dot{u}_\tau\|) + k_c(u_\nu - g) \phi_L(\theta - \theta_F) \quad \text{sur} \quad \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{V.15})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (\text{V.16})$$

## 2 Formulation variationnelle du problème

Afin d'étudier le problème  $(P)$ , nous utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les fonctions  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $q_e : [0, T] \rightarrow W$ ,  $\Theta : [0, T] \rightarrow Q$  telles que

$$(f, v)_V = \int_\Omega f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N v \, da, \quad \forall v \in V, \quad (\text{V.17})$$

$$(q_e, \xi)_W = \int_\Omega \phi_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} \phi_b \xi \, da, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{V.18})$$

$$(\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega q_0 \eta \, dx, \quad \forall \eta \in Q, \quad (\text{V.19})$$



## V.2 Formulation variationnelle du problème

les fonctionnelles  $j : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\chi : V^2 \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega : V \times Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $l : V \times W \times W$  tels que

$$j(u; v) = \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da, \quad (\text{V.20})$$

$$\chi(u; v; \eta) = \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g) S_c(\cdot, \|v_\tau\|) \eta da, \quad (\text{V.21})$$

$$\omega((u, \theta); \eta) = \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu - g) \phi_L(\theta - \theta_F) \eta da, \quad \forall \theta \in Q, \forall \eta \in Q, \quad (\text{V.22})$$

$$l((u, \varphi); \xi) = \int_{\Gamma_C} \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \xi da, \quad \forall \theta \in Q, \forall \eta \in Q, \quad (\text{V.23})$$

pour tout  $(u, \varphi, \theta) \in X$ ,  $v \in V$ . Considérons l'hypothèse suivante sur les données initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in V \text{ et } \theta_0 \in Q \text{ tels que pour tout } (v, \xi) \in V \times W, \text{ on a} \\ (\mathfrak{F} \varepsilon(u_0), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_0, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{M} \theta_0, \varepsilon(v))_H + j(u_0; v) \geq (f(0), v)_V, \\ (\beta \nabla \varphi_0, \nabla \xi)_H = (\mathcal{E} \varepsilon(u_0), \nabla \xi)_H + (\mathcal{P} \theta_0, \nabla \xi)_H + (q_e(0), \xi)_W - l((u_0, \varphi_0); \xi), \\ \text{et il existe } T_0 \in L^2(\Omega) \text{ telle que} \\ (\mathcal{K} \nabla \theta_0, \nabla \eta)_H + \omega(u_0, \theta_0, \eta) - (\Theta(0), \eta)_{L^2(\Omega)} = (T_0, \eta)_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \quad (\text{V.24})$$

Selon ces notations et par une procédure standard basée sur les formules de Green, nous pouvons énoncer la formulation variationnelle du problème (P), sous la forme suivante :

**Problème (PV).** *Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  et la température  $\theta : [0, T] \rightarrow Q$  tels que*

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - \dot{u}))_H - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v - \dot{u}))_H + j(u, v) \\ & - j(u, \dot{u}) \geq (f, v - \dot{u})_V, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

$$(\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H + l((u, \varphi); \xi) = (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{V.26})$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & - \chi(u; \dot{u}; \eta) + \omega(u, \theta; \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{V.28})$$

Le résultat principal que nous prouverons dans les sections suivantes est le suivant :

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

**Théorème V.1** *Supposons  $(H_1)$ - $(H_9)$  et (V.24) sont vérifiées, alors s'il existe  $L^* > 0$  telle que  $\bar{\mu} + L_\tau + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c} \leq L^*$ , alors le problème (PV) a au moins une solution.*

### 3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

Le problème (PV) peut être discrétisé en temps par un schéma implicite. Soit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  une partition uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de pas  $\Delta t = \frac{T}{n}$  ( $t_i = i\Delta t$ ). Pour toute fonction  $\omega$ , on note  $\omega^i$  l'approximation de  $\omega$  à l'instant  $t_i$  et par  $\Delta\omega^i$  la différence  $\omega^{i+1} - \omega^i$ . Pour une fonction continue  $\omega(t)$ , nous utilisons la notation  $\omega^i = \omega(t_i)$ . Nous considérons une suite de problèmes incrémentales  $(PV^i)$  définie pour  $u(\cdot, 0) = u_0$ ,  $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$  et  $\theta(\cdot, 0) = \theta_0$  comme suit

**Problème  $(PV^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u^{i+1} \in V$ , le potentiel électrique  $\varphi^{i+1} \in W$  et la température  $\theta^{i+1} \in Q$  tels que :*

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \\ & + j(u^{i+1}, v - u^i) - j(u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

$$\begin{aligned} & (\beta \nabla \varphi^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta^{i+1}, \nabla \xi)_H + l((u^{i+1}, \varphi^{i+1}); \xi) \\ & = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

$$\begin{aligned} & (\theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta^{i+1}, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & - \Delta t \chi(u^{i+1}; \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta) + \Delta t \omega(u^{i+1}, \theta^{i+1}, \eta) \\ & = \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Pour tout  $z_1, z_2, z_3 \in L^2(\Gamma_C)$ , nous définissons les fonctions suivantes

$$\chi_{z_1}(\eta) = \int_{\Gamma_C} z_1 \eta \, da, \quad \omega_{z_2}(\eta) = \int_{\Gamma_C} z_2 \eta \, da, \quad \ell_{z_3}(\xi) = \int_{\Gamma_C} z_3 \xi \, da, \quad (\text{V.32})$$

pour tout  $\eta \in Q$  et  $\xi \in W$ . Ensuite, nous construisons le problème intermédiaire suivant dans lequel  $z = (z_1, z_2, z_3)$  est supposé connu.

### V.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

**Problème** ( $PV_z^i$ ). Trouver le champ des déplacements  $u_z^{i+1} \in V$ , le potentiel électrique  $\varphi_z^{i+1} \in W$  et la température  $\theta_z^{i+1} \in Q$  tels que :

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u_z^{i+1}), \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta_z^{i+1}, \varepsilon(v - u_z^{i+1}))_H \\ & + j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), v - u^i) - j((u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}), u_z^{i+1} - u^i) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u_z^{i+1})_V, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

$$(\beta \nabla \varphi_z^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_z^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta_z^{i+1}, \nabla \xi)_H + \ell_{z_3}(\xi) = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{V.34})$$

$$\begin{aligned} & (\theta_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta_z^{i+1}, \nabla \eta)_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u_z^{i+1}), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi_z^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ & + \Delta t \omega_{z_2}(\eta) - \Delta t \chi_{z_1}(\eta) \\ & = \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

Nous considérons un élément  $\Theta_z^{i+1}$  de  $Q$  défini pour tout  $\eta \in Q$  par

$$\begin{aligned} (\Theta_z^{i+1}, \eta)_Q &= (\Delta t \Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &+ \Delta t \chi_{z_1}(\eta) - \Delta t \omega_{z_2}(\eta). \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème ( $PV_z^i$ ), soient  $X = V \times W \times Q$  et  $Y = L^2(\Gamma_C)^d \times (L^2(\Gamma_C))^2$  munis par les produits scalaires suivants et les normes euclidiennes associés  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$  tels que

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \xi)_W + (\theta, \eta)_Q, \quad (\text{V.36})$$

$$(z, z')_Y = (z_1, z'_1)_{L^2(\Gamma_C)^d} + (z_2, z'_2)_{L^2(\Gamma_C)} + (z_3, z'_3)_{L^2(\Gamma_C)}, \quad (\text{V.37})$$

pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$ ,  $y = (v, \xi, \eta) \in X$  et  $z = (z_1, z_2, z_3)$ ,  $z' = (z'_1, z'_2, z'_3) \in Y$ .

Ensuite, nous définissons les opérateurs  $A : X \rightarrow X$  et  $B : X \rightarrow X$  donnés par

$$\begin{aligned} (Ax, y)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + (\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H \\ &+ (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H, \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

$$\begin{aligned} (Bx, y)_X &= -(\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \nabla \varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &- (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), \quad y = (v, \xi, \eta) \in X, \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

---

la fonctionnelle  $J : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$J(x, y) = j(u; v), \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), \quad y = (v, \xi, \eta) \in X, \quad (\text{V.40})$$

et l'élément  $f_z^{i+1}$  de  $X$  donné par

$$f_z^{i+1} = (f^{i+1}, q_e^{i+1} - \ell_{z3}(\xi), \Theta_z^{i+1}). \quad (\text{V.41})$$

Par conséquent, nous avons le lemme suivant.

**Lemme V.1** Le problème  $(PV_z^i)$  est équivalent au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in X \text{ telle que :} \\ (Ax_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + (Bx_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X + J(x_z^{i+1}, y - x^i) \\ - J(x_z^{i+1}, x_z^{i+1} - x^i) \geq (f_z^{i+1}, y - x_z^{i+1})_X, \quad (\forall y \in X). \end{array} \right. \quad (\text{V.42})$$

**Preuve.** Cela peut être fait avec les mêmes techniques que dans [10]. □

En utilisant le lemme précédent, nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Lemme V.2** Pour tout  $z$  de  $(L^2(\Gamma_C))^3$ , le problème  $(PV_z^i)$  admet une solution unique

$$x_z^{i+1} = (u_z^{i+1}, \varphi_z^{i+1}, \theta_z^{i+1}) \in V \times W \times Q.$$

Afin de prouver ce lemme, nous utilisons le théorème I.11 en prenant en compte l'inégalité mathématique  $c_0^2(L_\nu + L_\tau) + 2M_{\mathcal{P}} \leq m$ . Nous commençons par étudier les propriétés des opérateurs  $A$ ,  $B$  et les fonctionnelles  $J$  données par (V.40)-(V.20).

**Lemme V.3** L'opérateur  $A : X \rightarrow X$  est fortement monotone et Lipschitz continu.

**Preuve.** Nous considérons  $x_1 = (u_1, \varphi_1, \theta_1)$  et  $x_2 = (u_2, \varphi_2, \theta_2)$  de  $X$ . D'après (V.38), on a

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u_1) - \mathfrak{F} \varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\beta \nabla \varphi_1 - \beta \nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_1 - \Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_2, \nabla \theta_1 - \nabla \theta_2)_H \\ &+ (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1 - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2, \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_1) - \mathcal{E} \varepsilon(u_2), \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H. \end{aligned}$$

### V.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

---

Comme  $(\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u))_H = (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \varphi)_H$ , il vient que

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u_1) - \mathfrak{F} \varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\beta \nabla \varphi_1 - \beta \nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)_H + (\Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_1 - \Delta t \mathcal{K} \nabla \theta_2, \nabla \theta_1 - \nabla \theta_2)_H. \end{aligned}$$

Combiné avec les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$ , donc il existe  $m > 0$  dépendant de  $\mathfrak{F}$ ,  $\beta$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \left( \|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|_Q^2 \right).$$

Ainsi, il découle de (V.36) que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \|x_1 - x_2\|_X^2. \quad (\text{V.43})$$

De la même manière, les hypothèses  $H_1$  et  $H_3$  impliquent qu'il existe  $c_4 > 0$  telle que

$$\begin{aligned} (Ax_1 - Ax_2, y)_X &\leq c_4 \left( \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V + \|u_1 - u_2\|_V \|\xi\|_W \right. \\ &\quad \left. + \|\theta_1 - \theta_2\|_Q \|\eta\|_Q + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\xi\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|v\|_V \right). \end{aligned}$$

Alors, on trouve que

$$(Ax_1 - Ax_2, y)_X \leq 5 c_4 \|x_1 - x_2\|_X \|y\|_X, \quad \forall y \in X.$$

Si nous mettons  $y = Ax_1 - Ax_2$  et  $M = 5 c_4$ , alors

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq M \|x_1 - x_2\|_X. \quad (\text{V.44})$$

Par suite, le lemme V.3 est établi. □

Rappelons que la fonctionnelle  $J$  définie par (V.40) et (V.20) satisfait  $(h_6)$ , et on a

**Lemme V.4** *La fonctionnelle  $J$  vérifie les hypothèses  $(J_1)$ ,  $(J_2)$  et  $(J_3)$ .*

**Preuve.** La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [11]. □

**Lemme V.5** *Si  $(H_6)$  est satisfaite, alors la fonctionnelle  $J$  vérifie l'inégalité suivante*

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq \alpha \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{V.45})$$

**Preuve.** La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [11] avec  $\alpha = c_0^2(L_\nu + L_\tau)$ . □

**Lemme V.6** *L'opérateur  $B : X \rightarrow X$  satisfait les conditions  $(h_2)$ ,  $(h_3)$  et  $(h_5)$ .*

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

---

**Preuve.** En utilisant les hypothèses sur  $\mathcal{P}$  (voir  $(H_2)$ ), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H + (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} &= 2(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H \leq 2M_{\mathcal{P}} \|\nabla\varphi\|_H \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2M_{\mathcal{P}} \|\varphi\|_W \|\theta\|_Q \leq C \|x\|_X^2, \end{aligned}$$

où  $C = 2M_{\mathcal{P}}$ . Alors

$$-(\mathcal{P}\theta, \nabla\varphi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi, \theta)_{L^2(\Omega)} \geq -C \|x\|_X^2. \quad (\text{V.46})$$

Combiné avec  $(\mathcal{M}\theta, \varepsilon(u))_H = (\mathcal{M}\varepsilon(u), \theta)_{L^2(\Omega)}$  et  $(\theta, \theta)_{L^2(\Omega)} \geq 0$ , nous obtenons

$$(Bx, x)_X \geq -C \|x\|_X^2, \quad \forall x \in X, \quad (\text{V.47})$$

et alors la condition  $(h_2)$  est satisfaite. Ensuite, soit  $x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n)$  une la suite de  $X$  telle que

$$x_n = (u_n, \varphi_n, \theta_n) \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X.$$

Il découle de (V.37) et (V.40) qu'il existe une constante  $c_6 \geq 0$  telle que

$$\begin{aligned} (Bx_n - Bx, y)_X &= -(\mathcal{P}\theta_n - \mathcal{P}\theta, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\varphi_n - \mathcal{P}\nabla\varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta_n - \theta, \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\mathcal{M}\theta_n - \mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u_n) - \mathcal{M}\varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_6 \|x_n - x\|_X \|y\|_X, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X. \end{aligned}$$

Posons  $y = Bx_n - Bx$  dans l'inégalité précédente, nous avons

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq c_6 \|x_n - x\|_X. \quad (\text{V.48})$$

D'autre part, il vient de (V.43) où  $x_z^{i+1} \in X$  est encore notée  $x \in X$ , que

$$(Ax_n - Ax, x_n - x)_X + (Bx_n - Bx, x_n - x)_X \leq J(x, x_n) - J(x, x) + J(x_n, x) - J(x_n, x_n).$$

En utilisant (V.44), (V.46) et (V.48), on obtient

$$(m - C) \|x_n - x\|_X^2 \leq (L_\nu + L_\tau) \|x_n - x\|_Y^2,$$

et comme  $\alpha \leq (m - C)$ , on a  $\alpha \|x_n - x\|_X^2 \leq (L_\nu + L_\tau) \|x_n - x\|_Y^2$ , alors

$$\|x_n - x\|_X \leq \sqrt{\frac{(L_\nu + L_\tau)}{\alpha}} \|x_n - x\|_Y \leq \frac{1}{c_0} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{V.49})$$

### V.3 Résultat d'existence de la solution du problème discret

---

En combinant (V.48) et (V.48), nous déduisons que

$$\|Bx_n - Bx\|_X \leq \frac{1}{c_0} \|x_n - x\|_Y. \quad (\text{V.50})$$

Comme l'opérateur trace  $\gamma : X \rightarrow Y$  est compact, la convergence faible  $x_n \rightharpoonup x$  conduit à la forte convergence  $x_n \rightarrow x$  dans  $Y$ . Nous concluons donc que  $Bx_n \rightarrow Bx$  dans  $X$  fortement pour une sous-suite et que cela prouve la condition  $(h_3)$ . Enfin, pour tout  $x_1 = (u_1, \varphi_1, \theta_1)$ ,  $x_2 = (u_2, \varphi_2, \theta_2)$  de  $X$ , (V.38) implique que

$$\begin{aligned} (Bx_1 - Bx_2, x_2 - x_1)_X &= 2(\mathcal{P}\theta_1 - \mathcal{P}\theta_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H \\ &\leq C \|x_1 - x_2\|_X \\ &\leq \beta \|x_1 - x_2\|_X, \end{aligned}$$

où  $\beta = C > 0$ , et comme  $\alpha + C \leq m$ , alors  $0 \leq \beta \leq m - \alpha$ , et ainsi  $(h_5)$  est satisfaite.

Enfin, en utilisant les lemmes V.1 - V.6 et le théorème I.11 pour déduire que le problème  $PV_z^i$  admet une solution unique et il est facile de montrer que cette solution est Lipschitz continue par rapport à  $z^{i+1} \in L^2(\Gamma_C)^3$ .

Dans l'étape suivante, nous considérons l'opérateur suivant

$$\Lambda : L^2(\Gamma_C) \times L^2(\Gamma_C) \times L^2(\Gamma_C) \rightarrow L^2(\Gamma_C) \times L^2(\Gamma_C) \times L^2(\Gamma_C),$$

tel que pour tout  $z = (z_1, z_2, z_3) \in L^2(\Gamma_C)^3$ , on a

$$\Lambda z = \left[ p_\tau(u_{z_1\nu}^{i+1} - g) S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|); \psi(u_{z_2\nu} - g) \phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F); k_c(u_{z_3\nu} - g) \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) \right].$$

Soit  $I = \|\Lambda z_1^{i+1} - \Lambda z_2^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_C)^3}$ , on a

$$\begin{aligned} I &\leq \left\| \left[ p_\tau(u_{z_1\nu}^{i+1} - g) - p_\tau(u_{z_1'\nu}^{i+1} - g) \right] S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\quad + \left\| \mu p_\nu(u_{z_1'\nu}^{i+1} - g) \left[ S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1\tau}^{i+1} - u^i\|) - S_C(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_{z_1'\tau}^{i+1} - u^i\|) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\quad + \left\| \left[ \psi(u_{z_2\nu}^{i+1} - g) - \psi(u_{z_2'\nu}^{i+1} - g) \right] \phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\quad + \left\| \psi(u_{z_2'\nu}^{i+1} - g) \left[ \phi_L(\varphi_{z_2}^{i+1} - \varphi_F) - \phi_L(\varphi_{z_2'}^{i+1} - \varphi_F) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \end{aligned}$$

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

$$\begin{aligned}
& + \left\| \left[ k_c(u_{z_3\nu}^{i+1} - g) - k_c(u_{z_3\nu}^{i+1} - g) \right] \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\
& + \left\| k_c(u_{z_3\nu}^{i+1} - g) \left[ \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) - \phi_L(\theta_{z_3}^{i+1} - \theta_F) \right] \right\|_{L^2(\Gamma_C)}.
\end{aligned}$$

En utilisant  $(H_4)$ - $(H_8)$  et le fait que  $x_z^{i+1}$  est Lipschitz continue en  $z^{i+1}$ , il existe  $c_7 > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
& \left\| \Lambda z - \Lambda z' \right\|_{L^2(\Gamma_C)^3} \\
& \leq c(\bar{\mu} + L_\tau) \left\| z_1 - z'_1 \right\|_{L^2(\Gamma_C)} + (L_\psi L + M_\psi) \left\| z_2 - z'_2 \right\|_{L^2(\Gamma_C)} + (L_{k_c} L + M_{k_c}) \left\| z_3 - z'_3 \right\|_{L^2(\Gamma_C)} \\
& \leq c_7(\bar{\mu} + L_\tau + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c}) \left\| z - z' \right\|_{L^2(\Gamma_C)^3}.
\end{aligned}$$

On pose  $L^* = \frac{1}{c_7}$ , alors si  $\bar{\mu} + L_\tau + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c} \leq L^*$ , alors  $\Lambda$  est une contraction. Et d'après le théorème de point fixe de Banach,  $\Lambda$  admet une unique point fixe  $z^*$  ( $\Lambda z^* = z^*$ ) et donc  $x_{z^*}^{i+1} = (u_{z^*}^{i+1}, \varphi_{z^*}^{i+1}, \theta_{z^*}^{i+1}) \in X$  est une solution du problème  $(PV^i)$ .

## 4 Étude de la convergence

Pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , soit  $x^{i+1} = (u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})$  l'unique solution du problème  $(PV^i)$ . Afin d'étudier la convergence de  $\{x^{i+1}\}_{i=0, \dots, n-1}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , nous introduisons les fonctions continues ci-dessous définies sur  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) par

$$u^n(t) = u^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta u^i, \quad \varphi^n(t) = \varphi^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \varphi^i, \quad \theta^n(t) = \theta^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \theta^i, \quad (\text{V.51})$$

et les fonctions constantes par morceaux définies sur  $(t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) comme suit

$$\bar{u}^n(t) = u^{i+1}, \quad \bar{\varphi}^n(t) = \varphi^{i+1}, \quad \bar{\theta}^n(t) = \theta^{i+1}, \quad \bar{g}^n(t) = g^{i+1}, \quad (\text{V.52})$$

où  $g : [0, T] \rightarrow X$  donnée par

$$g = (f, q_e, \tilde{\Theta}) = (f, q_e, \Delta t \Theta) \in C([0, T], X). \quad (\text{V.53})$$



**Lemme V.7** *Il existe  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 \geq 0$  telles que*

$$\|x^{i+1}\|_X \leq k_1 \sum_{j=0}^{i+1} \|g^j\|_X + k_2. \quad (\text{V.54})$$

**Preuve.** Prenons (V.39)-(V.41) et (V.30)-(V.32), donc pour tout  $y = (v, \xi, \eta) \in X$ , on a

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & - \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) \\ & \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & \quad - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

où les fonctionnelles  $\tilde{\chi}$ ,  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\ell}$  sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \chi(u^{i+1}; \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \eta - \theta^{i+1}), \\ \tilde{\omega}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \omega((u^{i+1}, \theta^{i+1}), \eta - \theta^{i+1}), \\ \tilde{\ell}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) &= \ell((u^{i+1}, \varphi^{i+1}), \xi - \varphi^{i+1}). \end{aligned}$$

Posons  $y = 0$  dans (V.55), on trouve

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, x^{i+1})_X \leq (g^{i+1}, x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & \quad + \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, x^{i+1}) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, x^{i+1}) \\ & \quad + (\theta^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

En utilisant (VII.35), (V.20), (V.41) et l'hypothèse  $(H_6)(c)$ , on obtient

$$\begin{aligned} J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) &= j(u^{i+1}, u^i) - j(u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \\ &\leq c_0^2 (L_\nu + L_\tau) \|x^{i+1}\|_X^2. \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

Comme  $\tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) = \chi(u^{i+1}; \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \theta^{i+1}) = \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu^{i+1}) S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) \theta^{i+1} da$ , alors

$$\Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, x^{i+1}) \leq \Delta t c_2 c_0 \bar{\mu} L_\nu S^* \|x^{i+1}\|_X^2, \quad (\text{V.58})$$

**Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale**

---

$$\begin{aligned}
\Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, x^{i+1}) &= \Delta t \omega((u^{i+1}, \theta^{i+1}), \theta^{i+1}) \\
&= \Delta t \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu^{i+1}) \phi_L(\theta^{i+1} - \theta_F) \theta^{i+1} da \\
&\leq \Delta t c_2 L M_{k_c} \|x^{i+1}\|_X,
\end{aligned} \tag{V.59}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}(x^{i+1}, x^{i+1}) &= \ell((u^{i+1}, \varphi^{i+1}), \varphi^{i+1}) \\
&= \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu^{i+1} - g) \phi_L(\theta^{i+1} - \theta_F) \varphi^{i+1} da \\
&\leq M_{k_c} L (\text{mes}(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}} c_1 \|x^{i+1}\|_X.
\end{aligned} \tag{V.60}$$

Combinons (V.44), (V.48) et (V.57)-(V.60), on trouve que

$$\begin{aligned}
(m - C) \|x^{i+1}\|_X^2 &\leq \|g^{i+1}\|_X \|x^{i+1}\|_X + M_{k_c} L (\text{mes}(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}} c_1 \|x^{i+1}\|_X \\
&\quad + \Delta t c_2 L M_{k_c} \|x^{i+1}\|_X + c_0^2 (L_\nu + L_\tau) \|x^{i+1}\|_X^2 + \Delta t c_2 c_0 \bar{\mu} L_\nu S^* \|x^{i+1}\|_X^2 \\
&\quad + \sqrt{3} \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|x^i\|_X \|x^{i+1}\|_X,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \left[ [(m - C) - c_0^2 (L_\nu + L_\tau)] - \bar{\mu} \Delta t c_2 c_0 L_\nu S^* \right] \|x^{i+1}\|_X \\
& \leq \|g^{i+1}\|_X + [\sqrt{3} \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) + M_{k_c} L (\text{mes}(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}} c_1 + \Delta t c_2 L M_{k_c}] \|x^i\|_X.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le lemme V.7 est établi.  $\square$

**Lemme V.8** *Il existe  $k_3 \geq 0$  telle que*

$$\|\Delta x^i\|_X \leq k_3 \sum_{j=0}^i \|\Delta g^j\|_X. \tag{V.61}$$

**Preuve.** En prenant (VII.5) au temps  $t_{i+1}$  et  $t_i$ , on trouve que pour tout  $y \in X$

$$\begin{aligned}
& (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (Bx^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\
& \quad - \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) + \tilde{\ell}(x^{i+1}, y - x^{i+1}) \\
& \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{V.62}$$

et

$$\begin{aligned}
& (Ax^i, y - x^i)_X + (Bx^i, y - x^i)_X + J(x^i, y - x^{i-1}) - J(x^i, x^i - x^{i-1}) \\
& \quad - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, y - x^i) + \Delta t \tilde{\omega}(x^i, y - x^i) + \tilde{\ell}(x^i, y - x^i) \\
& \geq (g^i, y - x^i)_X + (\theta^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^{i-1}), \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{V.63}$$

Posons  $y = x^i$  dans (V.62) et  $y = x^{i+1}$  dans (V.63), on trouve

$$\begin{aligned}
& (Ax^{i+1} - Ax^i, x^{i+1} - x^i)_X + (Bx^{i+1} - Bx^i, x^{i+1} - x^i)_X \\
& \leq (g^{i+1} - g^i, x^{i+1} - x^i)_X + J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) \\
& \quad + \Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) + \Delta t \tilde{\omega}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \Delta t \tilde{\omega}(x^i, \Delta x^i) \\
& \quad + \tilde{\ell}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\ell}(x^i, \Delta x^i) + (\Delta \theta^{i-1}, \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i) - \mathcal{M} \varepsilon(u^{i-1}), \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i - \mathcal{P} \nabla \varphi^{i-1}, \Delta \theta^i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{V.64}$$

Utilisons les propriétés de  $J$  et  $\left| |u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}| - |u_\tau^i - u_\tau^{i-1}| \right| \leq |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i|$  on en déduit que

$$\begin{aligned}
J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) &= j(u^i, \Delta u^i + \Delta u^{i-1}) - j(u^i, \Delta u^{i-1}) \\
&\leq j(u^i, \Delta u^i) \\
&\leq J(x^i, \Delta x^i),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J(x^i, \Delta x^i) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) &= j((u^i, \Delta u^i) - j(u^{i+1}, \Delta u^i)) \\
&= \int_{\Gamma_C} [p_\nu(u_\nu^i - g) - p_\nu(u_\nu^{i+1} - g)] \Delta u_\nu^i da \\
& \quad + \int_{\Gamma_C} [p_\tau(u_\tau^i - g) - p_\tau(u_\tau^{i+1} - g)] \|\Delta u_\tau^i\| da \\
&\leq c_0^2 (L_\nu + L_\tau) \|\Delta x^i\|_X^2.
\end{aligned} \tag{V.65}$$

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) &= \chi(u^{i+1}; \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}; \Delta \theta^i) - \chi(u^i; \frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t}; \Delta \theta^i) \\
&= \int_{\Gamma_C} \left[ p_\tau(u^{i+1} - g) - p_\tau(u^i - g) \right] S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) \Delta \theta^i da \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u^i - g) \left[ S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^i\|) - S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|u_\tau^i - u_\tau^{i-1}\|) \right] \Delta \theta^i da \\
&\leq c_2 S^* L_\tau c_0 \|\Delta x^i\|_X^2 \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u^i - g) \left[ S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|\Delta u_\tau^i\|) - S_c(\cdot, \frac{1}{\Delta t} \|\Delta u_\tau^{i-1}\|) \right] \Delta \theta^i da \\
&\leq c_2 S^* L_\tau c_0 \|\Delta x^i\|_X^2 + \bar{\mu} L_{p_\nu} \frac{L_2}{\Delta t} \int_{\Gamma_C} \|u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}\| \Delta \theta^i da \\
&\leq c_2 S^* L_\tau c_0 \|\Delta x^i\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} \frac{L_2}{\Delta t} \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} \frac{L_2}{\Delta t} \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta t \tilde{\chi}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \Delta t \tilde{\chi}(x^i, \Delta x^i) &\leq \Delta t c_2 S^* L_\tau c_0 \|\Delta x^i\|_X^2 \\
&\quad + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} L_2 \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X,
\end{aligned} \tag{V.66}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\omega}(x^i, \Delta x^i) &= \omega((u^{i+1}, \theta^{i+1}), \Delta \theta^i) - \omega((u^i, \theta^i), \Delta \theta^i) \\
&\leq (L_{k_c} L c_0 c_2 + M_{k_c} c_2^2) \|\Delta x^{i+1}\|_X^2,
\end{aligned} \tag{V.67}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}(x^{i+1}, \Delta x^i) - \tilde{\ell}(x^i, \Delta x^i) &= \ell((u^{i+1}, \varphi^{i+1}), \Delta \varphi^i) - \ell((u^i, \varphi^i), \Delta \varphi^i) \\
&\leq (L_\psi L c_0 c_1 + M_{k_c} c_1^2) \|\Delta x^{i+1}\|_X^2,
\end{aligned} \tag{V.68}$$

et en utilisant (V.62)-(V.68), nous obtenons qu'il existe  $L^*$  telle que

$$\begin{aligned}
(m - C) \|\Delta x^i\|_X^2 &\leq \|\Delta g^i\|_X \|\Delta x^i\|_X + L^* (\bar{\mu} + L_\tau + LL_{k_c} + LL_\psi + M_{k_c} + M_\psi) \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 \\
&\quad + c_0^2 (L_\nu + L_\tau) \|\Delta x^{i+1}\|_X^2 + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X \\
&\quad + \sqrt{3} c_2 \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left( (m - C) - c_0^2 (L_\nu + L_\tau) - L^* (\bar{\mu} + L_\tau + LL_{k_c} + LL_\psi + M_{k_c} + M_\psi) \right) \|\Delta x^i\|_X^2 \\ & \leq \|\Delta g^i\|_X \|\Delta x^i\|_X + c_0 c_2 \bar{\mu} L_{p_\nu} L_2 \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X \\ & \quad + \sqrt{3} c_2 \max(1, M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{M}}) \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X. \end{aligned}$$

Pour  $\bar{\mu} + L_\tau + LL_{k_c} + LL_\psi + M_{k_c} + M_\psi$  suffisamment petit, le lemme V.8 est donc prouvé.  $\square$

**Proposition V.2** *À partir des suites  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$ , on peut extraire des sous-suites, encore notées  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$ , telles que*

$$\begin{aligned} u^n &\rightarrow u && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \varphi^n &\rightarrow \varphi && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \theta^n &\rightarrow \theta && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q), \end{aligned} \tag{V.69}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &\rightarrow \dot{u} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \dot{\varphi}^n &\rightarrow \dot{\varphi} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \dot{\theta}^n &\rightarrow \dot{\theta} && \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q). \end{aligned} \tag{V.70}$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Proposition V.3** *Ils existes des sous-suites  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$ , encore notées  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$  telles que pour tout  $t \in [0, T]$  on a*

$$\begin{aligned} \bar{u}^n(t) &\rightarrow u(t) && \text{faiblement dans } V, \\ \bar{\varphi}^n(t) &\rightarrow \varphi(t) && \text{faiblement dans } W, \\ \bar{\theta}^n(t) &\rightarrow \theta(t) && \text{faiblement dans } Q. \end{aligned} \tag{V.71}$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Remarque** Soient  $\bar{f}^n(t) = f^{i+1}$ ,  $\bar{q}_e^n(t) = q_e^{i+1}$  et  $\bar{\Theta}^n(t) = \Theta^{i+1}$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Sous l'hypothèse  $(H_8)$ , on a  $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ ,  $q_e \in W^{1,\infty}(0, T; W)$  et  $\Theta \in W^{1,\infty}(0, T; Q)$ . Alors

$$\begin{aligned} \bar{f}^n &\rightarrow f && \text{forttement dans } L^2(0, T; V), \\ \bar{q}_e^n &\rightarrow q_e && \text{forttement dans } L^2(0, T; W), \\ \bar{\Theta}^n &\rightarrow \Theta && \text{forttement dans } L^2(0, T; Q). \end{aligned} \tag{V.72}$$

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

**Proposition V.4** *Le triplet  $(u, \varphi, \theta) \in L^2(0, T; V \times W \times Q)$  est la solution du problème (PV).*

**Preuve.** Si nous substituons  $v$  par  $u^i + v \Delta t$  dans (V.29) et nous divisons par  $\Delta t$ , le problème (PV<sup>i</sup>) sera écrit pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$  comme suit

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H \\
& - (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H + j(\bar{u}^n(t), v(t)) - j(\bar{u}^n(t), \frac{d}{dt}u^n(t)) \\
& \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V, \\
& (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H - (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H + l((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)); \xi(t)) \\
& = (\bar{q}_e^n(t), \xi(t))_W, \\
& (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H + (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} \\
& - (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} - \chi(\bar{u}^n(t); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) + \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) \\
& = (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés des inégalités précédentes sur  $[0, T]$ , on constate que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt + \int_0^T j(\bar{u}^n(t), v(t)) dt - \int_0^T j(\bar{u}^n(t), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \\
& \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V dt, \\
& \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
& + \int_0^T l((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)); \xi(t)) dt = \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi(t))_W dt, \\
& \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \chi(\bar{u}^n(t); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt \\
& + \int_0^T \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) dt = \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

En additionnant les inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T j(\bar{u}^n(t), v(t)) - \int_0^T j(\bar{u}^n(t), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \\
 & + \int_0^T \omega((\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \eta(t)) dt - \int_0^T \chi(\bar{u}^n(t); \frac{d}{dt}u^n(t); \eta(t)) dt + \int_0^T l((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)); \xi(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V + \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt + \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned} \tag{V.73}$$

Pour finir la preuve de la proposition V.4, nous utilisons les lemmes suivants.

**Lemme V.9** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt, \tag{V.74}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \tag{V.75}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \tag{V.76}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{V.77}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{V.78}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt, \tag{V.79}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \tag{V.80}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt, \tag{V.81}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \tag{V.82}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \tag{V.83}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \omega(\bar{u}^n(t), \bar{\theta}^n(t), \eta(t)) dt = \int_0^T \omega(u(t), \theta(t), \eta(t)) dt, \tag{V.84}$$

**Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), v(t))) dt = \int_0^T j(u(t), v(t)) dt, \quad (\text{V.85})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T l((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t)); \xi(t)) dt = \int_0^T l((u(t), \varphi(t)); \xi(t)) dt, \quad (\text{V.86})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt} u^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \quad (\text{V.87})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi(t))_W dt = \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt, \quad (\text{V.88})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \quad (\text{V.89})$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

**Lemme V.10** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(\frac{d}{dt} u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt \geq \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{V.90})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j(\bar{u}^n(t), \frac{d}{dt} u^n(t)) \geq \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt, \quad (\text{V.91})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \chi(\bar{u}^n(t); \frac{d}{dt} u^n(t); \eta(t)) dt \geq \int_0^T \chi(u(t); \dot{u}(t); \eta(t)) dt. \quad (\text{V.92})$$

**Preuve.** Cela peut être fait par les mêmes techniques que dans le chapitre III.  $\square$

Revenons à la preuve de la proposition V.4. En passant à la limite dans (V.73), on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt \\ & + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt + \int_0^T \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt + \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt \\ & - \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & - \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & + \int_0^T j(u(t), v(t)) dt - \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \\ & - \int_0^T \chi(u(t); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \int_0^T l((u(t), \varphi(t)); \xi(t)) dt \\ & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt + \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (\text{V.93})$$



Par suite, il vient que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
& - \int_0^T (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T j(u(t), v(t)) dt \\
& - \int_0^T j(u(t), \dot{u}(t)) dt \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \\
& \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi(t))_H dt \\
& + \int_0^T l((u(t), \varphi(t)); \xi(t)) dt = \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt, \\
& \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t))_H dt \\
& + \int_0^T (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
& - \int_0^T \chi(u(t); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \int_0^T \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt \\
& = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

Prenons

$$v(t) = \begin{cases} v & \text{pour } t \in (s, s + \lambda) \\ \dot{u}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \xi(t) = \xi, \quad \eta(t) = \eta \quad \text{pour } t \in (s, s + \lambda).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathfrak{F} \varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M} \theta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j(u(t), v) dt \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j(u(t), \dot{u}(t)) dt \\
& \geq \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (f(t), v - \dot{u}(t))_V dt, \\
& \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E} \varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P} \theta(t), \nabla \xi)_H dt \\
& + \int_s^{s+\lambda} l((u(t), \varphi(t)); \xi(t)) dt = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (q_e(t), \xi)_W dt
\end{aligned}$$

## Chapitre V. Analyse variationnelle d'un problème quasi-statique de contact en thermo-électro-élasticité avec compliance normale

---

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\dot{\theta}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta)_H dt \\
& + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M} \varepsilon(\dot{u}(t)), \eta)_{L^2(\Omega)} dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \chi(u(t); \dot{u}(t); \eta(t)) dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \omega((u(t), \theta(t)), \eta(t)) dt \\
& = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\Theta(t), \eta)_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, nous passons à la limite en respectant  $s$  dans les inégalités ci-dessus, nous en déduisons que  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait  $(PV)$  et donc, la proposition [V.4](#) est prouvée.

□





---

---

# Chapitre VI

---

## Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

Ce chapitre traite un problème de contact quasi-statique avec frottement entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation thermiquement conductrice. Le matériau possède un comportement thermo-électro-élastique linéaire. Le contact est décrit avec des conditions de Signorini en déplacements et en température et une variante de la loi de frottement de Coulomb avec coefficient de frottement dépendant du glissement. Nous dérivons une formulation variationnelle pour ce modèle, c'est un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. Nous prouvons ensuite, sous certaines hypothèses de petitesse sur le coefficient de frottement, l'existence d'une solution faible du problème. Enfin, nous étudions la dépendance continue des solutions par rapport au coefficient de frottement et aux données initiales du déplacement et de la température. Reste à souligner ici que le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans le journal "Acta Applicandae Mathematicae" [9].

### 1 Modèle mathématique

Le problème de contact avec frottement non-local de Coulomb entre un corps thermo-électro-élastique et une fondation thermiquement conductrice dans lequel le flux de température sur la partie de contact dépend des conditions de Signorini se formule sous la forme suivante :

**Problème (P).** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\sigma = \mathfrak{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) - \mathcal{M}\theta \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.1})$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \mathcal{P} \theta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.2})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.3})$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.4})$$

$$\text{div } D = \phi_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.5})$$

$$\dot{\theta} + \text{div } q = -\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{P} \dot{E}(\varphi) + q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{VI.6})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \quad (\text{VI.7})$$

$$\sigma \nu = f_N \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{VI.8})$$

$$q_\nu(u, \varphi, \theta) \leq 0, \quad (\theta - \theta_F) \leq 0, \quad q_\nu(u, \varphi, \theta)(\theta - \theta_F) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{VI.9})$$

$$\sigma_\nu(u, \varphi, \theta) \leq 0, \quad (u_\nu - g) \leq 0, \quad \sigma_\nu(u, \varphi, \theta)(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (\text{VI.10})$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| \\ \|\sigma_\tau\| < \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T) \quad (\text{VI.11})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (\text{VI.12})$$

$$D \cdot \nu = \phi_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (\text{VI.13})$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \times (0, T), \quad (\text{VI.14})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{VI.15})$$

## 2 Formulation variationnelle du problème

Utilisons le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir les fonctions  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $q_e : [0, T] \rightarrow W$  et  $\Theta : [0, T] \rightarrow Q$  par

$$(f, v)_V = \int_\Omega f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N v \, da, \quad \forall v \in V, \quad (\text{VI.16})$$

$$(q_e, \xi)_W = \int_\Omega \phi_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} \phi_b \xi \, da, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VI.17})$$

$$(\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega q_0 \eta \, dx, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{VI.18})$$

Nous considérons la fonctionnelle  $j : X \times V \rightarrow \mathbb{R}$  où  $X = V \times W \times Q$  par

$$j((u, \varphi, \theta); v) = \int_{\Gamma_C} \mu(\|u_\nu\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| \|v_\tau\| \, da. \quad (\text{VI.19})$$

### VI.3 Existence d'une solution du problème discret

---

Dans la suite, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante sur les données initiales.

$$\begin{aligned}
 (H_{16}) : (a) \quad & (u_0, \varphi_0, \theta_0) \in K_1 \times W \times K_2 \text{ tel que pour tout } (v, \xi, \eta) \text{ de } V \times W \times Q, \text{ on a} \\
 & (\mathfrak{F} \varepsilon(u_0), \varepsilon(v - u_0))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_0, \varepsilon(v - u_0))_H \\
 & \quad - (\mathcal{M} \theta_0, \varepsilon(v - u_0))_H + j(u_0, \varphi_0, \theta_0; v - u_0) \geq (f(0), v - u_0)_V, \\
 & (\beta \nabla \varphi_0, \nabla \xi)_H = (\mathcal{E} \varepsilon(u_0), \nabla \xi)_H + (\mathcal{P} \theta_0, \nabla \xi)_H + (q_e(0), \xi)_W. \\
 (b) \quad & \text{Il existe } T_0 \in L^2(\Omega) \text{ telle que} \\
 & (\mathcal{K} \nabla \theta_0, \nabla(\eta - \theta_0))_H - (\Theta(0), \eta - \theta_0)_{L^2(\Omega)} \geq (T_0, \eta - \theta_0)_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Par une procédure standard basée sur les formules de Green, nous énonçons la formulation faible du problème (P), en termes de déplacement, de potentiel électrique et de température.

**Problème (PV).** *Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow K_1$ , le potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$  et la température  $\theta : [0, T] \rightarrow K_2$  tels que*

$$(\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - \dot{u}))_H - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v - \dot{u}))_H \quad (\text{VI.20})$$

$$+ j((u, \varphi, \theta), v) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) \geq (f, v - \dot{u})_V + \langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta), \nu_\nu - \dot{u}_\nu \rangle, \quad \forall v \in V,$$

$$\langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta), z_\nu - u_\nu \rangle \geq 0, \quad \forall z \in K_1, \quad (\text{VI.21})$$

$$(\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H = (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VI.22})$$

$$(\dot{\theta}, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta - \nabla \theta)_H + (\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u), \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} \quad (\text{VI.23})$$

$$\geq (\Theta, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q,$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{VI.24})$$

Le résultat d'existence principal que nous prouvons dans les sections suivantes est le suivant.

**Théorème VI.1** *Supposons  $(H_1)$ - $(H_6)$  et  $(H_{16})$  sont vérifiées. S'il existe une constante  $L^* > 0$  telle que  $\bar{\mu} + L_\mu \leq L^*$ , alors le problème (PV) admet au moins une solution.*

## 3 Existence d'une solution du problème discret

Le problème (PV) peut être discrétisé dans le temps par un schéma implicite. Soit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  une partition uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de pas  $\Delta t = \frac{T}{n}$  ( $t_i = i\Delta t$ ). Pour toute fonction  $\omega$ , on note  $\omega^i$  l'approximation de  $\omega$  à l'instant  $t_i$  et par  $\Delta \omega^i$  la

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

différence  $\omega^{i+1} - \omega^i$ . Pour une fonction continue  $\omega(t)$ , nous utilisons la notation  $\omega^i = \omega(t_i)$ . Nous considérons une suite de problèmes incrémentales  $(PV^i)$  définie pour  $u(\cdot, 0) = u_0$ ,  $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$  et  $\theta(\cdot, 0) = \theta_0$  comme suit :

**Problème  $(PV^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u^{i+1} \in K_1$ , le potentiel électrique  $\varphi^{i+1} \in W$  et la température  $\theta^{i+1} \in K_2$  tels que :*

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \\ & + j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), v - u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^{i+1} - u^i) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1, \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

$$(\beta \nabla \varphi^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta^{i+1}, \nabla \xi)_H = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VI.26})$$

$$\begin{aligned} & (\theta^{i+1}, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta^{i+1}, \nabla \eta - \nabla \theta^{i+1})_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u^{i+1}), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i+1}, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & \geq \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in K_2. \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

Considérons le problème intermédiaire suivant pour lequel  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Q \times W$  est connu.

**Problème  $(PV_\zeta^i)$ .** *Trouver le champ des déplacements  $u_\zeta^{i+1} \in K_1$ , le potentiel électrique  $\varphi_\zeta^{i+1} \in W$  et la température  $\theta_\zeta^{i+1} \in K_2$  tels que :*

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u_\zeta^{i+1}), \varepsilon(v - u_\zeta^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\zeta^{i+1}, \varepsilon(v - u_\zeta^{i+1}))_H - (\mathcal{M} \theta_\zeta^{i+1}, \varepsilon(v - u_\zeta^{i+1}))_H \\ & + j((u_\zeta^{i+1}, \varphi_\zeta^{i+1}, \theta_\zeta^{i+1}), v - u^i) - j((u_\zeta^{i+1}, \varphi_\zeta^{i+1}, \theta_\zeta^{i+1}), u_\zeta^{i+1} - u^i) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u_\zeta^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1, \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

$$(\beta \nabla \varphi_\zeta^{i+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u_\zeta^{i+1}), \nabla \xi)_H - (\zeta_1, \nabla \xi)_H = (q_e^{i+1}, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VI.29})$$

$$\begin{aligned} & (\theta_\zeta^{i+1}, \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + \Delta t (\mathcal{K} \nabla \theta_\zeta^{i+1}, \nabla \eta - \nabla \theta_\zeta^{i+1})_H + (\mathcal{M} \varepsilon(u_\zeta^{i+1}), \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & - (\zeta_2, \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \geq \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\nabla \varphi^i, \eta - \theta_\zeta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in K_2. \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

Afin de résoudre le problème  $(PV_\zeta^i)$ , nous considérons l'espace produit  $X = V \times W \times Q$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et sa norme euclidienne  $\|\cdot\|_X$  tels que

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \xi)_W + (\theta, \eta)_Q, \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), y = (v, \xi, \eta) \in X. \quad (\text{VI.31})$$



### VI.3 Existence d'une solution du problème discret

Nous considérons l'opérateur  $A = A_1 + A_2 : X \rightarrow X$  où  $A_1, A_2 : X \rightarrow X$  sont définis par

$$(A_1x, y)_X = (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\Delta t \mathcal{K}\nabla\theta, \nabla\eta)_H + (\beta\nabla\varphi, \nabla\xi)_H + (\mathcal{E}^* \nabla\varphi, \varepsilon(v))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\xi)_H, \quad (\text{VI.32})$$

$$(A_2x, y)_X = (\theta, \eta) - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{M}\varepsilon(u), \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{VI.33})$$

pour tout  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $y = (v, \xi, \eta)$  of  $X$ , la fonctionnelle  $J : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$J(x, y) = j((u, \varphi, \theta); v), \quad \forall x = (u, \varphi, \theta), y = (v, \xi, \eta) \in X, \quad (\text{VI.34})$$

et l'élément  $g_\zeta^{i+1} = (f^{i+1}, q_\zeta^{i+1}, \Theta_\zeta^{i+1}) \in X$  donné par

$$(q_\zeta^{i+1}, \xi)_W = (q_e^{i+1}, \xi)_W + (\zeta_1, \nabla\xi)_H, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VI.35})$$

$$\begin{aligned} (\Theta_\zeta^{i+1}, \eta)_W &= \Delta t (\Theta^{i+1}, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta)_{L^2(\Omega)} + (\zeta_2, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Alors, on a le lemme suivant.

**Lemme VI.1** *Le problème  $(PV_\zeta^i)$  est équivalent à trouver  $x_\zeta^{i+1} = (u_\zeta^{i+1}, \varphi_\zeta^{i+1}, \theta_\zeta^{i+1}) \in X$  tel que*

$$(Ax_\zeta^{i+1}, y - x_\zeta^{i+1})_X + J(x_\zeta^{i+1}, y - x^i) - J(x_\zeta^{i+1}, x_\zeta^{i+1} - x^i) \geq (g_\zeta^{i+1}, y - x_\zeta^{i+1})_X, \quad \forall y \in X. \quad (\text{VI.37})$$

Notons que (VI.37) est une inégalité quasi-variationnelle de même forme que celle du théorème V.1. Nous Commençons par étudier les propriétés de l'opérateur  $A$  donné par (VI.32)-(VI.33).

**Lemme VI.2** *L'opérateur  $A$  est fortement monotone et Lipschitz continu.*

**Preuve.** Premièrement, l'opérateur  $A_1 : X \rightarrow X$  est fortement monotone et Lipschitz continue (Voir chapitre III). Donc, il existe deux constantes  $m_1 > 0$  et  $M_1 > 0$  telles que

$$(A_1x_1 - A_1x_2, x_1 - x_2)_X \geq m_1 \|x_1 - x_2\|_X^2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad (\text{VI.38})$$

$$\|A_1x_1 - A_1x_2\|_X \leq M_1 \|x_1 - x_2\|_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (\text{VI.39})$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

---

De plus, nous utilisons (VI.33) pour obtenir

$$\begin{aligned} (A_2x_1 - A_2x_2, x_1 - x_2)_X &= (\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{M}\theta_1 - \mathcal{M}\theta_2, \varepsilon(u_1 - u_2))_H \\ &\quad + (\mathcal{M}\varepsilon(u_1) - \mathcal{M}\varepsilon(u_2), \theta_1 - \theta_2)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Comme  $(\mathcal{M}\theta_1 - \mathcal{M}\theta_2, \varepsilon(u_1 - u_2))_H = (\mathcal{M}\varepsilon(u_1) - \mathcal{M}\varepsilon(u_2), \theta_1 - \theta_2)_{L^2(\Omega)}$ , on trouve

$$(A_2x_1 - A_2x_2, x_1 - x_2)_X = (\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (\text{VI.40})$$

En utilisant (VI.38) et (VI.40), nous concluons qu'il existe  $m > 0$  telle que

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m \|x_1 - x_2\|_X^2 \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (\text{VI.41})$$

En rappelant (VI.31) et (VI.33), donc c'est facile de voir que l'opérateur  $A_2 : X \rightarrow X$  est Lipschitz continu. Ensuite, nous combinons avec (VI.39) pour trouver qu'il existe  $M > 0$  telle que

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq M \|x_1 - x_2\|_X, \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (\text{VI.42})$$

Par suite, le lemme VI.2 est la conséquence des inégalités (VI.41) et (VI.42).  $\square$

Ensuite, nous étudions les propriétés de la fonctionnelle  $J$  donnée par (VI.34) et (VI.19). Nous remarquons tout d'abord que  $J$  satisfait la condition  $(h_2)$ . De plus, nous avons le lemme suivant

**Lemme VI.3** *La fonctionnelle  $J$  satisfait les conditions  $(J_1)$ ,  $(J_2)$  et  $(J_3)$ .*

**Preuve.** Soient  $\eta = (v, \xi, \omega)$  et  $x = (u, \varphi, \theta) \in X$  et  $\lambda \in ]0, 1]$ . Il résulte de (VI.34) et (VI.19) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} [J(\eta, x - \lambda x) - J(\eta, x)] &= \frac{1}{\lambda} [j((v, \xi, \omega), u - \lambda u) - j((v, \xi, \omega), u)] \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_C} \mu(\|v_\tau\|) |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)| (\|u_\tau - \lambda u_\tau\| - \|u_\tau\|) da \\ &= - \int_{\Gamma_C} \mu(\|v_\tau\|) |R\sigma_\nu(v, \xi, \omega)| \|u_\tau\| da. \end{aligned}$$

En rappelant  $(h_3)$ , on obtient

$$J'_2(\eta, x; -x) \leq 0, \quad \forall \eta = (v, \xi, \omega), x = (u, \varphi, \theta) \in X. \quad (\text{VI.43})$$

### VI.3 Existence d'une solution du problème discret

Alors, la fonctionnelle  $J$  satisfait les conditions  $(J_1)$  et  $(J_2)$ . Soient  $\{x_n\} = \{(u_n, \varphi_n, \theta_n)\}$  et  $\{\eta_n\} = \{(v_n, \xi_n, \omega_n)\}$  deux suites de  $X$  telles que  $x_n \rightharpoonup x = (u, \varphi, \theta) \in X$  et  $\eta_n \rightharpoonup \eta = (v, \xi, \omega) \in X$ . D'après la compacité de l'application trace, on a

$$u_{n\tau} \rightarrow u_\tau \quad \text{et} \quad \|u_{n\tau}\| \rightarrow \|u_\tau\| \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_C).$$

Utilisons la compacité de l'opérateur  $R$ , on en déduit

$$|R\sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n)| \rightarrow |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_C).$$

Rappelons la définition de  $J$ , nous obtenons

$$J(\eta_n, y) \rightarrow J(\eta, y), \quad \forall y \in X \quad \text{et} \quad J(\eta_n, x_n) \rightarrow J(\eta, x).$$

Donc, la fonctionnelle  $J$  satisfait la condition  $(J_3)$ . □

**Lemme VI.4** *Supposons  $(H_6)$  est vérifiée, alors, il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que*

$$J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \leq c_4(L_\mu + \mu^*) \|x - y\|_X^2, \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{VI.44})$$

**Preuve.** Soient  $x = (u, \varphi, \theta)$  et  $y = (v, \xi, \omega) \in X$ . De (VI.19) et (VI.34) on a

$$\begin{aligned} & J(x, y) - J(x, x) + J(y, x) - J(y, y) \\ &= \int_{\Gamma_C} \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| (\|v_\tau\| - \|u_\tau\|) da + \int_{\Gamma_C} \mu(\|v_\tau\|) |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)| (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &= \int_{\Gamma_C} \left[ \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| - \mu(\|v_\tau\|) |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)| \right] (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \left[ \mu(\|u_\tau\|) - \mu(\|v_\tau\|) \right] |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &+ \int_{\Gamma_C} \mu(\|v_\tau\|) \left[ |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| - |R\sigma_\nu(v, \xi, \eta)| \right] (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da \\ &\leq L_\mu \|R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)\|_{L^\infty(\Gamma_C)} c_0^2 \|x - y\|_X^2 + \bar{\mu} c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_2) \|x - y\|_X^2 \\ &\leq \left[ c_0^2 \|R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)\|_{L^\infty(\Gamma_C)} + c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_2) \right] (L_\mu + \bar{\mu}) \|x - y\|_X^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que (VI.44) est vérifiée. □

Nous combinons les lemmes VI.1-VI.4 et le théorème I.10 pour trouver que le problème  $(PV_\zeta^i)$  a une solution unique. Ensuite, nous considérons l'opérateur  $\Lambda : W \times Q \rightarrow W \times Q$  défini comme

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

---

suit

$$\Lambda\zeta = (\mathcal{P}\theta_\zeta^{i+1}, \mathcal{P}\nabla\varphi_\zeta^{i+1}), \quad \forall \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in W \times Q.$$

Pour tout  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$  et  $\zeta' = (\zeta'_1, \zeta'_2)$  de  $W \times Q$ , on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda\zeta - \Lambda\zeta'\|_{W \times Q} &\leq \|\mathcal{P}\theta_\zeta^{i+1} - \mathcal{P}\theta_{\zeta'}^{i+1}\|_W + \|\mathcal{P}\nabla\varphi_\zeta^{i+1} - \mathcal{P}\nabla\varphi_{\zeta'}^{i+1}\|_Q \\ &\leq M_{\mathcal{P}} \left( \|\theta_\zeta^{i+1} - \theta_{\zeta'}^{i+1}\|_Q + \|\varphi_\zeta^{i+1} - \varphi_{\zeta'}^{i+1}\|_W \right) \\ &\leq M_{\mathcal{P}} \|x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1}\|_X. \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $\zeta$  et  $\zeta'$  de  $X$ , on a

$$\|\Lambda\zeta - \Lambda\zeta'\|_{W \times Q} \leq M_{\mathcal{P}} \|x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1}\|_X. \quad (\text{VI.45})$$

Ensuite, nous utilisons (VI.37) et (VI.41) on trouve

$$\begin{aligned} (Ax_\zeta^{i+1} - Ax_{\zeta'}^{i+1}, x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1})_X &\leq (g_\zeta^{i+1} - g_{\zeta'}^{i+1}, x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1})_X \\ &\quad + J(x_\zeta^{i+1}, x_{\zeta'}^{i+1}) - J(x_{\zeta'}^{i+1}, x_{\zeta'}^{i+1}) + J(x_{\zeta'}^{i+1}, x_\zeta^{i+1}) - J(x_\zeta^{i+1}, x_\zeta^{i+1}). \end{aligned}$$

Combiné avec (VI.44), nous obtenons

$$m \|x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1}\|_X^2 \leq (g_\zeta^{i+1} - g_{\zeta'}^{i+1}, x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1})_X + c_4(L_\mu + \mu^*) \|x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1}\|_X^2. \quad (\text{VI.46})$$

De la définition de  $g_\zeta^{i+1}$ , on trouve après quelques simplifications que

$$(g_\zeta^{i+1} - g_{\zeta'}^{i+1}, x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1})_X \leq \|\zeta - \zeta'\|_{W \times Q} \|x_\zeta^{i+1} - x_{\zeta'}^{i+1}\|_X. \quad (\text{VI.47})$$

Utilisons (VI.46)-(VI.47), on trouve  $x_\zeta^{i+1}$  est Lipschitz continue en  $\zeta$ . En rappelant (VI.45), il vient que

$$\|\Lambda\zeta - \Lambda\zeta'\|_{W \times Q} \leq \frac{M_{\mathcal{P}}}{m - c_4(L_\mu + \bar{\mu})} \|\zeta - \zeta'\|_{W \times Q}.$$

Posons  $L^* = \frac{m - M_{\mathcal{P}}}{c_4}$ , alors si on a  $\bar{\mu} + L_\mu < L^*$ , l'opérateur  $\Lambda$  est une contraction et d'après le théorème de point fixe de Banach, nous concluons que le problème  $(PV^i)$  admet une solution unique.  $\square$

## 4 Analyse asymptotique

Pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ , soit  $x^{i+1} = (u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})$  l'unique solution du problème  $(PV^i)$ . Pour étudier la convergence de  $\{x^{i+1}\}_{i=0, \dots, n-1}$  quand  $n \rightarrow \infty$ , nous introduisons les fonctions continues suivantes définies sur  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) par

$$u^n(t) = u^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta u^i, \quad \varphi^n(t) = \varphi^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \varphi^i, \quad \theta^n(t) = \theta^i + \frac{t - t_i}{\Delta t} \Delta \theta^i. \quad (\text{VI.48})$$

Nous considérons les fonctions constantes par morceaux suivantes définies sur chaque intervalle  $(t_i, t_{i+1}]$  et  $g : [0, T] \rightarrow X$  par

$$\bar{u}^n(t) = u^{i+1}, \quad \bar{\varphi}^n(t) = \varphi^{i+1}, \quad \bar{\theta}^n(t) = \theta^{i+1}, \quad \bar{g}^n(t) = g^{i+1} \quad (\text{VI.49})$$

$$g = (f, q_e, \tilde{\Theta}) = (f, q_e, \Delta t \Theta) \in C([0, T], X). \quad (\text{VI.50})$$

**Lemme VI.5** *Il existe deux constantes positives  $a_1$  et  $a_2$  telles que*

$$\|x^{i+1}\|_X \leq a_1 \sum_{j=0}^{i+1} \|g^j\|_X + a_2. \quad (\text{VI.51})$$

**Preuve.** En rappelant (VI.32)-(VI.34) et (VI.50), il résulte de (VI.25)-(VI.27) que

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) \\ & - (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i+1}, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \theta^{i+1}, \nabla \eta - \nabla \varphi^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y = (v, \xi, \eta) \in X. \end{aligned} \quad (\text{VI.52})$$

En prenant  $y = 0$ , l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} & (Ax^{i+1}, x^{i+1})_X \leq (g^{i+1}, x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) + (\mathcal{P} \nabla \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{P} \theta^{i+1}, \nabla \varphi^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\theta^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M} \varepsilon(u^i), \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \nabla \varphi^i, \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.53})$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

Rappelons (VI.19) et (VI.34) on en déduit que

$$\begin{aligned}
J(x^{i+1}, x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) &= j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), u^{i+1} - u^i) \\
&\leq \int_{\Gamma_C} \mu(\|u_\tau^{i+1}\|) |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})| \|u_\tau^{i+1}\| da \quad (\text{VI.54}) \\
&\leq \bar{\mu} c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_3) \|x^{i+1}\|_X^2.
\end{aligned}$$

Utilisons (VI.53)-(VI.54) et (VI.41), on trouve après des simplifications que

$$\begin{aligned}
m \|x^{i+1}\|_X^2 &\leq \|g^{i+1}\|_X \|x^{i+1}\|_X + \bar{\mu} c_R c_0 \max(c_0, c_1, c_3) \|x^{i+1}\|_X^2 \\
&\quad + \mathcal{P}^* \|x^{i+1}\|_X^2 + \sqrt{3} \max(1, \mathcal{P}^*, \mathcal{M}^*) \|x^i\|_X \|x^{i+1}\|_X.
\end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse ( $H_{16}$ ) implique la bornitude de  $x_0$ , nous obtenons facilement (VI.51).  $\square$

**Lemme VI.6** *Si  $\mu$  est suffisamment petit, il existe une constante positive  $a_3$  telle que*

$$\|\Delta x^i\|_X \leq a_3 \sum_{j=1}^i \|\Delta g^j\|_X \quad (\text{VI.55})$$

**Preuve.** Afin de prouver ce lemme, nous écrivons (VI.52) au temps  $t_{i+1}$  et  $t_i$  et donc

$$\begin{aligned}
&(Ax^{i+1}, y - x^{i+1})_X + J(x^{i+1}, y - x^i) - J(x^{i+1}, x^{i+1} - x^i) - (\mathcal{P}\nabla\varphi^{i+1}, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - (\mathcal{P}\theta^{i+1}, \nabla\eta - \nabla\varphi^{i+1})_{L^2(\Omega)} \geq (g^{i+1}, y - x^{i+1})_X + (\theta^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} \quad (\text{VI.56}) \\
&\quad + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i), \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta - \theta^{i+1})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y \in X.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(Ax^i, y - x^i)_X + J(x^i, y - x^{i-1}) - J(x^i, x^i - x^{i-1}) - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - (\mathcal{P}\theta^i, \nabla\eta - \nabla\varphi^i)_{L^2(\Omega)} \geq (g^i, y - x^i)_X + (\theta^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} \quad (\text{VI.57}) \\
&\quad + (\mathcal{M}\varepsilon(u^{i-1}), \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^{i-1}, \eta - \theta^i)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y \in X.
\end{aligned}$$

Prenons  $y = x^{i+1}$  dans (VI.57),  $y = x^i$  dans (VI.56) et ajoutons les inégalités obtenues, il vient

$$\begin{aligned}
&(Ax^{i+1} - Ax^i, x^{i+1} - x^i)_X \\
&\leq (g^{i+1} - g^i, x^{i+1} - x^i)_X + J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) \quad (\text{VI.58}) \\
&\quad + (\mathcal{P}\nabla\varphi^{i+1} - \mathcal{P}\nabla\varphi^i, \theta^{i+1} - \theta^i)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{P}\theta^{i+1} - \mathcal{P}\theta^i, \nabla\varphi^{i+1} - \nabla\varphi^i)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$+ (\Delta\theta^{i-1}, \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{M}\varepsilon(u^i) - \mathcal{M}\varepsilon(u^{i-1}), \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\varphi^i - \mathcal{P}\nabla\varphi^{i-1}, \Delta\theta^i)_{L^2(\Omega)}.$$

Et d'après la définition de  $J$  et l'inégalité  $\left| |u_\tau^{i+1} - u_\tau^{i-1}| - |u_\tau^i - u_\tau^{i-1}| \right| \leq |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i|$ , on trouve

$$\begin{aligned} J(x^i, \Delta x^i + \Delta x^{i-1}) - J(x^i, \Delta x^{i-1}) &= j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i + \Delta u^{i-1}) - j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^{i-1}) \\ &\leq j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) = J(x^i, \Delta x^i). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} J(x^i, \Delta x^i) - J(x^{i+1}, \Delta x^i) &= j((u^i, \varphi^i, \theta^i), \Delta u^i) - j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}), \Delta u^i) \\ &= \int_{\Gamma_C} \left[ \mu(\|u_\tau^i\|) |R\sigma_\nu(u^i, \varphi^i, \theta^i)| - \mu(\|u_\tau^{i+1}\|) |R\sigma_\nu(u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1})| \right] \|\Delta u_\tau^i\| \, da \quad (\text{VI.59}) \\ &\leq c_4(L_\mu + \bar{\mu}) \|\Delta x^i\|_X^2. \end{aligned}$$

Nous combinons les deux inégalités précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned} m \|\Delta x^i\|_X^2 &\leq \|\Delta g^i\|_X \|\Delta x^i\|_X + c_4(L_\mu + \bar{\mu}) \|\Delta x^i\|_X^2 + \mathcal{P}^* \|\Delta x^i\|_X^2 \\ &\quad + \sqrt{3} c_2 \max(1, \mathcal{P}^*, \mathcal{M}^*) \|\Delta x^i\|_X \|\Delta x^{i-1}\|_X. \end{aligned}$$

En utilisant la bornitude de  $x_0$ , il est facile d'obtenir (VI.55).  $\square$

**Proposition VI.2** *À partir des suites  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$ , on peut extraire des sous-suites, encore notées  $(u^n)$ ,  $(\varphi^n)$  et  $(\theta^n)$  telles que*

$$\begin{aligned} u^n &\rightarrow u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \varphi^n &\rightarrow \varphi \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \theta^n &\rightarrow \theta \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q), \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &\rightarrow \dot{u} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; V), \\ \dot{\varphi}^n &\rightarrow \dot{\varphi} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; W), \\ \dot{\theta}^n &\rightarrow \dot{\theta} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T; Q). \end{aligned} \quad (\text{VI.61})$$

**Preuve.** Voir le chapitre III.  $\square$

**Proposition VI.3** *Il existe des sous-suites  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$ , encore notées  $(\bar{u}^n)$ ,  $(\bar{\varphi}^n)$  et  $(\bar{\theta}^n)$*

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

telles que pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\begin{aligned}\bar{u}^n(t) &\rightarrow u(t) && \text{faiblement dans } V, \\ \bar{\varphi}^n(t) &\rightarrow \varphi(t) && \text{faiblement dans } W, \\ \bar{\theta}^n(t) &\rightarrow \theta(t) && \text{faiblement dans } Q.\end{aligned}\tag{VI.62}$$

**Preuve.** Voir le chapitre III. □

**Remarque** Soient  $\bar{f}^n(t) = f^{i+1}$ ,  $\bar{q}_e^n(t) = q_e^{i+1}$  et  $\bar{\Theta}^n(t) = \Theta^{i+1}$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Sous l'hypothèse  $(H_8)$ , on a  $f \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ ,  $q_e \in W^{1,\infty}(0, T; W)$  et  $\Theta \in W^{1,\infty}(0, T; Q)$ . Alors

$$\begin{aligned}\bar{f}^n &\rightarrow f && \text{forttement dans } L^2(0, T; V), \\ \bar{q}_e^n &\rightarrow q_e && \text{forttement dans } L^2(0, T; W), \\ \bar{\Theta}^n &\rightarrow \Theta && \text{forttement dans } L^2(0, T; Q).\end{aligned}\tag{VI.63}$$

**Proposition VI.4** *Le triplet  $(u, \varphi, \theta) \in L^2(0, T; V \times W \times Q)$  est une solution du problème (PV).*

**Preuve.** Pour tout  $(v, \xi, \eta) \in L^2(0, T; V \times W \times Q)$ , (VI.25)-(VI.27) et (VI.48)-(VI.49) implique

$$\begin{aligned}& (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H \\ & - (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H + j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) \\ & - j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) \\ & \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V + \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \nu_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle, \\ & (\beta\nabla\bar{\varphi}^n(t), \nabla\xi(t))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla\xi(t))_H - (\mathcal{P}\bar{\theta}^n(t), \nabla\xi(t))_H = (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W, \\ & (\frac{d}{dt}\theta^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{K}\nabla\bar{\theta}^n(t), \nabla\eta(t) - \nabla\bar{\theta}^n(t))_H \\ & + (\mathcal{M}\varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P}\nabla\frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} \\ & \geq (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$



Ensuite, nous intégrons les deux côtés des inégalités précédentes sur  $[0, T]$ , pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle dt, \\
 & \int_0^T (\beta\nabla\bar{\varphi}^n(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\bar{\theta}^n(t), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & = \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K}\nabla\bar{\theta}^n(t), \nabla\eta(t) - \nabla\bar{\theta}^n(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & \geq \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous ajoutons les inégalités précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta\nabla\bar{\varphi}^n(t), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{K}\nabla\bar{\theta}^n(t), \nabla\eta(t) - \nabla\bar{\theta}^n(t))_H dt + \int_0^T (\frac{d}{dt}\bar{\theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)))_H dt + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\frac{d}{dt}u^n(t)), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad (\text{VI.64}) \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P}\bar{\theta}^n(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\frac{d}{dt}\varphi^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt - \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt}u^n(t)) dt \\
 & \geq (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt}u^n(t))_V + \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt + \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T \langle \sigma_\nu(\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu^n(t) \rangle dt.
 \end{aligned}$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

Maintenant, considérons les lemmes suivants qu'on utilisera pour établir la proposition VI.4.

**Lemme VI.7** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $\xi \in L^2(0, T; W)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{VI.65})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \quad (\text{VI.66})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_H dt = \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_H dt, \quad (\text{VI.67})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\beta \nabla \bar{\varphi}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{VI.68})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{VI.69})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P}\bar{\theta}^n(t), \nabla \xi(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{P}\theta(t), \nabla \xi(t))_H dt, \quad (\text{VI.70})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \bar{\theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t) \right)_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{VI.71})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \bar{\theta}^n(t), \nabla \eta(t) - \nabla \bar{\theta}^n(t))_H dt = \int_0^T (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \eta(t) - \nabla \theta(t))_H dt, \quad (\text{VI.72})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon\left(\frac{d}{dt} u^n(t)\right), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{VI.73})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \frac{d}{dt} \varphi^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt, \quad (\text{VI.74})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), v(t)) dt = \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt, \quad (\text{VI.75})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \frac{d}{dt} u^n(t))_V dt = \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt, \quad (\text{VI.76})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{q}_e^n(t), \xi)_W dt = \int_0^T (q_e(t), \xi)_W dt, \quad (\text{VI.77})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\bar{\Theta}^n(t), \eta(t) - \bar{\theta}^n(t))_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (\Theta(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \quad (\text{VI.78})$$

**Preuve.** Cela a été fait dans le chapitre III. □

**Lemme VI.8** *Pour tout  $v \in L^2(0, T; V)$  et  $\eta \in L^2(0, T; Q)$ , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(\dot{u}^n(t)))_{\mathcal{H}} dt \geq \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt, \quad (\text{VI.79})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)), \frac{d}{dt} u^n(t)) dt \geq \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt. \quad (\text{VI.80})$$

**Preuve.** Cela a été fait dans le chapitre III. □

Revenons à la preuve de la proposition VI.4. En passant à la limite dans (VI.64), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\beta\nabla\varphi(t), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{K}\nabla\theta(t), \nabla\eta(t) - \nabla\theta(t))_H dt + \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{P}\theta(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt + \int_0^T (\Theta(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & + \int_0^T \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt.
 \end{aligned} \tag{VI.81}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\
 & - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t)) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v(t)) dt \\
 & - \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \\
 & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - \dot{u}(t))_V dt + \int_0^T \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt, \\
 & \int_0^T (\beta\nabla\varphi(t), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\xi(t))_H dt - \int_0^T (\mathcal{P}\theta(t), \nabla\xi(t))_H dt \\
 & = \int_0^T (q_e(t), \xi(t))_W dt, \\
 & \int_0^T (\dot{\theta}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathcal{K}\nabla\theta(t), \nabla\eta(t) - \nabla\theta(t))_H dt \\
 & + \int_0^T (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\
 & \geq \int_0^T (\Theta(t), \eta(t) - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt.
 \end{aligned}$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

Prenons

$$v(t) = \begin{cases} v & \text{pour } t \in (s, s + \lambda) \\ \dot{u}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad \xi(t) = \xi, \quad \eta(t) = \eta \quad \text{pour } t \in (s, s + \lambda). \quad (\text{VI.82})$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathfrak{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), v) dt \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} j((u(t), \varphi(t), \theta(t)), \dot{u}(t)) dt \\ & \geq \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (f(t), v - \dot{u}(t))_V dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} \langle \sigma_\nu(u(t), \varphi(t), \theta(t)), v_\nu(t) - \dot{u}_\nu(t) \rangle dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\beta \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla \xi)_H dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P}\theta(t), \nabla \xi)_H dt \\ & = \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (q_e(t), \xi)_W dt, \\ & \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\dot{\theta}(t), \eta - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{K}\nabla\theta(t), \nabla\eta - \nabla\theta(t))_H dt \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{M}\varepsilon(\dot{u}(t)), \eta - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt - \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}(t), \eta - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt \\ & \geq \frac{1}{\lambda} \int_s^{s+\lambda} (\Theta(t), \eta - \theta(t))_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (\text{VI.83})$$

En passant à limite en  $s$ , nous obtenons, en utilisant le théorème de Lebesgue, que le triplet  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait (VI.20), (VI.22) et (VI.23). De plus, il découle de (VI.83) que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(u^{i+1}), \varepsilon(v - u^{i+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H \\ & - (\mathcal{M}\theta^{i+1}, \varepsilon(v - u^{i+1}))_H + j((u^{i+1}, \varphi^{i+1}, \theta^{i+1}); v - u^{i+1}) \\ & \geq (f^{i+1}, v - u^{i+1})_V, \quad \forall v \in K_1. \end{aligned} \quad (\text{VI.84})$$

Soit  $\tilde{K} = \{v \in L^2(0, T; V), v(t) \in K_1 \text{ p.p. } t \in [0, T]\}$ . Rappelons (VI.49) et intégrons (VI.84) dans  $[0, T]$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\mathcal{F}\varepsilon(\bar{u}^n(t)), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\bar{\varphi}^n(t), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_H dt \\ & - \int_0^T (\mathcal{M}\bar{\theta}^n(t), \varepsilon(v(t) - \bar{u}^n(t)))_H dt + \int_0^T j((\bar{u}^n(t), \bar{\varphi}^n(t), \bar{\theta}^n(t)); v(t) - \bar{u}^n(t)) dt \\ & \geq \int_0^T (\bar{f}^n(t), v(t) - \bar{u}^n(t))_V dt, \quad \forall v \in \tilde{K}. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v(t) - u(t)))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v(t) - u(t)))_H dt \\ & - \int_0^T (\mathcal{M}\theta(t), \varepsilon(v(t) - u(t)))_H dt + \int_0^T j((u(t), \varphi(t), \theta(t)); v(t) - u(t)) dt \\ & \geq \int_0^T (f(t), v(t) - u(t))_V dt. \end{aligned}$$

Comme pour (VI.82) et (VI.83), on déduit en passant à la limite que  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v - u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v - u))_H \\ & - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v - u))_H + j((u, \varphi, \theta); v - u) \geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in K_1. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green dans l'inégalité ci-dessus (voir [21]), nous obtenons que  $(u, \varphi, \theta)$  satisfait (VI.21) et alors, le triplet  $(u, \varphi, \theta)$  est une solution du problème (PV).  $\square$

## 5 Dépendance continue

Nous étudions ici la dépendance de la solution du problème (PV) par rapport aux perturbations du coefficient de frottement  $\mu$ , et des données initiales; déplacement  $u_0$ , potentiel électrique  $\varphi_0$  et la température  $\theta_0$ . Supposant  $(H_1)$ - $(H_8)$  sont vérifiées, nous considérons  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  une famille de perturbations de  $\mu$ . Soit  $(PV^n)$  le problème variationnel associé au coefficient de frottement perturbé  $\mu_n$  et soit  $(u_n, \varphi_n, \theta_n)$  sa solution par rapport aux données initiales  $u_{n0}$ ,  $\varphi_{n0}$  et  $\theta_{n0}$ .

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

**Théorème VI.5** *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées,*

$$\begin{aligned} & \|\mu(\|u_\tau\|) - \mu_n(\|u_{n\tau}\|)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_C))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ & \|u_0 - u_{n0}\|_V + \|\theta_0 - \theta_{n0}\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Alors, la solution du problème  $(PV^n)$  converge vers la solution du problème  $(PV)$ , au sens suivant :

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 + \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|_V^2 \\ & + \|\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}_n(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_H^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

**Preuve.** D'après (VI.20), (VI.22) et (VI.23), pour tout  $x = (v, \xi, \eta) \in V \times W \times Q$ , on a

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\beta\nabla\varphi, \nabla\xi)_H + (\mathcal{K}\nabla\theta, \nabla\eta - \nabla\theta)_H + (\dot{\theta}, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v - \dot{u}))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\xi)_H - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v - \dot{u}))_H + (\mathcal{M}\dot{\varepsilon}(u), \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P}\theta, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} + j((u, \varphi, \theta), v) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) \\ & \geq (f, v - \dot{u})_V + (q_e, \xi)_W + (\Theta, \eta - \theta)_{L^2(\Omega)} + \langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta), v_\nu - \dot{u}_\nu \rangle. \end{aligned} \tag{VI.85}$$

Et de la formulation faible  $(PV^n)$ , pour tout  $x = (v, \xi, \eta) \in V \times W \times Q$ , on a

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u_n), \varepsilon(v - \dot{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\beta\nabla\varphi_n, \nabla\xi)_H + (\mathcal{K}\nabla\theta_n, \nabla\eta - \nabla\theta_n)_H + (\dot{\theta}_n, \eta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n, \varepsilon(v - \dot{u}_n))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_n), \nabla\xi)_H - (\mathcal{M}\theta_n, \varepsilon(v - \dot{u}_n))_H + (\mathcal{M}\dot{\varepsilon}(u_n), \eta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\ & - (\mathcal{P}\theta_n, \nabla\xi)_H - (\mathcal{P}\nabla\dot{\varphi}_n, \eta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), v) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) \\ & \geq (f, v - \dot{u}_n)_V + (q_e, \xi)_W + (\Theta, \eta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} + \langle \sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n), v_\nu - \dot{u}_{n\nu} \rangle. \end{aligned} \tag{VI.86}$$

Posons  $x = (\dot{u}_n, \varphi - \varphi_n, \theta_n)$  dans (VI.85),  $x = (\dot{u}, \varphi_n - \varphi, \theta)$  dans (VI.86) et en sommant les inégalités obtenues pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u) - \mathfrak{F}\varepsilon(u_n), \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\beta\nabla\varphi - \beta\nabla\varphi_n, \nabla\varphi - \nabla\varphi_n)_H \\ & + (\mathcal{K}\nabla\theta - \mathcal{K}\nabla\theta_n, \nabla\theta - \nabla\theta_n)_H + (\dot{\theta} - \dot{\theta}_n, \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq (\mathcal{E}^* \nabla \varphi - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n, \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u) - \mathcal{E} \varepsilon(u_n), \nabla \varphi - \nabla \varphi_n)_H \\
 &- (\mathcal{M} \theta - \mathcal{M} \theta_n, \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_H + (\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u_n), \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\
 &- (\mathcal{P} \theta - \mathcal{P} \theta_n, \nabla \varphi - \nabla \varphi_n)_H - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi} - \mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}_n, \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\
 &+ j((u, \varphi, \theta), \dot{u}_n) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) \\
 &+ \langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta) - \sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_\nu - \dot{u}_{n\nu} \rangle.
 \end{aligned} \tag{VI.87}$$

Comme  $(\mathcal{M} \theta - \mathcal{M} \theta_n, \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_H = (\mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u) - \mathcal{M} \dot{\varepsilon}(u_n), \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)}$ , il vient de (VI.87) que

$$\begin{aligned}
 &(\mathfrak{F} \varepsilon(u) - \mathfrak{F} \varepsilon(u_n), \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_{\mathcal{H}} + (\beta \nabla \varphi - \beta \nabla \varphi_n, \nabla \varphi - \nabla \varphi_n)_H \\
 &+ (\mathcal{K} \nabla \theta - \mathcal{K} \nabla \theta_n, \nabla \theta - \nabla \theta_n)_H + (\dot{\theta} - \dot{\theta}_n, \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq (\mathcal{E}^* \nabla \varphi - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n, \varepsilon(\dot{u} - \dot{u}_n))_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u) - \mathcal{E} \varepsilon(u_n), \nabla \varphi - \nabla \varphi_n)_H \\
 &- (\mathcal{P} \theta - \mathcal{P} \theta_n, \nabla \varphi - \nabla \varphi_n)_H - (\mathcal{P} \nabla \dot{\varphi} - \mathcal{P} \nabla \dot{\varphi}_n, \theta - \theta_n)_{L^2(\Omega)} \\
 &+ j((u, \varphi, \theta), \dot{u}_n) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) \\
 &+ \langle \sigma_\nu(u, \varphi, \theta) - \sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_\nu - \dot{u}_{n\nu} \rangle.
 \end{aligned} \tag{VI.88}$$

Ensuite, en utilisant les propriétés de  $\mathfrak{F}$ ,  $\beta$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\sigma_\nu$  et l'inégalité  $ab \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha} b^2$  avec  $\alpha > 0$ , on trouve après l'intégration de (VI.88) qu'il existe  $C_1 > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
 &\|u(t) - u_n(t)\|_V^2 - \|u_0 - u_{n0}\|_V^2 + \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &- \|\theta_0 - \theta_{n0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_H^2 dt \\
 &\leq C_1 \left\{ \int_0^t \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 dt + \int_0^t \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|_V^2 dt \right. \\
 &+ \int_0^t \|\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t j((u, \varphi, \theta), \dot{u}_n) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) \\
 &\left. + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{VI.89}$$

## Chapitre VI. Problème quasi-statique de Signorini avec frottement non local de Coulomb en thermo-piézoélectricité

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t j((u, \varphi, \theta), \dot{u}_n) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) dt \\
&= \int_0^t \int_{\Gamma_C} \left[ \mu(\|u_\tau\|) |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| - \mu_n(\|u_{n\tau}\|) |R\sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n)| \right] (\|\dot{u}_\tau\| - \|\dot{u}_{n\tau}\|) da dt \\
&\leq \int_0^t \int_{\Gamma_C} \left[ \mu(\|u_\tau\|) - \mu_n(\|u_{n\tau}\|) \right] |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| (\|\dot{u}_\tau\| - \|\dot{u}_{n\tau}\|) da dt \\
&+ \int_0^t \int_{\Gamma_C} \mu_n(\|u_{n\tau}\|) \left[ |R\sigma_\nu(u, \varphi, \theta)| - |R\sigma_\nu(u_n, \varphi_n, \theta_n)| \right] (\|\dot{u}_\tau\| - \|\dot{u}_{n\tau}\|) da dt.
\end{aligned}$$

Et les propriétés de  $\mu$ ,  $\mu_n$ ,  $R$ ,  $\sigma_\nu$  et l'inégalité de Young, implique qu'il existe  $C_2 > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t j((u, \varphi, \theta), \dot{u}_n) - j((u, \varphi, \theta), \dot{u}) + j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}) - j((u_n, \varphi_n, \theta_n), \dot{u}_n) dt \\
&\leq C_2 \left\{ \|\mu(\|u_\tau\|) - \mu_n(\|u_{n\tau}\|)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_C))}^2 + \int_0^t \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|_V^2 dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 dt + \int_0^t \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_H^2 dt \right\}. \tag{VI.90}
\end{aligned}$$

Combinons (VI.89) et (VI.90), nous trouvons qu'il existe une constante  $C_3 > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 + \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_H^2 dt \\
&\leq C_3 \left\{ \|u_0 - u_{n0}\|_V^2 + \|\theta_0 - \theta_{n0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 dt + \int_0^t \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|_V^2 dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \|\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}_n(t)\|_W^2 dt + \|\mu(\|u_\tau\|) - \mu_n(\|u_{n\tau}\|)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_C))}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité de Gronwall pour déduire qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 + \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\dot{u}(t) - \dot{u}_n(t)\|_V^2 \\
&+ \|\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}_n(t)\|_W^2 + \int_0^t \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_W^2 dt + \int_0^t \|\theta(t) - \theta_n(t)\|_H^2 dt \\
&\leq C \left\{ \|u_0 - u_{n0}\|_V^2 + \|\theta_0 - \theta_{n0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mu(\|u_\tau\|) - \mu_n(\|u_{n\tau}\|)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_C))}^2 \right\}. \tag{VI.91}
\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème VI.5 résulte de l'inégalité précédente (VI.90).  $\square$







---

---

# Chapitre VII

---

## Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact statique avec frottement entre un corps thermo-électro-élastique et une fondation rigide. Le matériau est décrit par une loi de comportement thermo-électro-élastique linéaire et le contact est modélisé avec la condition de Signorini et une loi de frottement de type Tresca et avec des conditions de conductivité électrique et thermique. Le modèle se présente sous la forme d'un système couplé en déplacements, en potentiel électrique et en température. L'existence d'une solution faible est prouvée, et ensuite, une technique d'itération successive permettant de résoudre le problème numériquement est proposée et sa convergence est établie. Pour améliorer le conditionnement de notre problème itératif, une formulation lagrangienne augmentée appropriée est utilisée et ceci nous mène à une méthode de relaxation par blocs d'Uzawa. Enfin, des tests bidimensionnels sont réalisés pour illustrer les performances de l'algorithme proposé.

### 1 Modèle mathématique

Le problème statique de contact entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation conductrice se formule de la façon suivante :

**Problème(P).** Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\sigma = \mathfrak{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) - \mathcal{M}\theta \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.1})$$

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

$$D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + \beta E(\varphi) + \mathcal{P} \theta \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.2})$$

$$q = -\mathcal{K} \nabla \theta \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.3})$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.4})$$

$$\text{div } D = \phi_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.5})$$

$$\text{div } q = q_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{VII.6})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (\text{VII.7})$$

$$\sigma \nu = f_N \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (\text{VII.8})$$

$$\sigma_\nu(u, \varphi, \theta) \leq 0, u_\nu \leq 0, \sigma_\nu(u, \varphi, \theta) u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (\text{VII.9})$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq S \\ \|\sigma_\tau\| < S \implies u_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = S \implies (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+), u_\tau = -\lambda \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (\text{VII.10})$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a, \quad (\text{VII.11})$$

$$D \cdot \nu = \phi_b \quad \text{sur } \Gamma_b, \quad (\text{VII.12})$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (\text{VII.13})$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad (\text{VII.14})$$

$$q \cdot \nu = k_c(u_\nu) \phi_L(\theta - \theta_F) \quad \text{sur } \Gamma_C. \quad (\text{VII.15})$$

## 2 Formulation variationnelle du problème

Utilisons le théorème de représentation de Riesz, on définit  $f \in V$ ,  $q_e \in W$  et  $\Theta \in Q$  par

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N v \, da, \quad \forall v \in V, \quad (\text{VII.16})$$

$$(q_e, \xi)_W = \int_{\Omega} \phi_0 \xi \, dx - \int_{\Gamma_b} \phi_b \xi \, da, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VII.17})$$

$$(\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} q_0 \eta \, dx, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{VII.18})$$

Considérons  $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega : V \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  et  $l : V \times W \times W$  telles que

$$j(v) = \int_{\Gamma_C} S \|v_\tau\| \, da, \quad (\text{VII.19})$$

$$\omega((u, \theta); \eta) = \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu) \phi_L(\theta - \theta_F) \eta \, da, \quad \forall \theta \in Q, \forall \eta \in Q, \quad (\text{VII.20})$$

$$l((u, \varphi); \xi) = \int_{\Gamma_C} \psi(u_\nu) \phi_L(\varphi - \varphi_F) \xi \, da, \quad \forall \theta \in Q, \forall \eta \in Q. \quad (\text{VII.21})$$

Selon ces notations et par une procédure standard basée sur les formules de Green, nous pouvons énoncer la formulation variationnelle du problème (P), en termes des déplacements, de potentiel électrique et de température.

**Problème (PV).** *Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le potentiel électrique  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et la température  $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :*

$$(\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v - u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v - u))_H - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v - u))_H + j(v) - j(u) \quad (\text{VII.22})$$

$$\geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in V,$$

$$(\beta \nabla \varphi, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta, \nabla \xi)_H + l((u, \varphi); \xi) = (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W, \quad (\text{VII.23})$$

$$(\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta)_H + \omega(u, \theta; \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{VII.24})$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (PV) données par le résultat suivant.

**Théorème VII.1** *Supposons les hypothèses  $(H_1)$ - $(H_7)$  satisfaites, alors s'il existe  $L^* > 0$  telle que  $\bar{\mu} + L_\tau + L_\psi L + M_\psi + L_{k_c} L + M_{k_c} \leq L^*$ , on a le problème (PV) admet une solution unique.*

La preuve du théorème VII.1 est obtenue en plusieurs étapes en s'appuyant sur le résultat mis en évidence dans l'étude d'une classe d'inéquations variationnelles elliptique et la technique du point fixe. La démonstration complète de ce théorème est donnée dans [10].

### 3 Approximation entièrement discrète et estimation d'erreur

Dans cette section, nous considérons un schéma par éléments finis pour une approximation numérique de la solution du problème variationnel (PV). Nous considérons les espaces discrets  $V^h \subset V$ ,  $Q^h \subset Q$  et  $W^h \subset W$  donnés par

$$V^h = \{v^h \in [C(\bar{\Omega})]^d; \quad v^h|_T \in [P_1(T)]^d, \quad T \in \mathcal{T}^h, \quad v^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}, \quad (\text{VII.25})$$

$$W^h = \{\xi^h \in C(\bar{\Omega}); \quad \xi^h|_T \in P_1(T), \quad T \in \mathcal{T}^h, \quad \xi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \quad (\text{VII.26})$$

$$Q^h = \{\eta^h \in C(\bar{\Omega}); \quad \eta^h|_T \in P_1(T), \quad T \in \mathcal{T}^h, \quad \eta^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N\}, \quad (\text{VII.27})$$

où  $\mathcal{T}^h$  dénote une triangulation de  $\bar{\Omega}$  et  $P_1(T)$  représente l'espace des polynômes de degré global inférieur ou égal à 1 dans  $T$ . Ici,  $h > 0$  indique le paramètre de discrétisation spatiale.

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

L'approximation totalement discrète du problème ( $PV$ ) est la suivante :

**Problème** ( $PV^h$ ). *Trouver le champ des déplacements  $u^h \in V^h$ , le potentiel électrique  $\varphi^h \in W^h$  et la température  $\theta^h \in Q^h$  tels que :*

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^h), \varepsilon(v - u^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^h, \varepsilon(v - u^h))_H - (\mathcal{M} \theta^h, \varepsilon(v - u^h))_H + j(v) - j(u^h) \quad (\text{VII.28}) \\ & \geq (f, v - u^h)_V, \quad \forall v \in V^h. \end{aligned}$$

$$(\beta \nabla \varphi^h, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u^h), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P} \theta^h, \nabla \xi)_H + l((u^h, \varphi^h); \xi) = (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W^h. \quad (\text{VII.29})$$

$$(\mathcal{K} \nabla \theta^h, \nabla \eta)_H + \omega(u^h, \theta^h; \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q^h. \quad (\text{VII.30})$$

Comme dans la section précédente, il est facile de montrer que le problème ( $PV^h$ ) admet une solution unique  $(u^h, \varphi^h, \theta^h)$ . Nous dérivons des estimations d'erreur pour la solution discrète. Prenons  $v = u$  dans (VII.28),  $v = u^h$  dans (VII.22) et sommons les inégalités obtenues, alors

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^h), \varepsilon(v^h - u^h))_{\mathcal{H}} + (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(u^h - u))_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^h, \varepsilon(v^h - u^h))_H + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u^h - u))_H \quad (\text{VII.31}) \\ & - (\mathcal{M} \theta^h, \varepsilon(v^h - u^h))_H - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(u^h - u))_H + j(v^h) - j(u) \geq (f, v^h - u)_V. \end{aligned}$$

Nous utilisons l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^h), \varepsilon(u^h - v^h))_{\mathcal{H}} + (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(u - u^h))_{\mathcal{H}} \\ & = (\mathfrak{F} \varepsilon(u - u^h), \varepsilon(u - u^h))_{\mathcal{H}} - (\mathfrak{F} \varepsilon(u^h), \varepsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}}, \quad (\text{VII.32}) \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F} \varepsilon(u - u^h), \varepsilon(u - u^h))_{\mathcal{H}} \leq R(u; v^h) + (\mathfrak{F} \varepsilon(u - u^h), \varepsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}} \quad (\text{VII.33}) \\ & + (\mathcal{E}^* (\nabla \varphi^h - \nabla \varphi), \varepsilon(v^h - u))_H - (\mathcal{M} (\theta^h - \theta), \varepsilon(v^h - u))_H. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} R(u; v^h) & = (\mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v^h - u))_H \quad (\text{VII.34}) \\ & - (\mathcal{M} \theta, \varepsilon(v^h - u))_H - (f, v^h - u)_V + j(v^h) - j(u). \end{aligned}$$

### VII.3 Approximation entièrement discrète et estimation d'erreur

---

On soustrait (VII.23) de (VII.29), alors il vient que

$$\begin{aligned} & (\beta (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h), \nabla\xi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u - u^h), \nabla\xi^h)_H \\ & - (\mathcal{P}(\theta - \theta^h), \nabla\xi^h)_H - l((u, \varphi); \xi^h) + l((u^h, \varphi^h); \xi^h) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.35})$$

De plus, d'après (VII.29), nous avons

$$\begin{aligned} & (\beta (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h), (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h))_H \\ & \leq (\beta (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h), \nabla\varphi - \nabla\xi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u - u^h), \nabla\xi^h - \nabla\varphi^h)_H \\ & - (\mathcal{P}(\theta - \theta^h), \nabla\xi^h - \nabla\varphi^h)_H \\ & + l((u, \varphi); \xi^h) - l((u, \varphi); \theta^h) - l((u^h, \varphi^h); \xi^h) + l((u^h, \varphi^h); \xi^h). \end{aligned} \quad (\text{VII.36})$$

On soustrait (VII.24) de (VII.30) alors on obtient

$$(\mathcal{K}(\nabla\theta - \nabla\theta^h), \nabla\eta^h)_H - \omega((u, \theta); \eta^h) + \omega((u^h, \theta^h); \eta^h) = 0. \quad (\text{VII.37})$$

On remplace  $\eta^h$  par  $\theta - \theta^h$  et  $\theta - \eta^h$  dans (VII.37), on trouve

$$\begin{aligned} & (\mathcal{K}(\nabla\theta - \nabla\theta^h), \nabla\theta - \nabla\theta^h)_H \leq (\mathcal{K}(\nabla\theta - \nabla\theta^h), \nabla\theta - \nabla\eta^h)_H \\ & + \omega((u, \theta); \eta^h) - \omega((u, \theta); \theta^h) - \omega((u^h, \theta^h); \eta^h) + \omega((u^h, \theta^h); \theta^h). \end{aligned} \quad (\text{VII.38})$$

En ajoutant cette inégalité à (VII.31) et (VII.36), nous déduisons que

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u - u^h), \varepsilon(u - u^h))_{\mathcal{H}} + (\beta (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h), \nabla\varphi - \nabla\varphi^h)_H + (\mathcal{K}(\nabla\theta - \nabla\theta^h), \nabla\theta - \nabla\theta^h)_H \\ & \leq R(u; v^h) + (\mathfrak{F}\varepsilon(u - u^h), \varepsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{E}^*(\nabla\varphi^h - \nabla\varphi), \varepsilon(v^h - u))_H - (\mathcal{M}(\theta^h - \theta), \varepsilon(v^h - u))_H \\ & + (\beta (\nabla\varphi - \nabla\varphi^h), \nabla\varphi - \nabla\xi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u - u^h), \nabla\xi^h - \nabla\varphi^h)_H \\ & - (\mathcal{P}(\theta - \theta^h), \nabla\xi^h - \nabla\varphi^h)_H + (\mathcal{K}(\nabla\theta - \nabla\theta^h), \nabla\theta - \nabla\eta^h)_H \\ & + \omega((u, \theta); \eta^h) - \omega((u, \theta); \theta^h) - \omega((u^h, \theta^h); \eta^h) + \omega((u^h, \theta^h); \theta^h) \\ & + l((u, \varphi); \xi^h) - l((u, \varphi); \theta^h) - l((u^h, \varphi^h); \xi^h) + l((u^h, \varphi^h); \xi^h). \end{aligned}$$

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

Ensuite, en utilisant l'ellipticité des opérateurs  $\mathfrak{F}$ ,  $\beta$  et  $\mathcal{K}$  et l'inégalité ci-dessus, il résulte que

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{F}}\|u - u^h\|_V^2 + m_{\mathcal{K}}\|\theta - \theta^h\|_Q^2 + m_{\beta}\|\varphi - \varphi^h\|_W^2 \\ \leq R(u; v^h) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5. \end{aligned} \quad (\text{VII.39})$$

Avec

$$\begin{aligned} R_1 &= (\mathfrak{F} \varepsilon(u - u^h), \varepsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* (\nabla \varphi^h - \nabla \varphi), \varepsilon(v^h - u))_H \\ &\quad - (\mathcal{M}(\theta^h - \theta), \varepsilon(v^h - u))_H \\ R_2 &= (\beta (\nabla \varphi - \nabla \varphi^h), \nabla \varphi - \nabla \xi^h)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(u - u^h), \nabla \xi^h - \nabla \varphi^h)_H \\ &\quad - (\mathcal{P}(\theta - \theta^h), \nabla \xi^h - \nabla \varphi^h)_H \\ R_3 &= (\mathcal{K} (\nabla \theta - \nabla \theta^h), \nabla \theta - \nabla \eta^h)_H \\ R_4 &= \omega((u, \theta); \eta^h) - \omega((u, \theta); \theta^h) - \omega((u^h, \theta^h); \eta^h) + \omega((u^h, \theta^h); \theta^h), \\ R_5 &= l((u, \varphi); \xi^h) - l((u, \varphi); \theta^h) - l((u^h, \varphi^h); \xi^h) + l((u^h, \varphi^h); \theta^h). \end{aligned}$$

À présent, estimons chacuns des termes de (VII.39) et ceci en utilisant les hypothèses  $H_1$ - $H_8$  et les propriétés de  $j$ ,  $\chi$  et l'inégalité de Young  $ab \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha} b^2$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En effet, nous avons

$$|R_1| \leq \alpha_1 \left\{ \|u - u^h\|_V^2 + \|\varphi - \varphi^h\|_W^2 + \|\theta - \theta^h\|_Q^2 + \|v^h - u\|_V^2 \right\}, \quad (\text{VII.40})$$

$$|R_2| \leq \alpha_2 \left\{ \|u - u^h\|_V^2 + \|\varphi - \varphi^h\|_W^2 + \|\theta - \theta^h\|_Q^2 + \|\xi^h - \varphi\|_W^2 \right\}, \quad (\text{VII.41})$$

$$|R_3| \leq \alpha_3 \left\{ \|\theta - \theta^h\|_Q^2 + \|\eta^h - \theta\|_Q^2 \right\}, \quad (\text{VII.42})$$

$$|R_4| \leq \alpha_4 \left\{ \|u - u^h\|_V^2 + \|\theta - \theta^h\|_Q^2 + \|\eta^h - \theta^h\|_Q^2 \right\}, \quad (\text{VII.43})$$

$$|R_5| \leq \alpha_5 \left\{ \|u - u^h\|_V^2 + \|\varphi - \varphi^h\|_W^2 + \|\xi^h - \varphi^h\|_W^2 \right\}, \quad (\text{VII.44})$$

et en combinant les inégalités (VII.39)-(VII.44), nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_V + \|\theta - \theta^h\|_Q + \|\varphi - \varphi^h\|_W \\ \leq c \left\{ |R(u; v^h)|^{\frac{1}{2}} + \|v^h - u\|_V + \|\xi^h - \varphi\|_W + \|\eta^h - \theta\|_Q \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.45})$$

Alors, nous obtenons le résultat suivant



**Théorème VII.2** *Sous les conditions du théorème VII.1, on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u^h\|_V + \|\varphi - \varphi^h\|_W + \|\theta - \theta^h\|_Q \leq ch. \quad (\text{VII.46})$$

**Preuve .** Pour estimer l'erreur fournie par l'approximation des espaces des éléments finis  $V^h$ ,  $W^h$  et  $Q^h$ , nous utilisons  $\Pi^h u$ ,  $\Pi^h \varphi$  et  $\Pi^h \theta$  les opérateurs d'interpolation par éléments finis standard de  $u$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ , respectivement. Nous avons l'estimation d'erreur d'interpolation suivante [16] :

$$\|u - \Pi^h u\|_V \leq ch|u|_V, \quad \|\varphi - \Pi^h \varphi\|_W \leq ch|\varphi|_W, \quad \|\theta - \Pi^h \theta\|_Q \leq ch|\theta|_Q. \quad (\text{VII.47})$$

De même, en utilisant (VII.34) et (I.5), nous obtenons

$$R(u, v^h) = (\sigma, \epsilon(v^h - u))_{\mathcal{H}} + j(v^h) - j(u) - (f, v^h - u)_V \leq \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau (v_\tau^h - u_\tau) da.$$

Alors, nous trouvons

$$|R(u, v^h)| \leq c\|u_\tau - v_\tau^h\|_V. \quad (\text{VII.48})$$

Par suite, en utilisant (VII.45), (VII.47) et (VII.48), on trouve (VII.46). □

## 4 Méthode de décomposition itérative successive

Nous proposons dans cette partie une méthode numérique pour donner une solution approchée du problème (VII.22)-(VII.24), en utilisant une technique de découplage (VII.55)-(VII.57) et une méthode de décomposition basée sur la méthode Lagrangienne augmentée (Algorithme 2). Nous commençons par la méthode itérative successive suivante, étant donné  $(u^0, \varphi^0, \theta^0)$ , nous définissons la suite  $(u^n, \varphi^n, \theta^n) \in V \times W \times Q$  par l'algorithme suivant.

### Algorithme 1.

*Étape 1. Trouver la température  $\theta^{n+1} \in Q$  telle que*

$$(\mathcal{K} \nabla \theta^{n+1}, \nabla \eta)_H + \omega(u^n, \theta^n; \eta) = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{VII.49})$$

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

Étape 2. Trouver le champ des déplacements  $u^{n+1} \in V$  et le potentiel électrique  $\varphi^{n+1} \in W$  tels que

$$(\mathfrak{F}\varepsilon(u^{n+1}), \varepsilon(v - u^{n+1}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{n+1}, \varepsilon(v - u^{n+1}))_H \quad (\text{VII.50})$$

$$- (\mathcal{M}\theta^{n+1}, \varepsilon(v - u^{n+1}))_H + j(v) - j(u^{n+1}) \geq (f, v - u^{n+1})_V, \quad \forall v \in V.$$

$$(\beta \nabla \varphi^{n+1}, \nabla \xi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u^{n+1}), \nabla \xi)_H - (\mathcal{P}\theta^{n+1}, \nabla \xi)_H + l((u^n, \varphi^n); \xi) \quad (\text{VII.51})$$

$$= (q_e, \xi)_W, \quad \forall \xi \in W.$$

### 4.1 Convergence

On montre ici que la méthode itérative successive (VII.49)-(VII.51) converge au sens du théorème suivant :

**Théorème VII.3** *Sous les hypothèses du théorème VII.1, la méthode d'itération (VII.49)-(VII.51) converge, c-à-d*

$$\|u^n - u\|_V \rightarrow 0, \quad \|\varphi^n - \varphi\|_W \rightarrow 0, \quad \|\theta^n - \theta\|_Q \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

**Preuve.** Posons  $v = u^{n+1}$  dans (VII.22),  $\xi = \varphi^{n+1} - \varphi$  dans (VII.23),  $\eta = \theta^{n+1} - \theta$  in (VII.24) et additionnons les inégalités obtenues pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(u^{n+1} - u))_{\mathcal{H}} + (\beta \nabla \varphi, \nabla(\varphi^{n+1} - \varphi))_H + (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla(\theta^{n+1} - \theta))_H \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(u^{n+1} - u))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla(\varphi^{n+1} - \varphi))_H \\ & - (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(u^{n+1} - u))_H - (\mathcal{P}\theta, \nabla(\varphi^{n+1} - \varphi))_H \\ & + j(u^{n+1}) - j(u) + l((u, \varphi); \varphi^{n+1} - \varphi) + \omega(u, \theta; \theta^{n+1} - \theta) \\ & \geq (f, u^{n+1} - u)_V + (q_e, \varphi^{n+1} - \varphi)_W + (\Theta, \theta^{n+1} - \theta)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{VII.52})$$

Posons  $v = u$  dans (VII.49),  $\xi = \varphi - \varphi^{n+1}$  dans (VII.50),  $\eta = \theta - \theta^{n+1}$  dans (VII.51) et additionnons les inégalités obtenues résultantes, il vient

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{F}\varepsilon(u^{n+1}), \varepsilon(u - u^{n+1}))_{\mathcal{H}} + (\beta \nabla \varphi^{n+1}, \nabla(\varphi - \varphi^{n+1}))_H + (\mathcal{K} \nabla \theta^{n+1}, \nabla(\theta - \theta^{n+1}))_H \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi^{n+1}, \varepsilon(u - u^{n+1}))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u^{n+1}), \nabla(\varphi - \varphi^{n+1}))_H \\ & - (\mathcal{M}\theta^{n+1}, \varepsilon(u - u^{n+1}))_H - (\mathcal{P}\theta^{n+1}, \nabla(\varphi - \varphi^{n+1}))_H \\ & + j(u) - j(u^{n+1}) + l((u^n, \varphi^n); \varphi - \varphi^{n+1}) + \omega(u^n, \theta^n; \theta - \theta^{n+1}) \\ & \geq (f, u - u^{n+1})_V + (q_e, \varphi - \varphi^{n+1})_W + (\Theta, \theta - \theta^{n+1})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{VII.53})$$

Ensuite, on soustrait (VII.52) de (VII.53) et nous utilisons (IV.9), pour déduire

$$\begin{aligned}
 & (\mathfrak{F} \varepsilon(u^{n+1}) - \mathfrak{F} \varepsilon(u), \varepsilon(u^{n+1} - u))_{\mathcal{H}} + (\beta \nabla \varphi^{n+1} - \beta \nabla \varphi, \nabla(\varphi^{n+1} - \varphi))_H \\
 & + (\mathcal{K} \nabla \theta^{n+1} - \mathcal{K} \nabla \theta, \nabla(\theta^{n+1} - \theta))_H \\
 & \leq -(\mathcal{M} \theta^{n+1} - \mathcal{M} \theta, \varepsilon(u^{n+1} - u))_H - (\mathcal{P} \theta^{n+1} - \mathcal{P} \theta, \nabla(\varphi^{n+1} - \varphi))_H \\
 & + l((u, \varphi); \varphi^{n+1} - \varphi) - l((u^n, \varphi^n); \varphi^{n+1} - \varphi) \\
 & + \omega(u, \theta; \theta^{n+1} - \theta) - \omega(u^n, \theta^n; \theta^{n+1} - \theta).
 \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (H<sub>1</sub>)-(H<sub>7</sub>), on trouve, après simplification, que

$$\begin{aligned}
 & m_{\mathfrak{F}} \|u^{n+1} - u\|_V^2 + m_{\beta} \|\varphi^{n+1} - \varphi\|_W^2 + m_{\mathcal{K}} \|\theta^{n+1} - \theta\|_Q^2 \\
 & \leq \mathcal{M}^* \|u^{n+1} - u\|_V \|\theta^{n+1} - \theta\|_Q + \mathcal{P}^* \|\theta^{n+1} - \theta\|_Q \|\varphi^{n+1} - \varphi\|_W \\
 & + LL_{\psi} c_0 c_1 \|u^n - u\|_V \|\varphi^{n+1} - \varphi\|_W + M_{\psi} c_1^2 \|\varphi^n - \varphi\|_W \|\varphi^{n+1} - \varphi\|_W \\
 & + LL_{K_c} c_0 c_2 \|u^n - u\|_V \|\theta^{n+1} - \theta\|_W + M_{K_c} c_2^2 \|\theta^n - \theta\|_W \|\theta^{n+1} - \theta\|_W.
 \end{aligned}$$

Si on note  $X = V \times W \times Q$ , alors, après simplification, on obtient

$$\|x^{n+1} - x\|_X \leq \frac{LL_{\psi} c_0 c_1 + M_{\psi} c_1^2 + LL_{K_c} c_0 c_2 + M_{K_c} c_2^2}{\inf(m_{\mathfrak{F}}, m_{\beta}, m_{\mathcal{K}}) - \mathcal{M}^* - \mathcal{P}^*} \|x^n - x\|_X. \quad (\text{VII.54})$$

Et en utilisant l'hypothèse de petitesse du théorème VII.1, alors le théorème VII.3 est établi.  $\square$

#### - Méthode de découplage pour (VII.49)

Par le théorème de représentation de Riesz, on définit  $\mathfrak{K} : Q \rightarrow Q$  et  $\tilde{\Theta} \in Q$  comme suit

$$(\mathfrak{K}\theta, \eta)_Q = (\mathcal{K} \nabla \theta, \nabla \eta), \quad \forall \eta \in Q, \quad (\text{VII.55})$$

$$(\tilde{\Theta}, \eta)_Q = (\Theta, \eta)_{L^2(\Omega)} + \omega(u^k, \theta^k; \eta), \quad \forall \eta \in Q. \quad (\text{VII.56})$$

Alors on trouve

$$\theta^{k+1} = \mathfrak{K}^{-1} \tilde{\Theta}, \quad (\text{VII.57})$$

#### - Méthode lagrangienne augmentée pour (VII.50)-(VII.51)

Dans la suite, nous considérons l'espace produit  $\tilde{X} = V \times W$  et nous définissons  $A : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

et  $g \in \tilde{X}$  pour tout  $x = (u, \varphi)$ ,  $y = (v, \xi) \in \tilde{X}$  par les expressions suivantes

$$(Ax, y)_{\tilde{X}} = (\mathfrak{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_H + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v))_H + (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla \xi)_H - (\beta \nabla \varphi, \nabla \xi),$$

$$(g, y)_{\tilde{X}} = (f, v)_V + (\mathcal{M} \theta^{n+1}, \varepsilon(v))_H - (q_e, \xi)_{L^2(\Omega)} - (\mathcal{P} \theta^{n+1}, \nabla \xi) + l((u^n, \varphi^n); \xi).$$

Pour des raisons de simplification, nous utilisons la même approche et les mêmes notations utilisées dans [29]. Ici nous donnons directement l'algorithme de résolution du problème (VII.50)-(VII.51), et nous notons qu'il est basé sur la méthode lagrangienne augmentée que l'on peut trouver dans Glowinski et Tallec [31].

Soit  $r > 0$  le paramètre de pénalisation, nous introduisons des inconnues auxiliaires  $p = (p_c, p_f)$  ( $c$  pour le contact et  $f$  pour le frottement). L'algorithme 2 ci-dessous représente la méthode de relaxation par blocs d'Uzawa pour (VII.50)-(VII.51), nous réitérons jusqu'à ce que l'erreur relative sur  $x^k$ ,  $p_c^k$  et  $p_f^k$  soit suffisamment petit :

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \|p_c^{k+1} - p_c^k\|^2 + \|p_f^{k+1} - p_f^k\|^2}{\|x^k\|^2 + \|p_c^k\|^2 + \|p_f^k\|^2} < 10^{-4}. \quad (\text{VII.58})$$

**Algorithme 2.** Algorithme de relaxation par blocs d'Uzawa pour (VII.50)-(VII.51) :

**Initialisation.** Calculer successivement  $x^{k+1}$ ,  $p^{k+1} = (p_c^{k+1}, p_f^{k+1})$  et  $\lambda^{k+1} = (\lambda_c^{k+1}, \lambda_f^{k+1})$  comme suit.

**Étape 1.** Prend  $\bar{p}_c^k = r p_c^k - \lambda_c^k$ ,  $\bar{p}_f^k = r p_f^k - \lambda_f^k$ . Trouver  $x^{k+1} = (u^{k+1}, \varphi^{k+1}) \in \tilde{X}$  tel que

$$(Ax^{k+1}, y)_{\tilde{X}} + r(u_\nu^{k+1}, v_\nu)_{\Gamma_C} + (u_\tau^{k+1}, v_\tau)_{\Gamma_C} = (g^k, y)_{\tilde{X}} + r(\bar{p}_c^k, v_\nu)_{\Gamma_C} + (\bar{p}_f^k, v_\tau)_{\Gamma_C}, \forall y \in \tilde{X}.$$

**Étape 2.** Calculer les variables auxiliaire de contact et de frottement

$$p_c^{k+1} = u_\nu^{k+1} + \frac{1}{r} \left[ \lambda_c^k - \max(0, \lambda_c^k + r(u_\nu^{k+1} - g)) \right],$$

$$p_f^{k+1} = \begin{cases} \frac{|\lambda_f^k + r u_\tau^k| - s_n}{r |\lambda_f^k + r u_\tau^k|} (\lambda_f^k + r u_\tau^k) & \text{si } |\lambda_f^k + r u_\tau^k| > S, \\ 0 & \text{si } |\lambda_f^k + r u_\tau^k| \leq S. \end{cases}$$

**Étape 3.** Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange

$$\lambda_c^{k+1} = \lambda_c^k + r(u_\nu^k - p_c^k)$$

$$\lambda_f^{k+1} = \lambda_f^k + r(u_\tau^k - p_f^k).$$

## 4.2 Algorithme de résolution

Dans cette section, nous appelons les résultats que nous avons trouvés précédemment, en première étape nous utilisons la méthode de découplage (VII.55)-(VII.57) pour calculer  $\theta^k$  et en deuxième étape nous utilisons l'algorithme 2 pour calculer  $(u^{k+1}, \varphi^{k+1})$ . Ainsi, nous obtenons l'algorithme suivant :

**Algorithme 3.** Méthode de résolution pour (VII.49)-(VII.51) :

**Initialisation.**  $u^0, \varphi^0$  et  $\theta^0$  sont donnés.

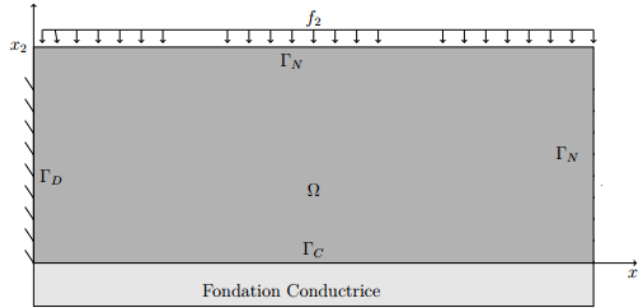
**Itération.** Calculons  $u^{k+1}, \varphi^{k+1}$  et  $\theta^{k+1}$  comme suit :

**Étape 1.** Calculons  $\theta^{k+1}$  par (VII.55)-(VII.57).

**Étape 2.** Calculons  $(u^{k+1}, \varphi^{k+1})$  par l'algorithme 2.

## 5 Simulation numérique

Afin de tester la validité et la performance de l'algorithme proposé dans la section précédente, nous avons mis en œuvre quelques tests numériques en dimension deux. Le programme réalisant l'algorithme présenté dans cette thèse, est écrit en langage MATLAB.



**Fig. VII.1** – Configuration initiale du cadre physique.

Nous considérons le domaine à deux dimensions décrit dans la figure (VII.1). Le domaine  $\Omega$  est un rectangle de dimension  $2m \times 1m$  initialement en contact avec une fondation conductrice. Le corps est encasté sur la partie  $\Gamma_D = [0] \times [0, 1]$ , une densité de forces surfaciques  $\sigma.n = -2.x_2$  est appliquée sur  $\Gamma_N = [0, 2] \times [1]$  où le potentiel électrique est nul et sur la partie  $\Gamma_D \cup \Gamma_N$  la température est nulle. Sur la partie  $\Gamma_C = [0, 2] \times [0]$ , le corps est en contact avec une fondation conductrice avec  $\varphi_F = 32 V$  et  $\theta_F = 6 K$ . Finalement, nous supposons que les efforts volumiques et les charges électriques et thermique surfaciques et volumiques sont nuls.

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

Nous prendrons dans toutes la suite  $r = 14.67755$  le paramètre de pénalité.

Les équations VII.4-VII.5 peuvent être formulées dans le cas d'une déformation plane comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} & 0 & 0 & e_{32} & m_{11} \\ f_{13} & f_{33} & 0 & 0 & e_{33} & m_{12} \\ 0 & 0 & f_{44} & e_{24} & 0 & m_{22} \\ 0 & 0 & e_{24} & -\beta_{22} & 0 & p_2 \\ e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & -\beta_{33} & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{23} \\ -E_2 \\ -E_3 \\ \theta \end{bmatrix}$$

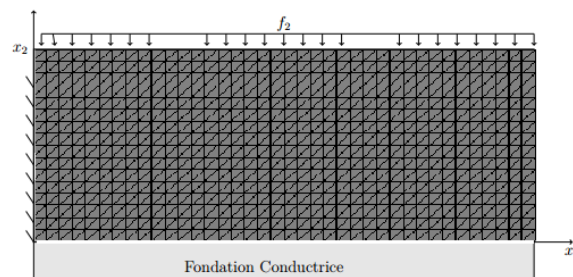
Suivant [24], les constantes du matériau sont :

Élastiques (GPa)				Piézoélectriques (C/m <sup>2</sup> )			Diélectriques C <sup>2</sup> /(Nm <sup>2</sup> )	
$f_{11}$	$f_{13}$	$f_{33}$	$f_{44}$	$e_{32}$	$e_{33}$	$e_{24}$	$\beta_{22}$	$\beta_{33}$
8	4.4	8	1.8	0	0	0	4	4

Dilatation thermique (K)			Pyroélectrique (N/CK)	
$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{22}$	$p_2$	$p_3$
60	60	0	0	0

**Tab. VII.1** – Les valeurs des coefficients des matériaux thermo-piézoélectriques (Polymère).

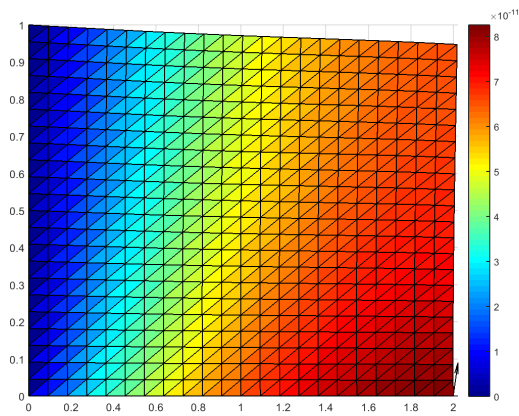
La discrétisation est faite avec des éléments finis triangulaires de type  $P1$ . Le maillage du domaine comporte 968 éléments triangulaires reliés à 529 noeuds dont 23 noeuds répartis sur l'interface de contact  $\Gamma_C$  (voir la figure suivante).



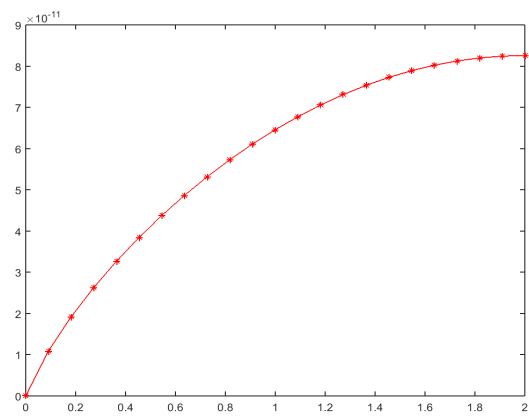
**Fig. VII.2** – La structure discrétisée du corps thermo-piézoélectrique en contact avec une fondation.

Maintenant, nous représentons les résultats numériques obtenus. Nous donnons les corps déformés, le potentiel électrique et le flux de température sur l'interface de contact pour différentes valeurs de  $k_c$  et  $k_e$ .

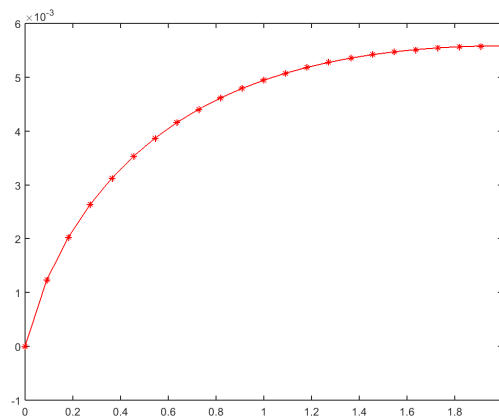
- Le cas  $k_c = 0.25$  et  $k_e = 0.25$ .



**Fig. VII.3** – Configuration déformée.



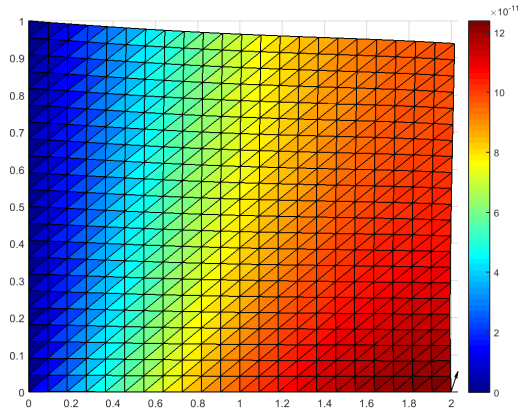
**Fig. VII.4** – Potentiel électrique sur  $\Gamma_C$ .



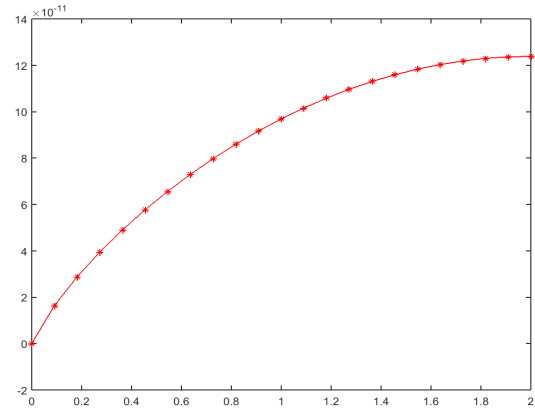
**Fig. VII.5** – Température sur  $\Gamma_C$ .

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

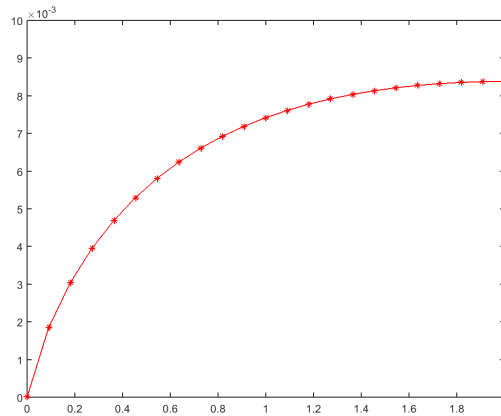
- Le cas  $k_c = 0.5$  et  $k_e = 0.5$ .



**Fig. VII.6** – Configuration déformée.



**Fig. VII.7** – Potentiel électrique sur  $\Gamma_C$ .



**Fig. VII.8** – Température sur  $\Gamma_C$ .



- Le cas  $k_c = 1$  et  $k_e = 1$ .

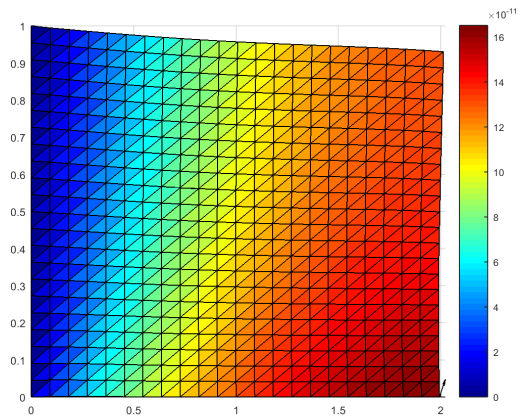


Fig. VII.9 – Configuration déformée.

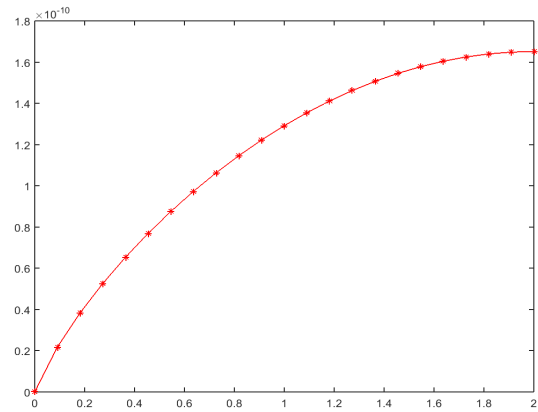


Fig. VII.10 – Potentiel électrique sur  $\Gamma_C$ .

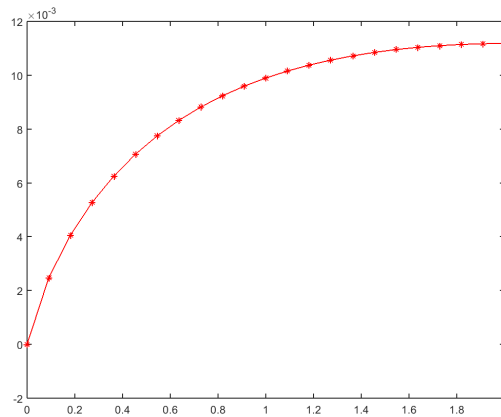


Fig. VII.11 – Température sur  $\Gamma_C$ .

Le tableau VII.2 (respectivement le tableau VII.3) ci-dessous donne les nombres des itérations et le temps de calcul (cpu-time) de notre solution approchée pour différentes valeurs de  $h$  (respectivement pour différentes valeurs de  $k_c$  et  $k_e$ ).

## Chapitre VII. Traitement numérique d'un problème de contact statique avec frottement en thermo-piézoélectricité

---

Taille du maillage $\Omega/\Gamma_c$	itération	cpu(s)
16/4	26	$3.906250e - 01$
64/8	30	$9.375000e - 01$
256/16	33	$8.484375e + 00$
576/24	33	$5.575000e + 01$

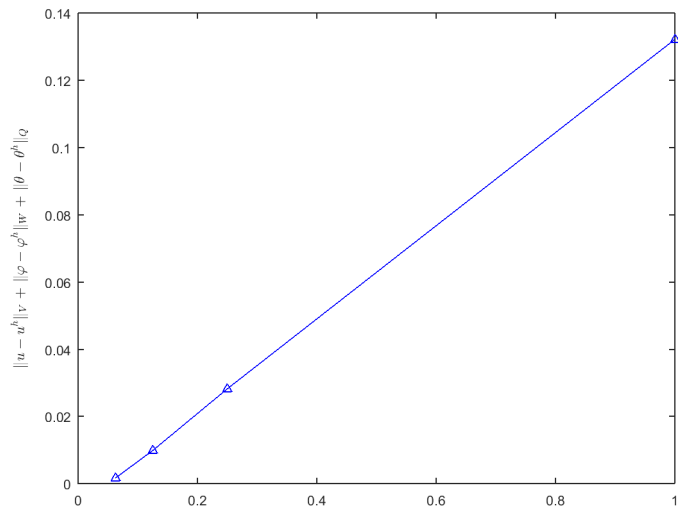
**Tab. VII.2** – Performances de l'algorithme 3 pour différentes valeurs des pas de maillage avec  $k_e = 0.75$  et  $k_c = 0.75$ .

$(k_c, k_e)$	itération	cpu(s)
(0.25, 0.25)	17	$4.359375e + 00$
(0.5, 0.5)	21	$5.562500e + 00$
(0.75, 0.75)	26	$6.312500e + 00$
(1, 1)	33	$8.734375e + 00$

**Tab. VII.3** – Performances de l'algorithme 3 pour différentes valeurs de  $k_c$  et  $k_e$  avec pas du maillage  $h = 1/23$ .

Nous remarquons que le potentiel électrique et la température varient de la même façon que les coefficients de conductivité électrique et thermique ( $k_c$  et  $k_e$ ). Autrement dit, les allures des distributions du potentiel électrique et de la température croissent lorsque les coefficients de la conductivité électrique et thermique ( $k_c$  et  $k_e$ ) croissent. Ces résultats sont compatibles avec la condition à la limite de contact électrique et thermique que nous utilisons sur l'interface de contact, et ainsi, ils montrent l'effet de la conductivité de la fondation sur le processus.

Pour voir le comportement de la convergence du schéma discret, nous calculons une séquence de solutions numériques basée sur des discrétisations du domaine  $(0, 2) \times (0, 1)$  du type illustré à la figure VII.2. Ensuite, nous fournissons les valeurs d'erreurs estimées pour plusieurs valeurs du pas de discrétisation  $h$ . La solution numérique correspondante à  $h = 1/23$  est prise comme solution forte, qui sert à calculer les erreurs des solutions numériques. Sur la figure VI.12, les erreurs estimées sont présentées dans les cas des lois de Coulomb et de Signorini. La convergence du schéma d'éléments finis est clairement observée. Ainsi, le comportement de convergence asymptotique linéaire (VII.46) est obtenu.



**Fig. VII.12** – Les erreurs estimées ( $h$ ).



---

## Conclusion et perspectives

Ce travail de recherche a été consacré à l'étude mathématique et numérique de certains problèmes de contact entre un corps piézoélectrique et une fondation conductrice, et plus particulièrement pour un comportement thermo-électro-élastique en régime quasi-statique.

En première étape, nous avons traité un problème de contact bilatéral avec frottement sec entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation thermiquement conductrice. Le processus est supposé quasi-statique et la loi de comportement thermo-électro-élastique est linéaire. Sous l'hypothèse de petitesse des déplacements élastiques et de coefficient de frottement, nous avons établi un résultat d'existence de la solution faible du problème. Ensuite dans la deuxième et la troisième partie, nous avons généralisé cette étude (approche) aux cas de contact unilatéral et compliance normale avec frottement sec en tenant compte des conductivités thermique, électrique et de la fondation.

Nous avons précisé pour chaque problème, le modèle mathématique et donné sa formulation variationnelle exprimée sous forme d'inéquation variationnelle. Nous avons prouvé l'existence de la solution faible de chaque problème quand les coefficients de conductivité électrique, thermique et de frottement sont suffisamment petits.

Dans la quatrième partie, nous avons étudié un problème de contact unilatéral avec frottement non-local de Coulomb entre un corps thermo-électro-élastique et une fondation thermiquement conductrice. Nous avons établi la formulation faible du problème et nous avons montré qu'elle admet une solution quand le coefficient de frottement est assez petit. Aussi, nous avons donné un résultat de dépendance de la solution par rapport au coefficient de frottement et aux conditions initiales.

D'autre part, le problème de l'unicité de la solution pour ce type de problèmes reste toujours ouvert. En effet, la non-unicité d'une solution est fort probable en raison du fort couplage des lois de comportement et des conditions aux limites. Et contrairement aux problèmes tenant compte des effets visqueux, en passant à la limite où la viscosité disparaît, entraîne une baisse

de régularité des solutions qui peut également entraîner une perte d'unicité de la solution [68]. Techniquement, si  $x_1$  et  $x_2$  sont des solutions du problème variationnel, nous avons rencontré des difficultés à montrer que  $\|x_1 - x_2\|_{W^{1,\infty}(0;T;X)} = 0$ , même si le coefficient de frottement  $\bar{\mu}$  et le pas de temps sont suffisamment petits. De manière générale, la perte d'unicité des solutions peut être associée à une perte de validité des approximations statiques ou quasi-statiques et à la présence d'instabilités dynamiques [42]. En dernier lieu, nous remarquons que l'estimation de la petitesse de  $\bar{\mu}$ ,  $k_c$ , et  $\psi$  pour assurer l'existence de solutions constitue également un problème ouvert, intéressant et difficile [33, 34]. D'autre part, nous avons constaté que l'ajout de la viscosité aux modèles entraîne une augmentation de la régularité des solutions [68]. Cette remarque peut être utilisée pour étudier le caractère d'unicité de la solution des modèles proposés en ajoutant un petit terme de viscosité aux lois de comportement thermo-électro-élastiques.

Dans la dernière partie, nous avons présenté un schéma itératif pour un problème statique de contact thermo-électro-élastique avec la loi de frottement de Tresca. Concernant le traitement numérique, nous avons utilisé, dans un premier temps la méthode Lagrangienne Augmentée combinée avec la relaxation par bloc d'Uzawa. Ensuite, nous avons introduit l'approximation par éléments finis du problème proposée en donnant un résultat d'existence et d'unicité de sa solution faible. La convergence de la solution par rapport au pas de discrétisation est également établie. Une méthode itérative de résolution du problème discrétisé est aussi proposée. Enfin, nous avons donné un algorithme de résolution du problème discrétisé et on a présenté quelques simulations numériques en 2D.

Nos futurs travaux seront d'essayer d'étendre l'approximation et la simulation numérique pour résoudre ces problèmes en cas quasi-statique. Le problème de la piézoélectricité étudié dans cette thèse ne prend pas en considération d'autres phénomènes thermiques et magnétiques. Pour mieux approcher la réalité physique, il est envisageable d'étendre les résultats d'estimation de la solution obtenus à un problème de contact en magnéto-thermo-électro-élasticité.

---

## Bibliographie générale

- [1] *IEEE Standard on Piezoelectricity*. ANSI/IEEE Std, 1996.
- [2] R. S. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [3] B. N. Agrawal and K. E. Treanor. Shape control of a beam using piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, 8(9) :729–740, 1999.
- [4] A. Amassad, K.L. Kuttler, M. Rochdi, and M. Shillor. Quasi-static thermoviscoelastic contact problem with slip dependent friction coefficient. *Mathematical and Computer Modelling*, 36 :839 – 854, 2002.
- [5] M. Aouadi. Generalized thermo-piezoelectric problems with temperature-dependent properties. *International Journal of Solids and Structures*, 43(21) :6347–6358, 2006.
- [6] H. T. Banks, R. C. Smith, and Y. Wang. *Smart material structures : modeling, estimation and control*. Masson, Paris, 1996.
- [7] R. C. Batra and J. S. Yang. Saint-venant’s principle in linear piezoelectricity. *Journal of Elasticity*, 38(2) :209–218, 1995.
- [8] H. Benaissa, E-H Benkhira, R. Fakhar, and A Hachlaf. Quasistatic frictional thermo-piezoelectric contact problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pages 1–20, 2018.
- [9] H. Benaissa, E-H Benkhira, R. Fakhar, and A Hachlaf. On the signorini’s contact problem with non-local coulomb’s friction in thermo-piezoelectricity. *Acta Applicandae Mathematicae*, 169 :33–58, 2020.
- [10] H. Benaissa, EL-H. Essoufi, and R. Fakhar. Existence results for unilateral contact problem with friction of thermo-electro-elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 36(7) :911–926, 2015.
- [11] H. Benaissa, EL-H. Essoufi, and R. Fakhar. Variational analysis of thermo-piezoelectric contact problem with friction. *Journal of advanced research in applied mathematics*, 7(2) :52–75, 2015.
- [12] H. Benaissa, EL-H. Essoufi, and R. Fakhar. Analysis of a signorini problem with nonlocal friction in thermo-piezoelectricity. *Glasnik matematički*, 51 :391–411, 2016.

- [13] P. Bisenga, F. Maceri, and F. Lebon. The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support. In *Contact Mechanics*, volume 103 of *Solid Mechanics and Its Applications*, pages 347–354. Springer Netherlands, 2002.
- [14] H. Brézis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Annales Inst. Fourier*, 18(1) :115–175, 1968.
- [15] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et application*. Masson, Paris, 1987.
- [16] W. G. Cady. *An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*. Mc Graw-Hill, New York, 1946.
- [17] D. S. Chandrasekharaiah. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media. *Acta Mechanica*, 71(1-4) :39–49, 1988.
- [18] K. Chandrashekhara and R. Tenneti. Thermally induced vibration suppression of laminated plates with piezoelectric sensor and actuator. *Smart Materials and Structures.*, 4(4) :281–290, 1995.
- [19] O. Chau. *Analyse variationnelle et numérique de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact*. PhD thesis, University of Perpignan, France, 2000.
- [20] M. Cocu. Existence of solutions of signorini problems with friction. *International Journal of Engineering Science*, 22(5) :567–575, 1984.
- [21] M. Cocu, E. Pratt, and M. Raous. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact. *International Journal of Engineering Science*, 34 :783 – 798, 1996.
- [22] P. Curie and M. Curie. *Comptes rendus*, 1980.
- [23] L. Demkowicz and J. T. Oden. On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods et Applications*, 6(10) :1075–1093, 1982.
- [24] M. L. Dunn. Micromechanics of coupled electroelastic composites : Effective thermal expansion and pyroelectric coefficients. *Journal of Applied Physics*, 73 :5131, 1993.
- [25] G. Duvaut. Free boundary problems connected with thermoelasticity and unilateral contact. In *Free Boundary Problems*, volume II, Roma, 1980.
- [26] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [27] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North Holland, Amsterdam, 1979.
- [28] EL-H. Essoufi, EL-H. Benkhira, and R. Fakhar. Analysis and numerical approximation of an electroelastic frictional contact problem. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(3) :355–378, 2010.



- 
- [29] EL-H. Essoufi, R. Fakhar, and J. Koko. A decomposition method for a unilateral contact problem with tresca friction arising in electroelastostatics. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 36 :1533–1558, 2015.
- [30] G. Fichera. Problemi elettrostatici con vincoli unilaterali : il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno. *Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, 7(2) :91–140, 1964.
- [31] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [32] W. Han and M. Sofonea. Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance. *Applicationes mathematicae*, 26(4) :415–435, 1999.
- [33] P. Hild. An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with coulomb friction. *Comptes Rendus Mathématique*, 337 :685–688, 2003.
- [34] P. Hild. Non-unique slipping in the coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 57 :225–235, 2004.
- [35] T. Ikeda. *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [36] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [37] S. B. Lang. Pyroelectricity : from ancient curiosity to modern imaging tool. *Physics Today*, 58(8) :31–36, 2005.
- [38] Z. Lerguet, M. Shillor, and M. Sofonea. A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2007(170) :1–16, 2007.
- [39] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [40] X. Lu and S Hanagud. Extended thermodynamic model for piezoelectric ceramics, 42nd aiaa/asme/ahs structures. *Structural Dynamics and Materials Conf. Seattle, Wk*, 2001.
- [41] F. Maceri and P. Bisenga. The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4) :19–28, 1998.
- [42] J. A. C. Martins and J. T. Oden. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 11(3) :407–428, 1987.
- [43] S. Migórsk, A. Ochal, and M. Sofonea. Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials,. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 361 :161–176, 2010.
- [44] S. Migórsk, A. Ochal, and M. Sofonea. Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials,. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382 :701–713, 2011.

- [45] S. Migórsk, A. Ochal, and M. Sofonea. Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities. models and analysis of contact problems. *Advances in Mechanics and Mathematics 26*, Springer, New York, 5, 2013.
- [46] S. Migórsk, A. Ochal, and M. Sofonea. A class of hemivariational inequality for electroelastic contact problems with slip dependent friction. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 144A :1007–1025, 2014.
- [47] S. Migórski. Hemivariational inequality for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 6 :1339, 2006.
- [48] S. Migórski. Hemivariational inequality for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 6 :5131, 2006.
- [49] S. Migórski. A class of hemivariational inequalities for electroelastic contact problems with slip dependent friction. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 1(1) :117–126, 2008.
- [50] S. Migórski. A class of hemivariational inequality for electroelastic contact problems with slip dependent friction. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 1 :117–126, 2008.
- [51] S. Migórski, A. Ochal, and M. Sofonea. Weak solvability of a piezoelectric contact problem. *European Journal of Applied Mathematics.*, 20(2) :145–167, 2009.
- [52] R. D. Mindlin. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In *Problems on Continuum Mechanics*, pages 282–290. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1961.
- [53] R. D. Mindlin. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 10(6) :625–637, 1974.
- [54] D. Motreanu and M. Sofonea. Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials. *Abstract and Applied Analysis*, 4 :255–279, 1999.
- [55] D. Motreanu and M. Sofonea. Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 10(1) :103–118, 2000.
- [56] J. Néčas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [57] J. Nečas and I. Hlaváček. *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies : an introduction*. Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [58] J. Néčas, J. Jarušek, and J. Haslinger. On the solution of the variational inequality to signorini problem with small friction. *Bolletino UMI*, 5(17-B) :796–811, 1980.
- [59] W. Nowacki. *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Nourdhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1975.
- [60] W. Nowacki. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*, 1(2) :171–182, 1978.

- 
- [61] W. Nowacki. Foundations of linear piezoelectricity. *Electromagnetic interactions in elastic solids*, 257 :105–157, 1979.
- [62] J. T. Oden and E. Pires. Contact problems in elastostatic with non-local friction laws. *TICOM Report, University of Texas, Austin*, 80 :81–82, 1981.
- [63] J. T. Oden and E. Pires. Contact problems in elastostatics with non-local friction law. *Journal of applied mechanics*, 50 :67–76, 1983.
- [64] P. D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in Mechanics and Applications*. Birkhäuser-Verlag, Basel, 1985.
- [65] L. Pinchard. *Electromagnétisme classique et théorie des distributions*. Ellipses, 1990.
- [66] T. Roubiček. *Nonlinear partial differential equations with applications*. Birkhäuser-Verlag, 2005.
- [67] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [68] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega. *Models and Analysis of Quasistatic Contact : Variational Methods. Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin/Heidelberg, 2004.
- [69] A. Signorini. *Sopra alcune questioni di elastostatica*. Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933.
- [70] A. Signorini. Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 2 :231–251, 1933.
- [71] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Am. Math. Soc. Transl.*, 34(2) :39–68, 1963.
- [72] M. Sofonea and EL-H. Essoufi. A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. *Mathematical Modelling and Analysis*, 9(3) :229–242, 2004.
- [73] M. Struwe. Variational methods; applications to nonlinear pde and hamiltonian systems. *Springer-Verlag*, 1990.
- [74] T. R. Tauchert. Piezothermoelastic behavior of laminated plate. *Journal of Thermal Stresses*, 15(1) :25–37, 1992.
- [75] B. Tengiz and G. Tengiz. *Some dynamic problems of the theory of electroelasticity*. GCI, 1997.
- [76] H. F. Tiersten. *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press, New York, 1969.
- [77] H. F. Tiersten. On the nonlinear equations of electro-thermo-elasticity. *International journal of engineering sciences*, 9(7) :587–604, 1971.
- [78] H. F. Tiersten. *Linear piezoelectric plate vibrations : elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates*. Springer, 2013.
- [79] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik*. BG Teubner, Leipzig, Germany, 1928.



---

## Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude mathématique et numérique de quelques problèmes aux limites de contact avec frottement, entre un corps déformable et une fondation thermiquement et/ou électriquement conductrice. Nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations et nous étudions des processus statiques et quasi-statiques pour des matériaux thermo-électro-élastiques. Les résultats obtenus concernant l'existence des solutions faibles ainsi que le comportement des solutions thermo-électro-élastiques par rapport au coefficient du frottement et les données initiales. Nous présentons une modélisation détaillée du contact thermo-piézoélectrique et nous décrivons les hypothèses et les équations qui modélisent ces problèmes ainsi que les conditions aux limites avec frottement. Ensuite, l'étude est destinée à des problèmes quasi-statiques thermo-électro-élastiques et de contact avec frottement modélisés à l'aide des différentes lois de contact (unilatéral, bilatéral) et de frottement de type sec et Coulomb. Ensuite, nous approchons numériquement la solution d'un problème statique de contact entre un corps thermo-piézoélectrique et une fondation conductrice, ceci en utilisant une technique de découplage et une méthode de décomposition basée sur la méthode du lagrangien augmentée. Nous avons donné des tests 2D pour valider la performance de l'algorithme proposé.

**Mots clés** : *matériaux thermo-piézoélectriques, contact unilatéral, compliance normale, frottement de Tresca, frottement de Coulomb quasi-statique, frottement non local de Coulomb, inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, théorème de point fixe de Banach.*



---

# Abstract

The aim of this thesis is the mathematical and numerical study of some boundary value contact problems, with friction, between a body and a thermally and/or electrically conductive foundation. We consider the case of small deformations and we study the static and quasistatic process for thermo-electro-elastic materials. The results obtained concerning the existence of weak solutions and the continuous dependence of thermo-electroelastic solutions on the coefficient of friction and the initial data. Firstly, we present a detailed modeling of the thermo-piezoelectric contact and describe the assumptions and equations that model these problems as well as the boundary conditions with friction. Secondly, we study the quasi-static thermo-electroelastic frictional contact problems modelled by using different contact laws (unilateral, bilateral) and dry and Coulomb friction laws. Next, we give the numerical approach of the solution of a static contact problem between a thermo-piezoelectric body and a conductive foundation, by using a decoupling technique and a decomposition method based on the augmented Lagrangian method. We give 2D tests to validate the performance of the proposed algorithm.

**Keywords** : *thermo-piezoelectric materials, unilateral contact, normal compliance, Tresca's friction, quasi-statique Coulomb's friction, non local Coulomb's friction, variational and quasi-variational inequalities, Banach fixed point theorem.*