



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal



Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Youssef ALLAOUI

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Étude des équations différentielles fractionnaires de type neutre et hybride

Soutenue devant le jury composé de :

Pr Lalla Saadia CHADLI	Faculté des sciences et Techniques, Béni Mellal, Président
Pr Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal, Rapporteur
Pr Abdelmajid EL HAJAJI	Ecole Nationale du Commerce et Gestion El Jadida, Examinateur
Pr Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal, Encadrant
Pr Said MELLIANI	Faculté des Sciences et Techniques de Béni Mellal, Co-encadrant
Pr Ahmed KAJOUNI	Ecole Supérieure de Technologie Beni Mellal, Invité

Dédicace

A mes chers parents pour ses sacrifices et leurs soutiens depuis ma naissance que dieu les garde et les protège.

A mes frères et leurs petites familles, à ma chère sœur et sa famille qui m'ont toujours aidé, encouragé et soutenu.

A ma petite et ma grande famille pour leurs encouragements.

A tous mes meilleurs amis, et spécialement mes amis proche pour leur solidarité.

A tous les gens qui m'adorent en guise de reconnaissance pour leur effort leur conseil et appui leur manifestation et souci.

A tous mes professeurs, qu'ont apporté leur aide et leur soutien tout au long de mes études.

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens tout d'abord, à remercier ALLAH (mon Dieu) tout puissant qui m'a donné la capacité, la force et la patience afin de parvenir à ce niveau.

Je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur, le Professeur **KHALID HILAL**, qui m'a honoré par la confiance qu'il m'a accordée, par sa gentillesse, sa disponibilité permanente, son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'il m'a donnée.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements à mon Co-directeur de thèse, le Professeur **Said MELLIANI**, Doyen de la Faculté des sciences et techniques, pour son aide capitale, pour sa disponibilité, son inconditionnelle patience et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Mes remerciements s'adressent au Professeur **Lalla Saadia CHADLI** Professeur à Faculté des sciences et Techniques, qui a accepté de présider le jury de thèse.

Je remercie aussi le Professeur **Adil ABBASSI** Professeur à la faculté des sciences et Techniques de Beni Mellal qui a bien voulu rapporter ce travail, pour ses remarques, ses orientations et pour être présent dans le jury de thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur **Abdelmajid EL HAJAJI**, Professeur à l'Ecole Nationale du Commerce et Gestion El Jadida, qui a bien voulu être examinateur, et surtout d'avoir fait le déplacement pour être présent dans le jury de thèse.

Je remercie également le Professeur **Ahmed KAJOUNI** pour l'honneur qu'il me fait d'être dans mon jury de thèse, et pour toutes nos discussions et ses conseils qui m'ont accompagné.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires et calcul fractionnaire :	10
1.1 Aperçu historique	10
1.2 Bases mathématiques du calcul fractionnaire	15
1.2.1 Fonctions spéciales	15
1.2.2 Transformée de Laplace	17
1.3 Intégration et dérivation fractionnaire	17
1.3.1 Intégrale fractionnaire	18
1.3.2 Dérivation fractionnaire	22
1.3.3 Propriétés des dérivées fractionnaires :	36
1.3.4 Différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville d'une intégrale dépendante d'un paramètre	37
1.3.5 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires	38
1.3.6 Interprétations de la dérivation fractionnaire :	41
1.3.7 Interprétations géométriques des opérateurs fractionnaires	44
1.4 Résultats de la théorie du point fixe	46
1.4.1 Théorème du point fixe de Banach	47
1.4.2 Théorème du point fixe de Brouwer-Schauder	47
1.4.3 Théorème du point fixe hybride de Dhage	49
1.5 Quelques éléments d'analyse multivoque :	50
1.6 Espace vectoriel partiellement ordonné :	52
2 Équations différentielles fractionnaires hybrides :	56
2.1 Introduction :	56
2.2 Équation différentielle fractionnaire :	56
2.3 Construction de la solution :	58
2.4 Résultats d'existence :	61

2.5	Etude de l'équation différentielle fractionnaire hybrides (2.2)	66
3	Système couplé d'équations différentielles fractionnaires hybrides mixtes : Perturbations linéaires du premier et du second type	75
3.1	Introduction	75
3.2	Résultat d'existence :	76
4	Problèmes aux limites pour une inclusion différentielle fractionnaire hybride	85
4.1	introduction	85
4.2	Résultat d'existence	86
5	Équation différentielle fractionnaire impulsive avec domaine non dense	94
5.1	Introduction	94
5.2	Définition de la solution :	96
5.3	Résultats d'existence et d'unicité	101
	Conclusion et perspectives	109
	Bibliographie	109

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires ont connu récemment une grande attention, grâce à l'intérêt que présente la dérivation fractionnaire dans la modélisation de certains phénomènes physiques qui présentent des termes à mémoire dans leurs structures, et aussi c'est un champ riche des applications mathématiques qui fait l'objet de divers travaux de recherche.

Cette thèse a pour objet de contribuer dans cette théorie, en introduisant au départ quelques éléments de base du calcul fractionnaire, et quelques concepts préliminaires. Ensuite la question d'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire hybride est discutée en utilisant le théorème de point de Dhage. Dans un autre temps on étudie un système couplé composé de deux types d'équations différentielles fractionnaires : une subit une perturbation du premier ordre, et l'autre subit une perturbation du deuxième ordre. Après, une contribution porte sur les inclusions différentielles d'ordres fractionnaires hybrides avec des conditions aux limites est l'objet de la partie qui suit. Finalement nous traitons un problème des équations différentielles fractionnaires impulsives avec domaine non dense.

Introduction

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Et depuis ce temps, cette théorie a attiré l'attention des célèbres mathématiciens comme Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann...



FIGURE 1 – Histoire du calcul fractionnaire.

A titre d'illustration, considérons l'exemple de la fonction puissance, les exposants entiers correspondent à une multiplication répétitive d'une valeur, par exemple $x^3 = x \times x \times x$. Par contre cette définition n'est pas visiblement applicable si l'exposant prend une valeur réelle. L'expression de $x^{2.7}$ ne peut pas être calculée comme une multiplication de la valeur x par elle-même 2.7 fois. Par contre, cette valeur existe si l'on revient à la définition générale qui inclut les fonctions exponentielle et logarithmique et elle peut être déterminée aisément en utilisant une calculatrice. De la même façon, si on considère les définitions de l'intégrale et de la dérivée d'une fonction, elles sont définies uniquement pour des ordres entiers. Pour des intégrales et des dérivées d'ordre entier n supérieur à 1 ($n \in \mathbb{N}$), cela ne pose évidemment pas de difficultés car il suffit d'appliquer l'intégration ou la dérivation comme une opération répétitive. Mais finalement que représente et comment calculer une intégrale ou une dérivée avec un ordre non entier ?

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui a pour objet d'étendre les définitions des intégrales et des dérivées traditionnelles à des ordres non entiers. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non entière. Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

Comme motivation pratique on considère les équations constitutives d'un matériau élastique et d'un matériau visqueux sous une contrainte unidirectionnelle donnée et la déformation respective peut être écrite comme suit :

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) = kD_t^0\varepsilon(t), \quad (1)$$

$$\sigma(t) = k\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = kD_t^1\varepsilon(t), \quad (2)$$

les équations (1) et (2) sont la loi d'élasticité de Hooke et la loi de viscosité de Newton respectivement. D_t^α représente la différenciation de l'ordre α . Dans ce cas, $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ correspondent à un matériau purement élastique et à des matériaux purement visqueux, respectivement. Puisque les matériaux viscoélastiques se comportent entre visqueux et élastique, cela devient raisonnable exprimer leurs propriétés en appliquant un

ordre intermédiaire entre

$$\sigma(t) = ED_t^\alpha \varepsilon(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3)$$

Ce qui donne une large applications et une grande importance au calcul fractionnaire dans la viscoélasticité.

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions de certains équations différentielles fractionnaires hybrides.

Nous commençons, dans le premier chapitre, par introduire quelques éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront aussi introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérés. On a rappelé encore quelques théorèmes du points fixes.

Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles d'ordres fractionnaires et au rappel des principaux résultats concernant la question d'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire hybride.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude d'un système couplé composé de deux types d'équations différentielles fractionnaires : la première subit une perturbation du premier ordre, et la deuxième subit une perturbation du deuxième ordre. On établira l'existence de la solution du système en utilisant la théorie du point fixe. Le quatrième chapitre, objet d'une contribution, porte sur les inclusions différentielles d'ordres fractionnaires hybrides, nous étudions l'existence du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_c^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right) \in G(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ a \frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases}$$

où : $0 < \alpha < 1$, $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$, est une fonction continue, et $G : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est de Carathéodory. a, b et c sont des constantes réelles telles que : $a + b \neq 0$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un problème des équations différentielles fractionnaires impulsives suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ x(t) = g_i(t, x(t)), t \in (t_i, s_i] \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4)$$

où, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire fermé à domaine nondense sur X .

Chapitre 1

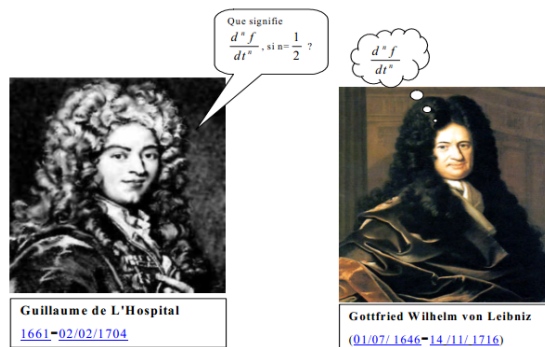
Préliminaires et calcul fractionnaire :

1.1 Aperçu historique

Les domaines de recherche au calcul fractionnaire sont actuellement si variés qu'il semble délicat de dresser un état de l'art complet, encore des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [76, 85] qui offrent une vision très large sur ce domaine.

Mais ça ne nous empêche pas de présenter les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages [56, 76] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

1695



L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Mar-

quis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée nième d'un produit de deux fonctions à $n > 0$ et introduit la notation $d^{\frac{1}{2}}h$. Il écrit notamment que $d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx} : x$. Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées d'ordres généraux.

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [40] où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β , avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m > 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.1)$$

Le terme de droite de (1.1) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad (1.2)$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(p(x-\alpha)) d\alpha dp. \quad (1.3)$$

Il remarque ensuite que la dérivée nième ($n \in \mathbb{N}$) du terme en \cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos\left[(p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2}]\right]. \quad (1.4)$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $\cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier

obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) p^u \cos\left[p(x - \alpha) + \frac{u\pi}{2}\right] d\alpha dp. \quad (1.5)$$

1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.

1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}, \quad (1.6)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, il propose de l'étendre pour $\alpha > 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax} . Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \quad (1.7)$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \quad (1.8)$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

A l'aide de (1.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}. \quad (1.9)$$

Même si (1.2) et (1.9) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique.

Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

- avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

- alors qu'avec celle de Liouville

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy, \\ \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy. \end{aligned}$$

Comme il est signalé dans [56] ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

1847

A partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

1867-68

Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h .

1869

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz,$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite ${}_a I_x^\alpha$:

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

1892

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t). \quad (1.10)$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x, t) = T_0 \exp(-axp^{\frac{1}{2}}).$$

Il suppose ensuite que $p^{\frac{1}{2}}T_0 = T_0\sqrt{\pi t}...$ ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre 1/2 de T_0 . En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.10).

1917

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

1927

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire

$$D_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $\Delta_t^l f(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de f .

1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire ${}_a I_x^\alpha$ sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, ${}_a I_x^\alpha$ est un opérateur borné de L^p dans L^q , où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p-\alpha}$.

1937

la définition suivante :

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

1970

Dans [76] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée 1/2 du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimiques, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans [76], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

1974

Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

1.2 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe nous présentons deux fonctions spéciales qui sont très utilisées dans le calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler ainsi que la fonction de Mittag-Leffler.

La Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma et qui généralise la notion du factoriel en la prolongeant aux valeurs réelles et complexes [6].

Définition 1.2.1. La fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

avec $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(0^+) = +\infty$; pour $0 < x < 1$; $x \rightarrow \Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante.

Théorème 1.2.1. La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier .
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on a

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha),$$

en particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Gamma(n + 1) = n!,$$

et

$$\Gamma(\alpha + m) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + m - 1) \Gamma(\alpha). \quad (1.11)$$

Pour plus d'informations sur la fonction Γ , voir [6].

La Fonction Bêta

Classiquement, on l'introduit lors du calcul de l'intégrale fractionnaire d'une fonction puissance.

Définition 1.2.2. La fonction Bêta est définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

avec $\text{Re}(p) > 0$ et $\text{Re}(q) > 0$.

La Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^x , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [74], [75].

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [5], et elle est définie par le développement en série entière suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

- Pour $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
- Pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve la fonction exponentielle :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

En changeant les paramètres α et β , on obtient des fonctions usuelles par exemple : pour $\alpha = 1$, et on change β :

$$E_{1,2}(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}, \quad E_{1,3}(z) = \frac{\exp(z)-1-z}{z^2},$$

$$\text{et de façon générale } E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(\exp(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right).$$

On a aussi les fonctions cos et sin hyperboliques sont des cas particuliers de la fonction de Mittag-Leffler : $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z)$ car $\Gamma(2k + 1) = 2k!$,

$$\text{et } E_{2,2}(z^2) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue un rôle similaire que la fonction exponentielle pour les équations différentielle d'ordre entier. On donne quelques propriétés

Lemme 1.2.1. [45, 57] la fonction de Mittag-Leffler est une fonction entière d'ordre $\rho = \frac{1}{\text{Re}(\alpha)}$ et de type 1. Alors, pour tout $\sigma > 1$ on a l'estimation

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq C_1 \exp(\sigma |z|^\rho), \quad (1.12)$$

et on a aussi la relation suivante :

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha). \quad (1.13)$$

1.2.2 Transformée de Laplace

Définition 1.2.3. S'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$ (c'est à dire que f est d'ordre exponentiel α) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

On cite quelque propriétés de la transformée de Laplace,

Propriétés

1. A partir de la transformée F , on peut avoir f à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s).$$

2. La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t); s) = F(s)G(s),$$

sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent.

3. La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction f est :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k} f^{(k)}(0). \quad (1.14)$$

Exemple 1.2.1. On donne la transformée de Laplace de quelque fonctions qu'on va utiliser dans la suite :

$$\mathcal{L}\{t^\alpha; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(\pm\lambda t^\alpha); s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp \lambda}, \quad \alpha > 0. \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\pm\lambda t^\alpha); s\} = \frac{1}{s^\alpha \mp \lambda}, \quad \alpha > 0. \quad (1.17)$$

1.3 Intégration et dérivation fractionnaire

Dans cette partie, on va introduire quelques propriétés et définitions qu'on va utiliser dans ce travail (pour plus de précisions et détails, voir [58]).

Nous commençons par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes, puis des dérivées fractionnaires. Nous signalons-seulement- certaines propriétés des dérivées classiques qui peuvent être généralisées au cas fractionnaire.

1.3.1 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition de l'intégrale fractionnaire.

Intégrale de Riemann-Liouville :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, on note par ${}_a I_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a qui est donnée par :

$$\forall t \in [a, b], \quad ({}_a I_t^1 f)(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Par itération, on obtient la seconde primitive de f :

$$\begin{aligned} ({}_a I_t^2 f)(t) &= ({}_a I_t^1 \circ_a I_t^1 f)(t) \\ &= \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau) d\tau \right) ds, \end{aligned}$$

et par le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned} ({}_a I_t^2 f)(t) &= \int_a^t \left(\int_\tau^t ds \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que la $n^{\text{ième}}$ itération de ${}_a I_t^1$ est donnée par :

$$({}_a I_t^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.18)$$

Et on a les remarques suivantes :

- La fonction ${}_a I_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_a I_t^n f)^{(k)}(a) = 0, & 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_a I_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

- La $n^{\text{ième}}$ itération de l'intégrale ${}_a I_t^1$ est appelée aussi intégrale à gauche d'ordre n de f , la dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche ($s \leq t$) de f .
- Il est possible d'étendre la relation (1.18) à $n \in \mathbb{R}_+^*$ grace à la fonction Gamma d'Euler comme suit :(voir par exemple [31] et [76]).

Définition 1.3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_a I_t^\alpha$ défini sur $L^1([a, b])$ par :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (1.19)$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α .

On peut écrire ${}_aI_t^\alpha$ sous la forme suivante :

$${}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds, \quad t \in [a, b].$$

En écrivons l'intégrale $\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$ sous la forme :

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(t-s) \phi_2(s) ds,$$

où

$$\phi_1(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & 0 < s < b-a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\phi_2(s) = \begin{cases} f(s), & a < s < b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient

$${}_aI_t^\alpha f \in L^1([a, b]),$$

en effet, ϕ_1 et ϕ_2 sont deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.3.1. [31]

Soit $f \in L^1([a, b])$ et $\alpha > 0$, l'intégrale ${}_aI_t^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction ${}_aI_t^\alpha f$ est un élément de $L^1([a, b])$.

Remarque 1.3.1.

Le tableau suivant montre pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens, et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur :

	f	${}_aI_t^\alpha f$	conditions
1.	$L^p([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \quad 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a, b])$	$L^p([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha}$
3.	$L^{\frac{1}{\alpha}}([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad q \geq 1$
4.	$L^p([a, b])$	$H^{\alpha-\frac{1}{p}}([a, b])$	$p > \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha - \frac{1}{p} \in \mathbb{N}^*$
5.	$L^\infty([a, b])$	$H^\infty([a, b])$	
6.	$L^p([a, b])$	$H^p([a, b])$	$p \geq 1$
7.	$C^0([a, b])$	$C_+^0([a, b])$	
8.	$AC([a, b])$	$AC([a, b])$	

Pour plus de détails et démonstrations voir [58] .

Exemple 1.3.1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = C,$$

on a :

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} C ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(t-s)^\alpha}{\alpha} \right]_a^t C \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} C. \end{aligned}$$

Ainsi,

$${}_a I_t^\alpha (C) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} C.$$

Exemple 1.3.2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = (t-a)^p,$$

on a :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^p ds.$$

En posant $s = a + (t-a)u$, on obtient

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+p} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^p du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+p} B(p+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} (t-a)^{\alpha+p}. \end{aligned}$$

Exemple 1.3.3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = e^{\lambda t}$ on a :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\lambda s} ds.$$

En posant $u = t-s$, on obtient

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} ds. \quad (1.20)$$

Clairement, (1.20) n'est pas une fonction élémentaire. En utilisant

$$E_t(\alpha, \lambda) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(\lambda t).$$

On observe, que (1.20) peut être écrit comme

$$I_t^\alpha e^{\lambda t} = E_t(\alpha, \lambda) = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(\lambda t). \quad (1.21)$$

• **Semi groupe propriété :**

Si f est une fonction intégrable et bornée et si α et β sont deux réels strictement positifs, alors on a :

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t) = {}_a I_t^\beta \left({}_a I_t^\alpha f(t) \right). \quad (1.22)$$

En effet,

on a :

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} {}_a I_t^\beta f(t-s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} \int_0^{t-s} (t-s-u)^{\beta-1} f(u) du ds. \end{aligned}$$

Comme $\begin{cases} 0 \leq s \leq t-a \\ 0 \leq u \leq t-s \end{cases}$, alors $\begin{cases} a \leq u \leq t \\ 0 \leq s \leq t-u \end{cases}$

Par suite, on obtient

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) du \int_0^{t-u} s^{\alpha-1} (t-u-s)^{\beta-1} ds.$$

En posant $s = \tau(t-u)$ on trouve

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) du \int_0^1 (\tau(t-u))^{\alpha-1} (t-u-\tau(t-u))^{\beta-1} (t-u) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u) du \\ &= {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

• **Intégrale fractionnaire à droite**

On peut remarquer que l'intégrale

$$({}_b I_t^1 f)(t) = \int_b^t f(s) ds = - \int_t^b f(s) ds,$$

est aussi une primitive de f , qui s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f .

A partir de la relation

$$\int_b^t (t-s)^{n-1} f(s) ds = (-1)^n \int_t^b (s-t)^{n-1} f(s) ds,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$({}_b I_t^n f)(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} f(s) ds.$$

Et de même que l'intégrale fractionnaire à gauche, La fonction ${}_b I_t^n f$ est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} ({}_b I_t^n f)^{(k)}(b) = 0, & 0 \leq k \leq n-1 \\ ({}_b I_t^n f)^{(n)} = f. \end{cases}$$

Définition 1.3.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur ${}_b I_t^\alpha$ défini sur $L^1([a, b])$ par :

$${}_b I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (1.23)$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α .

On signale ici que la plupart des travaux sur cette théorie utilisent souvent les définitions "à gauche", et que les définitions "à droite" sont rarement utilisées car elles sont anti-causales (vue qu'elles dépendent du futur des fonctions car le s dépasse t).

1.3.2 Dérivation fractionnaire

Nous présentons dans cette partie les approches les plus fréquemment utilisées dans les applications : approches de Grünwald-letnikov, de Riemann-Liouville et celle de Caputo, ainsi que leurs propriétés. Nous signalons que ces approches ne sont pas toutes équivalentes.

Approche de Grünwald-Letnikov.

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par des différences finies. (Pour plus de détails voir [31, 34, 76]).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Notons T_h l'opérateur de translation à gauche défini comme suit :

$$T_h f(t) = f(t-h).$$

On a donc

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (id - T_h) f(t).$$

Ainsi $T_h^2 f(t) = f(t-2h)$, (en notant $T_h^2 = T_h \circ T_h$)

par suite,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (id - T_h) \right)^2 f(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (id - 2T_h + T_h^2) f(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)). \end{aligned}$$

Et par la formule de Newton, on obtient la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (id - T_h)^n f(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} id^{n-k} (-T_h)^k f(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Une généralisation naturelle de cette formule consiste à définir la dérivée d'ordre α non entier, (avec $0 \leq n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) par

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} f(t - kh).$$

Comme

$$(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) = (-\alpha)(1-\alpha)\dots(k-\alpha-1),$$

et que pour $\alpha > 0$ non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(1-\alpha)\dots(k-\alpha-1).$$

On obtient ainsi, la formule de Grünwald-Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier.

Définition 1.3.3. Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-Letnikov d'ordre α est définie par

$$D_{GL}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - kh), \quad (1.24)$$

et

$$D_{GL}^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t - kh). \quad (1.25)$$

Il est à noter que la relation (1.24), due à Liouville (1832), puis Grünwald (1863) et Letnikov (1868), est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire, et que dans cette relation les nombres $\Gamma(-\alpha+k)$ ne sont pas nuls et que la dérivée fractionnaire d'ordre α pour $0 < \alpha < 1$ dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre $\alpha = 1$) qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

Remarque 1.3.2.

Si f est de classe C^n , alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}_aD_{GL}^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (1.26)$$

$${}_aD_{GL}^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \quad (1.27)$$

Exemple 1.3.4. 1. Soit α non entier avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $f(t) = C$ une fonction constante, on a

$$\begin{aligned} {}_aD_{GL}^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$${}_aD_{GL}^\alpha C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C$$

En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est nulle ni constante.

2. Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, de la fonction $g(t) = (t-a)^p$

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la convergence de l'intégrale (1.26) on a besoin à ce que $p > n-1$.

On a $g^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et $g^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (t-a)^{p-n}$, d'où

$${}_aD_{GL}^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{p-n} ds.$$

En posant $s = a + \tau(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}_aD_{GL}^\alpha (t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)B(n-\alpha, p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$${}_aD_{GL}^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. \quad (1.28)$$

En particulier

$${}_aD_{GL}^\alpha (t-a)^\alpha = \Gamma(\alpha+1).$$

- **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Soit $m \in \mathbb{N}$ et α non entier, on a :[80]

$$\begin{aligned} \star \quad \frac{d^m}{dt^m} \left({}_a D_{GL}^\alpha f(t) \right) &= {}_a D_{GL}^{m+\alpha} f(t). \\ \star \quad {}_a D_{GL}^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= {}_a D_{GL}^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k-m}}{\Gamma(-\alpha+k-m+1)}. \end{aligned}$$

Cas particulier : Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0; 1; \dots; m-1$, on a

$${}_a D_{GL}^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = \frac{d^m}{dt^m} \left({}_a D_{GL}^\alpha f(t) \right).$$

C'est à dire que la dérivation fractionnaire et la dérivation usuelle, commutent dans ce cas .

- **Composition avec les dérivées d'ordres fractionnaires**[80]

▷ Dans le but de calculer ${}_a D_{GL}^p \left({}_a D_{GL}^q f(t) \right)$, on sépare les deux cas : $q < 0$ et $q > 0$. Dans le cas où $q < 0$ et $p < 0$, on applique l'intégration d'ordre $-p > 0$ à l'intégration d'ordre $-q > 0$, et dans le cas où $q < 0$ et $p > 0$, c'est la dérivation fractionnaire d'ordre $p > 0$ qu'on applique à l'intégration d'ordre $-q > 0$ et de même pour les deux autres cas.

▷ Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors

$${}_a D_{GL}^p \left({}_a D_{GL}^q f(t) \right) = {}_a D_{GL}^{p+q} f(t)$$

▷ Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$ alors

$${}_a D_{GL}^p \left({}_a D_{GL}^q f(t) \right) = {}_a D_{GL}^{p+q} f(t).$$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0; 1; \dots; m-2$.

▷ Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$, alors

$${}_a D_{GL}^p \left({}_a D_{GL}^q f(t) \right) = {}_a D_{GL}^q \left({}_a D_{GL}^p f(t) \right) = {}_a D_{GL}^{p+q} f(t).$$

si et seulement si $f^k(a) = 0$ pour $k = 0; 1; \dots; r-2$ avec $r = \max(m, n)$.

La définition des intégrales fractionnaires est très simple et il n'y a pas de complications. La question difficile est de savoir comment définir une dérivée fractionnaire. Il n'y a pas de formule pour la n dérivée analogue à la formule de Cauchy il faut donc généraliser les dérivées à travers une intégrale fractionnaire. D'abord nous perturbons l'ordre entier par une intégrale fractionnaire conformément, puis appliquez un nombre approprié de dérivés classiques. Comme nous verrons plus tard.

Approche de Riemann-Liouville.

La manipulation des dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov définie comme

limite d'une différence d'ordre fractionnaire, n'est pas commode. L'expression de la (remarque 1.3.2) est bien meilleure grâce à la présence de l'intégrale dedans; pour se débarrasser du terme non intégrale dans cette expression, on le considère comme un cas particulier de l'expression intégral-différentielle suivante :

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.29)$$

C'est à dire

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} f(t) \right), \quad (1.30)$$

avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette expression est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire; elle est appelée : définition de Riemann-Liouville.

Evidemment, l'expression de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov de la remarque 1.3.2 obtenue sous l'hypothèse que la fonction $f(t)$ doit être n -fois continûment différentiable, peut être obtenue à partir de cette expression sous la même hypothèse en faisant des intégrations par parties et différentiations répétées.

De plus, si on considère une classe de fonctions $f(t)$ admettant (n) dérivées continues pour $t \geq 0$, alors la définition de Grünwald-Letnikov de la remarque 1.3.2 est équivalente à la définition (1.29) de Riemann-Liouville.

Remarque 1.3.3.

Par ce fait et de point de vue purement mathématique, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Grünwald-Letnikov est réduite; cependant, la classe de fonctions qu'utilise l'approche de Riemann-Liouville est très importante car le caractère de la majorité des processus dynamiques est assez régulier et ne présente pas des discontinuités.

Ceci caractérise et surtout distingue la propre utilisation de ces deux approches de dérivation fractionnaires dans les applications.

On peut signaler donc, que la définition de Riemann-Liouville donne une excellente opportunité pour affaiblir les conditions sur la fonction $f(t)$. A savoir, il suffit de demander l'intégrabilité de la fonction $f(t)$ et alors l'intégrale (1.29) existe pour $t > a$.

Exemple 1.3.5. 1. Soit α non entier avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = C$ une fonction constante, on a : ${}_a D_R^\alpha C = {}_a D_{GL}^\alpha C$ et donc

$${}_a D_R^\alpha C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C,$$

2. Calculons maintenant la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, de la fonction $g(t) = (t - a)^p$.

Soit α non entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$${}_a D_R^\alpha (t - a)^p = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} (s - a)^p ds.$$

A l'aide de la fonction Bêta et en posant $s = a + \tau(t - a)$, on a :

$$\begin{aligned} {}_a D_R^\alpha (t - a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{n - \alpha + p} \int_0^1 (1 - \tau)^{n - \alpha - 1} \tau^p d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\Gamma(n - \alpha + p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p - \alpha} \int_0^1 (1 - \tau)^{n - \alpha - 1} \tau^p d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\Gamma(n - \alpha + p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p - \alpha} B(n - \alpha, p + 1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\Gamma(n - \alpha + p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} \frac{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha + p + 1)} (t - a)^{p - \alpha}. \end{aligned}$$

Par suite,

$${}_a D_R^\alpha (t - a)^p = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p - \alpha}.$$

La seule restriction pour $f(t) = (t - a)^p$ est son intégrabilité à savoir : $p > -1$

3. Pour $\alpha = p = \frac{1}{2}$ on a donc : ${}_0 D_R^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\frac{3}{2})$.

Exemple 1.3.6. Supposons maintenant que nous souhaitons trouver la dérivée d'ordre α de $f(t) = e^{\lambda t}$ où $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas nous avons,

$$D_R^\alpha e^{\lambda t} = D^1 [I^{1 - \alpha} e^{\lambda t}].$$

En considérant (1.21) on a alors,

$$D_R^\alpha e^{\lambda t} = t^{-\alpha} E_{1, -\alpha + 1}(\lambda t).$$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 1$, on aura,

$$D_R^{1/2} e^t = t^{-1/2} E_{1, 1/2}(t).$$

• **Composition à droite avec l'intégrale fractionnaire**

$\alpha > 0$ et $t > a$, on a :

$${}_a D_R^\alpha \left({}_a I_t^\alpha f(t) \right) = f(t), \quad (1.31)$$

C'est à dire que l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire. En effet,

on sépare les cas suivants :

▷ Cas où $\alpha = k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} {}_a D_R^k \left({}_a I_t^k f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-s)^{k-1} f(s) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(s) ds \\ &= f(t). \end{aligned}$$

▷ Cas où $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$

On sait que

$${}_a I_t^{n-\alpha} \left({}_a I_t^\alpha f(t) \right) = {}_a I_t^n f(t),$$

et que

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} f(t) \right).$$

On a alors,

$$\begin{aligned} {}_a D_R^\alpha \left({}_a I_t^\alpha f(t) \right) &= \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a I_t^{n-\alpha} ({}_a I_t^\alpha f(t)) \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a I_t^n f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

• **Composition à gauche avec l'intégrale fractionnaire** [80]

Pour $n-1 \leq \alpha < n$ et si ${}_a D_R^\alpha f(t)$ est intégrable, alors :

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = f(t) - \sum_{k=1}^n [{}_a D_R^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (1.32)$$

Cas particulier :

Pour $0 < \alpha < 1$ on a :

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = f(t) - [{}_a D_R^{\alpha-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

par conséquent

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = f(t) - \left[{}_a I_t^{1-\alpha} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

• **Composition à droite avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.** [80]

Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, on a :

$${}_a D_R^\alpha \left({}_a I_t^\beta f(t) \right) = {}_a D_R^{\alpha-\beta} f(t), \quad (1.33)$$

où f est une fonction continue, et que ${}_a D_R^{\alpha-\beta} f(t)$ existe si $\alpha \geq \beta$. (si $\alpha - \beta < 0$, alors : ${}_a D_R^{\alpha-\beta} f(t) = {}_a I_t^{\beta-\alpha} f(t)$).

• **Composition à gauche avec intégrale fractionnaire d'ordre différent.** [80]

Pour $0 \leq m - 1 \leq \beta < m$, on a :

$${}_a I_t^\alpha \left({}_a D_R^\beta f(t) \right) = {}_a D_R^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}_a D_R^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (1.34)$$

• **Composition avec les dérivées d'ordre entier :** [80]

Pour $0 \leq n - 1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = {}_a D_R^{k+\alpha} f(t), \quad (1.35)$$

$${}_a D_R^\alpha \left(\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right) = {}_a D_R^{k+\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha-k}}{\Gamma(i-\alpha-k+1)}. \quad (1.36)$$

Remarque 1.3.4.

Comme ce qui se passe avec la dérivée de Grünwald-Letnikov, la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivation usuelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(i)}(a) = 0$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

• **Composition des dérivées fractionnaires.** [80]

Pour $n - 1 \leq \alpha < n$ et $m - 1 \leq \beta < m$, on a :

$${}_a D_R^\alpha \left({}_a D_R^\beta f(t) \right) = {}_a D_R^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{i=1}^m [{}_a D_R^{\beta-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(-\alpha-i+1)}, \quad (1.37)$$

$${}_a D_R^\beta \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = {}_a D_R^{\beta+\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^n [{}_a D_R^{\alpha-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(-\beta-i+1)}. \quad (1.38)$$

En général, les opérateurs de dérivation fractionnaire, au sens de Riemann-Liouville, ne commutent pas.

Mais, on a la propriété essentielle suivante :

$${}_a D_R^\alpha \left({}_a D_R^\beta f(t) \right) = {}_a D_R^\beta \left({}_a D_R^\alpha f(t) \right) = {}_a D_R^{\alpha+\beta} f(t), \quad (1.39)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} [{}_a D_R^{\alpha-i} f(t)]_{t=a} = 0, & i=1,2,\dots,n; \\ [{}_a D_R^{\beta-i} f(t)]_{t=a} = 0, & i=1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Lien avec l'approche de Grünwald-Letnikov :

Il existe une relation entre les approches, de différentiation d'ordre réel arbitraire, de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov.

Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle $[a, T]$ telle que $f^{(n)}$ est intégrable sur $[a, T]$.

Pour tout α tel que $0 < \alpha < n$, la dérivée ${}_a D_R^\alpha f(t)$, au sens de Riemann-Liouville, existe et coïncide avec la dérivée ${}_a D_{GL}^\alpha f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov.

Si $0 \leq n-1 \leq \alpha < n \leq m$, on a :

$$\begin{aligned} {}_a D_R^\alpha f(t) = {}_a D_{GL}^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \end{aligned} \quad (1.40)$$

En effet, la deuxième égalité vient de la relation (1.26).

Pour la première égalité, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on retrouve la forme de la dérivée ${}_a D_R^\alpha f(t)$ au sens de Riemann-Liouville.

- Si f est continue et f' est intégrable sur un intervalle $[a, T]$ alors pour tout α ($0 < \alpha < 1$), les deux dérivées de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov existent et peuvent s'écrire sous la forme :

$${}_a D_R^\alpha f(t) = {}_a D_{GL}^\alpha f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \quad (1.41)$$

- D'après la relation (1.40), l'existence de la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ entraîne l'existence de la dérivée d'ordre β tel que $0 < \beta < \alpha$.

C'est à dire que pour une fonction f continue admettant une dérivée intégrable, la dérivée de Riemann-Liouville (Grünwald-Letnikov) ${}_a D_R^\alpha f(t)$ existe et est intégrable, alors pour tout β tel que $0 < \beta < \alpha$ la dérivée ${}_a D_R^\beta f(t)$ existe aussi et est intégrable.

En effet, on sait que

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left({}_a I_t^{1-\alpha} f(t) \right),$$

et donc si on note par $g(t) = {}_a I_t^{1-\alpha} f(t)$, on aura ${}_a D_R^\alpha f(t) = g'(t)$ et $g'(t)$ par hypothèse est intégrable.

Puisque $0 < 1 + \beta - \alpha < 1$, on en déduit par la formule (1.41), que ${}_a D_R^{1+\beta-\alpha} f(t)$ existe et intégrable.

Et donc par la formule (1.33), on a :

$${}_a D_R^{1+\beta-\alpha} f(t) = {}_a D_R^{1+\beta-\alpha} \left({}_a I_t^{1-\alpha} f(t) \right) = {}_a D_R^\beta f(t).$$

- La relation entre les définitions de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville a aussi une autre conséquence qui est très importante pour la formulation des problèmes appliqués, la manipulation avec des dérivées fractionnaires et la formulation du sens physique des problèmes à valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.
- Sous les mêmes hypothèses sur la fonction f ($f(t)$ est $(n-1)$ -fois continûment différentiable et sa $n^{\text{ième}}$ dérivée est intégrable dans $[a; T]$) et α ($n-1 \leq \alpha < n$) la condition :

$$\left[D_R^\alpha f(t) \right]_{t=a} = 0, \quad (1.42)$$

est équivalente aux conditions :

$$f^{(i)}(a) = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.43)$$

En effet, si les conditions (1.43) sont vérifiées, alors en faisant tendre t vers a dans (1.40), on obtient immédiatement (1.42). D'autre part, si la condition (1.42) est vérifiée, alors en multipliant par la suite les deux membres de (1.40) par $(t-a)^{\alpha-j}$ pour $j = m-1, m-2, \dots, 0$ et en prenant les limites quand $t \rightarrow a$ nous obtenons $f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m-2)}(a) = 0$, ..., $f'(a) = 0$, $f(a) = 0$.

Par suite, (1.42) a lieu si et seulement si (1.43) est vérifiée.

De l'équivalence des conditions (1.42) et (1.43), il vient immédiatement que si, pour un certain $\alpha > 0$, la dérivée α -ième de $f(t)$ est égale à zéro en la borne $t = a$, alors toutes les dérivées d'ordre β avec $(0 < \beta < \alpha)$ sont aussi égales à zéro en $t = a$:

$$\left[D_R^\beta f(t) \right]_{t=a} = 0.$$

Approche de Caputo :

Dans le développement de la théorie de l'intégration et de la dérivation fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes phy-

siques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie. Plusieurs travaux sont apparus, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques. En rhéologie, les modèles mathématiques adoptés conduisent en générale à des équations différentielles fractionnaires. Nous avons pu constater également qu'on pouvait obtenir des systèmes fractionnaires issus directement de l'identification, particulièrement en électrochimie, en mécanique et dans les systèmes biomédicales. Ainsi, la nécessité d'une formulation adéquate des conditions initiales pour de telles équations différentielles fractionnaires est fondamentale. En général, les applications requièrent des définitions permettant l'utilisation de conditions initiales interprétables physiquement.

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$, qui sont difficiles à interpréter physiquement, par exemple

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_R^{\alpha-1} f(t) = b_1$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_R^{\alpha-2} f(t) = b_2$$

...

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_R^{\alpha-n} f(t) = b_n,$$

où b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ sont des constantes données.

Malgré le fait que des problèmes avec des telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (voir, par exemple, solutions données dans [58]), leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales : c'est un conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffusive [83]. Cependant, Sabatier et al. [83] montrent que ni l'approche de Riemann-Liouville, ni l'approche de Caputo ne peuvent être utiliser pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, Caputo dans [14] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par Caputo et Mainardi [15] dans leurs travaux en viscoélasticité. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation suivante [79]

Pour $\alpha \geq 0$ (avec $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^n f}{dt^n} \in L_1([a, b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$${}_a D_C^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (1.44)$$

c'est à dire que

$${}_a D_C^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \quad (1.45)$$

La première et la plus importante remarque à propos de cette approche est qu'elle prévoit la formulation des conditions initiales pour des problèmes aux valeurs initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous une forme faisant apparaître seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$, comme $y'(a)$; $y''(a)$; etc...

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaire autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$; etc ...

Remarque 1.3.5.

Si $\alpha \rightarrow n$, alors ${}_a D_C^\alpha f(t)$ coïncide avec $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$,
(Sous des conditions naturelles sur la fonction f).

En effet,

supposons que la fonction f admet $(n+1)$ dérivées bornées continues dans $[a, T]$ pour tout $T > a$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_C^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n+1)}(s) ds \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s) ds \\ &= f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

L'approche de Caputo fournit donc, une interpolation entre les dérivées d'ordre entier.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées au sens de Caputo accepte la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

i.e., contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure $t = a$.

Exemple 1.3.7. 1. Le deuxième avantage c'est que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}_aD_C^\alpha C = 0.$$

Par contre, la dérivée d'une constante au sens de Riemann-Liouville ne l'est pas.

2. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo, de la fonction

$g(t) = (t - a)^p$, où α non entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et $p > n - 1$ est :

$${}_aD_C^\alpha (t - a)^p = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p - \alpha}.$$

• **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :**

Pour $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et f une fonction telle que ${}_aD_R^\alpha f(t)$ et ${}_aD_C^\alpha f(t)$ existent.

Alors

$${}_aD_C^\alpha f(t) = {}_aD_R^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha + k + 1)}. \quad (1.46)$$

Par conséquent,

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$, alors

$${}_aD_C^\alpha f(t) = {}_aD_R^\alpha f(t).$$

• **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :**

Si f est continue, alors

$${}_aD_C^\alpha {}_aI_t^\alpha f(t) = f(t), \quad (1.47)$$

et

$${}_aI_t^\alpha {}_aD_C^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^k}{k!}. \quad (1.48)$$

Ainsi, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse à droite.

Lemme 1.3.1. [45, 57]

$$(a)- D_{a+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t - a)^\alpha](x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x - a)^\alpha], \quad (Re(\alpha) > 0, \lambda \in \mathbb{C})$$

$$(b)- (I_{a+}^{\alpha'}(t - a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}[\lambda(t - a)^\mu])(x) = (x - a)^{\alpha'+\beta-1} E_{\mu,\alpha'+\beta}[\lambda(x - a)^\mu],$$

avec $\alpha' > 0$, $\beta > 0$ et $\mu > 0$.

Lemme 1.3.2. [33]

(1)- Soit $0 < \alpha < 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et $K, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-K(t - \tau)^\alpha) U (D^\alpha x)(\tau) d\tau &= Ux(t) - E_\alpha(\lambda^\alpha) Ux(0) \\ &- K \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-K(t - s)^\alpha) Ux(s) ds. \end{aligned}$$

(2)- Soit $0 < \alpha < 1$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$D_0^\alpha \left[\int_0^t f(t - s)g(s)ds \right] (t) = \int_0^t D_0^\alpha [f(t)](s)g(t - s)ds + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} [{}_t I_{0^+}^{1-\alpha} f](t).$$

Dérivation fractionnaire à droite :

Dans tous les approches considérées au paravant, la borne inférieure a est fixée et la borne supérieure t est variable. Il est aussi possible de considérer des dérivées fractionnaires en faisant varier la borne inférieure t tout en fixant la borne supérieure b .

La dérivée fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle $[a; b]$, ${}_a D^\alpha f(t)$, est appelée dérivée fractionnaire à gauche.

Et donc la dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle $[a; b]$ est appelée dérivée fractionnaire à droite.

La première différence entre ces deux dérivées est que sur l'intervalle $[a; t]$ on s'intéresse au passé de $f(t)$, mais sur l'intervalle $[t; b]$ et puisque ici $s \geq t$ alors on s'intéresse au futur de $f(t)$.

Comme pour les dérivées fractionnaires à gauche, la notion des dérivées fractionnaires à droite peut être introduite pour n'importe quelle mutation de différentiation fractionnaire : Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ou Caputo .

Pour $n - 1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche est définie par :

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

La dérivée à droite, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par [58] :

$${}_a D_R^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{-d}{dt} \right)^n \int_t^b (s - t)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

Les dérivées à droite de Caputo et de Grünwald-Letnikov peuvent être définies de la même manière.

Remarque 1.3.6 (Pourquoi les dérivées fractionnaires à droite).

Si on suppose que t est le temps et que $f(t)$ décrit un certain processus dynamique qui évolue en temps. Si on prend $s < t$, où t est le moment présent, alors l'état $f(s)$ du processus $f(t)$ appartient au passé du processus; si on prend $s > t$, $f(s)$ appartient au futur du processus de f .

De ce point de vue, la dérivée à gauche est une opération exécutée dans les états passés du processus f et la dérivée à droite est une opération exécutée dans les états futurs du processus f .

Comme on n'est pas informé de la dépendance de l'état présent de n'importe quel processus sur les résultats de son évolution dans le futur, la plupart des travaux sur les dérivées fractionnaires considèrent seulement les dérivées à gauche.

1.3.3 Propriétés des dérivées fractionnaires :

Linéarité :

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t), \quad (1.49)$$

où D^α désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans cette thèse.

Cette propriété découle directement des définitions de ces dérivées. Par exemple, pour la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α

$$\begin{aligned} {}_a D_C^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} (\lambda f(s) + \mu g(s)) ds \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} f(s) ds \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} g(s) ds \\ &= \lambda {}_a D_C^\alpha f(t) + \mu {}_a D_C^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Règle de Leibnitz :

Pour n entier, la règle bien connue de Leibniz pour calculer la dérivée n -ième du produit de deux fonctions f et g est donnée par :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

Si on remplace l'entier n par un réel α , alors la dérivée d'ordre entier $g^{(n-k)}(t)$ sera remplacé par la dérivée d'ordre fractionnaire $D^{(\alpha-k)}g(t)$, et la généralisation de cette

formule nous donne :

$$D^\alpha \left(f(t)g(t) \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t) - R_n^\alpha(t), \quad (1.50)$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} g(s) ds \int_s^t (s-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau) d\tau,$$

où D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Remarque 1.3.7.

1. La somme dans la relation (1.50) peut être considérée comme une somme partielle de séries infinies et $R_n^\alpha(t)$ comme un reste de ces séries.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^\alpha(t) = 0$, en effet :
En utilisant les deux changements de variables suivants : $\tau = s + \zeta(t-s)$ et $s = a + \eta(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} R_n^\alpha(t) &= \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} g(s) ds \int_0^1 (s-\tau)^n f^{(n+1)}(s + \zeta(t-s)) \zeta^n d\zeta \\ &= \frac{(-1)^n (t-a)^{n-\alpha+1}}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \int_0^1 H_a(t, \zeta, \eta) d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

avec $H_a(t, \zeta, \eta) = g(a + \eta(t-a)) f^{(n+1)}(a + (t-a)(\zeta + \eta - \zeta\eta))$.

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^\alpha(t) = 0$.

3. Si $g(s)$ et $f(s)$ avec toutes leurs dérivées sont continues dans $[a, t]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire prend la forme suivante :

$$D^\alpha \left(f(t)g(t) \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t).$$

On peut donc remarquer que cette propriété est spécialement utile pour le calcul de la dérivée fractionnaire d'un produit d'une fonction g continue et d'une fonction polynomiale f aussi continue et de même pour ses dérivées.

1.3.4 Différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville d'une intégrale dépendante d'un paramètre

Dans ce paragraphe, on donnera une propriété analogue à la propriété qui suit, de la différentiation d'une intégrale dépendante d'un paramètre avec la limite supérieure

dépendante du même paramètre.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t, s) ds = \int_0^t \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} ds + \lim_{s \rightarrow t^-} G(t, s).$$

On considère l'intégrale $\int_0^t G(t, s) ds$ dépendante du paramètre t et telle que la limite supérieure dépend aussi de ce paramètre, pour $0 \leq \alpha < 1$, on a :

$$\begin{aligned} {}_a D_R^\alpha \int_0^t G(t, s) ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \left(\int_0^\tau G(\tau, s) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_s^\tau (t-\tau)^{-\alpha} G(\tau, s) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t \tilde{G}(t, s) ds, \end{aligned}$$

où $\tilde{G}(t, s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^t (t-\eta)^{-\alpha} G(\eta, s) d\eta$.

D'après la propriété de dérivation entière d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on a :

$${}_a D_R^\alpha \int_0^t G(t, s) ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}(t, s) ds + \lim_{s \rightarrow t^-} \tilde{G}(t, s).$$

Par suite :

$${}_a D_R^\alpha \int_0^t G(t, s) ds = \int_0^t {}_s D_R^\alpha G(t, s) ds + \lim_{s \rightarrow t^-} {}_s D_R^{\alpha-1} G(t, s). \quad (1.51)$$

1.3.5 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires

La transformée de Laplace joue un rôle important dans la résolution des équations différentielle d'ordre entier, donc il est utile de prolonger cette notion au cas des équations différentielles fractionnaires. On donnera la définition de la transformée des approches déjà citées.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Commençons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ définie par la formule (1.19).

Cette formule peut s'écrire comme une convolution des deux fonctions :

$\phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$ comme suit :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \quad (1.52)$$

La transformée de Laplace de la fonction $\phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ est

$$\Phi(s) = \mathcal{L}(t^{\alpha-1}; s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire :

$$\mathcal{L}\{ {}_a I_t^\alpha f(t); s \} = s^{-\alpha} F(s).$$

Maintenant, pour le calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous écrivons cette dérivée sous la forme suivante :

$${}_0 D_R^\alpha f(t) = g^{(n)}(t),$$

avec :

$$g(t) = {}_0 I_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

Par la formule (1.14) de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier, on a :

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_R^\alpha f(t); s \} = \mathcal{L}\{ g^{(n)}(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0).$$

D'après ce qui précède, la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = {}_0 I_t^{n-\alpha} f(t)$ est donnée par :

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s).$$

Donc

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_R^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0).$$

Comme $g(t) = {}_0 I_t^{n-\alpha} f(t)$, il s'ensuit que

$$g^{(n-k-1)}(t) = {}_0 D_R^{\alpha-k-1} f(t).$$

Par suite,

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_R^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0 D_R^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \quad (1.53)$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

Dans le but d'établir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo,

Nous utiliserons la dérivée donnée par la formule (1.45) :

$${}_a D_c^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a I_t^{n-\alpha} g(t),$$

où $\frac{d^n f(t)}{dt^n} = g(t)$.

Par l'utilisation de la formule de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_c^\alpha f(t); s \} = s^{-(n-\alpha)} G(s),$$

où

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

Par suite, on obtient la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_c^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (1.54)$$

Remarque 1.3.8.

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction $f(t)$ et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour les quelles une certaine interprétation physique existe (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale ...), on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.

Par contre, l'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est limitée, ceci est due à l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov :

On commence par le cas où $0 \leq \alpha < 1$, par la formule (1.26) on a :

$${}_0D_{GL}^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-s)^{-p} f'(s) ds.$$

En utilisant la transformée de Laplace de la convolution de la fonction polynôme et de la dérivée d'ordre entier, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}_0D_{GL}^p f(t); s \} &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) \\ &= s^p F(s). \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha > 1$ n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non-intégrables dans la somme de la formule (1.26).

1.3.6 Interprétations de la dérivation fractionnaire :

Le calcul fractionnaire apparait de plus en plus fréquemment dans les champs de recherche non seulement mathématique mais aussi physique, mais la question la plus courante au sujet de la dérivée fractionnaire est la suivante : "Quelle est son interprétation physique?" Comme la dérivée du premier ordre fait référence à la vitesse du déplacement alors que la dérivée du second ordre concerne l'accélération, mais qu'en est-il de la dérivée d'ordre $0,5$? La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui a priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la différentiation fractionnaire. Le manque ou l'absence de telles interprétations a été fortement abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire qui a eu lieu à New Haven (USA) en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts et est restée sans réponse, [81], [82], et ce malgré les rencontres internationales qui ont suivi, notamment en 1984 en Angleterre à l'université de Strathclyde et en 1989 à Tokyo et la conférence sur les Méthodes des Transformées et les Fonctions Spéciales à Varna (1996) a montré que le problème était encore irrésolu. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches ont été adoptées, parmi celles-ci nous citerons celle de Podlubny qui se base sur l'intégrale de Riemann-Liouville et pour une introduction à la matière, nous renvoyons à [79] et plusieurs études théoriques et expérimentales ont été consacrées à cette question.

Applications en physique

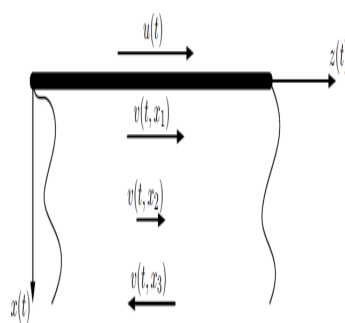


FIGURE 1.1 – Mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide

Considérons le mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une

plaque rigide. (voir figure 1.1). Le mouvement de la plaque est unidirectionnel suivant l'axe z . La direction normale à la plaque est repérée par la coordonnée x . Les deux variables $u(t)$ et $v(t; x)$ désignent respectivement, la vitesse de la plaque et la vitesse des particules du fluide situés à la distance x de la plaque.

L'équation du mouvement du fluide est une équation de diffusion de la forme,

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (1.55)$$

où ρ est la densité du fluide, μ la viscosité, v est le profil de la vitesse transversale du fluide, laquelle est une fonction du temps t et de la distance x .

$$\begin{aligned} v(0, x) &= 0 \quad \text{pour } x < 0 \\ v(t, 0) &= u(t) \quad \text{pour } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(t, x) &= 0 \quad \text{pour } t > 0 \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (1.55), on obtient,

$$\rho \hat{v}(s, x) = s\mu \frac{\partial^2 \hat{v}(s, x)}{\partial x^2}, \quad (1.56)$$

$$\hat{v}(s, 0) = \hat{u}(s). \quad (1.57)$$

La solution formelle de (1.56) est

$$\hat{v}(s, x) = c_1(s) \exp(-x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}) + c_2(s) \exp(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}). \quad (1.58)$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites $\hat{v}(s; 0) = \hat{u}_p(s)$, on obtient,

$$\hat{v}(s, x) = \hat{u}_p(s) \exp(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}), \quad (1.59)$$

donc,

$$v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\frac{\mu}{\rho}}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu x^2}{4\rho\tau}\right) u_p(t - \tau) d\tau. \quad (1.60)$$

Car pour, $x > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi\frac{\mu}{\rho}}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu x^2}{4\rho t}\right)\right\} = \exp\left(x\sqrt{\frac{s\rho}{\mu}}\right). \quad (1.61)$$

D'une part, on vérifie bien que (1.60) est une solution de l'équation différentielle (1.55), d'autre part, à partir de (1.59), on en déduit,

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} s^{\frac{1}{2}} \hat{v}(s, x) = \frac{\partial \hat{v}(s, x)}{\partial x},$$

en particulier,

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} s^{\frac{1}{2}} \hat{u}_p(s) = \frac{\partial \hat{v}(s, 0)}{\partial x}.$$

Si on définit comme variable de sortie

$$y(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\partial \hat{v}(s, 0)}{\partial x}, \quad (1.62)$$

on obtient le transfert suivant

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \hat{u}_p(s). \quad (1.63)$$

Ce qui nous permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

Exemple 2 Le problème de Tautochrone

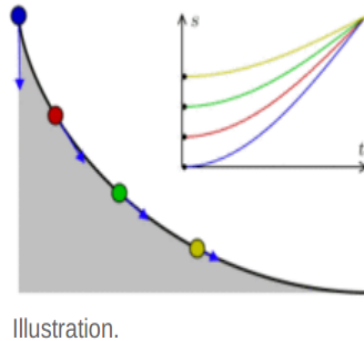


FIGURE 1.2 – Le problème de Tautochrone

Le problème est le suivant : trouver une courbe dans le plan (x, y) tel que le temps nécessaire pour qu'une particule glisse le long de la courbe jusqu'à son point le plus bas est indépendante de son placement initial sur la courbe ; supposons que le champ de gravité est homogène et il n'y a pas de frottement. Fixons le point le plus bas d'une courbe à l'origine et la position d'une courbe dans le quadrant positif du plan. Indiquons par (x, y) le point initial et (x^*, y^*) tout point intermédiaire entre $(0, 0)$ et (x, y) .

Selon la loi de conservation de l'énergie, nous pouvons écrire

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = mg(y - y^*),$$

où σ est la longueur le long de la courbe mesurée à partir de l'origine, m la masse de la particule, g l'accélération gravitationnelle.

On considère le cas où $\frac{d\sigma}{dt} < 0$ et $\sigma = \sigma(y^*(t))$, la loi de conservation de l'énergie devient alors,

$$\sigma' \frac{dy^*}{dt} = -\sqrt{2g(y - y^*)},$$

en intégrant de $y^* = y$ à $y^* = 0$, et de $t = 0$ à $t = T$. Après quelques calculs, on obtient l'équation intégrale :

$$\int_0^y \frac{\sigma'(y^*)}{\sqrt{y - y^*}} dy^* = \sqrt{2g}T.$$

Ici, on peut facilement reconnaître la dérivée de Caputo et écrire

$${}^c D^{\frac{1}{2}}\sigma(y) = \frac{\sqrt{2g}T}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Notons que T est le temps de la descente, donc c'est une constante. En appliquant l'intégral d'ordre $\frac{1}{2}$ des deux côtés de l'équation, on obtient la relation entre la longueur le long de la courbe et la position initiale dans la direction y .

1.3.7 Interprétations géométriques des opérateurs fractionnaires

L'intégration et la dérivation fractionnaire sont des généralisations de notions d'intégration et de dérivation d'ordre entier, incluent les dérivées d'ordre n et les intégrales répétées n fois comme cas particuliers. Pour ceci, il serait intéressant d'avoir des interprétations qui fourniront un lien aux interprétations classiques de différentiation et d'intégrations d'ordre entier connues.

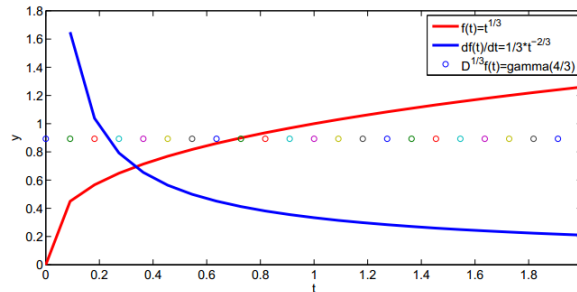


FIGURE 1.3 – comportement de la fonction $t^{\frac{1}{3}}$, sa dérivée première et sa dérivée fractionnaire

Regardons maintenant le comportement d'une fonction particulière, à savoir la fonction $f(t) = t^{\frac{1}{3}}$, vis-à-vis de sa dérivée classique et sa dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{1}{3}$. La dérivée première de $f(t)$ est $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$, et sa dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{1}{3}$ est :

$${}_0D_R^\alpha f(t) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right),$$

tout cela est regroupé dans la figure 1.3

Interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par la formule (1.19) :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.64)$$

Peut être réécrite sous la forme :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(s) dg_t(s), \quad (1.65)$$

avec

$$g_t(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t^\alpha - (t-s)^\alpha \right).$$

Si on prend $t_1 = kt$ et $s_1 = ks$, $k > 0$, on aura

$$g_{t_1}(s_1) = g_{kt}(ks) = k^\alpha g_t(s).$$

Soit t fixé, l'intégrale (1.65) devienne donc une intégrale de Stieltjes.

On peut suivre l'idée de G.L Bullock [12] : considérons les axes s, g et f , dans le plan (s, g) on trace la fonction $g_t(s)$ pour $s \in [0, t]$ et le long de la courbe obtenue on construit une surface "barrière" de la hauteur $f(s)$, alors le bord supérieur de la "barrière" est une ligne tridimensionnelle $(s, g_t(s), f(s))$.

Cette barrière peut être projetée sur deux surfaces (voir figure 1.4) :

* L'aire de la projection de cette "barrière" sur le plan $(s; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale

$${}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

* L'aire de la projection de la même "barrière" sur le plan $(g; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale (1.65) qui est la même valeur de l'intégrale fractionnaire (1.64).

En d'autres termes, notre "barrière" projette deux ombres sur deux murs. La première ombre, qui est sur le mur $(s; f)$, est l'aire de la surface située en dessous de la courbe $f(s)$, laquelle est une interprétation géométrique standard de l'intégrale $\int_0^t f(s) ds$. L'ombre sur le mur $(g; f)$ est une interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire (1.64) pour t fixé.

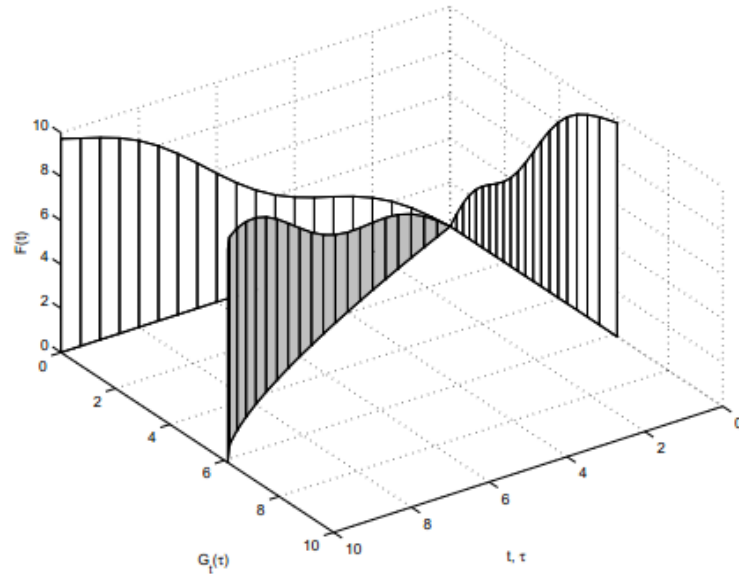


FIGURE 1.4 – La "barrière" et ses ombres ${}_0I_t^1 f(t)$ et ${}_0I_t^\alpha f(t)$, pour $\alpha = 0.75$, $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$, $0 \leq t \leq 10$.

Remarque 1.3.9.

Si $\alpha = 1$, alors $g_t(s) = s$, et les deux ombres coïncident.

Ceci montre que l'intégrale classique est un cas particulier aussi bien de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville que du point de vue géométrique.

1.4 Résultats de la théorie du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe. Ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé (voir [3],[4]...). Dans ce paragraphe, on s'intéresse particulièrement au théorème de point fixe de Dhage pour les équations différentielles hybrides. Pour cela nous aurons besoin du théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes et celui de Schauder .

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom du théorème de l'application contractante) est un théorème qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante définie sur un espace complet dans lui-même. Et on rencontre son utilisation dans de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Théorème 1.4.1. [91]

Soit $(M; d)$ un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k ; alors T admet un unique point fixe $x \in M$. De plus :

Si $x_0 \in M$ et $x_n = T(x_{n+1})$;

on a : $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $d(x_n, x) < k^n(1 - k)^{-1}d(x_1, x_0)$, $n \geq 1$.

x étant le point fixe de T .

Remarque 1.4.1.

• Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) et l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T admet un seul point fixe.

Extension de Boyd et Wong

Cette extension consiste à remplacer la contraction par la \mathcal{D} -contraction dont nous donnons la définition :

Définition 1.4.1. Soit M un espace métrique et T une application de M dans M . On dit que T est une \mathcal{D} -contraction, s'il existe une application $\mathcal{D} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ semi-continue supérieurement avec $\mathcal{D}(r) < r$ pour $r > 0$ telle que :

$$d(T(x), T(y)) \leq \mathcal{D}(d(x, y))$$

La contraction est donc un cas particulier de la \mathcal{D} -contraction (il suffit de prendre $\mathcal{D}(r) = kr$ pour tout $r \geq 0$ et $0 \leq k < 1$).

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une telle application

Théorème 1.4.2. [11]

Toute \mathcal{D} -contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

1.4.2 Théorème du point fixe de Brouwer-Schauder

Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait

partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général :

Toute application T continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeurs dans K admet un point fixe.

Définition 1.4.2.

On dit qu'un espace topologique E a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \rightarrow E$ possède un point fixe.

Si on note par B_n la boule unité fermée de E^n , $n \in \mathbb{N}$.

On a le résultat suivant :

Théorème 1.4.3.

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie.

Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder est topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.4.4. [97]

Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach X . Si $T : K \rightarrow K$ une application continue, alors T admet un point fixe.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe. Citons à titre d'exemple les théorèmes de Peano, de Rothe... (voir [91]; [97]). Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes, et peut être confirmé par les théorèmes suivants (voir [35];[41])

Théorème 1.4.5. (Schauder 1930)

Soit K un convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X .

Soit $T : K \rightarrow K$ une application compacte. Alors, T admet un point fixe

Théorème 1.4.6. (Alternative non linéaire de Leray-Schauder) [21]

Soit X un espace de Banach et $\mathfrak{F} : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu (i.e. sa restriction à tout borné de X est un compact) et soit

$$\mathcal{P}(X) = \{x \in X : x = \lambda \mathfrak{F}x \ ; \ 0 < \lambda < 1\}.$$

Alors, $\mathcal{P}(X)$ est non borné ou bien \mathfrak{F} admet au moins un point fixe.

1.4.3 Théorème du point fixe hybride de Dhage

Il est connu que le premier théorème du point fixe hybride est dû à Krasnoselskii [62] qui a combiné entre le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Schauder. Ce théorème a plusieurs applications dans les équations intégrales non linéaires dans un espace de Banach ; et que de nombreuses tentatives ont été faites pour améliorer et affaiblir les hypothèses de ce théorème (voir [13]). L'étude des équations intégrales non linéaires dans une algèbre de Banach a été initié par Dhage dans son travail [27] et qui a introduit d'autres théorèmes de points fixes (voir [27], [28]).

Théorème 1.4.7. [29]

Soit S un sous ensemble fermé, borné et convexe d'une algèbre de Banach X , et soient $A : X \rightarrow X$ et $B : S \rightarrow X$ deux opérateurs tels que :

- (a) A est \mathcal{D} -Lipschitzien et de \mathcal{D} -fonction ϕ ,
- (b) B est complètement continu, et
- (c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$.

Alors l'équation $x = AxBx$ admet une solution à condition que : $M\phi(r) < r$, $r > 0$ où : $M = \|B(S)\|$.

Puisque toute application lipschitzienne est \mathcal{D} -lipschitzienne, on obtient le corollaire intéressant suivant et qui est applicable pour les équations différentielles non linéaires et intégrales.

Corollaire 1.4.1. Soit S un sous ensemble fermé, borné et convexe d'une algèbre de Banach X , et soient $A : X \rightarrow X$ et $B : S \rightarrow X$ deux opérateurs tels que :

- (a) A est Lipschitzien de constante de Lipschitz α ,
- (b) B est complètement continu, et

(c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$.

Alors l'équation $x = AxBx$ admet une solution à condition que $\alpha M < 1$, où $M = \|B(S)\|$.

1.5 Quelques éléments d'analyse multivoque :

Dans notre étude, certains éléments d'analyse multivoque seront utilisés. Il est donc utile de rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales de multifonctions (dit aussi correspondances).

Soit X un espace de Banach muni d'une norme $\| \cdot \|$ et $C(I, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de I dans X muni de la norme :

$$\|x\|_C = \sup_{t \in I} \|x(t)\|.$$

On définit :

$$\mathcal{P}_f(X) = \{A \subset X \mid A \text{ est non-vide et a une propriété } f\}.$$

$$\mathcal{P}_{bd}(X) = \{A \subset \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est borné}\}$$

$$\mathcal{P}_{cl}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est fermé}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est convexe}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est compact}\}.$$

$$\mathcal{P}_{cl,bd}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est fermé et borné}\}.$$

On rappelle quelque notion qu'on va utiliser dans la suite

Définition 1.5.1. Une multifonction (ou application multivoque) G sur un espace X est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $G(x)$ de X . On notera $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

- Une application multivoque $G : X \rightarrow 2^X$ est à valeurs convexes (fermées) si $G(x)$ est convexe (fermé) pour tout $x \in X$.
- Une application multivoque G a un graphe fermé si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $x_n \rightarrow x$, et $y_n \rightarrow y$, avec $y_n \in G(x_n)$, alors $y \in G(x)$.

Définition 1.5.2. Soit $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ Une application multivoque

- G est dite semi-continue supérieurement en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X avec $G(x_0) \subset U$, il existe un ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on a que $G(x) \subset U$.

- G est dite semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si l'ensemble $\{x \in X : G(x) \subset U \neq \emptyset\}$ est ouvert pour tout ouvert $U \in X$.
- G est dite continue, si elle est semi-continue supérieure et inférieure sur X .
- Une application multivoque G admet un point fixe s'il existe x dans X tel que $x \in G(x)$.

Définition 1.5.3. Une application multivoque $G : J \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ est dite mesurable, si, pour tout $y \in X$, la fonction $t \rightarrow d(y, G(t)) = \inf\{|y - x| : x \in G(t)\}$ est mesurable.

Définition 1.5.4. Une application multivoque mesurable $G : J \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(X)$ est dite intégrablement bornée, s'il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R})$, telle que $\|v\| \leq h(t)$, i.e. $t \in J$, pour tout $v \in G(t)$.

On définit l'ensemble des sélections de G par :

$$S_G^1(x) = \{v \in L^1(J, E) | v(t) \in G(t, x(t)), p, p, t \in J\}.$$

Alors, nous avons les définitions et les lemmes suivants dus à [26].

Remarque[18] si $G : J \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ est une application multivoque intégrablement bornée alors l'ensemble S_G^1 de toutes les sélections Lebesgue intégrables de G est non vide et fermé.

Définition 1.5.5. Une application multivoque $G : J \times X \rightarrow \mathcal{P}_{bd,cl}(\mathbb{R})$ est dite de Carathéodory si

- (i) $t \rightarrow G(t, x)$ est mesurable pour chaque $x \in X$, et
- (ii) $x \rightarrow G(t, x)$ est semi-continue supérieurement presque pour tout $t \in J$.

Définition 1.5.6. Une application multivoque de type Carathéodory $G(t, x)$ est dite L^1_X -Carathéodory, s'il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R})$, telle que

$$\|G(t, x)\| \leq h(t), \quad p, p, t \in J$$

pour tout $x \in X$.

Lemme 1.5.1. Soit X un espace de Banach. Si $\dim(X) < \infty$ et $G : J \times X \rightarrow \mathcal{P}_{bd,cl}(X)$ est L^1 -Carathéodory, alors, $S_G^1(x) \neq \emptyset$, pour tout $x \in X$.

Lemme 1.5.2. Soit X un espace de Banach, G une application multivoque de type Carathéodory avec $S_G^1(x) \neq \emptyset$ et soit $\mathcal{L} : L^1(J, X) \rightarrow C(J, X)$ une application linéaire continue. Alors, l'opérateur,

$$\mathcal{L} \circ S_G^1 : C(J, X) \rightarrow \mathcal{P}_{bd,cl}(C(J, X))$$

est un opérateur à graphe fermé dans $C(J, X) \times C(J, X)$.

Théorème 1.5.1. [26] Soit X une algèbre de Banach et $\mathcal{A} : X \longrightarrow \mathcal{P}_{bd,cl,cv}(X)$ et $\mathcal{B} : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ deux opérateurs multivoques satisfaisant :

- (a) \mathcal{A} est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz k ,
- (b) \mathcal{B} est compact et semi-continu supérieurement,
- (c) $\mathcal{A}x\mathcal{B}x$ est un sous-ensemble convexe de X , pour chaque $x \in X$, et
- (d) $Mk < 1$, où $M = \|\mathcal{B}(X)\|$.

Alors soit

- (i) l'opérateur inclusion $x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$ admet une solution, ou
- (ii) l'ensemble $\varepsilon = \{u \in X \mid \lambda u \in \mathcal{A}u\mathcal{B}u, \lambda > 1\}$ est non borné.

1.6 Espace vectoriel partiellement ordonné :

Un espace vectoriel X muni d'une relation d'ordre partielle \leq devient un espace vectoriel partiellement ordonné.

- On dit que deux éléments x et y dans un espace vectoriel partiellement ordonné X sont comparables si l'une des deux relations $x \leq y$ ou $y \leq x$ est vérifiée.
Nous introduisons une norme $\| \cdot \|$ dans un espace vectoriel partiellement ordonné X de sorte que X devient maintenant un espace linéaire partiellement normé.
- Si X est en plus complet, on parle alors d'un espace vectoriel normé complet partiellement ordonné.
- Un sous-ensemble non vide C de X est appelé une chaîne ou totalement ordonné si tous les éléments de C sont comparables.

Définition 1.6.1. [26] Une application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est dite croissante si elle conserve la relation d'ordre \leq , c'est-à-dire si $x \leq y$ alors $\mathcal{T}x \leq \mathcal{T}y$ pour tout $x, y \in X$.

Définition 1.6.2. [26] On dit qu'une application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est partiellement continue en un point $a \in X$ si pour $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}a\| < \varepsilon$ lorsque x est comparable à a et $\|x - a\| < \delta$.

\mathcal{T} est dite partiellement continue sur X si elle est partiellement continue en tout point de X .

Il est clair que si \mathcal{T} est partiellement continue sur X , elle est continue sur toutes les chaînes C contenues dans X .

Définition 1.6.3. [26] Une application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est dite **partiellement bornée** si $\mathcal{T}(C)$ est borné pour chaque chaîne C dans X .

\mathcal{T} est **uniformément partiellement bornée** si pour toutes les chaînes, $\mathcal{T}(C)$ est borné par la même constante.

On dit que \mathcal{T} est borné si $\mathcal{T}(X)$ est un sous-ensemble borné de X .

Définition 1.6.4. [26] Une application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est dite **partiellement compacte** si $\mathcal{T}(C)$ est un sous-ensemble relativement compact de X pour tous les ensembles totalement ordonnés.

\mathcal{T} est **uniformément partiellement compact** si $\mathcal{T}(C)$ est uniformément partiellement borné et partiellement compact sur X .

\mathcal{T} est appelée **partiellement totalement bornée** si pour tout sous-ensemble totalement ordonné et borné C de X , $\mathcal{T}(C)$ est un sous-ensemble relativement compact de X .

Si \mathcal{T} est partiellement continue et partiellement totalement bornée, on l'appelle **partiellement totalement continu** sur X .

Définition 1.6.5. Une application $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée une fonction dominante ou, \mathcal{D} -fonction s'il s'agit d'une application croissante et semi-continue supérieure satisfaisante $\psi(0) = 0$.

Exemple 1.6.1. les \mathcal{D} -fonctions couramment utilisées sont :

- $\psi(r) = kr$, pour une constante $k > 0$,
- $\psi(r) = \frac{Lr}{K+r}$, pour certaines constantes $L > 0, K > 0$,
- $\psi(r) = \tan^{-1}(r)$,
- $\psi(r) = \log(1+r)$,
- $\psi(r) = e^r - 1$.

Soit $(X, \leq, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé partiellement ordonné.

Définition 1.6.6. Une application $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est appelée partiellement non linéaire \mathcal{D} -Lipschitzienne s'il existe une \mathcal{D} -fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\| \mathcal{T}x - \mathcal{T}y \| \leq \psi(\| x - y \|), \quad (1.66)$$

pour tous les éléments comparables $x, y \in X$.

Si $\psi(r) < r$ pour tout $r > 0$, alors \mathcal{T} est dite une \mathcal{D} -contraction non linéaire sur X .
Si $\psi(r) = kr, k > 0$, alors \mathcal{T} est dite partiellement lipschitzienne avec une constante de Lipschitz k . En particulier, si $k < 1$, \mathcal{T} est appelée une contraction .

Soit $(X, \leq, \| \cdot \|)$ une algèbre normée partiellement ordonnée. On note

$$X^+ = \{x \in X \mid x \geq \theta, \text{ où } \theta \text{ est le zero élément de } X\},$$

$$\mathcal{K} = \{X^+ \text{ sous-ensemble } X \mid uv \in X^+ \text{ pour tout } u, v \in X^+\}.$$

On note $\mathcal{P}_{ch}(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X .

Les éléments de l'ensemble \mathcal{K} sont appelés les vecteurs positifs dans X .

Le lemme suivant découle immédiatement de la définition de l'ensemble \mathcal{K} , qui est souvent utilisé dans la théorie des points fixes hybrides des algèbres de Banach et de ses applications aux équations différentielles et intégrales non linéaires.

Lemme 1.6.1. [26] Si $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{K}$ sont tels que $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$, alors $u_1 u_2 \leq v_1 v_2$.

Définition 1.6.7. [26] Un opérateur $T : X \rightarrow X$ est dit positif si l'image $R(T)$ de T est telle que $R(T) \subseteq \mathcal{K}$.

Définition 1.6.8. X est un espace régulier si, pour tout ensemble fermé F et tout point x n'appartenant pas à F , il existe un voisinage U de x et un voisinage V de F qui sont disjoints.

Définition 1.6.9. La relation d'ordre \leq et la métrique d dans un ensemble X non vide sont compatibles s'il existe $\{x_n\}$ une suite croissante de E et si la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ extraite de $\{x_n\}$ converge vers x^* implique que toute la suite $\{x_n\}$ converge vers x^* . De la même manière, soit $(X, \leq, \| \cdot \|)$ un e.v.n muni d'une relation d'ordre partielle, la relation d'ordre \leq et la norme $\| \cdot \|$ sont compatibles si \leq et la métrique définie à travers la norme $\| \cdot \|$ sont compatibles.

Théorème 1.6.1. [26] Soit $(X, \leq, \| \cdot \|)$ une algèbre de Banach, partiellement ordonnée, telle que la relation d'ordre \leq et la norme $\| \cdot \|$ dans X soient compatibles dans chaque chaîne compacte de X . Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}$ deux opérateurs croissants tels que

- (a) \mathcal{A} est partiellement continu et partiellement non linéaire \mathcal{D} -Lipschitzien avec \mathcal{D} -fonction $\psi_{\mathcal{A}}$,
- (b) \mathcal{B} est partiellement continu et uniformément partiellement compact,
- (c) $M\psi_{\mathcal{A}}(r) < r, \quad r > 0$, où $M = \sup\{\| \mathcal{B}(C) \| : C \in \mathcal{P}_{ch}(X)\}$, et
- (d) il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq \mathcal{A}x_0 \mathcal{B}x_0$ ou $x_0 \geq \mathcal{A}x_0 \mathcal{B}x_0$,

alors l'équation

$$\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$$

admet une solution positive x^* dans X et la suite $\{x_n\}$ d'itérations successives définies par $x_{n+1} = \mathcal{A}x_n\mathcal{B}x_n$, $n = 0, 1, \dots$; converge d'une façon monotone vers x^* .

Chapitre 2

Équations différentielles fractionnaires hybrides :

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence de la solution de deux équations différentielles fractionnaires : La première est donnée par

$$\begin{cases} D^\alpha \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] - \lambda \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] = g(t, x(t)), & t \in J = (0, 1], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$, $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ est une fonction continue et $g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction L^1 -Carathéodory.

Alors que dans la deuxième, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] - \lambda D^\beta \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] = g(t, x(t)), & t \in J = (0, 1] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.2)$$

où D^α et D^β sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo avec $0 < \beta < \alpha < 1$.

2.2 Équation différentielle fractionnaire :

On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante où D^α désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , avec $0 < \alpha \leq 1$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$D^\alpha x(t) - \lambda x(t) = g(t). \quad (2.3)$$

Pour résoudre cette equation, on utilise la transformée de Laplace. On obtient alors,

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) - \lambda X(s) = G(s),$$

qu'on peut aussi l'écrire sous la forme :

$$X(s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda}G(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}x(0).$$

Comme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - \lambda}\right\} = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \text{ et } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}\right\} = E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

La solution $x(t)$ de l'équation (2.3) est immédiatement obtenue par la convolution

$$x(t) = x(0)E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s)ds. \quad (2.4)$$

On considère dans ce cas l'équation différentielle fractionnaire linéaire à coefficients constants, où le deuxième terme a une dérivée d'ordre différent du premier,

où $0 < \beta < \alpha \leq 1$:

$$D^\alpha x(t) - \lambda D^\beta x(t) = g(t), \quad (2.5)$$

dont la transformée de Laplace est donnée par,

$$s^\alpha X(s) - \lambda s^\beta X(s) - s^{\alpha-1}x(0) + \lambda s^{\beta-1}x(0) = G(s),$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$X(s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda s^\beta}G(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda s^\beta}x(0) - \lambda \frac{s^{\beta-1}}{s^\alpha - \lambda s^\beta}x(0),$$

alors

$$X(s) = \frac{s^{-\beta}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}G(s) + \frac{s^{\alpha-\beta-1}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}x(0) - \lambda \frac{s^{-1}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}x(0).$$

On sait que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-\beta}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}\right\} = t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta});$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta-1}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}\right\} = E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \text{ et } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-1}}{s^{\alpha-\beta} - \lambda}\right\} = t^{\alpha-\beta}E_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}).$$

Alors, la solution $x(t)$ de l'équation (2.5) est immédiatement obtenue par la convolution

$$x(t) = ((E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta}E_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}))x(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta})g(s)ds) \quad (2.6)$$

2.3 Construction de la solution :

Avant de commencer l'étude de l'existence de la solution, on donne quelques notions qu'on va utiliser durant toute cette partie, on définit la solution du problème (2.1) comme suit :

Définition 2.3.1. La solution du problème (2.1), est une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ qui satisfait

- (i) $t \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est une fonction continue différentiable pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) x satisfait les équations du problème (2.1) sur J .

On note l'espace $C(J, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles définies sur J . Nous définissons une norme $\| \cdot \|$ et la relation d'ordre \leq dans $C(J, \mathbb{R})$ par

$$\| x \| = \sup_{t \in J} |x(t)|, \quad (2.7)$$

et

$$x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t) \text{ pour tout } t \in J. \quad (2.8)$$

Clairement, $C(J, \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach pour la norme $\| \cdot \|$ et est également partiellement ordonnée par rapport à la relation partiellement ordonnée ci-dessus \leq .

Lemme 2.3.1. [26] Dans $(C(J, \mathbb{R}), \leq, \| \cdot \|)$, $\| \cdot \|$ et \leq sont compatibles dans chaque sous-ensemble partiellement compact de $C(J, \mathbb{R})$.

Définition 2.3.2. Une fonction $u \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite une solution inférieure du problème (2.1) si la fonction $t \longrightarrow \frac{u(t)}{f(t,u(t))}$ est continument différentiable et satisfait

$$D^\alpha \left[\frac{u(t)}{f(t,u(t))} \right] - \lambda \left[\frac{u(t)}{f(t,u(t))} \right] \leq g(t, u(t)) \quad , t \in J$$

$$u(0) \leq x_0.$$

De même, une fonction $v \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution supérieure du problème (2.1) si elle satisfait la propriété ci-dessus avec les inégalités inverses.

Afin d'établir l'existence de la solution du problème (2.1), on considère les hypothèses suivantes :

- (A₀) La fonction $x \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est croissante dans \mathbb{R} pour chaque $t \in J$.
- (A₁) Il existe une constante $M_f > 0$ telle que $0 < f(t, x) < M_f$, pour tout $t \in J$, et $x \in \mathbb{R}$.

(A₂) Il existe une \mathcal{D} -fonction ϕ telle que,

$$0 \leq f(t, x) - f(t, y) \leq \phi(x - y)$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \geq y$.

(B₁) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que $g(t, x) \leq h(t)$ pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.

(B₂) $g(t, x)$ est croissante par rapport à x pour tout $t \in J$.

(B₃) Le problème (2.1) admet une solution inférieure $u \in C^1(J, \mathbb{R})$.

Lemme 2.3.2. On suppose que l'hypothèse A_0 est vérifiée. Alors une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ est une solution du problème

$$\begin{cases} D^\alpha \left[\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right] - \lambda \left[\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right] = g(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

si et seulement si x une solution de l'équation intégrale non linéaire

$$x(t) = f(t, x(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s) ds \right),$$

pour tout $t \in J$.

Démonstration. On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D^\alpha \left[\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right] - \lambda \left[\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right] = g(t).$$

En utilisant les relations (2.3) et (2.4), la solution de l'équation différentielle fractionnaire ci-dessus s'écrit :

$$\frac{x(t)}{f(t, x(t))} = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s) ds + \frac{x(0)}{f(0, x(0))} E_\alpha(\lambda t^\alpha). \quad (2.9)$$

En tenant compte de la condition initiale, on obtient donc

$$x(t) = f(t, x(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s) ds \right).$$

Inversement, si on a :

$$x(t) = f(t, x(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s) ds \right).$$

Alors, en appliquant l'opérateur dérivé d'ordre α au sens de Caputo, on a

$$D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right) = D^\alpha \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s) ds \right) + D^\alpha \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \right).$$

D'après la relation (a) dans le lemme 1.3.1, on a

$$D^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Cela implique que :

$$D^\alpha \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \right) = \frac{x_0}{f(0, x_0)} \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha). \text{ On pose } F(u) := u^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda u^\alpha).$$

En utilisant la relation,

$$D^\alpha \left[\int_0^t F(t-s) g(s) ds \right] (t) = \int_0^t D^\alpha [F(t)](s) g(t-s) ds + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} [{}_t I_{0^+}^{1-\alpha} F](t).$$

Alors,

$$\begin{aligned} D^\alpha \left[\int_0^t F(t-s) g(s) ds \right] &= \int_0^t D^\alpha [s^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda s^\alpha)] g(t-s) ds + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} I^{1-\alpha} F(t) \\ &= \int_0^t \lambda s^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda s^\alpha) g(t-s) ds + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} I^{1-\alpha} F(t). \end{aligned}$$

On pose $t-s=u$, on a alors

$$D^\alpha \left[\int_0^t F(t-s) g(s) ds \right] (t) = \int_0^t \lambda (t-u)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda (t-u)^\alpha) g(u) du + g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} I^{1-\alpha} F(t).$$

D'une autre part, on remplace $\alpha' = 1 - \alpha$, $\mu = \beta = \alpha$, $a = 0$ et $t = x$, dans la relation 1.13, du lemme 1.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} I^{1-\alpha} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda t^\alpha] &= E_{\alpha, 1}[\lambda t^\alpha], \text{ alors} \\ g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} I^{1-\alpha} F(t) &= g(t) \lim_{t \rightarrow 0^+} E_{\alpha, 1}[\lambda t^\alpha] = g(t). \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right) &= \frac{x_0}{f(0, x_0)} \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \lambda (t-u)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda (t-s)^\alpha) g(s) ds + g(t) \\ D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right) - \lambda \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right) &= g(t). \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant t par 0 dans la relation (2.9) et en utilisant l'hypothèse (A_0) on obtient $x(0) = x_0$.

Ceci complète la preuve. □

2.4 Résultats d'existence :

On arrive à énoncer le théorème d'existence de la solution du problème (2.1) en se basant sur le théorème du point fixe de Dhage.

Théorème 2.4.1. On suppose que $(A_0) - (A_2)$ et $(B_1) - (B_3)$ sont vérifiées. De plus, on suppose que

$$\left(C_1 \exp(2\lambda^\rho) \left(\|h\|_{L^1} + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \right) \right) \phi(r) < r, \quad r > 0.$$

Alors le problème (2.1) admet une solution positive x^* définie sur J et la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ des approximations successives définies par

$$x_{n+1}(t) = [f(t, x_n(t))] \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x_n(s)) ds \right), \quad (2.10)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, où $x_1 = u$ converge de manière monotone vers x^* .

Démonstration. Soit $X = C(J, \mathbb{R})$, alors, d'après le lemme 2.3.1, chaque chaîne compacte de X possède la propriété de compatibilité de la norme $\| \cdot \|$ et la relation d'ordre \leq dans X . Ainsi en appliquant le lemme 2.3.2, le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \right). \quad (2.11)$$

On considère les deux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} définis sur X par :

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J,$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds.$$

On doit montrer que les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont toutes les conditions du théorème de Dhage 1.6.1. Ceci est réalisé dans la série des étapes suivantes :

Étape I : \mathcal{A} et \mathcal{B} sont croissants sur X .

Soit $x, y \in X$ tel, que $x \geq y$. D'après l'hypothèse (A_2) , on obtient pour tout $t \in J$,

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)) \geq f(t, y(t)) = \mathcal{A}y(t),$$

Cela montre que \mathcal{A} est un opérateur croissant sur X .

De même, pour tout $t \in J$, $x(t) \geq y(t)$. Donc d'après (B_2) ,

$g(t, x(t)) \geq g(t, y(t))$. On a alors,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \geq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, y(s)) ds.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds &\geq \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{B}x(t) \geq \mathcal{B}y(t)$ pour tout $t \in J$. Donc l'opérateur \mathcal{B} est croissant dans X .

Ainsi, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs positifs croissants sur X dans lui-même.

Étape II : \mathcal{A} est partiellement borné et partiellement \mathcal{D} -Lipschitzien sur X .

Soit $x \in X$. En utilisant l'hypothèse (A_1) , on a

$$|\mathcal{A}x(t)| \leq f(t, x(t)) \leq M_f, \text{ pour tout } t \in J.$$

En prenant le supremum sur t ,

on obtient $\|\mathcal{A}x\| \leq M_f$ et ainsi, \mathcal{A} est borné.

Soit $x, y \in X$ tel que $x \geq y$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \leq \phi(|x(t) - y(t)|) \leq \phi(\|x - y\|).$$

En prenant le supremum sur t , on obtient $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \phi(\|x - y\|)$.

Par conséquent, \mathcal{A} est partiellement non linéaire \mathcal{D} -lipschitzien sur X , ce qui implique que \mathcal{A} est partiellement continu sur X .

Étape III : \mathcal{B} est partiellement continu sur X .

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans une chaîne C de X , telle que $x_n \rightarrow x$. D'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}x_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x_n(s)) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\ &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} g(s, x_n(s)) ds + \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\ &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds + \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\ &= \mathcal{B}x(t). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{B}x_n$ converge de manière monotone vers $\mathcal{B}x$ ponctuellement sur J .

Ensuite, on montre que $\{\mathcal{B}x_n\}$ est une suite de fonctions équi continues dans X .

Soient $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$. Posons $\psi(t) = \int_0^t h(s)ds$, alors

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x_n(t_2) - \mathcal{B}x_n(t_1)| &\leq \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) g(s, x_n(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha) g(s, x_n(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha)] g(s, x_n(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) g(s, x_n(s)) ds \right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha)| |g(s, x_n(s))| ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) |g(s, x_n(s))| ds \right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \|h\|_{L^1} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha) ds \\
&\quad + C_1 \exp(2\lambda^\rho) \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right|.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) ds &= - \int_{t_2}^{t_2-t_1} u^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^\alpha) du = \int_{t_2-t_1}^{t_2} u^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^\alpha) du \\
&= \int_0^{t_2} u^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^\alpha) du - \int_0^{t_2-t_1} u^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(u)^\alpha) du.
\end{aligned}$$

D'après la deuxième relation du lemme 1.2.1 avec, $\beta = \alpha$, on obtient,

$$\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) ds = t_2^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^\alpha) - (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^\alpha). \quad (2.12)$$

D'une façon similaire, on a :

$$\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha) ds = t_1^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^\alpha). \quad (2.13)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x_n(t_2) - \mathcal{B}x_n(t_1)| &\leq |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\quad + \|h\|_{L^1} [t_2^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^\alpha) - t_1^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^\alpha) + (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^\alpha)] \\
&\quad + C_1 \exp(2\lambda^\rho) |\psi(t_2) - \psi(t_1)|.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$|\mathcal{B}x_n(t_2) - \mathcal{B}x_n(t_1)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t_2 - t_1 \rightarrow 0,$$

uniformément pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que la convergence $\mathcal{B}x_n \rightarrow \mathcal{B}x$ est uniforme et donc \mathcal{B} est partiellement continu sur X .

Étape IV : \mathcal{B} est un opérateur partiellement compact sur X .

Soit C une chaîne arbitraire dans X . On se propose de montrer que $\mathcal{B}(C)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X . Premièrement, $\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné. En effet

Pour tout élément $y \in \mathcal{B}(C)$, il existe un élément $x \in C$, tel que $y = \mathcal{B}x$.

D'après l'hypothèse (B_1) , pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \right| + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} E_\alpha(\lambda t^\alpha) \right| \\ &\leq C_1 \exp(2\lambda^\rho) \int_0^1 h(s) ds + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| C_1 \exp(2\lambda^\rho) \\ &\leq C_1 \exp(2\lambda^\rho) \left(\|h\|_{L^1} + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \right) = M. \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur t , on obtient $\|y\| = \|\mathcal{B}x\| \leq M$, pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$.

Par conséquent, $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble uniformément borné de X .

Ainsi, $\|\mathcal{B}(C)\| \leq M$ pour toutes les chaînes C dans X .

D'où, \mathcal{B} est un opérateur uniformément partiellement borné sur X .

Ensuite, on montre que $\mathcal{B}(C)$ est un ensemble équicontinu dans X .

Soit $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$ et $\psi(t) = \int_0^t h(s) ds$.

Donc, pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$, on a

$$\begin{aligned} |y(t_2) - y(t_1)| &\leq \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \right| \\ &\quad + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha) - (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1-s)^\alpha)] g(s, x(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2-s)^\alpha) g(s, x(s)) ds \right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha)| |g(s, x(s))| ds \right| \\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) |g(s, x(s))| ds \right| + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \|h\|_{L^1} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_2 - s)^\alpha) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_1 - s)^\alpha) ds \\
&+ C_1 \exp(2\lambda^\rho) \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds + |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right|.
\end{aligned}$$

Enfin, selon les relations (2.12) et (2.13), on a :

$$\begin{aligned}
|y(t_2) - y(t_1)| &\leq |E_\alpha(\lambda t_2^\alpha) - E_\alpha(\lambda t_1^\alpha)| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&+ \|h\|_{L^1} [t_2^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_2^\alpha) - t_1^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t_1^\alpha) + (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^\alpha)] \\
&+ C_1 \exp(2\lambda^\rho) |\psi(t_2) - \psi(t_1)|.
\end{aligned}$$

Donc, $|y(t_2) - y(t_1)| \rightarrow 0$ lorsque $t_2 - t_1 \rightarrow 0$, uniformément pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$. Par conséquent, $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble équicontinu de X .

$\mathcal{B}(C)$ uniformément borné et équicontinu dans X , donc il est compact.

Finalement, \mathcal{B} est un opérateur uniformément partiellement compact sur X dans lui-même.

Étape V : La solution inférieure u satisfait l'inégalité $u \leq \mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

D'après l'hypothèse (B_3), le problème (2.1) admet une solution inférieure u définie sur J . On a, alors $u(0) \leq x_0$ et

$$D^\alpha \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) - \lambda \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) \leq g(t, u(t)), \text{ pour tout } t \in J.$$

En multipliant l'inégalité ci-dessus par le facteur $E_{\alpha,\alpha}$ et en intégrant, on obtient pour tout $t \in J$,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) \left(D^\alpha \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) - \lambda \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) \right) ds \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, u(s)) ds .$$

En utilisant la relation (1) dans le lemme 1.3.2, on a

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) D^\alpha u(s) ds = u(t) - E_\alpha(\lambda t^\alpha) u(0) + \lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) u(s) ds.$$

On obtient, alors pour tout $t \in J$,

$$\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \leq E_\alpha(\lambda t^\alpha) \frac{u(0)}{f(0, u(0))} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s, u(s)) ds.$$

Par suite, pour tout $t \in J$

$$u(t) \leq \mathcal{A}u(t)\mathcal{B}u(t).$$

Par conséquent, $u \leq \mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

Etape VI : La \mathcal{D} -fonction ϕ satisfait la condition de croissance $M\phi(r) < r$, $r > 0$. La \mathcal{D} -fonction ϕ vérifie l'inégalité donnée dans l'hypothèse (c) du théorème de Dhage 1.6.1 . D'après l'estimation donnée à l'étape IV, on a pour tout, $r > 0$,

$$M\phi(r) = \left(C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left(\|h\|_{L^1} + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \right) \right) \phi(r) < r.$$

Ainsi, \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont toutes les conditions du théorème de Dhage 1.6.1. On en déduit que l'équation d'opérateur $\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$ admet une solution x^* . Par conséquent, x^* est solution de l'équation intégrale (2.11). Finalement, x^* est une solution du problème (2.1) sur J . De plus, la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ des approximations successives définies par (2.10) converge de manière monotone vers x^* .

Ceci complète la preuve. □

2.5 Etude de l'équation différentielle fractionnaire hybrides (2.2)

Avant d'entamer l'étude de l'équation différentielle fractionnaire hybrides (2.2) on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5.1. [33] Soit $0 < \beta < \alpha < 1$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a

–1–

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) D^\alpha x(s) ds &= \lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta,\alpha-\beta}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) x(s) ds \\ &+ x(t) - E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) x(0). \end{aligned}$$

–2–

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) D^\beta x(s) ds &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) x(s) ds \\ &- t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) x(0). \end{aligned}$$

Démonstration. En échangeant l'ordre de deux intégrales, on peut obtenir

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) D^\alpha x(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \int_0^s (t-\tau)^{-\alpha} x'(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \int_0^s (t-\tau)^{-\alpha} x'(\tau) d\tau ds \\ &= \int_0^t E_{\alpha-\beta}(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}) x'(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (t-\tau)^{(\alpha-\beta)k}}{\Gamma((\alpha-\beta)k+1)} x'(\tau) d\tau \\ &= x(t) - x(0) E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) + \lambda \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}) x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De même pour la deuxième, en échangeant l'ordre de deux intégrales, on peut obtenir

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) D^\beta x(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \int_0^s (t-\tau)^{-\beta} x'(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \int_0^s (t-\tau)^{-\alpha} x'(\tau) d\tau ds \\ &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}) x'(\tau) d\tau \\ &= -x(0) t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda(t-\tau)^{\alpha-\beta}) x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. \square

Avant d'étudier l'existence de la solution, on a besoin de définir la solution du problème, la solution inférieure et supérieure du problème (2.2).

Définition 2.5.1. La solution du problème (2.2), est une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ qui satisfait

- (i) $t \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est une fonction continue différentiable pour chaque $x \in J$.
- (ii) x satisfait les équations du problème (2.2) sur J .

Définition 2.5.2. Une fonction $u \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite une solution inférieure du problème (2.2) si la fonction $t \longrightarrow \frac{u(t)}{f(t,u(t))}$ est continument différentiable et elle satisfait

$$D^\alpha \left[\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right] - \lambda D^\beta \left[\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right] \leq g(t, u(t)), \quad t \in J.$$

$$u(0) \leq x_0.$$

De même, une fonction $v \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution supérieure du problème (2.2) si elle satisfait la propriété ci-dessus avec inégalité inverse.

Afin d'établir l'existence de la solution du problème (2.2), considérons les hypothèses suivantes :

- (A₀) L'application $x \longrightarrow \frac{x}{f(t,x)}$ est croissante sur \mathbb{R} pour chaque $t \in J$.
- (A₁) Il existe une constante $M_f > 0$, telle que $0 < f(t, x) < M_f$, pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.
- (A₂) Il existe une \mathcal{D} -fonction ϕ , telle que

$$0 \leq f(t, x) - f(t, y) \leq \phi(x - y),$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$.

- (B₁) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, telle que $|g(t, x)| \leq h(t)$, pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.
- (B₂) $g(t, x)$ est croissante par rapport x pour tout $t \in J$.
- (B₃) Le problème (2.2) admet une solution inférieure $u \in C^1(J, \mathbb{R})$.

Lemme 2.5.2. On suppose que l'hypothèse A₀ est vérifiée. Alors une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ est une solution du problème (2.2) si et seulement si, pour tout $t \in J$, c'est une solution de l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$x(t) = [f(t, x(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \right) \quad (2.14)$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \Big).$$

Théorème 2.5.1. On suppose que (A₀) – (A₂) et (B₁) – (B₃) sont vérifiées. De plus, si

$$\left(C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left(\left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| (1 + \lambda) + \|h\|_{L^1} \right) \right) \phi(r) < r, r > 0.$$

Alors, le problème (2.2) admet une solution positive x^* définie sur J et la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ des approximations successives définies par

$$x_{n+1}(t) = [f(t, x_n(t))] \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x_n(s)) ds \right), \quad (2.15)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, où $x_1 = u$, converge vers x^* .

Démonstration. On note $X = C(J, \mathbb{R})$, D'après le lemme 2.3.1, chaque chaîne compacte de X possède la propriété de compatibilité de la norme $\| \cdot \|$ et la relation d'ordre \leq dans X . Par application du lemme 2.5.2, le problème (2.2) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \right). \quad (2.16)$$

On définit les deux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} sur X par :

$$(\mathcal{A}x)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J,$$

et

$$(\mathcal{B}x)(t) = \frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds.$$

On doit montrer que les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont à toutes les conditions du théorème de Dhage 1.6.1. Ceci est réalisé dans la série des étapes suivantes :

Étape I : \mathcal{A} et \mathcal{B} sont croissants sur X .

Soit $x, y \in X$ tels que $x \geq y$. D'après l'hypothèse (A_2) , on obtient, pour tout $t \in J$,
 $(\mathcal{A}x)(t) = f(t, x(t)) \geq f(t, y(t)) = (\mathcal{A}y)(t)$.

Cela montre que \mathcal{A} est un opérateur croissant sur X .

De même, pour tout $t \in J$, $x(t) \geq y(t)$, donc d'après (B_2) on a alors,
 $g(t, x(t)) \geq g(t, y(t))$. Par suite,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \geq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, y(s)) ds.$$

D'où $\mathcal{B}x(t) \geq \mathcal{B}y(t)$, pour tout $t \in J$.

Ainsi, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs positifs croissants sur X dans lui-même.

Étape II : \mathcal{A} est partiellement borné et partiellement \mathcal{D} -Lipschitzien sur X .

Soit $x \in X$. En utilisant l'hypothèse (A_1) , on a

$$|\mathcal{A}x(t)| \leq f(t, x(t)) \leq M_f, \text{ pour tout } t \in J.$$

En prenant le supremum sur t , on obtient $\|\mathcal{A}x\| \leq M_f$ et ainsi, \mathcal{A} est borné.

Soient $x, y \in X$ tels que $x \geq y$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$|(\mathcal{A}x)(t) - (\mathcal{A}y)(t)| = f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \leq \phi(|x(t) - y(t)|) \leq \phi(\|x - y\|).$$

En prenant le supremum sur t , on obtient $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \phi(\|x - y\|)$.

Par conséquent, \mathcal{A} est partiellement non linéaire \mathcal{D} -lipschitzien sur X , ce qui implique que \mathcal{A} est partiellement continu sur X .

Étape III : \mathcal{B} est partiellement continu sur X .

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans une chaîne C de X , telle que $x_n \rightarrow x$. D'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{B}x_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x_n(s)) ds \\ &= \frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \lim_{n \rightarrow \infty} g(s, x_n(s)) ds \\ &= \frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \\ &= (\mathcal{B}x)(t). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{B}x_n$ converge vers $\mathcal{B}x$ en tout point de J .

Ensuite, on montre que $\{\mathcal{B}x_n\}$ est une suite de fonctions équicontinues dans X .

Soient $t_1, t_2 \in J$ avec, $t_1 < t_2$. Posons $\psi(t) = \int_0^t h(s) ds$, alors

$$\begin{aligned} &|\mathcal{B}x_n(t_2) - \mathcal{B}x_n(t_1)| \\ &\leq \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x_n(s)) ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x_n(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta})) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) - \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1 - s)^{\alpha-\beta})] g(s, x_n(s)) ds \right| \\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) g(s, x_n(s)) ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) + \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta})) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} |(t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1 - s)^{\alpha-\beta})| |g(s, x_n(s))| ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| + \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \|h\|_{L^1} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1 - s)^{\alpha-\beta}) ds \\
&+ C_1 \exp(2\lambda^\rho) \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| + \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right|.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) ds &= - \int_{t_2}^{t_2-t_1} u^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(u)^{\alpha-\beta}) du = \int_{t_2-t_1}^{t_2} u^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(u)^{\alpha-\beta}) du \\
&= \int_0^{t_2} u^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(u)^{\alpha-\beta}) du - \int_0^{t_2-t_1} u^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(u)^{\alpha-\beta}) du.
\end{aligned}$$

Selon la deuxième relation du lemme 1.2.1 , on obtient

$$\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) ds = t_2^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^{\alpha-\beta}). \quad (2.17)$$

D'une façon similaire, on a :

$$\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1 - s)^{\alpha-\beta}) ds = t_1^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}). \quad (2.18)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x_n(t_2) - \mathcal{B}x_n(t_1)| &\leq \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&+ \|h\|_{L^1} \left[t_2^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - t_1^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) \right. \\
&+ (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^{\alpha-\beta}) \\
&+ \left. \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| + C_1 \exp(2\lambda^\rho) |\psi(t_2) - \psi(t_1)|.
\end{aligned}$$

Par suite, $|(\mathcal{B}x_n)(t_2) - (\mathcal{B}x_n)(t_1)| \rightarrow 0$ quand $t_2 - t_1 \rightarrow 0$,

uniformément pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que la convergence $\mathcal{B}x_n \rightarrow \mathcal{B}x$ est uniforme et donc \mathcal{B} est partiellement continu sur X .

Étape IV : \mathcal{B} est un opérateur partiellement compact sur X .

Soit C une chaîne arbitraire dans X . On se propose de montrer que $\mathcal{B}(C)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X . Premièrement, $\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné. En effet

Pour tout élément $y \in \mathcal{B}(C)$, il existe un élément $x \in C$, tel que $y = \mathcal{B}x$.

D'après l'hypothèse (B_2) , pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \right| \\
&+ \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| (1 + \lambda) + \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| (1 + \lambda) + \|h\|_{L_1} C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \\
&\leq C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left(\left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| (1 + \lambda) + \|h\|_{L_1} \right) = M. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur t , on obtient $\|y\| = \|\mathcal{B}x\| \leq M$, pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$.

Par conséquent, $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble uniformément borné de X .

Ainsi, $\|\mathcal{B}(C)\| \leq M$ pour toutes les chaînes C dans X .

D'où, \mathcal{B} est un opérateur uniformément partiellement borné sur X .

Ensuite, On montre que $\mathcal{B}(C)$ est un ensemble équicontinu dans X .

Soit $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$ et $\psi(t) = \int_0^t h(s) ds$.

Donc, pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$, on pose $G(t_1, t_2) = |y(t_2) - y(t_1)|$, alors on a

$$\begin{aligned}
G(t_1, t_2) &= |Bx(t_2) - Bx(t_1)| \\
&\leq \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta})) (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) + \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha-\beta}) - (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha-\beta})] g(s, x(s)) ds \right| \\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha-\beta}) g(s, x(s)) ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) + \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}))) \right. \\
&\quad \left. - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2-s)^{\alpha-\beta}) - (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1-s)^{\alpha-\beta})| |g(s, x(s))| ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| + \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) \right. \\
&\quad \left. - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|h\|_{L^1} \left| \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_2 - s)^{\alpha-\beta}) - (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t_1 - s)^{\alpha-\beta}) ds \right| \\
&+ C_1 \exp(2\lambda\rho) \left| \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| + \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) \right. \\
&- \left. \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right|.
\end{aligned}$$

Enfin, selon les relations (2.17) et (2.18), on a :

$$\begin{aligned}
|y(t_2) - y(t_1)| &\leq \left| \lambda t_1^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) - \lambda t_2^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) \right| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| \\
&+ \left| (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - (E_{\alpha-\beta}(\lambda t_1^{\alpha-\beta})) \right| \\
&+ \|h\|_{L^1} \left[t_2^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_2^{\alpha-\beta}) - t_1^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda t_1^{\alpha-\beta}) + (t_2 - t_1)^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(\lambda(t_2 - t_1)^{\alpha-\beta}) \right] \\
&+ C_1 \exp(2\lambda\rho) |\psi(t_2) - \psi(t_1)|.
\end{aligned}$$

Donc, $|y(t_2) - y(t_1)| \rightarrow 0$ lorsque $t_2 - t_1 \rightarrow 0$,

uniformément pour tout $y \in \mathcal{B}(C)$.

Par conséquent, $\mathcal{B}(C)$ est un sous-ensemble équicontinu de X .

$\mathcal{B}(C)$ est uniformément borné et équicontinu dans X , donc il est compact. D'où, \mathcal{B} est un opérateur uniformément partiellement compact de X dans lui-même.

Étape V : La solution inférieure u satisfait l'inégalité $u \leq \mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

D'après l'hypothèse (B_3) , le problème (2.2) admet une solution inférieure u définie sur J . On a, alors $u(0) \leq x_0$, et

$$D^\alpha \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) - \lambda D^\beta \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) \leq g(t, u(t)), \text{ pour tout } t \in J,$$

En multipliant l'inégalité ci-dessus par le facteur $E_{\alpha-\beta, \alpha}$ et en intégrant, on obtient pour tout $t \in J$,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) \left(D^\alpha \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) - \lambda D^\beta \left(\frac{u(t)}{f(t, u(t))} \right) \right) ds \quad (2.20)$$

$$\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, u(s)) ds \quad (2.21)$$

En utilisant les deux relations dans le lemme (2.5.1), alors on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{f(t, u(t))} &\leq (E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \frac{u(0)}{f(0, u(0))} \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq f(t, u(t)) \left((E_{\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \frac{u(0)}{f(0, u(0))} \right. \\ &\left. + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha-\beta}) g(s, u(s)) ds \right). \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $t \in J$

$$u(t) \leq \mathcal{A}u(t)\mathcal{B}u(t).$$

Par conséquent, $u \leq \mathcal{A}u\mathcal{B}u$.

Etape VI : La \mathcal{D} -fonction ϕ satisfait la condition de croissance $M\phi(r) < r$, $r > 0$. La \mathcal{D} -fonction ϕ satisfait l'inégalité donnée dans l'hypothèse (c) du théorème 1.6.1. D'après l'estimation donnée à l'étape IV, on a pour tout $r > 0$,

$$M\phi(r) = \left(C_1 \exp(2|\lambda|^\rho) \left(\left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| (1 + \lambda) + \|h\|_{L_1} \right) \right) \phi(r) < r.$$

Ainsi, \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont toutes les conditions du théorème de Dhage 1.6.1. On en déduit que l'équation d'opérateur $\mathcal{A}x\mathcal{B}x = x$ admet une solution x^* . Par conséquent, x^* est une solution de l'équation intégrale (2.16). Finalement, x^* est une solution du problème (2.2) sur J . De plus, la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ des approximations successives définies par (2.15) converge de manière monotone vers x^* .

Ceci complète la preuve. □

Chapitre 3

Systeme couplé d'équations différentielles fractionnaires hybrides mixtes : Perturbations linéaires du premier et du second type

3.1 Introduction

Les équations différentielles hybrides peuvent être considérées comme des perturbations quadratiques d'équations différentielles non linéaires. Ces dernières années, elles ont l'objet d'un intérêt croissant en raison de sa vaste applicabilité dans plusieurs domaines. Pour plus de détails sur les équations différentielles hybrides, voir [24, 53, 57, 99].

Motivé par [23, 93]. Le propos de ce chapitre est d'étudier le système couplé d'équations différentielles fractionnaires hybrides avec perturbations du premier et du deuxième type. Dans toute la suite de ce chapitre, on considère deux nombres réels p et q tels que $0 < p, q < 1$ et $J = [0, a]$ où $a > 0$.

On se propose d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} D_c^p \left[\frac{x(t)}{f_1(t, x(t), y(t))} \right] = h_1(t, x(t), y(t)), & 0 < p < 1, \quad t \in J = (0, a], \\ D_c^q [y(t) - f_2(t, x(t), y(t))] = h_2(t, x(t), y(t)), & 0 < q < 1, \quad t \in J, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f_1 \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R} \setminus \{0\})$ et $f_1, h_1, h_2 \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Les lemmes suivants seront utiles dans la suite.

Lemme 3.1.1. ([23]) On suppose que la fonction $z \rightarrow \frac{z}{f_1(t, z)}$ est croissante sur \mathbb{R} pour tout $t \in J$. Alors, pour $h_1 \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et $0 < p < 1$, la fonction $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}_+)$ est une solution de l'équation différentielle hybride fractionnaire

$$\begin{cases} D_c^p \left[\frac{x(t)}{f_1(t, x(t))} \right] = h_1(t), & t \in J, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

si et seulement si x satisfait l'équation intégrale hybride

$$x(t) = f_1(t, x(t)) \left[\frac{x_0}{f_1(0, x_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s) ds \right], \quad t \in J.$$

Lemme 3.1.2. ([93]) On suppose que la fonction $z \rightarrow z - f_2(t, z)$ est croissante sur \mathbb{R} pour tout $t \in J$. Alors, pour $h_2 : J \rightarrow \mathbb{R}_+$, la fonction $y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}_+)$ est une solution de l'équation différentielle hybride fractionnaire

$$\begin{cases} D_c^q [y(t) - f_2(t, y(t))] = h_2(t) & t \in J, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3)$$

si et seulement si y satisfait l'équation intégrale hybride

$$y(t) = y_0 - f_2(0, y_0) + f_2(t, y(t)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h_2(s) ds, \quad t \in J.$$

3.2 Résultat d'existence :

Dans cette section, on se propose d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) en utilisant le théorème du point fixe de Banach. On discute ensuite l'existence de la solution de (3.1) à l'aide l'alternative de Lery Schauder.

Pour établir nos résultats, on introduit les hypothèses suivantes :

(A₀) (a)– l'application $x \rightarrow \frac{x}{f_1(t, x, y)}$ est croissante sur \mathbb{R} pour tout $t \in J$, $y \in \mathbb{R}$.

(b)– l'application $y \rightarrow y - f_2(t, x, y)$ est croissante sur \mathbb{R} pour tout $t \in J$, $x \in \mathbb{R}$.

(A₁) Il existe des nombres positifs μ_1, μ_2, ν tels que

$$\nu \leq |f_1(t, x, y)| \leq \mu_1, \quad |f_2(t, x, y)| \leq \mu_2,$$

pour tout $(t, x, y) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(A₂) Il existe des nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que

$$|f_1(t, x, y) - f_1(t, x', y')| \leq \lambda_1 |x - x'| + \lambda_2 |y - y'|,$$

$$|f_2(t, x, y) - f_2(t, x', y')| \leq \lambda_3 |x - x'| + \lambda_4 |y - y'|,$$

pour tout $t \in J$ et $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

(A₃) Il existe des constantes $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$ telles que

$$|h_1(t, x, y) - h_1(t, x', y')| \leq \eta_1|x - x'| + \eta_2|y - y'|,$$

$$|h_2(t, x, y) - h_2(t, x', y')| \leq \xi_1|x - x'| + \xi_2|y - y'|,$$

pour tout $t \in J$ et $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

On note $E = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$

où $\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|$.

On rappelle que l'espace E muni de cette norme est un espace de Banach. On considère sur E , l'opérateur Λ défini par

$$\Lambda(x, y)(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(x, y)(t) \\ \Lambda_2(x, y)(t) \end{pmatrix},$$

où

$$\Lambda_1(x, y)(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \left[\frac{x_0}{f_1(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right],$$

$$\Lambda_2(x, y)(t) = y_0 - f_2(0, x_0, y_0) + f_2(t, x(t), y(t)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h_2(s, x(t), y(t)) ds.$$

Posons,

$$\nu_1 = a^p \frac{\eta_1 + \eta_2}{\Gamma(p+1)}, \quad \nu_2 = a^q \frac{\xi_1 + \xi_2}{\Gamma(q+1)}$$

$$\alpha_1 = \frac{a^p \mu_1 \eta_1}{\Gamma(p+1)} + \lambda_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{a^p \mu_1 \eta_2}{\Gamma(p+1)} + \lambda_2 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right),$$

$$\alpha_2 = \lambda_3 + \frac{a^q \xi_1}{\Gamma(q+1)},$$

$$\beta_2 = \lambda_4 + \frac{a^q \xi_2}{\Gamma(q+1)},$$

$\gamma_1 = \max(\alpha_1, \beta_1)$ et $\gamma_2 = \max(\alpha_2, \beta_2)$, où $k_1 = \sup_{t \in J} |h_1(t, 0, 0)|$, $k_2 = \sup_{t \in J} |h_2(t, 0, 0)|$, et

$$r \geq \frac{\mu_1 \frac{|x_0|}{\nu} + |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^p \mu_1 k_1}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q k_2}{\Gamma(q+1)}}{1 - (\mu_1 \nu_1 + \nu_2)}. \quad (3.4)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.1).

Théorème 3.2.1. On suppose que les hypothèses $(\mathbf{A}_0) - (\mathbf{A}_3)$ sont satisfaites. Si de plus la propriété suivante est vérifiée :

$$\gamma_1 + \gamma_2 < 1.$$

Alors, le problème (3.1) admet une solution unique.

Démonstration. Pour $r > 0$, on considère dans E la boule fermée

$$B_r = \{(x, y) \in E : \|(x, y)\| \leq r\}.$$

Alors, $\Lambda B_r \subseteq B_r$. En effet

Pour $(x, y) \in B_r$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(x, y)(t)| &= |f_1(t, x(t), y(t))| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{|f(0, x_0, y_0)|} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} (|h_1(s, x(s), y(s)) - h_1(s, 0, 0)| + |h_1(s, 0, 0)|) ds \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} (\eta_1 |x(s)| + \eta_2 |y(s)| + k_1) ds \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{\eta_1 \|x\| + \eta_2 \|y\| + k_1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + a^p \frac{\eta_1 \|x\| + \eta_2 \|y\| + k_1}{\Gamma(p+1)} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\Lambda_1(x, y)(t)| \leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + a^p \frac{\eta_1 r + \eta_2 r + k_1}{\Gamma(p+1)} \right) = \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right). \quad (3.5)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_2(x, y)(t)| &= \left| y_0 - f_2(0, x_0, y_0) + f_2(t, x(t), y(t)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h_2(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq |y_0| + |f_2(0, x_0, y_0)| + |f_2(t, x(t), y(t))| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |h_2(s, x(s), y(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |y_0| + 2\mu_2 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (|h_2(s, x(s), y(s)) - h_2(s, 0, 0)| + |h_2(s, 0, 0)|) ds \\
&\leq |y_0| + 2\mu_2 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (\xi_1|x(s)| + \xi_2|y(s)| + k_2) ds \\
&\leq |y_0| + 2\mu_2 + \frac{\xi_1\|x\| + \xi_2\|y\| + k_2}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \\
&\leq |y_0| + 2\mu_2 + a^q \frac{\xi_1\|x\| + \xi_2\|y\| + k_2}{\Gamma(q+1)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\Lambda_2(x, y)(t)| \leq |y_0| + 2\mu_2 + a^q \frac{\xi_1 r + \xi_2 r + k_2}{\Gamma(q+1)} = |y_0| + 2\mu_2 + \nu_2 r + \frac{a^q k_2}{\Gamma(q+1)}. \quad (3.6)$$

D'après (3.4), (3.5) et (3.6), on en déduit

$$\|\Lambda(x, y)\| \leq r.$$

Ainsi, $\Lambda B_r \subseteq B_r$.

Soient $(x, y), (x', y') \in B_r$ et $t \in J$. Posons $|\Lambda_1(x, y)(t) - \Lambda_1(x', y')(t)| = F(t)$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
F(t) &= \left| f_1(t, x(t), y(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right) \right. \\
&\quad - f_1(t, x(t), y(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x'(s), y'(s)) ds \right) \\
&\quad + f_1(t, x(t), y(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x'(s), y'(s)) ds \right) \\
&\quad \left. - f_1(t, x'(t), y'(t)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x'(s), y'(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \frac{|f_1(t, x(t), y(t))|}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |h_1(s, x(s), y(s)) - h_1(s, x'(s), y'(s))| ds \\
&\quad + \left| \frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x'(s), y'(s)) ds \right| |f_1(t, x(t), y(t)) - f_1(t, x'(t), y'(t))| \\
&\leq \frac{\mu_1 (\eta_1 \|x - x'\| + \eta_2 \|y - y'\|)}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds + \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right) (\lambda_1 \|x - x'\| + \lambda_2 \|y - y'\|) \\
&\leq a^p \frac{\mu_1 (\eta_1 \|x - x'\| + \eta_2 \|y - y'\|)}{\Gamma(p+1)} + \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right) (\lambda_1 \|x - x'\| + \lambda_2 \|y - y'\|) \\
&\leq \left(\frac{a^p \mu_1 \eta_1}{\Gamma(p+1)} + \lambda_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right) \right) \|x - x'\| \\
&\quad + \left(\frac{a^p \mu_1 \eta_2}{\Gamma(p+1)} + \lambda_2 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \nu_1 r + \frac{a^p k_1}{\Gamma(p+1)} \right) \right) \|y - y'\| \\
&= \alpha_1 \|x - x'\| + \beta_1 \|y - y'\| \\
&\leq \gamma_1 (\|x - x'\| + \|y - y'\|).
\end{aligned}$$

En passant au suprémum sur t , on a

$$\|\Lambda_1(x, y) - \Lambda_1(x', y')\| \leq \gamma_1 (\|x - x'\| + \|y - y'\|). \quad (3.7)$$

De même, on pose $|\Lambda_2(x, y)(t) - \Lambda_2(x', y')(t)| = G(t)$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
G(t) &= \left| y_0 - f_2(0, x_0, y_0) + f_2(t, x(t), y(t)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h_2(s, x(s), y(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - y_0 + f_2(0, x_0, y_0) - f_2(t, x'(t), y'(t)) - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} h_2(s, x'(s), y'(s)) ds \right| \\
&\leq |f_2(t, x(t), y(t)) - f_2(t, x'(t), y'(t))| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |h_2(s, x(s), y(s)) - h_2(s, x'(s), y'(s))| ds \\
&\leq \lambda_3 \|x - x'\| + \lambda_4 \|y - y'\| + \frac{\xi_1 \|x - x'\| + \xi_2 \|y - y'\|}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \\
&\leq \lambda_3 \|x - x'\| + \lambda_4 \|y - y'\| + a^q \frac{\xi_1 \|x - x'\| + \xi_2 \|y - y'\|}{\Gamma(q+1)} \\
&\leq \left(\lambda_3 + \frac{a^q \xi_1}{\Gamma(q+1)} \right) \|x - x'\| + \left(\lambda_4 + \frac{a^q \xi_2}{\Gamma(q+1)} \right) \|y - y'\| \\
&= \alpha_2 \|x - x'\| + \beta_2 \|y - y'\| \\
&\leq \gamma_2 (\|x - x'\| + \|y - y'\|).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\Lambda_2(x, y) - \Lambda_2(x', y')\| \leq \gamma_2 (\|x - x'\| + \|y - y'\|). \quad (3.8)$$

Ainsi par les relations (3.7) et (3.8), on a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(x, y) - \Lambda(x', y')\| &= \|\Lambda_1(x, y) - \Lambda_1(x', y')\| + \|\Lambda_2(x, y) - \Lambda_2(x', y')\| \\
&\leq (\gamma_1 + \gamma_2) (\|x - x'\| + \|y - y'\|).
\end{aligned}$$

Finalement Λ est une contraction et le problème (3.1) admet une solution unique. \square

Exemple 3.2.1. On donne un exemple pour illustrer le résultat obtenu.

On considère le système couplé suivant :

$$\begin{cases}
D_c^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x(t)}{\frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cos |x(t)| + \frac{1}{20} \frac{|y(t)|}{1 + |y(t)|}} \right] = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} x(t) + \frac{1}{10} y(t), & t \in J = [0, 1], \\
D_c^{\frac{1}{2}} \left[y(t) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{10} \sin |y(t)| + \frac{1}{20} \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} \right) \right] = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} y(t) + \frac{1}{10} x(t), & t \in J, \\
x(0) = 0, \\
y(0) = 0.
\end{cases} \quad (3.9)$$

Ce problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases}
D_c^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x(t)}{f_1(t, x(t), y(t))} \right] = h_1(t, x(t), y(t)), & t \in J = [0, 1], \\
D_c^{\frac{1}{2}} [y(t) - f_2(t, x(t), y(t))] = h_2(t, x(t), y(t)), & t \in J, \\
x(0) = x_0, \\
y(0) = y_0,
\end{cases}$$

où

$$f_1(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cos |x(t)| + \frac{1}{20} \frac{|y(t)|}{1 + |y(t)|}, \quad h_1(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{7} + \frac{1}{9}x(t) + \frac{1}{10}y(t),$$

$$f_2(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \sin |y(t)| + \frac{1}{20} \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}, \quad h_2(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{7} + \frac{1}{9}y(t) + \frac{1}{10}x(t),$$

et $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Il est facile de vérifier que

$$\eta_1 = \frac{1}{9}, \eta_2 = \frac{1}{10}, \xi_1 = \frac{1}{10}, \xi_2 = \frac{1}{9}, k_1 = k_2 = \frac{1}{7}, \mu_1 = \mu_2 = \frac{2}{5}, \lambda_1 = \lambda_4 = \frac{1}{10}, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{20} \text{ et}$$

$$\frac{\mu_1 \frac{|x_0|}{\nu} + |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^p \mu_1 k_1}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q k_2}{\Gamma(q+1)}}{1 - (\mu_1 \nu_1 + \nu_2)} \simeq 1.46.$$

Alors, pour $r = 1.5$, on a

$$\alpha_1 \simeq 0.303, \beta_1 \simeq 0.03, \alpha_2 \simeq 0.162, \beta_2 \simeq 0.225.$$

Par conséquent,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 0.529 < 1.$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 3.2.1 sont satisfaites et le problème (3.9) admet une solution unique sur J .

Dans ce paragraphe, on se propose d'établir le deuxième résultat d'existence, en utilisant l'alternative de Lery Schauder.

Théorème 3.2.2. On suppose que les hypothèses (\mathbf{A}_0) et (\mathbf{A}_1) sont satisfaites. Si de plus, pour tout $(t, x, y) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$|h_1(t, x, y)| \leq \rho_0 + \rho_1 \|x\| + \rho_2 \|y\|, \quad |h_2(t, x, y)| \leq \sigma_0 + \sigma_1 \|x\| + \sigma_2 \|y\|,$$

et

$$\frac{a^p \mu_1 \rho_1}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q \sigma_1}{\Gamma(q+1)} < 1, \quad \frac{a^p \mu_1 \rho_2}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q \sigma_2}{\Gamma(q+1)} < 1.$$

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution.

Démonstration. • L'opérateur Λ est uniformément borné. En effet :
Soit \mathcal{M} une partie bornée de E .

On peut alors, trouver des constantes positives N_1, N_2 telles que

$$|h_1(t, x(t), y(t))| \leq N_1, \quad |h_2(t, x(t), y(t))| \leq N_2,$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{M}$ et $t \in J$.

Pour $(x, y) \in \mathcal{M}$, $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(x, y)(t)| &= |f_1(t, x(t), y(t))| \left| \frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{N_1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p N_1}{\Gamma(p+1)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\Lambda_1(x, y)\| \leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p N_1}{\Gamma(p+1)} \right). \quad (3.10)$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\|\Lambda_2(x, y)\| \leq |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^q N_2}{\Gamma(q+1)}. \quad (3.11)$$

D'après (3.10) et (3.11), on en déduit que Λ est uniformément borné.

• L'opérateur Λ est équicontinu. En effet :

Soient $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$, et $(x, y) \in E$,

on pose $|\Lambda_1(x, y)(t_2) - \Lambda_1(x, y)(t_1)| = F(t_1, t_2)$, alors, on a

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= \left| f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right) \right. \\ &\quad - f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right) \\ &\quad + f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right) \\ &\quad \left. - f_1(t_1, x(t_1), y(t_1)) \left(\frac{x_0}{f(0, x_0, y_0)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{p-1} h_1(s, x(s), y(s)) ds \right) \right| \\ &\leq \frac{|f_1(t_2, x(t_2), y(t_2))|}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{p-1} - (t_1-s)^{p-1}) |h_1(s, x(s), y(s))| ds \\ &\quad + \frac{|f_1(t_2, x(t_2), y(t_2))|}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{p-1} |h_1(s, x(s), y(s))| ds \\ &\quad + \left(\frac{|x_0|}{|f(0, x_0, y_0)|} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{p-1} |h_1(s, x(s), y(s))| ds \right) |f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) - f_1(t_1, x(t_1), y(t_1))| \\ &\leq \frac{\mu_1 N_1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{p-1} - (t_1-s)^{p-1}) ds + \frac{\mu_1 N_1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{p-1} ds \\ &\quad + \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p N_1}{\Gamma(p+1)} \right) |f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) - f_1(t_1, x(t_1), y(t_1))| \\ &\leq \frac{\mu_1 N_1}{\Gamma(p+1)} (t_2^p - t_1^p - (t_2 - t_1)^p) + \frac{\mu_1 N_1}{\Gamma(p+1)} (t_2 - t_1)^p \\ &\quad + \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p N_1}{\Gamma(p+1)} \right) |f_1(t_2, x(t_2), y(t_2)) - f_1(t_1, x(t_1), y(t_1))|. \end{aligned}$$

Par suite, $|\Lambda_1(x, y)(t_2) - \Lambda_1(x, y)(t_1)| \rightarrow 0$ quand $t_2 \rightarrow t_1$.

De même, on pose $|\Lambda_2(x, y)(t_2) - \Lambda_2(x, y)(t_1)| = G(t_1, t_2)$,

on a alors,

$$\begin{aligned}
G(t_1, t_2) &= \left| y_0 - f_2(0, x_0, y_0) + f_2(t_2, x(t_2), y(t_2)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} h_2(s, x(s), y(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - y_0 + f_2(0, x_0, y_0) - f_2(t_1, x(t_1), y(t_1)) - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} h_2(s, x(s), y(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}) |h_2(s, x(s), y(s))| ds \\
&\quad + |f_2(t_2, x(t_2), y(t_2)) - f_2(t_1, x(t_1), y(t_1))| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} |h_2(s, x(s), y(s))| ds \\
&\leq |f_2(t_2, x(t_2), y(t_2)) - f_2(t_1, x(t_1), y(t_1))| + \frac{N_2}{\Gamma(q+1)} (t_2^q - t_1^q - (t_2 - t_1)^q) \\
&\quad + \frac{N_2}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q .
\end{aligned}$$

Par suite, $|\Lambda_2(x, y)(t_2) - \Lambda_2(x, y)(t_1)| \rightarrow 0$ lorsque $t_2 \rightarrow t_1$.

Par conséquent, Λ est equicontinu.

Dans la prochaine étape. On note

$$\mathcal{P}_\Lambda = \{(x, y) \in E : (x, y) = \delta \Lambda(x, y), 0 \leq \delta \leq 1\},$$

et

$$\varrho = \min \left(1 - \frac{a^p \mu_1 \rho_1}{\Gamma(p+1)} - \frac{a^q \sigma_1}{\Gamma(q+1)}, 1 - \frac{a^p \mu_1 \rho_2}{\Gamma(p+1)} - \frac{a^q \sigma_2}{\Gamma(q+1)} \right).$$

L'ensemble \mathcal{P}_Λ est borné. En effet :

Soit $(x, y) \in \mathcal{P}_\Lambda$. Donc pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{cases} x(t) = \delta \Lambda_1(x, y) \\ y(t) = \delta \Lambda_2(x, y). \end{cases}$$

Alors, d'après les hypothèses du théorème 3.2.2

$$\begin{cases} |x(t)| \leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + a^p \frac{\rho_0 + \rho_1 \|x\| + \rho_2 \|y\|}{\Gamma(p+1)} \right), \\ |y(t)| \leq |y_0| + 2\mu_2 + a^q \frac{\sigma_0 + \sigma_1 \|x\| + \sigma_2 \|y\|}{\Gamma(q+1)}. \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} \|x\| \leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + a^p \frac{\rho_0 + \rho_1 \|x\| + \rho_2 \|y\|}{\Gamma(p+1)} \right), \\ \|y\| \leq |y_0| + 2\mu_2 + a^q \frac{\sigma_0 + \sigma_1 \|x\| + \sigma_2 \|y\|}{\Gamma(q+1)}. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \|x\| + \|y\| &\leq \left(\frac{a^p \mu_1 \rho_1}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q \sigma_1}{\Gamma(q+1)} \right) \|x\| + \left(\frac{a^p \mu_1 \rho_2}{\Gamma(p+1)} + \frac{a^q \sigma_2}{\Gamma(q+1)} \right) \|y\| \\ &+ \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p \rho_0}{\Gamma(p+1)} \right) + |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^q \sigma_0}{\Gamma(q+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a^p \mu_1 \rho_1}{\Gamma(p+1)} - \frac{a^q \sigma_1}{\Gamma(q+1)} \right) \|x\| + \left(1 - \frac{a^p \mu_1 \rho_2}{\Gamma(p+1)} - \frac{a^q \sigma_2}{\Gamma(q+1)} \right) \|y\| &\leq \mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p \rho_0}{\Gamma(p+1)} \right) \\ &+ |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^q \sigma_0}{\Gamma(q+1)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \leq \frac{\mu_1 \left(\frac{|x_0|}{\nu} + \frac{a^p \rho_0}{\Gamma(p+1)} \right) + |y_0| + 2\mu_2 + \frac{a^q \sigma_0}{\Gamma(q+1)}}{\varrho}.$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème de Leray schauder sont satisfaites. Ce qui nous permet de conclure que Λ admet au moins un point fixe. Finalement, le problème (3.1) admet au moins une solution. \square

Chapitre 4

Problèmes aux limites pour une inclusion différentielle fractionnaire hybride

4.1 introduction

Tout récemment, Dhage a obtenu les analogues multivalués de certains théorèmes de points fixes hybrides [26]. Il a établi en deux versions le théorème d'existence des solutions pour les inclusions différentielles dans les algèbres de Banach.

En particulier, il a étudié l'inclusion différentielle hybride du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] \in G(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ et $G : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}$.

On rappelle que $\mathcal{P}_{cp,cv}(X) = \{A \text{ sous-ensemble de } \mathcal{P}(X) | A \text{ est compact et convexe}\}$.

Zhao et al [94] ont étudié l'équation différentielle hybride fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D_{RL}^q \left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right] = g(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$, $g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D_{RL}^q est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville, avec $0 < q < 1$. Ils ont établi le théorème d'existence, certaines inégalités différentielles fondamentales sont également établies et l'existence des solutions extrêmes.

Hilal et Kajouni [53] ont étudié le problème aux valeurs limites suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right) = g(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ a \frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c, \end{cases}$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, a, b, c sont des constantes réelles telles que : $a + b \neq 0$, et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, est une fonction continue et $g \in Car(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

A partir des travaux ci-dessus, nous développons l'inclusion différentielle hybride fractionnaire aux limites impliquant des opérateurs différentiels de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, dans des conditions mixtes de Lipschitz et de Carathéodory du problème suivant qu'on note BVPHDIF :

$$\begin{cases} D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))} \right) \in G(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ a \frac{x(0)}{f(0,x(0))} + b \frac{x(T)}{f(T,x(T))} = c. \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, est une fonction continue et $G : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est de Carathéodory.

4.2 Résultat d'existence

Dans cette section, on prouve les résultats d'existence du problèmes (4.1) sur l'intervalle $J = [0, T]$.

On rappelle que, $X = C(J; \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach par rapport à la norme sup et la multiplication définie par :

$$(xy)(t) = x(t)y(t), \quad \text{pour } x, y \in X, t \in J.$$

Dans la suite, on considère les hypothèses dont on a besoin pour établir l'existence de la solution de notre problème .

(H₀) La fonction $x \mapsto \frac{x}{f(t,x)}$ est croissante dans \mathbb{R} presque partout pour $t \in J$.

(H₁) Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

(H₂) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\|G(t, x)\| \leq h(t) \quad p.p. \quad t \in J.$$

Dans toute la suite, on considère des réels a, b et c tels que $a + b \neq 0$.

Lemme 4.2.1. [53] On suppose que l'hypothèse (H_0) est satisfaite. Pour toute $h \in L^1(J, \mathbb{R})$. La fonction $x \in C(J; \mathbb{R})$ est une solution du BVPHDEF.

$$\begin{cases} D^\alpha \left(\frac{x(t)}{f(t, x(t))} \right) = h(t) \quad p.p. \quad t \in J = [0, T] \\ a \frac{x(0)}{f(0, x(0))} + b \frac{x(T)}{f(T, x(T))} = c, \end{cases} \quad (4.2)$$

si et seulement si x satisfait l'équation intégrale hybride :

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right) \right). \quad (4.3)$$

Nous sommes maintenant sur le champs d'énoncer le théorème d'existence de la solution du problème (4.1).

Théorème 4.2.1. On suppose que les hypothèses $(H_0) - (H_2)$ sont vérifiées. En plus, si

$$L \left(\frac{T^{\alpha-1} \|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) < 1. \quad (4.4)$$

Alors, l'inclusion différentielle hybride d'ordre fractionnaire (4.1) admet au moins une solution définie sur J .

Preuve :

On considère les deux applications multivoques \mathcal{A} et \mathcal{B} sur X , définies par :

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t))$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = \{u \in X \mid \exists v \in S_G^1(x), u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right), v \in S_G^1(x)\},$$

pour tout $t \in J$, alors, le problème (4.1) est équivalent à l'opérateur inclusion,

$$x(t) \in \mathcal{A}x(t) \mathcal{B}x(t), \quad t \in J.$$

où

$$S_G^1(x) = \{v \in L^1(J, E) \mid v(t) \in G(t, x(t)), \quad p.p., \quad t \in J\}.$$

On va montrer que les opérateurs multivoques \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont toutes les conditions du théorème de Dhage 1.5.1. Il est clair que l'opérateur \mathcal{B} est bien défini puisque $S_G^1(x) \neq \emptyset$, pour chaque $x \in X$.

Étape 1 :

On montre d'abord que les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} définissent des opérateurs à valeurs multiples tels que $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$.

Le cas de \mathcal{A} est évident puisqu'il s'agit d'un opérateur à valeur unique sur X . On prouve uniquement cette propriété pour l'opérateur \mathcal{B} .

Soit $\{u_n\}$ une suite dans $\mathcal{B}x$ qui converge vers un point u . Alors, il existe une suite $\{v_n\} \subset S_G^1(x)$, telle que :

$$u_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - c \right),$$

et $v_n \rightarrow v$. Puisque $G(t, x)$ est fermé, pour chaque $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$, on a $v \in S_G^1(x)$.

Par conséquent,

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \in \mathcal{B}x(t), \quad t \in J.$$

Par suite, \mathcal{B} a des valeurs fermées dans X .

D'autre part, soient $u_1, u_2 \in \mathcal{B}x$. Alors, ils existent $v_1, v_2 \in S_G^1(x)$, telles que

$$u_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - c \right), \quad t \in J,$$

et

$$u_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - c \right), \quad t \in J.$$

Soit $\gamma \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \gamma u_1(t) + (1-\gamma)u_2(t) &= \gamma \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - c \right) \right) \\ &\quad + (1-\gamma) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - c \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\gamma v_1(s) + (1-\gamma)v_2(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (\gamma v_1(s) + (1-\gamma)v_2(s)) ds - c \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right), \end{aligned}$$

comme $v(t) = \gamma v_1(t) + (1-\gamma)v_2(t) \in G(t, x(t))$, pour tout $t \in J$.

Alors, $\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2 \in \mathcal{B}x$.

Par conséquent, $\mathcal{B}x$ est convexe, pour tout $x \in X$.

Finalement, $\mathcal{B} : X \rightarrow \mathcal{P}_{bd,cl,cv}(X)$.

Soient $t_1, t_2 \in J$ et $x \in X$, avec $t_1 < t_2$. Alors pour tout $u \in \mathcal{B}x$,

$$\begin{aligned}
|u(t_2) - u(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} v(s) ds \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] v(s) ds \right| + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s) ds \right| \\
&\leq \|h\|_{L^1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \|h\|_{L^1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds. \\
&\leq \|h\|_{L^1} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_1^\alpha - t_2^\alpha) + 2(t_2 - t_1)^\alpha].
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$|u(t_2) - u(t_1)| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t_1 \rightarrow t_2.$$

En utilisant le théorème d'Arzela -Ascoli, on conclut que $\mathcal{B}x$ est compact.

Ainsi, $\mathcal{B} : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$.

Par conséquent, $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$.

Étape 2 : \mathcal{A} est un opérateur lipschitzien sur X .

Soient $x, y \in X$. D'après l'hypothèse (H_1) , on a pour tout $t \in J$,

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq L\|x - y\|.$$

En prenant le supremum sur t , pour tout $x, y \in X$, on obtient

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq L\|x - y\|.$$

Ce qui montre que \mathcal{A} est Lipschitzien sur X .

Étape 3 : \mathcal{B} est compact et semi-continu supérieurement sur X .

Tout d'abord, on montre que $\mathcal{B}(X)$ est totalement borné sur X . Pour ce faire, il suffit de prouver que $\mathcal{B}(X)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X . Soit $u \in \mathcal{B}(X)$. Alors, il existe $v \in S_G^1(x)$, avec $x \in X$. Par l'hypothèse (H_2) , on a

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t - s)^{\alpha-1} v(s)| ds + \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |(T - s)^{\alpha-1} v(s)| ds + |c| \right) \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |h(s)| ds + \frac{bT^{\alpha-1}}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T |h(s)| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|u\| \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \left| \frac{b}{a+b} \right| \right) + \frac{|c|}{|a+b|}, \text{ pour tout } u \in \mathcal{B}(X)$$

Par conséquent, $\mathcal{B}(X)$ est un ensemble uniformément borné dans X .

Ensuite, on montre que $\mathcal{B}(X)$ est un ensemble équicontinu dans X .

De nouveau, comme dans l'étape I, on peut montrer que, pour $t_1 < t_2$,

$$|u(t_1) - u(t_2)| < \|h\|_{L^1} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_1^\alpha - t_2^\alpha + 2(t_2 - t_1)^\alpha)].$$

Donc

$$|u(t_1) - u(t_2)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t_1 \rightarrow t_2,$$

Ce qui implique que $\mathcal{B}(X)$ est un ensemble équicontinu dans X .

Ensuite, on montre que \mathcal{B} est un opérateur multivoque semi-continu supérieurement sur X .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , telle que $x_n \rightarrow x_*$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, telle que, $y_n \in \mathcal{B}x_n$ et $y_n \rightarrow y_*$. Nous allons montrer que $y_* \in \mathcal{B}x_*$.

Puisque $y_n \in \mathcal{B}x_n$, il existe $v_n \in S_G^1(x_n)$, telle que :

$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - c \right).$$

On doit prouver qu'il existe $v_* \in S_G^1(x_*)$, tel que

$$y_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - c \right), t \in J.$$

Considérons l'opérateur linéaire continu $\mathcal{K} : L^1(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, X)$ défini par :

$$\mathcal{K}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds \right), t \in J.$$

Comme $y_n \rightarrow y_*$, on a alors

$$\left\| \left(y_n - \frac{c}{a+b} \right) - \left(y_* - \frac{c}{a+b} \right) \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

D'après le lemme 1.5.2, il s'ensuit que $\mathcal{K} \circ S_G^1$ est un opérateur à graphe fermé. En plus,

$$y_n(t) - \frac{c}{a+b} \in \mathcal{K} \circ S_G^1$$

Puisque $y_n \rightarrow y_*$, il existe $v_* \in S_G^1(x_*)$ tel que

$$y_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s) ds - c \right), t \in J$$

Par suite, \mathcal{B} est un opérateur semi-continu supérieurement sur X .

Ainsi, \mathcal{B} est un opérateur semi continu supérieurement et compact sur X .

Étape 4 : Pour tout $x \in X$, $\mathcal{A}x\mathcal{B}x$ est un sous-ensemble convexe de X .

En effet : Soit $x \in X$. Soient $y, w \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$ et $\theta \in [0, 1]$.

Alors, ils existent $u, v \in S_G^1(x)$, tels que

$$w(t) = [f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s) ds - c \right) \right)] ,$$

et

$$y(t) = [f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right)] .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \theta w(t) + (1-\theta)y(t) &= \theta f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s) ds - c \right) \right) \\ &+ (1-\theta) f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \right. \\ &- \left. \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \\ &= f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\theta u(s) + (1-\theta)v(s)) ds \right. \\ &- \left. \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (\theta u(s) + (1-\theta)v(s)) ds - c \right) \right) \\ &= f(t, x(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} z(s) ds - c \right) \right) \end{aligned}$$

comme $G(t, x(t))$ est convexe, alors $z(t) = \theta u(t) + (1-\theta)v(t) \in G(t, x(t))$, pour tout $t \in J$.

Ainsi, $\theta y + (1-\theta)w \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$.

Par conséquent, $\mathcal{A}x\mathcal{B}x$ est un sous-ensemble convexe de X .

Étape 5 : Finalement, d'après (4.4), on a

$$LM = L \left(\frac{T^{\alpha-1} \|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) < 1.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème de Dhage 1.5.1 sont satisfaites. Par conséquent, une application directe de celui-ci donne lieu à la conclusion (i) ou à la conclusion (ii).

On montrera que la conclusion (ii) n'est pas possible.

Soit $u \in \varepsilon = \{u \in X | \lambda u \in \mathcal{A}u\mathcal{B}u, \quad \lambda > 1\}$. Alors, pour tout $\lambda > 1$,

$$\lambda u(t) \in \mathcal{A}u(t)\mathcal{B}u(t)$$

$$\in f(t, u(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} G(s, u(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} G(s, u(s)) ds - c \right) \right).$$

Par conséquent, il existe $v \in S_G^1(u)$, tel que

$$u(t) = \frac{1}{\lambda} f(t, u(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right).$$

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \frac{1}{\lambda} f(t, u(t)) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \right| \\ &\leq |f(t, u(t))| \left| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \right| \\ &\leq |f(t, u(t)) - f(t, 0) + f(t, 0)| \\ &\quad \times \left| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \right| \\ &\leq L|u(t)| \left| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \right| \\ &\quad + |f(t, 0)| \left| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right) \right) \right| \\ &\leq L|u(t)| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|G(s, u(s))\| ds + \frac{1}{|a+b|} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|G(s, u(s))\| ds + |c| \right) \right) \\ &\quad + |f(t, 0)| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|G(s, u(s))\| ds + \frac{1}{|a+b|} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|G(s, u(s))\| ds + |c| \right) \right) \\ &\leq \left[L|u(t)| + |f(t, 0)| \right] \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s) ds + \frac{|b|T^{\alpha-1}}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s) ds + \frac{|c|}{|a+b|} \right) \\ &\leq \left(L|u(t)| + F_0 \right) \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) . \end{aligned}$$

et alors,

$$|u(t)| - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) |u(t)| \leq F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) ,$$

ce qui implique que

$$|u(t)| \leq \frac{F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)}{1 - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)} .$$

Par passage au sup sur t on aura

$$\|u\| \leq \frac{F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)}{1 - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)} = N \quad .$$

Où $F_0 = \sup_{t \in J} |f(t, 0)|$.

Ainsi, la conclusion (ii) du théorème (1.5.1) n'est pas vérifiée.

Donc, l'opérateur inclusion $x \in \mathcal{A}x\mathcal{B}x$ admet au moins une solution. Finalement le problème (4.1) admet au moins une solution sur J .

Ceci complète la preuve.

Chapitre 5

Équation différentielle fractionnaire impulsive avec domaine non dense

5.1 Introduction

Des processus dynamiques ayant une nature hétérogène mélangeant le continu et le discret. Ces progrès technologiques ont un impact similaire dans le domaine de la recherche scientifique où on constate un intérêt particulier pour l'étude de ces systèmes dits "hybrides". De tels systèmes sont caractérisés par l'interaction des parties continues régies par des équations différentielles et des parties discrètes.

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps. Il est important dans de nombreux cas d'utiliser l'une de ces deux catégories de modèles. Cependant la majorité des systèmes complexes réalistes mélangeant le continu et le discret ne peuvent pas être classés ni dans la catégorie "système continu" ni dans la catégorie "système discret". Il est nécessaire alors d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que l'interaction entre elles. Dans ce contexte, une attention particulière s'est portée sur les systèmes dynamiques hybrides ces dernières années, on peut citer [69],[95] etc...

Une classe particulière des systèmes hybrides sont les systèmes impulsifs, qui présentent une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle et des sauts instantanés de l'état ou impulsions. Les systèmes différentiels impulsifs ont été observés naturellement dans plusieurs modèles et phénomènes. Par exemples, dans le modèle de choc Bautin, d'un mécanisme de l'horloge, dans l'étude de la distribution des

médicaments dans le corps humain, dans le contrôle des modèles de Lotka-Volterra, etc. Ces systèmes sont décrits par exemple :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k) \\ \Delta x(t_k) &= x(t_k^+) - x(t_k^-) = J_k(x), \\ x(t_0^+) &= x_0, \quad t_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Ces systèmes subissent des changements brusques de l'état à des instants dans l'intervalle de leurs évolutions continues. La durée de ces changements est souvent négligeable par rapport à celui de toute l'évolution du processus et donc les changements brusques peuvent être rapprochés en termes de changements d'état instantanés, à savoir des impulsions.

De nos jours, ces systèmes sont devenus de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique, en pathologie [64] en technologie chimique [16], dans la dynamique des populations [89], [90], dans la biotechnologie, surtout dans les réseaux de neurones biologiques [48] et l'économie [36].

Mais parfois, les impulsions ne sont pas instantanées. Ce cas, introduit par Hernandez et O'Regan dans [52], ils ont considéré une classe de problèmes pour lesquels les impulsions ne sont pas instantanées. Les impulsions commencent brusquement aux points t_i et leur action se poursuit sur l'intervalle $(t_i, s_i]$. La situation est décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ x(t) = g_i(t, x(t)), t \in (t_i, s_i] \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $0 = t_0 = s_0 < t_1 \leq s_1 < t_2 \leq s_2 < \dots < t_m < s_m < t_{m+1} = T$ sont des nombres réels donnés, $g_i \in C((t_i, s_i] \times X, X)$ pour $(i = 1, 2, \dots, m)$.

En 2017, Haib Gu et al dans [47], ont étudié l'équation d'évolution non linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^\alpha u(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in (0, b], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

où, ${}^C D_{0+}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, sur un espace de Banach X muni de la norme $\|\cdot\|$, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire fermé à domaine non dense sur X , et f est une fonction donnée satisfaisante des conditions

appropriées. Motivé par les travaux [52] et [47], on se propose d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ x(t) = g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i] \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où les fonctions f et g_i sont continues, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire fermé à domaine nondense sur X .

5.2 Définition de la solution :

Lemme 5.2.1. [52] On suppose $W \subseteq PC(J, X)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) W est un sous-ensemble uniformément borné de $PC(J, X)$,
- (2) W est équicontinue sur $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, 2, \dots, m$, où $t_0 = 0, t_{m+1} = T$,
- (3) $W(t) = \{x(t) : x \in W, t \in J \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}\}, W(t_i^+) = \{x(t_i^+) : x \in W\}$ et $W(t_i^-) = \{x(t_i^-) : x \in W\}, i = 1, 2, \dots, m$, sont des sous-ensembles relativement compact de X . Alors W est un sous-ensemble relativement compact de $PC(J, X)$.

Définition 5.2.1. [70] La fonction de Wright $M_\alpha(\theta)$ est définie par :

$$M_\alpha(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(1 - \alpha n)}$$

est telle que

$$\int_0^{\infty} \theta^\delta M_\alpha(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(1 + \delta)}{\Gamma(1 + \alpha\delta)}, \quad \text{pour } \delta \geq 0.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} M_\alpha(s) ds &= 1, \\ \int_0^{\infty} s M_\alpha(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned}$$

avec

$$M_\alpha(s) = \frac{1}{\alpha} s^{-1-\frac{1}{\alpha}} \omega_\alpha(s^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad (5.2)$$

$$\omega_\alpha(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s^{-\alpha n - 1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{n!} \sin(n\pi\alpha), \quad s \in (0, \infty) \quad (5.3)$$

où les relations (5.2) et (5.3) sont données dans [99, 101] .

Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach et $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire fermé à domaine nondense sur X .

On définit $X_0 = \overline{D(A)}$ et A_0 est la partie de A dont $D(A_0)$ définie par :

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\}, \quad A_0x = Ax.$$

Proposition 5.2.1. [78] La partie A_0 de A génère un semi-groupe fortement continu (c'est-à-dire un C_0 - semi-groupe) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X_0 .

On considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^\alpha x(t) &= A_0 x(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

L'équation (5.4) peut être écrite sous la forme :

$$x(t) = x_0 + A_0 I_{0+}^\alpha x(t) + I_{0+}^\alpha f(t) \tag{5.5}$$

pour $x_0 \in X_0$ et $t \in J$. Le lemme suivant donne une forme équivalente de (5.5) au moyen de la transformation de Laplace.

Lemme 5.2.2. Si f prend des valeurs dans X_0 , alors l'équation (5.5) peut être exprimée comme suit

$$x(t) = P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad t \in J, \tag{5.6}$$

où,

$$P_\alpha(t) = \int_0^\infty M_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds, \tag{5.7}$$

et

$$Q_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty s M_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds, \tag{5.8}$$

Démonstration. Soit $\lambda > 0$. Appliquons la transformation de Laplace à (5.5), avec

$$\chi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} x(s) ds \quad \text{et} \quad \omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s) ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^{-1} x_0 + \frac{1}{\lambda^\alpha} A_0 \chi(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha} \omega(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I - A_0)^{-1} x_0 + (\lambda^\alpha I - A_0)^{-1} \omega(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) x_0 ds + \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) \omega(\lambda) ds, \end{aligned} \tag{5.9}$$

à condition que les intégrales de (5.9) existent, où I est l'identité sur X .

Sachant que la transformation de Laplace de

$$\psi_\alpha(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+1}} M_\alpha(\theta^{-\alpha}),$$

est

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\theta} \psi_\alpha(\theta) d\theta = e^{-\lambda^\alpha}, \quad (5.10)$$

où $\alpha \in (0, 1)$. On obtient

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) x_0 ds &= \lambda^{\alpha-1} \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} T(t^\alpha) x_0 dt \\ &= \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} [e^{-(\lambda t)^\alpha}] T(t^\alpha)(x_0) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \theta \psi_\alpha(\theta) e^{-\lambda t \theta} T(t^\alpha)(x_0) d\theta dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta) T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right)(x_0) d\theta \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^\infty M_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_\alpha(t) x_0 dt \end{aligned} \quad (5.11)$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) \omega(\lambda) ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} T(t^\alpha) e^{-\lambda s} f(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \psi_\alpha(\theta) e^{-(\lambda t \theta)} T(t^\alpha) e^{-\lambda s} t^{\alpha-1} f(s) d\theta ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \psi_\alpha(\theta) e^{-\lambda(t+s)} T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right) \frac{t^{\alpha-1}}{\theta^\alpha} f(s) d\theta ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\alpha \int_0^t \int_0^\infty \psi_\alpha(\theta) T\left(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha}\right) \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha} f(s) d\theta ds \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\alpha \int_0^t \int_0^\infty (t-s)^{\alpha-1} \theta M_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) f(s) d\theta ds \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds \right] dt. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Alors, d'après les relations (5.9), (5.11) et (5.12), et à l'aide de la transformation inverse de Laplace, et pour $t \in J$, on obtient

$$x(t) = P_\alpha(t) x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds. \quad (5.13)$$

Ceci complète la preuve. □

Pour définir la solution intégrale du problème (5.1), on considère l'espace, $PC(J, X) = \{x : J \rightarrow X \text{ tel que } x \in C(J_i, X) \text{ et ils existent } x(t_i^-) \text{ et } x(t_i^+), i = 1, 2, \dots, m \text{ avec } x(t_i^+) = x(t_i^-)\}$, où $J = [0, T]$, et $J_i = (t_i, t_{i+1}]$, pour $i = 1, \dots, m$.

Il est clair que $PC(J, X)$ muni de la norme $\|x\|_{PC} = \sup \{\|x(t)\| : t \in J\}$ est un espace de Banach.

Pour l'étude du problème (5.1), on a besoin des hypothèses suivantes :

(H1) L'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ satisfait la condition de Hille-Yosida, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $\overline{M} \geq 1$ tel que $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$ et

$$\|(\lambda I - A)^{-k}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\overline{M}}{(\lambda - \omega)^k}, \quad \text{pour tout } \lambda > \omega, k \geq 1.$$

(H2) Le C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ du générateur infinitésimal A_0 est uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe $M_A > 1$,

$$\text{telle que } \sup_{t \in [0, +\infty)} |T(t)| < M_A.$$

En considérant le développement dans [43], nous introduisons le concept suivant de la solutions :

Lemme 5.2.3. Si f et g prennent des valeurs dans X_0 , alors la solution du problème (5.14) peut être exprimée comme

$$x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, & t \in [0, t_1]; \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i], \\ P_\alpha(t-s_i)l_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, & t \in (s_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$,

avec $l_i = g_i(s_i, x(s_i)) - \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s) f(s) ds$,

Construction de la solution :

On considère d'abord le problème fractionnaire impulsif auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + f(t), & t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, m \\ x(t) = g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots, m \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.14)$$

D'après les propriétés de la dérivée de Caputo, une solution intégrale du problème précédent peut être écrite sous la forme :

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (A_0 x(s) + f(s)) ds, & t \in [0, t_1) \\ g_1(t, x(t)), & t \in (t_1, s_1] \\ l_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (A_0 x(s) + f(s)) ds, & t \in (s_1, t_2) \\ \dots \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots, m \\ l_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (A_0 x(s) + f(s)) ds, & t \in (s_i, t_{i+1}) \end{cases}$$

où l_i , $i = 1, 2, \dots, m$, sont des éléments de X . D'après le système ci dessus et en utilisant la continuité de la fonction x au points s_i , on a, pour $i = 1, 2, \dots, m$,

$$x(t) = l_i \chi_{[s_i, t_{i+1})}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (Ax(s) + f(s)) ds, \quad t \in [s_i, t_{i+1}), \quad (5.15)$$

avec $l_0 = x_0$ et $\chi_{[s_i, t_{i+1})}(t)$ est la fonction caractéristique de $[s_i, t_{i+1})$,

$$\chi_{[s_i, t_{i+1})}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [s_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{sinon} . \end{cases}$$

En appliquant la transformation de Laplace à (5.15), on obtient

$$u(\lambda) = \frac{e^{-\lambda s_i} - e^{-\lambda t_{i+1}}}{\lambda} l_i + \frac{1}{\lambda^\alpha} Au(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha} \omega(\lambda),$$

avec $u(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} x(s) ds$ et $\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s) ds$, $\lambda > 0$.

Alors,

$$u(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I - A_0)^{-1} e^{-\lambda s_i} l_i - \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I - A_0)^{-1} e^{-\lambda t_{i+1}} l_i + (\lambda^\alpha I - A_0)^{-1} \omega(\lambda),$$

où I est l'identité sur X . Ainsi, par les mêmes calculs dans la partie précédente et les propriétés de la transformée de Laplace, on obtient

$$x(t) = \chi_{[s_i, \infty)} P_\alpha(t - s_i) l_i - \chi_{[t_{i+1}, \infty)} P_\alpha(t - t_{i+1}) l_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds.$$

Où, P_α et Q_α sont donnés par les relations (5.7) et (5.8).

Par conséquent, on a

$$x(t) = P_\alpha(t - s_i) l_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad t \in [s_i, t_{i+1}).$$

En utilisant la continuité de la fonction x aux points s_i , on peut déterminer les valeurs des l_i , alors pour $i = 0, 1, \dots, m$. On a

$$g_i(s_i, x(s_i)) = l_i + \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s) ds.$$

Donc, on obtient

$$l_i = g_i(s_i, x(s_i)) - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s) ds. \quad (5.16)$$

Par conséquent, la solution du problème (5.14) est donnée par :

$$x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t) x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, & t \in [0, t_1] \\ g_1(t, x(t)), & t \in (t_1, s_1] \\ P_\alpha(t - s_1) l_1 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, & t \in (s_1, t_2] \\ \dots \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, \dots, m \\ P_\alpha(t - s_i) l_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) f(s) ds, & t \in (s_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Où, pour $i = 1, 2, \dots, m$,

$$l_i = g_i(s_i, x(s_i)) - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s, x(s)) ds. \quad (5.17)$$

Lemme 5.2.4. [43]

On suppose que (H2) est vérifiée, alors les opérateurs P_α et Q_α ont les propriétés suivantes :

1. pour tout $t \geq 0$ fixé, $P_\alpha(t), Q_\alpha(t)$ sont des opérateurs linéaires et bornés, et pour tout $x \in X_0$,

$$\|P_\alpha(t)x\| \leq M_A \|x\|, \|Q_\alpha(t)x\| \leq \frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha + 1)} \|x\|.$$

2. $\{P_\alpha(t), t \geq 0\}$ et $\{Q_\alpha(t), t \geq 0\}$ sont fortement continus,
3. pour tout $t > 0$ $P_\alpha(t)$, et $Q_\alpha(t)$ sont des opérateurs compacts.

Définition 5.2.2. La fonction $x \in PC(J, X)$ est une solution intégrale du problème (5.1) si elle satisfait la relation suivante :

$$x(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0 + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, & t \in [0, t_1]; \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i] \\ P_\alpha(t)d_i + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, & t \in (s_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$, avec $d_i = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} B_\lambda g_i(s_i, x(s_i)) - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds$,
où $B_\lambda = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$, avec $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} B_\lambda x = x$ pour $x \in X_0$.

5.3 Résultats d'existence et d'unicité

Cette section sera consacrée à l'étude de l'existence de la solution du problème (5.1).

Pour ce faire, on donne les hypothèses suivantes :

(H3) $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ est continue, et il existe L_f tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f \|x - y\|, \quad \text{pour } x, y \in X, \text{ et } t \in J.$$

(H4) Il existe L_g tel que

$$\|g_i(t, x) - g_i(t, y)\| \leq L_g \|x - y\|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \text{ pour } x, y \in X, \text{ et } t \in J.$$

Théorème 5.3.1. On suppose que (H1), (H2), (H3) et (H4) sont satisfaites. En outre

$$\left(M_A(L_g + \frac{M_A \bar{M} L_f}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha) + \frac{\bar{M} M_A}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha L_f \right) < 1.$$

Alors, le problème (5.1) admet une solution unique.

Démonstration. Soit l'opérateur $N : PC(J, X) \longrightarrow PC(J, X)$ défini par :

$$Nx(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0 + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, & t \in (0, t_1]; \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i] \\ P_\alpha(t-s_i)d_i + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, & t \in (s_i, t_{i+1}] \end{cases} ;$$

pour, $i = 1, \dots, m$.

Soient $x, y \in PC(J, X)$, alors.

Premier cas. Pour $t \in (0, t_1]$, on a :

$$\begin{aligned} \|N(x)(t) - N(y)(t)\| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|Q_\alpha(t-s) B_\lambda (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\| ds \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|Q_\alpha(t-s)\| \|B_\lambda\| \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \frac{\alpha M_A \bar{M}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L_f \|x - y\|_{PC} ds \\ &\leq (M_A \bar{M} \frac{T^\alpha L_f}{\Gamma(\alpha+1)}) \|x - y\|_{PC}. \end{aligned}$$

Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i]$; $i = 1, 2, \dots, m$

$$\|N(x)(t) - N(y)(t)\| \leq L_g \|x - y\|_{PC}.$$

Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$; $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \|N(x)(t) - N(y)(t)\| &\leq \|P_\alpha(t-s_i)d_i + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \\ &\quad - P_\alpha(t-s_i)d_i^* - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, y(s)) ds\| \\ &\leq \|P_\alpha(t-s_i)d_i - P_\alpha(t-s_i)d_i^*\| \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|Q_\alpha(t-s) B_\lambda (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\| ds \\ &\leq \left(M_A (\bar{M} L_g + \frac{M_A L_f \bar{M}}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha) + \frac{M_A \bar{M}}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha L_f \right) \|x - y\|_{PC}, \end{aligned}$$

où,

$$d_i^* = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} B_\lambda g_i(s_i, y(s_i)) - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B_\lambda f(s, y(s)) ds.$$

De ce qui est mentionné ci-dessus, pour tous $t \in (0, T]$, on en déduit que

$$\|N(x) - N(y)\|_{PC} \leq \left(M_A (L_g + \frac{M_A \bar{M} L_f}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha) + \frac{\bar{M} M_A}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha L_f \right) \|x - y\|_{PC}.$$

Ainsi l'opérateur N est une contraction sur l'espace $PC(J, X)$.

Par conséquent, il admet un point fixe unique dans $PC(J, X)$, qui est une solution intégrale unique du problème (5.1). \square

Le résultat qu'on va donner dans la suite, se base sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii suivant :

Théorème 5.3.2. [19] Soit B un sous-ensemble convexe fermé et non vide d'un espace de Banach X . Soit N_1 et N_2 deux opérateurs tels que (i) $N_1x + N_2y \in B$, pour $x, y \in B$, (ii) N_2 est compact et continu; (iii) N_2 est un opérateur de contraction, alors il existe $z \in B$ tel que $z = N_1z + N_2z$.

Avant de présenter le deuxième résultat d'existence de la solution, on a besoin des hypothèses suivantes :

- (H5) Les fonctions $g_i : (t_i, s_i] \times X \rightarrow X$ sont continues et il existe une constante M_g telle que $\|g_i(t, x)\| \leq M_g$, pour $x \in X$ et $i = 1, 2, \dots, m$.
- (H6) Pour tout $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x) : J \rightarrow X$ est fortement mesurable; Et pour chaque $t \in J$, la fonction $f(t, \cdot) : X \rightarrow X$ est continue et il existe une fonction $q \in L(J, \mathbb{R}^+)$, telle que

$$|f(t, x)| \leq q(t), \quad \text{pour tout } x \in X, \text{ p.p. } t \in J.$$

Théorème 5.3.3. On suppose que les hypothèses (H1), (H2), (H5) et (H6) sont satisfaites, et $M_A \bar{M} L_g < 1$.

Alors, le problème (5.1) admet au moins une solution intégrale.

Démonstration. On considère la boule $B_r = \{x \in PC(J, X) : \|x\|_{PC} \leq r\}$, de rayon $r > 0$, avec $M_A \left(\bar{M} M_g + (1 + M_A) \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\|_\infty) \right) \leq r$, alors B_r est un sous-ensemble non vide fermé, convexe de l'espace de Banach $PC(J, X)$.

On définit les deux opérateurs $N_1, N_2 : PC(J, X) \rightarrow PC(J, X)$ par :

$$(N_1x)(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)x_0, & t \in [0, t_1]; \\ g_i(t, x(t)), & t \in (t_i, s_i] \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\alpha(t - s_i) B_\lambda g_i(s_i, x(s_i)), & t \in (s_i, t_{i+1}]; \end{cases}$$

et

$$(N_2x)(t) = \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \in (t_i, s_i] \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \\ - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\alpha(t - s_i) \left(\int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right), & t \in (s_i, t_{i+1}]; \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, m$.

Donc, on a pour tout $x \in PC(J, X)$, $N_1x(t) + N_2x(t) = Nx(t)$.

On montre que l'opérateur N_1 est une contraction, et que N_2 est compact et continu et

que $N_1x + N_2y \in B_r$ pour tout $x, y \in B_r$.

On va montrer ça dans la série des étapes suivantes :

•*Étape 1* : $N_1x + N_2y \in B_r$ pour tout $x, y \in B_r$.

Premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\begin{aligned} \|(N_1x)(t) + (N_2y)(t)\| &= \|P_\alpha(t)x_0 + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, y(s)) ds\| \\ &\leq \|P_\alpha(t)x_0\| + \frac{\overline{M}M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq M_A \|x_0\| + \frac{T^\alpha \overline{M}M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \|q\|_\infty. \end{aligned}$$

Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \|N_1x(t) + N_2y(t)\| &\leq \|g_i(t, x(t))\| \\ &\leq M_g. \end{aligned}$$

Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$; $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \|(N_1x)(t) + (N_2y)(t)\| &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, y(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\alpha(t-s_i) B_\lambda g_i(s_i, x(s_i)) \right. \\ &\quad \left. - P_\alpha(t-s_i) \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s) B_\lambda f(s, y(s)) ds \right) \right\| \\ &\leq M_A \overline{M} M_g + M_A \frac{T^\alpha \overline{M}M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \|q\|_\infty + \frac{T^\alpha \overline{M}M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \|q\|_\infty \\ &\leq M_A \overline{M} M_g + (M_A + 1) \frac{T^\alpha \overline{M}M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \|q\|_\infty \\ &\leq M_A \left(\overline{M} M_g + (1 + M_A) \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|q\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, T]$, $\|N_1x(t) + N_2y(t)\|_{PC} \leq r$.

Ainsi, $N_1x + N_2y \in B_r$ pour tout $x, y \in B_r$.

•*Étape 2* : N_1 est une contraction.

Soient $x, y \in B_r$, pour $t \in [0, t_1]$ on a, $\|N_1x(t) - N_1y(t)\| = 0$.

Pour $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \|N_1x(t) - N_1y(t)\| &\leq \|g_i(t, x(t)) - g_i(t, y(t))\| \\ &\leq L_g \|x - y\|_{PC}. \end{aligned}$$

Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$; $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \|N_1x(t) - N_1y(t)\| &\leq \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\alpha(t-s_i) B_\lambda g_i(t, x(t)) - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_\alpha(t-s_i) B_\lambda g_i(t, y(t)) \right\| \\ &\leq M_A \overline{M} L_g \|x - y\|_{PC}. \end{aligned}$$

On en déduit donc,

$$\| N_1x - N_1y \|_{PC} \leq M_A \overline{M} L_g \|x - y\|_{PC}, \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

Et comme $M_A \overline{M} L_g < 1$, alors N_1 est une contraction sur B_r .

- *Étape 3* : N_2 est continu.

Soit $(x_n)_n$ une suite dans B_r , telle que $x_n \rightarrow x$ dans B_r , alors on a, pour $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned} \|N_2(x_n)(t) - N_2(x)(t)\| &\leq \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda (f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))) ds \right\| \\ &\leq \frac{\alpha \overline{M} M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds, \end{aligned}$$

pour $t \in (t_i, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$,

on a $\|N_2x_n(t) - N_2x(t)\| = 0$.

Et pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$; $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \|N_2x_n(t) - N_2x(t)\| &\leq \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda (f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))) ds \right\| \\ &\quad + \|P_\alpha(t-s_i)\| \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. Q_\alpha(s_i-s) B_\lambda (f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))) ds \right\| \\ &\leq \frac{\alpha \overline{M} M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds \\ &\quad + M_A \frac{\alpha \overline{M} M_A}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H6), on a

$$f(t, x_n(t)) \rightarrow f(t, x(t)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

et pour tous $t \in J$, et $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(t, x_n(t))| \leq q(t)$, alors, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\|N_2(x_n) - N_2(x)\|_{PC} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Cela implique que N_2 est continu.

- *Étape 4* : N_2 est compact.

D'après l'étape I, on a $N_2(B_r) \subset B_r$, alors N_2 est uniformément borné sur B_r .

On montre que N_2 est équicontinu.

Pour $x \in B_r$, et $t', t'' \in [0, t_1]$, avec $t' < t''$, alors on a

$$\begin{aligned} \|N_2(x)(t'') - N_2(x)(t')\| &\leq \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{t''} (t'' - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t'' - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{t'} ((t' - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t' - s) B_\lambda f(s, x(s))) ds \right\| \\ &\leq E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned}$$

Où,

$$\begin{aligned} E_1 &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| \int_{t'}^{t''} (t'' - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t'' - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right\|, \\ E_2 &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| \int_0^{t'} ((t'' - s)^{\alpha-1} - (t' - s)^{\alpha-1}) Q_\alpha(t'' - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right\|, \\ E_3 &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| \int_0^{t'} (t' - s)^{\alpha-1} (Q_\alpha(t'' - s) - Q_\alpha(t' - s)) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant l'idée dans [100],[101], on peut montrer que E_1, E_2, E_3 tendent vers zéro lorsque $t' \rightarrow t''$. En effet :

$$\begin{aligned} E_1 &\leq \frac{\alpha M_A \bar{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_{t'}^{t''} (t'' - s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{M_A \bar{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (t'' - t')^\alpha \rightarrow 0, t'' - t' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$E_2 \leq \frac{\alpha M_A \bar{M}}{\Gamma(1 + \alpha)} \left(\int_0^{t'} ((t' - s)^{\alpha-1} - (t'' - s)^{\alpha-1}) ds \right) \|q\|_\infty \quad (5.18)$$

$$\leq \frac{\alpha M_A \bar{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(1 + \alpha)} \left(\int_0^{t'} (t' - s)^{\alpha-1} - (t'' - s)^{\alpha-1} ds \right) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_A \bar{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(1 + \alpha)} ((t')^\alpha - (t'')^\alpha + (t'' - t')^\alpha) \\ &\leq \frac{M_A \bar{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(1 + \alpha)} (t'' - t')^\alpha \rightarrow 0, t'' - t' \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

On en déduit que $\|N_2(x)(t'') - N_2(x)(t')\| \rightarrow 0$ lorsque $t' \rightarrow t''$.

Deuxième cas. Pour tout $t', t'' \in (t_i, s_i]$, avec $t' < t''$, on a

$$\|N_2(x)(t'') - N_2(x)(t')\| = 0.$$

Troisième cas. Pour chaque $t', t'' \in (s_i, t_{i+1}]$, tels que $t' < t''$, on a

$$\begin{aligned} &\|N_2x(t'') - N_2x(t')\| \\ &\leq \|(P_\alpha(t'' - s_i) - P_\alpha(t' - s_i))\| \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\quad + E_1 + E_2 + E_3. \end{aligned}$$

Comme $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ ($t > 0$) sont continus au point t , dans la topologie d'opérateur uniforme, alors $\|N_2(x)(t'') - N_2(x)(t')\| \rightarrow 0$, lorsque $t'' \rightarrow t'$.

Pour conclure, $\|N_2x(t'') - N_2x(t')\| \rightarrow 0$, quand $t'' - t' \rightarrow 0$, ce qui implique que $N_2(B_r(J))$ est équicontinu.

On a $N_2 B_r \subseteq B_r$, avec $N_2 B_r(t) = \{N_2 x(t); x \in B_r\}$ pour $t \in J$.

On montre que $N_2 B_r(t)$ est relativement compact.

$Q_2 B_r(0) = \{0\}$ est compact.

• Premier cas. Pour $t \in (0, t_1]$ fixé et pour $\epsilon \in (0, t)$ et $\delta > 0$, on définit l'ensemble :

$$N_2^{\epsilon, \delta}(B_r)(t) = \left\{ N_2^{\epsilon, \delta} x(t); x \in B_r \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} N_2^{\epsilon, \delta} x(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha \int_0^{t-\epsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha \int_0^{t-\epsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) [T(\epsilon^\alpha \delta) T((t-s)^\alpha \theta - \epsilon^\alpha \delta)] B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds. \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha T(\epsilon^\alpha \delta) \int_0^{t-\epsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta - \epsilon^\alpha \delta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds. \end{aligned}$$

(Observons que $\theta \geq \delta$ et $t - \epsilon \geq s$, par conséquent $(t-s)^\alpha \theta - \epsilon^\alpha \delta \geq 0$, puisque l'opérateur $T(\epsilon^\alpha \delta)$ ($\epsilon^\alpha \delta > 0$) est compact, on peut conclure que $N_2^{\epsilon, \delta} B_r(t)$ est relativement compact de X . De plus, pour tout $x \in B_r$ on a :

$$\begin{aligned} \| N_2 x(t) - N_2^{\epsilon, \delta} x(t) \| &\leq \alpha \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds \right. \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) f(s, x(s)) d\theta ds \\ &\quad \left. - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{t-\epsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds \right\| \\ &\leq G_1 + G_2. \end{aligned}$$

Où

$$G_1 = \alpha \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds \right\|$$

et

$$G_2 = \alpha \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{t-\epsilon}^t \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha \theta) B_\lambda f(s, x(s)) d\theta ds \right\|.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} G_1 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha M_A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| B_\lambda f(s, x(s)) \| ds \int_0^\delta \theta \xi_\alpha(\theta) d\theta \\ &\leq M_A t_1^\alpha \overline{M} \|q\|_\infty \int_0^\delta \theta \xi_\alpha(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_2 &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha M_A \int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{\alpha-1} \| B_\lambda f(s, x(s)) \| ds \int_\delta^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) d\theta \\ &\leq M_A \epsilon^\alpha \overline{M} \|q\|_\infty \int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{M_A \overline{M} \|q\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \epsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Par suite, $\| (N_2 x(t) - N_2^{\epsilon, \delta} x(t)) \| \rightarrow 0$, quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow 0$

On en déduit que $N_2 B_r(t)$ est un ensemble relativement compact de X .

• Pour $s_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m$:

$$N_2 B_r(t) = \left\{ P_\alpha(t - s_i) l_i + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B_\lambda f(s, x(s)) ds, x \in B_r \right\}.$$

$$\text{Où } l_i = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B_\lambda f(s, x(s)) ds.$$

Sachant que $P_\alpha(t - s_i)$ est un opérateur compact, et en utilisant le même raisonnement que dans le premier cas, on peut conclure que $N_2 B_r(t)$ est relativement compact.

Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Krasnoselkii, l'opérateur N admet au moins un point fixe, et par suite le problème (5.1) admet au moins une solution intégrale dans B_r .

Ceci complète la preuve du théorème. \square

Exemple 5.3.1. Dans cette partie on donne un exemple pour illustrer le résultat. Alors on considère l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} x(t, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} x(t, y) + f(t, x(t, y)), \quad y \in [0, \pi], \quad t \in [0, 1] \cup [2, 3], \\ x(t, y) &= g(t, x(t, y)) \quad t \in (1, 2), \\ x(t, 0) &= x(t, \pi) = 0, \quad t \in (0, 3], \\ x(0, y) &= x_0, \quad y \in [0, \pi], \end{aligned} \tag{5.21}$$

où $f : [0, 3] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Soit

$$\begin{aligned} x(t)(y) &= x(t, y), \quad t \in [0, 3], \quad y \in [0, \pi], \\ f(t, x)(y) &= \frac{1}{4e^t} \frac{|x(t, y)|}{1 + |x(t, y)|}, \quad t \in [1, 2], \quad y \in [0, \pi]. \\ g(t, x)(y) &= \frac{1}{3} x(t, y), \quad t \in [1, 2], \quad y \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Soit $X = C([0, \pi], \mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme, et on considère l'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ défini par :

$$D(A) = \{x \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) : x(0) = x(\pi) = 0\}, \quad Ax = x''.$$

Il est bien connu que l'opérateur A satisfait la condition de Hille-Yosida avec $(0, +\infty) \subset \rho(A)$, $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour $\lambda > 0$, et

$$\overline{D(A)} = \{x \in X : x(0) = x(\pi) = 0\} \neq X.$$

Pour plus de détails, on se réfère à [78]. On a $L_f = \frac{1}{4}$ et $L_g = \frac{1}{3}$, toutes les hypothèses du théorème 5.3.1 sont donc satisfaites. Nous pouvons maintenant utiliser nos résultats pour déduire l'existence de solutions intégrale du problème (5.21).

Conclusion et perspectives

L'objet principal de ce travail c'était de donner quelques propriétés et applications concernant le calcul fractionnaire et nous visualisons quelques perspectives. De façon générale, dans cette thèse, nous avons abordé quelques résultats d'existence des solutions de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire particulières à savoir ceux qui sont nommés hybrides et neutres. Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Dhage.

Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outils fractionnaires et a fourni quelques résultats élémentaires utiles pour l'étude de ces équations. Nous avons commencé par un rappel historique du calcul fractionnaire, puis nous avons exposé la théorie de la dérivation fractionnaires. Et puisque les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations, on a consacré le deuxième chapitre à l'exposition de quelques résultats d'existence de la solution de deux équations différentielles fractionnaires hybrides.

Nous avons exposé dans le troisième chapitre quelques résultats d'existence de la solution d'un système couplé des équations différentielle fractionnaire hybrides et neutres.

Le quatrième chapitre porte sur l'étude d'une inclusion différentielle fractionnaire hybride en impliquant des conditions mixtes (de Lipschitz et Carathéodory). On a prouvé l'existence de la solution pour cet inclusion différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites en se basant sur le théorème de point fixe de Dhage pour les fonctions multivoques.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de quelques équations différentielles fractionnaires impulsives, on suppose que l'opérateur est domaine non dense, et on montre l'existence de la solutions à l'aide du théorème du point fixe de Krasnoselkii,

les perspectives de ce travail peuvent être dans l'extension de nos résultats :

Nous prévoyons dans la future l'étude qualitative de ces problèmes, en particulier, on examinera la stabilité et le comportement asymptotique des solutions.

On peut penser à la recherche d'une interprétation de la dérivée fractionnaire plus générale, qu'on peut l'appliquer dans toute les disciplines. Encore étudier des problèmes épidémiologiques avec des dérivations fractionnaires.

Bibliographie

- [1] B. Ahmad, J.J. Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, *Comput. Math. Appl.* 58 (2009),1838-1843.
- [2] B. Ahmad, J. J. Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2009, Article ID 494720, doi :10.1155/2009/494720.
- [3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, Springer.
- [4] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, Fixed point theory and applications, Cambridge university press.
- [5] R.P. Agarwal. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *C. R. Académie des Sciences* 236, 2031-2032 (1953).
- [6] Artin E. (1931) *Einführung in die Theorie der Gamma funktion.* Teubner, Leipzig (English translation : *The Gamma Function.* Publié en 1964 par Holt, Rinehart et Winston, New York).
- [7] K. Balachandran, J.J. Trujillo, The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 4587-4593.
- [8] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Heat flux stimulation through inverted non integer identification models. *International Journal of Thermal Science* 39, 374-389 (2000).
- [9] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation, *Bound. Value Probl.* 2009, 18 p. Article ID 324561.
- [10] M. Benchohra, J.Henderson, S.K.Ntoyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, *J.Math. Anal.Appl.* 338 (2008)1340-1350.

- [11] D.W. Boyd and J.S.W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969) 458-464.
- [12] G. L. Bullock, A geometric interpretation of the Riemann-Stieltjes intergral, American Mathematical Monthly, 95, no. 5, (May 1988), p.p.448-455.
- [13] T.A. Burton, A fixed point theorem of Krasnoselskii, Appl. Math. Lett. 11 (1998) 85-88.
- [14] M. Caputo. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency inde-pendent. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13 :529–539,1967.
- [15] M. Caputo and F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. Pure and Applied Geophysics, 91 :134–137, 1971.
- [16] Y Chou and K.T Jih. Robust control of a class of time-delay nonlinear pro cesses. Industrial and Engineering Chemistry Research , 45(26) :pp.8963-8972, 2006.
- [17] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. Proc. IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara, USA (2000).
- [18] H. Covitz and S.B. Nadler, Jr, Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math. 8, 5-11, (1970).
- [19] Jaydev Dabas, Archana Chauhan, and Mukesh Kumar, Existence of the Mild Solutions for Impulsive Fractional Equations with Infinite Delay, International Journal of Differential Equations Volume 2011 doi : 10.1155/2011/793023.
- [20] R. Darling and J. Newman. On the short behaviour of porous interaction electrodes. J. of the Electrochemical Society 144, 3057-3063 (1997).
- [21] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, Germany, 1985.
- [22] B.C.Dhage, A nonlinear alternative in Banach algebras with applications to functional differential equations. Nonlinear Funct. Anal. Appl. 8, 563-575 (2004)
- [23] Dhage, C. B. Lakshmikantham, V. (2010) 'Basic results on hybrid differential equations', Nonlinear Analysis : Hybrid Systems,vol 4, pp. 414–424.
- [24] Bapurao C.Dhage, Lakshmikantham, V, Basic results on hybrid differential equations. Nonlinear Anal. Hybrid Syst.4, 414-424(2010).
- [25] Bapurao C.Dhage, Lakshmikantham, V, Quadratic perturbations of periodic boundary value problems of second order ordinary differential equations. Differ. Equ. Appl.2, 465-486 (2010).

- [26] B. C. Dhage ,Multivalued Operators and Fixed-Point Theorems in Banach Algebras II, Computers and Mathematics with Applications 48 (2004) 1461-1476 .
- [27] B. C. Dhage ,On some variants of Schauder's fixed point principle and applications to nonlinear integral equations, J. Math. Phys. Sci. 25, 603-611, (1988) .
- [28] B.C. Dhage, On α -condensing mappings in Banach algebras, Math. Student 63 (1994) 146-152.
- [29] B.C. Dhage, On a fixed point theorem in Banach algebras with applications. Appl. Math. Lett. 18, 273-280 (2005)
- [30] B.C. Dhage, Fixed point theorems in ordered Banach algebras and applications. Panam. Math. J. 9(4), 93-102 (1999)
- [31] Kai Diethelm Fractional Differential Equations Theory and Numerical Treatment February 13, 2003.
- [32] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H.Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.
- [33] Xiao-Li Ding, Yao-Lin Jiang, waveform relaxation method for fractional differential-algebraic equations, Fractional calculus and applied analysis, vol 17, 3 (2014).
- [34] F. Dubois, A. C. Galucio, and N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications. Techniques de l'Ingénieur AF510 (2010).
- [35] J. Dugundji and A. Granas, Fixed point theory, Monographic matematyczne, vol 16, Polish Scientific Publisher, 1982.
- [36] J Eastham and K Hastings. Optimal impulse control of portfolios. Mathematics of Operations Research , 4 :pp.588-605, 1988.
- [37] A. Erdélyi., volume 1. McGraw-Hill, New York (1955).
- [38] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 2. McGraw-Hill, New York (1955).
- [39] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 3. McGraw-Hill, New York (1955).
- [40] L. Euler. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini algebraice dari nequeunt. Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 36–57 (1738).
- [41] L.CV. Evans, Partial differential equations, American Math. Soc., Providence, 1988.

- [42] Xi Fu, Xiaoyou Liu and Bowen Lu, On a new class of impulsive fractional evolution equations, *Advances in Difference Equations*. 2015 doi 10.1186/s13662-015-0561-0.
- [43] Xi Fu, Xiaoyou Liu and Bowen Lu, On a new class of impulsive fractional evolution equations, *Advances in Difference Equations*. 2015 doi 10.1186/s13662-015-0561-0.
- [44] V. Gafiychuk, B. Datsun, V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems. *J. Comp. Appl. Math.* 220 (2008), 215-225.
- [45] Rudolf. Gorenflo , Anatoly A. Kilbas , Francesco Mainardi , Sergei V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications : Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,2014*.
- [46] J. Hale, J.Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcial.Ekvac.* 21(1978)11-41.
- [47] Haibo Gu, Young Zhou, Bashir Ahmed, Ahmed Alsaedi, Integral solutions of fractional evolution equations with nondense domain. *Electronic Journal of Differential Equations* . 145,1-15 (2017)
- [48] Z.Y He, Y.F Zhang, L.X Yang, and Y.H Shi . Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods. *International Joint Conference on Neural Networks* , 1 :pp.262-267, 1999.
- [49] Heikkilä S., Lakshmikantham V., *Monotone Iterative Technique for Nonlinear Discontinuous Differential Equations*. Dekker, New York (1994).
- [50] Heping Jiang, Existence results for fractional order functional differential equations with impulse, *Computers and Mathematics with Applications* 64 (2012) 3477-3483.
- [51] Heping Jiang, Existence results for fractional order functional differential equations with impulse, *Computers and Mathematics with Applications*. 64(2012) 3477- 3483.
- [52] Hernandez, E, O'Regan, D. On a new class of abstract impulsive differential equations. *Proc. Am. Math. Soc.* 141,1641-1649 (2013).
- [53] K.Hilal, A.Kajouni, Boundary value problems for hybrid differential equations. *Mathematical Theory and Modeling*.2224-5804 (2015).
- [54] K.Hilal, A.Kajouni, Boundary value problems for hybrid differential equations with fractional order. *Advances in Difference Equations*.vol.2015,article 183,2015.
- [55] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Singapore, World Scientific, 2000.

- [56] R. Hilfer. *Threefold introduction to fractional derivatives*. In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*. Wiley-VCH (2008).
- [57] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, in : *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 204 , Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [58] A.A. Kilbas, O.I. Marichev and S.G. Samko. Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).
- [59] A.A. Kilbas, H.M.Srivastava, J.J.Trujillo, Ordinary fractional differential equations. Math.Studies North Holland.
- [60] Nikolai Kosmatov, Integral equations and initial value problems for nonlinear differential equations of fractional order, *Nonlinear Anal. TMA* (70) (2009)2521 – 2529.
- [61] M.A. Krasnoselskii , *Topological Methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, 1964.
- [62] M.A. Krasnoselskii, Some problems of nonlinear analysis, *Amer. Math. Soc. Trans.* 10 (2) (1958) 345-409.
- [63] M.A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen 1964.
- [64] E Kruger-Thiemer. Formal theory of drug dosage regiments. *International Journal of Theoretical Biology* , 13, 1966.
- [65] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Academic Press, New York, 1969.
- [66] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, *Nonlinear Anal.* (2007), doi :10.1016/j.na.2007.09.025.
- [67] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, *Nonlinear Anal.* (2007), doi :10.1016/j.na.2007.08.042.
- [68] Y. LI, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Stability of fractional order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications* (2009).
- [69] X Liu and J Shen. Stability theory of hybrid dynamical systems with time delay. *IEEE Transaction on Automatic Control* , 51 :pp.903-915, 2006.
- [70] F. Mainardi, P. Paradisi, R. Gorenflo; *Probability Distributions Generated by Fractional Diffusion Equations*, in : J. Kertesz, I. Kondor (Eds.), *Econophysics : An Emerging Science*, Kluwer, Dordrecht, (2000).

- [71] D. Matignon, Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire. Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1994).
- [72] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.
- [73] K. S. Miller and B Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [74] G.M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. C. R. Académie des Sciences 137, 554-558 (1903).
- [75] G.M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. Acta Mathematica 29, 101-182 (1905).
- [76] K.B. Oldham and J. Spanier. The Fractional Calculus. Academic Press, York and London (1974).
- [77] K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation. J. Electroanal. Chem. 26, 331-341 (1970).
- [78] A. Pazy, Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [79] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus *et* Applied Analysis, 5 :367-386, 2002.
- [80] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1993.
- [81] B. Ross. Fractional Calculus and its Applications, volume 457 of Lecture Notes in Mathematics, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, pages 1-36. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [82] B. Ross. Fractional Calculus and its Applications, volume 457 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [83] J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti, and A. Oustaloup. How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 10 :1318-1326, 2010.
- [84] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado. Advances in fractional calculus. Springer (2007).
- [85] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach (1993).
- [86] V.M. Sehgal and S.P. Singh, On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex spaces, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

- [87] C.R. Serment. Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, France (2001).
- [88] C.R. Serment. Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, France (2001).
- [89] R Shi and L Chen. An impulsive predator-prey model with disease in the prey for integrated pest management. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* , 2009.
- [90] R Shi, X Jiang, and L Chen. The effect of impulsive vaccination on an sir epidemic model. *Applied Mathematics and Computation* , 212 :pp.305-311, 2009.
- [91] D.R. Smart, *Fixed point theory*, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1974.
- [92] Y.P. Sun, Y. Sun, Positive solutions for singular semi positive Neumann boundary value problems, *Electronic journal of differential equations* (2004) 133.
- [93] Lu, H. Sun, S. Yang, D and Teng, H. (2013) 'Theory of fractional hybrid differential equations with linear perturbations of second type', *Boundary Value Problems*, vol. 23.
- [94] Zhao, Y, Sun, S, Han, Z, Li, Q. Theory of fractional hybrid differential equations. *Comput. Math. Appl.* 62, 1312-1324 (2011).
- [95] A.R Teel. Robust hybrid control systems : An overview of some recent results. *Lecture notes in control and information sciences* , 353 :pp.279-302, 2007.
- [96] Vasundhara Devi, J, McRae, FA, Drici, Z : Variational Lyapunov method for fractional differential equations. *Comput.Math. Appl.* 64, 2982-2989 (2012).
- [97] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York, Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.
- [98] S. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 36, pp. 1-12, 2006.
- [99] Yong Zhou, Feng Jiao, Jing Li, Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, *Nonlinear Anal. TMA* 71(2009)3249 – 3256.
- [100] Zhou, Y, Jiao, Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations., *Comput. Math. Appl.* 59,1063-1077 (2010).
- [101] Yong Zhou, *Basic theory of fractional differential equations*, Xiangtan University, China, 2014.

