UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Ibnelazyz Lahcen

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

l'étude des équations intégro-différentielles fractionnaires impulsives

Soutenue le 17/07/2020 devant le jury composé de :

Pr Lalla Saadia CHADLI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Présidente
Pr Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Rapporteur
Pr Abdelmajid EL HAJAJI	École Nationale du Commerce et Gestion, Eljadida	Rapporteur
Pr Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal	Encadrant
PPr M'hamed ELOMARI	Faculté Polydisciplinaire, Béni Mellal	(Invité)

Table des matières

Remerciement

Louange à Allah, seigneur de l'univers, le tout puissant et le miséricordieux, qui nous inspiré et comblé de bienfaits, nous lui rendons grâce.

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Khalid HILAL, qui m'a honoré par la confiance qu'il m'a accordé, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier d'avantage pour son encadrement et pour la précieuse formation qu'il m'a donné.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements au Professeur Said MELLIANI, le Doyen de la Faculté des sciences et Techniques de Beni Mellal, pour son aide capitale, pour sa disponibilité, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement utiles.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Nous dédions ce projet à toute ma famille qui m'a encouragé et m'a apporté son soutien, à tous nos amis , et à tous ceux qui pourront en avoir besoin.

Enfin, nos souhaits les plus respectueux vont à tous ceux qui ont bien voulu nous apporter leur appui dans la réalisation de ce modeste travail.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires concourent dans la modélisation de certains phénomènes physiques présentant des termes mémoire dans leurs structures.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie des équations intégro-différentielles fractionnaires impulsives, et ce en s'intéressant à l'étude d'une équation différentielle fractionnaires impulsives avec une condition initiale périodique dans un premier temps, et une équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive non locale.

Tout d'abord, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle fractionnaires impulsives avec une condition initiale périodique. Ensuite, nous traitons les questions d'existence et d'unicité de la solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive avec une condition initiale non locale. Enfin, nous terminons par une conclusion qui résume nos contributions scientifiques dans cette thèse, ainsi que, quelques problèmes ouverts possibles à étudier à l'avenir comme de nouvelles directions.

Introduction

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier.
L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.
Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous.
Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [8], thermiques [2] et viscoélastiques [37], sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [7].

Dans la littérature, l'histoire du calcul fractionnaire a commencé par la lettre : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$, adressée par l'Hospital en 1695 à Leibniz qui a introduit avec Newton le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ième}$ dérivée apparemment entière d'une fonction f.
Cette lettre était le premier indice d'une nouvelle théorie de dérivation d'ordre arbitraire appelée dérivation fractionnaire et qui unifie et généralise la dérivation d'ordre entier (classique). Et depuis ce temps, cette théorie a attiré l'attention des célèbres mathématiciens comme Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, et Laurent.
Les concepts de dérivation et intégration fractionnaires sont souvent associés au noms de Riemann et Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.
Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière.
Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés à cette théorie et les champs de ces applications se sont diversifiés, elle a donc connu récemment un grand

intérêt vue qu'elle possède un effet de mémoire qu'elle partage avec plusieurs matériaux viscoélastiques ou polymères.
Deux raisons principales semblent expliquer cet intérêt grandissant :

- l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier dans le cadre d'applications variées (automatique, analyse d'image, viscoélasticité, diffusion fractale, etc...) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie .

- et d'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant.

D'autre part, les équations différentielles impulsives apparaissaient comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subissant des changements au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du cœur, flux du sang,...,). La dynamique des populations, les désastres naturels, etc. Ces changements sont souvent produits sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés ou non-instantanées (Par exemple l'équilibre hémodynamique d'une personne). De tels modèles sont dits "impulsifs" ; ils sont évolutifs de processus continues régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi.

Présentation de la thèse

Cette thèse comprend quatre chapitres.
Le premier chapitre intitulé "Outils mathématiques", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Il est divisé comme suit :

* La section 1 :Sera consacré à un rappel historique du calcul fractionnaire.
* La section 2 :Sera abordé une application du calcul fractionnaire.
* La section 3 :Porte sur une application des systèmes impulsifs.
* La section 4 :Nous donnons une solution explicite de l'équation différentielle impulsive.
* La section 5 :Sera réservée à un petit rappel sur la notion d'espace de Banach.
* La section 6 : Nous donnons deux théorèmes d'Arzelà-Ascoli.
* La section 7 :Nous donnons deux théorèmes de point fixe.
* La section 8 :Sera réservée aux fonctions spéciales pour la dérivation non entière.
* La section 9 :Nous allons aborder diverses approches de la dérivation non entière.
* La section 10 :Nous parlons des équations différentielles fractionnaires à coefficients constants.

Le deuxième chapitre intitulé" Etude d'une équation différentielle fractionnaire linéaire", sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation linéaire. Plus précisément on va montrer :

1. L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1.1) en se basant sur la transformation de Laplace.
2. L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2.1) en se basant sur la transformation de Laplace.

Le troisième chapitre intitulé" Étude de l'équation différentielle fractionnaire impulsive périodique", sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation fractionnaire impulsive périodique. Plus précisément on va montrer :

1. L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), à l'aide du théorème du point fixe de Banach.
2. L'existence de la solution du problème (3.1), à l'aide du théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Le quatrième chapitre intitulé"Résultats d'existence de la solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive non locale", sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation l'intégro-différentielle fractionnaire impulsive non locale. Plus précisément on va montrer :

1. L'existence et l'unicité de la solution du problème (4.1), à l'aide du théorème du point fixe de Banach.
2. L'existence de la solution du problème (4.1), à l'aide du théorème du point fixe de de Krasnoselskii .

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Aperçu historique

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire et ce pour deux raisons :

1. Les domaines de recherche sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [19, 35] offrent une vision très large sur ce domaine.
2. Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [31, 36]. Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Nous nous appuyons sur les ouvrages [31, 36, 28, 20] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

1695

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée nième d'un produit de deux fonctions à $n > 0$ et introduit la notation $d^{1/2}h$. Il écrit notamment que $d^{1/2}x = x\sqrt{dx : x}$. Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [10] où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β, avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}.$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance :

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}. \tag{1.1}$$

Le terme de droite de (1.1) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}. \tag{1.2}$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822
Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)cos(p(x-\alpha))d\alpha dp. \tag{1.3}$$

Il remarque ensuite que la dérivée nième ($n \in \mathbb{N}$) du terme en cos peut s'écrire comme :

$$\frac{d^n}{dx^n}cos(p(x-\alpha)) = p^n cos\big[p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}\big]. \tag{1.4}$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (1.3), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)p^u cos\big[p(x-\alpha)+\frac{u\pi}{2}\big]d\alpha dp. \tag{1.5}$$

1823
Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé.
1832-37
Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}, \tag{1.6}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, il propose de l'étendre pour $\alpha > 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax}. Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \tag{1.7}$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \tag{1.8}$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.7), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

À l'aide de (1.6), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}. \tag{1.9}$$

Même si (1.2) et (1.9) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique.
Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

– avec la définition d'Euler
$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$
– alors qu'avec celle de Liouville
$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$,

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy,$$
$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Liouville} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

Comme il est signalé dans [20] ces définitions diffèrent en fait par les bornes de leurs intégrales.

Remarque 1 *L'expression*

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

est définie ici comme

$$\lim_{s \longrightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

1847
À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.
1867-68
Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h.
1869
L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparait pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}}dz$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite aI_x^α :

$$aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy.$$

1892
Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) \tag{1.10}$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution, il trouve que

$$T(x,t) = T_0 exp(-axp^{1/2})$$

Il suppose ensuite que $p^{1/2}T_0 = T_0/\sqrt{\pi t}$... ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre $1/2$ de T_0 ! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de(1.10).
1917
Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.
1927
Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_+^\alpha f(x) = c\int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $\Delta_t^l f(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de f.
1928
Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et
$1 < p < 1/\alpha$,
aI_x^α est un opérateur borné de L^p dans L^q, où $1/q = 1/p - \alpha$.
1937
Riesz cherche à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donne la définition suivante :

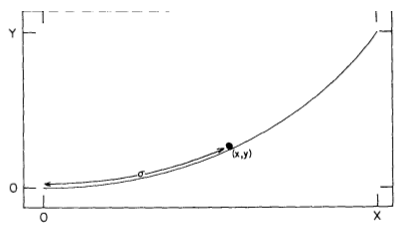
$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment $I^\alpha o I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.
1970
Dans [32] Oldham et Spanier traitent le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que lors d'un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée 1/2 du paramètre physique (température, concentration d'espèces chimique, potentiel électrique, etc). D'après l'historique de Ross reproduit dans[31], ce problème semble être à l'origine de l'extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.
1974
Cette année-là se tient à l'Université de New Haven la première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross.

1.2 Applications du calcul fractionnaire

Au cours de ces dernières décennies, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'intérêt du calcul fractionnaire aussi bien dans la science qu'en ingénierie. En effet, on rencontre des applications du calcul fractionnaire en traitement d'image [27], en géophysique [6], en économie [15]. Plusieurs travaux ont été effectués dans le domaine de la biomédecine, à titre d'exemple, les résultats obtenus par Ferdi et al [13, 12, 16].
En 1823 N. H. Abel est parvenu à résoudre analytiquement le problème du tautochrone posé en physique en faisant apparaitre la forme d'une intégrale à noyau singulier qui ressemble à l'opérateur d'intégration fractionnaire, cette solution a été considérée comme la première application du calcul fractionnaire.
Dans le but de montrer le rôle du calcul fractionnaire dans la résolution d'un tel problème nous allons présenter brièvement la solution d'Abel, le détail peut être consulté dans le livre de Miller et Ross (pages 255-260) [28] ou le livre de Oldham et Spanier (pages 183-186) [31].

Un point se meut, sous l'action de la pesanteur, sur une courbe depuis un point donné jusqu'à un autre point donné. On demande de trouver à l'aide d'un intégrale définie l'équation de la courbe pour laquelle le temps t est une fonction continue donnée de l'arc parcouru .



Le potentielle d'une particule descendante sur une courbe est donnée par

$$\frac{v^2}{2} = V(Y) - V(y).$$

où v est la vitesse de la particule et (x_0, y_0) la position du point de départ de la particule.
Posons $v = -\frac{ds}{dt}$, avec s la longueur de l'arc.
On obtient $\frac{-ds}{\sqrt{V(Y)-V(y)}} = \sqrt{2}dt,$
En séparant les variables et en intégrant de $t = 0$ à $t = T$:

$$\int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{V(Y) - V(y)}} = \sqrt{2}T$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^Y \frac{\frac{ds}{dV(y)} V'(y)}{\sqrt{V(Y) - V(y)}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T$$

$\Longrightarrow$

$$D_{V(y)}^{\frac{-1}{2}} \frac{ds}{dV(y)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T$$

$\Longrightarrow$

$$D_{V(y)}^{\frac{-1}{2}} D_{V(y)}^{1} s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T$$

$\Longrightarrow$

$$s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T D_{V(y)}^{\frac{-1}{2}} 1 = \frac{2\sqrt{2V(y)}}{\pi} T.$$

Nous présentons dans ce qui suit une autre application du calcul fractionnaire : en mécanique des matériaux l'opérateur de dérivation fractionnaire s'est introduit pour décrire le comportement visco-élastique de certains matériaux.
En effet, la loi de comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par la loi de Newton suivante

$$\sigma(t) = \tau D\varepsilon(t) = \tau \varepsilon'(t) \tag{1.11}$$

où σ est la contrainte, ε est la déformation, τ correspond à la viscosité du matériau et D est la dérivée temporelle d'ordre un.
D'autre part, la loi de Hooke donnée par

$$\sigma(t) = ED^0\varepsilon(t) = E\varepsilon(t) \tag{1.12}$$

décrit le comportement associé à la réponse d'un élément élastique où E est le module élastique et D^0 est la dérivée temporelle d'ordre zéro(le symbole $D^0 = I$ a été employé dans le but de montrer la similitude entre(1.13)et(1.14)).
Cependant, différents matériaux tels que les polymères ainsi que certains métaux comme l'aluminium présentent des caractéristiques intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité. Ainsi, en s'inspirant des lois de Hooke et Newton, et moyennant l'opérateur de dérivation fractionnaire P.G.Nutting [29, 30] proposa la loi suivante

$$\sigma(t) = vD^\alpha\varepsilon(t) \tag{1.13}$$

où v est une constante dépendante du matériau utilisé et D^α est la dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha \leq 1$. La relation (1.15), souvent appelée loi de Nutting, est considérée comme la première formule théorique pour décrire le comportement visco-élastique, dès lors plusieurs auteurs ont utilisé le calcul fractionnaire pour décrire les propriétés des matériaux visco-élastiques, citons entre autres les travaux de Bagley et Torvik [3] qui ont exploré les deux modèles suivants :

$$\sigma(t) = G_0\varepsilon(t) + G_1D^\alpha\varepsilon(t), \tag{1.14}$$

$$\sigma(t) + bD^\beta\sigma(t) = G_0\varepsilon(t) + G_1D^\alpha\varepsilon(t), \tag{1.15}$$

où $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ représentent respectivement la contrainte et la déformation, quant à b, G_0, G_1, α, β sont les paramètres du modèle.

Le modèle (1.17) traduit les propriétés mécaniques du matériau dans une région caoutchouteuse. Nous notons que l'utilisation de la notion de dérivée fractionnaire réduit considérablement le nombre de paramètres du modèle, ce qui fait du calcul fractionnaire un outil puissant pour la modélisation des propriétés de mémoire et d'hérédité de certains phénomènes et matériaux

1.3 Application des systèmes impulsifs

De nos jours, les systèmes impulsifs sont devenus de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique, en pathologie [24], en technologie chimique [5], en dynamique des populations [40, 41], en biotechnologie, surtout dans les réseaux de neurones biologiques [21] et en économie [9]. Ces dernières années, il y a eu un développement important dans la théorie des équations différentielles impulsives avec moments fixés, voir les ouvrages [1], [38] et [44]. Dans ce qui suit, nous allons présenter un exemple d'application de systèmes impulsifs en médecine.

Le système suivant représente un modèle mathématiques décrivant l'évolution d'une tumeur hétérogène, sous un traitement chimiothérapique périodique avec des médicaments à effets instantanés représentés par des impulsions.

$$\begin{cases} x'(t) = r_1(x,y)x & t \neq t_n, \\ y'(t) = r_2(x,y)y & t \neq t_n, \\ x(t_n^+) = \eta_n(D, x(t_n), y(t_n)), \\ y(t_n^+) = \theta_n(D, x(t_n), y(t_n)), \end{cases} \tag{1.16}$$

où

- D est la dose de médicament administré.
- x, y sont respectivement la biomasse des cellules sensibles et des cellules résistantes.
- $r_1(x,y)$ et $r_2(x,y)$ sont respectivement les taux de croissance des cellules sensibles et les cellules résistantes.
- Les valeurs $\eta_n(D, x(t_n), y(t_n))$ et $\theta_n(D, x(t_n), y(t_n))$ sont respectivement la biomasse des cellules sensibles et des cellules résistantes qui survivent après la n iéme dose D du médicament administré à l'instant t_n.
- La suite (tn) est strictement croissante.

Le système (1.18) représente le cas où plusieurs médicaments sont administrés un par un ; dans l'ordre, avec une certaine période T : le médicament 1 est administré à l'instant t_1, le médicament 2 à l'instant t_2 et ainsi de suite jusqu'au dernier médicament n.
Si on considère le cas de deux médicaments alors la période est $T = t_2$.
La tumeur est constituée de cellules sensibles et de cellules résistantes, l'évolution de leur biomasse est égale à la biomasse des cellules sensibles $x(t_1)$ et la biomasse des cellules résistantes $y(t_1)$.
Quand une dose D de médicament A est administrée à l'instant t la biomasse de la tumeur devient

$$x(t_1^+) + y(t_1^+) = \eta_1(D, x(t_1), y(t_1)) + \theta_1(D, x(t_1), y(t_1))$$

Le médicament élimine seulement une petite fraction de la biomasse de cellules résistantes. Pour réduire une biomasse significative de cellules résistantes, on administre une dose D du médicament B au moment $t = t_2$; $t_2 > t_1$ et on reprend périodiquement le même processus par le médicament A jusqu'à l'éradication de la tumeur.

1.4 Solution explicite de l'équation différentielle impulsive

Ici, nous présentons un exemple pour la bonne compréhension de ce type d'équations. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t), \quad si \ \ t \in]t_n, t_{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}, \\ u(t_n^+) = u(t_n) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \\ u(0^+) = u_0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Pour trouver la solution du système (1.19), il faut résoudre l'équation sur chaque intervalle $]t_n, t_{n+1}]$:

- Si $t \in]0, t_1]$, alors,
$$u(t) = u_0 exp(\alpha t).$$
- Si $t \in]t_1, t_2]$, nous savons que
$$u(t_1^+) = u_0 exp(\alpha t_1) + \beta.$$
Donc,
$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1^+) exp(\alpha(t - t_1)) \\ &= (u_0 exp(\alpha t_1) + \beta) exp(\alpha(t - t_1)). \end{aligned}$$
- Si $t \in]t_2, t_3]$, de ce qui précède, nous avons
$$u(t_2^+) = u_0 exp(\alpha t_2) + \beta exp(t_2 - t_1) + \beta.$$
Donc,
$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_2^+) exp(\alpha(t - t_2)) \\ &= u_0 exp(\alpha t) + \beta exp(\alpha(t - t_1)) + \beta exp(\alpha(t - t_2)). \end{aligned}$$
De la même façon, sur $]t_n, t_{n+1}]$, nous obtenons
$$u(t) = u_0 exp(\alpha t) + \beta exp(\alpha(t - t_1)) + \beta exp(\alpha(t - t_2)) + ... + \beta exp(\alpha(t - t_n)).$$

1.5 Espace de Banach

Définition 1.1 *Soit X un espace vectoriel.*
1. *On appelle distance dans X une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*
a) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
b) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x).$
c) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$
2. *(X, d) s'appelle espace métrique.*

Définition 1.2 *Soit X un espace vectoriel.*
1. *On appelle norme dans X une application $N : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*
a) $\forall x \in X,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
b) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$
c) $\forall x, y \in X,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y).$
2. *(X, N) s'appelle espace normé.*
3. *On note généralement la norme N par :$\|.\|$*

Remarque 2 *Tout espace vectoriel normé est un espace métrique , la réciproque est fausse .En effet, il suffit de remarquer que $d_N(x, y) = N(x - y)$ est une distance appellé distance associée à la norme N. (d_N induite par N)*

Définition 1.3 *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit que* $(x_n) \subset X$ *est une suite de Cauchy si,*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q > n_0) \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Définition 1.4 *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit que* (X, d) *est complet si, toute suite de Cauchy dans* X *est convergente relativement à la distance* d *.*

Définition 1.5 *Soit* (X, N) *un espace normé. On dit que* (X, N) *est un espace de Banach si,* (X, d_N) *est complet.*

1.6 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition 1.6 *Soit* X *un ensemble et* A *une partie de* X*.*

1. *Un recouvrement de* A *est une famille* $(B_i)_{i \in I}$ *de partie de* X *vérifiant :*$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$*.*
2. *Si* I *est fini on parlera d'un recouvrement fini.*
3. *Si* I *est dénombrable on parlera d'un recouvrement dénombrable.*

Définition 1.7 *Soit* (X, d) *un espace métrique et* A*une partie de* X*.*

1. *On dit que* (X, d) *est précompact si, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un recouvrement fini de* X *dans le diamètre est inférieur à* ϵ*.*
2. *On dit que* A *est précompact dans* (X, d) *si, le sous espace métrique* $(A, d_{/A \times A})$ *est précompact.*

Définition 1.8 *Soit* (X, d) *un espace métrique et* A*une partie de* X*.*

1. *On dit que* (X, d) *est compact si il est précompact et complet.*
2. *On dit que* A *est compact dans* (X, d) *si, le sous espace métrique* $(A, d_{/A \times A})$ *est compact.*

Définition 1.9 *Soient* (X, d) *et* (Y, δ) *deux espaces métriques, et soit* $F(X, Y)$ *l'ensemble de toutes les applications* $f : X \longrightarrow Y$*.*

1. *Une partie* H *de* $F(X, Y)$ *est dite équicontinue en* $u \in X$ *si,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall v \in X, \forall f \in H :\ d(u, v) \leq \eta \Rightarrow \delta\big(f(u), f(v)\big) \leq \epsilon$$

2. H *est dite équicontinue sur* X *si elle est équicontinue pour tout* $u \in X$*.*

Théorème 1.1 ***(Arzelà-Ascoli)***
Soit (X, d) *un espace métrique compact, et soit* (Y, δ) *un espace métrique quelconque. On considère l'espace métrique* $C_\infty(X_d, Y_\delta)$ *des applications* $f : X \to Y$ *continue sur* X_d*,muni de la distance uniforme* $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in X} \delta\big(f(x), g(x)\big)$*.*
Soit H *une partie de* $C_\infty(X_d, Y_\delta)$*, alors les deux résultats suivants sont équivalents,*

1. H *est précompact dans* $C_\infty(X_d, Y_\delta)$*.*
2. *i-* H *est équicontinue sur* X*.*
   ii- $\forall x \in X : H(x) = \{f(x), f \in H\}$ *est précompact dans* (Y, δ)*.*

Théorème 1.2 ***(Arzelà-Ascoli)***
Soit H *un sous espace de* $C[a, b]$*.*
H *est compact si et seulement si* H *est un fermé, borné et équicontinue.*

1.7 Théorèmes de point fixe

Définition 1.10 *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.*
On dit que A est convexe si, $\forall x, y \in A, \{\theta x + (1-\theta)y, \theta \in [0,1]\} \subset A$.

Définition 1.11 *On dit qu'une fonction f est complétement continue si elle transforme les sous ensemble bornés en sous ensembles relativement compacts.*

Définition 1.12 *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une fonction.*

1. *On dit que f est lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que*

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq k\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X$$

2. *Si $0 \leq k < 1$ on dira que f est une contraction.*

Théorème 1.3 ***(Théorème du point fixe de Banach)***
Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors f admet un unique point fixe.

Théorème 1.4 *[23](**Théorème du point fixe de Krasnoselskii, 1958**)*
Soit K un sous ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace de Banach E et $A, B : K \longrightarrow E$ deux applications telles que :

1. *$\forall x, y \in K, A(x) + B(y) \in K$,*
2. *A est continue, compacte,*
3. *B est une contraction de constante $k < 1$.*
   Alors, il existe un certain $x^* \in K$ tel que $(A + B)(x^*) = x^*$.

1.8 Les fonctions spécifiques pour la dérivation non entière.

1.8.1 La fonction Gamma et Beta .

Définition 1.13 *([34]) La fonction Gamma d'Euler est définie par :*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$

avec $t \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition 1.1 *([34])*
Soient $t \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1} (ln(x))^n e^{-x} dx$$

$$\Gamma(t+1) = t.\Gamma(t)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Définition 1.14 *([34]) La fonction Beta d'Euler est définie par :*

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx$$

avec $s, t \in \mathbb{R}_*^+$.

Proposition 1.2 *([34]) Soient* $s, t \in \mathbb{R}_*^+$.

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(t+s)}$$

1.8.2 La fonction de Mittag-Leffler.

La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

Définition 1.15 *([34]) La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est définie par :*

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.

Remarque 3 *Cas special :*

$$E_0(t) = \frac{1}{1-t}; |t| < 1$$

$$E_1(t) = e^t$$

$$E_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^k}{(2k)!}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Définition 1.16 *([34]) Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$.
La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

$$E_{\alpha,1}(t) = E_\alpha(t)$$

1.9 Diverses approche de la dérivation non entière.

La définition de dérivation non entière peut s'établit selon les trois approches :
- L'approche classique de Grunwald-Letnikov.
- L'approche de Riemann-Liouville.
- L'approche de Caputo.

1.9.1 L'approche de Grunwald-Letnikov.

L'idée de cette approche est de généraliser la définition de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^{(1)}f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

On introduit l'opérateur de translation à gauche : $(\tau_h f(x)) = f(x-h)$
et l'opérateur de taux d'accroissement d'Euler rétrograde E_h selon :

$$E_h = \frac{1}{h}(\tau_h - I)$$

et on en déduit la dérivée seconde :

$$D^{(2)}f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} (E_h)^2 f = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h))}{h^2}$$

et plus généralement en élévant à la puissance n l 'opérateur E_h et en utilisant la formule de Newton :

$$D^{(n)}f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} (E_h)^n f = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k n(n-1)....(n-k+1)}{k!} f(x-kh).$$

or,

$$\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$$

une généralisation naturelle consiste à définir la dérivée d'ordre α, pour $\alpha > 0$ par

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)....(\alpha-k+1)}{k!} f(x-kh).$$

de plus,

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+k-1)$$

on obtient la formule de Grunwald -Letnikov pour $\alpha > 0$ non entier :

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-kh).$$

Définition 1.17 *([36]) Soient $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < \alpha < n$. On appelle la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grunwald -Letnikov de la fonction f la dérivée suivante :*

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh).$$

$$D^{(-\alpha)} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh).$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Remarque 4 *([36]) Si la fonction f est continue, on peut définir l'intégration fractionnaire $I^\alpha f(t)$ par :*

$$I^\alpha f(t) = D^{(-\alpha)} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.3 *([36]) Soient $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction , $n \in \mathbb{N}$ et $n-1 < \alpha < n$. Si f est de C^n. Alors :*

$$D^{(\alpha)} f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$D^{(-\alpha)} f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{k+\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Exemple 1.1 *Soit $0 \leq m < p < m+1$ et $\nu > m$*
Calculons la dérivée fractionnaire ${}_aD_t^p (t-a)^\nu$:

$$D_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\nu}{d\tau^{m+1}} d\tau$$

en tenant compte de :

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\nu}{d\tau^{m+1}} = \nu(\nu-1)(\nu-2).....(\nu-m)(\tau-a)^{\nu-m+1} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)} (\tau-a)^{\nu-m-1}$$

par suite,

$$D_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)} (\tau-a)^{\nu-m-1} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + \xi(t-a)$, on aura :

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)(t-a)^{\nu-p}}{\Gamma(-p+m+1)\Gamma(\nu-m)} \int_0^1 \xi^{\nu-m-1}(1-\xi)^{m-p} d\xi \\
{}_aD_t^p(t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)B(-p+m+1,\nu-m)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\nu-p} \\
&= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-p+m+1)\Gamma(\nu-m)}{\Gamma(-p+\nu+1)\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\nu-p} \\
&= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)}(t-a)^{\nu-p}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.4 *([36]) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $m < \alpha < m+1$ et $k \geq m+n-1$ Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de C^k.*

1-

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big(D^{(\alpha)} f(t)\Big) = D^{(\alpha+n)} f(t).$$

2-

$$D^{(\alpha)}\Big(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\Big) = D^{(\alpha+n)} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}.$$

Preuve.

1- On a :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n}\Big(D^{(\alpha)} f(t)\Big) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-\alpha-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\
&= D^{(\alpha+n)} f(t).
\end{aligned}
$$

2- On a :

$$D^{(\alpha)}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) = \sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+s+1)}\int_a^t (t-\tau)^{s-\alpha}f^{(s+n+1)}(\tau)d\tau$$

En posant ici $s = m-1$,

on obtient :

$$D^{(\alpha)}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f^{(m+n)}(\tau)d\tau$$

Alors,

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big(D^{(\alpha)}f(t)\Big) = \Big(D^{(\alpha)}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)}.$$

$\square$

Proposition 1.5 *([34])*
Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction .*

- *Si* α*et* β *des fractionnaires, avec* $\beta < 0$
$$D^{(\alpha)}\Big(D^{(\beta)}f(t)\Big) = D^{(\alpha+\beta)}f(t).$$
- *Si* $\alpha < 0$, $m-1 < \beta < m$ *et* $f^{(j)}(a) = 0 \ \forall j = 0, 1, ...m-2$
$$D^{(\alpha)}\Big(D^{(\beta)}f(x)\Big) = D^{(\alpha+\beta)}f(x).$$
- *Si* $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$ *et* $f^{(j)}(a) = 0 \ \forall j = 0, 1, ...m-2$
$$D^{(\alpha)}\Big(D^{(\beta)}f(x)\Big) = D^{(\alpha+\beta)}f(x).$$

1.9.2 L'approche de Riemann-Liouville et Caputo.

L'approche de Riemann-Liouville

La première égalité du proposition (1.3) obtenue est bien meilleure grâce à la présence de l'intégrale dédans ; mais que faire du terme non-intégral ? La réponse est simple et élégante ; Considérer l'expression du proposition (1.3) comme un cas particulier de cette égalité :

$$D_a^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^x f(t)(t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau.$$

Avec $n-1 < \alpha < n$.

Définition 1.18 *([36]) Soient $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f la dérivée suivantes :*

$$^{R-L}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_a^{-(n-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x f(t)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau,$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

Remarque 5 *([36]) Si f est de C^k.*
Alors,

$$D^{(\alpha)} f(t) =^{R-L} D_a^{\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Exemple 1.2 *1- Soit $f = C \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$.*
Alors,

$$\begin{aligned} ^{R-L}D_0^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)(x-t)^{(-\alpha)} dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{(-\alpha)} dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x^{\alpha}} \neq 0. \end{aligned}$$

2- Soit $0 \leq m < p < m+1$ et $\nu > m$

Calculons la dérivée fractionnaire $^{R-L}D_t^p (t-a)^{\nu}$:

On a la fonction : $t \mapsto (t-a)^{\nu}$ est de classe C^m
donc,

$$^{R-L}D_t^p (t-a)^{\nu} =_a D_t^p (t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)} (t-a)^{\nu-p}.$$

Proposition 1.6 *([36]) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de C^n.*

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $m < \alpha < m+1$

1-

$$\frac{d^n}{dt^n} \Big(^{R-L}D^{(\alpha)} f(t) \Big) =^{R-L} D^{(\alpha+n)} f(t),$$

2-

$$^{R-L}D^{(\alpha)} \Big(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \Big) =^{R-L} D^{(\alpha+n)} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}.$$

Preuve.

1- Soit $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ et $m < \alpha < m+1$

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{R-L}D^{(k-p)}f(t)\Big) = \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau =^{R-L} D^{(n+k-p)}f(t).$$

Posons $\alpha = k-p$, nous aurons :

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{R-L}D^{(\alpha)}f(t)\Big) =^{R-L} D^{(\alpha+n)}f(t).$$

2- On a :

$$\begin{aligned} {}^{R-L}D^{(-n)}f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} {}^{R-L}D^{(\alpha)}\Big(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big) &=^{R-L} D^{(\alpha+n)}\Big({}^{R-L}D^{(-n)}f^{(n)}(t)\Big) \\ &=^{R-L} D^{(\alpha+n)}\left\{f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right\} \\ &=^{R-L} D^{(\alpha+n)}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(1+j-\alpha-n)}. \end{aligned}$$

□

Remarque 6 *La dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville d'une constante, est non nulle ce qui motive la définition suivante.*

L'approche de Caputo.

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaire autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a), f'(a)$, etc.... Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations diffèrentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo accepte la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, i.e., contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure $t = a$.

Définition 1.19 *([36]) Soit $f \in C^n([a,b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f la dérivée suivantes :*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

Avec : $n-1 < \alpha < n$

Exemple 1.3 *La dérivée fractionnaire au sens Caputo d'une constante est nulle.*

Proposition 1.7 *([25, 22])*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < \beta < \alpha < n$ et $x \in C^n\Big([0,\infty)\Big)$.

a-

$$^{C}D^{\alpha} D^{-\alpha} x(t) = x(t)$$

b-

$$D^{-\alpha}\Big({}^{C}D^{\alpha} f(x)\Big) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0)$$

c-

$$D^{\alpha-m+k} x^{(m-k)}(t) = D^{\alpha} x(t), \quad k \in \{1, ..., m-1\}$$

d-

$$D^{\alpha-\beta} D^{\beta} x(t) = D^{\alpha} x(t).$$

Proposition 1.8 *([22])*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in C^n\Big([0,\infty)\Big)$ et $n-1 < \alpha < n$

1-

$$^{C}D^{\alpha} f(x) = ^{R-L} D^{\alpha}\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\Big).$$

2- Si $n = 1$

$$^{C}D^{\alpha} D^{-\alpha} f(x) = ^{R-L} D^{\alpha} D^{-\alpha} f(x) = f(x).$$

Remarque 7 ** A chaque fois on peut ramener l'étude au cas où $0 < \alpha < 1$.*
Dans ce cas, on aura les formules suivantes :

$$^{R-L}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

$$^{R-L}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt.$$

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha} dt.$$

$$^{C}D_a^{\alpha} f(x) = ^{R-L} D_a^{\alpha}[f(x) - f(0)].$$

1.9.3 La transformation de Laplace et de Fourier des dérivations non entières.

Une autre façon d'aborder la notion de dérivation est de passer par la transformation de Laplace et la transformation de Fourier :

Transformation de laplace

Définition 1.20 *Une fonction $f(t)$ est dite causale si elle est nulle pour toutes les valeurs négatives de t.*

Définition 1.21 *Soit f une fonction causale. On appelle transformation de Laplace de$f$ la fonction de la variable p noté $L[f](p)$ définie par :*

$$L[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx.$$

Transformation de Fourier des dérivations non entières.

Définition 1.22 *Soit f, g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.*
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$ existe pour prèsque tout x, et définit une fonction $\in L^1(\mathbb{R})$ appelée produit de convolution de f et g et notée $f * g$:

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Définition 1.23 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformation de Fourier de$f$ la fonction de la variable w noté $F[f](w)$ définie par :*

$$F[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx.$$

Où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Proposition 1.9 *([34])*
Soit $F[f](w)$ la transformation de Fourier de f.
La transformation de Fourier de La dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov de f :

$$F[{}^{R-L}D^{\alpha}_{-\infty}f(x)](w) = (-iw)^{\alpha}F[f](w).$$

Proposition 1.10 *([34])*
Soit $F[f](w)$ la transformation de Fourier de f.
La transformation de Fourier de La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f :

$$F[{}^{C}D^{\alpha}_{-\infty}f(x)](w) = (-iw)^{\alpha}F[f](w).$$

Proposition 1.11 *([34])*
Soit $F[f](w)$ la transformation de Fourier de f.
La transformation de Fourier de La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f :

$$F[{}^{G-L}D^{\alpha}_{-\infty}f(x)](w) = (-iw)^{\alpha}F[f](w).$$

Transformation de Laplace des dérivations non entières

Proposition 1.12 *([42])*
Soit $L[f](p)$ la transformation de Laplace de f.
La transformation de Laplace de La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f :

$$L[^{R-L}D_0^{\alpha}f(x)](p) = p^{\alpha}L[f](p) - \sum_{k=0}^{k=n} p^k \left[D_0^{\alpha-k-1}f(t)\right]_{t=0}.$$

Proposition 1.13 *([42])*
Soit $L[f](p)$ la transformation de Laplace de f.
La transformation de Laplace de La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f :

$$L[^{C}D_0^{\alpha}f(x)](p) = p^{\alpha}L[f](p) - \sum_{k=0}^{k=n} p^{\alpha-k-1}D_0^{k}f(0).$$

Proposition 1.14 *([42])*
Soit $L[f](p)$ la transformation de Laplace de f.
La transformation de Laplace de La dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov de f :

$$L[^{G-L}D_0^{\alpha}f(x)](p) = p^{\alpha}L[f](p).$$

1.10 Équation différentielle fractionnaire

1.10.1 Équation différentielle fractionnaire à un seul terme

Considérons le système décrit par l'équation différentielle fractionnaire linèaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\alpha}y(t) = f(t),$$

dont la transformée de Laplace donne :

$$as^{\alpha}Y(s) = F(s).$$

D'où

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\alpha}}F(s),$$

et comme,

$$G_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{as^{\alpha}}\right\}$$

avec L^{-1} est la transformation de Laplace inverse.
Sous des conditions initiales homogènes, la solution $y(t)$ de l'équation est immédiatement obtenue par la convolution :

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-\tau)f(\tau)d\tau = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = \frac{1}{a}D_0^{-\alpha}f(t).$$

1.10.2 Équation différentielle fractionnaire à deux termes

Considérons le système décrit par l'équation différentielle fractionnaire linèaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\alpha}y(t) + by(t) = f(t),$$

dont la transformée de Laplace donne :

$$as^{\alpha}Y(s) + bY(s) = F(s)$$

d'où,

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\alpha} + b}F(s) = \frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha} + \frac{b}{a}}F(s),$$

et comme,

$$G_2(t) = L^{-1}\Big\{\frac{1}{a}\frac{1}{s^{\alpha} + \frac{b}{a}}\Big\} = \frac{1}{a}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\Big(-\frac{b}{a}t^{\alpha}\Big).$$

Sous des conditions initiales homogènes, la solution $y(t)$ de l'équation est immédiatement obtenue par la convolution :

$$y(t) = \int_0^t G_2(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

1.10.3 Équation différentielle fractionnaire à trois termes

Considérons le système décrit par l'équation différentielle fractionnaire linèaire à coefficients constants suivante :

$$aD_0^{\beta}y(t) + bD_0^{\alpha}y(t) + cy(t) = f(t),$$

dont la transformée de Laplace donne :

$$as^{\beta}Y(s) + bs^{\alpha}Y(s) + bY(s) = F(s),$$

d'où,

$$Y(s) = \frac{1}{as^{\beta} + bs^{\alpha} + c}F(s),$$

la solution de l'équation est obtenue à l'aide de la transformée de Laplace inverse de l'expression suivante :

$$g_3(s) = \frac{1}{as^{\beta} + bs^{\alpha} + c}$$

supposons que $\beta > \alpha$ on peut donc écrire $g_3(s)$ sous la forme :

$$g_3(s) = \frac{1}{c}\frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}\frac{1}{1 + \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha}+b}}$$

$$= \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{c}{a}\Big)^{k+1}\frac{s^{-(\alpha k+\alpha)}}{\Big(s^{\beta-\alpha}+\frac{b}{a}\Big)^k}$$

La transformée inverse de Laplace terme à terme de la dernière égalité conduit à :

$$G_3(t) = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{c}{a}\Big)^k t^{\beta(k+1)-1}E^{(k)}_{\beta-\alpha,\beta+\alpha k}\Big(-\frac{b}{a}t^{\beta-\alpha}\Big)$$

Ce qui permet d'avoir la solution $y(t)$ de l'équation par l'intégrale de convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Chapitre 2

Étude d'équation différentielle fractionnaire linéaire

2.1 Équations différentielle fractionnaire linéaire

Dans ce paragraphe nous discutons l'existence et l'unicité de solution de problème à valeurs initiales pour des équations différentielles fractionnaires linéaires avec dérivées au sens de Riemann-Liouville.
Les notations utilisées ici sont celles introduites dans le chapitre 1.

2.1.1 Position du problème

Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$(2.1.1)\begin{cases} D^{(\alpha)}y(t) & = f(t) \quad ,0 < t < T < \infty \\ \left[D^{(\alpha-1)}y(t)\right]_{t=0} & = b \end{cases}$$

Où : $0 < \alpha \leq 1$, et $f(t) \in L_1(0,T)$

Théorème 2.1 *Si* $f(t) \in L_1(0,T)$*, alors le problème* (2.1.1) *admet une unique solution* $y(t) \in L_1(0,T)$

Preuve.
Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (2.1.1), la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
On aura,

$$s^{\alpha}Y(s) - [D^{(\alpha)}y(t)]_{t=0} = F(s)$$

Avec $Y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de laplace de $y(t)$ et $f(t)$
Par suite,

$$Y(s) = s^{-\alpha}F(s) + s^{-\alpha}b$$

et la transformée de Laplace inverse donne :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$$

En utilisant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction :
$t \mapsto (t-a)^{\nu}$, avec $a = 0$ et $\nu = \alpha - 1$
donc, $D^{(\alpha)} t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)} t^{-1} = 0 \quad \Big($ car : $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0\Big)$
par suite,

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} y(t) &= D^{(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= D^{(\alpha)} (D^{(-\alpha)} f(t)) \end{aligned}$$

d'où,

$$D^{(\alpha)} y(t) = f(t).$$

De plus,

$$\begin{aligned} D^{(\alpha-1)} y(t) &= D^{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) + b \\ &= D^{(\alpha-1)} (D^{(-\alpha)} f(t)) + b \\ &= \Big(D^{(-1)} f(t) \Big) + b \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t f(\tau) d\tau + b. \end{aligned}$$

D'où $\Big[D^{(\alpha)} y(t) \Big]_{t=0} = b$
finalement la fonctions construite $y(t)$ est solution du problème (2.1.1)
Reste à montrer l'unicité de cette solution. Pour cela, posons :

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

avec $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions $\Big($dans $L_1(0,T)\Big)$ du problème (2.1.1). Et donc $z(t)$ sera solution du problème suivant :

$$(2.1.2) \begin{cases} D^{(\alpha)} z(t) & = 0 \\ \Big[D^{(\alpha-1)} z(t) \Big]_{t=0} & = 0. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (2.1.2), on obtient :
$Z(s) = 0.$
Avec $Z(s)$ est la transformée de Laplace de $z(t)$
donc $z(t) = 0$ presque pour tout $t \in (0,T)$, ce qui prouve que la solution $y(t)$ est unique.
□

2.2 Équations différentielles fractionnaires linéaires de forme plus générale

Nous discutons dans cette section l'existence et l'unicité de solution d'un problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire plus générale ayant un terme de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.2.1 Position du problème

Considérons donc le problème à valeur initiale suivant :

$$(2.2.1) \begin{cases} D^{(\alpha)}y(t) & = f(t, y(t)) \quad , \\ \left[D^{(\alpha-1)}y(t)\right]_{t=0} & = b \end{cases}$$

Où : $0 < \alpha \leq 1$.
Nous supposons que $f(t, y)$ est définie dans un domaine G du plan (t, y) et nous définissons une région $R(h, K) \subset G$ comme étant l'ensemble des points $(t, y) \in G$, qui vérifent les inégalités suivantes :

$$0 < t < h, \quad |t^{1-\alpha}y(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}b| \leq K$$

Où h et K sont des constantes.

Théorème 2.2 *Soit $f(t, y)$ une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine G, satisfaisant dans G la condition de Lipschitz par rapport à y, i.e. :*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2||$$

Et telle que

$$|f(t, y)| \leq M < \infty, \quad \textbf{\textit{pour tout}}\ (t, y) \in G$$

pour tout $(t, y) \in G$.
Soit aussi

$$K \geq \frac{Mh}{\Gamma(1 + \alpha)}$$

Alors il existe, dans la région $R(h, K)$, une unique solution continue $y(t)$ du problème (2.2.1).

Preuve. Tout d'abord, nous réduisons le problème (2.2.1) à une équation intégrale fractionnaire équivalente.
On applique la transformation de Laplace à la première équation du problème (2.2.1) , puis la transformation de Laplace inverse.
On obtient :

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau. \tag{2.1}$$

On voit que si $y(t)$ vérifie l'équation (2.2.1) alors il vérifie l'équation (2.1).
D'autre part, si $y(t)$ est une solution de (2.1), alors en appliquant à (2.1) l'opérateur dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et en tenant compte du fait que la dérivée $D^{\alpha}t^{\alpha-1}$ est nulle, nous obtenons l'équation différentielle fractionnaire (2.2.1). En outre, comme $D^{\alpha-1}t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$, alors si $y(t)$ vérifie (2.1), elle satisfait donc la condition initiale introduite dans (2.2.1). Par conséquent, l'équation (2.1) est équivalente au problème à valeur initiale (2.2.1).
Définissons maintenant la suite de fonctions $y_0(t), y_1(t), ...$, par les relations suivantes :

$$y_0(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \tag{2.2}$$

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \tag{2.3}$$

$$m = 1, 2, 3, ...$$

Nous allons montrer que la $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} y_m(t)$ existe et donne la solution souhaitée $y(t)$ de l'équation (2.2.1).
Tout d'abord, on peut montrer par récurrence que pour $0 < t \leq h$, on a $y_m(t) \in R(h, K)$ pour tout m. En effet,

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\alpha} y_m(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \frac{Mt}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)} \leq K \end{aligned}$$

et pour la même raison on a la même inégalité pour $y_1(t)$:

$$\left| t^{1-\alpha} y_1(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)} \leq K$$

De plus, on peut aussi montrer par récurrence que, pour tout m,

$$\left| y_m(t) - y_{m-1}(t) \right| \leq \frac{MA^{m-1} t^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)}$$

donc, pour $m = 1$, on aura :

$$\left| y_1(t) - y_0(t) \right| \leq \frac{MAt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (0 \leq t \leq h)$$

supposons que

$$\left| y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t) \right| \leq \frac{MA^{m-2} t^{(m-1)\alpha}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)}.$$

On a,

$$\begin{aligned}\Big|y_m(t)-y_{m-1}(t)\Big| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\Big|y_{m-1}(\tau)-y_{m-2}(\tau)\Big|d\tau\\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{(m-1)\alpha}d\tau\\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)}D^{-\alpha}t^{(m-1)\alpha}\\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)}\frac{\Gamma(+1(m-1)\alpha)t^{(m-1)\alpha+\alpha}}{\Gamma(1+(m-1)\alpha+\alpha)}\\ &= \frac{MA^{m-1}t^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)}\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Considérons maintenant la série :

$$y^*(t) = \underset{m\longrightarrow\infty}{lim}(y_m(t)-y_0(t)) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(y_j(t)-y_{j-1}(t)\Big)$$

or, $\forall j \geq 0$

$$\Big|y_j(t)-y_{j-1}(t))\Big| \leq \frac{MA^{j-1}h^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)} \leq \frac{M}{A}\frac{(Ah^{\alpha})^j}{\Gamma(1+j\alpha)}.$$

Dans le membre de droite, on voit apparaître le terme général d'une série convergente, à savoir, la série $\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{\Gamma(\lambda k+\mu)}$ laquelle est convergente.
Et donc la série $y^*(t)$ est uniformément convergente et on a :

$$y^*(t) \leq \frac{M}{A}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(Ah^{\alpha})^j}{\Gamma(1+j\alpha)}-1\Big) = \frac{M}{A}\Big(E_{\alpha,1}(Ah^{\alpha})-1\Big)$$

Évidemment, chaque terme $(y_j(t)-y_{j-1}(t))\,\cdot$ de la série $y^*(t)$ est une fonction continue pour $0\leq t\leq h$ et

$$y(t) = \underset{m\longrightarrow\infty}{lim} y_m(t) = y_0(t)+y^*(t)$$

est donc une fonction continue.
La convergence uniforme de la suite $y_m(t)$ nous permet de faire tendre m vers l'infini dans la relation (2.3). Ce qui donne l'équation (2.1) et montrant que $y(t)$, la fonction limite du $y_m(t)$ est solution de (2.3).
Finalement, prouvons l'unicité de la solution. Supposons donc que $\tilde{y}(t)$ est une autre solution de l'équation (2.3), qui est continue sur l'intervalle $[0,h]$. Alors, il suit de (2.3) que la fonction $z(t)=y(t)-\tilde{y}(t)$ vérifie l'équation :

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[f(\tau,y(\tau))-f(\tau,\tilde{y}(t)(\tau))]d\tau \tag{2.4}$$

De plus, cette fonction est continue pour $0 \leq t \leq h$. Par conséquent, $|z(t)| \leq B$ pour $0 \leq t \leq h$, où B est une constante. Et grâce au caractère lipschitzien de f par rapport à y, avec la relation (2.3), on en déduit

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{2.5}$$

En répétant ces estimations j fois, on aura

$$|z(t)| \leq \frac{A^j Bt^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)} \tag{2.6}$$

Dans le membre de droite, on récupére (à une constante près) le terme général de la série associée à la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(At^{\alpha})$, et donc pour tout t,

$$\underset{j \longrightarrow \infty}{lim} \frac{A^j t^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)} = 0$$

En faisant tendre $j \longrightarrow \infty$ dans (2.6), on conclut que $z(t) \equiv 0$, et $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ pour $0 < t \leq h$. Ce qui achève la preuve du théorème (2.2) . $\square$

Chapitre 3

Étude de l'équation différentielle fractionnaire impulsive périodique

3.1 Équation différentielle fractionnaire impulsive périodique.

Une attention particulière a été focalisée sur l'étude des équations différentielles impulsives soumises à des conditions initiales périodiques. Ces résultats peuvent être consultés dans les références [39, 43].
Dans cette partie, nous discutons l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive périodique.

3.1.1 Position du problème .

Dans cette section, On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(\rho(t))) + B(t)c(t), t \in (s_i, t_{i+1}], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., m; c \in U_{ad}, \\ u(t) = P_\alpha(t - t_i)g_i(t, u(t)) \quad t \in (t_i, s_i]; \quad i = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = u(a) \in X. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où :
*${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. $\Big(0 < \alpha < 1\Big)$,
* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ génère un C_0 semi-groupe compact $T(t), t \geq 0$ dans un espace de Banach X,
* les nombres fixes s_i et t_i satisfont $0 = s_0 < t_1 \leq s_1 < t_2 \leq .... < t_m \leq s_m < t_{m+1} = a$,
* $P_\alpha(t)u = \int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)ud\theta$ tel que η_α est la fonction de densité définit sur $(0, \infty)$ et satisfait : $\eta_\alpha(\theta) \geq 0, \quad \int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)d\theta = 1\,; \quad \int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$.
* les fonctions f, g_i sont données.

Préliminaires et notations.

Posons $J=[0,T]$, $J_0=[0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2]$,..., $J_{m-1}=(t_{m-1},t_m]$, $J_m=(t_m,t_{m+1}]$ et introduisons l'espace $PC(J,X):=\{u:J\to X : u\in C((t_i,t_{i+1}],X), i=0,1,...,m$ et il existe $u(t_i^-)$ et $u(t_i^+), i=1,...,m$ avec $u(t_i^-)=u(t_i^+)\}$. Il est clair que $PC(J,X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_{PC}=sup\{\|u(t)\| : t\in J\}$.

Soit Y un espace de Banach où les contrôles c prennent ses valeurs, et $P_f(Y)$ la classe des sous-ensembles non vides, fermés et convexes de Y. On suppose que la fonction $w:[0,a]\longrightarrow P_f(Y)$ est mesurable, $w(.)\subset E$, où E est un ensemble borné de Y, et l'ensemble des contrôles admissibles est donné par :

$U_{ad}=\Big\{c\in L^p(E) : c(t)\in w(t), p.p\Big\}$, $p>\frac{1}{\tau}$, $(\tau\in(0,\alpha)$), pour plus de détails sur les ensembles des controles admissibles, on donne comme référence [11].

Lemme 3.1 *[45] On suppose $W\subseteq PC(J,X)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) W est un sous-ensemble uniformément borné de PC(J,X),
(2) W est équicontinue sur $(t_i,t_{i+1}), i=0,1,2,..,m$, où $t_0=0, t_{m+1}=T$,
(3) $W(t)=\{x(t) : x\in W, t\in J\setminus\{t_1,t_2,...,t_m\}\}$, $W(t_i^+)=\big\{x(t_i^+) : x\in W\big\}$ et $W(t_i^-)=\big\{x(t_i^-) : x\in W\big\}$, $i=1,2,..,m$, sont des sous-ensembles relativement compact de X.

Alors W est un sous-ensemble relativement compact de $PC(J,X)$.

Définition 3.1 *[46, 47] Une fonction $x\in C(J,X)$ est dite solution intégrale du problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t)=Ax(t)+y(t), & t\in(0,T],\\ x(0)=x_0,\end{cases}$$

si elle satisfait l'équation intégrale

$x(t)=P_\alpha(t)x_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)y(s)ds.$

Où $Q_\alpha(t)=\alpha\int_0^\infty\theta\eta_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)d\theta.$

3.1.2 Étude d'existence et d'unicité de la solution intégrale du problème.

Dans ce paragraphe nous discutons l'existence et l'unicité de la solution intégrale du problème (3.1).

les hypothèses.

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), nous considérons les hypothèses suivantes :

- (H_1) A est le générateur d'un semi-groupe fortement continue compact $T(t), t\geq 0$ dans l'espace de Banach X tel que $\|T(t)\|\leq M$ pour tout $t\in J$,

- (H_2) $B:[0,a]\longrightarrow L(Y,X)$ est essentiellement bornée i.e : $B\in L^\infty([0,a];L(Y,X))$,

- (H_3) les fonctions $g_i \in C([t_i; s_i] \times X; X)$,
  il existe une constante K tel que :
  $\forall t \in [t_i; s_i], (i = 0, 1, ..., m), \forall x, y \in X, \| g_i(t, x) - g_i(t, y) \| \leq K \| x - y \|$,
  Il existe une fonction $t \longrightarrow \varphi_i(t), i = 1, 2, ..., m$ tel que $\| g_i(t, x(t)) \| \leq \varphi_i(t)$ pour tout $t \in J$, $x \in X$, $L_{g_i} = \sup_{t \in J} \varphi_i(t)$ et $L_g = \underset{1 \leq i \leq m}{max} L_{g_i}$,

- (H_4) la fonction $f \in C(J \times X \times X; X)$ et $\exists L_f, C_f \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall t \in (s_i; t_{i+1}]$, (i=0,1,..,m),
  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X$ $\|f(t, x_1(t), y_1(t)) - f(t, x_2(t), y_2(t))\| \leq L_f \|x_1 - x_2\| + C_f \|y_1 - y_2\|$,

- (H_5) Il existe une constante $L > 0$ tel que : $\|f(t, u, v)\| \leq L(1 + \|u\|^\mu + \|v\|^\nu)$ pour $u, v \in X$, $t \in J$ et $\mu, \nu \in [0, 1]$.

Définition 3.2 *la fonction u est la solution intégrale du problème* (3.1) *si :*

$$u(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)u(a) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \Big[f(s, u(s), u(\rho(s))) + B(s)c(s) \Big] ds, \quad t \in [0, t_1], \\ \\ P_\alpha(t - t_i) g_i(t, u(t)) \qquad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1; 2; ...; m, \\ \\ P_\alpha(t - s_i) \Big[P_\alpha(s_i - t_i) g_i(s_i, u(s_i)) \\ - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) \Big[f(s, u(s), u(\rho(s))) + B(s)c(s) \Big] ds \Big] \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \Big[f(s, u(s), u(\rho(s))) + B(s)c(s) \Big] ds \qquad t \in (s_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

tel que : $u(a) = P_\alpha(a - s_m) \Big[P_\alpha(s_m - t_m) g_m(s_m; u(s_m)) - \int_0^{s_m} (s_m - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_m - s) \Big[f(s, u(s), u(\rho(s))) + B(s)c(s) \Big] ds + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(a-s) \Big[f(s, u(s), u(\rho(s))) + B(s)c(s) \Big] ds \Big]$.

Lemme 3.2 *[46, 47] On suppose que* (H_1) *est vérifiée, alors les opérateurs* P_α *et* Q_α *ont les propriétés suivantes :*

(1) Pour $t \geq 0$ *fixé,* $P_\alpha(t)$ *et* $Q_\alpha(t)$ *sont des opérateurs linéaires et bornés, et pour tout* $x \in X$,
$\| P_\alpha(t)x \| \leq M \| x \|, \quad \| Q_\alpha(t)x \| \leq \dfrac{\alpha M}{\Gamma(1+\alpha)} \| x \|$,

(2) $\{P_\alpha(t), t \geq 0\}$ *et* $\{Q_\alpha(t), t \geq 0\}$ *sont fortement continues,*

(3) Pour tout $t > 0$, $P_\alpha(t)$ *et* $Q_\alpha(t)$ *sont des opérateurs compacts.*

Théorème 3.1 *Si les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *sont satisfaites et* $\lambda < 1$. *Alors le problème* (3.1) *admet une unique solution intégrale.*
Avec

$$\lambda = max[MK, M^3K + (\frac{M^3}{\Gamma(\alpha+1)} s_m^\alpha + \frac{M^2}{\Gamma(\alpha+1)} a^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t_1^\alpha)(L_f + C_f), M^2K + (\frac{M^2}{\Gamma(\alpha+1)} s_i^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t_{i+1}^\alpha)(L_f + C_f)].$$

Preuve. On définit l'opérateur $F : PC(J; X) \longrightarrow PC(J; X)$ par :

$$Fu(t) = \begin{cases} P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[P_\alpha(s_m-t_m)g_m(s_m;u(s_m)) \\ -\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\Big] \\ +\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\Big] \\ +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds \quad t\in[0,t_1], \\ \\ P_\alpha(t-t_i)g_i(t;u(t)) \qquad t\in(t_i,s_i], \quad i=1;2;...;m, \\ \\ P_\alpha(t-s_i)\Big[P_\alpha(s_i-t_i)g_i(s_i;u(s_i)) \\ -\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\Big] \\ +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds \qquad t\in(s_i,t_{i+1}]. \end{cases}$$

D'après les hypothèses, on vérifie facilement que l'opérateur F est bien définie sur $PC(J,X)$.

Soient $u,v\in PC(J,X)$.

– Premier cas. Pour $t\in[0,t_1]$. On a :

$$\begin{aligned} \| Fu(t)-Fv(t) \| \quad &\le \quad \| P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[P_\alpha(s_m-t_m)\Big(g_m(s_m,u(s_m))-g_m(s_m,v(s_m))\Big) \\ &\quad -\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s)))\Big]ds\Big] \\ &\quad +\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s)))\Big]ds\Big] \\ &\quad +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s)))\Big]ds \| \\ &\le \quad M^3 \| g_m(s_m,u(s_m))-g_m(s_m,v(s_m)) \| \\ &\quad +\tfrac{M^3\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1} \| f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s))) \| ds \\ &\quad +\tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^a(a-s)^{\alpha-1} \| f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s))) \| ds \\ &\quad +\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1} \| f(s,u(s),u(\rho(s)))-f(s,v(s),v(\rho(s))) \| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M^3K \parallel u(s)-v(s) \parallel \\
&+\tfrac{M^3\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u(s)-v(s) \parallel + C_f \parallel u(\rho(s))-v(\rho(s)) \parallel \Big)ds \\
&+\tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{a}(a-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u(s)-v(s) \parallel + C_f \parallel u(\rho(s))-v(\rho(s)) \parallel \Big)ds \\
&+\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u(s)-v(s) \parallel + C_f \parallel u(\rho(s))-v(\rho(s)) \parallel \Big)ds \\
&\leq M^3K \parallel u-v \parallel_{PC} \\
&+\tfrac{M^3\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u-v \parallel_{PC} + C_f \parallel u-v \parallel_{PC} \Big)ds \\
&+\tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{a}(a-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u-v \parallel_{PC} + C_f \parallel u-v \parallel_{PC} \Big)ds \\
&+\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u-v \parallel_{PC} + C_f \parallel u-v \parallel_{PC} \Big)ds \\
&\leq \Big(M^3K + \big(\tfrac{M^3 s_m^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{M^2 a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{M t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\big)(C_f+L_f)\Big) \parallel u-v \parallel_{PC} \\
&\leq \lambda\|u-v\|.
\end{aligned}$$

– Deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i], i = 1; 2; ...; m$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel Fu(t)-Fv(t) \parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-t_i)g_i(t,u(t)) - P_\alpha(t-t_i)g_i(t,v(t)) \parallel \\
&\leq MK \parallel u-v \parallel \\
&\leq \lambda\|u-v\|.
\end{aligned}$$

– Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}], i = 1; 2; ...; m$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel Fu(t)-Fv(t) \parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-s_i)\Big[P_\alpha(s_i-t_i)\big(g_i(s_i,u(s_i)) - g_i(s_i,v(s_i))\big) \\
&\quad - \int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) - f(s,v(s),v(\rho(s)))\Big]ds\Big] \\
&\quad + \int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) - f(s,v(s),v(\rho(s)))\Big]ds \parallel \\
&\leq M^2K \parallel u-v \parallel \\
&\quad +\tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1} \parallel f(s,u(s),u(\rho(s))) - f(s,v(s),v(\rho(s))) \parallel ds \\
&\quad +\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1} \parallel f(s,u(s),u(\rho(s))) - f(s,v(s),v(\rho(s))) \parallel ds \\
&\leq M^2K \parallel u-v \parallel \\
&\quad +\tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u(s)-v(s) \parallel + C_f \parallel u(\rho(s))-v(\rho(s)) \parallel \Big)ds \\
&\quad +\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\Big(L_f \parallel u(s)-v(s) \parallel + C_f \parallel u(\rho(s))-v(\rho(s)) \parallel \Big)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad M^2K \parallel u-v \parallel_{PC} \\
&\quad + \tfrac{M^2\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} \Big(L_f \parallel u-v \parallel_{PC} + C_f \parallel u-v \parallel_{PC} \Big) ds \\
&\quad + \tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t} (t - s)^{\alpha-1} \Big(L_f \parallel u-v \parallel_{PC} + C_f \parallel u-v \parallel_{PC} \Big) ds \\
&\leq \quad \Big(M^2K + \big(\tfrac{M^2 s_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \tfrac{M t_{i+1}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \big) \big(C_f + L_f \big) \Big) \parallel u-v \parallel_{PC} \\
&\leq \quad \lambda \|u-v\|.
\end{aligned}$$

Donc on a montré que F est une contraction sur l'espace $PC(J, X)$. Par conséquent, d'après le principe de contraction de Banach, l'opérateur F admet un unique point fixe $x \in PC(J, X)$ qui est l'unique solution intégrale du problème (3.1).

□

3.1.3 Étude d'existence de la solution intégrale .

Théorème 3.2 *Si les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$, (H_5) *sont satisfaites et*

$$\lambda' = max \Big[MK; M^2K; M^3K \Big] < 1.$$

Alors le problème (3.1) *admet au moins une solution intégrale.*

Preuve. On définit l'opérateur $F : PC(J; X) \longrightarrow PC(J; X)$ par :
$Fu(t) = F_1u(t) + F_2u(t)$ tels que :

$$F_1 u(t) = \begin{cases}
P_\alpha(t) \Big[P_\alpha(a - s_m) \Big[P_\alpha(s_m - t_m) g_m(s_m; u(s_m)) - \int_0^{s_m} (s_m - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_m - s) B(s) c(s) ds \Big] \\
+ \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(a-s) B(s) c(s) ds \Big] + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B(s) c(s) ds \quad t \in [0, t_1], \\
\\
P_\alpha(t - t_i) g_i(t; u(t)) \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1; 2; ...; m, \\
\\
P_\alpha(t - s_i) \Big[P_\alpha(s_i - t_i) g_i(s_i; u(s_i)) - \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) B(s) c(s) ds \Big] \\
+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) B(s) c(s) ds \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 1; 2; ...; m,
\end{cases}$$

$$F_2u(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[-\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Big] \\ +\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Big] \\ +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds, t\in[0,t_1], \\ 0 \qquad\qquad t\in(t_i,s_i], \quad i=1;2;...;m, \\ P_\alpha(t-s_i)\Big[-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Big] \\ +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \quad t\in(s_i,t_{i+1}], \quad i=1;2;...;m. \end{cases}$$

Posons : $B_r=\{u\in PC(J;X):\|u\|\leq r\}$, avec $r\geq max\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$ et

$\gamma_1=\frac{M^3\|g_m(s_m,0)\|_{PC}+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}(\frac{1-\tau}{\alpha-\tau})^{1-\tau}\Big[\|m(t)\|_{L^{\frac{1}{\tau}}}+\|Bc\|_{L^{\frac{1}{\tau}}}\Big]\Big[M^2s_m^{\alpha-\tau}+Ma^{\alpha-\tau}+t_1^{\alpha-\tau}\Big]}{1-M^3K}$,

$\gamma_2=\frac{M\|g_i(t,0)\|_{PC}}{1-MK}$,

$\gamma_3=\frac{M^2\|g_i(s_i,0)\|_{PC}+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}(\frac{1-\tau}{\alpha-\tau})^{1-\tau}\Big[\|m(t)\|_{L^{\frac{1}{\tau}}}+\|Bc\|_{L^{\frac{1}{\tau}}}\Big]\Big[Ms_i^{\alpha-\tau}+t_{i+1}^{\alpha-\tau}\Big]}{1-M^2K}$,

alors B_r est un sous ensemble borné convexe fermé de $PC(J;X)$.

La démonstration se fait en plusieurs étapes .

étape 1: On montre que $FB_r(J)\subset B_r(J)$
avec $B_r=\{u\in PC(J,X);\parallel u\parallel\leq r\}$ est la boule de rayon $r>0$,
pour tout $u\in B_r$, on a :

- premier cas. Pour $t\in[0,t_1]$,

$$\begin{aligned} \parallel Fu(t)\parallel &\leq \parallel P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[P_\alpha(s_m-t_m)g_m(s_m,u(s_m)) \\ &\quad -\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\Big] \\ &\quad +\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\Big]\parallel \\ &\quad +\parallel\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\parallel \\ &\leq M^3\parallel g_m(s_m,u(s_m))-g_m(s_m,0)+g_m(s_m,0)\parallel \\ &\quad +\frac{\alpha M^3}{\Gamma(\alpha+1)}\parallel\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\parallel \\ &\quad +\frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\parallel\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\parallel \\ &\quad +\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\parallel\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\Big[f(s,u(s),u(\rho(s)))+B(s)c(s)\Big]ds\parallel \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^3K \parallel u \parallel + M^3 \parallel g_m(s_m;0) \parallel + \tfrac{\alpha M^3}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\tfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\Big)^{1-\tau} s_m^{\alpha-\tau}\Big[\parallel m(t) \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \\
&\quad + \parallel Bc \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \Big] + \tfrac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\tfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\Big)^{1-\tau} a^{\alpha-\tau}\Big[\parallel m(t) \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} + \parallel Bc \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \Big] \\
&\quad + \tfrac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\tfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\Big)^{1-\tau} t_1^{\alpha-\tau}\Big[\parallel m(t) \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} + \parallel Bc \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \Big] \\
&\leq M^3K \parallel u \parallel + M^3 \parallel g_m(s_m,0) \parallel \\
&\quad + \tfrac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\tfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\Big)^{1-\tau} \Big[\parallel m(t) \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} + \parallel Bc \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \Big]\Big[M^2 s_m^{\alpha-\tau} + M a^{\alpha-\tau} + t_1^{\alpha-\tau}\Big] \\
&\leq M^3Kr + (1-M^3K)\gamma_1 \\
&\leq r.
\end{aligned}
$$

- Deuxième cas. Pour $t \in [t_i, s_i]$,

$$
\begin{aligned}
\parallel Fu(t) \parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-t_i) g_i(t,u(t)) \parallel \\
&\leq M \parallel g_i(t,u(t)) \parallel \\
&\leq M \parallel g_i(t,u(t)) - g_i(t;0) + g_i(t,0) \parallel \\
&\leq MK \parallel u \parallel + M \parallel g_i(t,0) \parallel \\
&\leq MKr + (1-MK)\gamma_2 \\
&\leq r.
\end{aligned}
$$

- Troisième cas. Pour $t \in [t_i, s_i]$,

$$
\begin{aligned}
\parallel Fu(t) \parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-s_i)\Big[P_\alpha(s_i-t_i) g_i(s_i,u(s_i)) \\
&\quad - \textstyle\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) + B(s)c(s)\Big]ds\Big] \parallel \\
&\quad + \parallel \textstyle\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) + B(s)c(s)\Big]ds \parallel \\
&\leq M^2 \parallel g_i(s_i,u(s_i)) - g_i(s_i,0) + g_i(s_i,0) \parallel \\
&\quad + \tfrac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel \textstyle\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) + B(s)c(s)\Big]ds \parallel \\
&\quad + \tfrac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel \textstyle\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\Big[f(s,u(s),u(\rho(s))) + B(s)c(s)\Big]ds \parallel \\
&\leq M^2K \parallel u \parallel + M^2 \parallel g_i(s_i;0) \parallel \\
&\quad + \tfrac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(\tfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\Big)^{1-\tau} \Big[\parallel m(t) \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} + \parallel Bc \parallel_{L^{\frac{1}{\tau}}} \Big]\Big[M s_i^{\alpha-\tau} + t_{i+1}^{\alpha-\tau}\Big] \\
&\leq M^2Kr + (1-M^2K)\gamma_3 \\
&\leq r.
\end{aligned}
$$

étape 2: L'opérateur F_1 est une contraction .

Soient $u, v \in B_r$

- premier cas. Pour $t \in [0,t_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel F_1u(t)-F_1v(t)\parallel &\leq \parallel P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[P_\alpha(s_m-t_m)\Big(g_m(s_m,u(s_m))-g_m(s_m,v(s_m))\Big)\Big]\Big]\parallel\\
&\leq M^3\parallel g_m(s_m,u(s_m))-g_m(s_m,v(s_m))\parallel\\
&\leq M^3K\parallel u-v\parallel\\
&< \parallel u-v\parallel .
\end{aligned}$$

- Deuxièmes cas. Pour $t \in (t_i,s_i]; i=1;2;...;m$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel F_1u(t)-F_1v(t)\parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-t_i)\Big(g_i(t,u(t))-g_i(t,v(t))\parallel\\
&\leq MK\parallel u-v\parallel\\
&< \parallel u-v\parallel .
\end{aligned}$$

- Troisième cas. Pour $t \in (s_i,t_{i+1}]; i=1;2;...;m$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel F_1u(t)-F_1v(t)\parallel &\leq \parallel P_\alpha(t-s_i)P_\alpha(s_i-t_i)\Big(g_i(t,u(t))-g_i(t,v(t))\Big)\parallel\\
&\leq M^2\parallel g_i(t,u(t))-g_i(t,v(t))\parallel\\
&\leq M^2K\parallel u-v\parallel\\
&< \parallel u-v\parallel .
\end{aligned}$$

étape 3: L'opérateur F_2 est continue .
Soit $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ une suite dans $PC([0,a];X)$ tel que $u_n \longrightarrow u$.
D'après (H_4), on a
$f(s,u_n(s),u_n(\rho(s))) \longrightarrow f(s,u(s),u(\rho(s)))$

- Premier cas. Pour $t \in [0,t_1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel F_2u_n(t)-F_2u(t)\parallel \;\leq\; &\parallel P_\alpha(t)\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[-\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s)\\
&\times\Big(f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\Big)ds\Big]\\
&+\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)\Big(f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\Big)ds\Big]\parallel\\
&+\parallel\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Big(f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\Big)ds\parallel\\
\leq\; &\frac{\alpha M^3}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds\\
&+\frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds\\
&+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha M^3}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds$$
$$+\frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{a}(a-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds$$
$$+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds$$
$$\leq \frac{\alpha M^3}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC} ds$$
$$+\frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{a}(a-s)^{\alpha-1}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC} ds$$
$$+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC} ds$$
$$\leq \frac{M^3S_m^\alpha+M^2a_m^\alpha+Mt_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC}.$$

- Deuxième cas. Pour $t\in(t_i,s_i]$, on a :
  $\|F_2u_n(t)-F_2u(t)\|=0.$

- Troisième cas. Pour $t\in(s_i,t_{i+1}]$, on a :

$$\parallel F_2u_n(t)-F_2u(t)\parallel \leq \parallel P_\alpha(t-s_i)\Bigg[-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)$$
$$\times\Bigg(f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\Bigg)ds\Bigg]\parallel$$
$$+\parallel\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\Bigg(f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\Bigg)ds\parallel$$
$$\leq \frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds$$
$$+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,u_n(s),u_n(\rho(s)))-f(s,u(s),u(\rho(s)))\parallel ds$$
$$\leq \frac{\alpha M^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC} ds$$
$$+\frac{\alpha M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC} ds$$
$$\leq \left(\frac{M^2S_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{Mt_{i+1}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\parallel f(.,u_n(.),u_n(\rho(.)))-f(.,u(.),u(\rho(.)))\parallel_{PC}.$$

étape 4: L'opérateur F_2 est compact .

1. On a $F_2B_r\subseteq B_r$, alors F_2 est uniformément borné sur B_r.
2. On montre que $F_2(B_r(J))$ est équicontinue.
   - Premier cas $[0,t_1]$, $0\leq z_1\leq z_2\leq t_1$:

$$\|F_2u(z_2)-F_2u(z_1)\| \leq \parallel P_\alpha(z_2)-P_\alpha(z_1)\parallel\|\Bigg[P_\alpha(a-s_m)\Bigg[-\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}$$
$$\times Q_\alpha(s_m-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Bigg]+\int_0^{a}(a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Bigg]\parallel$$
$$+\parallel\int_0^{z_2}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds$$
$$-\int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_1-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\parallel$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \;\| P_\alpha(z_2) - P_\alpha(z_1) \|\|\Big[P_\alpha(a-s_m)\Big[-\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_m-s) \\
&\quad \times f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Big] + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(a-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds\Big] \| \\
&\quad + \| \int_0^{z_1}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad + \int_{z_1}^{z_2}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_1-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \| \\
&\leq \;\| P_\alpha(z_2) - P_\alpha(z_1) \| \Big[\| P_\alpha(a-s_m) \| \Big[\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(s_m-s) \| \\
&\quad \times \| f(s,u(s),u(\rho(s))) \| ds\Big] \\
&\quad + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(a-s) \|\| f(s,u(s),u(\rho(s))) \| ds\Big] \| \\
&\quad + \| \int_0^{z_1}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad + \int_{z_1}^{z_2}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_1-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad + \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \| \\
&\leq \; I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \| P_\alpha(z_2) - P_\alpha(z_1) \| \Big[\| P_\alpha(a-s_m) \| \Big[\int_0^{s_m}(s_m-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(s_m-s) \| \\
&\quad \times \| f(s,u(s),u(\rho(s))) \| ds\Big] \\
&\quad + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(a-s) \|\| f(s,u(s),u(\rho(s))) \| ds\Big], \\
I_2 &= \| \int_0^{z_1}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \|, \\
I_3 &= \| \int_{z_1}^{z_2}(z_2-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \|, \\
I_4 &= \| \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_2-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \\
&\quad - \int_0^{z_1}(z_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(z_1-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds \|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \parallel P_\alpha(z_2) - P_\alpha(z_1) \parallel \Bigg[M \Bigg[\tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{s_m} (s_m - s)^{\alpha-1} L(1+ \parallel u(s) \parallel^\mu + \parallel u(\rho(s)) \parallel^\nu) ds \Bigg] \\
&\quad + \tfrac{M\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} L(1+ \parallel u(s) \parallel^\mu + \parallel u(\rho(s)) \parallel^\nu) ds \Bigg] \\
&\leq \parallel P_\alpha(z_2) - P_\alpha(z_1) \parallel \Bigg[\tfrac{M^2 s_m^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L(1+2r) + \tfrac{M a_m^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L(1+2r) \Bigg] \longrightarrow 0, z_2 - z_1 \longrightarrow 0. \\
I_2 &\leq \parallel \int_0^{z_1} \Big((z_2 - s)^{\alpha-1} - (z_1 - s)^{\alpha-1} \Big) Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
&\leq \tfrac{M}{\Gamma(\alpha+1)} L(1+2r)(z_2 - z_1)^\alpha \longrightarrow 0, z_2 - z_1 \longrightarrow 0. \\
I_3 &\leq \parallel \int_{z_1}^{z_2} (z_2 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
&\leq \tfrac{M}{\Gamma(\alpha+1)} L(1+2r)(z_2 - z_1)^\alpha \longrightarrow 0, z_2 - z_1 \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Soit $\epsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \parallel \int_0^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} \Big(Q_\alpha(z_2 - s) - Q_\alpha(z_1 - s) \Big) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
&\leq \parallel \int_0^{z_1-\epsilon} (z_1 - s)^{\alpha-1} \Big(Q_\alpha(z_2 - s) - Q_\alpha(z_1 - s) \Big) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \\
&\quad + \int_{z_1-\epsilon}^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} \Big(Q_\alpha(z_2 - s) - Q_\alpha(z_1 - s) \Big) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
&\leq \sup_{s \in [0, z_1-\epsilon]} \parallel Q_\alpha(z_2 - s) - Q_\alpha(z_1 - s) \parallel L(1+2r) \int_0^{z_1-\epsilon} (z_1 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + 2ML(1+2r) \int_{z_1-\epsilon}^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}
$$

$I_4 \longrightarrow 0$ lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ et $z_2 - z_1 \longrightarrow 0$.

- Deuxième cas $(t_i, s_i],\ i = 1, 2, ..., m,\ t_i < z_1 \leq z_2 \leq s_i$:
  $\|F_2 u(z_2) - F_2 u(z_1)\| = 0.$
- Troisième cas $(s_i, t_{i+1}]\ i = 1, 2, ..., m,\ s_i < z_1 \leq z_2 \leq t_{i+1}$:

$$
\begin{aligned}
\|F_2 u(z_2) - F_2 u(z_1)\| &\leq \parallel P_\alpha(z_2 - s_i) - P_\alpha(z_1 - s_i) \parallel \\
&\quad + \parallel \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel + \parallel \int_0^{z_2} (z_2 - s)^{\alpha-1} \\
&\quad \times Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds - \int_0^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_1 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
&\leq I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
I'_1 &= \parallel P_\alpha(z_2 - s_i) - P_\alpha(z_1 - s_i) \parallel \parallel \int_0^{s_i} (s_i - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_i - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel, \\
I'_2 &= \parallel \int_0^{z_1} (z_2 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \\
&\quad - \int_0^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
I'_3 &= \parallel \int_{z_1}^{z_2} (z_2 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel \\
I'_4 &= \parallel \int_0^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_2 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \\
&\quad - \int_0^{z_1} (z_1 - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(z_1 - s) f(s, u(s), u(\rho(s))) ds \parallel
\end{aligned}
$$

D'une façon similaire à la preuve du premier cas, on montre que :

$I'_1 \longrightarrow 0$, $I'_2 \longrightarrow 0$, $I'_3 \longrightarrow 0$, $I'_4 \longrightarrow 0$ quand $z_2 - z_1 \longrightarrow 0$.

– $\{F_2 u(t), u \in B_r\}$ est relativement compact dans $PC(J, X)$
$F_2 B_r(0) = \{u(a)\}$ est compact.
Avec $u(a) = \Bigg[P_\alpha(a - s_m)\Big[-\int_0^{s_m}(s_m - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(s_m - s) f(s, u(s), u(\rho(s)))ds\Big] + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(a-s) f(s, u(s), u(\rho(s)))ds\Bigg]$.
Pour $t \in [0, t_1]$.
Pour tout $\epsilon \in (0, t)$ et $\delta > 0$, on définit l'ensemble :

$$F_2^{\epsilon,\delta}(B_r)(t) = \Big\{F_2^{\epsilon,\delta} x(t); x \in B_r\Big\}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{\epsilon,\delta} x(t) &= P_\alpha(t)(u(a)) + \alpha \int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \\
&= P_\alpha(t)(u(a)) + \alpha \int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)\left[T(\epsilon^\alpha\delta) T((t-s)^\alpha\theta - \epsilon^\alpha\delta)\right] \\
&\quad \times f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \\
&= P_\alpha(t)(u(a)) + \alpha T(\epsilon^\alpha\delta)\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta - \epsilon^\alpha\delta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds.
\end{aligned}$$

(Remarquons que $\theta \geq \delta$ et $t - \epsilon \geq s$, donc $(t-s)^\alpha\theta - \epsilon^\alpha\delta \geq 0$) alors l'opérateur $T(\epsilon^\alpha\delta)$ $(\epsilon^\alpha\delta > 0)$ est compact, l'ensemble $F_2^{\epsilon,\delta} B_r(t)$ est relativement compact dans X.
D'où, pour tout $x \in B_r$ on obtient

$$\begin{aligned}
\| F_2 x(t) - F_2^{\epsilon,\delta} x(t) \| &\leq \alpha \| \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))ds \\
&\quad + \int_0^t \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \\
&\quad - \int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \| \\
&\leq G_1 + G_2,
\end{aligned}$$

avec

$$G_1 = \alpha \| \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \|,$$

et

$$G_2 = \alpha \| \int_{t-\epsilon}^t \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta) T((t-s)^\alpha\theta) f(s, x(s), x(\rho(s)))d\theta ds \| .$$

On a

$$\begin{aligned}
G_1 &\leq \alpha M \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s, x(s), x(\rho(s))) \| ds \int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\
&\leq M_A t_1^\alpha [L(1+2r)] \int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_2 &\leq \alpha M \int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s, x(s), x(\rho(s))) \| ds \int_\delta^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\
&\leq M\epsilon^\alpha [L1 + 2r] \int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta \\
&\leq \frac{M[L1+2r]}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Donc, $\| (F_2 x(t) - F_2^{\epsilon,\delta} x(t) \| \longrightarrow 0$, lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$ et $\delta \longrightarrow 0$.

Alors, il existe un sous ensemble relativement compact fermé de $F_2 B_r(t)$.

D'où $F_2B_r(t)$ est relativement compact sur X.

Pour $t_i < t \leq s_i$, $i = 1, 2, ..., m$, on a

$F_2B_r(t) = \{0, x \in B_r\}$ est compact.

Pour $s_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., m$,
$F_2B_r(t) = \Big\{P_\alpha(t-s_i)\Big[P_\alpha(s_i-t_i)g_i(s_i, u(s_i)) - \int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\Big[f(s, u(s), u(\rho(s)))$
$+ B(s)c(s)\Big]ds\Big] + \int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)f(s, x(s), x(\rho(s)))ds, x \in B_r\Big\}$.

D'une façon similaire à la preuve du premier cas ($t \in [0, t_1]$) et puisque $P_\alpha(t-s_i)$ est un opérateur compact.

D'où $F_2B_r(t)$ est relativement compact.

□

3.1.4 Exemples.

Dans cette partie, on donne deux exemples pour illustrer nos résultats.

Dans toute la suite, on pose $X = L^2(0,1)$, $J = [0,1]$, $t_0 = s_0 = 0$, $t_1 = 1$, $s_1 = 2$, $a = 3$.

On définit $Ax = \dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 x}$ pour $v \in D(A) = \Big\{v \in X : \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 x} \in X, v(0) = v(1) = 0\Big\}$.

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ sur X. De plus, $(T(t))_{t\geq 0}$ est compact et $\| T(t) \| \leq 1 = M_A$, pour tout $t \geq 0$. Pour plus de détails, on se réfère à [33].

Exemple 1.

Considérons le problème à valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_t^{\frac{3}{4}}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(t,x) + \frac{1}{12}cos(u(t,x) + u(t^2,x) + c(t,x); x \in (0,1) t \in [0,1) \cup (2,3]; \\ u(t) = P_\alpha(t-1)\frac{1}{4}sin(u(t,x)) \quad x \in (0,1); \quad t \in (1,2] \\ u(0,x) = u(3,x); x \in (0,1) \\ \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = 0 \quad t \in [0,1) \cup (2,3]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Notons $v(t)(x) = u(t,x)$ et $B(t)c(t)(x) = c(t,x)$. Alors le problème (3.2) devient :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha v(t)(x) = Av(t)(x) + f(t, v(t), v(\rho(t))) + B(t)c(t)(x), t \in (s_i, t_{i+1}], \\ \qquad\qquad i = 0,1; c \in U_{ad}, \\ v(t) = P_\alpha(t-t_i)g_i(t, u(t)) \quad t \in (t_1, s_1]; \\ v(0) = v(a) \in X. \end{cases} \tag{3.3}$$

Avec
$\rho(t) = t^2, \qquad f(t, v(t), v(\rho(t)))(x) = \frac{1}{12}cos(v(t)(x) + v(t^2)(x))$

$g_1(t, v(t)) = \frac{1}{4}sin(v(t)(x)), \qquad \tau = \frac{1}{2}$.

Alors,

$M = 1, C_f = L_f = \frac{1}{12}, K = \frac{1}{4}, \lambda = \frac{1}{6} < 1.$

Toutes les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées. Par conséquent, il existe une unique solution intégrale du problème (3.2).

Exemple 2.

On considère :

$$\begin{cases} {}^cD_t^{\frac{3}{4}}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(t,x) + \frac{e^t}{12}cos(u(t,x) + u(t^2,x) + c(t,x); x \in (0,1) t \in [0,1) \cup (2,3]; \\ u(t) = P_\alpha(t-1)\frac{1}{4}sin(u(t,x)) \quad x \in (0,1); \quad t \in (1,2] \\ u(0,x) = u(3,x); x \in (0,1) \\ \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = 0 \quad t \in [0,1) \cup (2,3] \end{cases} \tag{3.4}$$

Notons $v(t)(x) = u(t,x)$ et $B(t)c(t)(x) = c(t,x)$. Alors le problème (3.4) peut être transformé en (3.3), avec $\rho(t) = t^2$, $\quad f(t, v(t), v(\rho(t)))(x) = \frac{e^t}{12}cos(v(t)(x) + v(t^2)(x))$

$g_1(t, v(t)) = \frac{1}{4}sin(v(t)(x))$ et $\tau = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas $M = 1, K = \frac{1}{4}$, et $\lambda' = \frac{1}{4} < 1$.

Toutes les hypothèses du théorème (3.2) sont vérifiées. Par conséquent, il existe une unique solution intégrale du problème (3.4).

Chapitre 4

Résultats d'existence de la solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive non locale

Les résultats présentés dans cette partie, qui sont issus de [17], sont développés en vue d'étudier une équation intégro-différentielle fractionnaire impulsive non locale.
La notions de condition non locales a été initiée par L.Byzewski et V.Lakshmikantham [4].

4.1 Équation intégro-différentielle fractionnaire évolutive impulsive non locale.

4.1.1 Position du problème .

Dans cette section, On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), Fx(t), Bx(t)) + \int_0^t q(t-s)k(s, x(s))ds + C(t)u(t), \quad t \in (s_i, t_{i+1}], \\ \hfill i = 0, 1, 2, ..., m, \; u \in U_{ad}, \\ {}^cD^{\beta}x(t) = g_i(t, x(t)), \quad t \in (t_i, s_i], \quad i = 1, 2, ..., m, \\ x(0) = x_0 + h(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

où :
*${}^cD^{\alpha}$, ${}^cD^{\beta}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo. $\Big(0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1\Big)$.

*$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ génère un C_0 semi-groupe compact $T(t), t \geq 0$ dans un espace de Banach X,

* les nombres fixes s_i et t_i satisfont :
$0 = s_0 < t_1 \leq s_1 < t_2 \leq .... < t_m \leq s_m < t_{m+1} = a$,

* les fonctions $g_i \in C(J \times X; X)$,

* les opérateurs $F, B : C(J; X) \to C(J; X)$ sont définies par $Bx(t) = \int_0^t B(t, s)x(s)ds$, $Fx(t) = \int_0^t F(t, s)x(s)ds$ et $\{F(t, s); t, s \in J\}$, $\{B(t, s); t, s \in J\}$ sont des ensembles linéaires bornées tels que :

$F(t,.)x \in C([0,t];X)$, $F(.,s) \in C([s,T];X)$, $\forall t,s \in J$, $B(t,.)x \in C([0,t];X)$, $B(.,s) \in C([s,T];X)$, $\forall t,s \in J$ et $F^* = \underset{t\in J}{sup} \int_0^t \| F(t,s) \|_{L(X)} ds$,
$B^* = \underset{t\in J}{sup} \int_0^t \| B(t,s) \|_{L(X)} ds$, $q^* = \underset{s\in J}{sup} \int_0^s \|q(s-t)\|dt$ et U_{ad} l'ensemble qu'on a définit dans le chapitre précédent.

Posons $J=[0,T]$, $J_0=[0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2]$,..., $J_{m-1}=(t_{m-1},t_m]$, $J_m=(t_m,t_{m+1}]$ et introduisons l'espace $PC(J,X) := \{x : J \to X : x \in C((t_i,t_{i+1}],X), i=0,1,...,m$ et il existe $x(t_i^-)$ et $x(t_i^+), i=1,...,m$ avec $x(t_i^-)=x(t_i^+)\}$. Il est clair que $PC(J,X)$ est un espace de Banach avec la norme $\|x\|_{PC} = sup\{\|x(t)\| : t \in J\}$.
On suppose que $x(t)$ est continue en $t=s_i$ et $t=t_i$.

les hypothèses

Avant de présenter nos résultats, nous introduisons les hypothèses suivantes :
- (H_1) : A est le générateur d'un semi-groupe fortement continue compact $T(t), t \geq 0$ dans l'espace de Banach X tel que $\|T(t)\| \leq M$ pour tout $t \in J$,

- (H_2)-$C : [0,a] \longrightarrow L(Y,X)$ est essentiellement bornée i.e : $C \in L^{\infty}([0,a];L(Y,X))$,

- (H_3) Les fonctions $f \in C(J \times X \times X \times X;X)$,et $k \in C(J \times X;X)$,

- (H_4) Il existe $C_f, L_f, M_f, L_k > 0$ telles que :
- $\| f(t,x_1,y_1,z_1) - f(t,x_2,y_2,z_2) \| \leq L_f \| x_1 - x_2 \| + C_f \| y_1 - y_2 \| + M_f \| z_1 - z_2 \|$, pour toutes $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 \in X$, et $t \in J$,
- $\| k(t,x_1) - k(t,x_2) \| \leq L_k \| x_1 - x_2 \|$, pour toutes $x_1,x_2 \in X$, et $t \in J$,
- (H_5) Il existe $D, D' > 0$ telles que :
- $\| f(t,x,y,z) \| \leq D \left(1 + \| x \|^{\mu} + \| y \|^{\nu} + \| z \|^{\phi}\right)$ pour tout $t \in J$ et $x,y,z \in X$, $\mu,\nu,\phi \in [0,1]$,
- $\| k(t,x) \| \leq D' \left(1 + \| x \|^{\mu'}\right)$ pour tout $t \in J$ et $x \in X$, $\mu' \in [0,1]$,
- (H_6) Pour toutes $i=1,2,...,m$, $g_i \in C(J \times X;X)$,

- Il existe $L_g > 0$ tel que $\| g_i(t,x) - g_i(t,y) \| \leq L_g \| x - y \|$, pour toutes $x,y \in X$,
- Il existe une fonction $t \to \varphi_i(t)$ tel que $\| g_i(t,x(t)) \| \leq \varphi_i(t)$, $\forall t \in J$, $x \in X$, $L_{g_i} = \sup_{t\in J} \varphi_i(t)$ et $L'_g = \underset{1\leq i\leq m}{max} L_{g_i}$,
- $h : PC(J;X) \to X$ et il existe $L_h > 0$ et $\varphi_h \in C([0,\infty);\mathbb{R}^+)$ pour tout $x,y \in PC(J;X)$, $\| h(x) - h(y) \| \leq L_h \| x - y \|_{PC}$, $\| h(x) \| \leq \varphi_h(t)$ et $L'_h = \sup_{t\in J} \varphi_h(t)$.

4.1.2 Construction de la solution intégrale.

On considère dans l'espace $PC(J,X)$ le problème fractionnaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t,x(t),Fx(t),Bx(t)) + \int_0^t q(t-s)k(s,x(s))ds + C(t)u(t), \quad t \in (s_i,t_{i+1}], \\ \hfill i=0,1,2,...,m, \ u \in U_{ad}, \\ {}^cD^{\beta}x(t) = g_i(t,x(t)), \quad t \in (t_i,s_i], \quad i=1,2,...,m, \\ x(0) = x_0 + h(x). \end{cases}$$

D'après les propriétés de la dérivée de Caputo, une solution intégrale peut être écrite de la manière suivante :

$$x(t)=\begin{cases} x_0+h(x)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\big[Ax(s)+f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\\ +C(s)u(s)\big]ds,\quad t\in(0,t_1],\\ d_{1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_1(s,x(s))ds,\quad t\in(t_1,s_1],\\ K_{1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\big[Ax(s)+f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\\ +C(s)u(s)\big]ds,\quad t\in(s_1,t_2],\\ .\\ .\\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds,\quad t\in(t_i,s_i],\\ K_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\big[Ax(s)+f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\\ +C(s)u(s)\big]ds,\quad t\in(s_i,t_{i+1}],\end{cases}$$

où d_{ix} and K_{ix}, $i=1,2,...,m$, sont des éléments de X.
En se basant sur les méthodes utilisées dans [14](pages 5 et 6), on obtient :

$$x(t)=\begin{cases} d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds,\quad t\in(t_i,s_i],1\le i\le m,\\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\\ +C(s)u(s)\big]ds,\quad t\in(s_i,t_{i+1}],0\le i\le m,\\ K_{0x}=x(0).\end{cases}$$

Et en utilisant la continuité de x aux points t_i, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t_i) &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\ &\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\big]ds\\ &= d_{ix}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\ &\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\big]ds-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de x aux points s_i, on obtient :

$$\begin{aligned} x(s_i) &= d_{ix}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds\\ &= K_{ix}+\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\left[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\right]ds.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} K_{ix} &= d_{ix}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds-\\ &\quad-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\left[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\right]ds\end{aligned}.$$

Par suite, une solution intégrale du problème (3.1) est donnée par

$$x(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)(x_0+h(x))+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \quad t\in(0,t_1], \\ d_{1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_1(s,x(s))ds, \quad t\in(t_1,s_1], \\ P_\alpha(t-s_1)K_{1x}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \quad t\in(s_1,t_2], \\ . \\ . \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i], 1\le i\le m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \quad t\in(s_i,t_{i+1}], 1\le i\le m, \end{cases}$$

où
$K_{0x}=x_0+h(x)$,

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\ &\quad +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\big]ds-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \\ K_{ix} &= d_{ix}-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ &\quad +C(s)u(s)\big]ds+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Définition 4.1 *Une fonction $x\in PC(J,X)$ est dite solution intégrale du problème* (3.1) *si elle satisfait la relation suivante :*

$$x(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)K_{0x}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \quad t\in(0,t_1], \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i], 1\le i\le m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \\ \quad t\in(s_i,t_{i+1}], 1\le i\le m. \end{cases}$$

Où
$K_{0x}=x_0+h(x)$,

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\ &\quad +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\big]ds-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \\ K_{ix} &= d_{ix}-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ &\quad +C(s)u(s)\big]ds+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

4.1.3 Étude d'existence et d'unicité de la solution intégrale du problème.

Théorème 4.1 *Si les hypothèses $(H_1)-(H_4)$, (H_6) sont satisfaites et*

$$\Big[M^{m+1}L_h+\frac{MT^\alpha+M^2(t_m^\alpha+s_m^\alpha)+..+M^{m+1}(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*) \\ +\frac{ML_g(t_m^\beta+s_m^\beta)+..+M^mL_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\Big]<1.$$

Alors le problème (4.1) *admet une unique solution.*

Preuve.
Posons

$$Px(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)K_{0x}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \quad t\in(0,t_1], \\ d_{ix}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \quad t\in(t_i,s_i], 1\le i\le m, \\ P_\alpha(t-s_i)K_{ix}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ +C(s)u(s)\big]ds, \\ \quad t\in(s_i,t_{i+1}], 1\le i\le m. \end{cases}$$

Où
$K_{0x}=x_0+h(x)$,

$$\begin{aligned} d_{ix} &= P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\ &\quad +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau+C(s)u(s)\big]ds-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, \\ K_{ix} &= d_{ix}-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ &\quad +C(s)u(s)\big]ds+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

En se basant sur les hypothèses, il est facile de montrer que P est bien définie sur $PC(J,X)$. Soient $x,y\in PC(J,X)$.

premier cas. pour $t\in[0,t_1]$, on a

$$\begin{aligned} \|(Px)(t)-(Py)(t)\| &\le \|P_\alpha(t)\,(x_0+h(x)-x_0-h(y))\,\| \\ &\quad +\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \\ &\quad +C(s)u(s)-f(s,y(s),Fy(s),By(s))-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau-C(s)u(s)]ds\| \\ &\le M_A\|h(x)-h(y)\|+\frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\parallel f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\ &\quad -f(s,y(s),Fy(s),By(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau\parallel ds \\ &\le M_AL_h\parallel x-y\parallel_{PC}+\frac{\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}(L_f\parallel x(s)-y(s)\parallel \\ &\quad +C_f\parallel Fx(s)-Fy(s)\parallel+M_f\parallel Bx(s)-By(s)\parallel+q^*L_k\parallel x(s)-y(s)\parallel)ds \\ &\le M_AL_h\parallel x-y\parallel_{PC}+\frac{M_At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)\parallel x-y\parallel_{PC} \\ &\le [M_AL_h+\frac{M_At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)]\parallel x-y\parallel_{PC}. \end{aligned}$$

Deuxième cas. Pour $t\in(t_i,s_i]\cup(s_i,t_{i+1}]$.

On montre pour $t\in(t_i,s_i],\ i=1,2,...,m$:

$$\begin{aligned} \parallel(Px)(t)-(Py)(t)\parallel &\le [M_A^iL_h+\frac{M_At_i^\alpha+M_A^2(t_{i-1}^\alpha+s_{i-1}^\alpha)+...+M_A^i(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad \times(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*) \\ &\quad +\frac{L_g(t_i^\beta+s_i^\beta)+M_AL_g(t_{i-1}^\beta+s_{i-1}^\beta)+...+M_A^{i-1}L_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}]\parallel x-y\parallel_{PC}, \end{aligned}$$

et pour $t\in[s_i,t_{i+1}],\ i=1,2,...,m$,

$$\begin{aligned} \parallel(Px)(t)-(Py)(t)\parallel &\le [M_A^{i+1}L_h+\frac{M_At_{i+1}^\alpha+M_A^2(t_i^\alpha+s_i^\alpha)+...+M_A^{i+1}(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad (L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*) \\ &\quad +\frac{M_AL_g(t_i^\beta+s_i^\beta)+...+M_A^{i-1}L_g(t_2^\beta+s_2^\beta)+M_A^iL_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}]\parallel x-y\parallel_{PC}. \end{aligned}$$

Pour $t\in(t_1,s_1]$

$$
\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq \| d_1x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}g_1(s,x(s))ds\\
&\quad -d_1y-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}g_1(s,y(s))ds \|\\
&\leq \| d_1x-d_1y \| +\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\| g_1(s,x(s))-g_1(s,y(s)) \| ds\\
&\leq \| P_\alpha(t_1)(h(x)-h(y)) \| + \| \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_1-s)\\
&\quad \times[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))-f(s,y(s),Fy(s),By(s))\\
&\quad +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau]ds \|\\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t-s)^{\beta-1}(g_1(s,x(s))-g_1(s,y(s)))ds \|\\
&\quad + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\beta-1}(g_1(s,x(s))-g_1(s,y(s)))ds \|\\
&\leq M_AL_h \| x-y \|_{PC}\\
&\quad +\frac{M_At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*) \| x-y \|_{PC}\\
&\quad +\frac{(s_1^\beta+t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}L_g \| x-y \|_{PC}\\
&\leq \left[M_AL_h+\frac{M_At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)+\frac{(s_1^\beta+t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}L_g\right]\\
&\quad \times \| x-y \|_{PC}\ .
\end{aligned}
$$

Pour $t\in(s_1,t_2]$

$$
\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq \| P_\alpha(t-s_1)K_{1x}-P_\alpha(t-s_1)K_{1y} \|\\
&\quad + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)[\| f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad -f(s,y(s),Fy(s),By(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\\
&\quad -\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau]ds \|\\
&\leq M_A \| d_{1x}-d_{1y} \| +M_A \| \int_0^{s_1}(s_1-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_1-s)\\
&\quad \times[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))-f(s,y(s),Fy(s),By(s))\\
&\quad +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau]ds \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+M_A \| \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_1}(s_1-s)^{\beta-1}\left[g_1(s,x(s))-g_1(s,y(s))\right]ds \|\\
&+ \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))-f(s,y(s),Fy(s),By(s))\\
&+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,y(\tau))d\tau]ds \|\\
\leq\ &\big[M_A^2L_h+\frac{M_A^2t_1^\alpha+M_A^2s_1^\alpha+M_At_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)\\
&+\frac{M_AL_g(s_1^\beta+t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\big] \| x-y \|_{PC}\ .
\end{aligned}
$$

On suppose pour $1\leq j\leq i$ on a :
pour $t\in(t_j,s_j]$

$$
\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq [M_A^jL_h+\frac{M_At_j^\alpha+M_A^2(t_{j-1}^\alpha+s_{j-1}^\alpha)+M_A^3(t_{j-2}^\alpha+s_{j-2}^\alpha)+..+M_A^j(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&\quad \times(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)\\
&\quad +\frac{L_g(t_j^\beta+s_j^\beta)+M_AL_g(t_{j-1}^\beta+s_{j-1}^\beta)+..+M_A^{j-1}L_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC},
\end{aligned}
$$

et pour $t\in(s_j,t_{j+1}]$,

$$
\begin{aligned}
\| (Px)(t)-(Py)(t) \| &\leq M_A[M_A^jL_h+\frac{t_{j+1}^\alpha+M_A(t_j^\alpha+s_j^\alpha)+..+M_A^{j-1}(t_2^\alpha+s_2^\alpha)+M_A^j(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&\quad \times(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)\\
&\quad +\frac{L_g(t_j^\beta+s_j^\beta)+..+M_A^{j-2}L_g(t_2^\beta+s_2^\beta)+M_A^{j-1}L_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x-y \|_{PC}\ .
\end{aligned}
$$

On montre cette relation pour $j=i+1$.

Pour $t \in (t_{i+1}, s_{i+1}]$

$$\begin{array}{rcl}
\| (Px)(t) - (Py)(t) \| & \leq & \| d_{i+1}x + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, x(s))ds - d_{i+1}y \\
& & - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g_{i+1}(s, y(s))ds \| \\
& \leq & \| d_{i+1}x - d_{i+1}y \| + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \| g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s)) \| ds \\
& \leq & \| P_\alpha(t_{i+1} - s_i)(K_{ix} - K_{iy}) \| + \| \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t_{i+1} - s) \\
& & \times [f(s, x(s), Fx(s), Bx(s)) - f(s, y(s), Fy(s), By(s)) \\
& & - \int_0^s q(s-\tau)k(\tau, y(\tau))d\tau + \int_0^s q(s-\tau)k(\tau, x(\tau))d\tau \|]ds \\
& & + \| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{\beta-1} (g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s))ds \| \\
& & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \| (g_{i+1}(s, x(s)) - g_{i+1}(s, y(s))) \| ds \\
& \leq & [M_A^{i+1} L_h + \frac{M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2 (t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& & \times (L_f + q^* L_k + M_f B^* + C_f F^*) \\
& & + \frac{L_g(t_{i+1}^\beta + s_{i+1}^\beta) + M_A^i L_g(t_1^\beta + s_1^\beta) + ... + M_A L_g(t_i^\beta + s_i^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}] \| x - y \|_{PC} .
\end{array}$$

Pour $t \in (s_{i+1}, t_{i+2}]$

$$\begin{array}{rcl}
\| (Px)(t) - (Py)(t) \| & \leq & \| P_\alpha(t - s_{i+1}) K_{(i+1)x} - P_\alpha(t - s_{i+1}) K_{(i+1)y} \| \\
& & + \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s)[f(s, x(s), Fx(s), Bx(s)) \\
& & - f(s, y(s), Fy(s), By(s)) + \int_0^s q(s-\tau)k(\tau, x(\tau))d\tau \\
& & - \int_0^s q(s-\tau)k(\tau, y(\tau))d\tau]ds \| \\
& \leq & \leq M_A[\| d_{(i+1)x} - d_{(i+1)y} \| + \frac{s_{i+1}^\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + q^* L_k + M_f B^* + C_f F^*) \\
& & \times \| x - y \|_{PC} + \frac{s_{i+1}^\beta}{\Gamma(\beta+1)} L_g \| x - y \|_{PC} \\
& & + \frac{t_{i+2}^\alpha M_A}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f + q^* L_k + M_f B^* + C_f F^*) \| x - y \|_{PC} \\
& \leq & \Bigg[M_A \Bigg[M_A^{i+1} L_h \\
& & + \frac{t_{i+2}^\alpha + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha) + .. + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + M_A(t_{i+1}^\alpha + s_{i+1}^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& & \times (L_f + q^* L_k + M_f B^* + C_f F^*) \Bigg] + \\
& & + \frac{M_A L_g(s_{i+1}^\beta + t_{i+1}^\beta) + M_A^2 L_g(s_i^\beta + t_i^\beta) + .. + M_A^{i+1} L_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \Bigg] \\
& & \times \| x - y \|_{PC} .
\end{array}$$

Alors, P est une contraction sur l'espace $PC(J, X)$.
D'où P admet un point fixe unique $x \in PC(J, X)$.

□

4.1.4 Etude d'existence de la solution intégrale .

Théorème 4.2 *Si les hypothèses $(H_1) - (H_3)$, et $(H_5) - (H_6)$ sont satisfaites. De plus, la condition suivante est vérifiée :*

$max\left\{A;B\right\}<1.$

Alors le problème (4.1) *admet au moins une solution intégrale.*
Avec

$$A=M_A^{m+1}L_h+\frac{M_AL_g(s_m^\beta+t_m^\beta)+M_A^2L_g(s_{m-1}^\beta+t_{m-1}^\beta)+...+M_A^mL_g(s_1^\beta+t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$B=\frac{[M_AT^\alpha+M_A^2(t_m^\alpha+s_m^\alpha)+...+M_A^{m+1}(t_1^\alpha+s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)}(D(1+B^*+F^*)+D'q^*).$$

Preuve.
On introduit la décomposition $Q=Q_1+Q_2$ telles que :

$$Q_1x(t)=\begin{cases} P_\alpha(t)(x_0+h(x))+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, & t\in[0,t_1],\\ d_{i1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds, & t\in(t_i,s_i],\ i=1,2,..,m,\\ P_\alpha(t-s_i)K_{i1x}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)C(s)u(s)ds, & t\in(s_i,t_{i+1}],\ i=1,2,..,m,\end{cases}$$

$$Q_2x(t)=\begin{cases} \int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\right]ds, \quad t\in[0,t_1],\\ d_{i2x}, \quad t\in(t_i,s_i], \quad i=1,2,..,m,\\ P_\alpha(t-s_i)K_{i2x}+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)\left[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\right]ds,\\ \quad t\in(s_i,t_{i+1}],\ i=1,2,..,m,\end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} d_{i1x}=P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)1x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)C(s)u(s)ds-\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds,\\ \qquad i=1,2,..,m,\\ K_{i1x}=d_{i1x}+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\beta-1}g_i(s,x(s))ds-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)C(s)u(s)ds,\ i=1,2,..,m,\\ K_{01x}=x_0+h(x),\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d_{i2x}=P_\alpha(t_i-s_{i-1})K_{(i-1)2x}+\int_0^{t_i}(t_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t_i-s)\big[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)),\\ +\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\big]ds,\ i=1,2,..,m,\\ K_{i2x}=d_{i2x}-\int_0^{s_i}(s_i-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(s_i-s)\left[f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\right]ds,\\ \hfill i=1,2,..,m,\\ K_{02x}=0.\end{cases}$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes .

étape 1: On montre que $QB_r(J)\subset B_r(J)$
avec $B_r=\{x\in PC(J,X);\|x\|\leq r\}$ est la boule de rayon $r>0$,

et $K_{\alpha,\tau}=\alpha\left(\dfrac{1-\tau}{\alpha-\tau}\right)^{1-\tau}\|Cu\|_{L^{1/\tau}}$,

$$\gamma_1=M_A^{m+1}\left[\|x_0\|+L'_h\right]+\frac{M_A[(D+D'q^*)T^\alpha+K_{\alpha,\tau}T^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\gamma_2=\sum_{k=2}^{m+1}\frac{M_A^k[(D+D'q^*)(t_{m+2-k}^\alpha+s_{m+2-k}^\alpha)+K_{\alpha,\tau}(t_{m+2-k}^{\alpha-\tau}+s_{m+2-k}^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\gamma_3 = \frac{M_A L'_g(t_i^\beta + s_m^\beta) + M_A^2 L'_g(t_{m-1}^\beta + s_{m-1}^\beta) + ... + M_A^m L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)},$$
$$B = \frac{[M_A T^\alpha + M_A^2(t_m^\alpha + s_m^\alpha) + ... + M_A^{m+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)}(D(1+B^*+F^*)+D'q^*).$$

Dans ce cas $\quad \dfrac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-B} < r.$

pour tout $x \in B_r$, on a :

premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A [\| x_0 \| + L'_h] + \frac{M_A t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} [D(1 + r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)] + \frac{K_{\alpha,\tau} t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha+1)} M_A \\
&\leq M_A \left[\| x_0 \| + L'_h + \frac{(D+D'q^*)t_1^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_1^{\alpha-\tau}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] + M_A \frac{(D(1+B^*+F^*)+D'q^*)t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

D'une façon similaire à la démonstration du théorème(4.1), on montre que :
deuxième cas. Pour $t \in (t_i, s_i], i = 1, 2, ..., m,$

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^i [\| x_0 \| + L'_h] + \frac{M_A[(D+D'q^*)t_i^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_i^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \sum_{k=2}^{k=i} \frac{M_A^k[(D+D'q^*)(t_{i+1-k}^\alpha + s_{i+1-k}^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_{i+1-k}^{\alpha-\tau} + s_{i+1-k}^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{L'_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A L'_g(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + .. + M_A^{i-1} L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+ \frac{[M_A t_i^\alpha + M_A^2(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + M_A^3(t_{i-1}^\alpha + s_{i-1}^\alpha) + .. + M_A^i(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)} (D(1+B^*+F^*) \\
&+ D'q^*))r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Troisième cas. Pour $t \in (s_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}
\| Qx(t) \| &\leq M_A^{i+1} [\| x_0 \| + L'_h] + \frac{M_A[(D+D'q^*)t_{i+1}^\alpha + K_{\alpha,\tau} t_{i+1}^{\alpha-\tau}]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \sum_{k=2}^{k=i+1} \frac{M_A^k[(D+D'q^*)(t_{i+2-k}^\alpha + s_{i+2-k}^\alpha) + K_{\alpha,\tau}(t_{i+2-k}^{\alpha-\tau} + s_{i+2-k}^{\alpha-\tau})]}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{M_A L'_g(t_i^\beta + s_i^\beta) + M_A^2 L'_g(t_{i-1}^\beta + s_{i-1}^\beta) + ... + M_A^i L'_g(t_1^\beta + s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} + \\
&+ \frac{[M_A t_{i+1}^\alpha + M_A^2(t_i^\alpha + s_i^\alpha) + ... + M_A^{i+1}(t_1^\alpha + s_1^\alpha)]}{\Gamma(\alpha+1)} (D(1+B^*+F^*)+D'q^*)r \leq r.
\end{aligned}$$

étape 2: Q_1 est une contraction sur B_r. Soit $x, y \in B_r$

premier cas. Pour $t \in [0, t_1]$, on a :
$\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| \leq M_A L_h \| x - y \|_{PC} < \| x - y \|_{PC}$.
D'une façon similaire à la démonstration du théorème(4.1), on montre que :
deuxième cas. Pour $t \in [t_i, s_i],\ 1 \leq i \leq m,$

$$\begin{aligned}
\| Q_1x(t) - Q_1y(t) \| &\leq \left[M_A^i L_h + \frac{L_g(s_i^\beta + t_i^\beta) + M_A L_g(s_{i-1}^\beta + t_{i-1}^\beta) + ... + M_A^{i-1} L_g(s_1^\beta + t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \\
&\times \| x - y \|_{PC} \\
&< \| x - y \|_{PC}\ .
\end{aligned}$$

Pour $t \in (s_i, t_{i+1}], 1 \leq i \leq m,$

$$
\begin{aligned}
\| Q_1x(t)-Q_1y(t) \| &\leq \left[M_A^{i+1}L_h+\frac{M_AL_g(s_i^\beta+t_i^\beta)+M_A^2L_g(s_{i-1}^\beta+t_{i-1}^\beta)+...+M_A^iL_g(s_1^\beta+t_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right]\\
&\quad\times \| x-y \|_{PC}\\
&< \| x-y \|_{PC} .
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que Q_1 est une contraction.

étape 3: Q_2 est continue .

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \| x_n-x \|_{PC}=0$, on a :

premier cas. Pour $t\in[0,t_1]$

$$
\begin{aligned}
\| Q_2x_n(t)-Q_2x(t) \| &\leq \| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t-s)([f(s,x_n(s),Fx_n(s),Bx_n(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x_n(\tau))d\tau-f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad-\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau]ds \|\\
&\leq \frac{M_At_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg(\| f(.,x_n(.),Fx_n(.),,Bx_n(.))-f(.,x(.),Fx(.),Bx(.)) \|_{PC}\\
&\quad+ \| q^*[k(.,x_n(.))-k(.,x(.))] \|_{PC} \Bigg).
\end{aligned}
$$

D'une façon similaire à la démonstration du théorème(4.1), on montre que :

deuxième cas . Pour $t\in(t_i,s_i],\ i=1,2,...,m,$

$$
\begin{aligned}
\| Q_2x_n(t)-Q_2x(t) \| &\leq \left[\frac{M_At_i^\alpha+M_A^2(t_{i-1}^\alpha+s_{i-1}^\alpha)+...+M_A^i(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\times\\
&\quad\Bigg(\| f(.,x_n(.),Fx_n(.),,Bx_n(.))-f(.,x(.),Fx(.),Bx(.)) \|_{PC}\\
&\quad+ \| q^*[k(.,x_n(.))-k(.,x(.))] \|_{PC} \Bigg).
\end{aligned}
$$

Troisième cas. Pour $t\in(s_i,t_{i+1}]$,

$$
\begin{aligned}
\| Q_2x_n(t)-Q_2x(t) \| &\leq \left[\frac{M_At_{i+1}^\alpha+M_A^2(t_i^\alpha+s_i^\alpha)+...+M_A^{i+1}(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\\
&\quad\times\Bigg(\| f(.,x_n(.),Fx_n(.),,Bx_n(.))-f(.,x(.),Fx(.),Bx(.)) \|_{PC}\\
&\quad+ \| q^*[k(.,x_n(.))-k(.,x(.))] \|_{PC} \Bigg).
\end{aligned}
$$

étape 4: Q_2 est compact.

1. On a $Q_2B_r\subseteq B_r$, donc Q_2 est uniformément borné sur B_r,
2. Pour $x\in B_r$, on a :

pour $0\leq t'<t''\leq t_1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\| Q_2x(t'')-Q_2x(t') \| &\leq \| \int_0^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t''-s)\Bigg(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Bigg)ds-\int_0^{t'}(t'-s)^{\alpha-1}Q_\alpha(t'-s)\\
&\quad\times\Bigg(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Bigg)ds \|\\
&\leq I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \| \textstyle\int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\
&\quad + \textstyle\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \Big) ds \| \\
I_2 &= \| \textstyle\int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \left[Q_\alpha(t''-s) - Q_\alpha(t'-s)\right] \Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\
&\quad + \textstyle\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \Big) ds \| \\
I_3 &= \| \textstyle\int_0^{t'} \left[(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}\right] Q_\alpha(t''-s)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\
&\quad + \textstyle\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \Big) ds \| \,.
\end{aligned}$$

$I_1 \leq \dfrac{\alpha M_A[D\,(1+r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)]}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} ds$

$\leq \dfrac{M_A[D\,(1+r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)]}{\Gamma(\alpha+1)} (t''-t')^\alpha \longrightarrow 0, \quad t''-t' \longrightarrow 0.$

$I_2 \leq [D\,(1+r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)] \displaystyle\int_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \| Q_\alpha(t''-s)^{\alpha-1} - Q_\alpha(t'-s)^{\alpha-1} \| \, ds \longrightarrow 0$

lorsque $t''-t' \longrightarrow 0$.

$I_3 \leq \dfrac{M_A[D\,(1+r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t'} \left((t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}\right) ds$

$\leq \dfrac{M_A[D\,(1+r(1+B^*+F^*)) + D'q^*(1+r)]}{\Gamma(\alpha+1)} (t''-t')^\alpha \longrightarrow 0; t''-t' \longrightarrow 0.$

Premier cas . Pour $t_i \leq t' < t'' \leq s_i$,
$\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| = 0$.
Deuxième cas. Pour $s_i \leq t' < t'' \leq t_{i+1}$,

$$\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \leq I_1 + I_2 + I_3 + \| \left(P_\alpha(t''-s_i) - P_\alpha(t'-s_i)\right) K_{i2x} \| \,. \tag{4.2}$$

En se basant sur l'hypothèse (H_1) et la preuve du lemme 3.2 dans [47], on obtient la continuité uniforme topologique de $P_\alpha(t)$ et $Q_\alpha(t)$ $(t > 0)$.
On conclut que le membre droit de (4.2) tends vers 0 uniformément lorsque $t'' \to t'$.
Troisième cas. Pour $t_i \leq t' < s_i < t'' \leq t_{i+1}$,

$$\begin{aligned}
\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \quad &\leq \quad \| P_\alpha(t''-s_i)K_{i2x} + \textstyle\int_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t''-s)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s)) \\
&\qquad + \textstyle\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau \Big) ds - d_{i2x} \| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

lorsque $t'' \longrightarrow t'$ on a $(t'' \longrightarrow s_i)$.

Conclusion, $\| Q_2x(t'') - Q_2x(t') \| \longrightarrow 0$, lorsque $t''-t' \longrightarrow 0$, ce qui implique que $Q_2(B_r(J))$ est équicontinue .
On a $Q_2B_r \subseteq B_r$, soit $Q_2B_r(t) = \{Q_2x(t); x \in B_r\}$ pour $t \in J$.

3.$Q_2B_r(t)$ est relativement compact.
$Q_2B_r(0) = \{0\}$ est compact.
Pour $t \in [0, t_1]$.
Pour tout $\epsilon \in (0,t)$ et $\delta > 0$, on définit l'ensemble :
$Q_2^{\epsilon,\delta}(B_r)(t) = \left\{Q_2^{\epsilon,\delta}x(t); x \in B_r\right\}$,
avec

$$\begin{aligned}
Q_2^{\epsilon,\delta}x(t) &= \alpha\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\\
&= \alpha\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)\left[T(\epsilon^\alpha\delta)T((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)\right]\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\\
&= \alpha T(\epsilon^\alpha\delta)\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds.
\end{aligned}$$

(Remarquons que $\theta\geq\delta$ et $t-\epsilon\geq s$, donc $(t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta\geq 0)$ alors l'opérateur $T(\epsilon^\alpha\delta)$ $(\epsilon^\alpha\delta>0)$ est compact, l'ensemble $Q_2^{\epsilon,\delta}B_r(t)$ est relativement compact dans X. D'où, pour tout $x\in B_r$ on obtient

$$\begin{aligned}
\| Q_2x(t)-Q_2^{\epsilon,\delta}x(t)\| &\leq \alpha\,\|\int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds+\int_0^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\\
&\quad\times\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\\
&\quad-\int_0^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\,\|\\
&\leq G_1+G_2,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
G_1 &= \alpha\,\|\int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\,\|,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_2 &= \alpha\,\|\int_{t-\epsilon}^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\xi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))\\
&\quad+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)d\theta ds\,\|\,.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
G_1 &\leq \alpha M_A\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,\|\,\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)\,\|\,ds\int_0^\delta\theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\\
&\leq M_At_1^\alpha[D\left(1+r(1+B^*+F^*)\right)+D'q^*(1+r)]\int_0^\delta\theta\xi_\alpha(\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_2 &\leq \alpha M_A\int_{t-\epsilon}^t(t-s)^{\alpha-1}\,\|\,\Big(f(s,x(s),Fx(s),Bx(s))+\int_0^s q(s-\tau)k(\tau,x(\tau))d\tau\Big)\,\|\,ds\\
&\quad\times\int_\delta^\infty\theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\\
&\leq M_A\epsilon^\alpha[D\left(1+r(1+B^*+F^*)\right)+D'q^*(1+r)]\int_0^\infty\theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\\
&\leq \frac{M_A[D\left(1+r(1+B^*+F^*)\right)+D'q^*(1+r)]}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Donc, $\|\,(Q_2x(t)-Q_2^{\epsilon,\delta}x(t)\,\|\longrightarrow 0$, quand $\epsilon\longrightarrow 0;\delta\longrightarrow 0$.

Alors, il existe un sous ensemble relativement compact fermé de $Q_2B_r(t)$.
D'où $Q_2B_r(t)$ est relativement compact sur X.

pour $t_i<t\leq s_i$, $i=1,2,...,m$, on a

$Q_2 B_r(t) = \{d_{i2x}, x \in B_r\}$ est compact.

Pour $s_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., m$,

$$Q_2 B_r(t) = \left\{ P_\alpha(t - s_i) K_{i2x} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Q_\alpha(t-s) \Big(f(s, x(s), Fx(s), Bx(s)) \right.$$
$$\left. + \int_0^s q(s-\tau) k(\tau, x(\tau)) d\tau \Big) ds, x \in B_r \right\}.$$

D'une façon similaire à la preuve du premier cas ($t \in [0, t_1]$) et puisque $P_\alpha(t - s_i)$ est un opérateur compact.
D'où $Q_2 B_r(t)$ est relativement compact.

□

Remarque 8 *Un cas particulier du problème (4.1) a été déjà traité en considérant que l'opérateur A génère un C_0-semigroupe non-compact, voir [18].*

4.1.5 Exemples

Soit $X = L^2(0,1)$, $J = [0,1]$, $t_0 = s_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $s_1 = \frac{2}{3}$, $T = 1$.

On définit $Ax = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 v} x$ pour $x \in D(A) = \left\{ x \in X : \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 x}{\partial^2 v} \in X, x(0) = x(1) = 0 \right\}$.

Alors A est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{T(t), t \geq 0\}$ on X. De plus $T(t)$ est compact et $\| T(t) \| \leq 1 = M_A$, pour tout $t \geq 0$.

Exemple 4.1 *On considère*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} y(t,v) = \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} y(t,v) + \dfrac{1}{24} sin \left[y(t,v) + \int_0^t \dfrac{e^{-(s-t)}}{80} y(s,v) + \int_0^t \dfrac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds \right] \\ + \int_0^t e^{-(s-t)} \dfrac{1}{24} cos(y(s,v)) ds + C(t,v), \quad v \in (0,1), \quad t \in [0, \dfrac{1}{3}] \cup (\dfrac{2}{3}, 1], \\ \dfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} y(t,v) = \dfrac{1}{8} cos(y(t,v)), \quad t \in (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}], \\ y(t,v) = y_0 + \dfrac{1}{8} \left(y(s_1, v) + y(t_1, v) \right). \end{cases}$$

Notons $x(t)(v) = y(t,v)$ et $C(t,v) = C(t)u(t)(v)$

Le problème devient ;

$$(P) \begin{cases} {}^cD^\alpha x(t)(v) = Ax(t)(v) + f(t, x(t), Fx(t), Bx(t))(v) + \int_0^t q(t-s) k(s, x(s)(v)) ds + C(t)u(t)(v), \\ \qquad\qquad t \in [0, \dfrac{1}{3}] \cup (\dfrac{2}{3}, 1], \ u \in U_{ad} \\ {}^cD^\beta x(t) = g_1(t, x(t)), \ t \in (t_i, s_i], \ t \in (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}], \\ x(0) = x_0 + h(x). \end{cases}$$

avec : $Bx(t)(v) = \int_0^t \dfrac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds$

$Fx(t)(v) = \int_0^t \dfrac{e^{-(s-t)}}{80} y(s,v) ds, \quad f(t, x(t), Fx(t), Bx(t))(v) = \dfrac{1}{24} sin[y(t,v) + \int_0^t \dfrac{e^{-(s-t)}}{80} y(s,v) + \int_0^t \dfrac{e^{-2(s-t)}}{160} y(s,v) ds]$

$$k(t,x(t))(v)=\frac{1}{24}cos(x(t)(v)),\quad g_1(t,x(t))(v)=\frac{1}{8}cos(x(t)(v)),\quad h(t,x(t))(v)=\frac{1}{8}\left(x(s_1)(v)+x(t_1)(v)\right),$$

$q(t)=\dfrac{e^t}{4}$ *et* $\alpha=0.85,\ \beta=0.95,$

Dans ce cas : $L_k=L_f=C_f=M_f=\dfrac{1}{24},\ L_g=L_h=\dfrac{1}{8},$ *et* $F^*=B^*=\dfrac{1}{40},\ q^*=\dfrac{e-1}{4},$

$$\left[L_h+\frac{1+(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(L_f+q^*L_k+M_fB^*+C_fF^*)+\frac{L_g(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\right]\approx 0.393717<1.$$

Ce qui implique que les hypothèses du théorème 4.1 *sont satisfaites . Donc, notre problème admet une unique solution intégrale.*

Exemple 4.2 *On considère*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}y(t,v)=\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}y(t,v)+\dfrac{1}{24e^t}\dfrac{|y(t,v)+By(t,v)+Fy(t,v)|}{1+|y(t,v)+By(t,v)+Fy(t,v)|}+\int_0^t\dfrac{1}{24e^{-(t-s)}}\dfrac{e^s|y(s,v)|}{1+|y(s,v)|}ds+C(t,v),\ \ v\in(0,1)\\ t\in[0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{2}{3},1],\\ \dfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}y(t,v)=\dfrac{1}{8e^t}\dfrac{|y(t,v)|}{1+|y(t,v)|},\ t\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\\ y(t,v)=y_0+\dfrac{1}{8e^t}\left(y(s_1,v)+y(t_1,v)\right).\end{cases}$$

Notons $x(t)(v)=y(t,v)$ *et* $C(t,v)=C(t)u(t)(v).$

Le problème devient (P)*. Avec :* $Bx(t)(v)=\int_0^t\dfrac{e^{-2(s-t)}}{160}y(s,v)ds$

$$Fx(t)(v)=\int_0^t\frac{e^{-(s-t)}}{80}y(s,v)ds,\qquad f(t,x(t),Fx(t),Bx(t))(v)=\frac{1}{24e^t}\frac{|x(t)(v)+Bx(t)(v)+Fx(t)(v)|}{1+|x(t)(v)+Bx(t)(v)+Fx(t)(v)|}$$

$$k(t,x(t))(v)=\frac{1}{24}\frac{e^t|y(t,v)|}{1+|y(t,v)|},\quad g_1(t,x(t))(v)=\frac{1}{8e^t}\frac{|y(t,v)|}{1+|y(t,v)|},\quad h(t,x(t))(v)=\frac{1}{8e^t}\left(x(s_1)(v)+x(t_1)(v)\right),$$

$q(t)=\dfrac{e^t}{4}$ *et* $\alpha=0.75,\ \beta=0.65.$

Dans ce cas : $L_h=L_g=\dfrac{1}{8},\ D=D'=\dfrac{1}{24},$ *et* $B^*=F^*=\dfrac{1}{40},\ q^*=\dfrac{e-1}{4}$

$$L_h+L_g\frac{(t_1^\beta+s_1^\beta)}{\Gamma(\beta+1)}\approx 0.3$$

et $\dfrac{1+(t_1^\alpha+s_1^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}(D(1+B^*+F^*)+D'q^*)\approx 0.145993.$

On a max $\{0.3;0.145993\}<1.$

Ce qui implique que les hypothèses du théorème 4.2 *sont satisfaites. Donc, notre problème admet au moins une solution intégrale.*

Conclusion

Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité de certains problèmes différentiels d'ordres fractionnaires impulsives relatifs à la dérivée de Caputo dans des espaces de Banach. Tout d'abord, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité d'un problème différentiel fractionnaire impulsive périodique en utilisant les techniques de points fixes.

Par ailleurs, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité de la solution intégrale d'une équation intégro-différentielle fractionnaire évolutive impulsive non locale. Ces résultats sont obtenus à l'aide de la technique de point fixe .

Les résultats présentés dans cette thèse offrent naturellement de nombreuses perspectives. La première est l'étude de la stabilité de la solution intégrale d'une équation intégro-différentielle fractionnaire évolutive impulsive non locale. La deuxième perspective envisageable serait l'étude des équations impulsives d'ordres fractionnaires avec retard fini, ainsi que la stabilité.

Bibliographie

[1] D. D. Bainov, V. Lakshmikantham, and P. S. Simeonov, Theory Of impulsive differential equations, vol.6 of Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific, Singapore,(1989).

[2] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Heat flux stimation through inverted non integer identification models. International Journal of Thermal Science 39, 374–389 (2000).

[3] R.L. Bagley, P.J. Torvik, Fractional calculus : a different approach to the analysis of viscoelastic damped structures, AIAA Journal,21(5) :741-748,1983.

[4] L.Byszewski and V.Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl.Anal. 40(1991), 11-19.

[5] Y.Chou and K.T.Jih. Robust control of a class of time-delay nonlinear processes,Industrial and Engineering Chemistry Research,45(26) :pp.89638972,2006.

[6] G.Cooper,D.Cowan.The application of fractional calculus to potential field data,Explo rationgeophysics,34 :51-56,2003.

[7] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. Proc.IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara, USA (2000).

[8] R. Darling and J. Newman. On the short behaviour of porous interaction electrodes. J. of the Electrochemical Society 144, 3057–3063 (1997).

[9] J.Eastham, K.Hastings. Optimal impulse control of portfolios. Mathematics of Operations Research,4 :pp.588605,1988.

[10] L.Euler.De progressionibus transcentibus, sev quarumtermini algebraice dari nequeunt. Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 36–57 (1738).

[11] P.L. Falb, *Infinite Dimensional Control Problems : On the Closure of the Set of Attainable States for Linear Systems, Mathematical Analysis and Application 9,12-22(1964).*

[12] Y.Ferdi,J.P.Herbeuval, A.Charef, B.Boucheham,R wave detection using fractional digital differentiation.ITBM-RBM,24 :273-280,2003.

[13] Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, A. Charef. Un filtre numérique basé sur la dérivation non-entière pour l'analyse du signal électrocardiographique,ITBM-RBM,21 :205-209,2000.

[14] X. Fu, X. Liu and B. Lu, *On a new class of impulsive fractional evolution equations, Advances in difference equations (2015) 2015 :227.*

[15] R. Gorenflo, F. Mainardi, M. Raberto, E. Scalas, Fractional diffusion in finance : Basic theory, In Modelli dinamici in economia enanza.Urbino :MDF, 2000.

[16] A. Goutas, Y. Ferdi, J.P. Herbeuval, M. Boudraa, B. Boucheham, Digital fractional order differentiation-based algorithm for pandt-waves detection and delineation,ITBM-RBM, 26 :127-132,2005.

[17] K. Hilal, L. Ibnelazyz, K. Guida and Said Melliani, Existence of Mild Solutions for an Impulsive Fractional Integro-differential Equations with Non-local Condition, Springer Nature Switzerland AG 2019,251-271.

[18] K. Hilal, K. Guida, L. Ibnelazyz and M. Oukessou. Existence Results for an Impulsive Fractional Integro-Differential Equations with Non-compact Semigroup. Springer Nature Switzerland AG 2019, 251-271.

[19] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Publ.Co* (2000).

[20] R. Hilfer. Three fold introduction to fractional derivatives. In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, Anomalous Transport : Foundations and Applications. Wiley-VCH (2008)

[21] Z.Y. He, Y.F Zhang, L.X Yang, and Y.H Shi. Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods, International Joint Conference on Neural Networks,1 :pp.262267,1999.

[22] N.Kosmativ.Integral equation and initial value problems for nonlinear differential equations of fractional order.Nonlinear Anal.70 (2009) 2521-2529.

[23] M.A. Krasnoselskii *Amer. Math. Soc. Transl., 10 (2) (1958), pp. 345-409.*

[24] E. Kruger-Thiemer, Formal theory of drug dosage regiments, International Journal of Theoretical Biology,13,1966.

[25] C.Li.W.Deng,Remarks on fractional derivatives, App.Math.Comput.187(2007) 777-784.

[26] V. Lakshmikantham, *Theory of fractional functional differential equations, Nonlinear Anal.* (2007), *doi :10.1016/j.na.2007.09.025.*

[27] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, Fractional differentiation for edge detection, Signal Processing,83 :2421-2432,2003.

[28] K.S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York (1993).

[29] P.G.Nutting, A new general law of deformation, J.Franklin Inst,191,679-685(1921).

[30] P.G.Nutting, A general stress-strain-time formula, J.Franklin Inst,235,513-524(1943).

[31] K.B. Oldham and J. Spanier. The fractional Calculus. Academic Press, York and London(1974).

[32] K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation. J. Electroanal. Chem. 26, 331–341 (1970).

[33] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, Berlin,1983.*

[34] I.Podlubny, Fractional Differential Equation.

[35] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus. Springer (2007).*

[36] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[37] C.R. Serment. Synthése d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, France (2001).

[38] A. M Samoilenko, N. A Perestyuk, Impulsive differential equations, volume 14 of A. World Scientific Publishing,1995.

[39] Said Melliani, Abdelati El Allaoui and Lalla Saadia Chadli, A general class of periodic boundary value problems for controlled nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces, Article in Advances in Difference Equations · November 2016.

[40] R. Shi, L. Chen. An impulsive predator-prey model with disease in the prey for integrated pest management,Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2009.

[41] R. Shi, X. Jiang, L. Chen, The effect of impulsive vaccination on an sir epidemic model, Applied Mathematics and Computation, 212 :pp.305311, 2009.

[42] Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'université de Constantine présenté par Kamal Haouam .

[43] Y. Xiulan and J.R. Wang, Periodic boundary value problems for nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 22 (2015) 980–989.

[44] T.Yang.Impulsive control theory, volume 272. Springer, 2001.

[45] W. Wei, X. Xiang, Y. Peng : *Nonlinear impulsive integro-differential equation of mixed type and optimal controls. Optimization 55, 141-156(2006).*

[46] Y. Zhou, F. Jiao :*Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations. Nonlinear Anal, Real World Appl. 11, 4465-4475(2010).*

[47] Y. Zhou, F. Jiao :*Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations. Comput. Math. Appl. 59, 1063-1077(2010).*