N° d'ordre : 255/2020

Université Sultan Moulay Slimane

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

جامعة السلطان مولاي سليمان

Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Hamid SADIKI

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Structures des Anneaux Quotients et des Sous-espaces Vectoriels : Approche Floue Intuitionistique

---

Soutenue le 17/07/2020 devant le jury composé de :

Pr. Khalid HILAL	Professeur à la FST, Béni Mellal	Président/Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Abdelmajid EL HAJAJI	Professeur à la ENCG, El Jadida	Rapporteur
Pr. Lalla Saadia CHADLI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Encadrant
Pr. M'hamed ELOMARI	Professeur à la FP, Béni Mellal	Invité

Dédicace

A

mes très chers parents

symbole de sacrifice, de tendresse et d'amour ; sont les moindres sentiments que je puisse vous témoigner. Quoi que je fasse, je ne pourrais jamais vous récompenser pour les grands sacrifices que vous avez faits et continuez de faire pour moi. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes grandes admirations, mes considérations et mes sincères affections pour vous.

A

mes frères

qui ont toujours cru en moi.

A

mes ami(e)s

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ici, ma plus profonde gratitude à ma directrice de thèse, Madame, le Professeur **Lalla Saadia CHADLI**, qui m'a honoré par la confiance qu'elle m'a accordée, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à la remercier davantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'elle m'a donnée.
Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements à mon cher Co-directeur de thèse Monsieur, le professeur **Said MELLIANI**, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" et responsable du master "Génie Mathématiques et Applications", pour son aide capitale, pour sa disponibilité et son inconditionnelle patience tout au long de la réalisation de ce travail, pour tout le temps qu'il a consacré à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement la source de réussite de cette thèse.
Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.
Je tient à présenter ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à mes professeurs, Monsieur **Khalid HILAL**, Monsieur **Adil ABBASSI**, Monsieur **Mohamed OUKESSOU** et Monsieur **M'hamed ELOMARI** pour leurs conseils, leurs critiques, ainsi que leurs encouragements.
Les mêmes expressions de reconnaissance vont également à tous les enseignants du Département de Mathématiques.
Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.
Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à ma mère, mon père, et mes frères, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leur patience et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.

Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Table des matières

Introduction

Le présent travail est une thèse réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique $(LMACS)$ de la faculté des sciences et techniques de Béni Mellal, pour obtenir le diplôme de doctorat en Mathématiques à l'Université Sultan Moulay Slimane pour l'année $2019/2020$.
La notion de la théorie des ensembles est à la base d'une présentation moderne des mathématiques. Immanquablement, on y fait appel pour la construction d'objets plus complexes, ou pour donner une base solide aux arguments logiques. En plus d'être des notions fondamentales pour les mathématiques, elles sont aussi cruciales en informatique. La théorie suppose que les ensembles contiennent des éléments, et on écrit $x \in A$ pour dire que "x est un élément de A". Ce qui est essentiel dans la théorie des ensembles initialement développée, c'est la notion d'appartenance, c'est-à-dire le fait de savoir si un élément fait partie d'un ensemble ou non. Contrairement aux ensembles classiques dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs possibles 0 ou 1, les classes d'objets rencontrées dans le monde réel ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis.
À partir des années 60, une nouvelle théorie mathématique reliée à la théorie des ensembles s'est développée, celle des sous-ensembles flous. Formant une théorie des ensembles dont celle des ensembles classiques ne constitue qu'un cas particulier. Cette théorie a vécu ses premiers développements en se basant sur le célèbre article "$Fuzzy\ sets$" publié par le professeur L. A. Zadeh en 1965 [59], cet article a révélé le pouvoir de cette théorie comme un outil très important pour la modélisation incertaine et le processus vague et subjectif de l'informationnel dans les modèles mathématiques.
Jusqu'en 1980 cette nouvelle théorie était un champ très actif produisant des grands noms de chercheurs tels que Mamdani E., Bezdek J. C.,... etc. Ensuite elle a également connu un $\widehat{a}$ge sombre dans les années 1980, avant qu'elle soit relancée par des chercheurs japonais vers la fin de la même décennie.
C'est une théorie très attractive, puisqu'elle est basée sur le raisonnement intuitif et prend en compte la subjectivité et l'imprécision. Pourtant elle n'est pas imprécise, c'est une théorie

mathématique rigoureuse adaptée au traitement de tout ce qui est subjectif ou incertain. Elle a connu un intérêt très important dans la communauté scientifique au cours des dernières années. L'une des raisons principales est l'énorme succès des équipements domestiques produits par l'industrie japonaise, utilisant des régulateurs flous : ce marché atteignit 2 milliards de dollars en 1990, et depuis cette année l'intérêt industriel pour le contrôle flou a considérablement augmenté.
La théorie des sous-ensembles flous a été proposée pour gérer une telle imprécision en généralisant la notion d'appartenance à un ensemble, et pour modéliser le monde réel de la même façon que les humains, puisque le raisonnement humain est approximatif, on supporte des modes de raisonnement approximatifs plutôt qu'exacts. C'est un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel, ce qui nous permet d'évaluer l'influence des paramètres imprécis dans les différents modèles que ce soient mathématiques, techniques ou physiques (analyse des données, intelligence artificielle, théorie de la décision, contrôle, reconnaissance des formes, etc ...).

Une clarification s'impose, relative à une confusion existant parfois entre la probabilité et la logique floue. Bien que leur traitement de l'incertitude soit bien distinct en concept ou en approche, certains prétendent que la logique floue ne constitue qu'un cas particulier de la probabilité. Afin de bien établir leur différence, le fameux exemple de deux bouteilles remplies d'un liquide inconnu est assez explicite [11]. Si on dit d'un liquide qu'il est buvable à 91% au sens de la probabilité, il existe un risque de 9% qu'il s'agisse d'un poison. Au sens de la théorie floue, on s'intéresse à la qualité du liquide, à savoir sa qualité d'être buvable, le risque qu'il puisse être un poison n'est pas la question.
Un sous-ensemble flou A d'un univers X est caractérisé par une fonction notée μ_A appelée degré d'appartenance, qui associe à chaque élément x de X un nombre réel $\mu_A(x)$ dans l'intervalle $[0,1]$. La valeur $\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x à A, elle peut être regardée comme une généralisation de la fonction caractéristique. Le degré "0" signifie la non-appartenance, le degré "1" l'appartenance totale, et toute valeur entre 0 et 1 signifie une appartenance graduelle ou partielle d'un élément à l'ensemble flou A.
Deux ans après l'émergence du concept d'un ensemble flou, J. Goguen a proposé dans [18] la notion des ensembles L-flou dont un ensemble flou n'est qu'un cas particulier de ses ensembles, et il existe également d'autres extensions des ensembles flous.
En 1983, le professeur K. Atanassov a proposé une généralisation des ensembles flous en introduisant un nouveau composant dit $degré\ de\ non-appartenance$. Il a commencé ce travail comme un jeu de mathématiques, inspiré de la traduction russe de "Introduction to the theory

of fuzzy sets " fait par A. Kaufmann [24], et George Gargov non seulement a donné aux nouveaux ensembles de K. Atanassov leur nom,"Ensembles flous intuitionistiques", mais il a également encouragé l'auteur pour continuer son travail.

Le recours à la théorie floue et à la théorie floue intuitionistique devient indispensable, d'où le besoin de l'extension de pas mal de notions dans toutes les branches mathématiques classiques, et plusieurs tentatives ont été faites pour établir des théories mathématiques basées sur les deux nouveaux ensembles au lieu des ensembles classiques.
Les structures algébriques jouent un rôle de premier plan dans les mathématiques avec des applications variées dans de nombreuses disciplines telles que la physique théorique, les sciences informatiques, théorie du codage, espaces topologiques,... etc. Ceci fournit la motivation suffisante aux chercheurs d'examiner divers concepts et les résultats du domaine de l'algèbre abstrait dans un cadre large et plus général (théorie des ensembles flous et des ensembles flous intuitionistiques).
Cependant, les notions de groupes et anneaux flous ont été introduites pour la première fois en 1971 et 1982 respectivement, par Rosenfeld et Lui. dans [1] [2] [3] [27] [54] [58], les auteurs ont étudié ces nouveaux concepts. En 1988 [49] Nanda a défini le concept du corps flou ainsi que celui d'espace linéaire flou.
De nombreux problèmes découlant de toutes les branches mathématiques, ainsi que des applications à la physique, à l 'économie ... etc, sont linéaires du moins en première approximation, d'où l'intérêt de dégager un cadre mathématique commun à ce type de problèmes, dit "Espace vectoriel". Et c'est la notion de base en algèbre linéaire que l'on retrouve quasiment partout en mathématiques. Ceci fournit la motivation suffisante aux chercheurs d'examiner ce concept ainsi que quelques objets mathématiques fondamentaux de l' algèbre linéaire dans un cadre large et plus général (théorie des ensembles flous et des ensembles flous intuitionistiques). En effet, C. Moumita [15], R. Pradhan [52] ont introduit la notion d'espace vectoriel flou intuitionistique $(IFVS)$ et base floue intuitionistique (baseIF) d'un sous-espace vectoriel flou intuitionistique.
En s'appuyant sur les études antérieures ([15], [52], [60], [14], [15], [23], [30], [4]), nous avons introduit le concept de sous-espace vectoriel flou intuitionistique sur un sous-corps flou intuitionistique, ce qui nous a permis d'établir et de discuter plusieurs résultats à l'aide des points flous intuitionistiques [14], à savoir les notions de famille libre floue intuitionistique, famille génératrice floue intuitionistique et base floue intuitionistique.

Ce travail s'organisera comme suit :
Le premier chapitre de ce mémoire a dressé une introduction aux notions de bases et aux fon-

dements mathématiques relatifs aux sous-ensembles flous ainsi que les structures algébriques floues, suite aux différents travaux élaborés par les auteurs, voir [1, 10, 12, 11, 17, 24, 25, 27, 29, 37, 50, 44, 46, 58, 59].

Le second chapitre sera réservé à la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques et ses propriétés élaborées par K. Atanassov. Tout d'abord nous présentons des motivations et des exemples simples des sous-ensembles purement flous intuitionistiques, ensuite nous rappellerons les notions de base relatives à cette nouvelle théorie. De plus quelques interprétations géométriques des nouveaux sous-ensembles et des opérations seront présentées.

Le troisième chapitre sera consacré aux structures algébriques floues intuitionistiques, dans lequel nous exposerons ces structures dans un premiers temps, d'autre part nous allons introduire une nouvelle structure d'anneau quotient $R/ < \mu, \nu >$ induit par l'idéal flou intuitionistique $< \mu, \nu >$ dans l'anneau R. De plus les trois théorèmes d'isomorphisme flou intuitionistique seront établis. Ainsi, pour tout idéal flou intuitionistique $< \mu, \nu >$ de l'anneau commutatif R, nous montrerons que l'idéal flou intuitionistique $< \mu, \nu >$ est premier si et seulement si $R/ < \mu, \nu >$ est un anneau commutatif intègre. Ce dernier résultat sera considéré comme application de cette nouvelle construction.

Le quatrième chapitre vise à présenter la notion de sous-espaces vectoriels flous intuitionistiques, l'une des très importantes structures d'algèbre. Ce chapitre est divisé en trois sections. dans la première section, nous rappelons la définition et quelques propriétés du concept de l'espace vectoriel flou élaborées et étudiées par plusieurs auteurs $(voir$ [23, 30, 49]$)$. Dans la deuxième et la troisième section on s'intéressera à la notion du sous-espace vectoriel flou intuitionistique, nous donnerons tout d'abord les différentes définitions proposées pour ce concept, ensuite nous introduirons la notion de sous-espace vectoriel flou intuitionistique défini sur un sous-corps flou intuitionistique. Ainsi quelques propriétés et notions en relation avec cette nouvelle structure seront présentées en utilisant les points flous intuitionistiques.

Finalement une conclusion résumera notre travail, en donnant quelques perspectives.

Chapitre 1

Structures algébriques floues

1.1 Sous-ensembles flous

1.1.1 Exemple et motivation

La notion de sous-ensemble flou a pour but de permettre des gradations dans l'appartenance d'un élément à une classe, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à cette classe. Cette notion permet l'utilisation de catégories aux limites mal définies (comme ≪ vieux ≫ ou ≪ adulte ≫), de situations intermédiaires entre le tout et le rien (≪ presque vrai ≫), le passage progressif d'une propriété à une autre, l'utilisation de valeurs approximatives (≪ environ douze ans ≫). Elle évite l'utilisation arbitraire de limites rigides à des classes.

Prenons l'exemple classique de l'ensemble de "personnes de grande taille", qu'on notera G. Pour qu'on puisse dire qu'une personne n appartienne à l'ensemble G, cette personne doit avoir, par exemple, une taille x supérieure ou égale à $1.80\ m$ (ou autres critères). Elle est dite non appartenant à l'ensemble G si elle a une taille strictement inférieure à $1.80\ m$. La classe des " Grands " est caractérisée par sa fonction caractéristique χ_G définie par :

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1.80\ m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut la présenter graphiquement par :

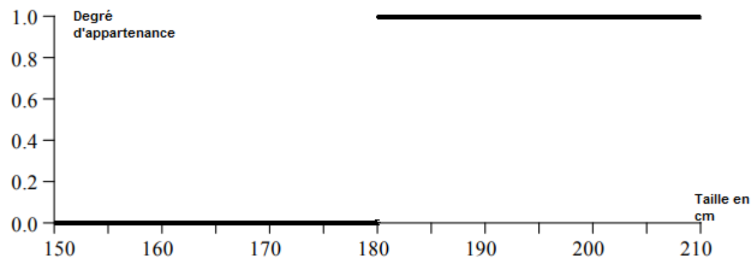


FIGURE 1.1 – Représentation de la fonction χ_G

Il est inconcevable, pour reprendre l'exemple évoqué ci-dessus, de considérer qu'un individu de $1,81\ m$ est grand alors qu'une autre personne de $1,795\ m$ ne l'est pas. En effet, les ensembles classiques n'arrivent pas toujours à décrire et à modéliser le monde réel.

Ce qui est plus au moins envisageable, est le fait de considérer qu'un individu d'une taille donnée n'appartient pas du tout à la classe des « personnes de grande taille » s'il mesure $1,50\ m$ et il y appartient tout à fait s'il mesure $2.10\ m$ et plus sa taille se rapproche de $2.05m$, plus son appartenance à la classe des G est forte.

Donc l'ensemble ”personnes de grande taille” est un sous-ensemble flou défini par :

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \geq 2.05\ m \\ 0 < \mu_G(x) < 1 & \text{si } \ 1.5\ m < x < 2.5\ m \\ 0 & \text{si } \ x \leq 1.50\ m \end{cases}$$

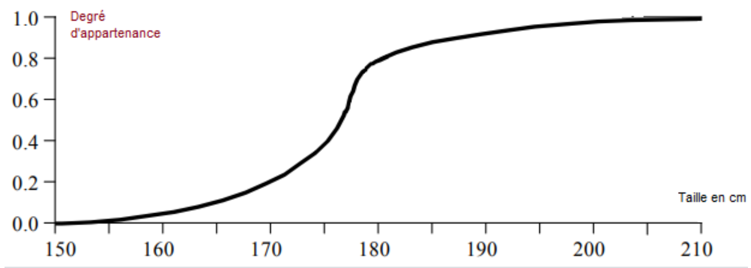


FIGURE 1.2 – Degré d'appartenance

1.1.2 Notions fondamentales

1.1.2.1 Définitions et exemples

Dans un ensemble de référence X, un sous-ensemble flou A de ce référentiel X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A de X dans l'intervalle des nombres réels $[0, 1]$.

Définition 1.1.1. On définit un sous-ensemble A de X par la donnée d'une fonction

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A.
On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\}$$

On note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1.1.1. On peut faire remarquer qu'un ensemble classique M est un sous-ensemble classique, dont la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1. On a dans ce cas :

$$\mu_M(x) = \chi_M(x), \forall x \in X$$

Définition 1.1.2. Soit A un sous-ensemble flou de X.

– Le support d'un sous-ensemble flou de A de X, noté $Supp(A)$ (ou $S(A)$), est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu. et on a :

$$S(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) > 0\Big\}.$$

– On appelle noyau de A noté $N(A)$ l'ensemble

$$N(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) = 1\Big\}.$$

– On appelle hauteur de A notée $h(A)$ le réel

$$h(A) = \sup_{x \in X} \Big\{ \mu_A(x) \Big\}.$$

– On dit que A est normal s'il existe $x_0 \in X$ tel que

$$\mu_A(x_0) = 1.$$

Il est souvent intéressant de rechercher un sous-ensemble ordinaire aussi proche que possible du sous-ensemble flou disponible. L'objectif étant de prendre une décision ou d'effectuer une action précise malgré l'imprécision des connaissances. Différentes méthodes, dites de "**défuzzification**", réalisant cette approximation ont été proposées dans la littérature. La plus simple est la notion des $\alpha-$coupes associées aux sous-ensembles flous.

Définition 1.1.3. Soient $\alpha \in]0, 1]$, et A un sous-ensemble flou de X. On appelle α-coupe de A notée A_α l'ensemble

$$A_\alpha = \Big\{ x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha \Big\}.$$

Remarque 1.1.2. – Pour $\alpha = 0$, c'est la fermeture du support.

– A_α est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

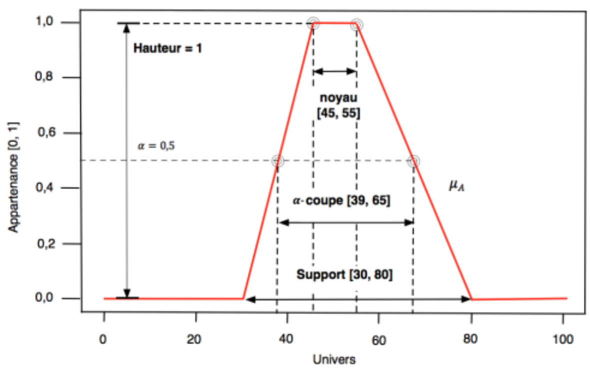
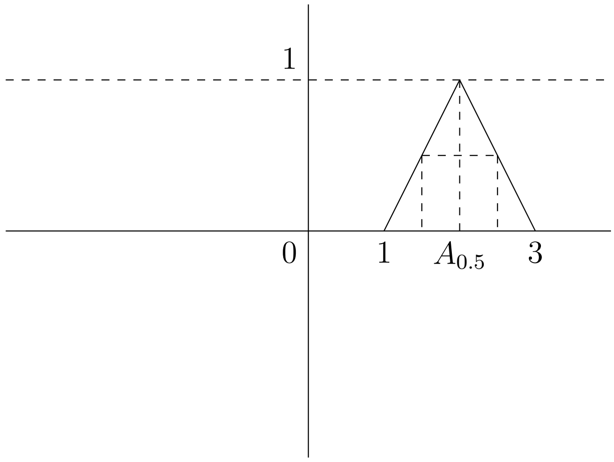


FIGURE 1.3 – Éléments caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Exemple 1.1.1. Soit le sous-ensemble flou A décrit par sa fonction d'appartenance

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pour } x \in [1,2] \\ -x + 3 & \text{pour } x \in [2,3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

A est un sous-ensemble flou de $\mathbb{R}$ dont le support est $Supp(A) =]1,3[$ et $A_1 = \{2\}$.



Définition 1.1.4. Soit $\alpha \in [0,1]$. un point flou (ou singleton flou) x_α de X, est un sous-ensemble flou défini par :

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $x_\alpha \in A$, si $\mu_A(x) \geq \alpha$.

Les opérations sur les sous-ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.). Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques.

– **Égalité** : On dit que deux sous-ensembles flous A et B de X sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tous les éléments x de X. On a $A = B$ si et seulement si :

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \ \forall x \in X$$

- **Inclusion** : Soient $A, B \in \mathbb{F}(X)$. On dit que A est inclus dans B, qu'on note alors $A \subset B$, si tout élément x de X qui appartient à A appartient aussi à B avec un degré au moins aussi grand. On a $A \subset B$ si et seulement si :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

- **Complémentaire** : Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A.
Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x), \;\; \forall x \in X$$

- **Réunion** : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

- **Intersection** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

1.1.3 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension, proposé à l'origine par le professeur L. Zadeh, est l'un des outils fondamentaux de la théorie des sous-ensembles flous. Il permet d'étendre des relations fonctionnelles classiques à des quantités floues. Puisque l'approche ensembliste (i.e. l'utilisation des α-coupes d'un ensemble flou) est très simple que l'approche fonctionnelle (i.e. l'utilisation des fonctions d'appartenances). L'application du principe d'extension aux sous-ensembles flous peut être regardée comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question.
En général si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

et si A et B sont des sous-ensembles flous respectifs de X et Y, respectivement, on obtient

$$\Big[f\,(A,B)\Big]_{\alpha}=f\Big(A_{\alpha},B_{\alpha}\Big)$$

où A_{α}, B_{α} et $[f(A,B)]_{\alpha}$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.
On veut donner une condition nécessaire et suffisante pour obtenir cette égalité, et définir une classe de nombres flous où cette égalité est vérifiée pour toute fonction f continue.

1.1.3.1 Résolution de l'identité

Pour $\alpha\in]0,1]$, rappelons que l'ensemble α-coupe de A est défini par

$$A_{\alpha}=\Big\{x\in X,\ \mu_A(x)\geq\alpha\Big\}$$

Si $A,B\in\mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A=B \ \text{ si et seulement si } \ \mu_A(x)=\mu_B(x),\quad \forall x\in X$$

Si $A,B\in\mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A=B \ \text{ si et seulement si } \ A_{\alpha}=B_{\alpha},\quad \forall\alpha\in]0,1]$$

Il est aussi évident que

$$Supp(A)=\bigcup_{\alpha\in]0,1]}A_{\alpha}$$

D'autre part, on a

$$\forall x\in X,\ \mu_A(x)=\sup_{\alpha\in]0,1]}\Big(\alpha\chi_{A_{\alpha}}(x)\Big) \tag{1.1}$$

1.1.3.2 Principe d'extension

Définition 1.1.5. Soit $f:X\longrightarrow Y$, et $A\in\mathbb{F}(X)$, alors l'ensemble flou $f(A)$ est défini, via le principe d'extension, par

$$f(A)\in\mathbb{F}(Y)\qquad \text{et}\qquad \mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A(x) \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.3. Dans le but d'appliquer ce principe aux applications floues, on réécrit (1.2) sous la forme équivalente suivante

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min \Big(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y) \Big) \tag{1.3}$$

Définition 1.1.6. Soit $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$ pour tout $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$. On définit

$$\begin{aligned} \tau : \quad \mathbb{F}(X_1) \times ...\mathbb{F}(X_n) &\longrightarrow \mathbb{F}\left(X_1 \times ... \times X_n\right) \\ (\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}) &\longrightarrow \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n} \end{aligned}$$

où $\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}$ est le produit cartésien flou des sous-ensembles flous $A_1, ..., A_n$ défini par :

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min \Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n) \Big)$$

Définition 1.1.7. Soit

$$\begin{aligned} g : \qquad X_1 \times ... \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, ..., x_n) &\longmapsto g(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

On lui associe la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\widehat{g} : \begin{cases} \mathbb{F}(X_1) \times ... \times \mathbb{F}(X_n) \longrightarrow \mathbb{F}(Y) \\ (A_1, ..., A_n) \longrightarrow \widehat{g}(A_1, ..., A_n) \end{cases}$$

avec

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup_{(x_1,...,x_n) \in A_1 \times ... \times A_n, g(x_1,...,x_n)=y} \min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n))$$

Si l'ensemble $\Big\{ (x_1, ..., x_n),\ g(x_1, ..., x_n) = y \Big\}$ est vide, alors on pose par définition

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = 0$$

Remarque 1.1.4. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$. D'après la définition 1.1.6, on a

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$

Ainsi le principe d'extension donné par la définition (3)

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y))$$

Remarque 1.1.5. Soit

$$\begin{aligned} \underline{g} : \ \ \mathbb{F}(X_1) \times .... \times \mathbb{F}(X_n) &\longrightarrow \mathbb{F}(Y) \\ A = (A_1, ..., A_n) &\longrightarrow \underline{g}(A) \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\underline{g}(A)}(y) = \sup \mu_A \left(g^{-1}(A)\right)$$

La fonction τ comme dans la définition (1.1.6) et $\widehat{g}$ comme dans la définition (1.1.7) nous permettent d'obtenir

$$\underline{g} \circ \tau = \widehat{g}$$

En effet

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) \ &= \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n} \left(g^{-1}(y)\right) \\ &= \sup \mu_{\tau(A_1,...,A_n)} \left(g^{-1}(y)\right) \\ &= \mu_{\underline{g}\circ\tau}(y) \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ alors, d'après le principe d'extension on obtient

$$\widehat{g} \circ \widehat{f} = \widehat{g \circ f}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{F}$ et $z \in Z$, alors on a,

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{g\circ f}}(z) &= \sup \mu_A\left((g\circ f)^{-1}(z)\right)\\
&= \sup \mu_A\left(f^{-1}(g^{-1}(z))\right)\\
&= \sup \bigcup_{y\in g^{-1}(z)} \mu_A\left(f^{-1}(y)\right)\\
\mu_{\widehat{g}\circ\widehat{f}} &= \sup \mu_{\widehat{f}(A)}(g^{-1}(z))\\
&= \sup \left\{ \sup \mu_A\left(f^{-1}(y)\right),\ y \in g^{-1}(z)\right\}
\end{aligned}$$

□

1.2 Structures algébriques floues

Dans cette section nous rappelons quelques définitions et propriétés concernant les groupes et les anneaux flous, ainsi que les corps flous, et donnons quelques propriétés sur ces nouvelles structures.
Dans la suite, nous notons souvent le $\min\{a, b\}$ par $a \wedge b$, et le $\max\{a, b\}$ par $a \vee b$

1.2.1 Groupes flous

Pour le reste de cette sous-section, sauf précision contraire, les groupes sont notés multiplicativement et on note e l'élément neutre de G. Afin de définir la notion d'un sous-groupe flou et pour examiner ses propriétés, nous présentons certaines opérations sur un sous-ensemble flou d'un groupe G en ce qui concerne le fonctionnement du groupe.

1.2.1.1 Définitions et Propriétés

Définition 1.2.1. [54] Soit G un groupe, on dit que $\mu \subset G$ est un sous-groupe flou si et seulement si $\forall x, y \in G$.

1. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,

2. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Notons par : $\mathbb{FG}(G)$, l'ensemble de tous les sous-groupes flous de G.

Remarque 1.2.1. – si $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ satisfait la condition (1) de la définition 1.2.1, alors $\mu(x^n) \geq \mu(x)$, $\forall x \in G$, avec $n \in \mathbb{N}$.

– μ satisfait les conditions (1) et (2) de la définition 1.2.1 si et seulement si

$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y), \forall x, y \in G.$

Définition 1.2.2. On définit l'opération binaire " $\circ$ " sur $\mathbb{F}(G)$ et l'opération inverse sur $\mathbb{F}(G)$ comme suit :

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{F}(G) \text{ et } \forall x \in G,\ (\mu \circ \nu)(x) = \vee\{\mu(y) \wedge \nu(z)/y, z \in G, yz = x\}$$

et

$$\forall \mu \in \mathbb{F}(G) \text{ et } \forall x \in G,\ \mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}).$$

Nous appelons $\mu \circ \nu$ le produit de μ et ν, et μ^{-1} est l'inverse de μ.

Il est facile de vérifier que l'opération binaire $\circ$ (définition (1.2.2)) est associative. A l'aide des notions précédemment définies.

Remarque 1.2.2. Si $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ et H est un sous-groupe de G. Alors, $\mu \mid_H \in \mathbb{FG}(H)$.

Lemme 1.2.1. Soit $\mu \in \mathbb{FG}(G)$. Alors, $\forall x \in G$,

1. $\mu(e) \geq \mu(x)$,
2. $\mu(x) = \mu(x^{-1})$.

Démonstration. Soit $x \in G$.

1. $\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$.
2. $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Par conséquent, $\mu(x) = \mu(x^{-1})$. □

Remarque 1.2.3. Notons que si μ est un sous-groupe flou d'un groupe G et si $x, y \in G$ avec $\mu(x) \neq \mu(y)$, alors, $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Démonstration. Supposons que $\mu(x) > \mu(y)$.

Alors,

$$\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \mu(x^{-1}) \wedge \mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(xy).$$

Ainsi,

$$\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(xy)$$

et puisque, $\mu(x) > \mu(y)$,

on a alors,

$$\mu(y) \geq \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(y).$$

Par conséquent,

$$\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

On peut utiliser la même démarche si $\mu(y) > \mu(x)$. $\square$

Théorème 1.2.1. Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$.

Alors, μ est un sous-groupe flou de G si et seulement si μ_a est un sous-groupe de G, $\forall a \in \ \mu(G) \cup \{b \in \ [0,1]/\ b \leq \mu(e)\}$.

Démonstration. Supposons que μ est un sous-groupe flou de G, et soit $a \in \mu(G)$.

Puisque,

$$\mu(e) \geq \mu(x),\ \forall x \in G, e \in \mu_a,$$

ainsi,

$$\mu_a \neq \emptyset.$$

Soit $x, y \in \mu_a$.

Alors, $\mu(x) \geq a$ et $\mu(y) \geq a$.

Puisque μ est un sous-groupe flou,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq a \wedge a = a.$$

Par conséquent,

$$xy^{-1} \in \mu_a.$$

Donc, μ_a est un sous-groupe de G.

De même, si $a \leq \mu(e)$, alors on peut démontrer que μ_a est un sous-groupe de G.

Inversement, supposons que μ_a est un sous-groupe de G,

$$\forall a \in \ \mu(G) \cup \{b \ \in \ [0,\ 1] \ \mid \ b \ \leq \ \mu(e)\}.$$

Alors, $\forall a \in \mu(G)$, Nous devons avoir $e \in \mu_a$ et donc on a $\mu(e) \geq a$.

Soit $x, y \in G$ et soit $\mu(x) = a$ et $\mu(y) = b$. Soit $c = a \wedge b$.

Alors,

$$x, y \in \mu_c \text{ et } c \leq \mu(e).$$

D'après l'hypothèse, μ_c est un sous-groupe de G,

alors,

$$xy^{-1} \in \mu_c.$$

Ainsi,

$$\mu(xy^{-1}) \geq c = a \wedge b = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Par conséquent, μ est un sous-groupe flou de G. $\square$

Proposition 1.2.1. Soit H un sous-ensemble de G, χ_H sa fonction caractéristique. Alors, H est un sous-groupe de G, si et seulement si χ_H est un sous-groupe flou non nul de G.

Démonstration. Supposons que H est un sous-groupe de G, alors , $\chi_H(e) = 1$, donc, $\chi_H \neq \emptyset$, soit x, y de G.

Si $x \in H$ et $y \in H$ et par suite, $\chi_H(xy^{-1}) = 1 = \chi_H(x) \wedge \chi_H(y)$.

Si $x \notin H$ ou $y \notin H$ on a $\chi_H(x) = 0$ ou $\chi_H(y) = 0$,

d'où,

$$\chi_H(x) \wedge \chi_H(y) = 0 \leq \chi_H(xy^{-1})$$

Par conséquent, χ_H est un sous-groupe flou de G.

Réciproquement, comme χ_H n'est pas nul, il existe $x \in G$ tel que $\chi_H(x) = 1$, ce qui prouve que $H \neq \emptyset$, de plus, si $x, y \in H$ $\chi_H(x) = \chi_H(y) = 1$,

d'où, comme $\chi_H(xy^{-1}) \geq \chi_H(x) \wedge \chi_H(y)$, $\chi_H(xy^{-1}) = 1$ et par suite, $xy^{-1} \in H$.

Donc H est un sous-groupe de G. $\square$

Théorème 1.2.2. Soit $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{FG}(G)$ avec I un ensemble d'indices.

Alors, $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \mathbb{FG}(G)$.

Démonstration. Soit $x, y \in G$.

Alors,

$$\begin{aligned}(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(xy^{-1}) &= \wedge\{\mu_i(xy^{-1}) \mid i\in I\} \geq \{\mu_i(x)\wedge\mu_i(y)/\ i\in I\}\\ &= (\wedge\{\mu_i(x)/\ i\in I\})\wedge(\wedge\{\mu_i(y)/\ i\in I\})\\ &= (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x)\ \wedge\ (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y).\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.3. . Soit $\mu \in \mathbb{FG}(G)$.

Alors, $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ si et seulement si μ satisfait les conditions suivantes :

1. $\mu\circ\mu \subseteq \mu$,
2. $\mu^{-1}\subseteq\mu$ (ou $\mu^{-1}\ \supseteq\ \mu,$ ou $\mu^{-1}\ =\ \mu$) .

Démonstration. $\Rightarrow$)

Montrons que les conditions (1) et (2) sont vérifiées. Pour (1), soit $x\in G$ on a

$$\begin{aligned}(\mu\circ\mu)(x) &= \vee_{y\in G}(\mu(y)\wedge\mu(y^{-1}x))\\ &= \vee_{y\in G}(\mu(y)\wedge\mu(y^{-1}x))\\ &\leq \vee_{y\in G}\mu(yy^{-1}x)\\ &= \vee_{y\in G}\mu(x)\\ &= \mu(x).\end{aligned}$$

Donc (1) est vérifié. Pour (2), il suffit d'utiliser la définition d'un sous-groupe flou.

$\Leftarrow$)

On suppose que μ vérifie (1) et (2), Montrons que $\mu\in\mathbb{FG}(G)$.

Soit $x, y\in G$, on a

$$\begin{aligned}\mu(xy) &\geq (\mu\circ\mu)(xy)\\ &= \vee_{y\in G}(\mu(z)\wedge\mu(z^{-1}xy))\\ &\geq \mu(x)\ \wedge\ \mu(x^{-1}xy)\\ &\geq \mu(x)\wedge\mu(y),\end{aligned}$$

donc (1) est vérifié.

D'autre part soit $x \in G$, on a $\mu^{-1} \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu \subseteq \mu^{-1}$,

donc, $\mu(x) \leq \mu^{-1}(x)$. Par conséquent, $\mu \in \mathbb{FG}(G)$. □

Théorème 1.2.4. Soit $\mu, \nu \in \mathbb{FG}(G)$. Alors, $\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G)$ si et seulement si $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

Démonstration. Supposons que

$$\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G).$$

Alors,

$$\mu \circ \nu = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \nu \circ \mu.$$

Inversement, supposons que

$$\mu \circ \nu = \nu \circ \mu.$$

Alors, $(\mu \circ \nu)^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = \mu \circ \nu$ et

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) &= \mu \circ (\nu \circ \mu) \circ \nu \\
&= \mu \circ (\mu \circ \nu) \circ \nu \\
&= (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) \\
&\subseteq \mu \circ \nu.
\end{aligned}$$

On utilisons le théorème (1.2.3), on trouve que $\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G)$.

□

1.2.2 Anneaux et idéaux flous

1.2.2.1 Anneaux flous

Dans cette section, nous introduisons quelques opérations sur des sous-ensembles flous d'un anneau R.

Définitions et propriétés

Définition 1.2.3. Soit $\mu, \nu \in \mathbb{F}(R)$. On définit $\mu + \nu, -\mu, \mu - \nu, \mu \circ \nu \in \mathbb{F}(R)$ de la manière suivante :

$$(\mu + \nu)(x) = \vee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y,\ z \in R,\ y + z = x\},$$

$$(-\mu)(x) \;=\; \mu(-x)\;,$$

$$(\mu-\nu)(x) \;=\; \vee\{\mu(y)\wedge\nu(z) \;\mid\; y,\; z\in R,\; y-z=x\},$$

$$(\mu\circ\nu)(x) \;=\; \vee\{\mu(y)\wedge\nu(z) \;\mid\; y,\; z\in R,\; yz=x\},$$

$\forall x\in R$. $\mu+\nu,\ \mu-\nu$ et $\mu\circ\nu$ sont appelés la somme, la différence et le produit de μ et ν, respectivement, et $-\mu$ est appelé l'opposé de μ.

Par définition, il s'ensuit que $\mu+\nu=\nu+\mu$, $\mu-\nu=\mu+(-\nu)$, et puisque R est commutatif, $\mu\circ\nu=\nu\circ\mu$, $\forall\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$

Théorème 1.2.5. Soit $\mu,\nu,\xi\in\mathbb{F}(R)$. Alors, $\mu\circ(\nu+\xi)\subseteq\mu\circ\nu+\mu\circ\xi$.

Démonstration. Soit $w\in R$ et soit $u,v\in R$ tel que $uv=w$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mu(u)\wedge(\nu+\xi)(v) &= \mu(u)\wedge(\vee\{\nu(y)\wedge\xi(z) \;\mid\; y,z\in R,\; y+z=v\})\\
&= \vee\ \{(\mu(u)\wedge\nu(y))\wedge(\mu(u)\wedge\xi(z)) \;|\, y,\; z\in R,\; y+z=v\}\\
&\leq \vee\{(\mu(u)\wedge\nu(y))\wedge(\mu(u)\wedge\xi(z)) \;\mid\; y,z\in R,\; uy+uz=uv\}\\
&\leq \vee\{(\mu\circ\nu)(uy)\wedge(\mu\circ\xi)(\mu\circ\nu+\mu\circ\xi)(w).\,(uz) \;\mid y,\; z\in R,\; uy+uz=uv\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\mu\circ(\nu+\xi))(w) &= \vee\{\mu(u)\wedge(\nu+\xi)(v) \;\mid\; u,\; v\in R,\; uv=w\}\\
&\leq (\mu\circ\nu+\mu\circ\xi)(w)\forall w\in R.
\end{aligned}$$

par conséquent, $\mu\circ(\nu+\xi)\subseteq\mu\circ\nu+\mu\circ\xi$. □

Définition 1.2.4. Soit $\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$. On définit $\mu\nu\in\mathbb{F}(R)$ par :
$(\mu\nu)(x)=\vee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(y_i)\wedge\nu(z_i)) \;\mid\; y_i,\; z_i\in R,\; 1\leq i\leq n,\; n\in \mathrm{N},\; \sum_{i=1}^{n}y_iz_i=x\},\ \forall x\in R.$

Puisque R est commutatif, $\mu\nu=\nu\mu$, $\forall\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$.

Théorème 1.2.6. [29] Soient μ,ν et $\xi\in\mathbb{F}(R)$. Alors, on a les assertions suivantes :

1. $\mu\circ\nu\subseteq\mu\nu$.

2. $\nu\subseteq\xi\Rightarrow\mu\nu\subseteq\mu\xi$.

3. $(\mu\nu)\xi = \mu(\nu\xi)$.

4. $(\mu\nu)(x+y) \geq (\mu\nu)(x) \wedge (\mu\nu)(y) \forall x, y \in R$.

5. Si R admet un élément neutre 1 et $1_{\{1\}} \subseteq \nu$, alors $\mu \subseteq \mu\nu$.

6. $1_R \circ \mu \subseteq \mu$.

Notons que pour tout

$$w \in R,\ ((\mu\nu)\xi)(w) = \vee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(x_i) \wedge \iota(y_i) \wedge \xi(z_i)) \mid x_i, y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i = w\}.$$

Définition 1.2.5. [27] Soit R un anneau, on dit que $\mu \subset R$ est un sous-anneau flou si et seulement si

1. $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

2. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$. $\forall x, y \in R$. Si de plus, R est unitaire on ajoute la 3^{eme} condition

3. $\mu(1) = 1$

Exemple 1.2.1. Soit

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Q} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

μ est un sous-anneau flou de $\mathbb{Q}$.

Propriété 1.1. Soit $\nu \subset R$ un sous anneau flou. Alors on a :

1. $\mu(0) \geq \mu(x), \qquad \forall x \in R$

2. soit $x, y \in R$, si $\mu(x-y) = \mu(0)$. Alors, $\mu(x) = \mu(y)$

3. $\mu(x) = \mu(-x)$.

Démonstration. **1.** On a $\mu(0) = \mu(x-x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x), \qquad \forall x \in R$

2. on a $\forall x, y \in R$

$$\begin{aligned} \mu(x) = \mu(x-y+y) &\geq \mu(x-y) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(0) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(y). \end{aligned}$$

De même $\mu(y) \geq \mu(x)$. Donc on a l'égalité $\mu(x) = \mu(y)$.

3. on a :

$$\begin{aligned}\mu(-x) = \mu(0 - x) &\geq \mu(x) \wedge \mu(0) \\ &\geq \mu(x) \\ \mu(-x) &\geq \mu(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(x) = \mu(0 - (-x)) &\geq \mu(-x) \wedge \mu(0) \\ &\geq \mu(-x) \\ \mu(x) &\geq \mu(-x).\end{aligned}$$

Par conséquent $\mu(x) = \mu(-x)$.

□

Théorème 1.2.7. μ est un sous-anneau flou de R si et seulement si μ_t est un sous-anneau de R, $\forall t \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1]/\ b \leq \mu(0)\}$.

Démonstration. Il est clair que $\mu_t = \{x \in R, \quad \mu(x) \geq t\}$ est non vide.
Soit $x, y \in \mu_t$ alors, par définition on a $\mu(x) \geq t$, et $\mu(y) \geq t$,
alors,

$$\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \text{ car } \mu \text{ est un sous-anneau flou de} R$$

ce qui implique que

$$x - y \in \mu_t.$$

De même,

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

d'où,

$$\mu(xy) \geq t.$$

Par suite,

$$xy \in \mu_t.$$

Inversement, soit $x, y \in R$ et soit $\mu(x) = t_1$, et $\mu(y) = t_2$,

donc, $x \in \mu_{t_1}$ et $y \in \mu_{t_2}$.

Supposons que $t_2 > t_1$,

alors

$$\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1},$$

donc,

$$y \in \mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1},$$

et puisque x et $y \in \mu_{t_1}$ alors, $x - y \in \mu_{t_1}$, et $xy \in \mu_{t_1}$.

Par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq t_1 = \mu(x) \wedge \mu(y) \, et \, \mu(xy) \geq t_1 = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

□

Définition 1.2.6. Soit μ un sous anneau flou de R, et x_t un point flou de R. On écrit : $x_t \in \mu$ pour dire que $\mu(x) \geq t$.

Par le principe d'extension de Zadeh, on a :

$$x_t + y_s = (x+y)_{t \wedge s}$$

$$x_s y_t = (xy)_{t \wedge s}.$$

Théorème 1.2.8. Soit μ un sous-ensemble flou de R .

μ est un sous-anneau flou de R si et seulement si $\forall x_t, y_s \in \mu$ on a $x_t - y_s \in \mu$ et $x_t y_s \in \mu$.

Démonstration. Soit $x_t, y_s \in \mu$.

Supposons que μ est un sous-anneau flou de R, alors,

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &\geq t \wedge s \end{aligned}$$

Ce qui implique que $x_t - y_s \in \mu$.

De même, puisque μ est un sous-anneau flou de R, on a :

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &\geq t \wedge s. \end{aligned}$$

Par suite, $x_t y_s \in \mu$.

Inversement, soit $x, y \in R$, on a

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \;\; et \;\; y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu,$$

donc par hypothèse on a

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} - y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \;\; et \;\; x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu.$$

Ce qui implique que

$$(x-y)_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \;\; et \;\; (xy)_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$$

par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \;\; et \;\; \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

□

1.2.2.2 Idéaux Flous

Définition 1.2.7. [27] Soit R un anneau. On dit que $\mu \subset R$ est un idéal flou si et seulement si :

1. $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$,$\forall x, y \in R$.

Exemple 1.2.2. Soit

$$\mu : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1/2 & si \quad x = 0, 2 \\ \frac{1}{3} & si \quad x = 1, 3 \end{cases}$$

μ est un idéal flou de $\mathbb{Z}_4$.

avec $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

Théorème 1.2.9. Soit $\mu \subset R$. Alors, μ est un idéal flou si et seulement si μ_a est un idéal de R, $\forall a \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1] \mid b \leq \mu(0)\}$.

Démonstration. Soit μ un idéal flou et $a \in (0,1]$ tel que $a \leq \mu(0)$ ou $a \in \mu(R)$.

Soit $x, y \in \mu_a$ et $r \in R$.

Alors, $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq a$ et $\mu(rx) \geq \mu(x) \geq a$. Puisque $x - y, rx \in \mu_a$.

Par conséquent, μ_a est un idéal de R.

Inversement, soit μ_a un idéal de R, $\forall a \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1] \mid b \leq \mu(0)\}$.

Soit $x, y, r \in R$ et $a = \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Alors, $a \leq \mu(0)$ et $x, y \in \mu_a$.

Ainsi,

$$x - y \in \mu_a.$$

Par suite,

$$\mu(x-y) \geq a = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Soit $b = \mu(x) \in \mu(R)$. Alors, $x \in \mu_b$. Donc, $rx \in \mu_b$ puisque μ_b est un idéal de R.

Ainsi,

$$\mu(rx) \geq b = \mu(x).$$

Par conséquent, μ est un idéal flou de R. □

Théorème 1.2.10. μ est un idéal flou de R si et seulement si :

1. $\forall x_t, y_s \in \mu, \quad x_t - y_s \in \mu$
2. $\forall x \in R,\ \forall t \in (0,1],\ \forall y_s \in \mu$, $x_t.y_s \in \mu$, pour tout $s \in (0,1]$

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons que μ est un idéal flou. On a pour tout $x_t, y_s \in \mu$.

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &\geq t \wedge s. \end{aligned}$$

Alors,

$$x_t - y_s = (x-y)_{t \wedge s} \in \mu.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mu(x.y) &\geq \mu(x) \vee \mu(y) \\ &\geq t \vee s \\ &\geq t \wedge s. \end{aligned}$$

Ainsi, $(x.y)_{t\wedge s} = x_t.y_s \in \mu$, pour tout $t \in (0,1]$.

$\Leftarrow$) Soient x et $y \in R$, on a $x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$ et $y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$. On a alors,

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} - y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu.$$

Par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Montrons maintenant que $\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$.

Soient x et $y \in R$. Supposons que $\mu(y) \geq \mu(x)$, donc pour

$$t = s = \mu(x) \vee \mu(y),$$

on a,

$$y_{t\vee s} \in \mu.$$

Or $x \in R$ et $t \vee s \in (0,1]$, alors

$$x_{t\vee s}.y_{t\vee s} \in \mu,$$

Ainsi,

$$\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y).$$

□

1.2.3 Corps flou

Ci-dessus nous présentons des résultats et définitions du sous-corps flou et de l'espace linéaire flou proposés par Nanda en 1986 [49].

Définition 1.2.8. Soit F un corps et K un sous-ensemble flou de F. Si K satisfait les conditions suivantes : $\forall x, y \in F$,

- **1.** $\mu_K(x+y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$.
- **2.** $\mu_K(-x) \geq \mu_K(x)$.
- **3.** $\mu_K(x \cdot y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$.
- **4.** $\mu_K(x^{-1}) \geq \mu_K(x)$.
- **5.**$\mu_K(0) = \mu_K(1) = 1$.

Avec 0 est l'élément neutre pour le groupe additif $(F, +)$, et 1 dénote l'élément neutre pour le groupe multiplicatif $(F - \{0\}, .)$.

Alors K est dit sous-corps flou ($\mathbb{FSF}$) de F.

Définition 1.2.9. Soient F un corps, et K un sous-corps flou de F. Soient X un espace linéaire sur F, et V un sous-ensemble flou de X. V est un espace lineaire flou de X si et seulement si :

1. $\mu_V(x+y) \geq \mu_V(x) \wedge \mu_V(y)$, $\forall x, y \in X$.
2. $\mu_V(\lambda.x) \geq \mu_K(\lambda) \wedge \mu_V(x)$,$\forall x \in X$ et $\forall \lambda \in F$.
3. $\mu_V(0) = 1$.

Si K est un sous-corps classique la condition 2 sera remplacée par :

(2) $\mu_V(\lambda.x) \geq \mu_V(x)$,$\forall x \in X$ et $\forall \lambda \in F$.

Proposition 1.2.2. *K est un sous-corps flou du corps F si et seulement si :*

1. $\mu_K(x-y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F$.
2. $\mu_K(xy^{-1}) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x \in F$ et $\forall y \in F - \{0\}$.

Trois ans plus-tard R.Biswa a constaté que la proposition 1.2.2 ne peut pas redonner la condition (5) de la définition du sous-corps flou proposée par Nanda, et il s'est engagé dans [12] à donner les redéfinitions des concepts précédents.

Définition 1.2.10. Soit F un corps et K un sous ensemble flou de F. Si K satisfait les conditions suivantes : $\forall x, y \in F$,

1. $\mu_K(x+y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$.
2. $\mu_K(-x) \geq \mu_K(x)$.
3. $\mu_K(x \cdot y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$.

4. $\mu_K(x^{-1}) \geq \mu_K(x)$.

Alors K est dit sous-corps flou ($\mathbb{FSF}$) de F.

Définition 1.2.11. Soient F un corps, et K un sous-corps flou de F. Soient X un espace linéaire sur F, et V un sous-ensemble flou de X. V est un espace linéaire flou de X si et seulement si :

1. $\mu_V(x+y) \geq \mu_V(x) \wedge \mu_V(y)$, $\forall x, y \in X$.
2. $\mu_V(\lambda.x) \geq \mu_K(\lambda) \wedge \mu_V(x)$, $\forall x \in X$ et $\forall \lambda \in F$.

Proposition 1.2.3. *K est un sous-corps flou du corps F si et seulement si :*

1. $\mu_K(x-y) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F$.
2. $\mu_K(xy^{-1}) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$,$\forall x \in F$ et $\forall y \in F - \{0\}$.

Démonstration. On a $\mu_K(0) = \mu_K(x-x) \geq \mu_K(x)$, $\forall x \in F$ d'après (1).
Donc $\mu_K(-x) = \mu_K(0-x) \geq \mu_K(x)$ $\forall x \in F$.
Utilisons le résultat précédent, on trouve que
$\mu_K(x+y) = \mu_K(x-(-y)) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F$.
D'autre part, on a $\mu_K(1) = \mu_K(xx^{-1}) \geq \mu_K(x)$, $\forall x \in F$ d'après (2).
Donc $\mu_K(x^{-1}) = \mu_K(1.x^{-1}) \geq \mu_K(x)$ $\forall x \in F$.
Ainsi $\mu_K(xy) = \mu_K(x(y^{-1})^{-1})) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F(y \neq 0)$.
Si $y = 0$, alors $\mu_K(xy) = \mu_K(0) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x \in F$.
Inversement, on a $\mu_K(x-y) = \mu_K(x+(-y)) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F$.
et
$\mu_K(x(y^{-1})) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y^{-1}) \geq \mu_K(x) \wedge \mu_K(y)$, $\forall x, y \in F$.

□

Lemme 1.2.2. [29] *Soit F un sous-corps flou de X. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, F_α est un sous-corps de X.*

Chapitre 2

Théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques

Le développement de la théorie des sous-ensembles flous a été spectaculaire dans les trois dernières décennies. Néanmoins, il y a des problèmes qui pour une meilleure analyse exigent une philosophie semblable à la notion floue dans laquel non seulement le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble est pris en considération, mais aussi bien son degré de non-appartenance à cet ensemble. Dans cette direction, en 1984, la notion des sous-ensembles flous intuitionistiques $(\mathbb{IF})$ a été introduite par K.Atanassov dans [4] comme une généralisation de la notion des ensembles flous $(\mathbb{F})$ qui a été décrite par Zadeh [59].

2.1 Exemples et motivations

Premier Exemple :

Le premier exemple est purement construit de la théorie des nombres. Il est lié à la fonction d'Euler φ, qui détermine le nombre de nombres naturels plus petits qu'un nombre fixe n, qui n'ont pas de diviseur commun avec n. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit l'ensemble $F(n)$ Par :

$$F(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < n \; et \; pgcd(x, n) = 1\}$$

Alors,

$$\varphi(n) = card(F(n))$$

avec $pgcd(a, b)$ est le plus grand diviseur commun entre a et b, et $card(X)$ désigne le cardinal de l'ensemble X.
Soient

$$\varphi_\mu(n) = card(\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq n \; et \; \frac{n}{x} \in \mathbb{N}\})$$

et

$$\varphi_\nu(n) = \varphi(n)$$

Ensuite, nous définissons la fonction V, qui associe à chaque entier naturel $n \geq 2$ le couple :

$$V(n) = \langle \frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_\nu(n)}{n} \rangle$$

. Cette fonction V détermine pour chaque élément $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de divisibilité et de non-divisibilité par tous les entiers naturels.
On peut vérifier facilement que

$$\frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_\nu(n)}{n} \in [0, 1]$$

et

$$0 \leq \frac{\varphi_\mu(n)}{n} + \frac{\varphi_\nu(n)}{n} \leq 1$$

on définit aussi

$$\varphi_\pi(n) = n - \varphi_\mu - \varphi_\nu(n)$$

$$= n - card(F(n)) - card(\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq n \; et \; \frac{n}{x} \in \mathbb{N}\})$$

$$= card(\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < n \; et \; 1 < pgcd(x, n) < n\})$$

A titre d'exemple,
$V(3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \; V(12) = \left(\frac{5}{12}, \frac{4}{12}\right); \; V(15) = \left(\frac{3}{15}, \frac{8}{15}\right)$

Donc, on peut définir le sous-ensemble "flou intuitionistique" N par :

$$N = \{< n, \frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_\nu(n)}{n} > \; \mid \; n \in \mathbb{N}\}$$

Deuxième Exemple :
Soit E l'ensemble de tous les pays avec des gouvernements élus. Supposons que pour tout pays $x \in E$ nous connaissions le pourcentage de l'électorat ayant voté pour le gouvernement

correspondant, on le note par $M(x)$. On pose $\mu(x) = \frac{M(x)}{100}$
Soit $\nu(x) = 1 - \mu(x)$. Ce nombre correspond à la partie de l'électorat qui n'a pas voté pour le gouvernement. Au moyen de la théorie des ensembles flous, nous ne pouvons pas considérer cette valeur en détail. Cependant, si nous définissons $\nu(x)$ comme le nombre de votes donné à des partis ou à des personnes extérieures au gouvernement, nous pouvons alors montrer la partie des électeurs qui n'ont pas voté du tout et le nombre correspondant sera $1 - \mu(x) - \nu(x)$. Ainsi, nous pouvons construire l'ensemble $\{\langle x, \nu(x), \mu(x)\rangle \mid x \in E\}$. Évidemment, $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$.

Troisième Exemple :
Deux personnes "x" et "y" ont acheté une boîte de chocolat, cette boîte contient 10 pièces. 7 ont été mangées par "y", deux par "x" et une pièce de chocolat tombée sous la table.
à ce moment là "z" un ami de "x", est venu, et "x" déclare.

"Nous ne pouvons pas te donner de chocolat, parce que "y" a mangé toutes les pièces "

Donnons une estimation de la valeur de vérité de cette déclaration avant qu'on ait une connaissance des évènements ultérieurs. Puisque "y" n'a pas été le seul qui a mangé le chocolat, alors à partir du point de vue classique qui utilise 0 et 1 pour les estimations, la déclaration de "x" a une valeur de vérité nulle.
D'autre part, on est convaincu d'une façon intuitive que la déclaration est plus vraie que fausse. Parce qu'il ne reste plus de chocolat.
Si on estime la déclaration de "x" dans les termes de logiques ternaires, introduite par Jan Lukasiewicz en 1926 [24], qui prend l'ensemble $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ comme ensemble des estimations, sa valeur de vérité devra être $\frac{1}{2}$.
Lukasiewicz a généralisé son idée à la notion de plusieurs valeurs logiques [24]. Par exemple, si on utilise onze valeurs logiques, en prenant comme estimations l'ensemble des éléments $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., 1\}$, et dans ce cas, notre problème est à nouveau facile à résoudre : la vérité de l'estimation de la déclaration est exactement $\frac{1}{7}$. Mais si nous prenons six valeurs logiques, l'estimation est décrite par l'ensemble $\{0, \frac{1}{5}, .., 1\}$, maintenant, on ne saura pas évaluer correctement la valeur de vérité de la déclaration précédente. On hésitera entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, mais aucune de ces deux valeurs ne sera correcte, parce que

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}$$

Ces deux valeurs seraient éloignées de la valeur $\frac{7}{10}$.

Il y a plusieurs façons pour évaluer l'estimation de vérité, pour gérer le même problème, ainsi on aboutit à l'idée d'ensemble flou élaborée par Lotfi Zadeh, qui utilise $[0, 1]$ comme ensemble d'évaluation.
Maintenant il est clair que la valeur de vérité est égale à 0.7. Cependant, dans le prochain moment "y" peut prendre le chocolat tombé et le placer dans la boîte, en conservant la valeur de vérité qui est égale à 0.7, et le reste c'est 0.3. Mais il peut aussi manger le dernier morceau, et dans ce cas la valeur de vérité prend 0.8 et le reste est 0.2. Dans ce sens, la déclaration dépend essentiellement aux actions de "y". Donc l'appareil des ensembles flous intuitionistiques nous donne la réponse la plus précise $< 0.7, 0.2 >$, et maintenant le degré d'incertitude est 0.1.

2.2 Notions fondamentales

Ci-après un rappel des grandes lignes de la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques dont on aura besoin tout au long de notre travail.

Définition 2.2.1. On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \left\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \right\}$$

Définition 2.2.2. $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ est appelé le degré de non-détermination (ou incertitude) de l'élément $x \in E$ à l'ensemble flou intuitionistique A.

Il est clair que $\pi_A(x) = 0$, si A est un sous-ensemble flou de X.

On note $\mathbb{IF}(X)$ l'espace de sous-ensembles flous intuitionistiques de X.

Remarque 2.2.1. Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique. En effet, on a

$$0 \leq \mu_A + \nu_A = 1$$

Exemple 2.2.1. Soit $X = [1, 4]$, et soit le sous-ensemble flou A décrit par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Si } \; x \in [1, 2[\\ -x + 3 & \text{Si } \; x = 2 \\ \frac{4-x}{2} & \text{Si } \; x \in]2, 4] \end{cases}$$

et

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 0.8(2 - x) & \text{Si } \; x \in [1, 2[\\ 0 & \text{Si } \; x = 2 \\ 0.3(x - 2) & \text{Si } \; x \in]2, 4] \end{cases}$$

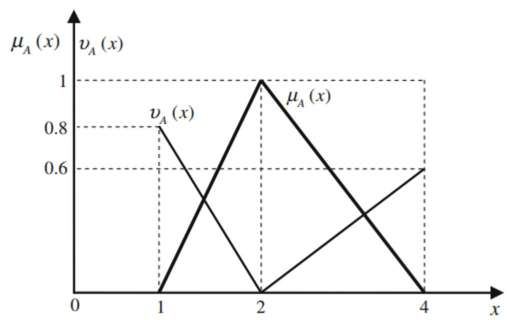


FIGURE 2.1 – Fonctions d'appartenance et de non-appartenance de A

Soit X un univers.

Définition 2.2.3. Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X. On appelle support de A l'ensemble

$$S(A) = \Big\{ x \in X, \nu_A(x) < 1 \Big\}$$

Définition 2.2.4. Soient n sous-ensembles flous intuitionistiques $A_1, ..., A_n$ respectivement de $X_1, ..., X_n$. Le produit cartésien de $A_1, ..., A_n$ est un sous-ensemble flou intuitionistique de $X_1 \times ... \times X_n$, défini par

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$
$$\nu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \max\Big(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n)\Big)$$

$\forall x_i \in A_i,\ i = 1, 2, ...$

Pour des raisons de simplicité, on note le sous-ensemble flou intuitionistique A par (μ_A, ν_A).

2.3 Opérations de base sur les sous-ensembles flous intuitionistiques

On définit les opérations sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques comme suit :

- **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Complémentaire**

  Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X caractérisé par μ_A et ν_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad \text{et} \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Intersection**

  L'intersection de deux sous-ensembles flous intuitionistiqus A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

– **Réunion**

La réunion de deux sous-ensembles flous intuitionistiques A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

Exemple 2.3.1. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, considérons $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, tels que :

$A = \{\langle a, 0.5, 0.3, \rangle, \langle b, 0.1, 0.7\rangle, \langle c, 1, 0\rangle, \langle d, 0, 0\rangle, \langle e, 0, 1\rangle\}.$

$B = \{\langle a, 0.7, 0.1\rangle, \langle b, 0.3, 0.2\rangle, \langle c, 0.5, 0.5\rangle, \langle d, 0.2, 0.2\rangle, \langle e, 1, 0\rangle\}.$

Alors

$\overline{A} = \{\langle a, 0.3, 0.5, \rangle, \langle b, 0.7, 0.1\rangle, \langle c, 0, 1\rangle, \langle d, 0, 0\rangle, \langle e, 1, 0\rangle\}.$

$A \cap B = \{\langle a, 0.5, 0.3, \rangle, \langle b, 0.1, 0.7\rangle, \langle c, 0.5, 0.5\rangle, \langle d, 0, 0.2\rangle, \langle e, 0, 1\rangle\}.$

$A \cup B = \{\langle a, 0.7, 0.1, \rangle, \langle b, 0.3, 0.2\rangle, \langle c, 1, 0\rangle, \langle d, 0.2, 0\rangle, \langle e, 1, 0\rangle\}.$

D'après [4] on a pour $A, B \in \mathbb{IF}(X)$.On a les assertions suivantes

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

Définition 2.3.1. [14] Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha+\beta \leq 1$. Un point flou intuitionistique $x_{(\alpha,\beta)}$, est un sous-ensemble flou intuitionistique de X défini par :

$$x_{(\alpha,\beta)}(y) = \begin{cases} (\alpha,\ \beta) & \text{si } x = y \\ (0,1) & \text{si non} \end{cases}$$

Et on écrit $x_{(\alpha,\beta)} \in < \mu_A, \nu_A >$ si $\mu_A(x) \geq \alpha$ et $\nu_A(x) \leq \beta$.

2.4 Interprétations géométriques

2.4.1 Interprétation géométrique d'un sous-ensemble flou intuitionistique

Contrairement aux sous-ensembles flous qui n'admettent qu'une interprétation géométrique, il existe plusieurs interprétations géométriques des sous-ensembles flous intuitionistiques, qui seront représentées dans cette section.

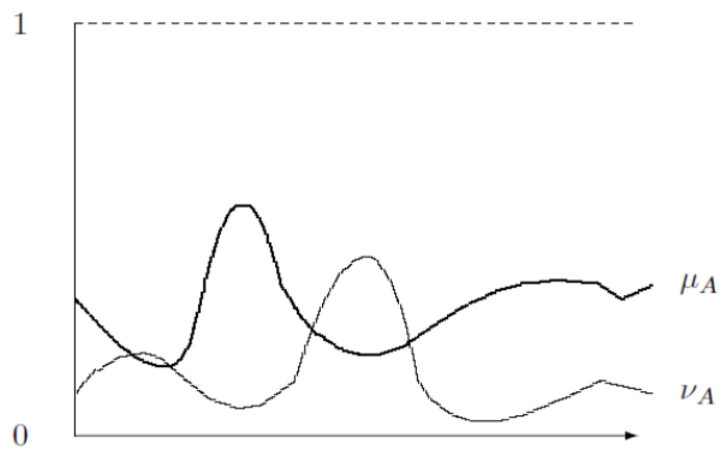


FIGURE 2.2 – L'interprétation géométrique la plus largement acceptée

Son analogue est donné en figure 2.3

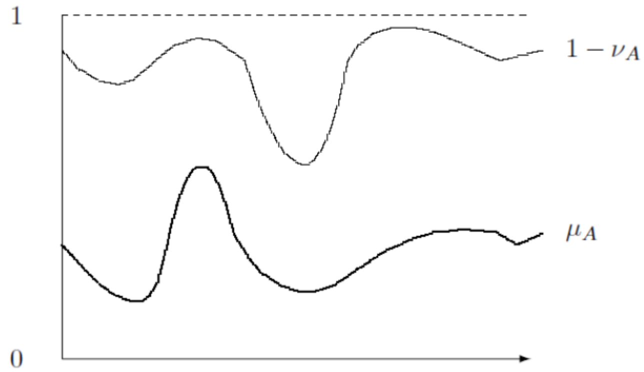


FIGURE 2.3 – Équivalente à la figure 2.2

On peut aussi donner une interprétation géométrique par un segment de longueur 1.

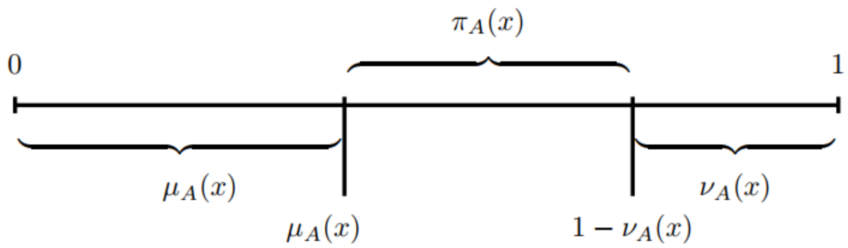


FIGURE 2.4 – présentation sur un segment de longueur 1

Les interprétations suivantes sont impossibles car on peut remarquer que $\mu(x)+\nu(x)\geq 1$ pour un x de $\mathbb{R}$.

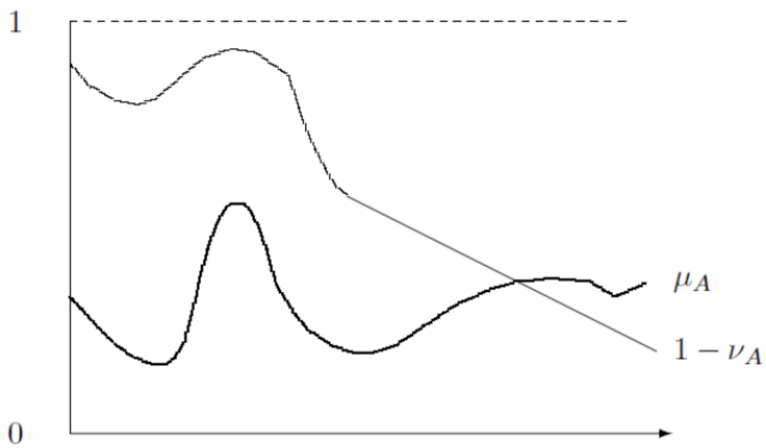


FIGURE 2.5 – Situation impossible

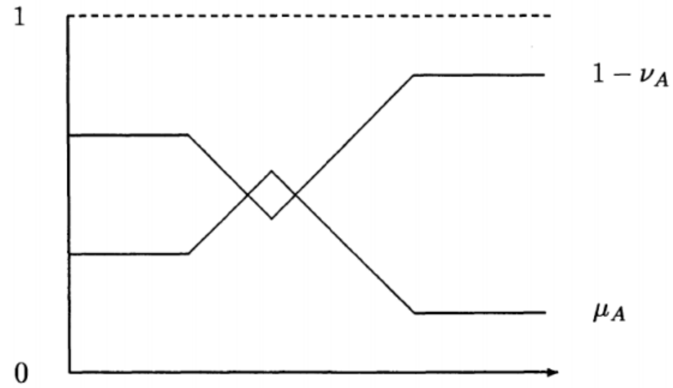


FIGURE 2.6 – Intérprétation impossible

2.4.2 Interprétation géométrique des opérations " $\cap$ " et " $\cup$ "

Ainsi, les opérations sur les sous-ensembles flous intuitionistiques peuvent être interprétées géométriquement. ci-dessous, nous présentons celles des opérations " $\cap$ " et " $\cup$ ".

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cup B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cup B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

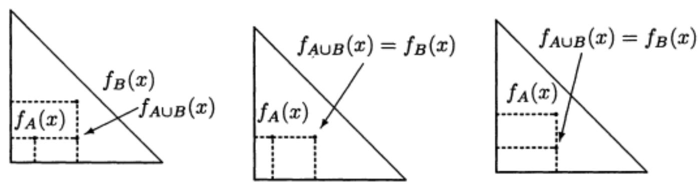


FIGURE 2.7 – Interprétation géométrique de "$\cup$"

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cap B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cap B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

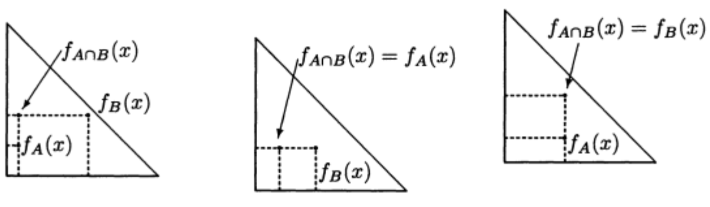


FIGURE 2.8 – Interprétation géométrique de " $\cap$ "

2.5 Transformation de $\mathbb{IF}(X)$ dans $\mathbb{F}(X)$

On introduit les deux opérateurs suivants $\Box$ et $\diamond$ qui transforment un sous-ensemble flou intuitionistique en un sous-ensemble flou.
Soit $A \in \mathbb{IF}(X)$

$$\Box A = \Big\{ < x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) >, x \in X \Big\}$$

et

$$\diamond A = \Big\{ < x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X \Big\}$$

Si A est un sous-ensemble flou alors

$$\Box A = A = \diamond A$$

Remarque 2.5.1. La dernière égalité montre que les opérateurs $\Box$ et $\diamond$ n'admettent pas une analogie sur l'espace des sous-ensembles flous, ce qui entraîne aussi que $\mathbb{IF}(X)$ est une extension propre de l'ensemble des sous-ensembles flous.

Exemple 2.5.1. Soit $X = \{x, y, z\}$, et soit le sous-ensemble flou intuitionistique
$A = \{\langle x, 0.3, 0.5\rangle, \langle y, 0.2, 0.6\rangle, \langle z, 0.5, 0.4\rangle\}$, on a

$$\Box A = \{\langle x, 0.3, 0.7\rangle, \langle y, 0.2, 0.8\rangle, \langle z, 0.5, 0.5\rangle\}$$

$$\diamond A = \{\langle x, 0.5, 0.5\rangle, \langle y, 0.4, 0.6\rangle, \langle z, 0.5, 0.4\rangle\}$$

On a les propriétés suivantes
- $\overline{\Box \overline{A}} = \diamond A$
- $\overline{\diamond \overline{A}} = \Box A$
- $\Box A \subset A \subset \diamond A$
- $\Box\Box A = \Box A$
- $\diamond\Box A = \Box A$
- $\diamond\diamond A = \diamond A$

On note $\subset_\Box$, $\subset_\diamond$ et $[$, trois opérations définies sur $\mathbb{IF}(X)$ par

$$A \subset_\Box B \Longleftrightarrow \Box A \subset \Box B$$

$$A \subset_\diamond B \Longleftrightarrow \diamond A \subset \diamond B$$

$$A \sqsubseteq B \Longleftrightarrow \pi_A(x) \leq \pi_B(x),\ \forall x \in X$$

On obtient

- Si $A \subset_\square B$ et $A \subset_\diamond B$, alors $A \sqsubseteq B$
- Si $A \subset_\square B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$
- Si $A \subset_\diamond B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

2.6 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Dans cette section on va donner une généralisation de la notion de α-coupe utilisée dans le cas d'un sous-ensemble flou, dite (α, β)-coupe qui est un outil très important pour le développement du sujet,

Définition 2.6.1. Une (α, β)-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\}$$

est définie par

$$A^{\alpha,\beta} = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad et \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\}$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $\alpha + \beta \leq 1$

On définit aussi

$$A^\beta = \Big\{x \in X, \quad \nu_A(x) \leq \beta\Big\}$$

et

$$A_\alpha = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}$$

On obtient la proposition suivante

Proposition 2.6.1.

$$A^{\alpha,\beta} = A_\alpha \cap A^\beta$$

Exemple 2.6.1. $X = \{x, y, z, f, e\}$ et $A = \{< x, 0.3, 0.5 >, < y, 0.2, 0.6 >, < z, 0.5, 0.4 >$ $, < f, 0, 0 >, < e, 0, 1 >\}$.

$A^{0.3,0.5} = \{x, z\}\,,\;\; A_{0.3} = \{x, z\}\,,\quad A^{0.5} = \{x, z, f\}$

$A_{0.3} \cap A^{0.5} = \{x, z\} = A^{0.3,0.5}$

– Pour des raisons de simplicité nous pouvons noter souvent tout sous-ensemble flou intuitionistique A par $< \mu_A, \nu_A >$.

Chapitre 3

Structures algébriques floues intuitionistiques

3.1 Groupe flou intuitionistique

3.1.1 Approche fonctionnelle

Définition 3.1.1. [13] Soit G un groupe. Le sous-ensemble flou intuitionistique $A = \{< x, \mu(x), \nu(x) > | x \in G\}$ de G est dit sous-groupe flou intuitionistique de G si $\forall x, y \in G$

1. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\nu(xy) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$
3. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$
4. $\nu(x^{-1}) \leq \nu(x)$.

Nous désignerons par $\mathbb{IFG}(G)$ l'ensemble de tous les sous-groupes flous intuitionistiques de G.

Exemple 3.1.1. considérons le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$, et soit l'application $A =< \mu_A,\ \nu_A >: \mathbb{Z} \to [0, 1] \times [0, 1]$ définit par :

$$A(0) = 1_{\sim} =< 1, 0 >,$$

$$\mu_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ est } impair, \\ \frac{2}{3} \text{ si } n \text{ est } pair \end{cases}$$

et

$$\nu_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } n \text{ est } impair, \\ \frac{1}{5} \text{ si } n \text{ est } pair. \end{cases}$$

Alors, A est un $\mathbb{IFG}$ de $\mathbb{Z}$.

Remarque 3.1.1. Soit G un groupe.

- Si μ_A est un sous-groupe flou de G, alors $A = (\mu_A,\ \mu_{A^C}) \in \mathbb{IFG}(G)$.
- Si $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, μ_A et ν_{A^C} sont des sous-groupes flous de G.

Proposition 3.1.1. Soit $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, $A(x^{-1}) = A(x)$, $i.e$, $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x), \nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$ et $A(x) \leq A(e)$, $i.e$, $\mu_A(x) \leq \mu_A(e)$, $\nu_A(x) \geq \nu_A(e)$ pour tout $x \in G$, avec e c'est l'élément neutre de G.

Démonstration. D'après la proposition 5.4 de [27], on a

$\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ et $\mu_A(x) \leq \mu_A(e)$ pour tout $x \in G$.

Donc il suffit de démontrer que $\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$, et $\nu_A(x) \geq \nu_A(e)$ pour tout $x \in G$.

Soit $x \in G$. Alors,

$$\nu_A(x) = \nu_A((x^{-1})^{-1}) \leq \nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x).$$

D'une autre part, on a

$$\nu_A(e) = \nu_A(xx^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A((x^{-1}) \leq \nu_A(x).$$

Donc, $\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$ et $\nu_A(e) \leq \nu_A(x)$ pour tout $x \in G$. □

Proposition 3.1.2. Si $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, $G_A = \{x \in G :\ A(x) = A(e)\}$ est un sous-groupe de G.

Démonstration. Soit $x, y \in G_A$.

Alors, $\mu_A(x) = \mu_A(e),\ \nu_A(x) = \nu_A(e)$ et $\mu_A(y) = \mu_A(e), \nu_A(y) = \nu_A(e)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mu_A(xy^{-1}) &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y^{-1}) \\
&= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \ \ \text{(par la proposition3.1.1)} \\
&= \mu_A(e) \wedge \mu_A(e) = \mu_A(e),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\nu_A(xy^{-1}) &\leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y^{-1}) \\
&= \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \ \ \text{(par la proposition3.1.1)} \\
&= \nu_A(e) \vee \nu_A(e) = \nu_A(e).
\end{aligned}$$

D'autre part, par la proposition 3.1.1,

$$\mu_A(xy^{-1}) \leq \mu_A(e) \text{ et } \nu_A(xy^{-1}) \geq \nu_A(e).$$

Donc, $\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A(e)$ et $\nu_A(xy^{-1}) = \nu_A(e)$.
Ainsi,

$$xy^{-1} \in G_A.$$

Par conséquent, G_A est un sous-groupe de G. □

Proposition 3.1.3. Soit $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Si $A(xy^{-1}) = A(e)$ pour tout $x, y \in G$, alors $A(x) = A(y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in G$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mu_A(x) = \mu_A((xy^{-1})y) &\geq \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(y) \\
&= \mu_A(e) \wedge \mu_A(y) = \mu_A(y)\ .
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ par la proposition 3.1.1,

on a

$$\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A((yx^{-1})^{-1}) = \mu_A(yx^{-1})$$

par suite,

$$\begin{aligned}\mu_A(y) = \mu_A((yx^{-1})x) &\geq \mu_A(yx^{-1}) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(x) \\ &= \mu_A(e) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(x)\ .\end{aligned}$$

Donc,

$$\mu_A(x) = \mu_A(y).$$

Par un raisonnement similaire, on a

$$\nu_A(x) = \nu_A(y).$$

□

Proposition 3.1.4. [9], $A \in \mathbb{IFG}(G)$ si et seulement si $\mu_A(xy^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ pour tout $x, y \in G$.

Proposition 3.1.5. Soit A un $\mathbb{IFG}$ d'un groupe G, et soit $x \in G$. Alors, $A(xy) = A(y)$ pour tout $y \in G$ si et seulement si $A(x) = A(e)$.

Démonstration. $(\Rightarrow)$: Supposons que $A(xy) = A(y)$ pour tout $y \in G$. Alors, $A(x) = A(e)$.
$(\Leftarrow)$: Supposons que $A(x) = A(e)$.
Alors, par la proposition 3.1.1, $\mu_A(y) \leq \mu_A(x)$ et $\nu_A(y) \geq \nu_A(x)$ pour tout $y \in G$.
Puisque A est un $\mathbb{IFG}$ de G, alors $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$.
Par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(y) \text{ pour tout } y \in G.$$

D'autre part, par la proposition 3.1.1,

$$\mu_A(y) = \mu_A(x^{-1}xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(xy)$$

et

$$\nu_A(y) = \nu_A(x^{-1}xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(xy).$$

Puisque $\mu_A(x) \geq \mu_A(y)$ et $\nu_A(x) \leq \nu_A(y)$, pour tout $y \in G$,

alors,

$$\mu_A(x) \wedge \mu_A(xy) = \mu_A(xy) \text{ et} \nu_A(x) \vee \nu_A(xy) = \nu_A(xy).$$

Donc,

$$\mu_A(y) \geq \mu_A(xy) \text{ et } \nu_A(y) \leq \nu_A(xy) \text{ pour out } y \in G.$$

Ainsi,

$$\mu_A(xy) = \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) = \nu_A(y) \text{ pour tout } y \in G.$$

□

3.1.2 Approche par Points

Afin de définir la notion de sous-groupe flou intuitionistique d'une manière rigoureuse nous commençons premièrement par la définition des sous structures algébriques.
On note l'ensemble de tous les points flous intuitionistiques d'un sous-ensemble flou intuitionistique $A =< \mu_A, \nu_A >$ par $\underline{A}$.

3.1.2.1 Sous-Groupe Flou Intuitionistique

On note $L = \{(\alpha, \beta)/\alpha, \beta \in [0, 1]/\alpha + \beta \leq 1\}$.

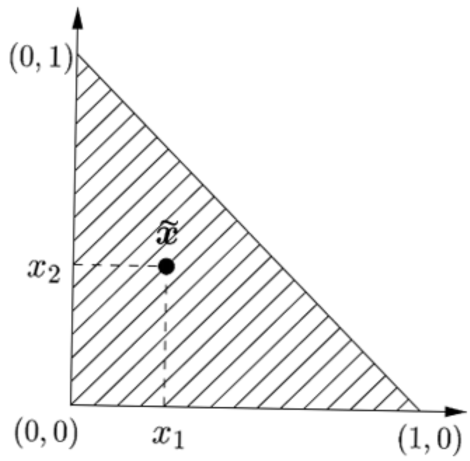


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de l'ensemble L

Théorème 3.1.1. Soit G un groupe et A un sous-ensemble flou intuitionistique de G, Alors A est un $\mathbb{IFG}$ de G, si et seulement si

1. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \;\Rightarrow (xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A$,

2. $x_{(\alpha,\beta)} \in A \Rightarrow (x^{-1})_{(\alpha,\beta)} \in A$,

Démonstration. $\Leftarrow$, montrons que les conditions de la définition 3.1.1 sont vérifiées.
Soit $\alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, $\beta = \max\{\nu_A(x)\nu_A(y)\}$, alors $\alpha + \beta \leq 1$ et

$$\mu_A(x) \geq \alpha, \mu_A(y) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta, \nu_A(y) \leq \beta.$$

Alors,

$$x_{(\alpha,\beta)} \in A \text{ et } y_{(\alpha,\beta)} \in A,$$

donc $(xy)_{(\alpha,\beta)} \in A$,

par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \alpha = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) \leq \beta = \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

(**3.** et **4.**). Évident.

Par suite A est un $\mathbb{IFG}$ de G.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un $\mathbb{IFG}$ de G. Soit $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A$,

alors, $\mu_A(x) \geq \alpha$, $\mu_A(y) \geq \lambda$, et $\nu_A(x) \leq \beta$, $\nu_A(y) \leq \gamma$

par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma,$$

alors,

$$(xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A.$$

Et puisque $x_{(\alpha,\beta)} \in A$

alors,

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(x^{-1}) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \nu_A(x^{-1}) \leq \beta,$$

par suite,

$$(x^{-1})_{(\alpha,\beta)} \in A.$$

$\square$

Notons qu'on a $\mu_A(e) = 1, \nu_A(e) = 0$.

Lemme 3.1.1. Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de E. Pour $(\alpha, \beta) \in L$, soit

$$A_\alpha = \{x \in E,\ \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{et } \ A^\beta = \{x \in E,\ \nu_A(x) \leq \beta\}.$$

Alors, $\mu_A(x) = \vee\{\alpha/\ x \in A_\alpha\}$, et $\nu_A(x) = \wedge\{\beta \mid x \in A^\beta\}$.

Théorème 3.1.2. Soit G un groupe et A un sous-ensemble flou intuitionistique de G. Alors A est un sous-groupe flou intuitionistique de G si et seulement si A_α et A^β sont des sous-groupes de G pour chaque $(\alpha, \beta) \in L$.

Démonstration. Soit A un $\mathbb{IFG}$ de G.
On va démontrer que A^β et A_α sont des sous-groupes de G.
Soit $x, y \in A^\beta$,
alors,

$$\nu_A(x) \leq \beta, \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta.$$

Donc, on a

$$\nu_A(xy^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta,$$

Par suite,

$$xy^{-1} \in A^\beta.$$

Par conséquent, A^β est un sous-groupe de G.
De même, on peut montrer que A_α est un sous-groupe de G. Inversement.
On a

$$\begin{aligned}
\mu_A(xy) = \vee\{\alpha\ /xy \in A_\alpha\} &\geq \vee\{\alpha\ /x \in A_\alpha \text{ et } y \in A_\alpha\} \\
&= \vee\{\alpha\ /\mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \mu_A(y) \geq \alpha\} \\
&= \vee\{\alpha\ /\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha\} \\
&= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\nu_A(xy) = \wedge\{\beta \,/xy \in A^\beta\} &\leq \wedge\{\beta \,/x \in A^\beta \text{ et } y \in A^\beta\}\\ &= \wedge\{\beta \,/\nu_A(x) \leq \beta \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta\}\\ &= \wedge\{\beta \,/\nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta\}\\ &= \nu_A(x) \vee \nu_A(y).\end{aligned}$$

Et

$$\mu_A(x^{-1}) = \vee\{\alpha \,/x^{-1} \in A_\alpha\} = \vee\{\alpha \,/x \in A_\alpha\} = \mu_A(x)$$

$$\nu_A(x^{-1}) = \wedge\{\beta \,/x^{-1} \in A^\beta\} = \wedge\{\beta \,/x \in A^\beta\} = \nu_A(x)$$

Par conséquent, A est un $\mathbb{IFG}$ de G. □

3.2 Anneaux et Idéaux Flous Intuitionistiques

3.2.1 Anneaux Flous Intuitionistiques

Définition 3.2.1. [19] Soit R un anneau. un sous-ensemble flou intuitionistique $A = \{< x, \mu(x), \nu(x) > \mid x \in R\}$ de R est dit sous-anneau flou intuitionistique de R, ($\mathbb{IFR}$) de R si $\forall x, y \in R$

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\nu(x - y) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$
3. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
4. $\nu(xy) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$.

Proposition 3.2.1. Si $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ est un $\mathbb{IFR}$. Alors

- $\mu_A(0) \geq \mu_A(x)$ et $\nu_A(0) \leq \nu_A(x)$ pour tout $x \in R$
- si R est un anneau unitaire alors $\mu_A(1) \geq \mu_A(x)$ et $\nu_A(1) \leq \nu_A(x)$, pour tout $x \in R$.

Proposition 3.2.2. Si $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ est un $\mathbb{IFR}$.
Alors, $\mu_A(x) = \mu_A(-x)$ et $\nu_A(x) = \nu_A(-x)$.

Théorème 3.2.1. Soit $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$, et $B = \{\langle x,\ \mu_B(x),\ \nu_B(x)\rangle / x \in R\}$ deux $\mathbb{IFR}$. Alors, $A \cap B$ est un $\mathbb{IFR}$.

Théorème 3.2.2. Soit $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ et $B = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ deux $\mathbb{IFR}$. Alors, $A \cup B$ est un $\mathbb{IFR}$ si et seulement si $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

Théorème 3.2.3. Soit $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ et $B = \{\langle x,\ \mu_B(x),\ \nu_B(x)\rangle / x \in R\}$ deux $\mathbb{IFR}$. Alors, AB est un $\mathbb{IFR}$.

Démonstration. Soit $x, y \in R$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\nu_A\nu_B)(x-y) &= (\nu_A\nu_B)(x+(-y)) \\
&\leq (\nu_A\nu_B)(x) \ \vee\ (\nu_A\nu_B)(-y) \\
&= (\nu_A\nu_B)(x) \ \vee\ (\nu_A\nu_B)(y)\ .
\end{aligned}$$

Soit $x, y \in R$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\nu_A\nu_B)(xy) \quad &= \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} (\nu_A(x_iy_j) \vee \nu_B(x'_iy'_j))/x_i, x'_i, y_j, y'_j \in R, \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix'_iy_jy'_j \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} ((\nu_A(x_i) \vee \nu_A(y_j)) \vee (\nu_B(x'_i) \vee \nu_B(y'_j)))/x_i, x'_i, y_j, y'_j \in R, \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix'_iy_jy'_j \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\
&= \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} ((\nu_A(x_i) \vee \nu_B(x'_i)) \vee (\nu_A(y_j) \vee \nu_B(y'_j)))/x_i, x'_i, y_j, y'_j \in R, \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix'_iy_jy'_j \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\
&= \quad (\wedge\{\ \vee_{i=1}^{n}(\nu_A(x_i)\ \vee \nu_B(x'_i))/x_i,\ x'_i \in R,\ i \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} x_ix'_i = x\}) \\
&\vee \quad (\wedge\{\vee_{j=1}^{m}(\nu_A(y_j) \vee\}\nu_B(y'_j))/y_j,\ y'_j \in R, j \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{m} y_jy'_j = y\}) \\
&= \quad (\nu_A\nu_B)(x) \ \vee\ (\nu_A\nu_B)(y).
\end{aligned}$$

Par conséquent, AB est un $\mathbb{IFR}$. □

Théorème 3.2.4. Soit R un anneau et A un sous-ensemble flou intuitionistique de R. Alors A est un $\mathbb{IFR}$ de R, si et seulement si

1. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \ \Rightarrow (x-y)_{(\alpha\wedge\lambda, \beta\vee\gamma)} \in A$,

2. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \ \Rightarrow (xy)_{(\alpha\wedge\lambda, \beta\vee\gamma)} \in A$, *Démonstration.* $\Leftarrow$) Montrons que les conditions de la définition 3.2.1 sont satisfaites.

D'après le théorème 3.1.1, on a **1.** et **2.** sont vérifiées.

Pour **3.** et **4.**. Soit $\alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, $\beta = \max\{\nu_A(x)\nu_A(y)\}$, alors $\alpha + \beta \leq 1$ et

$$\mu_A(x) \geq \alpha, \mu_A(y) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta, \nu_A(y) \leq \beta.$$

Alors, $x_{(\alpha,\beta)} \in A$ et $y_{(\alpha,\beta)} \in A$,

donc $(xy)_{(\alpha,\beta)} \in A$,

par conséquent, $\mu_A(xy) \geq \alpha = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy) \leq \beta = \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$.

Par suite A est un $\mathbb{IFR}$ de $R \Rightarrow$

Supposons que A un $\mathbb{IFR}$ de R. Soit $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A$,

alors, $\mu_A(x) \geq \alpha$, $\mu_A(y) \geq \lambda$, et $\nu_A(x) \leq \beta$, $\nu_A(y) \leq \gamma$

par conséquent, $\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda$ et $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma$,

Et $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda$ et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma$, alors,

$$(x-y)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A,$$

Et

$$(xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A,$$

□

3.2.2 Idéal flou Intuitionistique

Définition 3.2.2. [20] Soit $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ un sous-ensemble flou intuitionistique de R. Alors, A est dit un idéal flou intuitionistique de R ($\mathbb{IFI}$) si,

1. $\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$

2. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \vee \mu_A(y)$

3. $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

4. $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \wedge \nu_A(y), \forall x, y \in R.$

Théorème 3.2.5. [6] $A =< \mu, \nu >$ est un idéal flou intuitionistique de R si et seulement si :

1. $\forall x_{(\alpha,\beta)}, y_{(\alpha',\beta')} \in< \mu_A, \nu_A >, x_{(\alpha,\beta)} - y_{(\alpha',\beta')} \in< \mu, \nu >$

2. $\forall x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{R},\ \forall y_{(\alpha',\beta')} \in< \mu, \nu >, x_{(\alpha,\beta)} y_{(\alpha',\beta')} \in< \mu, \nu >.$

Le résultat suivant nous permet de caractériser l'idéal premier flou intuitionistique en utilisant la fonction d'appartenance.
Rappelons tout d'abord la définition d'un idéal premier flou intuitionistique donnée par K. Hur et al [20].

Définition 3.2.3. Un idéal flou intuitionistique P d'un anneau R est dit premier si pour tous idéaux flous intuitionistiques A et B de R, tels que $AB \subset P$, implique que $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.

Théorème 3.2.6. [6] Soit $A =< \mu, \nu >$ un sous-ensemble flou intuitionistique de R. A est un idéal premier flou intuitionistique si et seulement si $\forall x, y \in R$:

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

2. $\nu(x - y) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$

3. $\mu(x.y) = \mu(x) \vee \mu(y)$

4. $\nu(x.y) = \nu(x) \wedge \nu(y)$.

Démonstration. Soit $< \mu, \nu >$ un idéal premier flou intuitionistique .
Supposons que $\mu(xy) > \mu(x) \vee \mu(y)$ et $\mu(x) \geq \mu(y,)$
et supposons que $\nu(xy) < \nu(x) \wedge \nu(y)$ et $\nu(x) \leq \nu(y)$,
alors,

$$\mu(xy) > \mu(x) \geq \mu(y),$$

et $\nu(xy) < \nu(x) \leq \nu(y)$.
Ce qui implique que

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu > \quad et \quad y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu > .$$

D'après [25] on a

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))} y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu >$$

ce qui est absurde, alors

$$\mu(xy) = \mu(x) \vee \mu(y) \quad et \quad \nu(x.y) = \nu(x) \wedge \nu(y).$$

Inversement, Soient $x_{(\alpha,\beta)}$, $y_{(\alpha',\beta')}$ deux points flous intuitionistiques de R, tels que $x_{(\alpha,\beta)} y_{(\alpha',\beta')} \in < \mu, \nu >$.

Supposons que $x_{(\alpha,\beta)} \notin < \mu, \nu >$ et $y_{(\alpha',\beta')} \notin < \mu, \nu >$ pour $\alpha = \alpha' = \mu(xy)$ et
$\beta = \beta' = \nu(xy)$,
on a $\mu(x) < \mu(xy)$ et $\mu(y) < \mu(xy)$ et $\nu(x) > \nu(xy)$ et $\nu(y) > \nu(xy)$.
Ce qui implique que

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu >, \text{ et } y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu >,$$

contradiction avec le fait que $< \mu, \nu >$ est un idéal premier flou intuitionistique. □

3.2.3 Anneaux quotients induits par des idéaux flous intuitionistiques

Dans le présent paragraphe, nous donnons une nouvelle construction d'anneau quotient $R/ < \mu, \nu >$, tel que $< \mu, \nu >$ est un idéal flou intuitionistique d'un anneau R, ainsi les trois théorèmes d'isomorphisme flou intuitionistique, et quelques résultats importants seront établis.
Soit $< \mu, \nu >$ un idéal flou intuitionistique d'un anneau R.
Définissons la relation binaire $\sim$ dans R par :
$\forall\, x, y \in R$, $x \sim y$ si et seulement si $\mu(x - y) = \mu(0)$ et $\nu(x - y) = \nu(0)$.

Lemme 3.2.1. $\sim$ est une relation d'équivalence dans R.

Démonstration. (i) $\forall\, x \in R$, nous avons $\mu(x - x) = \mu(0)$ et $\nu(x - x) = \nu(0)$.
Par conséquent $x \sim x$.

(ii) $\forall\, x, y \in R$, si $x \sim y$, alors $\mu(x - y) = \mu(0)$ et $\nu(x - y) = \nu(0)$.
Puisque $\mu(y - x) = \mu(-(x - y)) = \mu(x - y) = \mu(0)$,
et $\nu(y - x) = \nu(-(x - y)) = \nu(x - y) = \nu(0)$.
Donc $y \sim x$.

(iii) $\forall\, x, y, z \in R$, si $x \sim y$ et $y \sim z$,
alors $\mu(x - y) = \mu(y - z) = \mu(0)$.
puisque $\mu(x - z) = \mu((x - y) - (y - z)) \geq \mu(x - y) \wedge \mu(y - z) = \mu(0)$,
et $\nu(x - z) = \nu((x - y) - (y - z)) \leq \nu(x - y) \vee \nu(y - z) = \nu(0)$,
alors $\mu(x - z) = \mu(0)$ et $\nu(x - z) = \nu(0)$.

Donc $x \sim z$. □

Lemme 3.2.2. Soient $x, y, z \in R$, si $x \sim y$, alors $x + z \sim y + z$ et donc $z + x \sim z + y$.

Démonstration. Si $x \sim y$, alors $\mu(x - y) = \mu(0)$.

Ainsi $\mu((x + z) - (y + z)) = \mu(x - y) = \mu(0)$,

et $\nu((x + z) - (y + z)) = \nu(x - y) = \nu(0)$.

Donc $x + z \sim y + z$. □

Lemme 3.2.3. Soient $x, y, u, v \in R$, si $x \sim y$ et $u \sim v$, alors $x + u \sim y + v$ et $xu \sim yv$.

Démonstration. Soient $x \sim y$ et $u \sim v$, avec $x, y, u, v \in R$.

D'après le lemme 3.2.2, on a $x + u \sim y + u$ et $y + u \sim y + v$.

La transitivité de la relation $\sim$, nous assure que $x + u \sim y + v$.

Puisque $xu - yv = xu - xv + xv - yv = x(u - v) + (x - y)v$,

on a
$$\begin{aligned}\mu(xu - yv) &= \mu(x(u - v) + (x - y)v)\\ &\geq \mu(x(u - v)) \wedge \mu((x - y)v)\\ &\geq \mu(u - v) \wedge \mu(x - y).\end{aligned}$$

Si $x \sim y$ et $u \sim v$, alors $\mu(x - y) = \mu(u - v) = \mu(0)$,

ainsi $\mu(xu - yv) \geq \mu(0)$

donc $\mu(xu - yv) = \mu(0)$.

De même, nous pouvons montrer que $\nu(xu - yv) = \nu(0)$.

Donc $xu \sim yv$. □

Le théorème suivant découle des trois lemmes précédents.

Théorème 3.2.7. $\sim$ est une relation de congruence dans R.

Notation

On note par $A_x = \{y \in R \mid y \sim x\}$ la classe d'équivalence contenant x,

et $R/ < \mu_A, \nu_A >= \{A_x \mid x \in R\}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de R.

Théorème 3.2.8. Si $A =< \mu_A, \nu_A >$ est un idéal flou intuitionistique de l'anneau (resp. anneau commutatif, anneau à division, corps) R, alors $R/ < \mu_A, \nu_A >$ est un anneau (resp. anneau commutatif, anneau à division, corps) sous les opérations binaires

$A_x + A_y = A_{x+y}$ et $A_x A_y = A_{xy}$, $\forall x, y \in R$.

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que les opérations binaires ci-dessus sont bien définies.

En effet, si $A_x = A_u$ et $A_y = A_v$,

alors $x \sim u$ et $y \sim v$.

Par le lemme 3.2.3, on a $x + y \sim u + v$ et $xy \sim uv$,

donc $A_{x+y} = A_{u+v}$ et $A_{xy} = A_{uv}$.

Par conséquent, l'addition et la multiplication sont bien définies.

Clairement, A_0 joue le rôle d'élément zéro dans $R/ < \mu_A, \nu_A >$, en tant que A_{-x} est l'inverse additionnel de A_x, A_1 est l'élément d'unité dans $R/ < \mu_A, \nu_A >$ et $A_{x^{-1}}$ comme inverse multiplicatif de A_x.

Les autres conditions peuvent être facilement vérifiées.

□

Proposition 3.2.3. [36] Soient $f : R \to R'$ un homomorphisme d'anneaux et B un idéal flou intuitionistique de R'. Alors $f^{-1}(B)$ est un idéal flou intuitionistique de R.

Théorème 3.2.9. (Premier théorème d'isomorphisme flou intuitionistique) soient $f : R \to R'$ un épimorphisme (morphisme surjectif) d'anneaux et $B =< \mu_B, \nu_B >$ un idéal flou intuitionistique de R'. Alors $R/f^{-1}(B) \cong R'/B$.

Démonstration. On a $R/f^{-1}(B)$ et R'/B sont des anneaux.(d'après le théorème 3.2.8 et la proposition 3.2.3)

définissons $\xi : R/f^{-1}(B) \to R'/B$ par :

$$\xi((f^{-1}(B))_x) = B_{f(x)}.$$

ξ est bien définie :

Soit $(f^{-1}(B))_x = (f^{-1}(B))_y$, on a $(f^{-1}(B))_{(x-y)} = (f^{-1}(B))_0$

Donc $\mu_B(f(x) - f(y)) = \mu_B(f(0)) = \mu_B(0')$,

et $\nu_B(f(x) - f(y)) = \nu_B(f(0)) = \nu_B(0')$.

Cela implique que $B_{f(x)} = B_{f(y)}$.

(i) ξ est un homomorphisme :

$$\begin{aligned} \xi((f^{-1}(B))_x + (f^{-1}(B))_y) &= \xi((f^{-1}(B))_{x+y}) \\ &= B_{f(x+y)} = B_{f(x)+f(y)} \\ &= B_{f(x)} + B_{f(y)} \end{aligned}$$

$$= \xi((f^{-1}(B))_x) + \xi((f^{-1}(B))_y)$$

et

$$\begin{aligned}
\xi((f^{-1}(B))_x(f^{-1}(B))_y) &= \xi((f^{-1}(B))_{xy}) \\
&= B_{f(xy)} \\
&= B_{f(x)f(y)} \\
&= B_{f(x)}B_{f(y)} \\
&= \xi((f^{-1}(B))_x)\xi((f^{-1}(B))_y).
\end{aligned}$$

(iii) ξ est un épimorphisme :

On a f est un épimorphisme,

donc pour tout $B_y \in R'/B$, il existe $x \in R$ tel que $f(x) = y$.

Alors $\xi((f^{-1}(B))_x) = B_{f(x)} = B_y$.

(iv) ξ est un monomorphisme :

Soit $B_{f(x)} = B_{f(y)}$, alors $\mu_B(f(x) - f(y)) = \mu_B(0')$, et $\nu_B(f(x) - f(y)) = \nu_B(0')$,

Par suite $(f^{-1}(B))(x - y) = (f^{-1}(B))(0)$ et donc $(f^{-1}(B))_x = (f^{-1}(B))_y$.

Par conséquent $R/f^{-1}(B) \cong R'/B$.

□

Lemme 3.2.4. Soient I un idéal et $A =< \mu_A, \nu_A >$ un idéal flou intuitionistique de l'anneau R. Si A est un sous-ensemble flou intuitionistique de I, alors

(i) $A =< \mu_A, \nu_A >$ est un idéal flou intuitionistique de I.

(ii) I/A est un idéal de R/A.

Démonstration. (i) Évidemment.

(ii) Montrons tout d'abord que $\{A_a \mid a \in I\}$ est un idéal de R/A. $\forall\, A_a, A_b \in \{A_a \mid a \in I\}$, avec $a, b \in I$.

Puisque I est un idéal, $a - b \in I$, alors $A_a - A_b = A_{a-b} \in \{A_a \mid a \in I\}$.

$\forall\, A_a \in \{A_a \mid a \in I\}, A_x \in R/A$, avec $a \in I$ et $x \in R$,

donc $ax, xa \in I$,

par conséquent $A_aA_x = A_{ax} \in \{A_a \mid a \in I\}$ et $A_xA_a = A_{xa} \in \{A_a \mid a \in I\}$.

Ainsi $\{A_a \mid a \in I\}$ est un idéal de R/A.

On définit $\varphi : I/A \to R/A$ par :

$(A \mid_I)_a \mapsto A_a \ \forall\, (A \mid_I)_a \in I/A$.

On trouve que $I/A \cong \{A_a \ \mid \ a \in I\}$.

Par conséquent, d'après cet isomorphisme, nous pouvons considérer I/A comme un idéal de R/A.

$\square$

Notation

Soit $A =< \mu_A, \nu_A >$ un idéal flou intuitionistique de l'anneau R.
On note $R_A = A_{A(0)} = \{x \in R \mid \mu_A(x) = \mu_A(0) \, et \, \nu_A(x) = \nu_A(0)\}$.
R_A est un idéal de R.

Théorème 3.2.10. (Second théorème d'isomorphisme flou intuitionistique) Soient A et B deux idéaux flous intuitionistiques de l'anneau R avec $A(0) = B(0)$.

Alors

$$R_A + R_B/B \cong R_A/A \cap B.$$

Démonstration. On a B est un idéal flou intuitionistique de $R_A + R_B$ et $A \cap B$ est un idéal flou intuitionistique de R_A.$(lemme 3.2.4)$

Soit $x \in R_A + R_B$, alors $x = a + b$, avec $a \in R_A, b \in R_B$.

définissons $f : R_A + R_B/B \to R_A/A \cap B$ par

$$f(B_x) = (A \cap B)_a.$$

Si $B_x = B_{x'}$, avec $x' = a' + b', a' \in R_A$ et $b' \in R_B$,

donc $B(x - x') = B((a + b) - (a' + b)) = B((a - a') - (b' - b)) = B(0)$,

et par suite $B(a - a') = B(b' - b) = B(0)$.

Ainsi $(A \cap B)(a - a') =< \mu_A(a - a') \wedge \mu_B(a - a'), \nu_A(a - a') \vee \nu_B(a - a') >$

$=< \mu_A(0) \wedge \mu_B(0), \nu_A(0) \vee \nu_B(0) >$

$= (A \cap B)(0)$.

c'est à dire $(A \cap B)_a = (A \cap B)_{a'}$.

Par conséquent f est bien définie.

$\forall\, B_x, B_y \in R_A + R_B/B$, avec $x = a + b, y = a_1 + b_1, a, a_1 \in R_A$ et $b, b_1 \in R_B$,

alors $x + y = (a + a_1) + (b + b_1)$,

et $xy = (a + b)(a_1 + b_1) = aa_1 + (ab_1 + ba_1 + bb_1) = aa_1 + b', b' = ab_1 + ba_1 + bb_1 \in R_B$.

On a $f(B_x + B_y) = f(B_{x+y}) = (A \cap B)_{a+a_1} = (A \cap B)_a + (A \cap B)_{a_1} = f(B_x) + f(B_y)$,

$$f(B_x B_y) = f(B_{xy}) = (A \cap B)_{aa_1} = (A \cap B)_a (A \cap B)_{a_1} = f(B_x) f(B_y) .$$

Donc f est un homomorphisme.

Pour tout $(A \cap B)_a \in R_A/A \cap B$, prenons $b \in R_B$, alors $x = a + b \in R_A + R_B$, et $f(B_x) = (A \cap B)_a$.

Par conséquent f est un épimorphisme.

$\forall\, x, y \in R_A + R_B$, avec $x = a + b, y = a_1 + b_1, a, a_1 \in R_A$ et $b, b_1 \in R_B$, si $(A \cap B)_a = (A \cap B)_{a_1}$,

alors $(A \cap B)(a - a_1) = (A \cap B)(0)$, i.e., $\min\{\mu_A(a - a_1), \mu_B(a - a_1)\} = \min\{\mu_A(0), \mu_B(0)\}$, et $\max\{\nu_A(a - a_1), \nu_B(a - a_1)\} = \max\{\nu_A(0), \nu_B(0)\}$.

Puisque $\mu_A(0) = \mu_B(0)$ et $\nu_A(0) = \nu_B(0)$, et $\mu_A(a - a_1) = \mu_A(0)$ et $\nu_A(a - a_1) = \nu_A(0)$, on a $\mu_B(a - a_1) = \mu_B(0)$, et $\nu_B(a - a_1) = \nu_B(0)$.

Par conséquent $\mu_B(x - y) = \mu_B((a + b) - (a_1 + b_1))$

$$\begin{aligned} &= \mu_B((a - a_1) - (b_1 - b)) \\ &\geq \min\{\mu_B(a - a_1), \mu_B(b_1 - b)\} \\ &= \min\{\mu_B(0), \mu_B(0)\} = \mu_B(0), \end{aligned}$$

de même pour $\nu_B(x - y) = \nu_B(0)$ et donc $B_x = B_y$.

Par suite f est un monomorphisme.

Ainsi, nous avons montré que $R_A + R_B/B \cong R_A/A \cap B$. $\square$

Théorème 3.2.11. (Troisième théorème d'isomorphisme flou intuitionistique) Soient A et B deux idéaux flous intuitionistiques de l'anneau R avec $A \subseteq B$ et $\mu_A(0) = \mu_B(0)$ et $\nu_A(0) = \nu_B(0)$. Alors

$$(R/A)/(R_B/A) \cong R/B.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.2.4, on a R_B/A est un idéal de R/A.

définissons $f : R/A \to R/B$ par

$f(A_x) = B_x \; \forall\, x \in R$.

Si $A_x = A_y$, alors $A(x - y) = A(0) = B(0)$.

Puisque $A \subseteq B$, on a $\mu_B(x - y) \geq \mu_A(x - y) = \mu_B(0)$,

et donc $\mu_B(x - y) = \mu_B(0)$, et $\nu_B(x - y) \leq \nu_A(x - y) = \nu_A(0)$, et $\nu_B(x - y) = \nu_A(0)$, alors $B_x = B_y$.

Par conséquent f est bien définie.

On a $f(A_x + A_y) = f(A_{x+y}) = B_{x+y} = B_x + B_y = f(A_x) + f(A_y)$,

de plus $f(A_x A_y) = f(A_{xy}) = B_{xy} = B_x B_y = f(A_x)f(A_y)$.

Donc f est un homomorphisme.

Pour tout $B_x \in R/B$, il existe $A_x \in R/A$ tel que $f(A_x) = B_x$,

donc f est un épimorphisme.

Il nous reste à montrer $ker f = R_B/A$.

en effet, $ker f = \{A_x \in R/A \mid f(A_x) = B_0\}$

$= \{A_x \in R/A \mid B_x = B_0\}$

$= \{A_x \in R/A \mid B(x) = B(0)\}$

$= \{A_x \in R/A \mid x \in R_B\} = R_B/A$.

Par suite $(R/A)/(R_B/A) \cong R/B$. □

3.2.4 Caractérisation des idéaux premiers flous intuitionistiques dans un anneau quotient

Définition 3.2.4. [6] Un idéal flou intuitionistique $< \mu, \nu >$ d'un anneau R est appelé idéal premier flou intuitionistique si pour tout $x, y \in R$, on a :

$\mu(xy) = \mu(0) \Longrightarrow \mu(x) = \mu(0)$ ou $\mu(y) = \mu(0)$

$\nu(xy) = \nu(0) \Longrightarrow \nu(x) = \nu(0)$ ou $\nu(y) = \nu(0)$.

Théorème 3.2.12. Soient R un anneau commutatif et $A =< \mu, \nu >$ un idéal flou intuitionistique de R. Alors $A =< \mu, \nu >$ est premier si et seulement si R/A est un anneau intègre.

Démonstration. Si $A =< \mu, \nu >$ est premier, alors R/A est un anneau commutatif (théorème 3.2.8).

Supposons que $A_x A_y = A_0$. Alors $\mu(xy) = \mu(0)$ et $\nu(xy) = \nu(0)$.

D'après la définition 3.2.4 on a $\mu(x) = \mu(0)$ et $\nu(x) = \nu(0)$ ou $\mu(y) = \mu(0)$ et $\nu(y) = \nu(0)$.

c'est-à-dire $A_x = A_0$ ou $A_y = A_0$.

Par conséquent, R/A n'a pas de diviseurs de zéro,

ainsi R/A est un anneau intègre.

Inversement, si R/A est un anneau intègre, alors R/A n'a pas de diviseurs de zéro.

Soient $\mu(xy) = \mu(0)$ et $\nu(xy) = \nu(0)$.

Donc $A_{xy} = A_x A_y = A_0$.

Par suite $A_x = A_0$ ou $A_y = A_0$.

Par conséquent, $\mu(x) = \mu(0)$ et $\nu(x) = \nu(0)$ ou $\mu(y) = \mu(0)$ et $\nu(y) = \nu(0)$.

Donc A est premier. $\square$

Soit I un idéal d'un anneau R. Rappelons qu'un anneau quotient R/I induit par un idéal I est déterminé par une relation d'équivalence $\sim$, tel que $x \sim y$ signifie que $x - y \in I$.
Pour éviter toute confusion, nous écrivons $x \sim y(I)$ pour dire que x est équivalent à y par rapport à l'idéal I, et $x \sim y(< \mu, \nu >)$ pour signifier que x est équivalent à y par rapport à l'idéal flou intuitionistique $< \mu, \nu >$.

Lemme 3.2.5. Si I est un idéal dans un anneau R, alors $x \sim y(I)$ si et seulement si $x \sim y(< \chi_I, 1 - \chi_I >)$.

Démonstration.
$$\begin{aligned} x \sim y(I) &\Longleftrightarrow x - y \in I \\ &\Longleftrightarrow \chi_I(x-y) = 1 \text{ et } 1 - \chi_I(x-y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \chi_I(x-y) = \chi_I(0) \text{ et } 1 - \chi_I(x-y) = 1 - \chi_I(0) \\ &\Longleftrightarrow x \sim y(< \chi_I, 1 - \chi_I >). \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.2.6. Soit I un sous-ensemble d'un anneau R. Alors $< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal premier flou intuitionistique de R si et seulement si I est un idéal premier de R.

Démonstration. Si $< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal premier flou intuitionistique de R, alors I est un idéal de R (théorème 3.8 (i) [28]).

Il reste à montrer que I est premier. Soient $x, y \in R$ tel que $xy \in I$ D'après la définition 3.2.4 on a $\chi_I(xy) = \chi_I(0) = 1$ implique que $\chi_I(x) = \chi_I(0) = 1$ ou $\chi_I(y) = \chi_I(0) = 1$,

par suite $x \in I$ ou $y \in I$.

Donc I est un idéal premier de R.

Inversement, on suppose que I est un idéal premier de R,

D'après le théorème 3.8 (i) [28], on a $< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal flou intuitionistique de R.

$\forall x, y \in R$, on a $xy \in I$, et donc $x \in I$ ou $y \in I$.

Il s'en suit que $\chi_I(xy) = 1 = \chi_I(0)$,

ce qui implique que $\chi_I(x) = 1 = \chi_I(0)$ ou $\chi_I(y) = 1 = \chi_I(0)$.

De même pour $(1-\chi_I)(xy) = 0 = (1-\chi_I)(0)$ implique que $(1-\chi_I)(x) = 0 = (1-\chi_I)(0)$ ou $(1-\chi_I)(y) = 0 = (1-\chi_I)(0)$

Ainsi $<\chi_I, 1-\chi_I>$ est un idéal premier flou intuitionistique de R. $\square$

D'après le lemme 3.2.5, on a $I_x = (<\chi_I, 1-\chi_I>)_x$ et $R/I = R/<\chi_I, 1-\chi_I>$. La combinaison du théorème 3.2.12 et du lemme 3.2.6 permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. Soient R un anneau commutatif et I un idéal de R. Alors I est premier si et seulement si R/I est un anneau intègre.

Démonstration. I est premier $\Longleftrightarrow <\chi_I, 1-\chi_I>$ est premier

$\Longleftrightarrow R/<\chi_I, 1-\chi_I>$ est un anneau intègre

$\Longleftrightarrow R/I$ est un anneau intègre. $\square$

Lemme 3.2.7. Si $A =<\mu, \nu>$ est un idéal flou intuitionistique d'un anneau R, alors $x \sim y(R_A)$ si et seulement si $x \sim y(A)$.

Démonstration. $x \sim y(R_A) \Longleftrightarrow x - y \in R_A$

$\Longleftrightarrow \mu(x-y) = \mu(0)$ et $\nu(x-y) = \nu(0)$

$\Longleftrightarrow x \sim y(A)$. $\square$

Ensuite, nous nous intéressons à l'anneau quotient réduit par un idéal premier flou intuitionistique.

Définition 3.2.5. Un idéal flou intuitionistique $<\mu, \nu>$ d'un anneau R est appelé idéal premier flou intuitionistique si pour tout $x, y \in R$, on a $\mu(xy) = \mu(0)$ et $\mu(x) \neq \mu(0)$ et $\nu(xy) = \nu(0)$ et $\nu(x) \neq \nu(0)$ implique que $\mu(y^n) = \mu(0)$ et $\nu(y^n) = \nu(0)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.2.13. Soient R un anneau commutatif et $A =<\mu, \nu>$ un idéal flou intuitionistique de R. Alors $<\mu, \nu>$ est premier si et seulement si tout diviseur de zéro dans $R/<\mu, \nu>$ est nilpotent.

Démonstration. Supposons que chaque diviseur de zéro dans $R/<\mu, \nu>$ est nilpotent.

Soient $\mu(xy) = \mu(0)$ et $\mu(x) \neq \mu(0)$ et $\nu(xy) = \nu(0)$ et $\nu(x) \neq \nu(0)$,

i.e., $A_x A_y = A_{xy} = A_0$ et $A_x \neq A_0$.

Ainsi A_y est un diviseur de zéro dans $R/<\mu, \nu>$, donc il existe un entier positif n tel que $(A_y)^n = A_{y^n} = A_0$.

Par suite $A(y^n) = A(0)$ et $< \mu, \nu >$ est premier de R.

Inversement, soit $A =< \mu, \nu >$ un idéal premier flou intuitionistique, et A_y un diviseur de zéro dans $R/ < \mu, \nu >$.

Alors il existe $A_x \in R/ < \mu, \nu >$ et $A_x \neq A_0$ tel que $A_x A_y = A_0$,

i.e., $A(xy) = A(0)$ et $A(x) \neq A(0)$.

D'après la définition 3.2.5, on a $A(y^n) = A(0)$ $(n \in \mathbb{N})$, i.e., $(A_y)^n = A_{y^n} = A_0$. □

Lemme 3.2.8. Soit I un sous-ensemble d'un anneau R. Alors $< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal premier flou intuitionistique de R si et seulement si I est un idéal premier de R.

Démonstration. Si $A =< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal premier flou intuitionistique de R, alors I est un idéal de R.

$\forall x, y \in R$, D'après la définition 3.2.5 $\chi_I(xy) = \chi_I(0) = 1$ et $\chi_I(x) \neq \chi_I(0)$ et $(1-\chi_I)(xy) = (1 - \chi_I)(0) = 0$ et $(1 - \chi_I)(x) \neq (1 - \chi_I)(0)$

alors $\chi_I(y^n) = \chi_I(0) = 1$ et $(1 - \chi_I)(y^n) = (1 - \chi_I)(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Donc $xy \in I$ et $x \notin I$.

Alors $y^n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$.

Par conséquent I est un idéal premier de R.

Inversement, si I est premier, alors $A =< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal flou intuitionistique de R.

$\forall x, y \in R$, on a $xy \in I$ et $x \notin I$

alors $y^n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ainsi $\chi_I(xy) = 1 = \chi_I(0)$ et $\chi_I(x) \neq \chi_I(0)$ et $1 - \chi_I(xy) = 0 = 1 - \chi_I(0)$ et $1 - \chi_I(x) \neq 1 - \chi_I(0)$

donc $\chi_I(y^n) = \chi_I(0)$ et $(1 - \chi_I)(y^n) = 1 - \chi_I(0)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Par conséquent $< \chi_I, 1 - \chi_I >$ est un idéal premier flou intuitionistique de R. □

Corollaire 3.2.2. Soient R un anneau commutatif et I un idéal de R. Alors I est premier si et seulement si tout diviseur de zéro dans R/I est nilpotent.

Démonstration. La démonstration découle d'une combinaison du théorème 3.2.13, du lemme 3.2.8 et de lemme 3.2.5 □

3.2.5 Corps flou intuitionistique

Dans cette partie, on va présenter la notion des sous-corps flous intuitionistiques, l'une des plus importantes structures d'algèbre[23, 60]. Ainsi certaines principales propriétés et caractérisations équivalentes des sous-corps flous intuitionistiques seront prouvées.

Définition 3.2.6. Soit F un corps. Si l'ensemble flou intuitionistique $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IFS}(F)$ satisfait les conditions suivantes : $\forall x, y \in F$,

(1) $\mu_A(x \cdot y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, et $\nu_A(x.y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$,

(2) $\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$, et $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x), x \neq 0$,

(3) $\mu_A(x+y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, $\nu_A(x+y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$,

(4) $\mu_A(-x) \geq \mu_A(x)$,et $\nu_A(-x) \leq \nu_A(x)$,

(5)$\mu_A(0) = \mu_A(1) = 1, \nu_A(0) = \nu_A(1) = 0$,

Avec 0 est l'élément neutre du groupe additif $(F,\ +)$, et 1 est l'élément neutre du groupe multiplicatif $(F - \{0\}, \boldsymbol{.})$.

Alors $A = (\mu_A, \nu_A)$ est dit sous-corps flou intuitionistique ($\mathbb{IFF}$) de F.

Exemple 3.2.1. Soit le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, avec l'addition et la multiplication modulo.

L'ensemble flou intuitionistique $A = \{< 0, 0.7, 0.1 >, < 1, 0.5, 0.4 >, < 2, 0.5, 0.4 >, < 3, 0.5, 0.4 >, < 4, 0.5, 0.4 >\}$ est un sous-corps flou intuitionistique.

Théorème 3.2.14. Soient F un corps, et $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$. A est un sous-corps flou intuitionistique de F si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites : $\forall x, y \in F$,

(1) $\mu_A(x \cdot y^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y), y \neq 0, \nu_A(x \cdot y^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$, $y \neq 0$,

(2)$\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$,

(3)$\mu_A(0) = \mu_A(1) = 1, \nu_A(0) = \nu_A(1) = 0$.

Théorème 3.2.15. Soient F un corps et $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$. A est un sous-corps flou intuitionistique de F si et seulement si μ_A et $1 - \nu_A$ sont des sous-corps flous de F.

Théorème 3.2.16. Soit F un corps. $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$ est un sous-corps flou intuitionistique de F si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$ est un sous-groupe flou intuitionistique additif de $(F, +)$.

2. $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$ est un sous-groupe flou intuitionistique multiplicatif de $(F - \{0\}, \cdot)$.

Théorème 3.2.17. Soit F un corps. $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$ est un sous-corps flou intuitionistique de F si et seulement si $(\mu_A, 1 - \mu_A)$ and $(1 - \nu_A, \nu_A)$ sont des sous-corps flous intuitionistiques de F.

Démonstration. Évident, les sous-ensembles $(\mu_A, 1 - \mu_A)$ et $(1 - \nu_A, \nu_A)$ sont des sous-ensembles flous intuitionistiques de F.

En utilisant le théorème 3.2.15 on trouve le résultat . □

Théorème 3.2.18. Soit F un corps, $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est un sous-corps flou intuitionistique de F.

2. $\forall x, y, z \in F, z \neq 0,$

   $\mu_A((x - y) \cdot z^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(z),$

   $\nu_A((x - y) \cdot z^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \vee \nu_A(z),$

   $\mu_A(0) = \mu_A(1) = 1, \nu_A(0) = \nu_A(1) = 0.$

3. $\forall x, y, z \in F, z \neq 0,$

   $\mu_A(z^{-1} \cdot (x - y)) \geq \mu_A(z) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$

   $\nu_A(z^{-1} \cdot (x - y)) \leq \nu_A(z) \vee \nu_A(x) \vee \nu_A(y),$

   $\mu_A(0) = \mu_A(1) = 1, \nu_A(0) = \nu_A(1) = 0.$

Démonstration. Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$.

Soit $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IFS}(F)$ un sous-corps flou intuitionistique de F,

alors $\mu_A(0) = \mu_A(1) = 1$, $\nu_A(0) = \nu_A(1) = 0$, avec 0 l'élément neutre du groupe additif $(F, +)$, et 1 l'élément neutre du groupe commutatif $(F - \{0\}, \cdot)$.

$$\begin{aligned}
\mu_A((x - y) \cdot z^{-1}) &\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(-y) \wedge \mu_A(z^{-1}) \\
&\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(z) \\
\nu_A((x - y) \cdot z^{-1}) &\leq \nu_A(x) \vee \nu_A(-y) \vee \nu_A(z^{-1}) \\
&\leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \vee \nu_A(z).
\end{aligned}$$

Donc, $(1) \Rightarrow (2)$.

Maintenant, montrons $(2) \Rightarrow (1)$.

En particulier, soit $z = 1$, on a

$$\mu_A(1) = 1, \nu_A(1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mu_A((x-y)\cdot z^{-1}) &= \mu_A(x-y) \\
&\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(1) \\
&= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_A((x-y)\cdot z^{-1}) &= \nu_A(x-y) \\
&\leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \vee \nu_A(1) \\
&= \nu_A(x) \vee \nu_A(y),
\end{aligned}$$

on obtient,

$$\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$$

$$\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

D'autre part, soit $y = 0$, on a

$$\mu_A(0) = 1, \nu_A(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mu_A((x-y)\cdot z^{-1}) &= \mu_A(x\cdot z^{-1}) \\
&\geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(0) \wedge \mu_A(z) \\
&= \mu_A(x) \wedge \mu_A(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_A((x-y)\cdot z^{-1}) &= \nu_A(x\cdot z^{-1}) \\
&\leq \nu_A(x) \vee \nu_A(0) \vee \nu_A(z) \\
&= \nu_A(x) \vee \nu_A(z),
\end{aligned}$$

on obtient,

$$\mu_A(x.y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),$$

$$\nu_A(x.y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

Utilisant la définition 3.2.6 et le théorème 3.2.14, on trouve que $(2) \Rightarrow (1)$.

Par suite $(1) \Leftrightarrow (2)$.

De même, on peut montrer que $(1) \Leftrightarrow (3)$. $\square$

Le théorème suivant nous permet de construire un sous-corps flou intuitionistique spécial .

Théorème 3.2.19. Soit F un corps, S est un sous-corps de F, on définit le sous-ensemble flou intuitionistique A par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0,\ 1 \\ a_0 & si\ x \in S \setminus \{1,\ 0\} \\ a_1 & si\ x \in F \setminus S \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0,\ 1 \\ b_0 & si\ x \in S \setminus \{1, 0\} \\ b_1 & si\ x \in F \setminus S \end{cases}$$

avec $a_i,\ b_i \in [0, 1],\ 0 \leq a_i + b_i \leq 1,\ i = 0, 1$

de plus, $a_0 \geq a_1, b_0 \leq b_1$. Alors $A = (\mu_A, \nu_A)$ est un sous-corps flou intuitionistique de F.

Démonstration. D'après la définition 3.2.6, et en appliquant le théorème 2.6 [60], on trouve le résultat. □

Le théorème suivant donne la caractérisation d'un sous-corps flou intuitionistique en termes des $(\alpha, \beta)-$coupes.

Théorème 3.2.20. Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique d'un corps F avec $\mu_A \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- **(i)** A est un sous-corps flou intuitionistique de F.
- **(ii)** $A^{\alpha,\beta}$ est un sous-corps de $X, \forall\, \alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha+\beta \leq 1, A^{\alpha,\beta} \neq \phi$ et $A^{\alpha,\beta} \neq \{0\}$.

Démonstration. $(\Longrightarrow)$

Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et $A^{\alpha,\beta} \neq \phi, A^{\alpha,\beta} \neq \{0\}$, et soient $a, b \in A^{\alpha,\beta}$.

Alors $\mu_A(a), \mu_A(b) \geq \alpha$ et $\nu_A(a), \nu_A(b) \leq \beta$.

Par suite $\mu_A(a + b) \geq \mu_A(a) \wedge \mu_A(b) \geq \alpha$ et $\nu_A(a + b) \leq \nu_A(a) \vee \nu_A(b) \leq \beta$.

Donc $a + b \in A^{\alpha,\beta}$.

Également, $\mu_A(ab) \geq \mu_A(a) \wedge \mu_A(b) \geq \alpha$ et $\nu_A(ab) \leq \nu_A(a) \vee \nu_A(b) \leq \beta$,

donc $ab \in A^{\alpha,\beta}$.

En outre, $\mu_A(-a) = \mu_A(a) \geq \alpha$ et $\nu_A(-a) = \nu_A(a) \leq \beta$,

par conséquent $-a \in A^{\alpha,\beta}$.

De plus, si $a \neq 0$, alors $\mu_A(a^{-1}) = \mu_A(a) \geq \alpha$ et $\nu_A(a^{-1}) = \nu_A(a) \leq \beta$,

donc $a^{-1} \in A^{\alpha,\beta}$.

Par conséquent $A^{\alpha,\beta}$ est un sous-corps de F.

($\Longleftarrow$) Soient $a, b \in F$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, on a $\mu_A(a+b) = \mu_A(a)$ ou $\mu_A(b)$, $\nu_A(a+b) = \nu_A(a)$ ou $\nu_A(b)$,

donc $\mu_A(a+b) \geq \mu_A(a) \wedge \mu_A(b)$, et $\nu_A(a+b) \leq \nu_A(a) \vee \nu_A(b)$.

De plus, $\mu_A(ab) = \mu_A(0) = \mu_A(a)$ ou $\mu_A(ab) = \mu_A(0) = \mu_A(b)$, $\nu_A(ab) = \nu_A(0) = \nu_A(a)$ ou $\nu_A(ab) = \nu_A(0) = \nu_A(b)$,

donc $\mu_A(ab) \geq \mu_A(a) \wedge \mu_A(b)$, et $\nu_A(ab) \leq \nu_A(a) \vee \nu_A(b)$.

En outre, si $a = 0$, alors $\mu_A(-a) = \mu_A(a)$ et $\nu_A(-a) = \nu_A(a)$.

Supposons que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour (choisir) $\alpha = \mu_A(a) \wedge \mu_A(b)$ et $\beta = \nu_A(a) \vee \nu_A(b)$.

Alors $\mu_A(a), \mu_A(b) \geq \alpha$ et $\nu_A(a), \nu_A(b) \leq \beta$,

Donc $a, b \in A^{\alpha,\beta}$, est sous-corps de F.

Ainsi $a + b, ab \in A^{\alpha,\beta}$. Cela donne $\mu_A(a+b) \geq \alpha = \mu_A(a) \wedge \mu_A(b)$, $\nu_A(a+b) \leq \beta = \nu_A(a) \vee \nu_A(b)$ et $\mu_A(ab) \geq \alpha = \mu_A(a) \wedge \mu_A(b)$, $\nu_A(ab) \leq \beta = \nu_A(a) \vee \nu_A(b)$.

Encore une fois, choisissons $\alpha_1 = \mu_A(a)$ et $\beta_1 = \nu_A(a)$.

Alors $a \in F^{\alpha_1,\beta_1}$, est sous-corps de F.

Par conséquent $-a, a^{-1} \in F^{\alpha_1,\beta_1}$.

Donc $\mu_A(-a) \geq \alpha_1 = \mu_A(a)$, $\nu_A(-a) \leq \beta_1 = \nu_A(a)$ et $\mu_A(a^{-1}) \geq \alpha_1 = \mu_A(a)$, $\nu_A(a^{-1}) \leq \beta_1 = \nu_A(a)$.

De même, $\mu_A(a) \geq \mu_A(-a)$, $\nu_A(a) \leq \nu_A(-a)$ et $\mu_A(a) \geq \mu_A(a^{-1})$, $\nu_A(a) \leq \nu_A(a^{-1})$.

Ainsi $\mu_A(-a) = \mu_A(a)$, $\nu_A(-a) = \nu_A(a)$ pour tout $a \in F$ et $\mu_A(a^{-1}) = \mu_A(a)$, $\nu_A(a^{-1}) = \nu_A(a)$ $\forall a (\neq 0) \in F$.

Donc F est un sous-corps flou intuitionistique de F. $\square$

Chapitre 4

Sous-espace vectoriel flou intuitionistique

La section ci-dessous est réservée aux sous-espaces vectoriels flous, ainsi des résultats liés à ce concept seront présentés.

4.1 Sous-espace vectoriel flou

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de X ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Proposition 4.1.1. [23] Soient $A_1, ..., A_n$ des sous-ensembles flous de E, et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n \subset A$.
2. $\forall x_1, ...x_n \in E$ on a :

$$\mu_A\,(\lambda_1 x_1\; + ... + \lambda_n x_n) \geq \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots,\; \mu_{A_n}(x_n)\}.$$

Définition 4.1.1. [23] Un sous-ensemble flou V de E est dit sous-espace vectoriel flou si :

1. $V + V \subset V$;
2. $\lambda V \subset V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Lemme 4.1.1. Si V est un sous-ensemble flou de E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. V est un sous-espace vectoriel flou de E ;
2. $\forall k, m \in \mathbb{K}$, on a $kV + mV \subset V$;

3. $\forall k, m \in \mathbb{K}$, et pour tout $x, y \in E$, on a

$$\mu_V(kx + my) \geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\}.$$

Démonstration. Il est clair que $(1) \Rightarrow (2)$. Ainsi que (2) et (3) sont équivalentes par la proposition 4.1.1.

Il reste à montrer que $(2) \Rightarrow (1)$, on a :

$V + V = 1V + 1V \subset V$

$kV = kV + 0V \subset V$. □

Proposition 4.1.2. Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et soit f une application linéaire de E dans F. Si V est un sous-espace vectoriel flou de E, alors $f(V)$ est un sous-espace flou de F.

Inversement, si V' est un sous-espace flou de F, donc $f^{-1}(V')$ est un sous-espace vectoriel flou de E.

Démonstration. $\forall k, m \in \mathbb{K}$, on a

$$kf(V) + mf(V) = f(kV + mV) \subset f(V),$$

donc $f(V)$ est un sous-espace vectoriel flou de F. Et on a

$$\begin{aligned}
\mu_{f^{-1}(V')}(kx + my) &= \mu_{V'}(f(kx + my)) \\
&= \mu_{V'}(kf(x) + mf(y)) \\
&\geq \min\{\mu_{V'}(f(x)), \mu_{V'}(f(y))\} \\
&= \min\{\mu_{f^{-1}(V')}(x), \mu_{f^{-1}(V')}(y)\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, et d'après le lemme 4.1.1, $f^{-1}(V')$ est un sous-espace vectoriel flou de E.

□

Proposition 4.1.3. Si $\{V_i\}_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels flous de E, alors $V = \cap V_i$ est un sous-espace vectoriel flou de E.

Démonstration.

$$\mu_V(mx + ky) = \inf_{i \in I} \mu_V(mx + ky)$$

$$\geq \inf_{i \in I}\{\min\{\mu_{V_i}(x), \mu_{V_i}(y)\}$$

$$\geq \min\{\inf_{i\in I}\{\mu_{V_i}(x), \inf_{i\in I}\mu_{V_i}(y)\}$$

$$= \min\{\mu_V(x)\ , \mu_V(y)\}$$

$\square$

Lemme 4.1.2. Soit V un sous-espace vectoriel flou de E. Alors

1. $\mu_V(x) \leq \mu_V(0), \forall x \in E$;
2. L'ensemble $V_0 = \{x \in E : \mu_V(x) = \mu_V(0)\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. **1.** On a $0V \subset V$. Par conséquent, $\mu_V(0) = \mu_V(0x) \geq \mu_V(x)\ \forall x \in E$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, et $x, y \in V_0$. Alors

$\mu_V(ax + by) \geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\} = \mu_V(0)$.

Donc $ax + by \in V_0$ $\square$

Définition 4.1.2. [49] Un sous-ensemble flou V de E est dit sous-espace vectoriel flou de E sur un sous-corps flou K du corps F si :

1. $\mu_V(0) > 0$.
2. $\mu_V(x - y) \geq \min\{\mu_V(x), \mu_V(y)\}, \forall x, y \in V$ et $\forall c \in F$.
3. $\mu_V(cx) \geq \min\{\mu_K(c), \mu_V(x)\}$.

Dans ce qui suit, nous notons l'ensemble de tous les sous-corps flous du corps F par $\mathcal{K}$, et soit $\mathcal{A}_K$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels flous de V sur $K \in \mathcal{K}$. Soit ζ l'ensemble des singletons flous de V tel que si $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \in \zeta$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$.
Soit $\mathbb{F}\zeta(V) = \{\zeta \mid \zeta$ est un ensemble de singletons flous$\}$,
et pour $A \in \mathcal{A}_K$, on note $\mathbb{F}\zeta(A) = \{\zeta \in \mathbb{F}\zeta(V) \mid\ \forall x_\alpha \in \zeta, \mu_A(x) \geq \alpha\}$

Définition 4.1.3. [30] Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et $\zeta \in \mathbb{F}\zeta(A)$. On note par $\langle X\rangle_K$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels $B \in \mathcal{A}_K$ tel que $B \subseteq A$ et $\zeta \in \mathbb{F}\zeta(B)$. Alors ζ est dit générateur du sous-espace vectoriel flou $\langle\zeta\rangle_K$ sur K.

Définition 4.1.4. Soit $A \in \mathcal{A}_K$ et et $\zeta \in \mathbb{F}\zeta(A)$. Alors :

1. ζ est dite libre sur K si et seulement si $\forall x_\alpha \in \zeta$, $x_\alpha \not\subset \langle\zeta - \{x_\alpha\}\rangle_K$,

2. ζ A est dit base de A sur K si et seulement si ζ est libre sur K et $\langle\zeta\rangle_K = A$.

4.2 Sous-espace vectoriel flou intuitionistique sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

La notion de $\mathbb{K}-$espace vectoriel a été généralisée pour le cas flou intuitionistique dans [15] et [52], Les auteurs ont proposé deux définitions équivalentes du nouveau concept en utilisant l'approche ensembliste et fonctionnel.

4.2.0.1 Définitions et Généralités

Définition 4.2.1. [15] Un sous-ensemble flou intuitionistique $V =< \mu_V, \nu_V >$ d'un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ est dit $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de X si :

1. $V + V \subseteq V$.
2. $\alpha V \subseteq V$, pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$.

Définition 4.2.2. [52] Soit $V =< \mu_V, \nu_V >$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel X. Pour tout $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si les assertions suivantes sont satisfaites :

1. $\mu_V(\alpha x + \beta y) \geqslant \mu_V(x) \wedge \mu_V(y)\}$,
2. $\nu_V(\alpha x + \beta y) \leqslant \nu_V(x) \vee \nu_V(y)$. Alors V est appelé un sous-espace vectoriel flou intuitionistique de V sur $\mathbb{K}$.

Remarque 4.2.1. Les deux définitions 4.2.1 et 4.2.2 sont équivalentes.

On note l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels flous intuitionistiques de X par $\mathbb{IFVS}(X)$.

Remarque 4.2.2. Soit X un espace vectoriel.

1. Si μ_V est un sous-espace vectoriel flou de X, alors $V =< \mu_V, \mu_V^c >\in \mathbb{IFVS}(X)$.
2. Si $V \in \mathbb{IFVS}(X)$, alors μ_V et ν_V^c sont deux sous-espaces vectoriels flous de X.
3. Si $V \in \mathbb{IFVS}(X)$, alors $\Box V, \Diamond V \in \mathbb{IFVS}(X)$.

Lemme 4.2.1. Soit V un sous-ensemble flou intuitionistique de l'espace vectoriel X. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. V est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de X.

2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha V + \beta V \subseteq V$.

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\forall x, y \in X$, on a :

   $\mu_V(\alpha x + \beta y) \geq \mu_V(x) \wedge \mu_V(y)\}$ et $\nu_V(\alpha x + \beta y) \leq \nu_V(x) \vee \nu_V(y)$.

Démonstration. Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2).

Ainsi (2) et (3) sont équivalentes par la proposition 2.10 de [15]

Donc pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que (2) $\Rightarrow$ (1).

on a $V + V = 1V + 1V \subseteq V, \alpha V = \alpha V + 0V \subseteq V$. □

Proposition 4.2.1. Soient X et Y deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application linéaire. Si V est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de X, alors $f(V)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de Y. Inversement, si W est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de Y, alors $f^{-1}(W)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de X.

Démonstration. Soient k, m deux scalaires, d'après la proposition 2.12[15], on a

$kf(V)+mf(V) = f(kV+mV) \subseteq f(V)$, ce qui montre que $f(V)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de Y.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}(W)}(kx + my) &= \mu_W(f(kx + my)) \\ &= \mu_W(kf(x) + mf(y)) \\ &\geq \mu_W(f(x)) \wedge \mu_W(f(y)) \\ &= \mu_{f^{-1}(W)}(x) \wedge \mu_{f^{-1}(W)}(y). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu_{f^{-1}(W)}(kx + my) &= \nu_W(f(kx + my)) \\ &= \mathrm{v}_W(kf(x) + mf(y)) \\ &\leq \nu_W(f(x)) \vee \nu_W(f(y)) \\ &= \nu_{f^{-1}(W)}(x) \vee \nu_{f^{-1}(W)}(y). \end{aligned}$$

Par conséquent $f^{-1}(W)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique (par le lemme 4.2.1).

□

Proposition 4.2.2. [57]

1. Si $V, W \in \mathbb{IFVS}(X)$, alors $V + W \in \mathbb{IFVS}(X)$.

2. Si $V \in \mathbb{IFVS}(X),\ \alpha \in K$, alors $\alpha V \in \mathbb{IFVS}(X)$.

3. Si $\{V_i\}_{i\in I} \in \mathbb{IFVS}(X)$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} V_i \in \mathbb{IFVS}(X)$.

Proposition 4.2.3. Si $V \in \mathbb{IFVS}(X)$. Alors $\mu_V(0) \geq \mu_V(x)$ et $\nu_V(0) \leq \nu_V(x)$, $\forall x \in X$.

Démonstration.

Soit $V \in \mathbb{IFVS}(X)$, alors $0V \subseteq V$.

Ainsi par la proposition 2.10 [15], on a

$\mu_V(0) = \mu_V(0.x) \geq \mu_V(x)$ et $\nu_V(0) = \nu_V(0.x) \leq \nu_V(x), \forall x \in X$. □

Proposition 4.2.4. Soit $V \in \mathbb{IFVS}(X)$.

Si $x \in X$ et $a \neq 0$, alors $\mu_V(ax) = \mu_V(x)$ et $\nu_V(ax) = \nu_V(x)$.

Démonstration.

Soient $x \in X$, et $a \neq 0$, alors

$\mu_V(ax) = \mu_V(ax + 0x) \geq \mu_V(x) \wedge \mu_V(x) = \mu_V(x)$.

et $\nu_V(ax) = \nu_V(ax + 0x) \leq \nu_V(x) \vee \nu_V(x) = \nu_V(x)$.

On remplace x par ax et a par $\frac{1}{a}$, on trouve que $\mu_V(x) \geq \mu_V(ax)$ et $\nu_V(x) \leq \nu_V(ax)$.
Donc $\mu_V(ax) = \mu_V(x)$ et $\nu_V(ax) = \nu_V(x)$. □

Remarque 4.2.3. Soient $V \in \mathbb{IFVS}(X)$ et $x, y \in X$. Si $\mu_V(x) \geq \mu_V(y)$, alors $\nu_V(x) \leq \nu_V(y)$.

Dans l'exemple suivant, nous présentons un sous-ensemble flou intuitionistque V de X, vérifiant $\mu_V(x) \geq \mu_V(y)$ et $\nu_V(x) > \nu_V(y)$, ce qui montre que $V \notin \mathbb{IFVS}$

Exemple 4.2.1. Soit $X = \mathbb{R}^2$. définissons le sous-ensemble flou intuitionistique $V =< \mu_V, \nu_V >$ par :

$$\mu_V(x) = \begin{cases} 1, \ si \ x = (0,0) \\ 0.5, \ si \ x = (0,a) \ , a \neq 0 \\ 0.3, \ sinn. \end{cases}$$

et

$$\nu_V(x) = \begin{cases} 0, \ si \ x = (0,0) \\ 0.4, \ isi \ x = (0,a) \ , a \neq 0 \\ 0.2, \ sinn. \end{cases}$$

On voit alors que V n'est pas un $\mathbb{K}-$espace vectoriel flou intuitionistique de X, puisque $\nu_V((0,2)) = \nu_V((-1,1)+(1,1)) > \nu_V((-1,1)) \wedge \nu_V((1,1))$.

Soit V_n l'ensemble de tous les n-tuples $(< x_{1\mu}, x_{1\nu} >, < x_{2\mu}, x_{2\nu} >, ..., < x_{n\mu}, x_{n\nu} >)$ sur $\mathbb{K}$.
Un élément de V_n est appelé vecteur flou intuitionistique (IFV) de dimension n, avec $x_{i\mu}$et $x_{i\nu}$ sont respectivement les degrés d'appartenance et de non-appartenance du composant x_i.

Définition 4.2.3. Soit S un sous-ensemble flou intuitionistique de vecteurs flous intuitionistiques. S est dit indépendant si et seulement si chaque élément de S ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire d'autres éléments de S. Tout vecteur $\alpha \in V_n$ peut être exprimé en fonction d'autres vecteurs vecteur α est dit dépendant, si non il est appelé indépendant.
Ces terminologies sont similaires aux vecteurs classiques.

Ci-dessous deux exemples d'un ensemble dépendant et d'un autre indépendant.

Exemple 4.2.2. Soit $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ est un sous-espace de V_3 ou

$$a_1 = (< 0.8, 0.2 >, < 0.6, 0.3 >, < 0.4, 0.3 >)$$

$$a_2 = (< 0.5, 0.3 >, < 0.5, 0.1 >, < 0.4, 0.2 >)$$

$$a_3 = (< 0.7, 0.3 >, < 0.7, 0.2 >, < 0.9, 0.1 >)$$

Il est impossible de trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ de telle sorte que : $a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3$ ou $a_2 \neq \alpha a_1 + \beta a_3$ ou $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$ Donc, l'ensemble S est indépendant.
Soit $S' = \{a_1, a_2\}$est un sous espace de V_3 ou

$$a_1 = (< 0.7, 0.3 >, < 0.5, 0.3 >, < 0.6, 0.3 >)$$

$$a_2 = (< 0.8, 0.2 >, < 0.5, 0.1 >, < 0.6, 0.2 >)$$

Ici, $a_1 = ca_2$ pour $c = 0.7$.
Donc S' est un ensemble dépendant.

Définition 4.2.4. [52] Soit W un sous-espace flou intuitionistique de V_n, et S un sous-ensemble de W tel que les éléments de S soient indépendants. Si chaque élément de W peut être exprimé d'une manière unique comme une combinaison linéaire des éléments de S, alors S est appelé une base du sous-espace flou intuitionistique W.

4.3 Sous-espace vectoriel flou intuitionistique sur un sous-corps flou intuitionistique

Dans le reste de ce travail, nous introduisons la notion de sous-espace vectoriel flou intuitionistique défini sur un sous-corps flou intuitionistique, de plus nous donnons la définition de la famille génératrice, libre et de la base d'un sous-espace vectoriel flou intuitionistique, en utilisant les points flous intuitionistiques. Ainsi quelques résultats liés aux derniers concepts seront prouvés.[55]

En ce qui concerne la notation, nous notons souvent :

- $lm(A)$: l'image de A.
- $\mid Im(A) \mid$: la cardinalité de $Im(A)$.
- Si X est un sous-ensemble de V.
  $sp(X)$: le sous-espace de V généré par X.

4.3.1 Définitions et propriétés

Définition 4.3.1. Soit $A =< \mu_A, \nu_A >$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un $F-$espace vectoriel V. A est dit sous-espace vectoriel flou intuitionistique de V sur un sous-corps flou intuitionistique K de F si $\forall x, y \in V, \forall c \in F$ les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mu_A(0) > 0$.
2. $\mu_A(x-y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ et $\nu_A(x-y) \leq \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}$.
3. $\mu_A(cx) \geq \min\{\mu_K(c), \mu_A(x)\}$, et $\nu_A(cx) \leq \max\{\nu_K(c), \nu_A(x)\}$.

Proposition 4.3.1. Si K est un sous-corps flou intuitionistique de F et si $x \in F, x \neq 0$, alors

$\mu_K(0) = \mu_K(1) \geq \mu_K(x) = \mu_K(-x) = \mu_K(x^{-1})$

et

$v_K(0) = v_K(1) \leq v_K(x) = v_K(-x) = v_K(x^{-1})$.[54]

Dans la suite on note $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les sous-corps flous intuitionistiques de F et $\mathcal{A}_K$ l'ensemble de tous les sous-espaces flous intuitionistiques de V sur $K \in \mathcal{K}$. Soit S un sous-ensemble de F, posons $K_S =< \chi_S, 1 - \chi_S >$ avec χ_S dénote la fonction caractéristique de S.

Proposition 4.3.2. Soit $K_F =< \chi_F, 1-\chi_F >$ et $A \in \mathcal{A}_{K_F}$. Alors $A^{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de V, $\forall\, \alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha+\beta \leq 1$ et $\alpha \leq \mu_A(0)$ *et* $\nu_A(0) \leq \beta$.

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned} A^{\alpha,\beta} &= \{\mathrm{x} \in \mathrm{V} \mid \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq \alpha,\ \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \leq \beta\} \\ &= \{\mathrm{x} \in \mathrm{V} \mid \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq \alpha, 1-\nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq 1-\beta\} \\ &= \{\mathrm{x} \in \mathrm{V} \mid \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq \alpha\} \bigcap \{\mathrm{x} \in \mathrm{V} \mid 1-\nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq 1-\beta\}, \end{aligned}$$

puisque $\{\mathrm{x} \in \mathrm{V} \mid \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq \alpha\}$ et $\{\mathrm{x} \in \mathrm{V} : 1-\nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \geq 1-\beta\}$ sont des sous-espaces vectoriels de V [30].

Alors $A^{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de V. □

Proposition 4.3.3. Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de V. Si $A^{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de V , $\forall\, (\alpha, \beta) \in Im(A)$, alors $A \in \mathcal{A}_{K_F}$.

Proposition 4.3.4. Soient $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_i \subset \ldots$ une famille de sous-espaces vectoriels de V. Définissons le sous-ensemble flou intuitionistique $A =< \mu_A, \nu_A >$ de V par :

$$A(x) = \begin{cases} (t_i, s_i) & , si\ x \in V_i \backslash V_{i-1}, avec\, t_i > t_{i+1},\ s_i < s_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots\ et\ V_0 = \phi \\ (0, 1) & , si\ x \in V \backslash \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \end{cases}$$

Alors $A \in \mathcal{A}_{K_F}$.

Démonstration. Soit $c \in F$.

Si $x \in V \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$.

Alors $\mu_A(cx) \geq 0 = \mu_A(x) \geq \min\{\chi_F(c), \mu_A(x)\}$,

et $\nu_A(cx) \leq 1 = \nu_A(x) \leq \max\{(1-\chi_F)(c), \nu_A(x)\}$.

On suppose que $x \in V_i \backslash V_{i-1}$, alors $cx \in V_i$.

Ainsi $\mu_A(cx) \geq t_i = \mu_A(x) \geq \min\{\chi_F(c), \mu_A(x)\}$.

et $v_A(cx) \leq s_i = \nu_A(x) \leq \max\{(1-\chi_F)(c), \nu_A(x)\}$. □

Proposition 4.3.5. Soient $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_i \supset \ldots$ une suite de sous-espaces vectoriels de V. Définissons le sous-ensemble flou intuitionistique $A =< \mu_A, \nu_A >$ de V par :

$$A(x) = \begin{cases} < t_{i-1}, s_{i-1} > & , si\ x \in V_{i-1} \backslash V_i, avec\, t_{i-1} < t_i < 1,\ s_{i-1} > s_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots \\ < 1, 0 > & , si\ x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i, \end{cases}$$

Alors $A \in \mathcal{A}_{K_F}$.

Démonstration. Soit $c \in F$.

si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$, alors $cx \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$.

Donc $\mu_A(cx) = 1 \geq \min\{\chi_F(c), \mu_A(x)\}$.

Et $\nu_A(cx) = 0 \leq \max\{(1-\chi_F)(c), \nu_A(x)\}$.

On suppose que $x \in V_{i-1} \backslash V_i$. Alors $cx \in V_{i-1}$.

Donc $\mu_A(cx) \geq t_{i-1} = \mu_A(x) \geq \min\{\chi_F(c), \mu_A(x)\}$.

Et $\nu_A(cx) \leq s_{i-1} = \nu_A(x) \leq \max\{(1-\chi_F)(c), \nu_A(x)\}$. □

Proposition 4.3.6. [21] Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de l'univers X, et $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in Im(A)$. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ et $\beta_1 \geq \beta_2$, alors $A^{\alpha_2,\beta_2} \subseteq A^{\alpha_1,\beta_1}$.

Théorème 4.3.1. V est de dimension finie (sur F) si et seulement si $A \in \mathcal{A}_{K_F}$ et $\mid Im(A) \mid < \infty$.

Démonstration. On suppose que $A \in \mathcal{A}_{K_F}$ et $|Im(A)|$ est infini.

Alors $Im(A)$ contient une séquence infinie strictement croissante ou strictement décroissante de nombres réels.

Ainsi V contient une séquence infinie strictement croissante ou strictement décroissante de sous-espaces, respectivement. D'après la proposition 4.3.6 et 4.3.2, V est de dimension infinie.

Inversement, supposons que V est de dimension finie. Alors V contient à la fois des séquences de sous-espaces strictement ascendantes et strictement descendantes.

Par la proposition 4.3.4 ou la proposition 4.3.5 il existe $A \in \mathcal{A}_{K_F}$ tel que

$|Im(A)| < \infty$. □

Proposition 4.3.7. Soit $A =< \mu_A, \nu_A >$ un sous-ensemble flou intuitionistique de V, et K un sous-ensemble flou de F. Soient $d \in F$, $x \in V$, et $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in [0,1]$ tels que $\alpha + \beta \leq 1, \alpha' + \beta' \leq 1$. Alors $\forall\, z \in V$,

1. $(d_{(\alpha,\beta)} \circ A)(z) =< \alpha \wedge \mu_A(\frac{1}{d}z), \beta \vee \nu_A(\frac{1}{d}z) >$, si $d \neq 0$.
2. $(0_{(\alpha,\beta)} \circ A)(z) =< \sup\limits_{y \in V}\{\alpha \wedge \mu_A(y)\}, \inf\limits_{y \in V}\{\beta \vee \nu_A(y)\} >$ *si* $z = 0$

   $(0_{(\alpha,\beta)} \circ A)(z) =< 0, 1 >$ si $z \neq 0$.
3. $(K \circ x_{(\alpha,\beta)})(z) =< \sup_{c \in F, z = cx}\{\alpha \wedge \mu_K(c)\}, \inf_{c \in F, z = cx}\{\beta \vee \nu_A(y)\} >$ et $x \neq 0$ $z \in sp(x)$;

   et $(K \circ x_{(\alpha,\beta)})(z) =< 0, 1 >$ si $x \neq 0$ et $z \notin sp(x)$.
4. $(K \circ 0_{(\alpha,\beta)})(z) =< \sup\limits_{c \in F}\{\alpha \wedge \mu_K(c)\}, \inf\limits_{c \in F}\{\beta \vee \nu_K(c)\} >$ si $z = 0$;

   $(K \circ 0_{(\alpha,\beta)})(z) =< 0, 1 >$ si $z \neq 0$.

Démonstration. **1.** Soit $(d_{(\alpha,\beta)} \circ A)(z) =< \mu(z), \nu(z) >$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \sup\{\min\{d_\alpha(c), \mu_A(y)\} \mid c \in F,\ y \in V,\ z = cy\} \\ &= \sup\{\min\{\alpha, \mu_A(y)\} \mid y \in V,\ z = dy\} = \min\{\alpha, \mu_A((1/d)z)\}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \inf\{\max\{d_\beta(c), \nu_A(y)\} \mid c \in F,\ y \in V,\ z = cy\} \\ &= \inf\{\max\{\beta, \nu_A(y)\} \mid y \in V,\ z = dy\} = \max\{\beta, \nu_A((1/d)z)\}. \end{aligned}$$

2. Soit $(0_{(\alpha,\beta)} \circ A)(z) =< \mu(z), \nu(z) >$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \sup\{\min\{0_\alpha(c), \mu_A(y)\} \mid c \in F, y \in V, z = cy\}\} \\ &= \sup\{\min\{\alpha, \mu_A(y)\} \mid y \in V,\ z = 0y\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \inf\{\max\{0_\beta(c), \nu_A(y)\} \mid c \in F, y \in V, z = cy\}\} \\ &= \inf\{\max\{\alpha, \mu_A(y)\} \mid y \in V,\ z = 0y\} \text{ et } z = 0. \end{aligned}$$

si$z \neq 0$,alors $0_{(\alpha,\beta)}(c) =< 0, 1 >$, puisque $c \neq 0$ si $z = cy$

3. Soit $(K \circ x_{(\alpha,\beta)})(z) =< \mu(z), \nu(z) >$,on a :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \sup\{\min(\mu_K(c),\ x_\alpha(y)\} \mid c \in F,\ y \in V, z = cy\} \\ &= \sup\{\min\{\mu_K(c), \alpha\} \mid c \in F,\ z = cx\}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \inf\{\max(\nu_K(c),\ x_\beta(y)\} \mid c \in F,\ y \in V, z = cy\} \\ &= \inf\{\max\{\mu_K(c), \beta\} \mid c \in F,\ z = cx\} \text{ si } z \in sp(x). \end{aligned}$$

et $< \mu(z), \nu(z) >=< 0, 1 >$ par ailleurs.

4. Soit $(K \circ 0_{(\alpha,\beta)})(z) =< \mu(z), \nu(z) >$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \sup\{\min(\mu_K(c),\ 0_\alpha(y)\} \mid c \in F,\ y \in V, z = cy\} \\ &= \sup\{\min\{\mu_K(c), \alpha\} \mid c \in F,\ z = c0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \inf\{\max(\nu_K(c), 0_\beta(y)\} \mid c \in F,\ y \in V, z = cy\} \\ &= \inf\{\max\{\mu_K(c), \beta\} \mid c \in F,\ z = c0\} \text{ si } z = 0, \end{aligned}$$

si $z \neq 0$ alors $< \mu(z), \nu(z) >=< 0, 1 >$, comme $y \neq 0$ alors que $z = cy$.

□

Proposition 4.3.8. Soients $x, y \in V$, $c, d \in F$ et $\alpha, \beta, \alpha', \beta', s, s', t, t' \in [0, 1]$ tels que $\alpha + \beta \leq 1, s + t \leq 1, \alpha' + \beta' \leq 1, s' + t' \leq 1$.

1. $x_{(t,s)} + y_{(\alpha,\beta)} = (x+y)_{(t\wedge\alpha, s\vee\beta)}$.

2. $x_{(t,s)}y_{(\alpha,\beta)} = (xy)_{(t\wedge\alpha, s\vee\beta)}$.

3. $c_{(t,s)} \circ x_{(\alpha,\beta)} = (cx)_{(t\wedge\alpha, s\vee\beta)}$.

4. $c_{(t,s)} \circ x_{(\alpha,\beta)} + d_{(t',s')} \circ y_{(\alpha',\beta')} = (cx+dy)_{(\min(t,\alpha,\alpha',t'),\max(s,\beta,\beta',s'))}$.

Démonstration. Pour la démonstration de **1.**, **2.** et **3.** voir [14].

4. Le résultat découle des propositions **1.**,**2.** et **3.**

□

Si $c_{1(\alpha_1,\beta_1)},\ldots,c_{n(\alpha_n,\beta_n)},x_{1(\lambda_1,\gamma_1)},\ldots,x_{n(\lambda_n,\gamma_n)}$ sont des points flous intuitionistiques , avec $c_i \in F$ et $x_i \in V, i = 1,2,\ldots,n$, alors $\Sigma_{i=1}^{n} c_{i(\alpha_i,\beta_i)} \circ x_{i(\lambda_i,\gamma_i)}$ est dite combinaison linéaire de points flous intuitionistiques.

Remarque 4.3.1. Toute combinaison linéaire de points flous intuitionistiques est un point flou intuitionistique de V.

Proposition 4.3.9. Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et B, C des sous-ensembles flous intuitionistiques de V, et Soient $b, c \in F$.
Si $B \subseteq A$ et $C \subseteq A$,$0 \leq \alpha \leq \mu_K(b)$, $0 \leq \alpha' \leq \mu_K(c)$,$\nu_k(b) \leq \beta \leq 1$ et $\nu_k(c) \leq \beta' \leq 1$.
alors $b_{(\alpha,\beta)} \circ B + c_{(\alpha',\beta')} \circ C \subseteq A$.

Démonstration. Il est claire que $b_{(\alpha,\beta)} \circ B$ et $c_{(\alpha',\beta')} \circ C$ sont deux sous-ensembles flous intuitionistiques de V, et donc il reste à démontrer que $b_{(\alpha,\beta)} \circ B \subseteq A$ et $B + C \subseteq A$.
Soit $(b_{(\alpha,\beta)} \circ B)(z) = (\mu,\nu)(z)$. avec $b \neq 0$ $z \in V$.
Alors $\mu(z) = \min\{\alpha, \mu_B((\frac{1}{b})z)\} \leq \min\{\mu_K(b), \mu_A((\frac{1}{b})z)\} \leq \mu_A(b(\frac{1}{b})z)) = \mu_A(z)$.
et
$\nu(z) = \max\{\beta, \nu_B((\frac{1}{b})z)\} \geq \max\{\nu_K(b), \nu_A((\frac{1}{b})z)\} \geq \nu_A(b(\frac{1}{b})z)) = \nu_A(z)$ par la proposition 4.3.7(1).
On suppose que $b = 0$ et $z = 0$ alors
$\mu(z) = \sup\{\min\{\alpha, \mu_B(y) \mid y \in V\}\} \leq \mu_A(0)$,
et $\nu(z) = \inf\{\max\{\beta, \nu_B(y) \mid y \in V\}\} \geq \nu_A(0)$ d'après la proposition 4.3.7(2).
et on a

$$\begin{aligned}\mu_{B+C}(z) &= \sup\{\min\{\mu_B(x), \mu_C(y)\} \mid z = x + y\} \\ &\leq \sup\{\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \mid z = x + y\}\end{aligned}$$

$\leq \mu_A(z).$

et

$\nu_{B+C}(z) = \inf\{\max\{\nu_B(x), \nu_C(y)\} \mid z = x + y\}$

$\geq \inf\{\max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} \mid z = x + y\}$

$\geq \nu_A(z).$

□

Proposition 4.3.10. Si $\{A_i \mid A_i \in \mathcal{A}_K,\ i \in I\} \neq \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}_K.$

Démonstration. . Soient $c \in F$, $x \in V$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i)(cx) = (\mu, \nu)(cx)$ alors :

$\mu(cx) \quad = \inf\{\mu_{A_i}(cx) \mid i \in I\}$

$\geq \inf\{\min\{\mu_K(c), \mu_{A_i}(x) \mid i \in I\}$

= $\mu_K(c)$ ou $\inf\{\mu_{A_i}(x) \mid i \in I\}$.

Par conséquent, $\mu(cx) \geq \min\{\mu_K(c), \mu(x)\}$.

De la même manière, on trouve que $\nu(cx) \leq \max\{\nu_K(c), \nu(x)\}$.

□

4.3.2 Famille libre, famille génératrice et base d'un sous-espace vectoriel flou intuitionistique

Définition 4.3.2. Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et X un sous-ensemble flou intuitionistique de V tel que $X \subseteq A$. On note par $\langle X \rangle$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels flous intuitionistique de V (sur K) qui contiennent X et sont contenus dans A. Alors $\langle X \rangle$ est dit le sous-espace flou intuitionistique de A généré par X.

Proposition 4.3.11. Soient $c_{1(\alpha_1,\beta_1)}, \ldots, c_{n(\alpha_n,\beta_n)}, x_{1(\alpha'_1,\beta'_1)}, \ldots, x_{n(\alpha'_n,\beta'_n)}$ des points flous intuitionistiques, $A \in \mathcal{A}_K$ et soit X un sous-ensemble flou intuitionistique de V tel que $X \subseteq A$. définissons le sous-ensemble S de V par : $\forall x \in V$,

$\mu_S(x) = \sup\{\mu_{\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i(\alpha_i,\beta_i)} \circ x_{i(\alpha'_i,\beta'_i)}\right)}(x) \mid c_i \in F,\ x_i \in V,\ K(c_i) = (\alpha_i, \beta_i),\ X(x_i) = (\alpha'_i, \beta'_i),\ \dot{i} = 1,\ \cdots,\ n,\ n \geq 1\}.$

$\nu_S(x) = \inf\{\nu_{\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i(\alpha_i,\beta_i)} \circ x_{i(\alpha'_i,\beta'_i)}\right)}(x) \mid c_i \in F,\ x_i \in V,\ K(c_i) = (\alpha_i, \beta_i),\ X(x_i) = (\alpha'_i, \beta'_i),\ \dot{i} = 1,\ \cdots,\ n,\ n \geq 1\}.$

Alors S est un sous-ensemble flou intuitionistique de V.

Théorème 4.3.2. Soient $c_{1(\alpha_1,\beta_1)},\ldots,c_{n(\alpha_n,\beta_n)},x_{1(\alpha'_1,\beta'_1)},\ldots,x_{n(\alpha'_n,\beta'_n)}$ des points flous intuitionistiques, $A\in\mathcal{A}_K$ et soit X un sous ensemble flou intuitionistique de V tel que $X\subseteq A$. Définissons le sous-ensemble flou intuitionistique S de V par : $\forall x\in V$,

$\mu_S(x) = \sup\{\mu_{\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i(\alpha_i,\beta_i)}\circ x_{i(\alpha'_i,\beta'_i)}\right)}(x) \mid c_i\in F,\ x_i\in V,\ K(c_i)=(\alpha_i,\beta_i),\ X(x_i)=(\alpha'_i,\beta'_i),\ \dot{i}=1,\ \cdots,\ n,\ n\geq 1\}$.

$\nu_S(x) = \inf\{\nu_{\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i(\alpha_i,\beta_i)}\circ x_{i(\alpha'_i,\beta'_i)}\right)}(x) \mid c_i\in F,\ x_i\in V,\ K(c_i)=(\alpha_i,\beta_i),\ X(x_i)=(\alpha'_i,\beta'_i),\ \dot{i}=1,\ \cdots,\ n,\ n\geq 1\}$.

Alors $\langle X\rangle = S$ et $S\in\mathcal{A}_K$.

Démonstration.

On a $x_{i(\alpha'_i,\beta'_i)}\subseteq X\subseteq\langle X\rangle$. Donc d'après la proposition 4.3.8(4) et 4.3.9, $S\subseteq\langle X\rangle$.

Pour montrer que $S\supseteq\langle X\rangle$, il suffit de montrer que $S\in\mathcal{A}_K$ et $S\supseteq X$.

Soient $x\in V$ et $X(x)=(\alpha,\beta)$, alors $\mu_{x_{(\alpha,\beta)}}(x)\leq\mu_S(x)$ et $\nu_{x_{(\alpha,\beta)}}(x)\geq\nu_S(x)$

et donc $x_{(\alpha,\beta)}\subseteq S$.

Par suite $X\subseteq S$.

Soit $u,v\in V$. Alors $\mu_S(u)$ et $\mu_S(v)$ sont les supremums des nombres de la formes, $(\sum_{i=1}^{m} c_{i(\alpha_i,\beta_i)}\circ y_{i(\alpha'_i,\beta'_i)})(u)$ et $\sum_{i=1}^{m}(d_{i(\lambda_i,\gamma_i)}\circ z_{i(\lambda'_i,\gamma'_i)})(v)$ respectivement, $\nu_S(u)$ et $\nu_S(v)$ sont des infimums des nombres de la formes, $(\sum_{i=1}^{m} c_{i(\alpha_i,\beta_i)}\circ y_{i(\alpha'_i,\beta'_i)})(u)$ et $\sum_{i=1}^{m}(d_{i(\lambda_i,\gamma_i)}\circ z_{i(\lambda'_i,\gamma'_i)})(v)$respectivement.

Supposons que $\mu_S(u)>0$ et $\mu_S(v)>0$.

Alors il existe des suites

$(\alpha^*_j,\beta^*_j)=\left(\min\{\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{mj},\alpha'_{1j},\ldots,\alpha'_{mj}\},\max\{\beta_{1j},\ldots,\beta_{mj},\beta'_{1j},\ldots,\beta'_{mj}\}\right)$

et $(\lambda^*_j,\gamma^*_j)=\left(\min\{\lambda_{1j},\ldots,\lambda_{qj},\lambda'_{1j},\ldots,\lambda'_{qj}\},\max\{\gamma_{1j},\ldots,\gamma_{qj},\gamma'_{1j},\ldots,\gamma'_{qj}\}\right)$ tel que

$(\alpha^*_j,\beta^*_j)\to(\mu_S(u),\nu_S(u))$ et $(\lambda^*_j,\gamma^*_j)\to(\mu_S(v),\nu_S(v))$.

Si $u\in sp\{y_1,\ldots,y_m\}$ et $v\in sp\{z_1,\ldots,\ z_q\}$,

alors $u+v\in sp(y_1,\ldots,\ y_m,z_1,\ldots,z_q\}$.

Ainsi, pour $j=1,2,\ldots,$

$\mu_S(u+v)\geq\min\{\alpha_{ij},\alpha'_{ij},\lambda_{kj},\lambda'_{kj},\mid i=1,\ldots,m;k=1,\ldots,q\}=\min\{\alpha^*_j,\lambda^*_j\}$.

comme $\min\{\alpha^*_j,\lambda^*_j\}\to\min\{\mu_S(u),\mu_S(v)\}$,$\mu_S(u+v)\geq\min\{\mu_S(u),\mu_S(v)\}$.

$\nu_S(u+v)\leq\max\{\beta_{ij},\beta'_{ij},\gamma_{kj},\gamma'_{kj},\mid i=1,\ldots,m;k=1,\ldots,q\}=\max\{\beta^*_j,\gamma^*_j\}$.

et comme $\max\{\beta^*_j,\gamma^*_j\}\to\max\{\nu_S(u),\nu_S(v)\}$,$\nu_S(u+v)\leq\max\{\nu_S(u),\nu_S(v)\}$.

Si $\mu_S(u)=0$ ou $\mu_S(v)=0$, alors $\mu_S(u+v)\geq\min\{\mu_S(u),\mu_S(v)\}$.

il est clair que $(\mu_S(x),\nu_S(x))=(\mu_S(-x),\nu_S(-x))\ \forall x\in V$.

Soient $c \in F, x \in V$ et

$(\mu, \nu) = (\min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\}, \max\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_1^{'}, \ldots, \beta_n^{'}\})$.

On suppose que $c \neq 0$. Maintenant $cx = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ si et seulement si $x = \sum_{i=1}^{n} c^{-1} c_i x_i$ avec $c_i \in F$ et $x_i \in V$ $i = 1, \ldots, n$.

Également

$$\begin{aligned}(\mu_{(\sum_{i=1}^{n} c_{i\mu_i} \circ x_{i\lambda_i}})(cx) = \mu &= \min\{\mu_K(c_1), \ldots \mu_K(c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\} \\ &\geq \min\{\mu_K(c), \mu_K(c^{-1}c_1), \ldots \mu_K(c^{-1}c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\} \\ &\geq \min\{\mu_K(c), \min\{\mu_K(c^{-1}c_1), \ldots \mu_K(c^{-1}c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\}\}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu_S(cx) = \sup\{\min\{\mu_K(c_1), \ldots \mu_K(c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\} \mid cx = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\}$$

$$\begin{aligned}&\geq \sup\{\min\{\mu_K(c), \min\{\mu_K(c^{-1}c_1), \ldots \mu_K(c^{-1}c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\}\} \mid x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c^{-1} c_i x_i\} \\ &\geq \min\{\{\mu_K(c), \sup\{\mu_K(c^{-1}c_1), \ldots \mu_K(c^{-1}c_n), \alpha_1^{'}, \ldots, \alpha_n^{'}\}\} \mid x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c^{-1} c_i x_i\} \\ &= \min\{\mu_K(c), \mu_S(x)\}.\end{aligned}$$

On suppose que $c = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mu_S(cx) = \mu_S(0) &\geq \sup\{(\mu_{\left(0_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\alpha^{'},\beta^{'})}\right)}(0) \mid 0 \in F, \mathrm{y} \in V, \mu_K(0) = \alpha = 1, \mu_X(y) = \alpha^{'}\} \\ &= \sup\{\min\{1,\ \alpha^{'}\} \mid y \in V,\ \mu_X(y) = \alpha^{'}\} \\ &= \sup\{\mu_X(y) \mid y \in V\} \geq \mu_S(x) = \min\{\mu_K(0), \mu_S(x)\}.\end{aligned}$$

De même on peut montrer que

$$\nu_S(cx) \leq \max\{\nu_K(c), \nu_S(x)\}$$

$\square$

Notation

Soit $\alpha, \beta \in [0, 1]$, avec $\alpha + \beta \leq 1$. Si $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ on écrit $(\alpha, \beta) > 0$.

Soit ζ l'ensemble des singletons flous intuitionistiques de V tel que, si $x_{(\alpha_1,\beta_1)}, x_{(\alpha_2,\beta_2)} \in \zeta$, alors $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) > 0$.

On définit le sous-ensemble flou intuitionistique $X(\zeta)$ de V par : $\forall x \in V$,

$$X(\zeta)(x) = \begin{cases} (\alpha,\ \beta) & \text{si } x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta \\ (0, 1) & \text{si non} \end{cases}$$

Définissons $\langle \zeta \rangle = \langle X(\zeta) \rangle$. Et soit Xun sous-ensemble flou intuitionistique de V, on définit $\zeta(X) = \{x_{(\alpha,\beta)} \mid x \in V,\ (\alpha, \beta) = X(x) > 0\}$. Alors $X(\zeta(X)) = X$ et $\zeta(X(\zeta)) = \zeta$.
S'il n'y a qu'un nombre fini de $x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta$ tel que $(\alpha, \beta) > 0$, on dit que ζ est fini.
Si $X(x) > 0$ seulement pour un nombre fini de $x \in X$, on dit que X est fini.
Donc ζ est fini si et seulement si $X(\zeta)$ est fini, et X est fini si et seulement si $\zeta(X)$ est fini.
Pour $x \in V$, soit $X \backslash x$ le sous-ensemble flou intuitionistique de V défini par : $\forall y \in V, (X\backslash x)(y) = X(y)$ si $y \neq x$ et $(X\backslash x)(y) = (0, 1)$ si $y = x$.

Définition 4.3.3. Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et X un sous-ensemble flou intuitionistique de V tel que $X \subseteq A$. Alors X est appelé un système flou intiutionistique de générateurs de A sur K si $\langle X \rangle = A$. X est dit libre flou intuitionistique sur K si $\forall x_{(\alpha,\beta)} \subseteq X$, avec $(\alpha, \beta) = X(x)$, $x_{(\alpha,\beta)} \nsubseteq \langle X\backslash x \rangle$. X est dit base floue intuitionistique de A si X est un système générateur flou intuitionistique de A et X est libre flou intuitionistique.

Définition 4.3.4. Soit ζ dénote le sous-ensemble de points flous intuitionistiques de V tel que si $x_{(\alpha_1,\beta_1)}, x_{(\alpha_2,\beta_2)} \in \zeta$, alors $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ et $x_{(\alpha_1,\beta_1)} \subseteq A$. Donc ζ est dit un système de points flous intuitionistiques de générateurs de A sur K si $\langle \zeta \rangle = A$. ζ est dit libre flou intuitionistique sur K si pour tout $x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta, x_{(\alpha,\beta)} \nsubseteq \langle \zeta\backslash\{x_{(\alpha,\beta)}\} \rangle$. ζ est dit base de points flous intuitionistiques de A si ζ est un système générateur de points flous intuitionistiques de A et il est libre flou intuitionistique.

Si $(\alpha, \beta) = \langle \zeta \rangle(0)$, $0_{(\alpha,\beta)} \subseteq \langle \zeta \rangle$ pour tout sous-ensemble ζ de points flous intuitionistiques de V. Également $x_{(0,1)} \subseteq \langle \zeta \rangle$ pour chacun de ces ζ avec $x \in V$. Donc si $x_{(0,1)}$ ou $0_{(\alpha,\beta)} \in \zeta$, alors ζ n'est pas libre flou intuitionistique sur K.
Soit $A \in \mathcal{A}_K$. Posons $A^* = \{x \in V \mid \mu_A(x) > 0\}$ et $K^* = \{c \in F \mid \mu_K(c) > 0\}$.

Proposition 4.3.12. Si $A \in \mathcal{A}_K$, alors

1. K^* est un sous-corps de F ;
2. A^* est un K^*-sous espace vectoriel de V.

Démonstration. 1. On a $\mu_K(0) = \mu_K(1) = 1 > 0$, donc $K(0) = K(1) > 0$, par suite $0, 1 \in K^*$.
Alors $K^*\backslash\{0\} \neq \emptyset$.
Soient $c, d \in K^*, \mu_K(c - d) \geq \min\{\mu_K(c), \mu_K(d)\} > 0$;

et $\nu_K(c-d) \leq \max\{\nu_K(c), \nu_K(d)\} < 1$.

Si $d \neq 0$, alors

$\mu_K(cd^{-1}) \geq \min\{\mu_K(c), \mu_K(d)\} > 0$,

et $\nu_K(cd^{-1}) \leq \max\{\nu_K(c), \nu_K(d)\} < 1$

2. Puisque $\mu_A(0) > 0$,

alors $0 \in A^*$.

Donc $A^* \neq \emptyset$.

$\forall x, y \in A^*$, et $\forall c \in K^*$ on a,

$\mu_A(x-y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} > 0$, et $\mu_A(cx) \geq \min\{\mu_K(c), \mu_A(x)\} > 0$,

de plus $\nu_A(x-y) \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} < 1$, et $\nu_A(cx) \leq \max\{\nu_K(c), \nu_A(x)\} < 1$ $\square$

Théorème 4.3.3. Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et $\zeta \subseteq \{x_{(\alpha,\beta)} \mid x \in A^*,\ 0 < \alpha \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq \beta < 1\}$ tel que $x_{(\alpha_1,\beta_1)}, x_{(\alpha_2,\beta_2)} \in \zeta$, alors $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ et soit $\chi = \{x \mid x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta\}$. Supposons que $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$ et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$. Alors ζ est libre flou intuitionistique sur K si et seulement si la famille χ est linéairement indépendante sur F.

Démonstration. Supposons que la famille χ n'est pas linéairement indépendante sur F. Si $0 \in \chi$, alors $0_{(\alpha,\beta)} \in \zeta$ et donc ζ n'est pas libre flou intuitionistique sur K.

On suppose que $0 \notin \chi$. Alors il existe $x \in \chi, x_1, \cdots, x_n \in \chi\backslash\{x\}$, et $c_1, \cdots, c_n \in F$ tel que $x = \Sigma_{i=1}^n c_i x_i$, avec $c_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$.

Supposons $x_{(\alpha,\beta)} \subseteq \Sigma_{i=1}^n c_{i(\mu_i,\nu_i)} \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)}$ avec $(\alpha, \beta) = X(\zeta)(x)$, $(\mu_i, \nu_i) = (\mu_K(c_i), \nu_K(c_i))$, et $(\alpha_i, \beta_i) = X(\zeta)(x_i), i = 1, \ldots, n$. Alors $x_{(\alpha,\beta)} \subseteq \langle \xi\backslash\{x_{(\alpha,\beta)}\}\rangle$ d'après le théorème 4.3.2.

Donc ζ n'est pas libre flou intuitionistique sur K.

Supposons que $x_{(\alpha,\beta)} \nsubseteq \Sigma_{i=1}^n c_{i(\mu_i,\nu_i)} \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)}$,

donc $\alpha > \min\{\mu_1, \cdots, \mu_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, et

$\beta < \max\{\nu_1, \cdots, \nu_n, \beta_1, \cdots, \beta_n\} = \max\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$

Posons $\alpha_1 = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$,$\beta_1 = \max\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$. Alors $x_1 = \Sigma_{i=2}^n (-c_i c_1^{-1}) x_i + c_1^{-1} x$ et $x_{1(\alpha_1,\beta_1)} \subseteq \Sigma_{i=2}^n (-c_i c_1^{-1})_{z_i} \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)} + (c_1^{-1})_{(\mu_K(c_1^{-1}),\nu_K(c_1^{-1}))} \mathrm{o} x_{(\alpha,\beta)} \subseteq \langle \zeta\backslash\{x_{1(\alpha_1,\beta_1)}\}\rangle$, avec $z_i = K(-c_i c_1^{-1}), i = 2, \ldots, n$.

Par suite ζ n'est pas libre flou intuitionistique sur K.

Inversement,

On suppose que ζ n'est pas libre flou intuitionistique sur K.

Alors il existe $x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta$ tel que $x_{(\alpha,\beta)} \subseteq \langle \zeta \backslash (x_{(\alpha,\beta)}\} \rangle$.

Ainsi il existe $c_{i_j} \in F, x_{i_j} \in \chi\backslash\{x\}$ tels que $x = \Sigma_{i=1_j}^{n_j} c_i x_i$ et

$(\min\{\mu_{1_j},\ \mu_{n_j},\ \alpha_{1_j},\ \cdots\ ,\ \alpha_{n_j}\}, \max\{\nu_{1_j},\ \nu_{n_j},\ \beta_{1_j},\ \cdots\ ,\ \beta_{n_j}\}) \to (\alpha^*, \beta^*)$, tel que $\alpha^* \geq \alpha$, et $\beta^* \leq \beta$ avec $(\alpha, \beta) = X(\zeta)(x) > 0, \langle \zeta\backslash\{x_{(\alpha,\beta)}\}\rangle(x) = (\alpha^*, \beta^*), (\mu_{i_j}, \nu_{i_j}) = K(c_{i_j})$, et $(\alpha_{i_j}, \beta_{i_j}) = X(\zeta)(x_{i_j})$, $i = 1, 2,\ \cdots\ ,\ n$, d'après le théorème 4.3.2.

Donc $x \in sp\{x_{1_j},\ \ldots,\ x_{n_j}\} \subseteq sp(\chi\backslash\{x\})$.

Ce qui implique que χ n'est pas linéairement indépendante sur F. $\square$

Exemple 4.3.1. Soit $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = F$, tel que $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels.

Soit K le sous-ensemble flou intuitionistique de F défini par $K(c) = (1, 0)$ si $c \in \mathbb{Q}$ et $K(c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ si $c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\backslash\mathbb{Q}$.

Alors K est un sous-corps flou intuitionistique de F.

Soit $A \in \mathcal{A}_K$ tel que $\mu_A(1) \geq \frac{3}{4}, \nu_A(1) \leq \frac{1}{8}$ et $\mu_A(\sqrt{2}) \geq \frac{3}{4}, \nu_A(\sqrt{2}) \leq \frac{1}{8}$. Soit $X \subseteq A$ le sous-ensemble flou intuitionistique de V défini par $X(1) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{8}) = X(\sqrt{2})$, et $X(x) = (0, 1)$ si $x \neq 1, x \neq \sqrt{2}$.

Soit $\zeta = \{1_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})}, (\sqrt{2})_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})}\}$.

On a $(\sqrt{2})_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})} \neq (\sqrt{2})_{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})} \circ 1_{(\frac{3}{4},\frac{2}{8})}$ et $1_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})} \neq ((\sqrt{2})^{-1})_{(\frac{1}{2},\frac{1}{4})} \circ (\sqrt{2})_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})}$.

Il s'en suit que $(\sqrt{2})_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})} \nsubseteq \langle 1_{(\frac{3}{4},\frac{2}{8})}\rangle$ and $1_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})} \nsubseteq \langle (\sqrt{2})_{(\frac{3}{4},\frac{1}{8})}\rangle$.

Par conséquent ζ est libre floue intuitionistique sur K.

Mais $\chi = \{1,\ \sqrt{2}\}$ est linéairement dépendante sur F,

car $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} < \sup\{\mu_X(x) \mid x \in \chi\}$.

Si $K = (\chi_F, 1 - \chi_F)$, alors $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \mathrm{Sup}\{\mu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$, et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$

Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et ζ dénote l'ensemble des points flous intuitionistiques tels que si $x_{(\alpha_1,\beta_1)}, x_{(\alpha_2,\beta_2)} \in \zeta$, alors $x_{(\alpha_1,\beta_1)} = x_{(\alpha_2,\beta_2)}$ et $x_{(\alpha_1,\beta_1,)} \subseteq A$.

ζ est dit libre maximal flou intuitionistique dans A sur K si ζ est libre floue intuitionistique sur K et il n'existe pas un point flou intuitionistique $y_{(\gamma,\delta)}$ tel que $y_{(\gamma,\delta)} \subseteq A$ et $\zeta \cup \{y_{(\gamma,\delta)}\}$ est libre floue intuitionistique sur K, avec $y \in V$.

On dit que le sous-ensemble flou intuitionistique X de V est une famille libre maximale floue intuitionistique dans A sur K si $X \subseteq A, X$ est libre flou intuitionistique sur K, et il n'existe pas un sous-ensemble flou intuitionistique libre Y de V tel que $X \subseteq \mathrm{Y} \subseteq A$ et $X = \mathrm{Y}\backslash y$ avec $y \in V$ et $\mu_{\mathrm{Y}}(y) > 0$.

Théorème 4.3.4. Soient $A \in \mathcal{A}_K$,

et $\zeta \subseteq \{x_{(\alpha,\beta)} \mid x \in A^*,\ 0 < \alpha \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq \beta < 1\}$ tel que $x_{(\alpha_1,\beta_1)}, x_{(\alpha_2,\beta_2)} \in \zeta$, alors $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$, et soit $\chi = \{x \mid x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta\}$. Supposons que

$\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$

et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$. Alors ζ est libre flou intuitionistique maximal dans A sur K si et seulement si χ est une base de A^* sur K^*.

Démonstration. Si $A(x) = (\mu_A(x), \nu_A(x)) = (0, 1)$ pour tout $x \in V \backslash \{0\}$,

donc $\zeta = \chi = \emptyset$.

d'ou le résultat.

Supposons que $A^* \supset \{0\}$.

Alors $\mu_K(c) > \mu_A(0) > 0, \forall c \in F$

Donc $K^* = F$.

On suppose que ζ est libre flou intuitionistique maximal.

Alors χ est linéairement indépendant sur F d'après le théorème 4.3.3.

Supposons que $sp(\chi) \subset A^*$. Alors il existe $x \in A^* \backslash sp(\chi)$.

Par conséquent $\chi \cup \{x\}$ est linéairement indépendant.

Puisque $x \notin \chi$, alors $x_{(\alpha,\beta)} \nsubseteq \zeta$, avec $< \mu_A, \nu_A > (x) = (\alpha, \beta)$.

On a $(\alpha, \beta) > 0$ puisque $x \in A^*$. D'après le théorème 4.3.3 $\zeta \cup \{x_{(\alpha,\beta)}\}$ est libre flou intuitionistique dans A.

Par suite ζ n'est pas maximal.

Donc $sp(\chi) = A^*$.

Inversement, on suppose que χ est une base de A^* sur F.

Alors ζ est libre flou intuitionistique dans A sur K (d'après le théorème 4.3.3).

Supposons que ξ n'est pas maximal.

Donc il existe $x \in A^*$ tel que $\zeta \cup \{x_{(\alpha,\beta)}\}, \alpha \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq, \beta$ est libre flou intuitionistique sur K. Maintenant $x \notin \chi$ et par le théorème 4.3.3, $\chi \cup \{x\}$ est linéairement indépendant F. (contradiction).

Donc ζ est maximal. □

Corollaire 4.3.1. Soit $A \in \mathcal{A}_K$. Si $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$ et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$. Alors A admet des sous-ensembles libres flous intuitioistiques maximaux sur K de points flous intuitionistiques de V et chacun de ces ensembles a la même cardinalité.

Soit $A \in \mathcal{A}_K$. Nous montrons maintenant qu'un sous-ensemble libre flou intuitionistique maximal de singletons flous intuitionistique de A ne nécessite pas de générer A.

Théorème 4.3.5. Soit $A \in \mathcal{A}_K$, tel que $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$ et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$. Si $\mid Im(A) \mid < \infty$, alors A admet une base floue intuitionistique sur K.

Démonstration. Soit $Im(A) = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ avec $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r = 1$ et $0 = \beta_r < \ldots < \beta_1$. Alors $V = A^{(\alpha_1,\beta_1)} \supset \ldots \supset A^{(\alpha_r,\beta_r)}$.
Choisissons une base $\mathfrak{B}$ de V sur F ,et soit $\mathfrak{B}_r = X_r$ une base de $A^{(\alpha_r,\beta_r)}$. On suppose qu'on peut étendre $\mathfrak{B}_r$ à une base $\mathfrak{B}_{i+1} = X_r \cup \ldots \cup X_{i+1}$ de $A^{(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})}$, de même on peut étendre $X_r \cup \ldots \cup X_{i+1}$ à une base $\mathfrak{B}_i = X_r \cup \ldots \cup X_{i+1} \cup X_i$ de $A^{(\alpha_i,\beta_i)}$, $i = r, \cdots, 1$.
Soient $\mathfrak{B} = X_r \cup \ldots X_1$, et $x \in V$. Alors $A(x) = (\alpha_i, \beta_i)$ pour certains i. Ainsi $x \in A^{\alpha_i,\beta_i)} = sp(X_r \cup \ldots \cup X_i)$.
Soit $\zeta = \{x_{(\alpha_m,\beta_m)} \mid x \in \mathfrak{B} \cap A^{(\alpha_m,\beta_m)}, \ m = 1, \cdots, r\}$ si $(\alpha_1, \beta 1) > 0$ et $\zeta = \{x_{(\alpha_m,\beta_m)} \mid x \in \mathfrak{B} \cap A^{(\alpha_m,\beta_m)}, \ m = 2, \cdots, r\}$ si $(\alpha_1, \beta 1) = (0, 1)$.

Puisque $x \in sp\{X_r \cup \ldots \cup X_i\}$ et $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \ldots < \alpha_r$, et $\beta_r < \ldots < \beta_{i+1} < \beta_i$
On a $x_{(\alpha_i,\beta_i)} \subseteq \langle \zeta \rangle$.

en effet, $\langle \zeta \rangle(x) = (\alpha_i, \beta_i)$, i.e. $\langle \zeta \rangle(x) = A(x)$.

Par conséquent $\langle \zeta \rangle = A$. D'après le théorème 4.3.3, ζ est libre flou intuitionistique sur K. □

Corollaire 4.3.2. Soit $A \in \mathcal{A}_K$. tel que $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$ et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V \backslash \{0\}\}$. Si V est de dimension finie alors A a une base floue intuitionistique sur K.

Démonstration. La preuve découle des deux théorèmes 4.3.1 and 4.3.5. □

Corollaire 4.3.3. Soit $A \in \mathcal{A}_K$. On suppose que $\inf\{\mu_K(c) \mid c \in F\} \geq \sup\{\mu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$ et $\sup\{\nu_K(c) \mid c \in F\} \leq \inf\{\nu_A(x) \mid x \in V\backslash\{0\}\}$. Si A est finement généré sur K, Alors A a une base sur K.

Démonstration. Il existe un sous-ensemble flou intutionistique X de V tel que $A = \langle X \rangle$ et $X(x) > 0$ seulement pour un nombre fini de $x \in V$.

Par conséquent, on peut remplacer le supremum par le maximum dans le théorème 4.3.2.

Alors $Im(A) \subseteq \{X(x) \mid x \in V\}$.

Donc A est a valeur finie.

Utilisons le théorème 4.3.5 on trouve le résultat. □

Définition 4.3.5. . Soient $A \in \mathcal{A}_K$ et $\zeta \subseteq \{x_{(\alpha,\beta)} \mid x \in A^*, \alpha \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq \beta\}$ tel que $x_{(\alpha,\beta)}, x_{(\alpha',\beta')} \in \zeta$, donc $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$. Alors ζ est dit linéairement indépendant flou intuitionistique sur K si et seulement si pour chaque sous-ensemble fini $\{x_{1(\alpha_1,\beta_1)}, \cdots, x_{n(\alpha_n,\beta_n)}\}$ de ζ, si $(\Sigma_{i=1}^n c_{i(\mu_i,\nu_i)}, \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)})(x) = (0,1)$ pour tout $x \in V\backslash\{0\}$ avec $c_i \in F, 0 < \mu_i \leq \mu_K(c_i)$ et $\nu_K(c_i) \leq \nu_i < 1)$ pour $i = 1, \cdots, n$, alors $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Proposition 4.3.13. Soit $A \in \mathcal{A}_K$, et soit $\zeta \subseteq \{x_{(\alpha,\beta)} \mid x \in A^*, 0 < \alpha \leq \mu_A(x), \nu_A(x) \leq \beta < 1\}$ tel que si $x_{(\alpha,\beta)}, x_{(\alpha',\beta')} \in \zeta$, alors $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$, et soit $X = \{x \mid x_{(\alpha,\beta)} \in \zeta\}$. Alors ζ est linéairement indépendant flou intuitionistique sur K si et seulement si χ est linéairement indépendant sur K^*.

Démonstration. Supposons que ζ est linéairement indépendant flou intuitionistique sur K.

Soit $0 = \Sigma_{i=1}^n c_i x_i$ avec $c_i \in K^*$ et $x_i \in \chi, i = 1, \ldots, n$.

Soit $(\alpha, \beta) = (\min\{\mu_1, \ldots, \mu_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \max\{\nu_1, \ldots, \nu_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\})$, avec $0 < \mu_i \leq \mu_K(c_i)$ et $\nu_K(c_i) \leq \nu_i < 1$ et $0 < \alpha_i \leq \mu_A(x_i)$ et $\nu_A(x) \leq \beta_i < 1$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Alors $\forall x \in V\backslash\{0\}, (0,1) = (\Sigma_{i=1}^n c_i x_i)_{(\alpha,\beta)}(x) = (\Sigma_{i=1}^n c_{i(\mu_i,\nu_i)} \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)})(x)$.

Par conséquent, $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Inversement, supposons que χ est linéairement indépendant sur K^*.

Soit $x_{1(\alpha_1,\beta_1)}, \ldots, x_{n(\alpha_n,\beta_n)} \in \zeta$.

On suppose que pour tout $x \in V\backslash\{0\}, 0 = (\Sigma_{i=1}^n c_{i(\mu_i,\nu_i)} \circ x_{i(\alpha_i,\beta_i)})(x)$.

Donc $0 = (\Sigma_{i=1}^n c_i x_i)_{(\alpha,\beta)}(x)$.

Puisque $(\alpha, \beta) > 0, \Sigma_{i=1}^n c_i x_i = 0$.

Alors, $c_1 = \ldots = c_r = 0$. □

Conclusion et perspectives

Ce travail de recherche a pour objectif, dans un premier temps, de proposer la définition d'une nouvelle construction de l'anneau quotient $R/ < \mu, \nu >$, ainsi d'établir les trois théorèmes d'isomorphisme flou intuitionistique. D'autre part, ce travail de thèse vise à proposer les concepts de sous-espace vectoriel flou intuitionistique sur un sous-corps flou intuitionistique et celui de base floue intuitionistique. Cela nous a permis d'aboutir à quelques résultats importants à l'aide de la notion de point flou intuitionistique.

L'esprit de notre recherche reste valable et applicable sur un bon nombre de notions et ses résultats vont nous permettre de développer certains axes importants tels que :

1. Les sous-espaces topologiques flous intuitionistiques.
2. les équations différentielles linéaires floues intuitionistiques.
3. Les espaces de Hilbert flous intuitionistiques.

Bibliographie

[1] R. S. Abdul et M.F. Marashdeh. Intuitionistic Fuzzy Rings, International Journal of Algebra, 5 (2011), no. 1, 37 - 47.

[2] M. Akgul. Some Properties of Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 133 (1988), 93-100.

[3] M. Z. Alam. Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings With Operators, J. Math (IOSR-JM), (2015), 48-54.

[4] K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1) (1986), 87-96.

[5] K.T. Atanassov, New operations defined over intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and Systems, 61(2) (1994), 137-142.

[6] I. Bakhadach, S. Melliani, M. Oukessou and S.L. Chadli, Intuitionistic fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy prime ideal in a ring, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 22(2) (2016), 59-63.

[7] I. Bakhadach, M. Elomari, S. Melliani, H. Sadiki and L. S. Chadli, "Approximation of a fuzzy number by a fuzzy element of fuzzy algebra, IEEE 6th International Conference on Optimization and Applications (ICOA), 2020, pp. 1-5.

[8] I. Bakhadach, S. Melliani and L. S. Chadli, On intuitionistic fuzzy implications, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets. Vol. 23, 2017, No. 5, 7–19.

[9] B. Baldev and Dhiren Kr.Basnet, Intuitionistic fuzzy subrings and ideals. J.Fuzzy mathematics, 11 (1) (2003). 139-155.

[10] H. Bandemer, Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications, John Wiley (1996).

[11] J. C. Bezdek, "Comments on Fuzzy Sets-What are They and Why ?",IEEE Transactions On Fuzzy Systems, vol. 2, No. 1 ,(33)(1994) .

[12] R. Biswas ,Fuzzy fields and fuzzy linear spaces redefined*, Fuzzy Sets and Systems ,33(1989) : 257-259 .

[13] R. Biswas, Intuitionistic fuzzy subgroups, Math. Forum, 10(1989), 37-46

[14] D. Coker, On intuitionistic fuzzy point. NIFSI. 2 (1995), 79-84.

[15] M. Chiney and S. K. Samanta. Intuitionistic fuzzy basis of an intuitionistic fuzzy vector space, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 23(2017), 62–74.

[16] P. Das, Fuzzy vector spaces under triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 3 (1988) : 73-G.

[17] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York, (1980).

[18] J. A. Gogun, L-fuzzy sets, J. Math. Appl. 18 (1967), 149-156

[19] K. Hur, H. W. Kang and H. K. Song, Intuitionistic Fuzzy Subgroups and Subrings, Honam Math J, 25 (2003) (1), 19-41.

[20] K. Hur, H. W. Kang and H. K. Song, Intuitionistic Fuzzy Ideals of a Ring, Journal of the Korea Society of Mathematical Education, Series B, 12 (2005) (3), 193-209.

[21] K. Hur,Jan,S.,Y. Kang, H. W. , Intuitionistic fuzzy subgroupoids, International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, 3(1) (2003), 72-77.

[22] Y. B. Jun, S. Z. Song, Intuitionistic fuzzy semi preopen sets and Intuitionistic fuzzy semi precontinuous mappings, Journal of Appl. Math. and Computing, 19(1-2) (2005) , 467-474.

[23] A. K. Katsaras and D. B. Liu, Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Topological Vector Spaces, Journal of Mathematical Analisys and Applications, 58 (1977), 135-146.

[24] A. Kaufmann, Introduction a la theorie des sous-ensembles flous, Paris, Masson, 1977.

[25] N. Kuroki, On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 5, (1981) 203-215.

[26] K. h. Kim, On fuzzy points in semigroups, IJMMS 26, 11 (2001) 707–712.

[27] W.J. liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 8 (1982) 133-139.

[28] Y. L. Liu, J. Meng and X. L. Xin, Quotient rings induced via fuzzy ideals, Korean J. Comput. and Appl. Math. Vol. 8(2001), No. 3, pp. 631-643.

[29] D.S. Malik and J.N. Mordeson, Fuzzy subfields, Fuzzy Sets and Systems, 37 (1990), 383-388.

[30] D. S. Malik , J. N. Mordeson, Fuzzy vector spaces, Information sciences, 55(1991) , 271-281.

[31] D.S. Malik, and J.N. Mordeson, Fuzzy maximal, radical and primary ideals of a ring, Inform.Sci. 53 (1991), 151-165.

[32] D.S. Malik and J .N. Mordeson, Fuzzy directsums of fuzzy rings, FSS 45 (1992), 83-91.

[33] S. Melliani, M. Kuçukaslan, H. Sadiki and L. S. Chadli,, Deferred statistical convergence of sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, No. 3 (2018), 64-78.

[34] S. Melliani, I. Bakhadach, H. Sadiki and L. S. Chadli, Quotient Rings Induced via Intuitionistic Fuzzy Ideals, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing-springer, vol 372 (2019),45-54.

[35] S. Melliani, I. Bakhadach, H. sadiki and L. S. Chadli, Solving the Intuitionistic fuzzy fractional equation by means of the homotopy analysis method, Journal Nonlinear Analysis and Application, (2018) No.1, 106-116.

[36] S. Melliani, I. Bakhadach and L. S. Chadli, Intuitionistic Fuzzy Group With Extended Operations, Homological and Combinatorial Methods in Algebra. SAA 2016. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 228. pp $55-65$.

[37] S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli. Fuzzy Rings and Fuzzy Polynomial Rings, Homological and Combinatorial Methods in Algebra. SAA 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 228, (2018). pp 89-98.

[38] S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli. Intuitionistic Fuzzy Group With Extended Operations, Homological and Combinatorial Methods in Algebra. SAA . Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 228 (2016),55-65.

[39] S. Melliani, I. Bakhadach, M. ElomariL. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy Dirichlet problem, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, No. 4 (2018), 72-84.

[40] S. Melliani, I. Bakhadach, M. Elomari, L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy actions, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, No. 3 (2018), 11-26.

[41] M. J. Mohammed Ataa, G. A. , On Intuitionistic fuzzy topological vector space, Journal of College of Education for Pure Sciences, 4 (2014), 32-51.

[42] M. Muthusamy, N. P. and K. A. Study on intuitionistic fuzzy subfields ,International Journal of General Topology, Vol.4 (2011), pp. 57-65.

[43] S. Miyamoto, Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis, Kluwer academic publishers, (1990).

[44] M. Mizumoto and K. Tanaka, Algebraic proprerties of fuzzy numbers, Comminication in Inter. Conf. on Cybernetics and Society, Washington D.C, (1976).

[45] N.P. Mukherjee, and P. BhattAcharya, Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, Inform. Sci., 34 (1984), 225-239.

[46] N.P. Mukherjee and P. Bhattacharya, Fuzzy groups, Some group theoretic analogs, Inform. Sci. , 39 (1986), 247-268.

[47] T.K. Mukherjee, M.K. Sen,Prime fuzzy ideal in rings, Fuzzy Sets and Systems, 32 (1989), 337-341.

[48] M. Muthusamy , N. P. and K. A., Study on intuitionistic fuzzy subfields, International Journal of General Topology, (2011) .

[49] S. Nanda , Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 (1986), 89-94 .

[50] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl, 64 (1978), 369-380.

[51] M.Pal, S.K. Khan and A.K. Shyamal, Intuitionistic fuzzy matrices, Notes on Intuitionistic fuzzy set, 8(2), 51-62(002).

[52] R. Pradhan and Pal M., Intuitionistic fuzzy linear transformations, Annals of Pure and Applied Mathematics, 5(1) (2012), 57-68.

[53] P.M. Pu & Y.M. Mandal, Fuzzy topology, neibghbourhood structure of a fuzzy point and Moore-smith convergence, J. Math. Anal. Appl., 76(2) (1980), 571-599.

[54] A. Rosnenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. , 35 (1971), 512-517.

[55] H.Sadiki, S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli, On Intuitionistic Fuzzy Vector Spaces, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing-springer, vol 372 (2018) ,pp 291-299.

[56] H.Sadiki, S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy basis of an intuitionistic fuzzy vector space,

[57] C. Wenjuan and Z. Shunhua, Intuitionistic fuzzy Lie sub-superalgebras and intuitionistic fuzzy ideals, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009), 1645–1661

[58] X. Yuan. Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004), 631-641.

[59] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965), 338-353.

[60] K. Zhang, Y. Bai, Xin-Li L., Yu-Fei Q. , Intuitionistic fuzzy subfield and its characterizations, IEEE Second International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, (2010).