UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Hafida Atti

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Résolution des systèmes linéaires flous intuitionistiques

Soutenue le 18/07/2020 devant le Jury composé de :

Pr. Khalid HILAL ,	Professeur à la FST, Béni Mellal,	Président/Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI ,	Professeur à la FST, Béni Mellal,	Rapporteur
Pr. Abdelmajid EL HAJAJI ,	Professeur à l'ENCG, El Jadida,	Rapporteur
Pr. Lalla Saadia CHADLI,	Professeur à la FST, Béni Mellal,	Examinateur
Pr. Mohamed OUKESSOU,	Professeur à la FST, Béni Mellal,	Encadrant
Pr. Chakir ALLALOU ,	Professeur à la FST, Béni Mellal,	Invité

Dédicace

Cette thèse est dédiée à :

L'âme de mon père,

Ma mère,

Ma sœur,

Mes frères,

Toute ma famille,

Mes amis.

Remerciements

Cette recherche est le fruit de plusieurs années de travail. Elle n'aurait pas pu aboutir sans l'aide et le soutien de plusieurs personnes que je remercie de tout mon cœur.

Tout d'abord, j'adresse mes plus sincères remerciements au professeur Mohamed Oukessou et au professeur Said Melliani, qui ont aimablement voulu diriger cette thèse. Je désire leur exprimer toute ma gratitude et ma sincère reconnaissance pour leur confiance et leur appui , leur disponibilité, leur esprit critique et leurs conseils avisés. Je les remercie aussi pour toutes les occasions qu'ils m'ont données de discuter avec eux et de participer à des conférences afin de confronter mes travaux aux commentaires d'autres chercheurs.

Merci au professeur Khalid HILAL d'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse et d'être président de ce jury. Je lui exprime ma plus grande gratitude pour le temps et l'aide apportés dans ce travail. Et particulièrement pour nous avoir fait généreusement profiter de ses compétences.

Mes remerciements vont aussi au professeur Adil ABBASSI et au professeur Abdelmajid EL HAJAJI d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je leur adresse toute ma reconnaissance pour leur niveau d'exigence, leur soutien, leurs conseils et leurs remarques dans le cadre de la rédaction de cette thèse.

J'exprime ma gratitude et mon plus grand respect au professeur Lalla Saadia CHADLI envers qui je suis reconnaissante d'avoir bien voulu examiner ce travail, ainsi que pour ses encouragements, sa disponibilité, ses conseils et apports constructifs valorisant ce travail. Madame, je vous remercie du fond du cœur.

Merci au professeur Chakir ALLALOU de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury de thèse. Je lui suis reconnaissante de l'intérêt qu'il porte à mon travail et de son soutien incommensurable, ses précieux commentaires et conseils tout au long de cette thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements au professeur M'hamed ELOMARI pour avoir contribué à l'enrichissement de cette thèse par ses remarques et recommandations.

Mes remerciements vont aussi aux autres membres du laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, pour le climat sympathique dans lequel nous avons travaillé et pour nos nombreuses discussions

Mes remerciements les plus sincères à ma famille et mes amis, qui m'ont soutenue et accompagnée pendant ces années d'études et ce long travail de thèse, et qui n'ont pas cessé de croire en moi.

Je remercie aussi tous ceux et celles qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce travail.

” As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, and as far as they are certain, they do not refer to reality.”

Albert Einstein

Table des matières

Introduction générale **10**

1 Sous-ensembles flous **14**

1.1 Sous-ensemble flou 15

1.1.1 Sous-ensemble flou 15

1.1.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou 15

1.1.3 Opérations sur les ensembles flous 17

1.2 Nombre flou 18

1.2.1 Nombre flou 18

1.2.2 α-coupe d'un nombre flou 18

1.2.3 Types de nombres flous 19

1.3 Principe d'extension de Zadeh 20

1.3.1 Résolution de l'identité 21

1.3.2 Principe d'extension 22

1.4 Forme paramétrique d'un nombre flou 26

2 Système linéaire flou **28**

2.1 Système linéaire flou 29

2.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue 31

2.3 Exemples 32

3 Sous-ensembles flous intuitionistiques **34**

3.1 Sous-ensemble flou intuitionistique 35

3.1.1 Sous-ensemble flou intuitionistique 35

3.1.2 Interprétations géométriques 36
3.1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous intuitionistiques 39
3.2 Opérateurs modaux 41
3.3 Opérateurs topologiques 43
3.4 Nombre flou intuitionistique 49
3.5 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique 52
3.6 Forme paramétrique d'un nombre flou intuitionistique 54

4 Systèmes linéaires flou intuitionistiques **56**
4.1 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ 57
4.2 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ (Méthode 1) 58
4.2.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ 58
4.2.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionistique . . . 60
4.2.3 Exemples 61
4.3 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ (Méthode 2) 67
4.3.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ 67
4.3.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionistique . . . 69
4.3.3 Exemples 70
4.4 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$(méthode 3) 73
4.4.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ 73
4.4.2 Système linéaire flou intuitionistique avec des nombres flous intuitionistiques triangulaires symétriques 80
4.5 La méthode de décomposition LU pour les systèmes linéaires flous intuitionistiques . 85
4.5.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ 85
4.5.2 Exemple 87

Conclusion et perspectives **89**

Bibliographie **90**

Table des figures

1.1 Nombre flou triangulaire 19
1.2 Nombre flou trapézoïdal 20

3.1 Première interprétation géométrique 36
3.2 Un analogue de la première interprétation géométrique 37
3.3 Un segment associé à chaque élément $x \in X$ 37
3.4 Interprétation géométrique impossible 38
3.5 Interprétation géométrique impossible 38
3.6 Deuxième interprétation géométrique 39
3.7 Interprétation géométrique de l'intersection 40
3.8 Interprétation géométrique de la réunion 40
3.9 Interprétation géométrique de l'opérateur $\Box$ 41
3.10 Interprétation géométrique de l'opérateur $\Diamond$ 42
3.11 Interprétation géométrique de l'opérateur S 43
3.12 Interprétation géométrique de l'opérateur T 44
3.13 Nombre flou intuitionistique triangulaire 51
3.14 Nombre flou intuitionistique trapézoïdal 52

4.1 Circuit électrique 61
4.2 Tension $\tilde{v_3}$ 62
4.3 Tension $\tilde{v_4}$ 63
4.4 Tension $\tilde{v_1}$ 65
4.5 Tension $\tilde{v_2}$ 65
4.6 Le nombre $y_1 = (2 + 2\alpha; 8 - 4\alpha; 4 - 3\alpha; 4 + 5\alpha)$ 77

4.7 Le nombre $y_2 = (4\alpha; 6 - 2\alpha; 4 - 5\alpha; 4 + 3\alpha)$ 77
4.8 Le nombre $x_1 = (\frac{80}{221} + \frac{128\alpha}{221}; \frac{284}{221} - \frac{76\alpha}{221}; \frac{16}{17} - \frac{162\alpha}{221}; \frac{16}{17} + \frac{110\alpha}{221})$ 79
4.9 Le nombre $x_2 = (\frac{94}{221} + \frac{62\alpha}{221}; \frac{400}{221} - \frac{244\alpha}{221}; \frac{12}{17} - \frac{113\alpha}{221}; \frac{12}{17} + \frac{295\alpha}{221})$ 79
4.10 Le nombre $y_1 = (\alpha; 2 - \alpha; 1 - 1.75\alpha; 1 + 1.75\alpha)$ 83
4.11 Le nombre $y_2 = (4 + 2\alpha; 8 - 2\alpha; 6 - 3\alpha; 6 + 3\alpha)$ 83
4.12 Le nombre $x_1 = (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25)$ . . . 84
4.13 Le nombre $x_2 = (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25)$ . . . 85
4.14 La présentation graphique de x_1 88
4.15 La présentation graphique de x_2 88

Introduction générale

Dans le monde réel, nous rencontrons souvent des situations dans lesquelles nous ne pouvons pas déterminer si l'état est vrai ou faux, ou bien des situations dont les informations complètes ne sont pas toujours disponibles ou sont vaguement spécifiées. Dans ce cas, des modèles mathématiques qui offrent une flexibilité très précieuse sont développés pour traiter des types de problèmes contenant des éléments incertains ou imprécis. La plupart de ces modèles sont des extensions de la théorie des ensembles classiques, dites ensembles flous.

En théorie des ensembles classiques (théorie de Cantor), un élément peut appartenir à un ensemble ou pas, par exemple un chaud contre un froid, un sec contre un humide, un actif contre un passif. Tout doit être A ou non A, il ne peut pas être les deux en même temps. Ceci implique qu'on n'a aucune ambiguïté et qu'il n'y a aucun doute sur les valeurs. Malheureusement ce n'est pas le cas dans le monde réel, le monde est rempli de contradictions, presque tout contient une partie de son contraire, ou en d'autres termes, que les choses peuvent être A et non A en même temps. Les caractéristiques des problèmes du monde réel sont telles que les situations réelles sont très souvent vagues de différentes manières ou bien imprécises.

Dans le souci de trouver un outil servant à modéliser des phénomènes ou des procédés comme le ferait l'être humain, en 1965, Lotfi A. Zadeh, pendant qu'il était Professeur à l'Université de Californie à Berkeley, a introduit la théorie des sous-ensembles flous[60]. Cette dernière a réussi à sortir la théorie ensembliste de sa logique binaire qui ne correspond pas toujours au raisonnement humain et à la pratique du monde réel. En effet la notion d'ensemble flou introduit un caractère graduel de l'appartenance d'un élément à un ensemble donné. Ces degrés d'appartenance sont des nombres réels variant entre 0 et 1. Au degré 1, l'élément appartient absolument à l'ensemble ; tandis qu'au degré 0, l'élément n'appartient pas du tout à l'ensemble. Entre 0 et 1, l'élément appartient partiellement à l'ensemble. Cette relativisation a permis une meilleure représentation des termes et des connaissances vagues que nous, les humains, manipulons au quotidien.

Au début des années 1970, EH. Mamdani a donné la première démonstration des possibilités pratiques de la théorie des ensembles flous, lorsque lui et son étudiant S. Assilian ont employé la logique floue pour contrôler le fonctionnement d'un petit engin à vapeur [41]. Dès que l'efficacité de la méthode de Mamdani a été établie, la théorie est devenue presque une mode pour les chercheurs de différentes disciplines (automatique, robotique, médecine, assurances et finances...[31, 33, 52, 63]. Le nombre de publications enregistrées à travers le monde a prouvé l'intérêt que les chercheurs attachaient à la théorie des ensembles flous. Actuellement, il existe plusieurs extensions d'ensembles flous, parmi ces extensions la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques.

La théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques [11, 12, 13] introduite par Krassimir Todorov Atanassov en 1983, réfute fondamentalement l'affirmation selon laquelle, en théorie floue Zadeh utilisait uniquement une fonction d'appartenance, qui attribue à chaque élément x de l'univers un nombre réel $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Il s'ensuit automatiquement que le degré de non-appartenance est égal à $1 - \mu_A(x)$. Au contraire, les sous-ensembles flous intuitionistiques attribuent à chaque élément x de l'univers un degré d'appartenance $\mu_A(x)$ et un degré de non-appartenance $\nu_A(x)$ tels que $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ relâchant ainsi la dualité imposée $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$ de la théorie des ensembles flous. Pour chaque sous-ensemble flou intuitionistique défini, nous appelons $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ une marge d'hésitation qui exprime le manque de connaissances quant à savoir si x appartient ou non à A. Ainsi l'ensemble flou intuitionistique a deux indices (degrés d'appartenance et de non-appartenance) peut être utilisé pour exprimer trois états de concepts et / ou de phénomènes flous : soutien, opposition et neutralité. Grâce à cette flexibilité, les sous-ensembles flous intuitionistiques constituent un outil pour un raisonnement plus humain et cohérent. L'ensemble flou intuitionistique est utilisé dans la modélisation des problèmes réels tels que le diagnostic médical, l'analyse des ventes, le marketing des nouveaux produits, les services financiers, la prise de décision, les enquêtes psychologiques et dans de nombreuses applications utiles dans la vie [25, 36, 37, 53, 58, 59].

Les systèmes d'équations linéaires ont de nombreuses applications dans divers domaines des sciences mathématiques, physiques et techniques telles que le trafic, l'analyse des circuits, le transport de chaleur, la mécanique des structures, le flux de fluide, etc. Dans la plupart des problèmes, des situations pratiques, nous travaillons généralement avec des données approximatives, dans certains systèmes les paramètres sont incertains ou imprécis.

Les systèmes linéaires flous apparaissent dans de nombreuses branches de la science et de la technologie telles que l'économie, les sciences sociales, les télécommunications, le traitement d'images[23, 30, 57, 56, 61, 62] ....

Ces systèmes ont été étudiés par de nombreux auteurs. Pour trouver une solution, en utilisant la forme paramétrique des nombres flous [24], Friedman et al. [28] ont remplacé le système linéaire flou original $n \times n$ par un système linéaire classique $2n \times 2n$. Ezzati [27], Assady et al. [10] et Abbasbandy et al. [1, 2] ont proposé des nouvelles méthodes de résolution de systèmes linéaires flous. Ils ont utilisé également la forme paramétrique et ont transformé le système original en systèmes classiques. Allahviranloo a utilisé les techniques itératives de Jacobi, Gauss – Seidel [4] et Successive Over-Relaxation (SOR) [5]. Il a aussi proposé les méthodes Adomian [6] et Homotopy [7].

Certains travaux ont été consacrés à l'étude des systèmes linéaires dont tous les paramètres sont flous, c'est-à-dire que la matrice et le vecteur second membre sont flous. Allahviranloo et al. [8] ont proposé une méthode numérique pour résoudre les systèmes linéaires entièrement flous lorsque les coefficients de la matrice sont positifs. Nasseri et al. [47] ont utilisé certaines méthodes de décomposition des coefficients de la matrice. Nasseri et Zahmatkesh [49] ont proposé une nouvelle méthode de calcul de la solution non négative de système linéaire entièrement flou. Nasseri et Sohrabi [48] ont utilisé une certaine décomposition des coefficients de la matrice pour construire un nouvel algorithme de résolution des systèmes linéaires entièrement flous.

En plus des systèmes linéaires flous et des systèmes linéaires entièrement flous, il existe des formes duales des deux systèmes dans la littérature. Dans [29], Friedman et al. ont étudié la dualité des systèmes linéaires flous $Ax = Bx + y$ où A et B sont des matrices réelles, le vecteur inconnu x et le vecteur y sont flous. Une méthode de résolution de systèmes linéaires flous de la forme $A_1x + b_1 = A_2x + b_2$, dans laquelle A_1 et A_2 sont des matrices à coefficients flous, b_1 et b_2 sont des vecteurs flous, a été proposée Muzzioli et al. [45].

À ce jour, les recherches menées sur les systèmes se limitent à ceux dans lesquels l'imprécision est supposée être modélisée par les ensembles flous. Bien que dans de nombreuses situations, il peut s'avérer impossible de prendre en compte l'imprécision liée aux ensembles flous. Par conséquent, dans cette étude, un modèle de système d'équations linéaires imprécises appelé "système linéaire flou intuitionistique" est présenté pour surmonter les inconvénients. L'imprécision est représentée par des ensembles flous intuitionistiques.

L'objectif de la présente thèse est d'étudier et résoudre les systèmes linéaires flous intuitionistiques en utilisant des méthodes différentes.
Ce travail est constitué de quatre chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre où nous avons présenté quelques notions fondamentales de la théorie des ensembles flous en se basant sur les traveaux de L.Zadeh [60], H. Prade et D. Dubois [26], A. Kaufmann [34], H. Nguyen [50], B. Bede [22], M. Ma et M. Friedman [38] et M.Mizumoto et K. Tanaka [44].

Le deuxième chapitre traite les systèmes linéaires flous, et présente les conditions d'existence et d'unicité de la solution floue selon Friedman et al. [28] et Amrahov et al. [9] et la méthode proposée par Friedman pour résoudre ce genre de système analytiquement .

Le troisième chapitre résume quelques notions de base de la théorie des ensembles flous intuitionistiques et les outils nécessaires pour aboutir à ce travail(Atanassov[11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], Sanhita Banerjee [21], Mahapatra [40, 39], Melliani [42, 43], Parvathi [51] et Sankar [54, 55]) .

Le quatrième chapitre définit les systèmes linéaires flous intuitionistiques, donne les conditions d'existence et d'unicité de solution floue intuitionistique et propose quatres méthodes différentes [19, 20, 21] pour les résoudre.

En définitive, nous terminons par une conclusion et des perspectives permettant une ouverture pour les futurs travaux.

Chapitre 1

Sous-ensembles flous

Introduction

La théorie des ensembles flous est, selon Zadeh, un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel parce qu'elle permet d'évaluer progressivement l'appartenance d'éléments à un ensemble ; ceci est décrit à l'aide d'une fonction d'appartenance évaluée dans l'intervalle réel compris entre 0 et 1. Les ensembles flous généralisent les ensembles classiques, car les fonctions indicatrices des ensembles classiques sont des cas particuliers des fonctions d'appartenance des ensembles flous, si ces derniers prennent uniquement les valeurs 0 ou 1.

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble.

1.1 Sous-ensemble flou

1.1.1 Sous-ensemble flou

Soit X un univers.

Définition 1.1.1. *On définit un sous-ensemble flou A de X par la donnée d'une fonction*

$$\mu_A : X \to [0, 1].$$

Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A. On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}.$$

On note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1.1.1. *On observe les trois cas possibles suivants :*

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 0 \\ 0 < \mu_A(x) < 1 \\ \mu_A(x) = 1, \end{cases}$$

où, $\mu_A(x) = 0$ si x n'appartient pas A ; $0 < \mu_A(x) < 1$ si x appartient partiellement à A ; et $\mu_A(x) = 1$ si x appartient entièrement à A . La fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ inclut ou exclut donc à ses extrémités, tout élément x au sous-ensemble A, mais entre les valeurs extrêmes le degré d'appartenance varie à proportion de la proximité à l'ensemble. On peut remarquer que si A est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1. Dans ce cas, on a :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \notin A \\ 1 & si \;\; x \in A. \end{cases}$$

1.1.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Définition 1.1.2. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*
On appelle support de A noté $S(A)$, $(Supp(A))$, l'ensemble défini par

$$S(A) = supp(A) = \{x \in X |\; \mu_A(x) > 0\}.$$

Définition 1.1.3. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*

On appelle noyau de A noté N(A) l'ensemble

$$N(A) = \{x \in X|\ \mu_A(x) = 1\}.$$

Définition 1.1.4. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*

On appelle hauteur de A notée h(A) le réel

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x)|\ x \in X\}.$$

Définition 1.1.5. *Soit A un sous-ensemble flou d'un univers X.*

On dit que A est normal s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mu_A(x_0) = 1.$$

Définition 1.1.6. *Soit $\alpha \in]0, 1]$, on appelle α-coupe de A noté A^α l'ensemble*

$$A_\alpha = \{x \in X|\mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

On le note aussi $[A]_\alpha$.

Pour $\alpha = 0$, on parle la fermeture du support.

Remarque 1.1.2. *Soient $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Alors, on a*

1) $(A \subseteq B,\ \alpha_1 \in [0, 1]) \Rightarrow (A_{\alpha_1} \subseteq B_{\alpha_1})$

2) $(\alpha_1 \leq \alpha_2,\ (\alpha_1,\ \alpha_2) \in [0, 1]^2) \Rightarrow (A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1})$.

Exemple 1.1.1. *Soit le sous-ensemble flou A décrit par sa fonction d'appartenance*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \textit{pour } x \in [1, 2] \\ -x + 3 & \textit{pour } x \in [2, 3] \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

En effet, on a

$$Supp(A) =]1, 3[.$$

$$N(A) = 2.$$

A est normal.

$$H(A) = 1.$$

$$A_1 = \{2\}.$$

1.1.3 Opérations sur les ensembles flous

Zadeh a défini les opérations sur les ensembles flous en généralisant les opérations sur les ensembles classiques.

1 Complémentaire : Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A.

Le complémentaire d'un sous-ensemble flou A de X, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\forall x \in X,\ \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

2 Réunion : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{A\cup B}$, définie par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

3 Intersection : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{A\cap B}$, définie par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

4 Image réciproque : Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de F donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image réciproque de cette partie floue par f la partie floue de E donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f^{-1}(\mu)$:

$$\forall x \in E,\ f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)).$$

5 Image directe : Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Considérons une partie floue de E donnée par sa fonction d'appartenance μ. On appelle image directe de cette partie floue par f la partie floue de F donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f(\mu)$

$$\forall y \in F,\ f(\mu)(y) = \sup\{\mu(x), x \in f^{-1}(y)\}.$$

6 Convexité d'un ensemble flou : Un ensemble flou A de X est dit convexe si

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, x_1, x_2 \in X,\ \lambda \in [0,1].$$

1.2 Nombre flou

1.2.1 Nombre flou

Définition 1.2.1. *On note par $E^1 = \{u : \mathbb{R} \to [0,1]\}$ la classe des ensembles flous de $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes*

(i) u est normale i.e, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $u(x_0) = 1$,

(ii) u est un convexe "flou" i.e pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

(iii) u est semi continu supérieurement i.e $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ on a $u(x_0) \geq \lim\limits_{x \to x_0^+} u(x)$.

(iv) $[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R} | u(x) > 0\}$ est compact.

Alors E^1 est appelé l'espace des nombres flous.

1.2.2 α-coupe d'un nombre flou

Un nombre flou u peut être caractérisé par l'ensemble de ses α-coupes. Une α-coupe avec $\alpha \in]0,1]$ d'un nombre flou u est le sous-ensemble net (classique) des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égal à α

$$u_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \; u(x) \geq \alpha\}.$$

Le support ou 0-coupe d'un nombre flou u est défini comme la fermeture de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$ tel que :

$$u_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \; u(x) > 0\}}.$$

Chaque α-coupe, $\alpha \in [0,1]$, d'un nombre flou u est un intervalle fermé :

$$u_\alpha = [\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)],$$

où on a

$$\underline{u}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ u(x) \geq \alpha\},$$
$$\overline{u}(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ u(x) \geq \alpha\},$$

pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

1.2.3 Types de nombres flous

Nous allons parler ici des types les plus connus de nombres flous.

Définition 1.2.2. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$. *le nombre flou noté par* (a, b, c) *défini par :*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \quad ou \quad x \geq c \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ \dfrac{c-x}{c-b} & si \quad x \in [b, c] \end{cases}$$

est un nombre flou triangulaire. Sa représentation graphique est illustrée dans la figure (1.1).

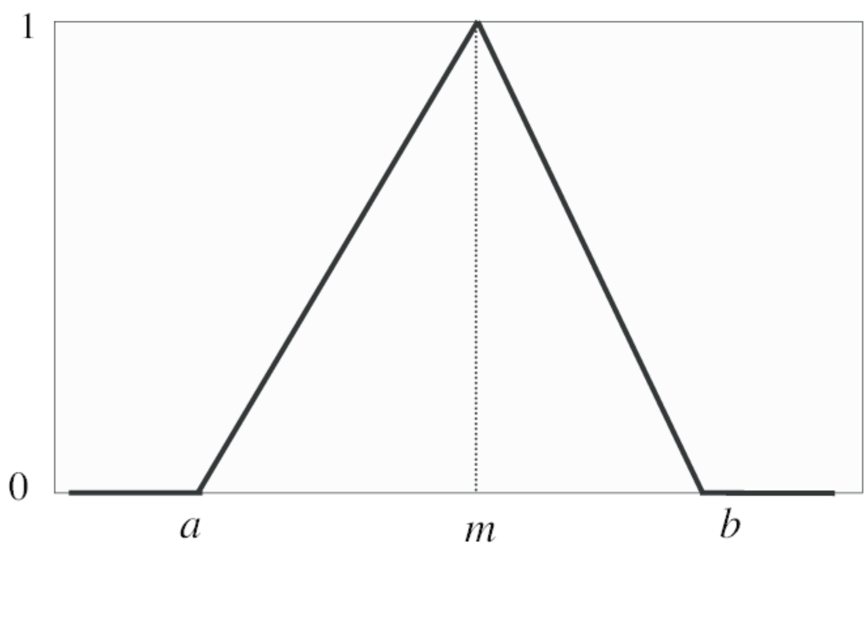

FIGURE 1.1 – Nombre flou triangulaire

Définition 1.2.3. *Un nombre flou trapézoïdal* u *peut être representé par :*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a_1, \\ l_u(x) & si \quad a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1 & si \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\ r_u(x) & si \quad a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0 & si \quad a_4 \leq x. \end{cases}$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $l_u : [a_1, a_2] \to [0, 1]$ *une fonction continue et croissante,* $l_u(a_1) = 0, l_u(a_2) = 1$, *est appelée le côté gauche du nombre flou* u *et* $r_u : [a_3, a_4] \to [0, 1]$ *une fontion continue et décroissante,* $r_u(a_3) = 1, r_u(a_4) = 0$, *est appelée le côté droit du nombre flou* u. *Sa représentation graphique est illustrée dans la figure* (1.2).

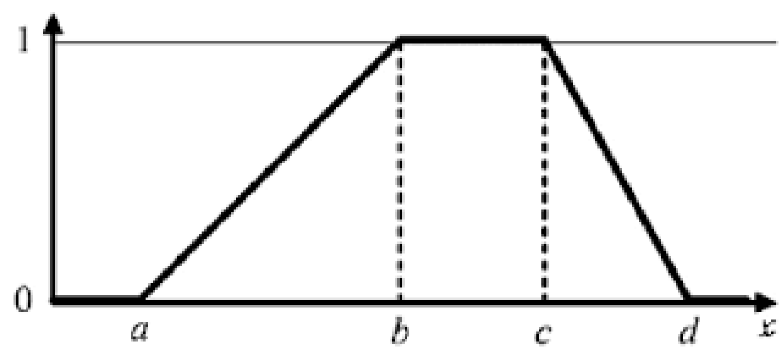

FIGURE 1.2 – Nombre flou trapézoïdal

Lorsque $a_2 = a_3$, on obtient un nombre flou triangulaire. Alors que pour $a_1 = a_2$ et $a_3 = a_4$, on a des intervalles fermés. Dans le cas où $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, on obtient un nombre classique.
Il est à noter que par convention, on ignore les situations où le dénominateur est égal à zéro.

1.3 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension [43] est l'une des notions les plus importantes de la théorie des ensembles flous. En effet, il permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble X aux sous ensembles flous de X.

L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être vue comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question. En général, si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

et si A et B sont des sous ensembles flous respectifs de X et Y, respectivement, on obtient

$$\Big[f(A,B)\Big]^\alpha = f\big([A]^\alpha,[B]^\alpha\big)$$

où $[A]^\alpha, [B]^\alpha$ et $\Big[f(A,B)\Big]^\alpha$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.
On veut donner une condition necessaire et suffisante pour obtenir cette égalité, et définir une classe de nombres flous où cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue.

1.3.1 Résolution de l'identité

Pour $\alpha \in]0,1]$, rappellons que l'ensemble α-coupe de A est défini par

$$A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors, par définition, on a

$$A = B \text{ si et seulement si } \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X.$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors, par définition, on a

$$A = B \text{ si et seulement si } [A]^\alpha = [B]^\alpha,\ \forall \alpha \in]0,1].$$

Il est aussi évident que

$$Supp(A) = \bigcup_{\alpha \in]0,1]} [A]^\alpha.$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \big(\alpha.\chi_{[A]^\alpha}(x)\big).$$

Ainsi, A peut être représenté comme suit

$$A = \int_0^1 \alpha[A]^\alpha$$

où $\int_0^1$ represente l'union sur $\alpha \in]0,1]$, et $\alpha[A]^\alpha$ est l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance est

$$\chi_{\alpha[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & si \quad x \in [A]^\alpha \\ 0, & si \quad x \in [A]^\alpha. \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. *Si* $\{B^\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}$ *est une famille de sous-ensembles de* X*, tels que*

$$A = \int_0^1 \alpha B^\alpha$$

alors, on a

1. $B^\alpha \subset [A]^\alpha$
2. $\bigcup_{\alpha\in]0,1]} B^\alpha = \bigcup_{\alpha\in]0,1]} [A]^\alpha$.

Démonstration. 1. Soit $\alpha_0 \in]0,1]$, si $x \in B^{\alpha_0}$, alors $\alpha_0 B^{\alpha_0} = \alpha_0$, et ainsi

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{A^\alpha}(x) \\ &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) \\ &\geq \alpha_0. \end{aligned}$$

Par suite $x \in [A]^\alpha$.

2. Les deux membres de l'égalité sont exactement égaux à Supp(A).

□

1.3.2 Principe d'extension

Définition 1.3.1. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *, et* $A \in \mathbb{F}(X)$*. Alors, l'ensemble flou* $f(A)$ *est défini, via le principe d'extension, par*

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \ \ et \ \ \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \tag{1.1}$$

Remarque 1.3.1. *Pour appliquer ce principe aux applications floues, on réécrit* (1.1) *sous la forme équivalente suivante*

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in X} \min\left(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y)\right). \tag{1.2}$$

Proposition 1.3.2. *Soit* $A \in \mathbb{F}(X)$ *et* $f : X \longrightarrow Y$*. Alors on, a*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha). \tag{1.3}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \\
&= \sup_{x\in f^{-1}(y)} \Big[\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\Big] \\
&= \sup_{\substack{x\in f^{-1}(y)\\ \alpha\in]0,1]}} \big[\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\big]
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $B = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu_B(y) &= \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{f([A]^\alpha)} \\
&= \sup_{0<\alpha\leq 1} \big[\alpha \sup_{x\in f^{-1}(y)} \chi_{[A]^\alpha}(x)\big] \\
&= \sup_{0<\alpha\leq 1} \Big[\sup_{x\in f^{-1}(y)} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\Big] \\
&= \sup_{\substack{x\in f^{-1}(y)\\ \alpha\in]0,1]}} \big[\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)\big]
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.3.2. *On a*

$$f(A) = \int_0^1 \alpha[f(A)]^\alpha = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha)$$

avec

$$f([A]^\alpha) \subset [f(A)]^\alpha, \quad \forall\alpha \in]0,1].$$

Mais en général

$$f([A]^\alpha) \neq [f(A)]^\alpha.$$

Proposition 1.3.3. *Soient $f : X\times Y \longrightarrow Z$, $A\in\mathbb{F}(X)$ et $B\in\mathbb{F}(Y)$, alors*

$$f(A,B) = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha, [B]^\alpha).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu_{f(A,B)}(z) &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \qquad (1.4)\\
&= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} (\min(\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))).
\end{aligned}$$

Soit $T = \int_0^1 \alpha f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$

$$\begin{aligned}
\mu_T(z) &= \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{f([A]^\alpha,[B]^\alpha)}(z) && (1.5)\\
&= \sup_{\alpha\in]0,1]} \Big[\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))\Big] && (1.6)\\
&= \sup_{\substack{\alpha\in]0,1]\\ (x,y)\in f^{-1}(z)}} \Big[\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))\Big].
\end{aligned}$$

Pour montrer que (1.4) et (1.5) sont équivalentes, il suffit de montrer que

$$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha\in]0,1]} (\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))), \tag{1.7}$$

où

$$\alpha_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x)$$
$$\beta_0 = \sup_{0<\alpha\leq 1} \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)$$

Si $\min(\alpha_0, \beta_0) = 0$, disons $\alpha_0 = 0$, alors $\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = 0$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ ainsi (1.7) est vérifiée.

Supposons maintenant que $\min(\alpha_0, \beta_0) > 0$, alors

$$x \in [A]^\alpha \text{ pour tout } \alpha < \alpha_0$$

$$x \notin [A]^\alpha \text{ pour tout } \alpha > \alpha_0.$$

En effet

- S'il existe α' telle que

  $$\alpha' < \alpha_0 \text{ tel que } x \notin [A]^{\alpha'},$$

  alors

  $$\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) = \mu_A(x) < \alpha' < \alpha_0 = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x).$$

  ce qui est absurde.

- S'il existe

  $$\alpha'' > \alpha_0 \text{ tel que } x \in [A]^\alpha,$$

  alors $\sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha\chi_{[A]^\alpha}(x) \geq \alpha_0$ qui est une contradiction.

  De la même manière, on a

  $$x \in [B]^\alpha \text{ pour tout } \alpha < \beta_0$$

$$x \notin [B]^\alpha \text{ pour tout } \alpha > \beta_0.$$

d'où

$$\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y)) = \begin{cases} \alpha & \text{pour} \quad \alpha < min(\alpha_0, \beta_0) \\ 0 & \text{pour} \quad \alpha > min(\alpha_0, \beta_0) \end{cases}$$

et

$$\min(\alpha_0, \beta_0) = \sup_{\alpha \in]0,1]} (\min(\alpha\chi_{[A]^\alpha}(x), \alpha\chi_{[B]^\alpha}(y))) \tag{1.8}$$

□

Remarque 1.3.3. *On a*

$$f([A]^\alpha, [B]^\alpha) \subset [f(A,B)]^\alpha, \quad \forall \in]0,1].$$

Mais en général

$$f([A]^\alpha, [B]^\alpha) \neq [f(A,B)]^\alpha.$$

Proposition 1.3.4. *Avec les notations de la proposition (1.3.3), une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité suivante* $f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = [f(A,B)]^\alpha, \ \forall \in]0,1]$ *est*

$$\forall z \in Z, \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

est atteint.

Démonstration. (i) condition nécessaire :

Soit $z \in Z$ tel que $\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t \in]0,1]$

$$\begin{aligned} \mu_{f(A,B)}(z) = t &\Rightarrow z \in [f(A,B)]^t \\ &\Rightarrow z \in f([A]^t, [B]^t), \end{aligned}$$

ainsi il existe $\overline{x} \in [A]^t$ et $\overline{y} \in [B]^t$ tels que $f(\overline{x}, \overline{y}) = z$

d'où

$$\min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) \geq t$$

mais

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

ce qui montre que

$$\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t.$$

(ii) Condition suffisante :

D'après la proposition (1.3.2) et la proposition (1.3.3), on a

$$f([A]^\alpha, [B]^\beta) \subset [f(A,B)]^\alpha$$

maintenant soit $z \in [f(A,B)]^\alpha$ c-à-d

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \alpha.$$

Si $\mu_{f(A,B)}(z) > \alpha$, par définition du sup il existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$ tel que

$$\alpha < \min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

ainsi $z = f(\overline{x}, \overline{y}) \in f([A]^\alpha, [B]^\alpha)$.
Si $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$, alors par hypothèse, il existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in f^{-1}(z)$tel que

$$\alpha = \min(\mu_A(\overline{x}), \mu_B(\overline{y})) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$$

□

1.4 Forme paramétrique d'un nombre flou

Définition 1.4.1. *Un nombre flou x en forme paramétrique est une paire $x = (\underline{x}, \overline{x})$ de fonctions $\underline{x}(\alpha)$ et $\overline{x}(\alpha)$, qui satisfait :*

1. *$\underline{x}(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement croissante et continue à gauche,*
2. *$\overline{x}(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement décroissante et continue à gauche,*
3. *$\underline{x}(\alpha) \leq \overline{x}(\alpha)$, pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Pour deux nombres flous $x = (\underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha))$ et $y = (\underline{y}(\alpha), \overline{y})$ et un réel k, on a

⋆ $x = y$ si et seulement si $\underline{x}(\alpha) = \underline{y}(\alpha), \overline{x}(\alpha) = \overline{y}(\alpha)$.

⋆ $x \oplus y = (\underline{x}(\alpha) + \underline{y}(\alpha), \overline{x}(\alpha) + \overline{y}(\alpha))$.

$\star$

$$kx = \begin{cases} (k\underline{x}(\alpha), k\overline{x}(\alpha)) & \text{si } 0 \leq k \\ (k\overline{x}(\alpha), k\underline{x}(\alpha)) & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Remarque 1.4.1. $\star$ *Un nombre classique m est simplement représenté par : $\underline{x}(\alpha) = \overline{x}(\alpha) = m$,* $0 \leq \alpha \leq 1$.

$\star$ $x = (\underline{x}, \overline{x})$ *est appelé un nombre flou symétrique si $\frac{\underline{x}(\alpha)+\overline{x}(\alpha)}{2}$ est une constante réelle pour tout* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Chapitre 2

Système linéaire flou

Introduction

Les systèmes linéaires flous apparaissent dans de nombreuses branches de la science et de la technologie telles que l'économie, les sciences sociales, les télécommunications, le traitement d'images.... Il existe plusieurs travaux sur les systèmes linéaires flous ([32, 10, 1, 2, 27]...). Les premiers travaux portent sur les systèmes d'équations linéaires dont la matrice est classique et le vecteur second membre est flou, connus sous le nom de système d'équations linéaires floues (FLS), ont été proposés pour la première fois par Friedman et al. [28]. Pour calculer la solution du système, ils ont utilisé la forme paramétrique des nombres flous et ont remplacé le système original $n \times n$ par un système linéaire classique $2n \times 2n$.

2.1 Système linéaire flou

Définition 2.1.1. *[28] Le système d'équations linéaires $n \times n$:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où les coefficients de la matrice $A = (a_{ij})$,$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ sont classiques, $y_i \in E^1$, $1 \leq i \leq n$ et l'inconnu $x_j \in E^1$, $1 \leq j \leq n$, est appelé un système linéaire flou (FLS).

Définition 2.1.2. *Un vecteur flou $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ donné par*
$x_j = (\underline{x_j^+}(\alpha), \overline{x_j^+}(\alpha))$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha \leq 1$, est appelé solution de (2.1) *si :*

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^+} = \underline{y_i^+}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^+} = \overline{y_i^+}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Suivant Friedman et al [28], pour résoudre le système donné par (2.1), il faut remplacer le système original par le système linéaire classique $(2n) \times (2n)$ comme suit :

$$SX = Y \tag{2.2}$$

où on a
$X = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_n}, -\overline{x_1}, -\overline{x_2}, ..., -\overline{x_n})^t$
$Y = (\underline{y_1}, \underline{y_2}, ..., \underline{y_n}, -\overline{y_1}, -\overline{y_2}, ..., -\overline{y_n})^t$
$S = (s_{ij}), 1 \leq i, j \leq 2n$. Les s_{ij} sont déterminés comme suit :

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 \Rightarrow s_{ij} = a_{ij}, \ s_{i+n;j+n} = a_{ij} \\ a_{ij} < 0 \Rightarrow s_{i,j+n} = -a_{ij}, \ s_{i+n;j} = -a_{ij}, \end{cases} \tag{2.3}$$

et toute s_{ij}, qui n'est pas déterminée par (2.3), est égale à zéro.

Exemple 2.1.1. *Considérons le système linéaire flou* 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+2\alpha; 8-2\alpha). \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors, le système en forme paramétrique est

$$\begin{aligned} \underline{x_1} - \overline{x_2} &= \alpha \\ \overline{x_1} - \underline{x_2} &= 2-\alpha \\ \underline{x_1} + 3\underline{x_2} &= 4+2\alpha \\ \overline{x_1} + 3\overline{x_2} &= 8-2\alpha. \end{aligned}$$

La matrice S *associée est donnée par*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La structure de S implique que $s_{ij} \geq 0$ et $S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ où la matrice B contient les entrées positives de A. Alors que la matrice C contient les valeurs absolues des entrées négatives de A. Par conséquent, on a $A = B - C$.

Exemple 2.1.2. *Considérons le système linéaire flou* 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & y_1 \\ x_1 + x_2 = & y_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

La matrice associée est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans cet exemple, Friedman et al (1998) montre que la matrice S peut être singulière même si la matrice A est inversible. En d'autres termes, un système linéaire flou représenté par une matrice inversible A peut ne pas avoir de solution ou avoir un nombre infini de solutions.

2.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue

Le système linéaire (2.2) est un système linéaire classique $2n \times 2n$ et peut avoir une solution unique si et seulement si la matrice S est inversible. Le résultat suivant élimine la possibilité d'avoir une solution floue unique lorsque A est singulière.

Théorème 2.2.1. *[28] La matrice S est une matrice inversible si et seulement si les matrices $B - C$ et $B + C$ sont toutes les deux inversibles.*

Corollaire 2.2.2. *[28] Si un système linéaire classique n'a pas de solution unique, le système linéaire flou associé n'aura pas aussi de solution unique.*

Théorème 2.2.3. *[28] La solution unique X de* (2.2) *est un vecteur flou pour Y arbitraire si et seulement si S^{-1} est positive.*

Après le calcul de X qui résout l'équation (2.3), Friedman et al ont défini la solution floue du système original.

Définition 2.2.1. *[28] Soit $X = \{(\underline{x_i}(\alpha), \overline{x_i}(\alpha)), 1 \leq i \leq n\}$ la solution unique de* (2.2)*. Le vecteur flou $U = \{(\underline{u_i}(\alpha), \overline{u_i}(\alpha)), 1 \leq i \leq n\}$ défini par*
$\underline{u_i}(\alpha) = min(\underline{x_i}(\alpha), \overline{x_i}(\alpha), \underline{x_i}(1), \overline{x_i}(1))$
$\overline{u_i}(\alpha) = max(\underline{x_i}(\alpha), \overline{x_i}(\alpha), \underline{x_i}(1), \overline{x_i}(1))$
est appelé la solution floue de $SX = Y$. Si $(\underline{x_i}(\alpha), \overline{x_i}(\alpha)),\ 1 \leq i \leq n$, sont tous des nombres flous alors $\underline{u_i}(\alpha) = \underline{x_i}(\alpha),\ \overline{u_i}(\alpha) = \overline{x_i}(\alpha),\ 1 \leq i \leq n$ et U est appelé une solution floue forte. Sinon, U est une solution floue faible.

Soient $\underline{y} = (\underline{y_1}(\alpha), \underline{y_2}(\alpha), ..., \underline{y_n}(\alpha))$ et $\overline{y} = (\overline{y_1}(\alpha), \overline{y_2}(\alpha), ..., \overline{y_n}(\alpha))$.

Théorème 2.2.4. *[9] Soit $S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ une matrice inversible. Le système* (2.2) *a une solution forte si et seulement si $(B + C)^{-1}(\underline{y} - \overline{y}) \leq 0$.*

Théorème 2.2.5. *[9] Le système* (2.1) *a une solution forte unique si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Les matrices B-C et B+C sont inversibles.*
2. $(B+C)^{-1}(\underline{y}-\overline{y}) \leq 0$.

2.3 Exemples

Exemple 2.3.1. *[28] Considérons le système linéaire flou* 2×2 *suivant :*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+\alpha; 7-2\alpha). \end{cases} \tag{2.6}$$

La matrice associée est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors, on obtient

$$X = S^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1.125 & -0.125 & 0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 0.375 & -0.125 & 0.125 \\ 0.375 & -0.375 & 1.125 & -0.125 \\ -0.125 & 0.125 & -0.375 & 0.375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 4+\alpha \\ \alpha-2 \\ 2\alpha-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\alpha + \frac{11}{8} \\ \frac{\alpha}{8} + \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8}\alpha - \frac{23}{8} \\ \frac{3}{8}\alpha - \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

alors $\underline{x_1}(\alpha) = 1.375 + 0.625\alpha$, $\overline{x_1}(\alpha) = 2.875 - 0.875\alpha$

et $\underline{x_2}(\alpha) = 0.875 + 0.125\alpha$, $\overline{x_2}(\alpha) = 1.375 - 0.375\alpha$

D'où la solution floue est $x_1 = (\underline{x_1}(\alpha), \overline{x_1}(\alpha))$, $x_2 = (\underline{x_2}(\alpha), \overline{x_2}(\alpha))$ *qui est une solution floue forte.*

Exemple 2.3.2. *[28] Considérons le système linéaire flou* 3×3 *suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = & (\alpha; 2-\alpha) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = & (2+\alpha; 3) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = & (-2; -1-\alpha). \end{cases} \tag{2.7}$$

La matrice associée est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

et $Y = (\alpha, 2+\alpha, -2, \alpha-2, -3, 1+\alpha)^t$.

Alors, on obtient

$X = S^{-1}Y = (-2.31 + 3.62\alpha, -0.62 - 0.77\alpha, 1.08 - 2.15\alpha, -4.69 + 3.38\alpha, 1.62 - 0.23\alpha, 2.92 - 1.85\alpha)^t$

alors, on a

$x_1 = (-2.31 + 3.62\alpha, 4.69 - 3.38\alpha)$

$x_2 = (-0.62 - 0.77\alpha, -1.62 + 0.23\alpha)$

$x_3 = (1.08 - 2.15\alpha, -2.92 + 1.85\alpha)$.

Puisque x_2 *et* x_3 *ne sont pas des nombres flous, la solution floue dans ce cas est une solution faible donnée par*

$u_1 = (-2.31 + 3.62\alpha, 4.69 - 3.38\alpha)$

$u_2 = (-1.62 + 0.23\alpha, -0.62 - 0.77\alpha)$

$u_3 = (-2.92 + 1.85\alpha, 1.08 - 2.15\alpha)$.

Chapitre 3

Sous-ensembles flous intuitionistiques

Introduction

Dans la théorie des ensembles flous, l'appartenance d'un élément à un ensemble est une valeur comprise entre zéro et un. En réalité, il peut ne pas toujours être vrai que le degré de non-appartenance à un élément d'un ensemble flou est égal à 1 moins le degré d'appartenance, car il peut y avoir une certaine hésitation. Par conséquent, Atanassov (1983, 1986) a proposé une extension des ensembles flous en définissant les ensembles flous intuitionistiques (IFS) qui intègrent le degré d'hésitation appelé marge d'hésitation (et est défini par 1 moins la somme des degrés d'appartenance et de non-appartenance).

L'application d'ensembles flous intuitionistiques au lieu d'ensembles flous signifie l'introduction d'un autre degré d'hésitation. Une telle extension des ensembles flous nous donne une possibilité supplémentaire de représenter des connaissances imparfaites ce qui conduit à décrire de nombreux problèmes réels de manière plus adéquate.

3.1 Sous-ensemble flou intuitionistique

3.1.1 Sous-ensemble flou intuitionistique

Exemple 3.1.1. *[14] Soit X l'ensemble de tous les pays avec des gouvernements électifs, supposons que nous savons pour tous les pays $x \in X$ le pourcentage de l'électorat qui a voté pour le gouvernement correspondant. Notons le par $M(x)$ et soit $\mu(x) = \dfrac{M(x)}{100}$ (degré d'appartenance, validité, etc). Soit $\nu(x) = 1 - \mu(x)$. Ce nombre correspond à la partie de l'électorat qui n'a pas voté pour le gouvernement.*

Par la théorie floue nous ne pouvons pas considérer cette valeur en plus de détails. Cependant, si on définit $\nu(x)$ (degré de non appartenance, non validité, etc) comme le nombre des voix accordées aux parties ou personnes extérieures du gouvernement, alors nous pouvons montrer la partie de l'électorat qui n'a pas voté du tout ou qui a donné des votes nuls et le nombre correspondant sera $\pi(x) = 1 - \mu(x) - \nu(x)$ (degré d'incertitude, d'indétermination, etc).

Alors on peut construire l'ensemble $\{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$ et évidemment $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ pour tout $x \in X$.

Définition 3.1.1. *On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X.$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \Big\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \Big\}.$$

On note $\mathbb{F}(X)$ l'espace de sous-ensembles flous intuitionistiques de X.

Remarque 3.1.1. $\star$ *$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ est appelé le degré d'indétermination ou bien l'indice intuitionistique de l'élément $x \in X$ et $\pi_A(x) \in [0,1]$, $\forall x \in X$.*

$\star$ *Il est clair que chaque sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique. Si A est un sous-ensemble flou alors $\pi_A(x) = 0$, $\forall x \in X$, et donc le sous-ensemble A a la forme*

$$\{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) \mid x \in X\}.$$

3.1.2 Interprétations géométriques

Suivant [16], des interprétations des sous-ensembles flous intuitionistiques seront présentées dans cette section.
L'interprétation géométrique la plus largement acceptée des sous-ensembles flous intuitionistiques est illustrée dans la figure (3.1).

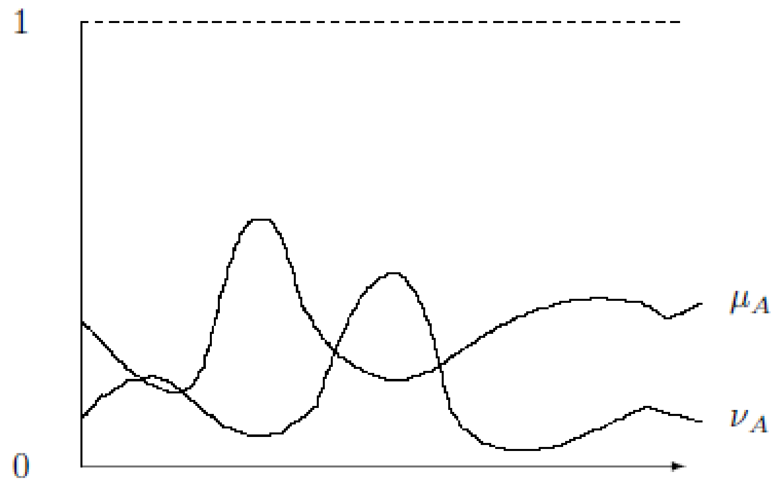

FIGURE 3.1 – Première interprétation géométrique

Son analogue est illustré dans la figure (3.2).

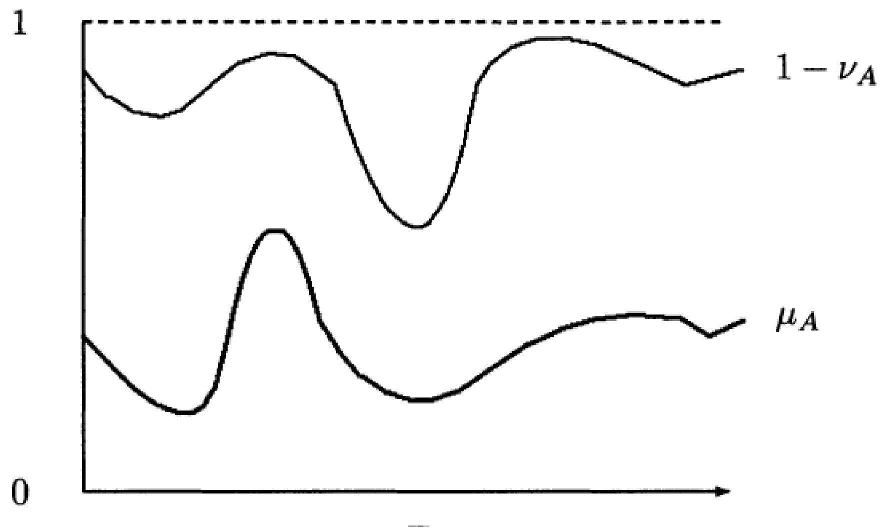

FIGURE 3.2 – Un analogue de la première interprétation géométrique

On peut associer à chaque élément $x \in X$ un segment de longueur 1 de la forme représentée dans la figure (3.3).

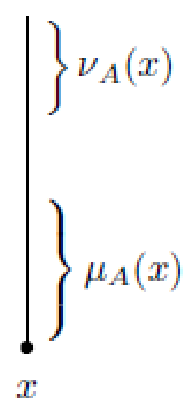

FIGURE 3.3 – Un segment associé à chaque élément $x \in X$

Les situation dans les figures 3.4 et 3.5 sont impossibles.

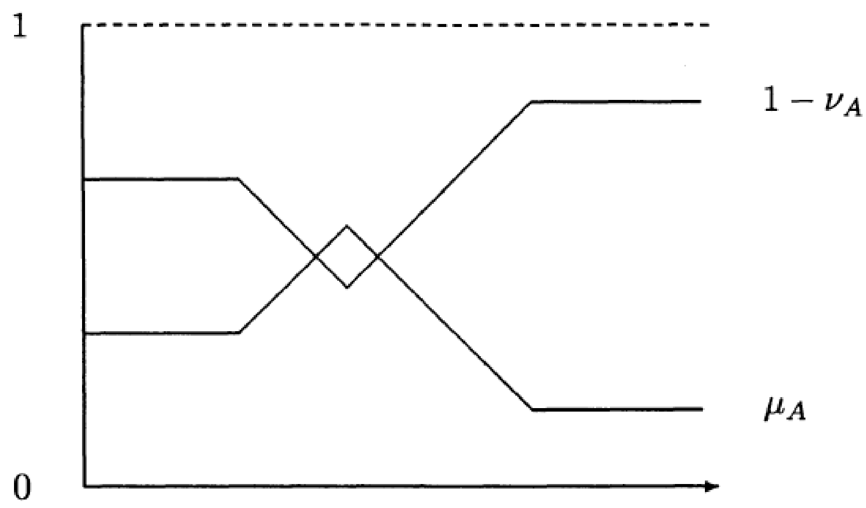

FIGURE 3.4 – Interprétation géométrique impossible

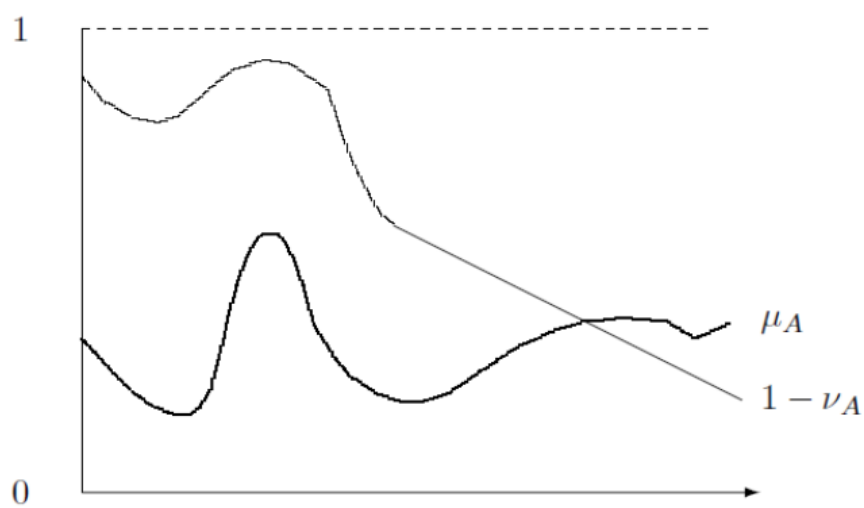

FIGURE 3.5 – Interprétation géométrique impossible

Une des interprétations géométriques commodes des ensembles flous intuitionistiques [14] est montrée à la figure (3.6). On considère un univers E et un sous-ensemble F dans le plan euclidien avec les coordonnées cartésiennes. Pour un ensemble flou intuitionistique A fixé, on construit une fonction $f_A : E \to F$ telle que si $x \in E$ alors $p = f_A(x)$ et le point $p \in F$ a les coordonnées (a, b) où $a = \mu(x)$, $b = \nu(x)$ et $0 < a + b < 1$.

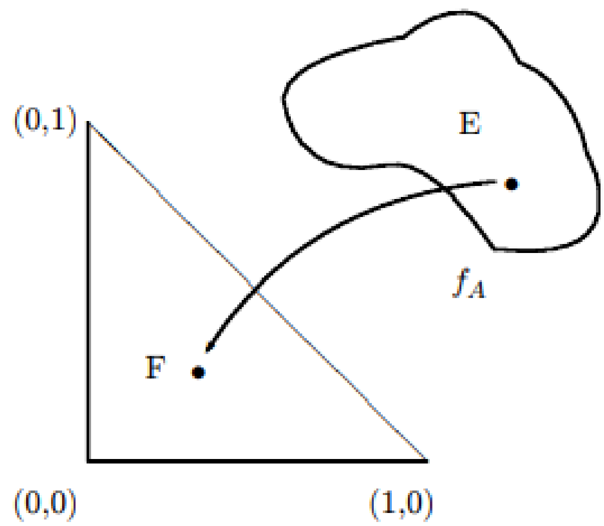

FIGURE 3.6 – Deuxième interprétation géométrique

3.1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous intuitionistiques

Soient $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ et $B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle \mid x \in X\}$ deux sous-ensembles flous intuitionistiques de X. Alors, on a :

– **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

– **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

– **Complémentaire**

Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad \text{et} \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Intersection**

  L'intersection de A et B est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

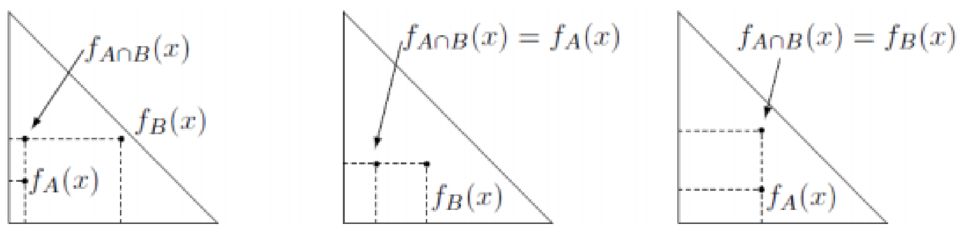

FIGURE 3.7 – Interprétation géométrique de l'intersection

- **Réunion**

  La réunion de A et B est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

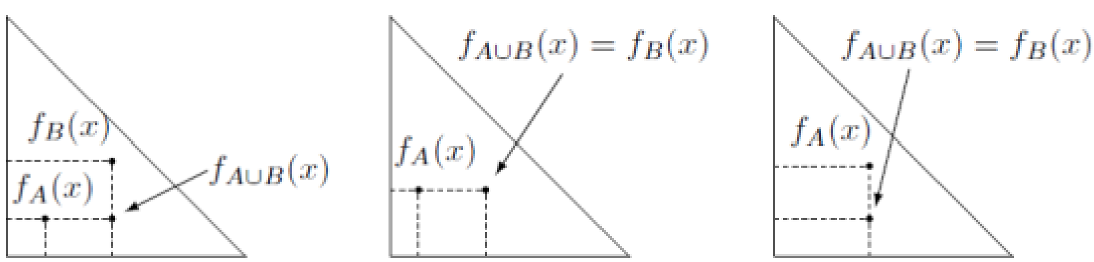

FIGURE 3.8 – Interprétation géométrique de la réunion

D'après [14], pour $A, B \in \mathbb{F}(X)$, on a les assertions suivantes

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B.$$

3.2 Opérateurs modaux

Suivant ([14], [17]), K. Atanassov introduit les deux opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ qui transforment un sous-ensemble flou intuitionistique en un sous-ensemble flou.

Soit $A \in \mathbb{F}(X)$

$$\Box A = \Big\{ < x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) >, x \in X \Big\},$$

et

$$\Diamond A = \Big\{ < x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X \Big\}.$$

L'interprétation géométrique pour les deux opérateurs est donnée par :

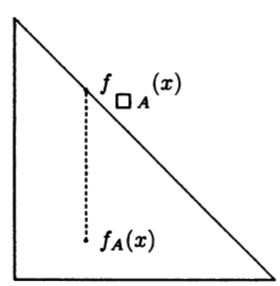

FIGURE 3.9 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\Box$

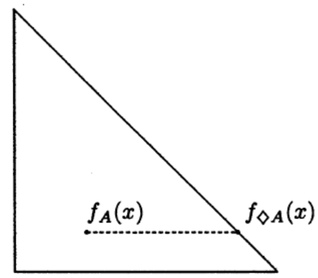

FIGURE 3.10 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\Diamond$

Remarque 3.2.1. ⋆ *Si A est un sous-ensemble flou alors*

$$\Box A = A = \Diamond A$$

⋆ *Les opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ n'admettent pas une analogie sur l'espace des sous-ensembles flous, ce qui entraîne aussi que $\mathbb{F}(X)$ est une extension propre de l'ensemble des sous-ensembles flous.*

Pour chaque sous-ensemble flou intuitionistique A, on a les propriétés suivantes

$$\overline{\Box\overline{A}} = \Diamond A$$

$$\overline{\Diamond\overline{A}} = \Box A$$

$$\Box A \subset A \subset \Diamond A$$

$$\Box\Box A = \Box A$$

$$\Diamond\Box A = \Box A$$

$$\Diamond\Diamond A = \Diamond A.$$

On note $\subset_{\Box}$, $\subset_{\diamond}$ et $\sqsubset$, trois opérations définies sur $\mathbb{F}(X)$ par

$$A \subset_{\Box} B \Longleftrightarrow \Box A \subset \Box B,$$

$$A \subset_{\diamond} B \Longleftrightarrow \Diamond A \subset \Diamond B,$$

$$A \sqsubset B \Longleftrightarrow \pi_A(x) \leq \pi_B(x),\ \forall x \in X.$$

On obtient

- Si $A \subset_{\Box} B$ et $A \sqsubset B$, alors $A \subset B$.
- Si $A \subset_{\diamond} B$ et $A \sqsubset B$, alors $A \subset B$.

3.3 Opérateurs topologiques

Dans [18] K. Atanassov introduit l'opérateur T, et nous introduisons l'opérateur S. Ces deux opérateurs diminuent le degré d'incertitude.

Soit $U^* = \{\langle x, 0, 0\rangle / x \in E\}$.

Pour tout sous-ensemble flou intuitionistique $A \neq U^*$, les opérateurs S et T ont la forme :

$$S(A) = \Big\{\langle x, \frac{u(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v(y))}, \frac{v(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v(y))}\rangle \quad /x \in E \quad et$$

$$u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}.$$

$$T(A) = \{\langle x, \frac{u(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y) + v(y))}, \frac{v(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y) + v(y))}\rangle \quad /x \in E\}.$$

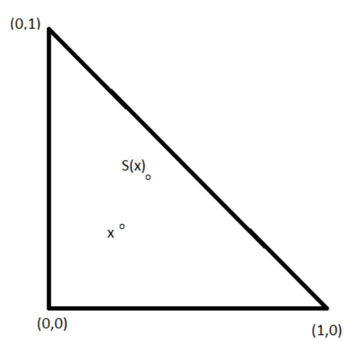

FIGURE 3.11 – Interprétation géométrique de l'opérateur S

Si $\mu_A(x) + \nu_A(x) = \sup\limits_{y\in E}(\mu_A(y) + \nu_A(y))$ et $z \in E$ et $\mu_A(z) + \nu_A(z) < \sup\limits_{y\in E}(\mu_A(y) + \nu_A(y))$.

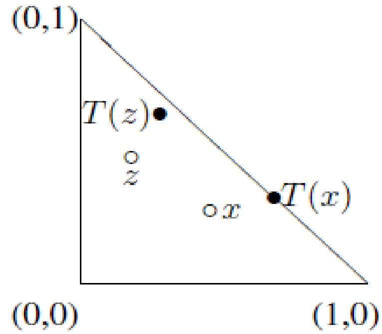

FIGURE 3.12 – Interprétation géométrique de l'opérateur T

Théorème 3.3.1. *Pour tout IFS* $A \neq U^*$ *:* $T(T(A)) = T(A)$.

Théorème 3.3.2. *Pour tout IFS* $A \neq U^*$ *:*

$$\Box A \subset \Box T(A),$$

$$\Diamond T(A) \subset \Diamond A,$$

$$T(\Box A) = \Box A,$$

$$T(\Diamond A) = \Diamond A.$$

Théorème 3.3.3. *Pour tout sous-ensemble flou intuitionistique* $A \neq U^*$ *:* $S(S(A)) = S(A)$.

Démonstration.

$$S(S(A)) = \Big\{\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{\sup\limits_{z\in E}(\frac{u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}) + \inf\limits_{z\in E}(\frac{v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))})},$$

$$\frac{\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{\sup\limits_{z\in E}(\frac{u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}) + \inf\limits_{z\in E}(\frac{v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))})}\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= \Big\{\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{(\frac{\sup\limits_{z\in E} u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}) + (\frac{\inf\limits_{z\in E} v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))})},$$

$$\frac{\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{(\frac{\sup\limits_{z\in E} u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}) + (\frac{\inf\limits_{z\in E} v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))})}\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= \Big\{\langle x, \frac{u_A(x)}{\sup\limits_{z\in E}(u_A(z)) + \inf\limits_{z\in E}(v_A(z))}, \frac{v_A(x)}{\sup\limits_{z\in E}(u_A(z)) + \inf\limits_{z\in E}(v(z))}\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= S(A).$$

□

Théorème 3.3.4. *Pour tout sous-ensemble flou intuitionistique $A \neq U^*$, on a*

$$\square A \subset \square S(A),$$

$$\lozenge S(A) \subset \lozenge A,$$

$$S(\square A) = \square A,$$

$$S(\lozenge A) = \lozenge A.$$

Démonstration.

$$\square A = \{\langle x, u_A(x), 1 - u_A(x)\rangle / x \in E\}$$

$$\square S(A) = \Big\{\langle x, \frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}, 1 - \frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}\rangle \quad /x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

donc

$$\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))} \geq u_A(x)$$

et

$$1 - \frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))} \leq 1 - u_A(x)$$

alors

$$\square A \subset \square S(A)$$

$$\lozenge A = \{\langle x, 1 - v(x), v(x)\rangle / x \in E\}$$

$$\lozenge S(A) = \Big\{\langle x, 1 - \frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}, \frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}\rangle \quad /x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

donc

$$\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)) + \inf\limits_{y\in E}(v_A(y))} \geq v_A(x)$$

et

$$1-\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}\leq 1-v_A(x)$$

alors

$$\Diamond S(A)\subset \Diamond A.$$

$$S(\Box A)=\Big\{\langle x,\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(1-u_A(y))},\frac{1-u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(1-u_A(y))}\rangle\quad /x\in E$$

$$et\quad u_A(x)+v_A(x)\leq \sup_{y\in E}(u(y))+\inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$=\Big\{\langle x,\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+1-\sup\limits_{y\in E}u_A(y))},\frac{1-u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+1-\sup\limits_{y\in E}u_A(y)}\rangle\quad /x\in E$$

$$et\quad u_A(x)+v_A(x)\leq \sup_{y\in E}(u(y))+\inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$=\Box A.$$

$$S(\Diamond A)=\Big\{\langle x,\frac{1-v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(1-v_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))},\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(1-v_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}\rangle\quad /x\in E$$

$$et\quad u_A(x)+v_A(x)\leq \sup_{y\in E}(u(y))+\inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$=\Big\{\langle x,\frac{1-v_A(x)}{1-\inf\limits_{y\in E}v_A(y)+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))},\frac{v_A(x)}{1-\inf\limits_{y\in E}v_A(y)+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}\rangle\quad /x\in E$$

$$et\quad u_A(x)+v_A(x)\leq \sup_{y\in E}(u(y))+\inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$=\Diamond A.$$

$\square$

Théorème 3.3.5. *Pour tout sous-ensemble flou intuitionistique A tel que pour tout $(x \in E)$ $u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))$,on a*

$$T(S(A)) = T(A),$$

$$S(T(A)) = S(A).$$

Démonstration.

$$T(S(A)) = \Big\{\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}}{\sup_{z\in E}\left((\frac{u_A(z)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}) + (\frac{v_A(z)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}) \right)},$$

$$\frac{\frac{v_A(x)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}}{\sup_{z\in E}\left((\frac{u_A(z)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}) + (\frac{v_A(z)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}) \right)} \rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y)) \Big\}$$

$$= \Big\{\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}}{\frac{\sup_{z\in E}(u_A(z) + u_A(z))}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}}, \frac{\frac{v_A(x)}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}}{\frac{\sup_{z\in E}(u_A(z) + u_A(z))}{\sup_{y\in E}(u_A(y)) + \inf_{y\in E}(v_A(y))}} \rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y)) \Big\}$$

$$= \Big\{\langle x, \frac{u_A(x)}{\sup_{z\in E}(u_A(z) + v_A(z))}, \frac{v_A(x)}{\sup_{z\in E}(u_A(z) + v(z))} \rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y)) \Big\}$$

$$= T(A).$$

$$S(T(A)) = \Big\{\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))}}{\sup\limits_{z\in E}(\frac{u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))}) + \inf\limits_{z\in E}(\frac{v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+v_A(y))})},$$

$$\frac{\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))}}{\sup\limits_{z\in E}(\frac{u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))}) + \inf\limits_{z\in E}(\frac{v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+v_A(y))})}\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= \Big\{\Big\langle x, \frac{\frac{u_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{(\frac{\sup\limits_{z\in E} u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}) + (\frac{\inf\limits_{z\in E} v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))})}, \frac{\frac{v_A(x)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y))+\inf\limits_{y\in E}(v_A(y))}}{(\frac{\sup\limits_{z\in E} u_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u(y)+v_A(y))}) + (\frac{\inf\limits_{z\in E} v_A(z)}{\sup\limits_{y\in E}(u_A(y)+v_A(y))})}\Big\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= \Big\{\langle x, \frac{u_A(x)}{\sup\limits_{z\in E}(u_A(z)) + \inf\limits_{z\in E}(v_A(z))}, \frac{v_A(x)}{\sup\limits_{z\in E}(u_A(z)) + \inf\limits_{z\in E}(v(z))}\rangle / x \in E$$

$$et \quad u_A(x) + v_A(x) \leq \sup_{y\in E}(u(y)) + \inf_{y\in E}(v(y))\Big\}$$

$$= S(A).$$

$\square$

3.4 Nombre flou intuitionistique

Introduisons l'ensemble $\mathbb{F}_1$ défini comme suit :

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_1(\mathbb{R}) = \big\{\langle u, v\rangle : \mathbb{R} \to [0,1]^2 \mid 0 \leq u + v \leq 1\big\}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $\langle u, v \rangle$ est normal i.e il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 1$ et $v(x_1) = 1$.
2. est convexe intuitionistique, i.e, u est convexe au sens flou et v concave au sens flou.

   Autrement dit $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad \forall t \in [0, 1]$

$$u(tx + (1-t)y) \geq \min(u(x), u(y))$$
$$v(tx + (1-t)y) \leq \max(v(x), v(y))$$

3. u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement.
4. $supp(\langle u, v \rangle) = cl(\{x \in \mathbb{R} : v(x) < 1\})$ est borné.

Chaque élément de $\mathbb{F}_1$ est un nombre flou intuitionistique.

Remarque 3.4.1. *Lorsque $u + v = 1$, on trouve les mêmes propriétés de la définition d'un élément de E^1.*

Définition 3.4.1. *[39] Un nombre flou intuitionistique triangulaire (TIFN) A est un ensemble flou intuitionistique de $\mathbb{R}$ dont la fonction d'appartenance est μ_A et la fonction de non appartenance est ν_A :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\[2ex] \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\[2ex] 0 & ailleurs. \end{cases}$$
$$\nu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a'_1} & si \quad a'_1 \leq x \leq a_2 \\[2ex] \dfrac{x - a_2}{a'_3 - a_2} & si \quad a_2 \leq x \leq a'_3, \\[2ex] 1 & ailleurs. \end{cases}$$

où $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3$ et $\mu_A(x)$, $\nu_A(x) \leq 0.5$ pour $\mu_A(x) = \nu_A(x)$,$\forall x \in \mathbb{R}$ ce nombre est noté

$$A_{TIFN} = \langle a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3 \rangle .$$

Sa représentation graphique est illustrée dans la figure (3.13).

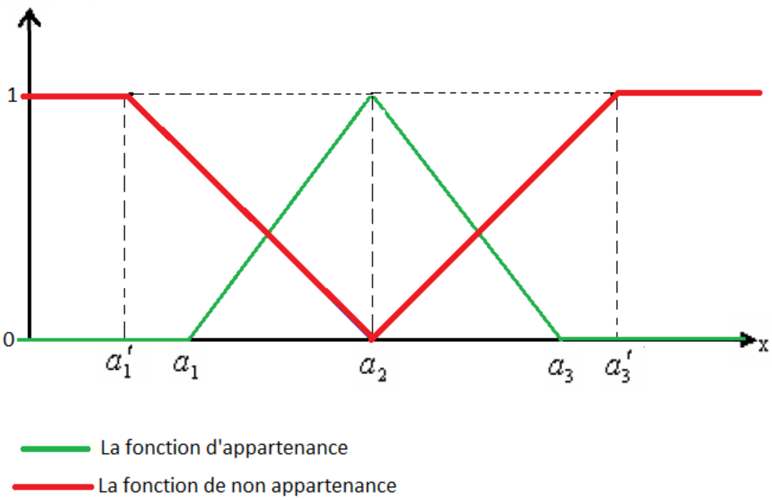

FIGURE 3.13 – Nombre flou intuitionistique triangulaire

Définition 3.4.2. *[40] Un nombre flou intuitionistique trapézoïdal (TRIFN) A est un ensemble flou intuitionistique de $\mathbb{R}$ avec la fonction d'appartenance est μ_A et la fonction de non-appartenance est ν_A :*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & si \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & si \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1'} & si \quad a_1' \leq x \leq a_2 \\ 0 & si \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{x-a_3}{a_4'-a_3} & si \quad a_3 \leq x \leq a_4', \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Avec $a_1' \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_4'$. *Ce nombre flou intuitionistique trapézoidal est noté par*

$$A_{TRIFN} = \left\langle a_1, a_2, a_3, a_4; a_1', a_2, a_3, a_4' \right\rangle.$$

Sa représentation graphique est illustrée dans la figure (3.14).

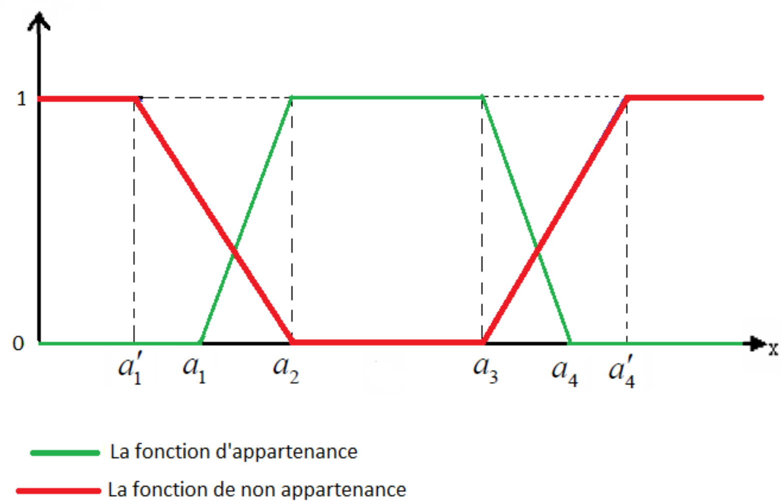

FIGURE 3.14 – Nombre flou intuitionistique trapézoïdal

3.5 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Les coupes d'un ensemble flou intuitionistique est un concept important dans la théorie des ensembles flous intuitionistique. C'est un pont entre l'ensemble flou intuitionistique et l'ensemble classique. En étendant la notion de α-coupe d'un ensemble flou, dans [14], la définition de (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique a été introduite.

Définition 3.5.1. *[14] Une (α, β)-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique*

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\}$$

est définie par

$$A^{\alpha,\beta} = \left\{ x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad et \quad \nu_A(x) \leq \beta \right\}$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $\alpha + \beta \leq 1$.

Définition 3.5.2. *Soit A un ensemble flou intuitionistique, $\alpha, \beta \in [0,1]$ tel que $\alpha + \beta \leq 1$ on définit : l'ensemble des coupes supérieures de A*

$$A_{[\alpha,\beta]} = \{x \in X |\ \mu_A(x) \geq \alpha\ ,\ \nu_A(x) \leq \beta\}.$$

$$A_{(\alpha,\beta)} = \{x \in X |\ \mu_A(x) > \alpha\ ,\ \nu_A(x) < \beta\}.$$

$$A_{[\alpha,\beta)} = \{x \in X|\ \mu_A(x) \geq \alpha\ ,\ \nu_A(x) < \beta\}.$$
$$A_{(\alpha,\beta]} = \{x \in X|\ \mu_A(x) > \alpha\ ,\ \nu_A(x) \leq \beta\}.$$

l'ensemble des coupes inférieures de A

$$A^{[\alpha,\beta]} = \{x \in X|\ \mu_A(x) \leq \alpha\ ,\ \nu_A(x) \geq \beta\}.$$
$$A^{(\alpha,\beta)} = \{x \in X|\ \mu_A(x) < \alpha\ ,\ \nu_A(x) > \beta\}.$$
$$A_{[\alpha,\beta)} = \{x \in X|\ \mu_A(x) \leq \alpha\ ,\ \nu_A(x) > \beta\}.$$
$$A_{(\alpha,\beta]} = \{x \in X|\ \mu_A(x) < \alpha\ ,\ \nu_A(x) \geq \beta\}.$$

Définition 3.5.3. *Pour $\alpha \in [0,1]$ et $\langle u,v\rangle \in I\!F_1$, on définit les coupes superieures et inférieures de $\langle u,v\rangle$ comme suit :*

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]^{\alpha} = \Big\{x \in \mathbb{R} : v(x) \leq 1-\alpha\Big\}$$

et

$$\Big[\langle u,v\rangle\Big]_{\alpha} = \Big\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\Big\}$$

Définition 3.5.4. *Soit $\langle x^+, x^-\rangle \in IF_1$ et $\alpha \in [0,1]$, on note :*

$$\underline{x}^+(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}|x^+(t) \geq \alpha\}$$

$$\overline{x}^+(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R}|x^+(t) \geq \alpha\}$$

$$\underline{x}^-(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}|x^-(t) \leq 1-\alpha\}$$

$$\overline{x}^-(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R}|x^-(t) \leq 1-\alpha\}$$

Remarque 3.5.1.

Les α-coupes supérieures et inférieures d'un nombre flou intuitionistique sont des intervalles fermé de $\mathbb{R}$ c-à-d

$$\Big[\langle x^+, x^-\rangle\Big]_{\alpha} = [\underline{x}^+(\alpha), \overline{x}^+(\alpha)],$$
$$\Big[\langle x^+, x^-\rangle\Big]^{\alpha} = [\underline{x}^-(\alpha), \overline{x}^-(\alpha)].$$

D'après les propriétés vérifiant par un élément de $\mathbb{F}_1$, on a

Proposition 3.5.1. *Pour tout $\langle x^+, x^- \rangle, \langle y^+, y^- \rangle \in \mathbb{F}_1$, on a*

$$\langle x^+, x^- \rangle = \langle y^+, y^- \rangle \Longleftrightarrow \begin{cases} [\langle x^+, x^- \rangle]_\alpha = [\langle y^+, y^- \rangle]_\alpha \\ [\langle x^+, x^- \rangle]^\alpha = [\langle y^+, y^- \rangle]^\alpha \end{cases}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Dans $\mathbb{F}_1$, on définit l'addition et la multiplication par un scalaire par :

$$\langle x^+, x^- \rangle \oplus \langle y^+, y^- \rangle = \langle x^+ \vee y^+, x^- \wedge y^- \rangle, \forall \langle x^+, x^- \rangle, \langle y^+, y^- \rangle \in \mathbb{F}_1$$

avec

$$(x^+ \vee y^+)(z) = \sup_{z=r+s} \min\left(x^+(r), y^+(s)\right),$$

$$(x^- \wedge y^-)(z) = \inf_{z=r+s} \max\left(x^-(r), y^-(s)\right).$$

$$\lambda \langle x^+, x^- \rangle = \langle \lambda x^+, \lambda x^- \rangle, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \langle x^+, x^- \rangle \in \mathbb{F}_1.$$

Définition 3.5.5. *On définit l'élément neutre pour l'addition comme suit :*

$$0_{\langle 1,0 \rangle}(t) = \begin{cases} \langle 1, 0 \rangle & si\ t = 0 \\ \langle 0, 1 \rangle & si\ \neq 0 \end{cases}$$

3.6 Forme paramétrique d'un nombre flou intuitionistique

Définition 3.6.1. *[35] Un nombre flou intuitionistique x en forme paramétrique est un pair $x = \Big((\underline{x^+}, \overline{x^+}), (\underline{x}^-, \overline{x}^-)\Big)$ de fonctions $\underline{x}^-(\alpha)$, $\overline{x}^-(\alpha)$, $\underline{x}^+(\alpha)$ et $\overline{x}^+(\alpha)$, qui satisfait :*

1. *$\underline{x}^+(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement croissante et continue à droite,*
2. *$\overline{x}^+(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement décroissante et continue à gauche,*
3. *$\underline{x}^-(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement décroissante et continue à gauche,*
4. *$\overline{x}^-(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement croissante et continue à droite,*
5. *$\underline{x}^-(\alpha) \leq \overline{x}^-(\alpha)$ et $\underline{x}^+(\alpha) \leq \overline{x}^+(\alpha)$, pour tout $0 \leq r \leq 1$.*

Théorème 3.6.1. *Soient $\underline{x}^-(\alpha)$, $\overline{x}^-(\alpha)$, $\underline{x}^+(\alpha)$ et $\overline{x}^+(\alpha)$ des fonctions réelles, qui satisfont :*

1. *$\underline{x}^+(\alpha)$ est une fonction bornée, strictement croissante et continue à droite,*

2. $\overline{x}^{+}(\alpha)$ *est une fonction bornée, strictement décroissante et continue à gauche,*

3. $\underline{x}^{-}(\alpha)$ *est une fonction bornée, strictement décroissante et continue à gauche,*

4. $\overline{x}^{-}(\alpha)$ *est une fonction bornée, strictement croissante et continue à droite,*

5. $\underline{x}^{-}(\alpha) \leq \overline{x}^{-}(\alpha)$ *et* $\underline{x}^{+}(\alpha) \leq \overline{x}^{+}(\alpha)$*, pour tout* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Alors $x = \Big((\underline{x^{+}}, \overline{x^{+}}), (\underline{x}^{-}, \overline{x}^{-})\Big)$ *est un nombre flou intuitionistique.*

La forme paramétrique d'un nombre flou intuitionistique triangulaire $x = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{'}, a_2, a_3^{'} \rangle$. est donnée par

$$\underline{x}^{+}(\alpha) = a_1 + \alpha(a_2 - a_1),\ \overline{x}^{+}(\alpha) = a_3 - \alpha(a_3 - a_2)$$

$$\underline{x}^{-}(\alpha) = a_1' + \alpha(a_2 - a_1'),\ \overline{x}^{-}(\alpha) = a_3' - \alpha(a_3' - a_2).$$

Pour deux nombres flous intuitionistiques $x = (\underline{x}^{+}(\alpha), \overline{x}^{+}(\alpha), \underline{x}^{-}(\alpha), \overline{x}^{-}(\alpha))$ et $y = (\underline{y}^{+}(\alpha), \overline{y}^{+}(\alpha), \underline{y}^{-}(\alpha), \overline{y}^{-}(\alpha))$ et un réel k, on a :

- $\star$ $x = y$ si et seulement si $\underline{x}^{+}(\alpha) = \underline{y}^{+}(\alpha), \overline{x}^{+}(\alpha) = \overline{y}^{+}(\alpha), \underline{x}^{-}(\alpha) = \underline{y}^{-}(\alpha)$ et $\overline{x}^{-}(\alpha) = \overline{y}^{-}(\alpha)$

- $\star$ $x \oplus y = (\underline{x}^{+}(\alpha) + \underline{y}^{+}(\alpha), \overline{x}^{+}(\alpha) + \overline{y}^{+}(\alpha), \underline{x}^{-}(\alpha) + \underline{y}^{-}(\alpha), \overline{x}^{-}(\alpha) + \overline{y}^{-}(\alpha))$

- $\star$

$$kx = \begin{cases} (k\underline{x}^{+}(\alpha), k\overline{x}^{+}(\alpha), k\underline{x}^{-}(\alpha), k\overline{x}^{-}(\alpha)) & \text{si } 0 \leq k \\ (k\overline{x}^{+}(\alpha), k\underline{x}^{+}(\alpha), k\overline{x}^{-}(\alpha), k\underline{x}^{-}(\alpha)) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Définition 3.6.2. *Un nombre flou intuitionistique triangulaire* $x = (\underline{x}^{+}(\alpha), \overline{x}^{+}(\alpha), \underline{x}^{-}(\alpha), \underline{x}^{-}(\alpha))$ *est symétrique si* $\frac{\underline{x}^{+}(\alpha)+\overline{x}^{+}(\alpha)}{2}$ *et* $\frac{\underline{x}^{-}(\alpha)+\overline{x}^{-}(\alpha)}{2}$ *sont constants.*

Chapitre 4

Systèmes linéaires flou intuitionistiques

Introduction

Les systèmes d'équations linéaires ont de nombreuses applications dans divers domaines des sciences mathématiques, physiques et techniques. Dans la plupart des problèmes, nous travaillons généralement avec des données approximatives. Pour éviter ce type d'erreur, nous pouvons représenter les données sous forme de nombres flous et plus généralement flous intuitionistiques, plutôt que de nombres classiques. Les systèmes linéaires flous intuitionistiques sont les systèmes linéaires dont les paramètres sont entièrement ou partiellement représentés par des nombres flous intuitionistiques. Dans ce chapitre, nous donnons des conditions d'existence et d'unicité de la solution floue intuitionistique et nous proposons quatres méthodes différentes pour résoudre le système linéaire flou intuitionistique $n \times n$.

4.1 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$

Définition 4.1.1. *Le système d'équations linéaires* $n \times n$ *:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

où les coefficients de la matrice $A = (a_{ij})$,$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ *sont classiques,* $y_i \in I\!F_1$, $1 \leq i \leq n$ *et l'inconnu* $x_j \in I\!F_1$, $1 \leq j \leq n$ *, est appelé un système linéaire flou intuitionistique (IFLS).*

Définition 4.1.2. *Un vecteur flou intuitionistique* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ *donné par* $x_j = (\underline{x_j^+}(\alpha), \overline{x_j^+}(\alpha), \underline{x_j^-}(r), \overline{x_j^-}(\alpha))$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha \leq 1$, *est appelé solution de* (4.1) *Si :*

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^+} = \underline{y_i^+}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^+} = \overline{y_i^+}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^-} = \underline{y_i^-}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^-} = \overline{y_i^-}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

.

Si, pour un certain i, $a_{ij} > 0$, $1 \leq j \leq n$, on obtient

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{x_j^+} = \underline{y_i^+},$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j^+} = \overline{y_i^+},$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{x_j^-} = \underline{y_i^-},$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j^-} = \overline{y_i^-}.$$

4.2 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ (Méthode 1)

4.2.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$

Pour résoudre le système linéaire flou intuitionistique (4.1), laissez-nous maintenant le réorganiser : la forme paramétrique de x_j est $x_j = (\underline{x_j^+}, \overline{x_j^+}, \underline{x_j^-}, \overline{x_j^-})$, $1 \leq j \leq n$, et soit $a_{ij} = b_{ij} - c_{ij}$ tel que b_{ij} et c_{ij} sont positifs et $b_{ij}.c_{ij} = 0$.
Si on considère (4.1) en forme paramétrique. Alors, pour $i = 1, 2, ..., n$, on a

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^+}, \overline{x_1^+}, \underline{x_1^-}, \overline{x_1^-}) + \ldots + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^+}, \overline{x_n^+}, \underline{x_n^-}, \overline{x_n^-}) = (\underline{y_i^+}, \overline{y_i^+}, \underline{y_i^-}, \overline{y_i^-}).$$

Alors, on a

$$b_{i1}\underline{x_1^+} - c_{i1}\overline{x_1^+} + b_{i2}\underline{x_1^+} - c_{i2}\overline{x_2^+} + \ldots + b_{in}\underline{x_n^+} - c_{in}\overline{x_n^+} = \underline{y_i^+} \tag{4.2}$$

$$b_{i1}\overline{x_1^+} - c_{i1}\underline{x_1^+} + b_{i2}\overline{x_2^+} - c_{i2}\underline{x_2^+} + \ldots + b_{in}\overline{x_n^+} - c_{in}\underline{x_n^+} = \overline{y_i^+} \tag{4.3}$$

$$b_{i1}\underline{x_1^-} - c_{i1}\overline{x_1^-} + b_{i2}\underline{x_1^-} - c_{i2}\overline{x_2^-} + \ldots + b_{in}\underline{x_n^-} - c_{in}\overline{x_n^-} = \underline{y_i^-} \tag{4.4}$$

$$b_{i1}\overline{x_1^-} - c_{i1}\underline{x_1^-} + b_{i2}\overline{x_2^-} - c_{i2}\underline{x_2^-} + \ldots + b_{in}\overline{x_n^-} - c_{in}\underline{x_n^-} = \overline{y_i^-}. \tag{4.5}$$

Soient B la matrice qui contient les entrées positives de A et C la matrice qui contient les valeurs absolus des entrées négatives de A, donc $A = B - C$.
En utilisant la notation matricielle pour (4.1) on obtient $AX = Y$ ou $(B - C)X = Y$.

Théorème 4.2.1. *Soit X une solution floue intuitionistique du système* (4.1) *où A est une matrice inversible et Y est un vecteur flou intuitionistique. Alors $AE^+ = F^+$ et $AE^- = F^-$.*

Démonstration. De (4.2) et (4.3) on obtient :

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^+} + \overline{x_1^+}) + \ldots + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^+} + \overline{x_n^+}) = (\underline{y_i^+} + \overline{y_i^+})$$

et de (4.4) et (4.5) on obtient

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^-} + \overline{x_1^-}) + \ldots + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^-} + \overline{x_n^-}) = (\underline{y_i^-} + \overline{y_i^-})$$

et alors, on a

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}(\overline{x_j^+} + \underline{x_j^+})) - \sum_{j=1}^{n}(c_{ij}(\overline{x_j^+} + \underline{x_j^+})) = (\overline{y_i^+} + \underline{y_i^+})$$

et

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}(\overline{x_j^-}+\underline{x_j^-}))-\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}(\overline{x_j^-}+\underline{x_j^-}))=(\overline{y_i^-}+\underline{y_i^-}).$$

Soit

$$E^+=(e_1^+,e_2^+,\dots,e_n^+)^t,\;\; F^+=(f_1^+,f_2^+,\dots,f_n^+)^t$$

et

$$E^-=(e_1^-,e_2^-,\dots,e_n^-)^t,\;\; F^-=(f_1^-,f_2^-,\dots,f_n^-)^t$$

où $e_i^+=(\overline{x_i^+}+\underline{x_i^+})$, $f_i^+=(\overline{y_i^+}+\underline{y_i^+})$ et $e_i^-=(\overline{x_i^-}+\underline{x_i^-})$, $f_i^-=(\overline{y_i^-}+\underline{y_i^-})$.
Donc, on trouve

$$AE^+=F^+$$
$$AE^-=F^-.$$

□

Remarque 4.2.1. *Soit X une solution floue intuitionistique du système* (4.1) *où A est une matrice inversible et Y est un vecteur flou intuitionistique. Si Y est un vecteur flou intuitionistique symétrique alors X est un vecteur flou intuitionistique symétrique.*

De (4.2) et (4.3) on obtient

$$b_{i1}(\overline{x_1^+}-\underline{x_1^+})+\ldots+b_{in}(\overline{x_n^+}-\underline{x_n^+})-c_{i1}(\underline{x_1^+}-\overline{x_1^+})-\ldots-c_{in}(\underline{x_n^+}-\overline{x_n^+})=\overline{y_i^+}-\underline{y_i^+}$$

et de (4.4) et (4.5) on obtient

$$b_{i1}(\overline{x_1^-}-\underline{x_1^-})+\ldots+b_{in}(\overline{x_n^-}-\underline{x_n^-})-c_{i1}(\underline{x_1^-}-\overline{x_1^-})-\ldots-c_{in}(\underline{x_n^-}-\overline{x_n^-})=\overline{y_i^-}-\underline{y_i^-}$$

et donc, on trouve

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(\overline{x_j^+}-\underline{x_j^+})+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(\overline{x_j^+}-\underline{x_j^+})=\overline{y_i^+}-\underline{y_i^+}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(\overline{x_j^-}-\underline{x_j^-})+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(\overline{x_j^-}-\underline{x_j^-})=\overline{y_i^-}-\underline{y_i^-}.$$

Si on pose $w_j^+=\overline{x_j^+}-\underline{x_j^+}$, $v_j^+=\overline{y_i^+}-\underline{y_i^+}$, $w_j^-=\overline{x_j^-}-\underline{x_j^-}$ et $v_j^-=\overline{y_i^-}-\underline{y_i^-}$
on trouve

$$(B+C)W^+ = V^+$$
$$(B+C)W^- = V^-$$

où $W^+ = (w_1^+, w_2^+, \dots, w_n^+)^t, V^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+)^t, W^- = (w_1^-, w_2^-, \dots, w_n^-)^t, V^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-)^t$ et $A = B - C$.

Pour résoudre le système (4.1), nous devons résoudre les systèmes suivants :

$$(B+C)W^+ = V^+ \tag{4.6}$$

$$(B-C)E^+ = F^+ \tag{4.7}$$

et

$$(B+C)W^- = V^- \tag{4.8}$$

$$(B-C)E^- = F^- \tag{4.9}$$

Puis, pour chaque $1 \leq i \leq n$ on prend,

$$\begin{cases} \underline{x_i^+} = \frac{1}{2}e_i^+ - \frac{1}{2}w_i^+, \\ \overline{x_i^+} = \frac{1}{2}e_i^+ + \frac{1}{2}w_i^+, \\ \underline{x_i^-} = \frac{1}{2}e_i^- - \frac{1}{2}w_i^-, \\ \overline{x_i^-} = \frac{1}{2}e_i^- + \frac{1}{2}w_i^-. \end{cases}$$

Le système (4.1) a une solution unique si et seulement si $(B+C)$ et $(B-C)$ sont toutes les deux inversibles.

4.2.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionistique

Théorème 4.2.2. *Si $(B-C)$ est une matrice inversible, $(B+C)$ est une matrice inversible telle que $(B+C)^{-1}$ est une matrice positive et y est un vecteur flou intuitionistique arbitraire. Alors le système linéaire flou intuitionistique* (4.1) *a une solution floue intuitionistique unique.*

Démonstration. Le système (4.1) a une solution unique si et seulement si $(B+C)$ et $(B-C)$ sont toutes les deux inversibles.

Le système (4.1) a une solution unique, mais cette solution n'est pas toujours un vecteur flou intuitionistique.

On a

$$(B+C)W^{+} = V^{+}$$
$$(B+C)W^{-} = V^{-}.$$

Puisque $(B+C)$ est inversible

$$W^{+} = (B+C)^{-1}V^{+}$$
$$W^{-} = (B+C)^{-1}V^{-}.$$

Puisque $(\overline{y_i^+} - \underline{y_i^+}) \geq 0$, $(\overline{y_i^-} - \underline{y_i^-}) \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $(B+C)^{-1} \geq 0$
Alors, on a $\overline{x_j^+} - \underline{x_j^+} \geq 0$ et$\overline{x_j^-} - \underline{x_j^-} \geq 0$ pour $1 \leq j \leq n$. $\square$

Remarque 4.2.2. *Si* $(B+C)$ *et* $(B-C)$ *sont toutes les deux inversibles et* y *est un vecteur flou intuitionistique arbitraire. Alors le système* (4.1) *a une solution floue intuitionistique unique si* $(B+C)^{-1}V^{+} \geq 0$ *et* $(B+C)^{-1}V^{-} \geq 0$.

4.2.3 Exemples

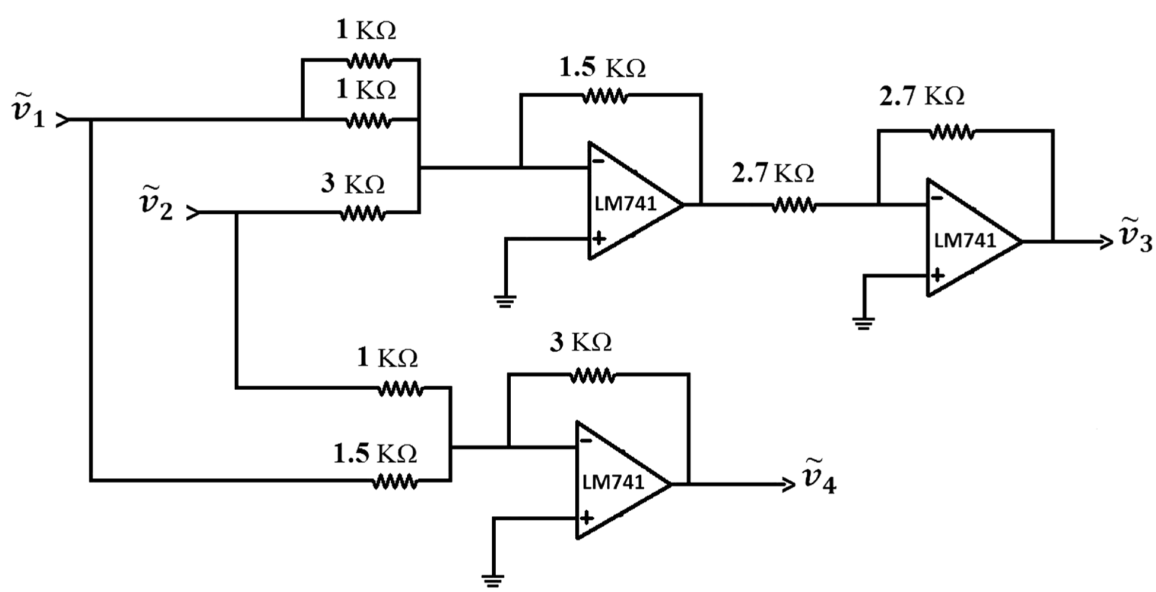

FIGURE 4.1 – Circuit électrique

Exemple 4.2.1. *Les auteurs dans [46] considèrent le circuit électrique montré en Fig.1 , où* $\tilde{v}_1$ *et* $\tilde{v}_2$ *sont les voltages d'entrée et* $\tilde{v}_3$ *et* $\tilde{v}_4$ *sont les voltages de sortie. Le circuit est une sorte d'amplificateur de sommation à deux entrées et deux sorties. La relation entre les tensions d'entrée et de sortie* *est la suivante :*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0.5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v_1} \\ \tilde{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v_3} \\ \tilde{v_4} \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Ils ont considéré les tensions de sortie comme des nombres flous type-2. Nous traitons le même exemple, mais nous considérons les tensions de sortie comme des nombres flous intuitionistiques : $\tilde{v_3} = (14 + 2\alpha; 18 - 2\alpha; 16 - 3\alpha; 16 + 3\alpha)$ *et* $\tilde{v_4} = (-18 + 2\alpha; -14 - 2\alpha; -16 - 3\alpha; -16 + 3\alpha)$.

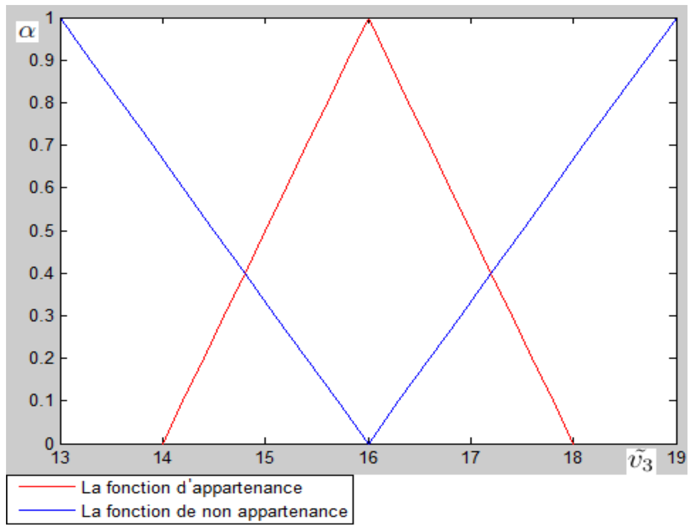

FIGURE 4.2 – Tension $\tilde{v_3}$

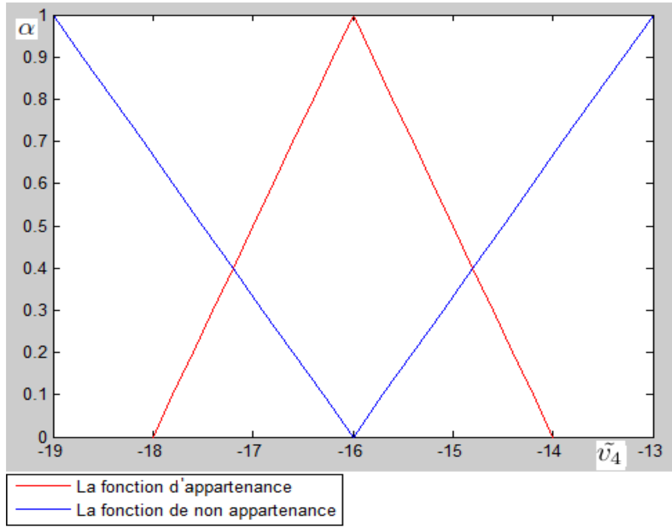

FIGURE 4.3 – Tension $\tilde{v}_4$

$$\begin{cases} 3\tilde{v}_1 + 0.5\tilde{v}_2 = & (14+2\alpha; 18-2\alpha; 16-3\alpha; 16+3\alpha) \\ -2\tilde{v}_1 - 3\tilde{v}_2 = & (-18+2\alpha; -14-2\alpha; -16-3\alpha; -16+3\alpha) \end{cases}$$

donc

$$3\underline{v_1^+} + 0.5\underline{v_2^+} = 14 + 2\alpha$$
$$3\overline{v_1^+} + 0.5\overline{v_2^+} = 18 - 2\alpha$$
$$-2\overline{v_1^+} - 3\overline{v_2^+} = -18 + 2\alpha$$
$$-2\underline{v_1^+} - 3\underline{v_2^+} = -14 - 2\alpha$$

et

$$3\underline{v_1^-} + 0.5\underline{v_2^-} = 16 - 3\alpha$$
$$3\overline{v_1^-} + 0.5\overline{v_2^-} = 16 + 3\alpha$$
$$-2\overline{v_1^-} - 3\overline{v_2^-} = -16 - 3\alpha$$
$$-2\underline{v_1^-} - 3\underline{v_2^-} = -16 + 3\alpha.$$

Alors, nous obtenons 4 systèmes classiques :

$$\begin{cases} 3z_1^+ + 0.5z_2^+ = & 4 - 4\alpha \\ 2z_1^+ + 3z_2^+ = & 4 - 4\alpha \end{cases}$$

où $z_1^+ = \overline{v_1^+} - \underline{v_1^+}$, $z_2^+ = \overline{v_2^+} - \underline{v_2^+}$.

et

$$\begin{cases} 3e_1^+ + 0.5e_2^+ = & 32 \\ -2e_1^+ - 3e_2^+ = & -32 \end{cases}$$

où $e_1^+ = \overline{v_1^+} + \underline{v_1^+}$, $e_2^+ = \overline{v_2^+} + \underline{v_2^+}$.

$$\begin{cases} 3z_1^- + 0.5z_2^- = & 6\alpha \\ 2z_1^- + 3z_2^- = & 6\alpha \end{cases}$$

où $z_1^+ = \overline{v_1^+} - \underline{v_1^+}$, $z_2^+ = \overline{v_2^+} - \underline{v_2^+}$.

et

$$\begin{cases} 3e_1^- + 0.5e_2^- = & 32 \\ -2e_1^- - 3e_2^- = & -32 \end{cases}$$

où $e_1^- = \overline{v_1^-} + \underline{v_1^-}$, $e_2^- = \overline{v_2^-} + \underline{v_2^-}$.

On trouve $z_1^+ = 1.27 - 1.27\alpha$, $z_2^+ = 0.5 - 0.5\alpha$, $e_1^+ = 10$ *et* $e_2^+ = 4$, *et* $z_1^- = 1.875\alpha$, $z_2^- = 1.875\alpha$, $e_1^- = 10$ *et* $e_2^- = 4$.

Alors on trouve :

$$\begin{aligned} \underline{v_1^+} &= 4.365 + 0.635\alpha \\ \overline{v_1^+} &= 5.635 - 0.635\alpha \\ \underline{v_1^-} &= 5 - 0.9375\alpha \\ \overline{v_1^-} &= 5 + 0.9375\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{v_2^+} &= 1.75 + 0.25\alpha \\ \overline{v_2^+} &= 2.25 - 0.25\alpha \\ \underline{v_2^-} &= 2 - 0.9375\alpha \\ \overline{v_2^-} &= 2 + 0.9375\alpha. \end{aligned}$$

Alors, on a la solution floue intuitionistique :

$$\begin{cases} \tilde{v_1} = & (4.365 + 0.635\alpha; 5.635 - 0.635\alpha; 5 - 0.9375\alpha; 5 + 0.9375\alpha) \\ \tilde{v_2} = & (1.75 + 0.25\alpha; 2.25 - 0.25\alpha; 2 - 0.9375\alpha; 2 + 0.9375\alpha). \end{cases}$$

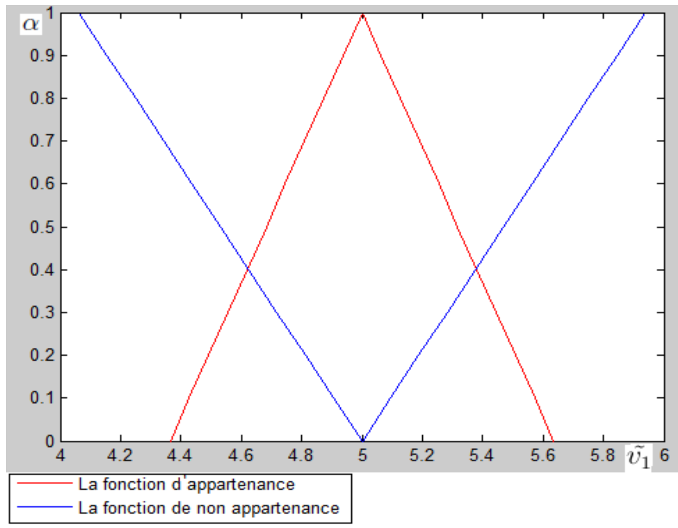

FIGURE 4.4 – Tension $\tilde{v_1}$

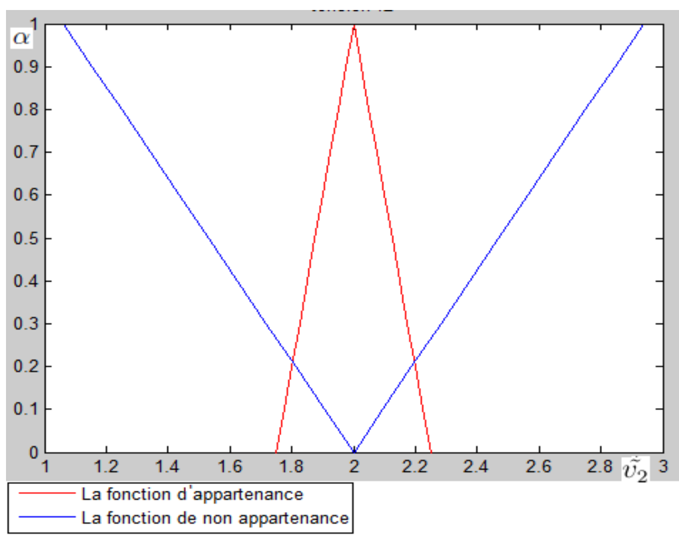

FIGURE 4.5 – Tension $\tilde{v_2}$

Exemple 4.2.2. *Considérons le système linéaire flou intuitionistique* 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha; 1-1.75\alpha; 1+1.75\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+2\alpha; 8-2\alpha; 6-3\alpha; 6+3\alpha). \end{cases}$$

Alors, on a

$$\underline{x_1^+} - \overline{x_2^+} = \alpha$$
$$\overline{x_1^+} - \underline{x_2^+} = 2-\alpha$$
$$\underline{x_1^+} + 3\underline{x_2^+} = 4+2\alpha$$
$$\overline{x_1^+} + 3\overline{x_2^+} = 8-2\alpha$$

et

$$\underline{x_1^-} - \overline{x_2^-} = 1-1.75\alpha$$
$$\overline{x_1^-} - \underline{x_2^-} = 1+1.75\alpha$$
$$\underline{x_1^-} + 3\underline{x_2^-} = 6-3\alpha$$
$$\overline{x_1^-} + 3\overline{x_2^-} = 6+3\alpha.$$

Donc, on obtient 4 systèmes classiques :

$$\begin{cases} z_1^+ + z_2^+ = & 2-2\alpha \\ z_1^+ + 3z_2^+ = & 4-4\alpha \end{cases}$$

où $z_1^+ = \overline{x_1^+} - \underline{x_1^+}$, $z_2^+ = \overline{x_2^+} - \underline{x_2^+}$,
et

$$\begin{cases} e_1^+ - e_2^+ = & 2 \\ e_1^+ + 3e_2^+ = & 12 \end{cases}$$

où $e_1^+ = \overline{x_1^+} + \underline{x_1^+}$, $e_2^+ = \overline{x_2^+} + \underline{x_2^+}$.

$$\begin{cases} z_1^- + z_2^- = & 3.5\alpha \\ z_1^- + 3z_2^- = & 6\alpha \end{cases}$$

où $z_1^+ = \overline{x_1^+} - \underline{x_1^+}$, $z_2^+ = \overline{x_2^+} - \underline{x_2^+}$,

et

$$\begin{cases} e_1^- - e_2^- = & 2 \\ e_1^- + 3e_2^- = & 12 \end{cases}$$

où $e_1^- = \overline{x_1^-} + \underline{x_1^-}$, $e_2^- = \overline{x_2^-} + \underline{x_2^-}$.

En résolvant les 4 systèmes, nous avons $z_1^+ = 1 - \alpha$, $z_2^+ = 1 - \alpha$, $e_1^+ = 4.5$ et $e_2^+ = 2.5$, et $z_1^- = 2.25\alpha$, $z_2^- = 1.25\alpha$, $e_1^- = 4.5$ et $e_2^- = 2.5$

Alors on trouve

$$\begin{aligned} \underline{x_1^+} &= 1.75 + 0.5\alpha \\ \overline{x_1^+} &= 2.75 - 0.5\alpha \\ \underline{x_1^-} &= 2.25 - 1.125\alpha \\ \overline{x_1^-} &= 2.25 + 1.125\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{x_2^+} &= 0.75 + 0.5\alpha \\ \overline{x_2^+} &= 1.75 - 0.5\alpha \\ \underline{x_2^-} &= 1.25 - 0.625\alpha \\ \overline{x_2^-} &= 1.25 + 0.625\alpha. \end{aligned}$$

Alors, on a la solution floue intuitionistique :

$$\begin{cases} x_1 = & (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25) \\ x_2 = & (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25). \end{cases}$$

4.3 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$ (Méthode 2)

4.3.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$

Considérons le système linéaire flou intuitionistique (4.1).

Théorème 4.3.1. *[21] Un vecteur flou intuitionistique* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ *donné par* $x_j = (\underline{x_j^+}(\alpha), \overline{x_j^+}(\alpha), \underline{x_j^-}(\beta), \overline{x_j^-}(\beta))$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha,\ \beta \leq 1$, $\alpha + \beta \leq 1$, *est appelé solution du système linéaire flou intuitionistique* (4.1) *Si :*

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^+} = \underline{y_i^+}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^+} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^+} = \overline{y_i^+}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j^-} = \underline{y_i^-}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^-} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j^-} = \overline{y_i^-}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Selon [21] pour résoudre le Système linéaire flou intuitionistique (4.1), il faut résoudre deux systèmes linéaires $2n \times 2n$ classiques où les colonnes de droite sont les vecteurs $(\underline{y_1^+}, ..., \underline{y_n^+}, -\overline{y_1^+}, ..., -\overline{y_n^+})^t$ et $(\underline{y_1^-}, ..., \underline{y_n^-}, -\overline{y_1^-}, ..., -\overline{y_n^-})^t$.

Laissez-nous maintenant réorganiser le système linéaire de sorte que $\underline{x_j^+}$, $(-\overline{x_j^+})$, $\underline{x_j^-}$ et $(-\overline{x_j^-})$ sont inconnus.

On obtient le premier système linéaire classique

$$S_{1,1}\underline{x_1^+} + S_{1,2}\underline{x_2^+} + ... + S_{1,n}\underline{x_n^+} + S_{1,n+1}(-\overline{x_1^+}) + S_{1,n+2}(-\overline{x_2^+}) + ... + S_{1,2n}(-\overline{x_n^+}) = \underline{y_1^+} \quad (4.11)$$

$\vdots$

$$S_{n,1}\underline{x_1^+} + S_{n,2}\underline{x_2^+} + ... + S_{n,n}\underline{x_n^+} + S_{n,n+1}(-\overline{x_1^+}) + S_{n,n+2}(-\overline{x_2^+}) + ... + S_{n,2n}(-\overline{x_n^+}) = \underline{y_n^+} \quad (4.12)$$

$$S_{n+1,1}\underline{x_1^+} + S_{n+1,2}\underline{x_2^+} + ... + S_{n+1,n}\underline{x_n^+} + S_{n+1,n+1}(-\overline{x_1^+}) + S_{n+1,n+2}(-\overline{x_2^+}) + ... + S_{n+1,2n}(-\overline{x_n^+}) = \underline{y_{n+1}^+} \quad (4.13)$$

$\vdots$

$$S_{2n,1}\underline{x_1^+} + S_{2n,2}\underline{x_2^+} + ... + S_{2n,n}\underline{x_n^+} + S_{2n,n+1}(-\overline{x_1^+}) + S_{2n,n+2}(-\overline{x_2^+}) + ... + S_{2n,2n}(-\overline{x_n^+}) = \underline{y_{2n}^+} \quad (4.14)$$

où S_{ij} sont déterminés comme suit :

si $a_{ij} \geq 0 : S_{ij} = a_{ij}$, $S_{i+n,j+n} = a_{ij}$, $S_{i,j+n} = 0$, $S_{i+n,j} = 0$,

si $a_{ij} < 0 : S_{ij} = 0$, $S_{i+n,j+n} = 0$, $S_{i,j+n} = -a_{ij}$, $S_{i+n,j} = -a_{ij}$.

En utilisant la notation matricielle, on obtient $SX^{+} = Y^{+}$
où $S = (S_{ij})$, $1 \leq i \leq 2n$ et $1 \leq j \leq 2n$, $X^{+} = (\underline{x_1^+}, ..., \underline{x_n^+}, -\overline{x_1^+}, ..., -\overline{x_n^+})^t$ et $Y^{+} = (\underline{y_1^+}, ..., \underline{y_n^+}, -\overline{y_1^+}, ..., -\overline{y_n^+})^t$.
Et on a $S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ où la matrice B contient les entrées positives de A. Alors que la matrice C contient les valeurs absolues des entrées négatives de A, donc $A = B - C$.
De la même manière, nous obtenons le deuxième système linéaire tel que $S'X^{-} = Y^{-}$
où $S' = (S'_{ij})$, $1 \leq i \leq 2n$ et $1 \leq j \leq 2n$, $X^{-} = (\underline{x_1^-}, ..., \underline{x_n^-}, -\overline{x_1^-}, ..., -\overline{x_n^-})^t$ et $Y^{-} = (\underline{y_1^-}, ..., \underline{y_n^-}, -\overline{y_1^-}, ..., -\overline{y_n^-})^t$.
Et on a $S' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ C' & B' \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3.2. *[21] La matrice S est une matrice inversible si et seulement si les matrices $B - C$ et $B + C$ sont toutes les deux inversibles.*
De même la matrice S' est une matrice inversible si et seulement si les matrices $B' - C'$ et $B' + C'$ sont toutes les deux inversibles.

4.3.2 Conditions d'existence et d'unicité d'une solution floue intuitionistique

Définition 4.3.1. *[21] Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ donné par*
$x_j = (\underline{x_j^+}(\alpha), \overline{x_j^+}(\alpha), \underline{x_j^-}(\beta), \overline{x_j^-}(\beta))$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta \leq 1$, *est solution de* (4.1)*, et si pour chaque j, $1 \leq j \leq n$ on a $\underline{x_j^+} \leq \overline{x_j^+}$ et $\underline{x_j^-} \leq \overline{x_j^-}$, alors la solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ est dite une solution forte du système* (4.1).

Définition 4.3.2. *[21] Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ donné par*
$x_j = (\underline{x_j^+}(\alpha), \overline{x_j^+}(\alpha), \underline{x_j^-}(\beta), \overline{x_j^-}(\beta))$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta \leq 1$, *est solution de* (4.1)*, et si pour certain j, $1 \leq j \leq n$ on a $\underline{x_j^+} > \overline{x_j^+}$ ou $\underline{x_j^-} > \overline{x_j^-}$, alors la solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ est dite une solution faible du système* (4.1).

Soient $\underline{y^+} = (\underline{y_1}(\alpha), \underline{y_2}(\alpha), ..., \underline{y_n}(\alpha))$, $\overline{y^+} = (\overline{y_1}(\alpha), \overline{y_2}(\alpha), ..., \overline{y_n}(\alpha))$, $\underline{y^-} = (\underline{y_1}(\beta), \underline{y_2}(\beta), ..., \underline{y_n}(\beta))$ et $\overline{y^-} = (\overline{y_1}(\beta), \overline{y_2}(\beta), ..., \overline{y_n}(\beta))$.

Théorème 4.3.3. *[21] Soit S et S' deux matrice inversibles. Le système* (4.1) *a une solution forte si et seulement si $(B + C)^{-1}(\underline{y^+} - \overline{y^+}) \leq 0$ et $(B' + C')^{-1}(\underline{y^-} - \overline{y^-}) \leq 0$.*

4.3.3 Exemples

Exemple 4.3.1. *[21] Considérons le système linéaire flou intuitionistique* 2×2 *:*

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = & ((25;35;50;67),(20;35;50;73)) \\ 7x_1 + 3x_2 = & ((27;37;48;65),(22;37;48;72)). \end{cases}$$

Alors, le premier système classique est

$$\begin{aligned} 4\underline{x_1^+} + 5\underline{x_2^+} &= 25 + 10\alpha \\ 7\underline{x_1^+} + 3\underline{x_2^+} &= 27 + 10\alpha \\ 4(-\overline{x_1^+}) + 5(-\overline{x_2^+}) &= -(67 - 17\alpha) \\ 7(-\overline{x_1^+}) + 3(-\overline{x_2^+}) &= -(65 - 17\alpha). \end{aligned}$$

La matrice associée S est

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et on obtient $X^+ = S^{-1}Y^+ = \begin{pmatrix} \frac{-3}{23} & \frac{5}{23} & 0 & 0 \\ \frac{-7}{23} & \frac{4}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 + 17\alpha \\ 27 + 10\alpha \\ 17\alpha - 67 \\ 17\alpha - 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60+20\alpha}{23} \\ \frac{-67-30\alpha}{23} \\ \frac{-124+34\alpha}{23} \\ \frac{209-51\alpha}{23} \end{pmatrix}.$

Et le deuxième système classique est

$$\begin{aligned} 4\underline{x_1^-} + 5\underline{x_2^-} &= 20 + 15(1 - \beta) \\ 7\underline{x_1^-} + 3\underline{x_2^-} &= 22 + 15(1 - \beta) \\ 4(-\overline{x_1^-}) + 5(-\overline{x_2^-}) &= -(73 + 23(1 - \beta)) \\ 7(-\overline{x_1^-}) + 3(-\overline{x_2^-}) &= -(72 + 24(1 - \beta)) \end{aligned}$$

La matrice associée S' est

$$S' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et on obtient $X^- = S'^{-1}Y^- = \begin{pmatrix} \frac{-3}{23} & \frac{5}{23} & 0 & 0 \\ \frac{-7}{23} & \frac{4}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20+15(1-\beta) \\ 22+15(1-\beta) \\ -(73+23(1-\beta)) \\ -(72+24(1-\beta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50+30(1-\beta)}{23} \\ \frac{-52-45(1-\beta)}{23} \\ \frac{-141+51(1-\beta)}{23} \\ \frac{223-65(1-\beta)}{23} \end{pmatrix}.$

On trouve la solution $x_1 = ((60; 80; 90; 124), (50; 80; 90; 141))$ *qui est une solution forte et* $x_2 = ((-209; -158; -97; -67), (-223; -158; -97; -52))$ *qui est une solution faible.*

Exemple 4.3.2. *Dans cette exemple on résout le système donné en utulisnt la méthode, présentée dans cette section, adoptée à la définition* (4.1.2).

Considérons le système linéaire flou intuitionistique 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha; 1-1.75\alpha; 1+1.75\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+2\alpha; 8-2\alpha; 6-3\alpha; 6+3\alpha). \end{cases}$$

Alors le premier système classique est

$$\underline{x_1^+} - \overline{x_2^+} = \alpha$$
$$\overline{x_1^+} - \underline{x_2^+} = 2-\alpha$$
$$\underline{x_1^+} + 3\underline{x_2^+} = 4+2\alpha$$
$$\overline{x_1^+} + 3\overline{x_2^+} = 8-2\alpha$$

La matrice associée S est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et on obtient $X^{+} = S^{-1}Y^{+} = \begin{pmatrix} 1.125 & -0.125 & 0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 0.375 & -0.125 & 0.125 \\ 0.375 & -0.375 & 1.125 & -0.125 \\ -0.125 & 0.125 & -0.375 & 0.375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 4+2\alpha \\ \alpha-2 \\ 2\alpha-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}+\frac{7}{4} \\ \frac{r}{2}+\frac{3}{4} \\ \frac{r}{2}-\frac{11}{4} \\ \frac{r}{2}-\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$

ET le deuxième système classique est

$$\begin{aligned} \underline{x_1^-} - \overline{x_2^-} &= 1 - 1.75\alpha \\ \overline{x_1^-} - \underline{x_2^-} &= 1 + 1.75\alpha \\ \underline{x_1^-} + 3\underline{x_2^-} &= 6 - 3\alpha \\ \overline{x_1^-} + 3\overline{x_2^-} &= 6 + 3\alpha. \end{aligned}$$

On obtient $X^{-} = S^{-1}Y^{-} = \begin{pmatrix} 1.125 & -0.125 & 0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 0.375 & -0.125 & 0.125 \\ 0.375 & -0.375 & 1.125 & -0.125 \\ -0.125 & 0.125 & -0.375 & 0.375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-1.75\alpha \\ 6-3\alpha \\ -1-1.75\alpha \\ -6-3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9\alpha}{8}+\frac{9}{4} \\ \frac{-5\alpha}{8}+\frac{5}{4} \\ \frac{-9\alpha}{8}-\frac{9}{4} \\ \frac{-5\alpha}{8}-\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \underline{x_1^+} &= 1.75 + 0.5\alpha \\ \overline{x_1^+} &= 2.75 - 0.5\alpha \\ \underline{x_1^-} &= 2.25 - 1.125\alpha \\ \overline{x_1^-} &= 2.25 + 1.125\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{x_2^+} &= 0.75 + 0.5\alpha \\ \overline{x_2^+} &= 1.75 - 0.5\alpha \\ \underline{x_2^-} &= 1.25 - 0.625\alpha \\ \overline{x_2^-} &= 1.25 + 0.625\alpha. \end{aligned}$$

Alors, on a la solution floue intuitionistique :

$$\begin{cases} x_1 = & (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25) \\ x_2 = & (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25). \end{cases}$$

4.4 Système linéaire flou intuitionistique $n \times n$(méthode 3)

4.4.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$

Afin de résoudre le système linéaire flou intuitionistique (4.1), laissez-nous maintenant le réorganiser : la forme paramétrique de x_j est $x_j = (\underline{x_j^+}, \overline{x_j^+}, \underline{x_j^-}, \overline{x_j^-})$, $1 \leq j \leq n$, et soit $a_{ij} = b_{ij} - c_{ij}$ tel que b_{ij} et c_{ij} sont positifs et $b_{ij}.c_{ij} = 0$.
Si on considère (4.1) en forme paramétrique. Alors, pour $i = 1, 2, ..., n$, on a

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^+}, \overline{x_1^+}, \underline{x_1^-}, \overline{x_1^-}) + ... + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^+}, \overline{x_n^+}, \underline{x_n^-}, \overline{x_n^-}) = (\underline{y_i^+}, \overline{y_i^+}, \underline{y_i^-}, \overline{y_i^-}) \tag{4.15}$$

donc

$$b_{i1}\underline{x_1^+} - c_{i1}\overline{x_1^+} + b_{i2}\underline{x_1^+} - c_{i2}\overline{x_2^+} ... + b_{in}\underline{x_n^+} - c_{in}\overline{x_n^+} = \underline{y_i^+} \tag{4.16}$$

$$b_{i1}\overline{x_1^+} - c_{i1}\underline{x_1^+} + b_{i2}\overline{x_2^+} - c_{i2}\underline{x_2^+} ... + b_{in}\overline{x_n^+} - c_{in}\underline{x_n^+} = \overline{y_i^+} \tag{4.17}$$

et

$$b_{i1}\underline{x_1^-} - c_{i1}\overline{x_1^-} + b_{i2}\underline{x_1^-} - c_{i2}\overline{x_2^-} ... + b_{in}\underline{x_n^-} - c_{in}\overline{x_n^-} = \underline{y_i^-} \tag{4.18}$$

$$b_{i1}\overline{x_1^-} - c_{i1}\underline{x_1^-} + b_{i2}\overline{x_2^-} - c_{i2}\underline{x_2^-} ... + b_{in}\overline{x_n^-} - c_{in}\underline{x_n^-} = \overline{y_i^-}. \tag{4.19}$$

Soient B la matrice qui contient les entrées positives de A et C la matrice qui contient les valeurs absolues des entrées négatives de A, donc $A = B - C$.
En utilisant la notation matricielle pour (4.1) on obtient $AX = Y$ ou $(B - C)X = Y$. En faisant la somme de (4.16) et (4.17), on trouve :

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^+} + \overline{x_1^+}) + ... + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^+} + \overline{x_n^+}) = (\underline{y_i^+} + \overline{y_i^+}), \tag{4.20}$$

et de même pour (4.18) et (4.19), on a

$$(b_{i1} - c_{i1})(\underline{x_1^-} + \overline{x_1^-}) + ... + (b_{in} - c_{in})(\underline{x_n^-} + \overline{x_n^-}) = (\underline{y_i^-} + \overline{y_i^-}). \tag{4.21}$$

Alors, on a

$$a_{i1}(\underline{x_1^+} + \overline{x_1^+}) + ... + a_{in}(\underline{x_n^+} + \overline{x_n^+}) = (\underline{y_i^+} + \overline{y_i^+}) \tag{4.22}$$

et

$$a_{i1}(\underline{x_1^-} + \overline{x_1^-}) + ... + a_{in}(\underline{x_n^-} + \overline{x_n^-}) = (\underline{y_i^-} + \overline{y_i^-}). \tag{4.23}$$

Pour résoudre (4.1), nous résolvons d'abord les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a_{11}(\underline{x_1^+}(\alpha)+\overline{x_1^+}(\alpha))+...+a_{1n}(\underline{x_n^+}(\alpha)+\overline{x_n^+}(\alpha))=(\underline{y_1^+}(\alpha)+\overline{y_1^+}(\alpha)) \\ a_{21}(\underline{x_1^+}(\alpha)+\overline{x_1^+}(\alpha))+...+a_{2n}(\underline{x_n^+}(\alpha)+\overline{x_n^+}(\alpha))=(\underline{y_2^+}(\alpha)+\overline{y_2^+}(\alpha)) \\ \vdots \\ a_{n1}(\underline{x_1^+}(\alpha)+\overline{x_1^+}(\alpha))+...+a_{nn}(\underline{x_n^+}(\alpha)+\overline{x_n^+}(\alpha))=(\underline{y_n^+}(\alpha)+\overline{y_n^+}(\alpha)) \end{cases} \tag{4.24}$$

et

$$\begin{cases} a_{11}(\underline{x_1^-}(\alpha)+\overline{x_1^-}(\alpha))+...+a_{1n}(\underline{x_n^-}(\alpha)+\overline{x_n^-}(\alpha))=(\underline{y_1^-}(\alpha)+\overline{y_1^-}(\alpha)) \\ a_{21}(\underline{x_1^+}(\alpha)+\overline{x_1^+}(\alpha))+...+a_{2n}(\underline{x_n^+}(\alpha)+\overline{x_n^+}(\alpha))=(\underline{y_2^+}(\alpha)+\overline{y_2^+}(\alpha)) \\ \vdots \\ a_{n1}(\underline{x_1^-}(\alpha)+\overline{x_1^-}(\alpha))+...+a_{nn}(\underline{x_n^-}(\alpha)+\overline{x_n^-}(\alpha))=(\underline{y_n^-}(\alpha)+\overline{y_n^-}(\alpha)). \end{cases} \tag{4.25}$$

Et supposons que la solution de 4.24 soit

$$d^+ = \begin{pmatrix} d_1^+ \\ d_2^+ \\ \vdots \\ d_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x_1^+}(\alpha)+\overline{x_1^+}(\alpha) \\ \underline{x_2^+}(\alpha)+\overline{x_2^+}(\alpha) \\ \vdots \\ \underline{x_n^+}(\alpha)+\overline{x_n^+}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Et supposons que la solution de 4.25 soit

$$d^- = \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_2^- \\ \vdots \\ d_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x_1^-}(\alpha)+\overline{x_1^-}(\alpha) \\ \underline{x_2^-}(\alpha)+\overline{x_2^-}(\alpha) \\ \vdots \\ \underline{x_n^-}(\alpha)+\overline{x_n^-}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On a

$$(B-C)(\underline{x^+}(\alpha),\overline{x^+}(\alpha))=(\underline{y^+}(\alpha),\overline{y^+}(\alpha))$$

$$(B-C)(\underline{x^-}(\alpha),\overline{x^-}(\alpha))=(\underline{y^-}(\alpha),\overline{y^-}(\alpha)).$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} B\underline{x^+}(\alpha) - C\overline{x^+}(\alpha) = \underline{y^+}(\alpha), \\ B\overline{x^+}(\alpha) - C\underline{x^+}(\alpha) = \overline{y^+}(\alpha), \\ B\underline{x^-}(\alpha) - C\overline{x^-}(\alpha) = \underline{y^-}(\alpha), \\ B\overline{x^-}(\alpha) - C\underline{x^-}(\alpha) = \overline{y^-}(\alpha). \end{cases}$$

Par la substitution de $\overline{x^+}(\alpha) = d^+ - \underline{x^+}(\alpha)$, $\underline{x^+}(\alpha) = d^+ - \overline{x^+}(\alpha)$, $\overline{x^-}(\alpha) = d^- - \underline{x^-}(\alpha)$, et $\underline{x^-}(\alpha) = d^- - \overline{x^-}(\alpha)$ dans les équations du système ci-dessus, respectivement, nous avons :

$$(B + C)\underline{x^+}(\alpha) = \underline{y^+}(\alpha) + Cd^+ \tag{4.26}$$

$$(B + C)\overline{x^+}(\alpha) = \overline{y^+}(\alpha) + Cd^+ \tag{4.27}$$

$$(B + C)\underline{x^-}(\alpha) = \underline{y^-}(\alpha) + Cd^- \tag{4.28}$$

et

$$(B + C)\overline{x^-}(\alpha) = \overline{y^-}(\alpha) + Cd^-. \tag{4.29}$$

Si la matrice $F = B + C$ est inversible, alors on a

$$\underline{x^+}(\alpha) = F^{-1}(\underline{y^+}(\alpha) + Cd^+),$$

$$\overline{x^+}(\alpha) = F^{-1}(\overline{y^+}(\alpha) + Cd^+).$$

$$\underline{x^-}(\alpha) = F^{-1}(\underline{y^-}(\alpha) + Cd^-),$$

$$\overline{x^-}(\alpha) = F^{-1}(\overline{y^-}(\alpha) + Cd^-).$$

Théorème 4.4.1. *Supposons que F_n, E_n et O_n sont respectivement les nombres de multiplications nécessaires au calcul de*
$X^+ = (\underline{x_1^+}, ..., \underline{x_n^+}, \overline{x_1^+}, ..., \overline{x_n^+})^t$ *et* $X^- = (\underline{x_1^-}, ..., \underline{x_n^-}, \overline{x_1^-}, ..., \overline{x_n^-})^t$ *proposés par la méthode 1, la méthode 2 et la méthode 3.*

Alors, on a $F_n \leq O_n \leq E_n$.

Démonstration. Supposons que F_n, E_n et O_n sont respectivement les nombres de multiplications nécessaires au calcul de X^+ et X^- par la méthode 1, la méthode 2 et la méthode 3.

Supposons maintenant que M est une matrice $n \times n$ et notons $p_n(M)$ le nombre des multiplications nécessaires pour calculer M^{-1}.

Calculons F_n.

Pour calculer X^+ à partir des systèmes (4.6) et (4.7), les nombres des multiplications nécessaires sont $p_n((B-C)) + n^2$ et $p_n((B+C)) + n^2$.

Alors, les nombres des multiplications nécessaires pour calculer X^+ et X^- respectivement sont $2p_n(A) + 2n^2$ et $2p_n(A) + 2n^2$.

Alors, on a $F_n = 4p_n(A) + 4n^2$.

Calculons E_n.

Selon [21], on a $S^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix}$

où $D = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}]$ et $E = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}]$. Alors, pour déterminer S^{-1}, il faut calculer $(B+C)^{-1}$ et $(B-C)^{-1}$.

On a $p_{2n}(S) = p_n((B+C)) + p_n((B-C)) = 2p_n(A)$.

Alors, les nombres des multiplications nécessaires pour calculer X^+ et X^- respectivement sont $2p_n(A) + 4n^2$ et $2p_n(A) + 4n^2$.

Alors, on a $E_n = 4p_n(A) + 8n^2$.

Calculons O_n.

Pour calculer d^+ à partir du système (4.24) et $\underline{x^+}$ à partir de l'eq. (4.26), respectivement les nombres des multiplications nécessaires sont $p_n((B-C)) + n^2$ et $p_n((B+C)) + 2n^2$.

Alors, les nombres des multiplications nécessaires pour calculer X^+ et X^- respectivement sont $2p_n(A) + 3n^2$ et $2p_n(A) + 3n^2$.

Alors, on a $O_n = 4p_n(A) + 6n^2$.

D'où, on a $F_n \leq O_n \leq E_n$

□

Exemples

Exemple 4.4.1. *Considérons le système linéaire flou intuitionistique* 2×2 *:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & (2+2\alpha; 8-4\alpha; 4-3\alpha; 4+5\alpha) \\ 5x_1 - x_2 = & (4\alpha; 6-2\alpha; 4-5\alpha; 4+3\alpha). \end{cases}$$

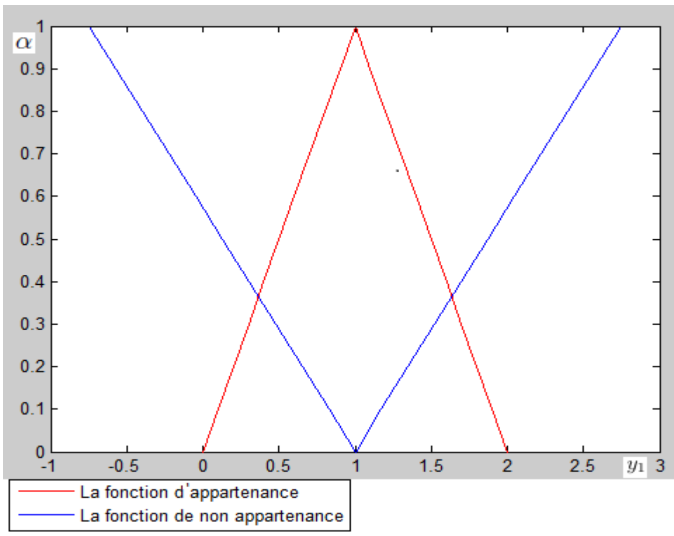

FIGURE 4.6 – Le nombre $y_1 = (2+2\alpha; 8-4\alpha; 4-3\alpha; 4+5\alpha)$

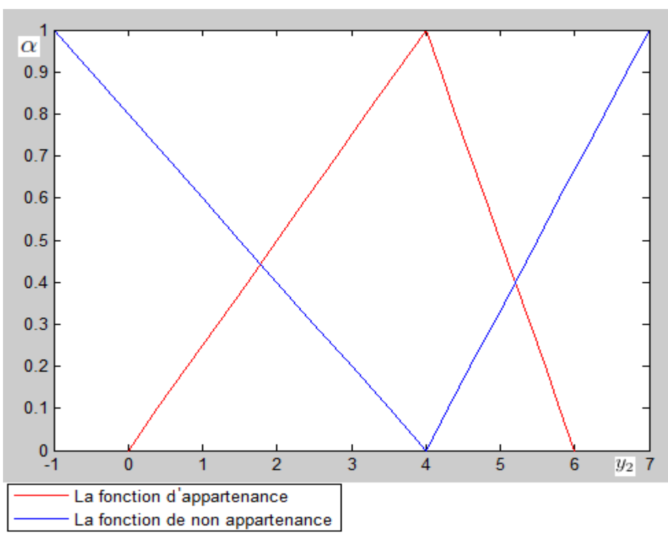

FIGURE 4.7 – Le nombre $y_2 = (4\alpha; 6-2\alpha; 4-5\alpha; 4+3\alpha)$

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On obtient $d^+ = \begin{pmatrix} 0.0588 & 0.1765 \\ 0.2941 & -0.01176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10-2\alpha \\ 6+2\alpha \end{pmatrix}$

donc, on a $d^+ = \begin{pmatrix} \frac{28}{17} + \frac{4\alpha}{17} \\ \frac{38}{17} - \frac{14\alpha}{17} \end{pmatrix}$

Alors, on obtient $\underline{X^+} = \begin{pmatrix} -0.0769 & 0.2308 \\ 0.3846 & -0.1538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2\alpha \\ \frac{54\alpha}{17} + \frac{38}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{221} + \frac{128\alpha}{221} \\ \frac{94}{221} + \frac{62\alpha}{221} \end{pmatrix}$

et $\overline{X^+} = \begin{pmatrix} \frac{284}{221} - \frac{76\alpha}{221} \\ \frac{400}{221} - \frac{244\alpha}{221} \end{pmatrix}.$

On a $d^- = \begin{pmatrix} 0.0588 & 0.1765 \\ 0.2941 & -0.01176 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8+2\alpha \\ 8-2\alpha \end{pmatrix}$

donc $d^- = \begin{pmatrix} \frac{32}{17} - \frac{4\alpha}{17} \\ \frac{24}{17} + \frac{14\alpha}{17} \end{pmatrix}.$

On obtient $\underline{X^-} = \begin{pmatrix} -0.0769 & 0.2308 \\ 0.3846 & -0.1538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-3\alpha \\ \frac{92}{17} - \frac{71\alpha}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{17} - \frac{162\alpha}{221} \\ \frac{12}{17} - \frac{113\alpha}{221} \end{pmatrix}$

et $\overline{X^-} = \begin{pmatrix} \frac{16}{17} + \frac{110\alpha}{221} \\ \frac{12}{17} + \frac{295\alpha}{221} \end{pmatrix}.$

Alors, on trouve la solution floue intuitionistique :

$$\begin{cases} x_1 = & \left(\frac{80}{221} + \frac{128\alpha}{221}; \frac{284}{221} - \frac{76\alpha}{221}; \frac{16}{17} - \frac{162\alpha}{221}; \frac{16}{17} + \frac{110\alpha}{221}\right) \\ x_2 = & \left(\frac{94}{221} + \frac{62\alpha}{221}; \frac{400}{221} - \frac{244\alpha}{221}; \frac{12}{17} - \frac{113\alpha}{221}; \frac{12}{17} + \frac{295\alpha}{221}\right). \end{cases}$$

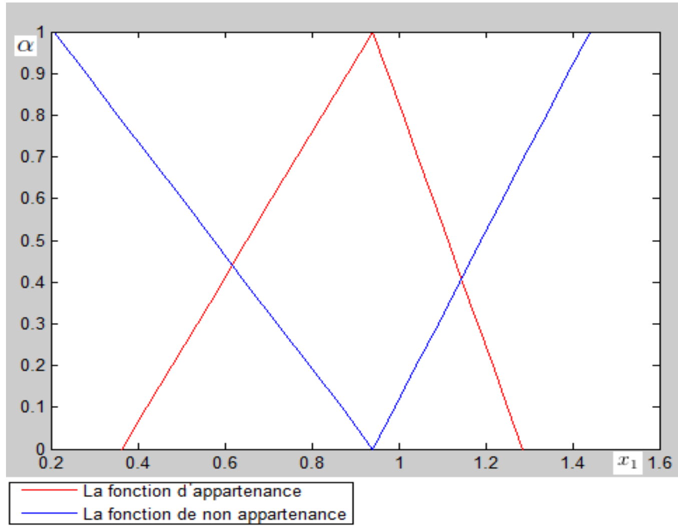

FIGURE 4.8 – Le nombre $x_1 = (\frac{80}{221} + \frac{128\alpha}{221}; \frac{284}{221} - \frac{76\alpha}{221}; \frac{16}{17} - \frac{162\alpha}{221}; \frac{16}{17} + \frac{110\alpha}{221})$

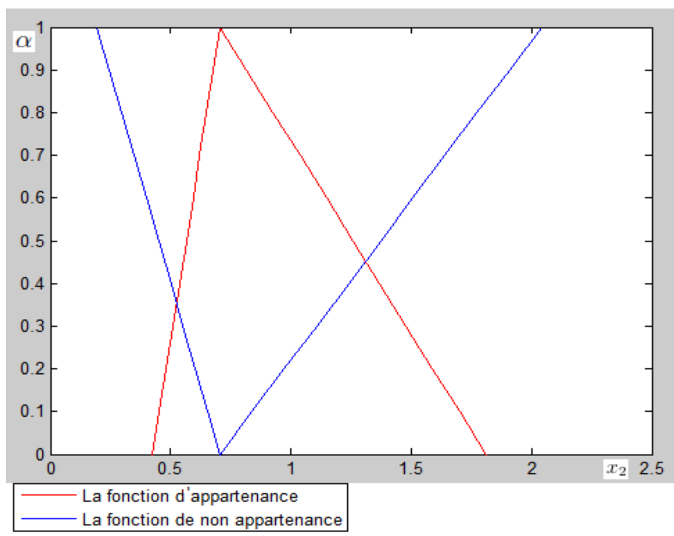

FIGURE 4.9 – Le nombre $x_2 = (\frac{94}{221} + \frac{62\alpha}{221}; \frac{400}{221} - \frac{244\alpha}{221}; \frac{12}{17} - \frac{113\alpha}{221}; \frac{12}{17} + \frac{295\alpha}{221})$

Exemple 4.4.2. *Considérons le système linéaire flou intuitionistique* 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha; 1-1.75\alpha; 1+1.75\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+2\alpha; 8-2\alpha; 6-3\alpha; 6+3\alpha). \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

On obtient $d^+ = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

donc, on a $d^+ = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

Alors, on obtient $\underline{X^+} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + 2.5 \\ 4 + 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + \frac{7}{4} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

et $\overline{X^+} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{7}{4} - \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$

On a $d^- = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

donc $d^- = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

On obtient

$$\underline{X^-} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.5 - 1.75\alpha \\ 4 + 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{9\alpha}{8} \\ \frac{5}{4} - \frac{5\alpha}{8} \end{pmatrix}$$

et $\overline{X^-} = \begin{pmatrix} \frac{9\alpha}{8} + \frac{9}{4} \\ \frac{5\alpha}{8} + \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

Alors, on trouve la solution floue intuitionistique :

$$\begin{cases} x_1 = & (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25) \\ x_2 = & (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25) \end{cases}$$

4.4.2 Système linéaire flou intuitionistique avec des nombres flous intuitionistiques triangulaires symétriques

Considérons le problème (4.1) dans un cas particulier où les données de second membre y_i sont des nombres flous intuitionistiques symétriques triangulaires. Pour résoudre (4.1), nous résolvons d'abord les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a_{11}(\underline{x_1^+}(0)+\overline{x_1^+}(0))+...+a_{1n}(\underline{x_n^+}(0)+\overline{x_n^+}(0))=(\underline{y_1^+}(0)+\overline{y_1^+}(0)) \\ a_{21}(\underline{x_1^+}(0)+\overline{x_1^+}(0))+...+a_{2n}(\underline{x_n^+}(0)+\overline{x_n^+}(0))=(\underline{y_2^+}(0)+\overline{y_2^+}(0))) \\ \vdots \\ a_{n1}(\underline{x_1^+}(0)+\overline{x_1^+}(0))+...+a_{nn}(\underline{x_n^+}(0)+\overline{x_n^+}(0))=(\underline{y_n^+}(0)+\overline{y_n^+}(0)) \end{cases} \tag{4.30}$$

et

$$\begin{cases} a_{11}(\underline{x_1^-}(1)+\overline{x_1^-}(1))+...+a_{1n}(\underline{x_n^-}(1)+\overline{x_n^-}(1))=(\underline{y_1^-}(1)+\overline{y_1^-}(1)) \\ a_{21}(\underline{x_1^-}(1)+\overline{x_1^-}(1))+...+a_{2n}(\underline{x_n^-}(1)+\overline{x_n^-}(1))=(\underline{y_2^-}(1)+\overline{y_2^-}(1)) \\ \vdots \\ a_{n1}(\underline{x_1^-}(1)+\overline{x_1^-}(1))+...+a_{nn}(\underline{x_n^-}(1)+\overline{x_n^-}(1))=(\underline{y_n^-}(1)+\overline{y_n^-}(1)). \end{cases} \tag{4.31}$$

Et supposons que la solution de (4.30) soit

$$d^+ = \begin{pmatrix} d_1^+ \\ d_2^+ \\ \vdots \\ d_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x_1^+}(0)+\overline{x_1^+}(0) \\ \underline{x_2^+}(0)+\overline{x_2^+}(0) \\ \vdots \\ \underline{x_n^+}(0)+\overline{x_n^+}(0) \end{pmatrix}$$

et la solution de (4.31) soit

$$d^- = \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_2^- \\ \vdots \\ d_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x_1^-}(1)+\overline{x_1^-}(1) \\ \underline{x_2^-}(1)+\overline{x_2^-}(1) \\ \vdots \\ \underline{x_n^-}(1)+\overline{x_n^-}(1) \end{pmatrix}.$$

On a

$$(B-C)(\underline{x^+}(0),\overline{x^+}(0)) = (\underline{y^+}(0),\overline{y^+}(0))$$

$$(B-C)(\underline{x^-}(1),\overline{x^-}(1)) = (\underline{y^-}(1),\overline{y^-}(1)).$$

Et on écrit :

$$\begin{cases} B\underline{x^+}(0) - C\overline{x^+}(0) = \underline{y^+}(0), \\ B\overline{x^+}(0) - C\underline{x^+}(0) = \overline{y^+}(0), \\ B\underline{x^-}(1) - C\overline{x^-}(1) = \underline{y^-}(1), \\ B\overline{x^-}(1) - C\underline{x^-}(1) = \overline{y^-}(1). \end{cases}$$

Par la substitution de $\overline{x^+}(0) = d^+ - \underline{x^+}(0)$, $\underline{x^+}(0) = d^+ - \overline{x^+}(0)$, $\overline{x^-}(1) = d^- - \underline{x^-}(1)$, et $\underline{x^-}(1) = d^- - \overline{x^-}(1)$ dans les équations du système ci-dessus, respectivement, nous avons :

$$(B + C)\underline{x^+}(0) = \underline{y^+}(0) + Cd^+$$

$$(B + C)\overline{x^+}(0) = \overline{y^+}(0) + Cd^+$$

$$(B + C)\underline{x^-}(1) = \underline{y^-}(1) + Cd^-$$

et

$$(B + C)\overline{x^-}(1) = \overline{y^-}(1) + Cd^-.$$

Si la matrice $F = B + C$ est inversible, alors on a

$$\underline{x^+}(0) = F^{-1}(\underline{y^+}(0) + Cd^+),$$

$$\overline{x^+}(0) = F^{-1}(\overline{y^+}(0) + Cd^+).$$

$$\underline{x^-}(1) = F^{-1}(\underline{y^-}(1) + Cd^-),$$

$$\overline{x^-}(1) = F^{-1}(\overline{y^-}(1) + Cd^-).$$

Exemple

Considérons le système linéaire flou intuitionistique 2×2 symétrique :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2 - \alpha; 1 - 1.75\alpha; 1 + 1.75\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4 + 2\alpha; 8 - 2\alpha; 6 - 3\alpha; 6 + 3\alpha). \end{cases}$$

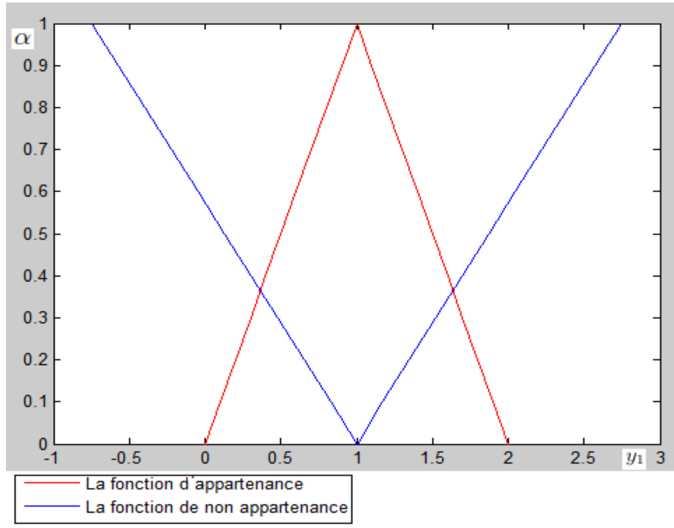

FIGURE 4.10 – Le nombre $y_1 = (\alpha; 2-\alpha; 1-1.75\alpha; 1+1.75\alpha)$

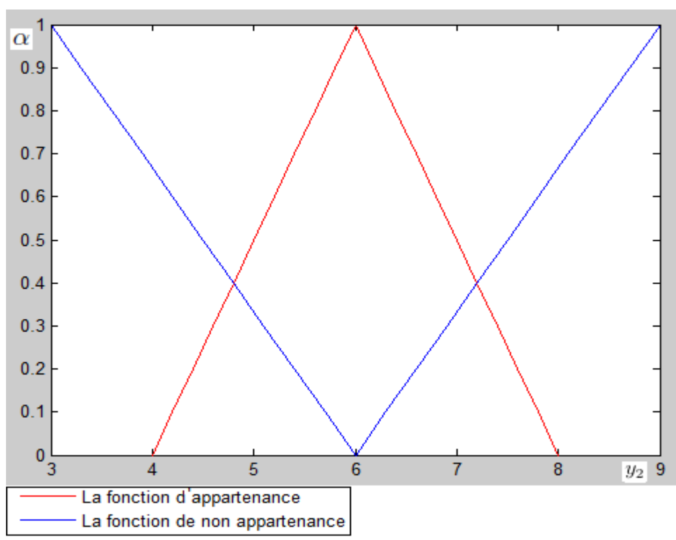

FIGURE 4.11 – Le nombre $y_2 = (4+2\alpha; 8-2\alpha; 6-3\alpha; 6+3\alpha)$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient $d^+(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Donc $d^+(0) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

Alors, on a $\underline{X^+}(0) = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}$

et $\overline{X^+}(0) = \begin{pmatrix} 2.75 \\ 1.75 \end{pmatrix}$.

On a $d^-(1) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

alors $d^-(1) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

On obtient $\underline{X^-}(1) = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.75 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0.625 \end{pmatrix}$

et $\overline{X^-}(1) = \begin{pmatrix} 3.375 \\ 1.875 \end{pmatrix}$.

Alors, on trouve la solution floue intuitionistique symétrique :

$$\begin{cases} x_1 = & (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25) \\ x_2 = & (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25) \end{cases}$$

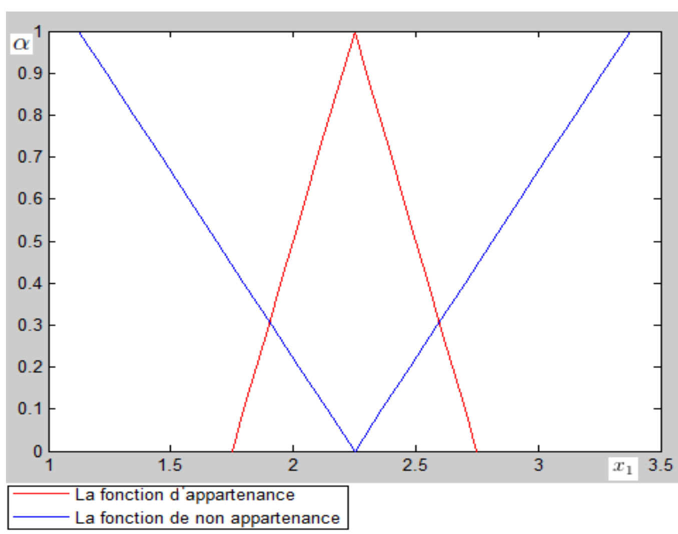

FIGURE 4.12 – Le nombre $x_1 = (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25)$

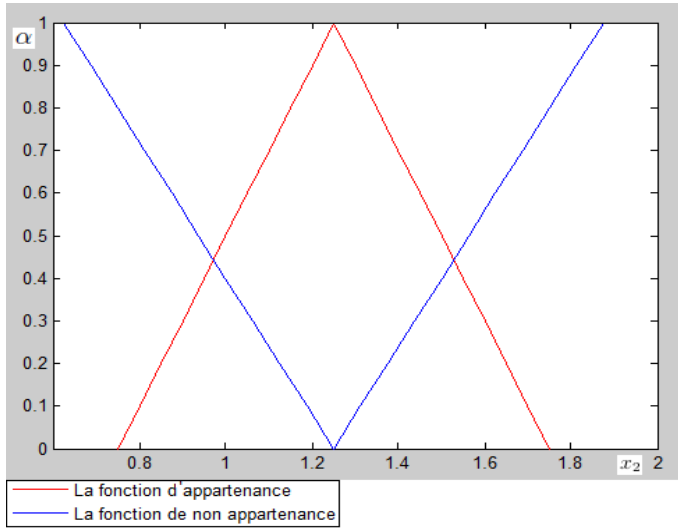

FIGURE 4.13 – Le nombre $x_2 = (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25)$

4.5 La méthode de décomposition LU pour les systèmes linéaires flous intuitionistiques

4.5.1 Résolution du système linéaire flou intuitionistique $n \times n$

Dans cette section, nous appliquons la méthode de décomposition LU pour résoudre le système linéaire flou intuitionistique 4.1.

De (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) on obtient deux systèmes linéaires classiques $2n \times 2n$ $SX^+ = Y^+$ et $SX^- = Y^-$ avec :

$X^+ = (\underline{x_1^+}, ..., \underline{x_n^+}, \overline{x_1^+}, ..., \overline{x_n^+})^t$, $X^- = (\underline{x_1^-}, ..., \underline{x_n^-}, \overline{x_1^-}, ..., \overline{x_n^-})^t$, $Y^+ = (\underline{y_1^+}, ..., \underline{y_n^+}, \overline{y_1^+}, ..., \overline{y_n^+})^t$, $Y^- = (\underline{y_1^-}, ..., \underline{y_n^-}, \overline{y_1^-}, ..., \overline{y_n^-})^t$ et $S = \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$ où M contient les entrées positives de A et N contient les entrées négatives de A.

Théorème 4.5.1. *[3] Soit A une matrice $n \times n$ avec tous les principaux mineurs non nuls. Alors A a une factorisation unique :*

$$A = LU$$

où L est la matrice triangulaire inférieure et U est la matrice triangulaire supérieure.

Pour décomposer la matrice S, il faut trouver les deux matrices L et U tel que $S = LU$, où
$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$
où L_{11} et L_{22} sont des matrices triangulaires inférieures, et U_{11} et U_{22} sont des matrices triangulaires supérieures.

Maintenant, supposons que $A = M + N$ ait une décomposition LU. Alors, Nous avons
$S = \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}.$

Alors, on a

$$M = L_{11}U_{11} \tag{4.32}$$

$$N = L_{11}U_{12} \Rightarrow U_{12} = L_{11}^{-1}C$$

$$N = L_{21}U_{11} \Rightarrow L_{21} = CU_{11}^{-1}$$

$$M = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}.$$

Et on écrit

$$M - NM^{-1}N = L_{22}U_{22}. \tag{4.33}$$

De 4.32 et 4.33, si M et $M - NM^{-1}N$ ont toutes les deux une décomposition LU, alors S a une décomposition LU.

Théorème 4.5.2. *[3] Soit S une matrice $n*n$ symétrique définie positive , alors il existe une matrice triangulaire inférieure unique L avec des entrées positives en diagonale telle que $S = LL^t$.*

Si la matrice S est une matrice symétrique définie positive, nous avons
$S = \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^t & L_{21}^t \\ 0 & L_{22}^t \end{pmatrix}.$

Alors, on a

$$M = L_{11}L_{11}^t \tag{4.34}$$

$$N = L_{11}L_{21}^t \Rightarrow L_{21}^t = L_{11}^{-1}C$$

$$N = L_{21}L_{11}^t \Rightarrow L_{21} = C(L_{11}^t)^{-1}$$

$$M = L_{21}L_{21}^t + L_{22}L_{22}^t.$$

Et on écrit

$$M - NM^{-1}C = L_{22}L_{22}^t. \tag{4.35}$$

Pour utiliser le théorème 4.5.2 dans la méthode de décomposition en LU, les matrices M et $M - NM^{-1}N$ doivent être symétriques définies positives.

4.5.2 Exemple

Exemple 4.5.1. *Considérons le système linéaire flou intuitionistique* 2×2 *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = & (\alpha; 2-\alpha; 1-1.75\alpha; 1+1.75\alpha) \\ x_1 + 3x_2 = & (4+2\alpha; 8-2\alpha; 6-3\alpha; 6+3\alpha) \end{cases}$$

La matrice associée S *est donnée par :*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

et $M - NM^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0.3333 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.3333 \\ 0 & 2.6667 \end{pmatrix}.$

Alors, on trouve

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.7321 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5774 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.633 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1.7321 & 0 & 0.5774 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 1.633 \end{pmatrix}.$$

La solution exacte est

$$\begin{cases} x_1 = & (0.5\alpha + 1.75; -0.5\alpha + 2.75; -1.125\alpha + 2.25; 1.125\alpha + 2.25) \\ x_2 = & (0.5\alpha + 0.75; -0.5\alpha + 1.75; -0.625\alpha + 1.25; 0.625\alpha + 1.25). \end{cases}$$

La solution exacte et la solution obtenue en utulisant la décomposition LU, sont montrées dans les figures (4.14) *et* (4.15).

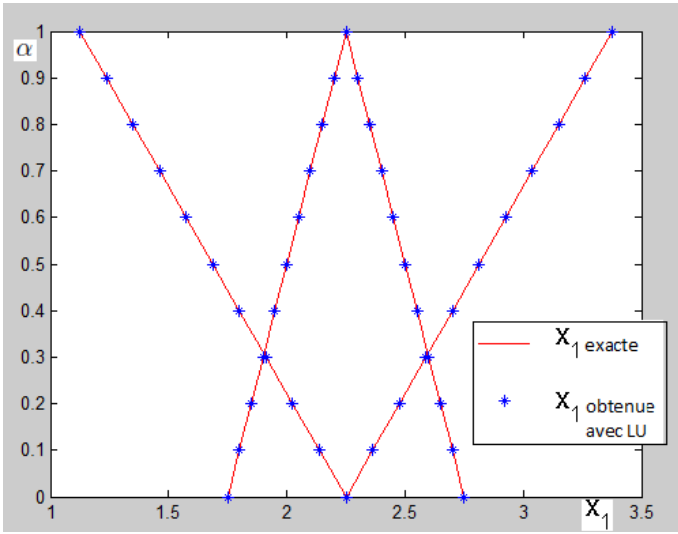

FIGURE 4.14 – La présentation graphique de x_1

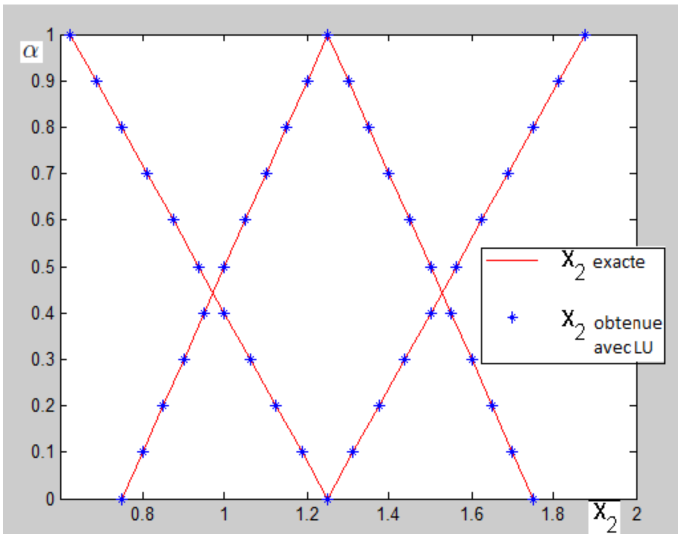

FIGURE 4.15 – La présentation graphique de x_2

Conclusion et perspectives

Ce travail a établi un modèle de système linéaire appelé système linéaire flou intuitionistique qui permet de modéliser des systèmes linéaires dans lesquels, les données du second membre sont imprécises. Après avoir défini le système linéaire flou intuitionistique, nous avons donné les conditions d'existence et d'unicité de la solution floue intuitionistique. Nous avons également proposé des différentes méthodes pour résoudre un système linéaire flou intuitionistique $n \times n$. Une première méthode consiste à remplacer le système original par quatre systèmes linéaires classiques $n \times n$. Une deuxième méthode où nous avons remplacé le système original par deux systèmes linéaires classiques $2n \times 2n$. Une autre méthode a été discutée en détail et considérée dans un cas particulier lorsque le vecteur second membre est un vecteur flou intuitionistique symétrique. Et une dernière méthode dans laquelle nous avons utilisé la méthode de décomposition LU.
Ensuite, ce travail s'ouvre sur plusieurs perspectives que nous comptons développer au sein de notre équipe :

- Résolution numérique des systèmes linéaires flous intuitionistiques.
- Étude des systèmes linéaires flous intuitionistiques duals.
- Étude des équations aux dérivées partielles floues intuitionistiques.

Bibliographie

[1] Abbasbandy, S., and Alavi, M., A method for solving fuzzy linear systems, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol.2, N.2, pp.37-43 (2005)

[2] Abbasbandy, S., Allahviranloo, T. and Ezzati, R. : A method for solving fuzzy linear general systems, The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.15, N.4, pp.881-889 (2007).

[3] S. Abbasbandy, R. Ezzati, and A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, Applied Mathematics and Computation, vol. 172, no. 1, (2006), pp. 633–643.

[4] Allahviraloo, T. Numerical methods for fuzzy system of linear equations. Appl. Math. Comput. 2004, 155, 493–502.

[5] Allahviraloo, T. Successive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations. Appl. Math. Comput. 2005, 62, 189–196.

[6] T. Allahviranloo, The Adomian decomposition method for fuzzy system of linear equations, Applied Mathematics and Computation, 163 (2005) 553-563.

[7] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Solving fuzzy linear systems by homotopy perturbation method, International Journal of Computational Cognition, 8 (2) (2010) 24-30.

[8] T. Allahviranloo, N. Mikarilvand, N. A. Kiani, and R. H. Shabestari, "Signed decomposition of fully fuzzy linear systems," Application and Applied Mathematics, vol. 3, pp. 77–88, 2008.

[9] Amrahov S. Mrah and I. Askerzade, Strong solutions of the fuzzy linear systems, CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 76(4), (2011), pp. 207-216.

[10] Asady, B., Abbasbandy, S. and Alavi, M. : Fuzzy general linear systems. Applied Mathematics and Computation, Vol.169, N.1, pp.34-40 (2005).

[11] Atanassov, K. T., (1983) *Intuitionistic fuzzy sets. VII ITKR's session*, Sofia (deposited in Central Science and Technical Library of the Bulgarian Academy of Sciences 1697/84).

[12] Atanassov, K. T., (1986) Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87–96.

[13] Atanassov, K. T., (1994) Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets Syst.*, 64(2), 159–174.

[14] Atanassov K., Intuitionistic Fuzzy Sets, Springer Physica-Verlag, Berlin, 1999.

[15] Atanassov k., Intuitionistic Fuzzy Sets Past, Present and future. CLBME-Bulgariean Academy of Sciences, P.O.Box 12, Sofia-1113, Bulgaria.

[16] Atanassov, K. : Geometrical interpretation of the elements of the intuitionistic fuzzy objects. Preprint IM-MFAIS-1-89, Sofia (1989)

[17] Atanassov, K. : Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR's Session, Sofia (Deposed in Central Sci. - Techn. Library of Bulg. Acad. of Sci., 1697/84) (June 1983) (in Bulg.)

[18] Atanassov , K., (2015) A new topological operator over intuitionistic fuzzy sets, *Notes on intuitionistic fuzzy sets*, 21(3), 90–92.

[19] Hafida Atti, Bouchra Ben Amma, Said Melliani and Lalla Saadia Chadli, Intuitionistic fuzzy linear systems, Intuitionistic and Type-2 Fuzzy Logic Enhancements in Neural and Optimization Algorithms : Theory and Applications, Springer International Publishing, vol 862, (2019).

[20] H. Atti, S. Melliani, B. Ben Amma, M. Oukessou , L. S. Chadli, Solving intuitionistic fuzzy linear systems, The 6th International Congress of Moroccan Society of Applied Mathematics (SM2A'6) November 7-9, 2019, Beni Mellal, Morocco.

[21] Sanhita Banerjee, Suvankar Biswas and Tapan Kumar Roy, Intuitionistic Fuzzy Linear System, Advances in Fuzzy Mathematics, ISSN 0973-533X Volume 12, Number 3 (2017), pp. 475-487.

[22] B. Bede, Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic, STUDFUZZ 295, Springer-Verlag Berlin Heidelberg : (2013), 1-12.

[23] Chen, S. ; Li, Z. ; Xu, Q. (2006) : Grey target theory based equipment condition monitoring and wear mode recognition. Wear, vol. 260, pp. 438-449.

[24] W. Cong-Xin and M. Ming, Embedding problem of fuzzy number space : Part III, Fuzzy Sets and Systems 46 (1992) 281-286.

[25] De, S.K, Biswas, R.& Roy, A.R., (2001) An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis., *Fuzzy Sets Systems*, 117, 209–213.

[26] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press,

[27] Ezzati, R., Solving linear systems, Soft Computing, Vol.15, N.1, pp.193-197 (2011).

[28] M. Friedman, Ma. Min and A. Kandel, Fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.96, pp.201-209 (1998).

[29] M. Friedman, Ma. Ming, A. Kandel, Duality in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets Syst. 109 (2000) 55–58.

[30] Hu, W. ; Yang, C. (2000) : Grey model of direct solar radiation intensity on the horizontal plane for cooling loads calculation. Building and Environment, vol. 35, pp. 587-593.

[31] Kahraman C. Fuzzy Applications in Industrial Engineering. Springer- Verlag, Berlin, 2006.

[32] Kaufmann A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. Masson, Paris, 1977.

[33] Kaufmann A. Introduction à la Logique. Techniques de l'ingénieur, A120, 64(2) :1–9, 1992.

[34] A. Kaufmann and M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applica- tions, Van Nostran d Rehinold, New York, NY, (1985). 2, 59

[35] M. Keyanpour1, T. Akbarian, Solving Intuitionistic Fuzzy Nonlinear Equations, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, pp.1-6 (2014).

[36] Li, D.F. & Cheng, C.T., (2002) New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions, *Pattern Recognit. Lett.*, 23, 221–225.

[37] Li, D.F., (2005) Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets, *J.Comput. Syst. Sci.*, 70, 73–85

[38] M. Ma, M. Friedman and A. Kandel, A new fuzzy arithmetic, Fuzzy sets and systems 108 (1999), 83-90.

[39] G.S.Mahapatra and T.K.Roy, Reliability Evaluation using Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers, Arithmetic Operations,World Academy of Science, Engineering and Technology 26 2009.

[40] Mahapatra G.S., T.K. Roy, Intuitionistic Fuzzy Number and Its Arithmetic Operation with Application on System Failure, Journal of Uncertain Systems 7(2)2013, pp. 92-107.

[41] E.H.Mamdani S.Assilian, An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, International Journal of Man-Machine Studies Volume 7, Issue 1, January 1975, Pages 1-13.

[42] Melliani, S., Elomari, M., Chadli, L.S., & Ettoussi, R., (2015) Intuitionistic Fuzzy Metric Space, Notes on Intuitionistic Fuzzy sets, 21(1), 43–53.

[43] Melliani, S., Elomari, M., Chadli, L.S., & Ettoussi, R., (2015) Intuitionistic fuzzy fractional equation, Notes on Intuitionistic Fuzzy sets, 21(4), 76–89.

[44] M. Mizumoto and K. Tanaka, Algebraic proprerties of fuzzy numbers, Comminication in Inter. Conf. on Cybernetics and Society, Washington D.C, (1976).

[45] S. Muzzioli, H. Reynaerts,“ Fuzzy linear systems of the form A1x + b1 = A2x + b2,” Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006), 939951.

[46] M.Najariyan1, M.Mazandarani, R. John, Type-2 fuzzy linear systems, Granul. Comput., Vol.2, pp.175-186 (2017).

[47] S. H. Nasseri, M. Sohrabi, and E. Ardil, "Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix," International Journal of Computational and Mathematical Sciences, vol. 2, pp. 140–142, 2008.

[48] S. H. Nasseri and M. Sohrabi, "Gram-schmidt approach for linear system of equations with fuzzy parameters," The Journal of Mathematics and Computer Science, vol. 1, pp. 80–89, 2010.

[49] S. H. Nasseri and F. Zahmatkesh, "Huang method for solving fully fuzzy linear system of equations," The Journal of Mathematics and Computer Science, vol. 1, pp. 1–5, 2010.

[50] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl, 64 (1978), 369-380.

[51] Parvathi, C.Malathi, Arithmetic Operations on Symmetric Trapesoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. International Journal of Soft Computing and Engineering(IJSCE). ISSN : 2231-2307, Volume-2, Issue-2, May 2012.

[52] Rolland-May Christiane, la théorie des ensembles flous et son intérêt en géographie. In : Espace géographique. 16(1)(1987), pp. 42-50.

[53] Shu, M.H., Cheng, C.H. & Chang, J.R., (2006) Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly, *Microelectron. Reliab.*, 46(12), 2139–2148.

[54] Sankar P. M. & Roy, T. K., (2014) First order homogeneous ordinary differential equation with initial value as triangular intuitionistic fuzzy number, *Journal of Uncertainty in Mathematics Science*, 2014, 1–17.

[55] Sankar P. M. & Roy, T. K., (2015) System of Differential Equation with Initial Value as Triangular Intuitionistic Fuzzy Number and its Application, *Int. J. Appl. Comput. Math*, 1(3), 449–474.

[56] Trivedi, H.V. ; Singh, J. K. (2005) : Application of grey system theory in the development of a run off prediction model. Biosystems Engineering, vol. 92, no. 4, pp. 521-526.

[57] Wu, C. C. ; Chang, N. B. (2004) : Corporate optimal production planning with varying environmental costs : a grey compromise programming approach. European Journal of Operational Research, vol. 155, pp. 68-95.

[58] Wang, Z., Li, K. W. & Wang, W., (2009) An approach to multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights., *Information Sciences*, 179(17), 3026–3040.

[59] Ye, J., (2009) Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval valued intuitionistic fuzzy environment, *Expert Syst. Applicat.*, 36, 6899–6902.

[60] L.A. Zadeh. Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353. 1, 2, 9, 59.

[61] Zhang, H. ; Li, Z. ; Chen, Z. (2003) : Application of grey modeling method to fitting and forecasting wear trend of marine diesel engines. Tribology International,vol.36, no. 10, pp. 753-756.

[62] Zhou, P. ; Ang, B.W. ; Poh, K.L. (2006) : A trigonometric grey prediction approach to forecasting electricity demand. Energy, vol. 31, pp. 2839-2847.

[63] Zimmermann H. –J. Fuzzy Set Theory and its Applications. Springer Science + Business Media, New-York, fourth edition, 2001.