



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal



*Centre des Études Doctorales : Sciences et Techniques*

*Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

## THÈSE

Présentée par

**Abdelati EL ALLAOUI**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur**

*Spécialité : Mathématiques*

---

### **Semi-groupes flous et application aux systèmes dynamiques et problèmes d'évolution**

---

Soutenue le 16/07/2019 devant le jury composé de :

Pr. Elhoussine AZROUL	Faculté des Sciences Dhar El Mehrez, Fès, Président
Pr. Khalid HILAL	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, Rapporteur
Pr. Hassan EL AMRI	Ecole Normale Supérieure, Casablanca, Examineur
Pr. Larbi AFIFI	Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca, Examineur
Pr. Said MELLIANI	Faculté des Sciences et Technique Béni Mellal, Encadrant
Pr. Lalla Saadia CHADLI	Faculté des Sciences et Technique, Béni Mellal, Co-encadrant
Pr. M'hamed ELOMARI	Ecole Supérieure de Technologie , Fès, Invité

# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane de Beni Mellal, dont le directeur est Mr S. Melliani et la codirectrice est Mme L. S. Chadli.

Qu'ils soient chaleureusement remerciés pour m'avoir accueillie au sein de leur laboratoire ainsi que l'ensemble des membres du LMACS.

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, pour ces années passées au sein du LMACS. Je le remercie chaleureusement pour avoir encadré ce travail, pour ses qualités humaines et surtout ses qualités scientifiques, qui m'ont permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions possibles. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour sa patience, pour m'avoir initié à ce monde privilégié de la recherche.

Je souhaite également remercier très chaleureusement tous les membres du Jury d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je dédie ce travail à mes chers parents et toute ma famille sans qui je ne serais pas là. Je les remercie infiniment pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel pendant ces années.

## **Publications :**

1. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, Complex fuzzy dynamical systems and Stability of the equilibrium Point, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis* No.3 (2016) 223-233).
2. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, Representation of complex intuitionistic fuzzy sets, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets* Vol. 22, 2016, No. 2, 22–31.
3. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, The Cauchy problem for complex intuitionistic fuzzy differential equations, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets* Vol. 22, 2016, No. 4, 53–63
4. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, Fuzzy dynamical systems and Invariant attractor sets for fuzzy strongly continuous semigroups, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis* 2016 No.2 (2016) 148-155.
5. Said Melliani, Abdelati El Allaoui and Lalla Saadia Chadli, A general class of periodic boundary value problems for controlled nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces, *Advances in Difference Equations* 2016 :290.
6. S. Melliani, A. El Allaoui and L.S. Chadli, Relation Between Fuzzy Semigroups and Fuzzy Dynamical Systems, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 17 (1) (2017) 60–69.
7. A. El Allaoui, S. Melliani and L.S. Chadli, Complex Fuzzy Evolution Equation with Nonlocal Conditions, *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering* Vol :11, No :3, 2017.
8. A. El Allaoui, S. Melliani, Y. Allaoui and L.S. Chadli, Averaging of intuitionistic fuzzy differential equations, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, Vol. 23, 2017, No. 2, 44–54.
9. A. El Allaoui, S. Melliani, and L.S. Chadli, Complex intuitionistic fuzzy evolution equations, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, Vol. 23, 2017, No. 2, 55–68.
10. Melliani, S., Chadli, L., El Allaoui, A. (2017). Periodic boundary value problems for controlled nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 8(1), 301-314.
11. A. El Allaoui ; S. Melliani ; L. S. Chadli (2017) Fuzzy  $\alpha$ -semigroups of operators, *General Letters in Mathematics* Vol 2 (2) 42-49.
12. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli (2018), Complex fuzzy evolution equations, *Journal of Nonlinear Systems and Applications* 31–36.

13. A. El Allaoui, Y. Allaoui, S. Melliani, L. S. Chadli (2018), Coupled system of mixed hybrid differential equations : Linear perturbations of first and second type, Journal of Universal Mathematics Vol.1 No.1 pp.24-31.
14. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli (2017), Representation of complex grades of membership and non-membership for a complex intuitionistic fuzzy sets, Notes on IFS, Volume 23, 2017, Number 5, pages 51—60.
15. A. El Allaoui, S. Melliani and L.S. Chadli, Complex Fuzzy Evolution Equation, Journal of Nonlinear Systems and Applications (2018) 31–36.
16. S. Melliani, A. El Allaoui and L. S. Chadli (January 2019). Controlled Fuzzy Evolution Equations : Theoretical Aspects and Applications. Chapter In book : Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems.

**Publications soumises :**

1. A. El Allaoui, S. Melliani and L. S. Chadli, Maximal mild solution to fuzzy differential equation with nonlocal conditions, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 15 May 2018.
2. S. Melliani, Y. Allaoui, A. El Allaoui and K. hilal, Coupled system of mixed Hybrid fractional differential equations : Linear perturbations of first and second type, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 30 November 2018.

**Communications :**

1. Talk at The 3th (AM2A) 08-10 October 2015, Arougou, Khenifra, Morocco.
2. Talk at The International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets Theory and Applications (ICIFSTA) 20-22 April, Béni Mellal Morocco.
3. Talk at The International Meeting on Applied Mathematics (IMAME) 09-12 May 2016, Errachidia Morocco.
4. Talk at The 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM ) 29 August- 01 September 2016, Mersin Turkey.
5. Talk at The Fourth International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences : Modeling and Analysis (4thICCDs'2016) Agadir, Morocco - October 26-28, 2016.
6. Talk at The International Workshop on Applied Mathematics (IWAM), Errachidia, March 13, 2017.
7. Second Talk at The International Workshop on Applied Mathematics (IWAM), Errachidia, March 13, 2017.

8. Talk at Le 5ème Congrès International de la Société Marocaine de Mathématiques Appliquées (SM2A), du 16 au 18 Mars 2017 à Meknès.
9. Talk at The 19th International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications (ICFSTA), March 26-27 2017 Madrid, Spain.
10. Talk at The International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets & Mathematics Sciences Ifrane, Morocco, April 11-13, 2018.
11. Talk at la septième Journée des Sciences de l'Ingénieur JSI 2019, l'École Normale Supérieure de Casablanca, 22 juin 2019.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Éléments de base des Ensembles Flous</b>	<b>11</b>
1.1 Ensembles Flous . . . . .	11
1.2 Distance de Hausdorff . . . . .	14
1.2.1 L'espace métrique $(E^n, D)$ . . . . .	14
1.2.2 L'espace métrique $(\mathcal{C}(I, E^n), H)$ . . . . .	15
1.3 Nombres flous . . . . .	16
1.4 Théorème d'injection des nombres flous . . . . .	20
1.5 Principe d'extension de Zadeh . . . . .	21
1.6 Arithmétiques avec les nombres flous . . . . .	25
1.6.1 Opérations arithmétiques des intervalles . . . . .	26
1.6.2 Opérations arithmétiques des nombres flous . . . . .	27
1.7 Continuité, Différentiabilité et Intégrabilité des fonctions floues . . . . .	32
1.7.1 Différence de Hukuhara . . . . .	32
1.7.2 Continuité . . . . .	33
1.7.3 Différentiabilité . . . . .	34
1.7.4 Intégrabilité . . . . .	36
1.8 Opérateurs flous . . . . .	38
<b>2 Systèmes dynamiques et Semi-groupes d'opérateurs</b>	<b>40</b>
2.1 Systèmes dynamiques . . . . .	40
2.2 Stabilité des systèmes dynamique . . . . .	42
2.3 Semi-groupes d'opérateurs . . . . .	43
2.4 Semi-groupes fractionnaires conformes d'opérateurs . . . . .	46
<b>3 Systèmes dynamiques flous</b>	<b>47</b>
3.1 Équations différentielles floues (EDFs) . . . . .	47

3.2	Problème à valeur initiale flou sur un intervalle $[a, b]$ . . . . .	52
3.3	Problème de condition initiale flou généralisé . . . . .	56
3.3.1	Problème de condition initiale flou par inclusion différentielle . . . . .	56
3.3.2	Problème à valeur initiale flou avec l'extension de Zadeh . . . . .	58
3.3.2.1	Condition initiale floue . . . . .	61
3.3.2.2	Paramètre et condition initiale flous . . . . .	62
3.4	Application numérique . . . . .	63
3.4.0.3	Le Modèle déterministe . . . . .	65
3.4.0.4	Le Modèle flou . . . . .	65
3.5	Stabilité des systèmes dynamiques flous . . . . .	70
3.6	Ensembles invariants et attracteurs pour les systèmes dynamiques flous . . . . .	79
3.6.1	Ensembles invariants et attracteurs dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	79
3.6.2	Ensembles invariants et attracteurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Semi-groupes flous</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Fonction exponentielle floue . . . . .	89
4.2	Semi-groupes flous liés aux problèmes de Cauchy autonomes . . . . .	90
4.3	Semi-groupe flou défini par une fonction exponentielle floue . . . . .	92
4.4	Semi-groupes flous fortement continus . . . . .	95
4.5	Relation entre semi-groupes et systèmes dynamiques flous . . . . .	97
4.6	Équations différentielles et semi-groupes flous . . . . .	99
4.6.1	Solution Maximale d'une équation différentielle floue . . . . .	101
4.6.2	Dépendance continue des solutions faibles maximales par rapport aux données initiales . . . . .	104
4.7	Semi-groupes flous fractionnaires conformes . . . . .	105
	<b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .	<b>110</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>110</b>

# Introduction

La théorie des ensembles flous a été proposée en 1965 par Lofti A. Zadeh. Cette théorie est basée sur le raisonnement intuitif en prenant en compte la subjectivité humaine et l'imprécision. Ce n'est pas une théorie imprécise mais une théorie mathématique rigoureuse qui traite de la subjectivité et/ou de l'incertitude qui sont communes dans le langage naturel. Le langage naturel est une structure très compliquée qui est fondamentale, non seulement dans la communication humaine, mais aussi dans la façon dont les êtres humains pensent et perçoivent le monde environnant. L'idée principale de la logique floue est de capter le flou de la pensée humaine et de l'exprimer avec des outils mathématiques appropriés.

Contrairement aux ordinateurs, le raisonnement humain n'est pas binaire où tout est oui (vrai) ou non (faux) mais traite de concepts imprécis comme "température élevée", "jeune homme". Ces concepts sont ambigus dans le sens où ils ne peuvent être définis avec précision. Par exemple, la question de savoir si une personne est petite ne peut pas être universellement répondue car certaines personnes seront d'accords et d'autres non. Malgré le fait que la définition du mot "petit" soit claire, il n'est pas possible d'énoncer clairement si une personne est petite parce que la réponse peut dépendre de la perception individuelle. Même pour une personne, il peut ne pas être possible de donner une réponse claire et précise car l'appartenance à un concept (par exemple petite personne) n'est souvent pas nette mais floue, impliquant une appartenance partielle exprimée dans le langage naturel par les expressions "très", "un peu", "plus ou moins", etc.

Le concept d'ensemble flou permet de considérer des classes d'objets dont les frontières ne sont pas clairement déterminées, par l'introduction d'une fonction dite fonction d'appartenance des objets à la classe, prenant des valeurs entre 0 et 1, contrairement aux ensembles classiques dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs possibles 0 ou 1.

Les classes d'objets rencontrées dans le monde réel ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis. Ce résultat ne fait que souligner le fossé qui sépare les représentations mentales de la réalité, des modèles mathématiques usuels( à base de logique binaire,



de nombres réels, d'équations différentielles, ...). Les classes d'objets auxquelles Zadeh fait allusion n'existent qu'au travers de ces représentations mentales et correspondent à des termes vagues du langage naturel, tels que "température élevée", "puissance moyenne", ...

La notion d'ensemble classique semble mal adaptée pour présenter des classes de ce type. Par exemple, si l'on considère le concept "jeune homme", il est difficile de proposer un seuil en dessous duquel un homme sera considéré comme "jeune". L'idée de Zadeh a été de suggérer qu'au lieu de chercher, à tout prix, un seuil unique pour l'appartenance à l'ensemble des âges "jeunes" dans un contexte donné, il semblait plus réaliste de considérer deux seuils  $s_1 < s_2$ , tels que le terme jeune s'applique parfaitement aux âges plus petits que  $s_1$  (par exemple 19 ans), et ne s'applique plus du tout au dessus de  $s_2$ . Les âges plus petits que  $s_1$  auront le degré d'appartenance maximal (en général supposé égal à 1) et les âges plus grands que  $s_2$  (par exemple 40 ans) auront un degré d'appartenance minimal (en général égal à 0). Entre  $s_1$  et  $s_2$ , les degrés d'appartenances seront intermédiaires, par convention entre 0 et 1.

La théorie des ensembles flous a été créée pour modéliser des concepts subjectifs dont les frontières ne sont pas nettes, elle a également été explorée dans divers domaines en raison de sa grande applicabilité et de sa fonctionnalité. Dès que l'idée d'une fonction avec des valeurs floues est née, elle a aussi soulevé l'idée d'une sorte d'équation différentielle floue (EDF). Depuis lors, les recherches ont défini différentes dérivées floues et fonctions floues, donnant lieu à différentes théories des EDFs. La modélisation de divers phénomènes utilise fréquemment des équations différentielles. Afin d'inclure l'imprécision, l'approche floue est souvent utilisée. En particulier, des inclusions différentielles et, plus récemment, des EDFs.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier plusieurs thématiques :

Nous introduisons et étudions des semi-groupes d'opérateurs sur des espaces des fonctions floues, nous obtenons de nouveaux résultats dans la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires sur des espaces de type flou. La théorie que nous développons est utilisée pour résoudre des équations différentielles floues. Ces outils nous permettent d'obtenir des solutions explicites à des problèmes de valeur initiale flou qui portent des formules explicites similaires au cas déterministe, avec des termes flous supplémentaires. La méthode du semi-groupe présente un avantage plus que les autres méthodes disponibles dans la littérature (méthode des ensembles de niveaux, méthode des inclusions différentielles et autres méthodes de «fuzzification» de la solution réelle), dans le sens où les solutions peuvent être facilement construites, et que la méthode peut être appliquée à une

plus grande classe d'équations différentielles floues qui peuvent être transformées en un problème abstrait de Cauchy.

Nous présentons également quelques approches utilisées pour étudier les systèmes dynamiques continus flous et nous étudions la stabilité des systèmes dynamiques et en donnant une relation entre les semi-groupes et les systèmes dynamiques flous.

# Chapitre 1

## Éléments de base des Ensembles

## Flous

### 1.1 Ensembles Flous

Dans la théorie des ensembles classiques il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous ensemble, le mérite de Zadeh a été tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée permettant des graduations dans l'appartenance d'un élément à appartenir plus ou moins fortement à cet sous-ensemble.

**Définition 1.1.1. (Ensemble flou)** Soit  $X$  un ensemble classique et soit  $x$  un élément quelconque de  $X$ , un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est défini par sa fonction d'appartenance  $\mu_A$ , telle que

$$\begin{aligned}\mu_A : \quad X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mu_A(x)\end{aligned}$$

où  $\mu_A$  représente le degré d'appartenance avec lequel  $x$  appartient à l'ensemble flou  $A$ . Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est défini comme l'ensemble des couples :

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\},$$

tel que  $A$  est caractérisé par une fonction d'appartenance  $\mu_A$  (degré d'appartenance) qui à chaque point  $x$  de  $X$  fait correspondre un réel dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Remarque 1.1.1.** Cette fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique d'un ensemble classique.

Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On note par  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles flous sur  $X$ .

**Définition 1.1.2. (Support)**

Le support d'un ensemble flou  $A$  de  $X$ , noté  $supp(A)$  est défini par

$$supp(A) = \{x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$

**Définition 1.1.3. ( $\alpha$ -Coupe)**

Une  $\alpha$ -coupe de  $A$  est le sous ensemble classique noté  $[A]^\alpha$  est défini par

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ cl(supp(A)) & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

avec  $cl(supp(A))$  est la fermeture de  $supp(A)$ .

**Définition 1.1.4. (Noyau)**

Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  noté par  $noy(A)$  est défini par

$$noy(A) = \{x \in X, \mu_A(x) = 1\}$$

$A$  est dit normal si le noyau de  $A$  est non vide.

**Définition 1.1.5.** Un ensemble flou  $A$  est dit convexe si

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)),$$

pour tous  $x, y \in X$ , et tout  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Remarque 1.1.2.** Un ensemble flou  $A$  est convexe si, et seulement si toutes ses  $\alpha$ -coupes sont des ensembles convexes.

**Définition 1.1.6. (Égalité des ensembles flous)**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$ .  $A$  et  $B$  sont dits égaux si

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

et on note  $A = B$ .

**Théorème 1.1.1.** ([13]) Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles flous de  $X$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $A = B$ , est  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Théorème 1.1.2.** ([10])

Soit  $\mathcal{A} = \{A_\alpha, \alpha \in [0, 1]\}$  une famille des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  satisfait :

1.  $A_\alpha$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .
2.  $A_\beta \subset A_\alpha$ , si  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .
3.  $A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} A_\beta$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ .
4. L'ensemble  $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha$  est dense dans  $A_0$ .

Alors, il existe un sous-ensemble flou  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , tel que  $[u]^\alpha = A_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

La réciproque de ce théorème est toujours vraie :

**Théorème 1.1.3.** Soit  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

1.  $[u]^\alpha$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .
2.  $[u]^\beta \subset [u]^\alpha$ , si  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .
3.  $[u]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha]} [u]^\beta$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ .
4. L'ensemble  $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [u]^\alpha$  est dense dans  $[u]^0$ .

**Exemple 1.1.1.** La figure suivante montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et un ensemble flou

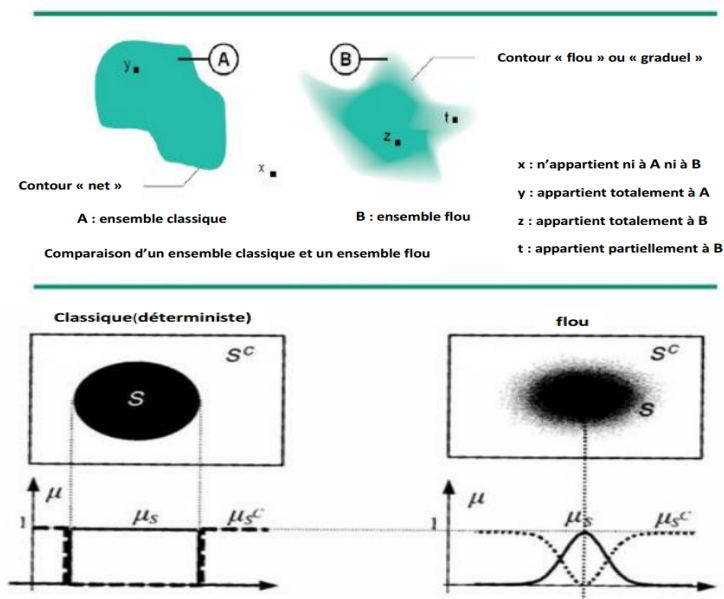


FIGURE 1.1 – Ensemble classique et ensemble flou

**Exemple 1.1.2.** Considérons l'expression "jeune". Dans le contexte "une personne jeune" peut être modélisée en utilisant les ensembles flous.

L'ensemble flou  $A$  est défini par

$$\mu_A : [0, 100] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 25 \\ \frac{40-x}{25} & \text{si } 25 < x \leq 40 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

**Exemple 1.1.3.** Considérons l'expression linguistique suivante "un nombre réel voisin de 0" cette expression peut être considéré comme un ensemble flou  $A$  avec

$$\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

## 1.2 Distance de Hausdorff

### 1.2.1 L'espace métrique $(E^n, D)$

On note  $\mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n)$  la collection de tous les sous-ensembles non vides compacts et convexes de  $\mathbb{R}^n$ . L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies dans  $\mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n)$  de la façon usuelle.

**Définition 1.2.1.** On définit la distance entre deux sous-ensembles non vides bornés  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  par la métrique de Hausdorff

$$d(A, B) = \max \{ \rho(A, B), \rho(B, A) \},$$

où

$$\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \quad \rho(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|.$$

$\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.2.1.** Il est clair que  $(\mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n), d)$  est un espace métrique séparable et complet.

**Proposition 1.2.1.** La métrique  $d$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $d(kA, kB) = |k|d(A, B)$ ;  $A, B \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,
2.  $d(A + C, B + C) = d(A, B)$ ;  $A, B, C \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n)$ ,
3.  $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$ ;  $A, B, C, D \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 1.2.2.** On définit l'espace

$$E^n = \{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1], u \text{ satisfait les propriétés suivantes}\}$$

1.  $u$  est normal, i.e il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u(x_0) = 1$ .
2.  $u$  est convexe floue.
3.  $u$  est semi-continue supérieurement.
4.  $[u]^0$  est compact.

**Remarque 1.2.2.** Il est clair que :

1. Pour  $u \in E^n$ ,  $[u]^\alpha \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ .
2. Pour  $u, v \in E^n$ ,  $k \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$ , on a

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, [k.u]^\alpha = k[u]^\alpha.$$

**Définition 1.2.3.** On définit l'application  $D : E^n \times E^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$  comme suit

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

**Proposition 1.2.2.** ([19])

1. L'application  $D$  est une distance sur  $E^n$ .
2.  $(E^n, D)$  est un espace métrique complet.

**Proposition 1.2.3.** ([19]) La métrique  $D$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $D(ku, kv) = |k|D(u, v)$ ;  $u, v \in E^n$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,
2.  $D(u + w, v + w) = D(u, v)$ ;  $u, v, w \in E^n$ ,
3.  $D(u + v, w + t) \leq D(u, w) + D(v, t)$ ;  $u, v, w, t \in E^n$ .

## 1.2.2 L'espace métrique $(\mathcal{C}(I, E^n), H)$

**Définition 1.2.4.** Soit  $I = [0, a]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on considère l'espace  $\mathcal{C}(I, E^n)$  de toutes les fonctions (floues) continues définies sur le segment  $I$  vers  $E^n$ , avec  $a > 0$ .

On définit l'application  $H : \mathcal{C}(I, E^n) \times \mathcal{C}(I, E^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$  par

$$H(u, v) = \sup_{t \in I} D(u(t), v(t)),$$

pour  $u, v \in \mathcal{C}(I, E^n)$ .

**Proposition 1.2.4.** ([19])

1. L'application  $H$  est une distance sur  $\mathcal{C}(I, E^n)$ .
2.  $(\mathcal{C}(I, E^n), H)$  est un espace métrique complet.

On note  $\|u\|_{\mathcal{F}} = D(u, \tilde{0}_{E^n})$ ,  $u \in E^n$  avec

$$\tilde{0}_{E^n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

1.  $\|u\|_{\mathcal{F}} = 0$  si et seulement si  $u = \tilde{0}_{E^n}$ ,
2.  $\|\lambda u\|_{\mathcal{F}} = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{F}}$ ,  $\forall u \in E^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\|u + v\|_{\mathcal{F}} \leq \|u\|_{\mathcal{F}} + \|v\|_{\mathcal{F}}$ ,  $\forall u, v \in E^n$ ,
4.  $|\|u\|_{\mathcal{F}} - \|v\|_{\mathcal{F}}| \leq D(u, v)$ ,  $\forall u, v \in E^n$ ,
5.  $D(\alpha u, \beta u) = |\alpha - \beta| \|u\|_{\mathcal{F}}$ ,  $\forall u \in E^n$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  telles que  $\alpha, \beta \geq 0$  ou  $\alpha, \beta \leq 0$ ,

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E^n)$ , on définit

$$\|f\| = \sup_{x \in I} D(\tilde{0}, f(x)) = H(\tilde{0}, f).$$

Alors on a les propriétés suivantes :

1.  $\|f\| = 0$  si et seulement si  $f = \tilde{0}$ , où  $\tilde{0} \in \mathcal{C}(I, E^n)$  définie par  $\tilde{0}(t) = \tilde{0}_{E^n}$ ,  $\forall t \in I$ ,
2.  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}(I, E^n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\|f + h\| \leq \|f\| + \|h\|$ ,  $\forall f, h \in \mathcal{C}(I, E^n)$ ,
4.  $|\|f\| - \|h\|| \leq H(f, h)$ ,  $\forall f, h \in \mathcal{C}(I, E^n)$ ,
5.  $H(\alpha f, \beta f) = |\alpha - \beta| \|f\|$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}(I, E^n)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  telles que  $\alpha, \beta \geq 0$  ou  $\alpha, \beta \leq 0$ ,

## 1.3 Nombres flous

Les problèmes concrets impliquent souvent beaucoup de quantités qui sont les idéalizations d'informations imprécises impliquant des valeurs numériques. C'est la raison pour laquelle nous utilisons des mots comme "à peu près" dans tels cas. Par exemple, quand nous mesurons la taille d'une personne, ce que nous obtenons est une valeur numérique avec un niveau d'imprécision. Ces imprécisions peuvent être causées par (appareil de mesure, par les individus qui ont pris les mesures, par la personne qui a été mesurée et pour plusieurs d'autres raisons).



En fin, une valeur précise (nombre réel)  $h$  est choisie pour indiquer la taille de la personne. Mais il serait plus prudent de dire que la taille est à peu près ou approximativement  $h$ . Mathématiquement, nous représentons l'expression "à peu près  $h$ " par un sous-ensemble flou  $A$ , dont le domaine de la fonction d'appartenance  $\mu_A$  est l'ensemble de tous les nombres réels. En outre, il est raisonnable de s'attendre à ce que  $\mu_A(h) = 1$ . Le choix des nombres réels en tant que domaine est dû au fait que, théoriquement, les valeurs possibles de la taille d'une personne sont des nombres réels.

**Définition 1.3.1. (Nombre flou)** Un sous-ensemble flou  $A$  est appelé un nombre flou lorsque l'ensemble universel sur lequel  $\mu_A$  est définie est l'espace de tous les nombres réels et qu'il satisfait les conditions suivantes ;

1. Toutes les  $\alpha$ -coupes de  $A$  ne sont pas vides pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  ;
2. Toutes les  $\alpha$ -coupes de  $A$  sont des intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  ;
3.  $Supp(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$  est borné.

On représente les  $\alpha$ -coupes d'un nombre flou  $A$  par

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+].$$

On remarque que tout nombre réel  $r$  est un nombre flou dont la fonction d'appartenance est la fonction caractéristique :

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r \\ 0 & \text{si } x \neq r. \end{cases}$$

On désignera  $\chi_r$  ou simplement  $\hat{r}$ .

L'ensemble de tous les nombres flous sera désigné par  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , et en conséquence ce qui a été observé ci-dessus, l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est un sous-ensemble (classique) de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

**Exemple 1.3.1.** Le nombre flou  $\hat{2}$  peut être représenté comme dans la figure 1.2.

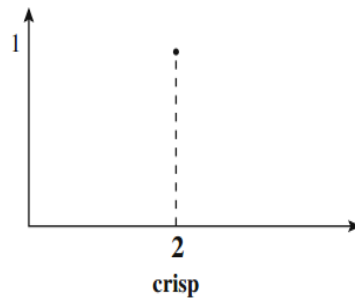


FIGURE 1.2 – Représentation du nombre flou  $\hat{2}$

Les nombres flous les plus utiles sont les nombres flous triangulaires et trapézoïdaux.

**Définition 1.3.2.** Un nombre flou  $A$  est dit triangulaire si sa fonction d'appartenance est donnée par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{si } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{si } u < x \leq b \\ 0 & \text{si } x \geq b. \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $a, u, b$  sont des nombres donnés.

La fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire a une représentation graphique d'un triangle avec  $[a, b]$  étant la base du triangle et le point  $(u, 1)$  comme sommet unique. Par conséquent, les nombres réels  $a, u$  et  $b$  définissent le nombre flou triangulaire  $A$  qui sera désigné par  $(a; u; b)$ .

Les  $\alpha$ -coupes des nombres flous triangulaires ont la forme simplifiée suivante :

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b], \quad (1.2)$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

Notons qu'un nombre flou triangulaire n'est pas nécessairement symétrique, car  $b-u$  peut être différent de  $u-a$ , toutefois  $\mu_A(u) = 1$ . On peut dire qu'un nombre flou  $A$  est un modèle mathématique raisonnable pour l'expression linguistique "presque  $u$ ". Pour l'expression "à peu près  $u$ " nous nous attendons à une symétrie. Imposer une symétrie aboutit à une simplification de la définition d'un nombre flou triangulaire.

En effet, soit  $u$  symétrique par rapport à  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire  $u-a = b-u = \delta$ . Dans ce cas

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta} & \text{si } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 1.3.2.** L'expression "à peu près quatre heures" peut être mathématiquement modélisée par le nombre flou triangulaire symétrique  $A$ , dont la fonction d'appartenance est donnée par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-4|}{0.2} & \text{si } 3.8 \leq x \leq 4.2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est représentée dans la figure 1.3, à partir de (1.2), nous obtenons les  $\alpha$ -coupes de cet sous-ensemble flou, qui sont les intervalles

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+], \text{ où } a_\alpha^- = 0.2\alpha + 3.8 \text{ et } a_\alpha^+ = -0.2\alpha + 4.2.$$



FIGURE 1.3 – Représentation du nombre flou ”à peu près 4”

**Définition 1.3.3.** Un nombre flou  $A$  est dit trapézoïdal si sa fonction d’appartenance a la forme d’un trapèze et donnée par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $a, b, c,$  et  $d$  sont des nombres donnés.

Les  $\alpha$ -coupes d’un nombre flou trapézoïdal sont les intervalles

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d], \quad (1.3)$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemple 1.3.3.** L’ensemble flou des adolescents peut être représenté par le nombre flou trapézoïdal avec la fonction d’appartenance

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & \text{si } 11 \leq x < 14 \\ 1 & \text{si } 14 \leq x \leq 17 \\ \frac{20-x}{3} & \text{si } 17 < x \leq 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et elle est illustrée dans la figure 1.4. L’équation (1.3) fournit les  $\alpha$ -coupes pour cet exemple.

$$[a_\alpha^-, a_\alpha^+] = [3\alpha + 11, -3\alpha + 20], \alpha \in [0, 1].$$

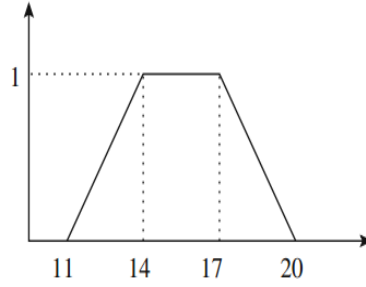


FIGURE 1.4 – Représentation de l'ensemble flou des adolescents

## 1.4 Théorème d'injection des nombres flous

Dans la suite, nous allons discuter un résultat d'injection concernant les nombres flous.

**Théorème 1.4.1.** ([27]) Considérons les fonctions  $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $u^-(\alpha) = u_\alpha^- \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, croissante, continue à gauche sur  $(0, 1]$  et continue à droite en 0.
2.  $u^+(\alpha) = u_\alpha^+ \in \mathbb{R}$  est une fonction bornée, décroissante, continue à gauche sur  $(0, 1]$  et continue à droite en 0.
3.  $u_1^- < u_1^+$ .

Alors, il existe un nombre flou  $u$  qui a  $u_\alpha^-$  et  $u_\alpha^+$  comme extrémités de ses  $\alpha$ -coupes,  $[u]^\alpha$ .

On définit maintenant l'espace suivant :

$\overline{C}[0, 1] = \{F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ bornée sur } [0, 1], \text{ continue à gauche pour } x \in (0, 1] \text{ et continue à droite en } 0\}$ ,

avec la norme  $\|F\| = \sup \{|F(x)| : x \in [0, 1]\}$ ,  $\overline{C}[0, 1]$  est un espace de Banach.

On peut injecter  $E^n$  dans l'espace de Banach  $(\overline{C}[0, 1])^2$  selon le théorème suivant :

**Théorème 1.4.2.** ([40]) On considère l'application  $j : E^n \rightarrow \overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$  donnée par  $j(u) = (u^-, u^+)$ , où  $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u^-(\alpha) = u_\alpha^-$ ,  $u^+(\alpha) = u_\alpha^+$ .

Alors  $j(E^n) := C$  est un cône convexe fermé de centre 0 dans  $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$ .

Ici  $\overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1]$  est un espace de Banach pour la norme  $\|(F, G)\| = \max \{\|F\|, \|G\|\}$ .

De plus,  $j$  satisfait :

(i)

$$j(a.u + b.v) = aj(u) + bj(v), \quad \forall a, b \geq 0, \quad \forall u, v \in E^n.$$

(ii)

$$D(u, v) = \|j(u) - j(v)\|, \forall u, v \in E^n.$$

*Démonstration.* La représentation d'un nombre flou à partir des fonctions  $u^-$ ,  $u^+$  dans le théorème 1.4.1 assure que  $j$  est bien définie et injective.

En se basant sur le même théorème, on peut déduire que

$$j(E^n) = \{(u^-, u^+) \in \overline{C}[0, 1] \times \overline{C}[0, 1] : u^- \text{ croissante, } u^+ \text{ décroissante, } u_1^- \leq u_1^+\}.$$

Pour vérifier qu'il est fermé, il suffit de remarquer que, on peut prendre une suite d'éléments dans  $j(E^n)$  a des composantes monotones qui convergent vers une limite pour la norme uniforme. De plus, la convergence conserve la relation  $u_1^- \leq u_1^+$ , Ainsi l'espace  $j(E^n)$  est fermé.

Considérons maintenant  $(u^-, u^+), (v^-, v^+) \in j(E^n)$  et  $a, b \geq 0$ , on a

$$j(a.u + b.v) = a(u^-, u^+) + b(v^-, v^+) = aj(u) + bj(v),$$

ce qui prouve (i) et aussi le fait que  $j(E^n)$  est un cône convexe.

Pour montrer (ii), on remarque que

$$\|j(u) - j(v)\| = \max \left\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} |u_\alpha^- - v_\alpha^-|, \sup_{\alpha \in [0,1]} |u_\alpha^+ - v_\alpha^+| \right\} = D(u, v).$$

□

## 1.5 Principe d'extension de Zadeh

Il est nécessaire d'étendre les concepts de la théorie des ensembles classiques à la théorie des ensembles flous.

La méthode d'extension proposée par Zadeh, connue aussi par principe d'extension, est l'une des idées de base qui induit l'extension des concepts mathématiques non flous en flous.

Le principe d'extension de Zadeh pour une fonction  $f : X \longrightarrow Z$  indique comment l'image d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  doit être calculée lorsque la fonction  $f$  est appliquée. Il est prévu que cette image soit un sous-ensemble flou de  $Z$ .

**Définition 1.5.1. (Principe d'extension de Zadeh)** Soit  $f$  une fonction telle que  $f : X \longrightarrow Z$  et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . L'extension de Zadeh de  $f$  est la fonction

$\widehat{f}$  qui nous donne le sous-ensemble flou  $\widehat{f}(A)$  de  $Z$  avec la fonction d'appartenance donnée par

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ .

On remarque que si  $f$  est une fonction bijective, alors

$$\{x : f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\},$$

où  $f^{-1}$  signifie la fonction inverse de  $f$ . Ainsi, si  $A$  est un sous-ensemble flou de  $X$ , avec la fonction d'appartenance  $\mu_A$ , et si  $f$  est bijective, alors la fonction d'appartenance de  $\widehat{f}(A)$  est donnée par

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \mu_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \mu_A(x) = \mu_A(f^{-1}(z)). \quad (1.5)$$

Le graphe de l'extension  $\widehat{f}$  de  $f$  est illustré dans la figure (1.5), où nous avons utilisé une fonction bijective  $f$ .

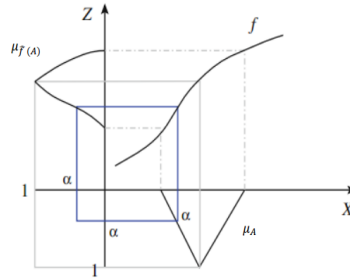


FIGURE 1.5 – Image d'un sous-ensemble flou par le principe d'extension

On remarque que si  $f$  est injective, alors  $z = f(x)$  appartient au sous-ensemble flou  $\widehat{f}(A)$  avec le même degré  $\alpha$  que  $x$  appartient à  $A$ . Cela peut ne pas se produire si  $f$  n'est pas injective.

Le principe d'extension étend le concept à des ensembles flous d'une fonction appliquée à un sous-ensemble classique de  $X$ . En effet, soit  $f : X \rightarrow Z$  une fonction et  $A$  un sous-ensemble classique de  $X$ . La fonction d'appartenance de  $A$  est sa fonction caractéristique. L'extension de Zadeh de  $f$  appliquée à  $A$  est le sous ensemble  $\widehat{f}(A)$  de  $Z$ , de fonction

caractéristique

$$\begin{aligned}
 \mu_{\widehat{f}(A)}(z) &= \sup_{\{x:f(x)=z\}} \chi_A(x) \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } z \in f(A) \\ 0 & \text{si } z \notin f(A) \end{cases} \\
 &= \chi_{f(A)}(z),
 \end{aligned}$$

pour tout  $z$ .

Clairement, la fonctions d'appartenance de l'ensemble flou  $\widehat{f}(A)$  est juste la fonction caractéristique de l'ensemble classique  $f(A)$ , c'est-à-dire que l'ensemble flou  $\widehat{f}(A)$  coïncide avec l'ensemble classique  $f(A)$  :

$$\widehat{f}(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Comme on peut le voir dans la formule ci-dessus, lorsque  $A$  est un ensemble classique, l'image  $\widehat{f}(A)$  est claire, c'est-à-dire que la formule (1.5.1) n'est pas nécessaire puisque chaque  $f(a)$  appartient à  $f(A)$  avec un degré d'appartenance égal à 1.

On peut également remarquer que si  $A$  est un ensemble classique, alors  $[A]^\alpha = A$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ . Par conséquent,

$$\left[\widehat{f}(A)\right]^\alpha = [f(A)]^\alpha = f(A) = f([A]^\alpha).$$

Rappelons que pour  $\alpha = 0$  on note par  $[A]^0$  la fermeture de  $A$ , c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé contenant le support de  $A$ , si  $X$  est un espace topologique. Ce résultat indiqué ici peut également être appliqué à un sous ensemble flou de  $X$ .

**Théorème 1.5.1.** Soit  $f : X \rightarrow Z$  une fonction continue, et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . Alors, pour tout  $\alpha \in [0, 1]$

$$\left[\widehat{f}(A)\right]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (1.6)$$

Ce résultat indique que les  $\alpha$ -coupes de l'ensemble flou obtenu par le principe d'extension de Zadeh coïncident avec les images des  $\alpha$ -coupes de  $A$  par la fonction  $f$ . La preuve de ce théorème est donnée dans [55, 56].

**Exemple 1.5.1.** Soit  $A$  un ensemble flou de nombres réels, dont la fonction d'appartenance est donnée par

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Les  $\alpha$ -coupes de  $A$  sont les intervalles

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right].$$

Considérons maintenant la fonction réelle  $f(x) = x^2$  pour  $x \geq 0$ . Puisque  $f$  est une fonction croissante, on a

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[ f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right] \\ &= [\widehat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

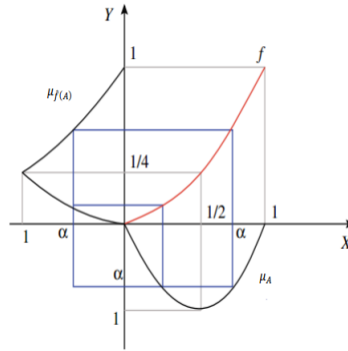


FIGURE 1.6 – Sous-ensemble  $\widehat{f}(A)$  de l'exemple 1.5.1

La relation entre les fonctions classiques et les fonctions floues est la suivante :  
Soit  $A$  un ensemble classique. Sa fonction d'appartenance dans ce contexte est

$$\chi_A(x) = \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On a  $f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\}$ .

En utilisant le principe d'extension de Zadeh, on a pour l'ensemble classique  $A$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{f}(A)}(z) &= \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \chi_A(x) & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } z \in f(A) \\ 0 & \text{si } z \notin f(A) \end{cases} \\ &= \mu_{f(A)}(z). \end{aligned}$$

Dans la suite, on définit le principe d'extension de Zadeh pour les fonctions de deux variables.



**Définition 1.5.2.** Soit  $f : X \times Y \longrightarrow Z$  une fonction, et soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous de  $X$  et  $Y$ , respectivement. L'extension  $\widehat{f}$  de  $f$  appliquée à  $A$  et  $B$  est le sous-ensemble flou  $\widehat{f}(A, B)$  de  $Z$  avec la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\widehat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\} & \text{si } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$ .

**Théorème 1.5.2.** ([14, 24, 49]) Si on suppose que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue. Alors on peut l'étendre à  $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  telle que  $w = \widehat{f}(u, v)$  et ses  $\alpha$ -coupes

$$[w]^\alpha = \{f(x, y) : x \in [u]^\alpha, y \in [v]^\alpha\},$$

pour tous  $u, v \in E^n$ , i.e. si  $[w]^\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+]$ , alors

$$w_\alpha^- = \inf \{f(x, y) : x \in [u]^\alpha, y \in [v]^\alpha\},$$

$$w_\alpha^+ = \sup \{f(x, y) : x \in [u]^\alpha, y \in [v]^\alpha\}.$$

**Exemple 1.5.2.** Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par  $f(x, y) = x + y$ .

On considère les ensembles flous de  $\mathbb{R}$  :

$$A = 0.4/3 + 0.5/4 + 1/5 + 0.5/6 + 0.2/7$$

$$B = 0.2/6 + 0.5/7 + 1/8 + 0.5/9 + 0.2/10.$$

Calculons le degré d'appartenance de  $z = 10$  dans  $\widehat{f}(A, B)$  :

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{f}(A,B)}(10) &= \sup_{\{x+y=10\}} \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \\ &= \max \{\min \{\mu_A(3), \mu_B(7)\}, \min \{\mu_A(4), \mu_B(6)\}\} \\ &= \max\{0.4; 0.2\} = 0.4. \end{aligned}$$

## 1.6 Arithmétiques avec les nombres flous

Les opérations arithmétiques pour les nombres flous sont liées aux opérations arithmétiques des intervalles. On liste quelques opérations pour les intervalles fermés sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ .

### 1.6.1 Opérations arithmétiques des intervalles

Soit  $\lambda$  un nombre réel et,  $A$  et  $B$  deux intervalles fermés sur la droite réelle donnés par

$$A = [a_1, a_2] \text{ et } B = [b_1, b_2].$$

**Définition 1.6.1.** Les opérations arithmétiques entre les intervalles peuvent être définies comme suit :

1. La somme entre  $A$  et  $B$  est l'intervalle

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

2. La différence entre  $A$  et  $B$  est l'intervalle

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1].$$

3. La multiplication de  $A$  par un scalaire  $\lambda$  est l'intervalle

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & \text{si } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

4. La multiplication de  $A$  par  $B$  est l'intervalle

$$A.B = [\min P, \max P],$$

$$\text{où } P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}.$$

5. Le quotient de  $A$  par  $B$ , si  $0 \notin B$ , est l'intervalle

$$A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[ \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right].$$

Notons que les opérations arithmétiques pour les intervalles prolongent les opérations pour les nombres réels. Pour voir cela, il suffit d'observer que chaque nombre réel peut être considéré comme un intervalle fermé avec des points d'extrémités égaux. Aussi, les fonctions d'appartenance obtenues par les opérations arithmétiques des intervalles peuvent être dérivées directement à partir des opérations des nombres réels. Une telle procédure utilise le principe d'extension, qui sera un outil pour obtenir les opérations arithmétiques des nombres flous.

Considérons une opération binaire arbitraire " $\otimes$ " entre les nombres réels. Soient  $\chi_A$  et  $\chi_B$  les fonctions caractéristiques des intervalles  $A$  et  $B$ , respectivement. Le théorème suivant nous donne les opérations arithmétiques des intervalles par le principe d'extension.

**Théorème 1.6.1. (Principe d'extension pour les intervalles réels)** Soient  $A$  et  $B$  deux intervalles fermés de  $\mathbb{R}$  et  $\otimes$  l'une des opérations arithmétiques entre les nombres réels. Alors

$$\chi_{A \otimes B}(z) = \sup_{\{(x,y):x \otimes y=z\}} \min \{\chi_A(x), \chi_B(y)\}.$$

Il est simple de vérifier que

$$\min(\chi_A(x), \chi_B(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ et } y \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \text{ ou } y \notin B. \end{cases}$$

Ainsi, pour le cas de la somme ( $\otimes = +$ ), on a

$$\sup_{\{(x,y):x+y=z\}} \min \{\chi_A(x), \chi_B(y)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in A + B \\ 0 & \text{si } z \notin A + B. \end{cases}$$

Les autres cas peuvent être obtenus d'une manière analogue.

Une conséquence importante du théorème 1.6.1 pour les opérations avec les nombres flous est le corollaire suivant.

**Corollaire 1.6.1.** Les  $\alpha$ -coupes de l'ensemble  $A + B$  avec la fonction caractéristique  $\chi_{A+B}$  sont données par

$$[A + B]^\alpha = A + B,$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

Rappelons que les intervalles  $A$  et  $B$  sont des ensembles flous de la droite réelle, alors le résultat de ce corollaire est une conséquence immédiate de la définition d'une fonction caractéristique d'un ensemble classique.

Les opérations arithmétiques pour les nombres flous peuvent être définies à partir du principe d'extension pour les ensembles flous d'une manière analogue. En fait, ce sont des cas particuliers du principe d'extension où les fonctions qui doivent être prolongées sont des opérations traditionnelles pour des nombres réels.

## 1.6.2 Opérations arithmétiques des nombres flous

Les définitions suivantes peuvent être interprétées comme des cas particuliers du principe d'extension, à la fois pour une fonction d'une et deux variables.

**Définition 1.6.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux nombres flous et  $\lambda$  un nombre réel.

1. La somme des nombres flous  $A$  et  $B$  est le nombre flou  $A + B$ , dont la fonction d'appartenance est

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{\phi(z)} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \},$$

où  $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$ .

2. La multiplication de  $A$  par un scalaire  $\lambda$  est le nombre flou  $\lambda A$ , dont la fonction d'appartenance est

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda A}(z) &= \begin{cases} \sup_{\{x:\lambda x=z\}} [\mu_A(x)] & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_A(\lambda^{-1}z) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\chi_{\{0\}}$  est la fonction caractéristique de  $\{0\}$ .

3. La différence  $A - B$  est le nombre flou dont la fonction d'appartenance est donnée par

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{\phi(z)} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \},$$

où  $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$ .

4. La multiplication de  $A$  par  $B$  est le nombre flou  $A.B$ , dont la fonction d'appartenance est donnée par

$$\mu_{A.B}(z) = \sup_{\phi(z)} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \},$$

où  $\phi(z) = \{(x, y) : xy = z\}$ .

5. Le quotient est le nombre flou  $A/B$  dont la fonction d'appartenance est

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{\phi(z)} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \},$$

où  $\phi(z) = \{(x, y) : x/y = z\}$  et  $0 \notin \text{supp}(B)$ .

Le théorème 1.6.2 ci-dessous garantit que le résultat des opérations arithmétiques entre les nombres flous est un nombre flou. De plus, il généralise le corollaire 1.6.1.

**Théorème 1.6.2.** Les  $\alpha$ -coupes de l'ensemble flou  $A \otimes B$  sont données par

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha,$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , où  $\otimes$  est l'une des opérations  $\{+, -, \times, \div\}$ .

*Démonstration.* voir [24, 36, 50, 52]. □

La combinaison des théorème 1.5.1 et 1.6.2 présente "des méthodes" pour obtenir les résultats de chaque opération entre les nombres flous. On remarque encore que les  $\alpha$ -coupes d'un nombre flou sont toujours un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  donné par :

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+],$$

avec,  $a_\alpha^- = \min \{\mu_A^{-1}(\alpha)\}$  et  $a_\alpha^+ = \max \{\mu_A^{-1}(\alpha)\}$ , où  $\mu_A^{-1}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = \alpha\}$ . Dans la suite, on illustre ces "méthodes" pratiques".

**Proposition 1.6.1.** Soient  $A$  et  $B$  deux nombres flous avec les  $\alpha$ -coupes respectivement données par

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+] \text{ et } [B]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+].$$

Alors on a les propriétés suivantes :

1. La somme de  $A$  et  $B$  est le nombre flou  $A + B$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+].$$

2. La différence de  $A$  et  $B$  est le nombre flou  $A - B$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-].$$

3. La multiplication de  $A$  par un scalaire  $\lambda$  est le nombre flou  $\lambda A$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_\alpha^-, \lambda a_\alpha^+] & \text{si } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_\alpha^+, \lambda a_\alpha^-] & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

4. La multiplication de  $A$  par  $B$  est le nombre flou  $A.B$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[A.B]^\alpha = [A]^\alpha . [B]^\alpha = [\min P^\alpha, \max P^\alpha],$$

$$\text{où } P^\alpha = \{a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+\}.$$

5. La division de  $A$  par  $B$ , si  $0 \notin \text{Supp}(B)$ , est le nombre flou  $A/B$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$\left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_\alpha^-, a_\alpha^+] \cdot \left[ \frac{1}{b_\alpha^+}, \frac{1}{b_\alpha^-} \right].$$

**Exemple 1.6.1.** Considérons les expressions "à peu près 2" et "à peu près 4" et soient  $A$  et  $B$  les nombres flous triangulaires qui indiquent ces expressions. Ainsi, on définit

$$A = (1; 2; 3) \text{ et } B = (3; 4; 5).$$

D'après la formule (1.2),

$$[A]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha] \text{ et } [B]^\alpha = [3 + \alpha, 5 - \alpha].$$

Alors d'après la proposition 1.6.1 on aura

1.  $[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$ .  
Donc  $A + B = (4; 6; 8)$ ;
2.  $[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$ .  
Donc  $A - B = (-4; -2; 0)$ ;
3.  $[4.A]^\alpha = 4[A]^\alpha = [4 + 4\alpha, 12 - 4\alpha]$ .  
Donc  $4A = (4; 8; 12)$ ;
4.  $[A.B]^\alpha = [A]^\alpha.[B]^\alpha = [(1 + \alpha)(3 + \alpha), (3 - \alpha)(5 - \alpha)]$ ;
5.  $\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [(1 + \alpha)/(5 - \alpha), (3 - \alpha)/(3 + \alpha)]$ ;

Notons que les nombres flous obtenus en (4) et (5) ne sont pas triangulaires. Alors que, il est facile de vérifier que, la somme, la différence et la multiplication par un scalaire donnent un nombre flou triangulaire.

**Exemple 1.6.2.** On suppose qu'un voyage en bus de Casablanca à El Jadida est soumis à ce qui suit :

- La distance entre villes est à peu près 100  $Km$  ;
- La vitesse ne peut pas dépasser 120  $Km/h$  ;
- Le trafic est généralement intense et aussi la vitesse diminue dans les stations de péage ;
- Le bus quitte habituellement Casablanca en retard, mais le retard ne dépasse jamais plus de 30  $min$ .

**Question :** Quel est le temps total  $T$  passé en voyage de Casablanca à El Jadida en bus ?

La solution de ce problème d'un point de vue mathématique classique avec une réponse : Un nombre réel exacte est impossible car nous avons juste des informations partielles et des rapports non contrôlables. Une approche intuitive pour résoudre ce problème qui peut être répondu par une personne interrogée sur la solution de ce problème, peut être quelque chose comme : "Le temps total est juste un peu plus d'une heure" ou "entre

une heure et une heure et demi". Ces réponses peuvent être fondées sur l'expérience personnelle de ceux qui ont fait face à des situations similaires. Le raisonnement peut être le suivant :

Ce bus va vite sur la route, mais le trafic intense et les péages force obligent le bus à ralentir, d'autre part, le bus quitte habituellement la gare en retard.

Par conséquent, si nous voulons une valeur précise (nombre réel) pour la réponse, nous devons adopter des valeurs exactes pour les données. Par exemple , une vitesse moyenne de  $90 \text{ Km/h}$  et un délais de  $15 \text{ min}$  ( $T_1$ ), la réponse est :

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= 15 \text{ min} + 1\text{h } 6.66 \text{ min} \\ &= 1.36\text{h}. \end{aligned}$$

Mais l'idée ici est de proposer un modèle mathématique pour cette "arithmétique intuitive" qui permet aux gens de calculer avec des données imprécises (comme celles de notre problème) pour obtenir un résultat avec des informations basées sur des nombres flous, même s'ils peuvent être des réponses linguistiques et en même temps informatifs et numériques. Par conséquent, nous voulons un modèle qui permet ce type de raisonnement utilisé par les gens.

On aborde cet exemple d'un point de vue théorique flou.

- Puisque la distance ( $D$ ) est approximative, on peut considérer un nombre flou à peu près  $100 \text{ Km}$ . Il peut s'agir par exemple d'un nombre triangulaire  $D = (90; 100; 110)$ , dont la fonction d'appartenance est

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 90 \\ \frac{x}{10} - 9 & \text{si } 90 < x \leq 100 \\ 11 - \frac{x}{10} & \text{si } 100 < x \leq 110 \\ 0 & \text{si } x > 110 \end{cases}$$

et les  $\alpha$ -coupes sont données par

$$[D]^\alpha = [90 + 10\alpha, 110 - 10\alpha].$$

- La vitesse de bus ( $V$ ) peut être également modélisée par un nombre flou triangulaire. Nous tenons compte que la vitesse ne dépasse jamais  $120 \text{ Km/h}$  et que nous avons des vitesses réduites dans la route, on peut supposer que  $V = (30; 100; 120)$ , dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[V]^\alpha = [30 + 70\alpha, 120 - 20\alpha].$$

- Le fait que le bus quitte habituellement la gare en retard indique qu'on devrait avoir un temps supplémentaire ( $T_1$ ) qui ne dépasse pas une demi-heure. Ce temps peut être modélisé par le nombre flou triangulaire  $T_1 = (0; 0; 0.5)$ , dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[T_1]^\alpha = [0, 0.5 - 0.5\alpha] = \left[0, \frac{1 - \alpha}{2}\right].$$

Dans la physique, le temps passé sur la route ( $T_2$ ) est obtenu par le nombre flou

$$T_2 = \frac{D}{V}.$$

D'après la proposition 1.6.1 les  $\alpha$ -coupes de  $T_2$  sont

$$\begin{aligned} [T_2]^\alpha &= [90 + 10\alpha, 110 - 10\alpha] \cdot \left[\frac{1}{120 - 20\alpha}, \frac{1}{30 + 70\alpha}\right] \\ &= \left[\frac{90 + 10\alpha}{120 - 20\alpha}, \frac{110 - 10\alpha}{30 + 70\alpha}\right] \end{aligned}$$

Par conséquent, le temps total ( $T$ ) est donné par le nombre flou  $T = T_1 + T_2$ , dont les  $\alpha$ -coupes sont données par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} [T]^\alpha &= \left[0, \frac{1 - \alpha}{2}\right] + \left[\frac{90 + 10\alpha}{120 - 20\alpha}, \frac{110 - 10\alpha}{30 + 70\alpha}\right] \\ &= \left[\frac{90 + 10\alpha}{120 - 20\alpha}, \frac{1 - \alpha}{2} + \frac{110 - 10\alpha}{30 + 70\alpha}\right] \\ &= [f(\alpha), g(\alpha)], \end{aligned}$$

est la solution du problème qui comprend les temps entre  $\frac{3}{4}h$  et  $\frac{25}{6}h$ . On peut également observer que le temps avec la plus grande possibilité ( $\alpha = 1$ ) est  $T = 1h$ . Le temps  $t = 1.36h$  donné au début de la discussion (avec des données précises) aurait un degré d'appartenance de ( $\alpha^* \simeq 0.8$ ) dans l'ensemble de temps total  $T$ , puisque

$$1.36 = \frac{1 - \alpha^*}{2} + \frac{110 - 10\alpha^*}{30 + 70\alpha^*}.$$

## 1.7 Continuité, Différentiabilité et Intégrabilité des fonctions floues

### 1.7.1 Différence de Hukuhara

**Définition 1.7.1.** Pour  $u, v \in E^n$ , s'il existe un élément  $w \in E^n$  tel que  $u = v + w$ , alors  $w$  s'appelle la différence de Hukuhara de  $u$  et  $v$  notée par  $u \ominus v$  ou tout simplement  $u - v$ .

**Remarque 1.7.1.** La différence de Hukuhara n'existe pas toujours, mais si elle existe alors elle est unique.



Soient  $A$  et  $B$  deux nombres flous. S'il existe la différence de Hukuhara de  $A$  et  $B$ , alors en terme des  $\alpha$ -coupes, cela équivalent à dire que, si

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+], \quad [B]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$$

Alors

$$[A \ominus B]^\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Puisque,

$$[A - B]^\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-],$$

Par conséquent

$$A - B = A \ominus B \Leftrightarrow b_\alpha^- = b_\alpha^+,$$

c'est-à-dire

$$A - B = A \ominus B \Leftrightarrow B \in \mathbb{R}.$$

Notons que, en général

$$A - B = A + (-1)B \neq A \ominus B.$$

On peut généraliser cette différence de Hukuhara à travers la définition suivante.

**Définition 1.7.2.** La différence de Hukuhara généralisée de  $u, v \in E^n$  est un élément  $w \in E^n$  noté  $u \ominus_g v$  défini par

$$u \ominus_g v = w \Leftrightarrow \begin{cases} (1) u = v + w \\ \text{ou} \\ (2) v = u + (-1)w \end{cases}$$

**Remarque 1.7.2.** 1. La différence de Hukuhara généralisée existe toujours.

2. Il est possible que les deux conditions (1) et (2) aient lieu simultanément.

## 1.7.2 Continuité

**Définition 1.7.3.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E^n$  une fonction, et soit  $t_0$  un point de  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est continue au point  $t_0$  si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| < \eta \Rightarrow D(f(t), f(t_0)) < \epsilon.$$

### 1.7.3 Différentiabilité

Soit  $J = [a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.7.4.** Une fonction  $F : J \longrightarrow E^n$  est dite différentiable en  $t_0 \in J$ , s'il existe un élément  $F'(t_0) \in E^n$  tel que les limites suivantes

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h}$$

existent et sont égales à  $F'(t_0)$ .

Aux bornes  $a$  (respectivement  $b$ ) on considère seulement la dérivée à droite (respectivement à gauche).

**Remarque 1.7.3.** Notons que l'existence des deux limites précédentes nécessite l'existence des deux différences au sens de Hukuhara  $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$  et  $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ , pour  $h > 0$  assez petit.

On considère ici seulement le cas unidimensionnel, c'est-à-dire le cas où la fonction est définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec des valeurs dans l'ensemble des nombres flous :

$$u : [a, b] \longrightarrow E^1, \quad a \geq 0.$$

Pour le cas unidimensionnel, on définit la dérivée de  $u(\cdot)$  à partir de ses  $\alpha$ -coupes.

Nous rappelons que la fonction  $u$  associant un nombre flou  $u(t)$  à chaque nombre réel  $t$  est bien définie si et seulement si, pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$  il existe des fonctions réelles

$$u_\alpha^-, u_\alpha^+ : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que les  $\alpha$ -coupes de  $u(t)$  sont  $[u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(t)]$ , c'est-à-dire

$$[u(t)]^\alpha = [u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(t)]$$

Avant de présenter les concepts de la dérivée et l'intégrabilité, on désigne par  $u'(t)$  la dérivée et  $\int_a^b u(t)dt$  l'intégrale de la fonction floue  $u : J \longrightarrow E^1$ .

**Remarque 1.7.4.** (Dérivée de Hukuhara)

La fonction floue  $u' : J \longrightarrow E^1$  dont les  $\alpha$ -coupes sont données par :

$$[u'(t)]^\alpha = \left[ (u_\alpha^-)'(t), (u_\alpha^+)'(t) \right], \quad (1.8)$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , est la dérivée de la fonction floue  $u(\cdot)$ , que nous appelons la dérivée de Hukuhara, nous supposons l'existence des dérivées classiques  $(u_\alpha^-)'(t)$  et  $(u_\alpha^+)'(t)$ .

**Théorème 1.7.1.** ([32]) Soit  $F : J \longrightarrow E^n$  une fonction différentiable, alors elle est continue.

Le théorème suivant est important pour l'étude des équations différentielles floues.

**Théorème 1.7.2.** ([32]) Si  $F, G : J \longrightarrow E^1$  sont des fonctions différentiables et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

1.  $F$  et  $G$  sont continues pour la distance  $D$  ;
2.  $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$  ;
3.  $(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$ .

**Remarque 1.7.5.** Notons que, si  $F(t) = c.f(t)$ ,  $c \in E^1$  et  $f : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction avec  $f'(t) < 0$ , alors  $F$  n'est pas différentiable.

On donne dans la suite une définition générale de la différentiabilité pour les applications floues.

**Définition 1.7.5.** ([2, 3])

Soit  $F : J \longrightarrow E^1$  et  $t_0 \in J$ . On dit que  $F$  est fortement différentiable généralisée en  $t_0$ , s'il existe un élément  $F'(t_0) \in E^1$  tel que, pour  $h > 0$  suffisamment petit, on a l'une des propriétés suivantes :

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0),$$

ou

2.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0 - h) - F(t_0)}{-h} = F'(t_0).$$

**Théorème 1.7.3.** ([11, 32]) Soit  $F : J \longrightarrow E^1$ , on note  $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors

1. Si  $F$  est différentiable pour la première forme (1), alors  $f_\alpha(t)$  et  $g_\alpha(t)$  sont des fonctions différentiables et

$$[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)].$$

2. Si  $F$  est différentiable pour la deuxième forme (2), alors  $f_\alpha(t)$  et  $g_\alpha(t)$  sont des fonctions différentiables et

$$[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)].$$

### 1.7.4 Intégrabilité

Dans cette partie, on donne quelques résultats concernant la mesurabilité et l'intégrabilité des fonctions à valeurs floues.

- Définition 1.7.6.**
1. Une application  $F : J \rightarrow E^n$  est dite fortement mesurable si, pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , la fonction  $F_\alpha : J \rightarrow \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$  définie par  $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$  est Lebesgue mesurable.
  2. Une application  $F : J \rightarrow E^n$  est dite intégrable bornée s'il existe une fonction intégrable  $k$  telle que :

$$\|x\| \leq k(t), \forall x \in F_0(t)$$

**Définition 1.7.7.** Soit  $F : J \rightarrow E^n$ . L'intégrale de  $F$  sur  $J$  notée  $\int_J F(t)dt$  où  $\int_a^b F(t)dt$ , est définie par l'équation

$$\left[ \int_J F(t)dt \right]^\alpha = \int_J F_\alpha(t)dt = \left\{ \int_J f(t)dt, f : J \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est une sélection mesurable de } F_\alpha \right\}$$

pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$ .

De plus, une fonction fortement mesurable et intégrable bornée est dite intégrable sur  $J$  lorsque  $\int_J F(t)dt \in E^n$ .

**Théorème 1.7.4.** ([32]) Soient  $F, G : J \rightarrow E^n$  deux fonctions intégrables et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors

1.  $\int_J (F(t) + G(t))dt = \int_J F(t)dt + \int_J G(t)dt.$
2.  $\int_J \lambda F(t)dt = \lambda \int_J F(t)dt.$
3. La fonction  $D(F, G) : t \mapsto D(F(t), G(t))$  est intégrable sur  $J$ .
4.  $D\left(\int_J F(t)dt, \int_J G(t)dt\right) \leq \int_J D(F, G)(t)dt.$

Le théorème suivant est une version du théorème fondamentale du calcul pour le cas flou, en utilisant les concepts de différentiabilité et intégrabilité présentés ci-dessus.

**Théorème 1.7.5.** [32, 55]) Soit  $f : [a, b] \rightarrow E^n$  une fonction continue, alors l'application  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est différentiable en tout point  $x$  de  $[a, b]$ , et on a

$$F'(x) = f(x); x \in [a, b].$$

De plus, le résultat suivant est vérifié :

**Théorème 1.7.6.** ([32]) Soit  $F : [a, b] \longrightarrow E^1$  une fonction intégrable, alors pour tout  $c \in [a, b]$  on a

$$\int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt = \int_a^b F(t)dt. \quad (1.9)$$

L'intégrale de  $u : [a, b] \longrightarrow E^1$  est également définie par ses  $\alpha$ -coupes.

**Définition 1.7.8.** L'intégrale de  $u : [a, b] \longrightarrow E^1$ , notée  $\int_a^b u(t)dt$ , est le nombre flou avec les  $\alpha$ -coupes :

$$\left[ \int_a^b u(t)dt \right]^\alpha = \left[ \int_a^b u_\alpha^-(t)dt, \int_a^b u_\alpha^+(t)dt \right], \quad (1.10)$$

où  $\int_a^b u_\alpha^-(t)dt$  et  $\int_a^b u_\alpha^+(t)dt$  sont les intégrales de Riemann des fonctions réelles  $u_\alpha^-(t)$  et  $u_\alpha^+(t)$ .

**Exemple 1.7.1.** Considérons la fonction floue  $u(t) = At$ ,  $t \geq 0$ , où  $A$  est un nombre flou, tel que les  $\alpha$ -coupes sont données par les intervalles

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+].$$

On a

$$[u(t)]^\alpha = [u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(t)] = [a_\alpha^- t, a_\alpha^+ t].$$

Alors,

$$\begin{aligned} [u'(t)]^\alpha &= [(u_\alpha^-)'(t), (u_\alpha^+)'(t)] \\ &= [(a_\alpha^- t)', (a_\alpha^+ t)'] \\ &= [a_\alpha^-, a_\alpha^+] = [A]^\alpha. \end{aligned}$$

Donc,

$$u'(t) = A.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left[ \int_a^b u(t)dt \right]^\alpha &= \left[ \int_a^b u_\alpha^-(t)dt, \int_a^b u_\alpha^+(t)dt \right] \\ &= \left[ \int_a^b a_\alpha^- t dt, \int_a^b a_\alpha^+ t dt \right] \\ &= \left[ a_\alpha^- \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right), a_\alpha^+ \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right] \\ &= \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) [a_\alpha^-, a_\alpha^+] \\ &= \left( \int_a^b t dt \right) [A]^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_a^b u(t)dt = \int_a^b Atdt = A \int_a^b tdt = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) A.$$

Les théorèmes précédents nous donnent les bases nécessaires pour étudier les équations différentielles floues.

## 1.8 Opérateurs flous

Dans cette partie, on considère les éléments de base de la théorie des opérateurs sur l'espace métrique complet introduit dans la deuxième section.

**Définition 1.8.1.** On dit qu'un opérateur  $A : E^n \longrightarrow E^n$  est linéaire si

$$\begin{cases} A(x + y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) = \lambda A(x) \end{cases}$$

Pour tous  $x, y \in E^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.8.1.** Si  $A : E^n \longrightarrow E^n$  est linéaire et continu en  $\tilde{0}$ , n'implique pas que  $A$  est continu en chaque  $x \in E^n$ , puisque on a pas toujours  $x_0 = (x_0 - x) + x$ .

**Théorème 1.8.1.** ([26]) Si  $A : E^n \longrightarrow E^n$  est linéaire, alors  $A$  est continu en  $\tilde{0}$  si et seulement si, il existe  $M > 0$  telle que

$$\|A(x)\|_{\mathcal{F}} \leq M\|x\|_{\mathcal{F}}, \forall x \in E^n.$$

Soit  $A : E^n \longrightarrow E^n$  un opérateur linéaire et continu en  $\tilde{0}$ , on note

$$\mathcal{M}_A := \{M > 0 : \|A(x)\|_{\mathcal{F}} \leq M\|x\|_{\mathcal{F}}, \forall x \in E^n\},$$

et  $\|A\| = \inf_M \mathcal{M}_A$ .

**Théorème 1.8.2.** ([26]) Si  $A : E^n \longrightarrow E^n$  est un opérateur linéaire et continu en  $\tilde{0}$ , alors

$$\|A(x)\|_{\mathcal{F}} \leq \|A\|\|x\|_{\mathcal{F}}.$$

pour tout  $x \in E^n$ , et

$$\|A\| = \sup \{\|A(x)\|_{\mathcal{F}}; x \in E^n, \|x\|_{\mathcal{F}} \leq 1\}.$$

**Corollaire 1.8.1.** Si  $A : E^n \longrightarrow E^n$  est additif ( $A(x + y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in E^n$ ), positivement homogène ( $A(\lambda x) = \lambda A(x), \forall x \in E^n, \lambda \geq 0$ ) et continu en  $\tilde{0}$ , alors

$$\|A(x)\|_{\mathcal{F}} \leq \| \|A\| \|x\|_{\mathcal{F}}, \forall x \in E^n.$$

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^+(E^n) &= \{A : E^n \longrightarrow E^n : A \text{ est additif, positivement homogène et continu en } \tilde{0}\}, \\ \mathcal{L}_0(E^n) &= \{A : E^n \longrightarrow E^n : A \text{ est linéaire et continu en } \tilde{0}\}, \end{aligned}$$

On considère la distance  $\Phi : \mathcal{L}_0^+(E^n) \times \mathcal{L}_0^+(E^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\Phi(A, B) = \sup \{D(A(x), B(x)) : \|x\|_{\mathcal{F}} \leq 1\} \quad \forall A, B \in \mathcal{L}_0^+(E^n).$$

**Remarque 1.8.2.** il est clair que,  $\Phi(A, \tilde{O}) = \| \|A\| \|$ ,  $A \in \mathcal{L}_0^+(E^n)$ , où  $\tilde{O} : E^n \longrightarrow E^n$  est donnée par  $\tilde{O}(x) = \tilde{0}, \forall x \in E^n$ .

**Théorème 1.8.3.** ([26])  $(\mathcal{L}_0^+(E^n), \Phi)$  est un espace métrique complet, de plus, si on définit

$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$  et  $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ , alors on a les propriétés suivantes

1.  $\Phi(A + B, C + D) \leq \Phi(A, C) + \Phi(B, D)$ ,
2.  $\Phi(kA, kB) = |k|\Phi(A, B)$ ,
3.  $\Phi(A, B) \leq \| \|A\| \| + \| \|B\| \|$ ,
4.  $\Phi(A + B, C) \leq \Phi(A, C) + \Phi(B, C)$ ,
5.  $\Phi(A + B, \tilde{O}) \leq \| \|A\| \| + \| \|B\| \|$ .

**Corollaire 1.8.2.** 1.  $(\mathcal{L}_0(E^n), \Phi)$  est un espace métrique complet.

2. Si on note

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^+(E^n) &= \{A \in \mathcal{L}_0^+(E^n) : A \text{ est continu pour tout } x \in E^n\}, \\ \mathcal{L}(E^n) &= \{A \in \mathcal{L}_0(E^n) : A \text{ est continu pour tout } x \in E^n\}, \end{aligned}$$

Alors,  $(\mathcal{L}^+(E^n), \Phi)$  et  $(\mathcal{L}(E^n), \Phi)$  sont des espaces métriques complets.

# Chapitre 2

## Systemes dynamiques et Semi-groupes d'operateurs

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la theorie des systemes dynamiques et semi-groupes sur un espace de Banach.

### 2.1 Systemes dynamiques

**Définition 2.1.1.** Soit  $X$  un espace métrique complet (le plus souvent, un espace de Banach),  $\varphi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ ,  $\varphi(t, x) := \varphi_t(x)$  vérifie

1.  $\varphi_0(x) = x$ ,  $x \in X$  ;
2.  $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$ , pour tous  $t, s \geq 0$ ,  $x \in X$  ;
3.  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \times X$ .

est le semi-système correspond à la paire  $(X, \varphi)$ . On dit que  $X$  est l'espace d'état du système (pour abrégé, on emploiera le terme "système" plutôt que semi-système) : chaque point de  $X$  est un état du système.

Quand les propriétés 1, 2 et 3 sont vérifiées pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$  (pas seulement dans  $\mathbb{R}^+$ ) on parle de système dynamique.

**Remarque 2.1.1.** Notons que dans ce cas en particulier on a

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x, \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbb{R} \times X.$$

Ceci signifie que  $\varphi_t(\cdot)$  est un homéomorphisme de  $X$  sur lui-même, dont l'inverse est  $\varphi_{-t}(\cdot)$ .



Dans de nombreux cas, l'application  $\varphi$  ne sera définie que sur une partie de  $\mathbb{R}^+ \times X$  (ou de  $\mathbb{R} \times X$ ). Il s'agit alors des systèmes locaux.

Précisément, on considèrera des systèmes définis à partir d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^+ \times X$ , et d'une application  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$  telle que :

1.  $\varphi_0(x) = x$ , pour tout  $x \in X$ , tel que  $(0, x) \in U$  ;
2. Si  $(t, x) \in U$ , et  $(s, \varphi_t(x)) \in U$ , alors  $(t + s, x) \in U$  et  $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$  ;
3.  $\varphi$  est continue sur son domaine.

**Exemple 2.1.1.** Soient  $X$  un espace de Banach, et  $f : X \longrightarrow X$  une application lipschitzienne.

Le problème de Cauchy associé à  $f$  est celui de déterminer pour toute  $x_0$  donnée dans  $X$  une fonction  $x(t)$  définie sur un voisinage de  $t = 0$ , continue et différentiable sur son domaine et telle que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sous l'hypothèse faite sur  $f$ , ce problème a pour toute  $x_0$  une et une seule solution  $x(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

L'application  $\varphi$  définie par  $\varphi_t(x_0) = x(t)$  définit un système dynamique sur  $X$ .

**Définition 2.1.2.** Soit  $\varphi$  un semi-système dynamique sur un espace  $X$ . Soit  $x$  dans  $X$ . On appelle solution issue de  $x$  l'application  $u$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $X$ , définie par :

$$u(t) = \varphi_t(x).$$

Plus généralement, une solution désigne une application  $u(t)$ , définie sur un intervalle  $J$  à valeurs dans  $X$ , et telle que pour tout  $t \in J$ , et tout  $s \geq 0$ , vérifiant  $t + s \in J$ , on a

$$u(t + s) = \varphi_s(u(t)).$$

Le terme "orbite" désigne généralement l'image d'une solution.

**Définition 2.1.3.** L'orbite passant par  $x \in X$  est l'ensemble  $\gamma(x)$  défini par

$$\gamma(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}.$$

**Définition 2.1.4.** On appelle point critique (ou point stationnaire). Tout point dont l'orbite associée se réduit à un singleton (le point lui même).

$x$  est un point critique si et seulement si  $\varphi_t(x) = x$ , pour tout  $t \geq 0$ .

**Exemple 2.1.2.** La solution nulle est un point critique dans tout semi-système dynamique associé à une équation différentielle linéaire.

**Définition 2.1.5.** Un point périodique et un point  $x$  tel qu'il existe un nombre  $\tau > 0$ , pour lequel

$$\varphi_{t+\tau}(x) = \varphi_t(x), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En fait, cette identité est équivalente à la relation

$$\varphi_\tau(x) = x.$$

**Définition 2.1.6.** On dit que  $x$  est un point double du système, si pour deux nombres  $t_1, t_2, t_1 < t_2$ , on a

$$\varphi_{t_1}(x) = \varphi_{t_2}(x).$$

**Remarque 2.1.2.** Notons que tout point double est un point périodique de période  $\tau = t_2 - t_1$ .

**Définition 2.1.7.** Soit  $x \in X$ . L'ensemble Oméga-limite de  $x$ , noté  $\omega(x)$ , est défini par

$$\omega(x) = \left\{ y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n}(x) : t_n \rightarrow +\infty, \text{ telle que } \varphi_{t_n}(x) \text{ converge} \right\}.$$

L'ensemble  $\omega(x)$  est un ensemble fermé, positivement invariant par  $\varphi$  (c'est à dire, pour  $y \in \omega(x)$ , et  $t \geq 0$ ,  $\varphi_t(y) \in \omega(x)$ ). Pour plus de détails voir [37].

## 2.2 Stabilité des systèmes dynamique

Dans cette partie, nous rappelons quelques résultats généraux sur la stabilité des systèmes dynamiques en termes de régions d'attraction.

**Définition 2.2.1.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $X$  et  $\varphi$  un système dynamique sur  $X$ .

1. On dit que  $M$  est positivement invariant, si pour chaque  $x \in M$ ,  $\varphi_t(x) \in M$ , pour tout  $t \geq 0$ .
2. On dit que  $M$  est invariant si  $M$  et  $X \setminus M$  sont positivement invariants.

**Définition 2.2.2.** Soit  $M$  un sous-ensemble fermé de  $X$ . On dit que  $M$  attire  $x$  (ou,  $M$  est un attracteur de  $x$ ) si pour tout voisinage  $V$  de  $M$ , il existe  $\tau$ , tel que  $\varphi_t(x) \in V$ ,  $\forall t \geq \tau$ .

**Définition 2.2.3.** On dit que  $M$  est un attracteur du semi-système dynamique si  $M$  attire tous les points de  $X$ .

**Définition 2.2.4.** Un sous-ensemble  $M$  est dit stable si tout voisinage de  $M$  contient un voisinage positivement invariant de  $M$ .

**Exemple 2.2.1.** On considère l'équation  $\frac{dx}{dt} = -x(t)$ ,  $0$  est stable.

**Proposition 2.2.1.** ([37]) Si  $M$  est stable, alors  $M$  est positivement invariant.

**Définition 2.2.5.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $X$ . On appelle région d'attraction de  $M$ , notée  $A(M)$ , l'ensemble des points  $x \in X$  tels que pour tout voisinage  $U$  de  $M$ , il existe  $\tau \geq 0$ , avec  $\varphi_t(x) \in U$ ,  $t \geq \tau$ .

On dit alors que  $M$  est un attracteur si  $A(M)$  est un voisinage de  $M$ .

**Remarque 2.2.1.** 1. Notons que  $A(M)$  est un ensemble invariant.

2. Si  $M$  est compact,

$$A(M) = \left\{ x, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi_t(x), M) = 0 \right\},$$

avec  $d$  une distance sur  $X$ .

**Définition 2.2.6.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $X$ . On dit que  $M$  est asymptotiquement stable si  $M$  est un attracteur stable.

Pour un point critique, la stabilité est exprimée habituellement sous la forme suivante :

**Définition 2.2.7.** Soit  $\bar{x}$  un point critique de  $\varphi$ . On dit que  $\bar{x}$  est stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $\eta > 0$ , tel que : si  $d(x, \bar{x}) < \eta$ , alors  $d(\varphi_t(x), \bar{x}) < \epsilon$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Notons tout d'abord que cette notion coïncide avec celle de stabilité donnée dans la définition 2.2.4.

## 2.3 Semi-groupes d'opérateurs

L'objectif recherché dans la construction des semi-groupes est la résolution des équations d'évolution, c'est-à-dire faisant intervenir la variable temporelle en adaptant la construction de l'exponentielle permettant, par exemple, de résoudre les équations différentielles

ordinaires homogènes à coefficients constants, qui peut se mettre sous la forme d'un système différentiel

$$\dot{Y}(t) = AY(t),$$

avec  $A$  une matrice.

La résolution de ce type d'équations est facile dans le cas d'une matrice  $A$  constante à l'aide de l'exponentielle d'une matrice

$$Y(t) = e^{tA}Y(0).$$

L'exponentielle de matrice est définie par la série convergente

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

c'est l'unique solution de l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = AS \\ S(0) = I_n \end{cases}$$

et vérifie la propriété suivante

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}.$$

Supposons que l'on s'intéresse maintenant à l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(0) = f \end{cases}$$

on est tenté de suivre la même voie qu'en dimension finie, et de définir l'exponentielle  $e^{t\Delta}$ .

Si l'exponentielle d'une application linéaire bornée sur un espace de Banach, même de dimension infinie, garde tout son sens comme somme d'une série absolument convergente, ce n'est pas le cas quand l'opérateur est non borné (par exemple le laplacien).

Il faut donc trouver une notion analogue à celle de l'exponentielle  $e^{tA}$  qui permet de considérer des opérateurs non bornés  $A$ . C'est la notion de semi-groupe basée sur les propriétés algébriques de l'exponentielle couplées avec une propriété de continuité.

Soit  $E$  un espace de Banach, on note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$ , soit  $\mathcal{L}(E)$  l'espace des applications linéaires bornées de  $E$  dans  $E$ , c'est également un espace de Banach.

**Définition 2.3.1.** L'application exponentielle est définie par

$$\begin{aligned} e : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ A &\longmapsto e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n. \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.1.** ([23]) L'application exponentielle est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{L}(E)$  et sa différentielle est donnée par

$$de^A(H) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{A^n H A^m}{(n+m)!} = \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A} dt.$$

Si  $u(t) = e^{tA} f$  avec  $f \in E$  alors  $u$  est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = f \end{cases}$$

**Théorème 2.3.2.** ([23]) Soit  $S$  une application continue de  $[0, +\infty[$  sur  $\mathcal{L}(E)$  qui vérifie

$$S(0) = I, S(t+s) = S(t)S(s),$$

pour tous  $t, s \geq 0$  alors il existe une application linéaire bornée  $A$  telle que  $S(t) = e^{tA}$ .

**Définition 2.3.2.** Un semi-groupe fortement continu est une fonction  $S : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$  telle que

1.  $S(0) = I$  et  $S(t+s) = S(t)S(s)$  pour tous  $t, s \geq 0$ ,
2. pour tout  $x \in E$ , la fonction à valeurs vectorielles  $t \longmapsto S(t)x$  est continue.

**Remarque 2.3.1.** La propriété de continuité se traduit de la manière suivante : pour tout  $t \geq 0$ , tout  $\epsilon > 0$  et pour tout  $x \in E$ , il existe  $\eta(x, \epsilon, t)$  tel que pour tout  $h \in [-\eta, \eta]$  on a  $\|S(t+h)x - S(t)x\| < \epsilon$ .

**Définition 2.3.3.** Un opérateur non-borné est la donnée d'un sous-espace vectoriel  $D(A)$  de  $E$ , appelé le domaine de l'opérateur, et d'une application linéaire  $A : D(A) \longrightarrow E$ . Souvent on n'indique pas le domaine  $D(A)$  et on parle d'opérateur non borné  $A$ , sous-entendu qu'un domaine  $D(A)$  lui est associé.

**Définition 2.3.4.** Soit  $S : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$  un semi-groupe fortement continu, le générateur infinitésimal de  $S$  est l'opérateur non borné défini de la manière suivante

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - S(0)x}{h} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - S(0)x}{h}, x \in D(A).$$

**Théorème 2.3.3.** ([23]) Soit  $S$  un semi-groupe fortement continu, il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  telles que  $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$ ,  $t \geq 0$

## 2.4 Semi-groupes fractionnaires conformes d'opérateurs

Nous allons donner les concepts de base et les résultats sur les semi-groupes fractionnaires conformes.

**Définition 2.4.1.** Soit  $\alpha \in (0, a]$ ,  $a > 0$ . Pour un espace de Banach  $X$ , une famille  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est dite un semi-groupe fractionnaire conforme fortement continu (ou  $\alpha$ -semi-groupe) si :

1.  $\pi(0) = I$ .
2.  $\pi(t + s)^{\frac{1}{\alpha}} = \pi(t^{\frac{1}{\alpha}})\pi(s^{\frac{1}{\alpha}})$ , pour tous  $t, s \geq 0$ .
3. Pour chaque  $x \in X$  fixé,

$$\pi(t)x \longrightarrow x \text{ quand } t \longrightarrow 0^+.$$

**Définition 2.4.2.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un  $\alpha$ -semi-groupe sur  $X$ , l'opérateur  $A : x \mapsto Ax$  défini par  $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)x$  sur

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)x \text{ existe} \right\},$$

avec

$$\pi^{(\alpha)}(t)x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})x - \pi(t)x}{\epsilon},$$

est dit le  $\alpha$ -générateur infinitésimal du  $\alpha$ -semi-groupe  $\pi(t)$ .

**Exemple 2.4.1.** Soit  $X$  un espace de Banach et  $A$  est un opérateur linéaire sur  $X$ . On définit la famille  $\pi(t) = e^{2\sqrt{t}A}$ . C'est un  $\frac{1}{2}$ -semi-groupe. En effet :

1.  $\pi(0) = e^{0A} = I$ .
2.  $\pi(s + t)^2 = e^{2\sqrt{(s+t)^2}A} = e^{2(s+t)A} = e^{2sA}e^{2tA} = \pi(s^2)\pi(t^2)$ .

Pour plus de détails sur les semi-groupes fractionnaires, vous pouvez voir [30, 35].

# Chapitre 3

## Systemes dynamiques flous

Dans ce chapitre, nous etudions les equations differentielles floues par plusieurs approches. Ensuite, nous introduisons le concept des systemes dynamiques flous. Aussi, nous etudions la stabilite de ces systemes dynamiques.

### 3.1 Equations differentielles floues (EDFs)

Dans cette section, on considere le probleme a valeur initiale flou (PVIF) suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in E^n \end{cases} \quad (3.1)$$

sous la differentiability du Hukuhara. La fonction  $f : \mathbb{R} \times E^n \rightarrow E^n$  est supposee continue.

Le lemme suivant transforme l'equation differentielle floue (3.1) en une equation integrale.

**Lemme 3.1.1.** Pour  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \times E^n \rightarrow E^n$  une fonction continue, l'equation differentielle (3.1) est equivalente a l'equation integrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (3.2)$$

sur un intervalle quelconque  $[t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ .

*Demonstration.* Supposons que  $x$  est une solution de l'equation differentielle (3.1). Ensuite, par integration, on obtient

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

et en utilisant le resultat

$$\int_a^b f'(s) ds = f(b) - f(a),$$

on obtient

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

i.e.,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Réciproquement, étant donnée une solution  $x$  de l'équation intégrale (3.2). On peut écrire

$$x(t+h) = x_0 + \int_{t_0}^{t+h} f(s, x(s)) ds,$$

pour  $h$  suffisamment petit, et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} D \left( \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, hf(t, x(t)) \right) &= D \left( \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, \int_t^{t+h} f(t, x(t)) ds \right) \\ &\leq \int_t^{t+h} D(f(s, x(s)), f(t, x(t))) ds \\ &\leq \int_t^{t+h} w(f(t, x(t)), h) ds \\ &\leq hw(f(t, x(t)), h), \end{aligned}$$

où  $w(f(t, x(t)), h)$  désigne le module de continuité de la fonction  $f(t, x(t))$  qui est une fonction continue en  $t \in [t_0, t_1]$ . Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} D \left( \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, f(t, x(t)) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} hw(f(t, x(t)), h) = 0,$$

et cela implique que  $x$  est une solution du problème (3.1).  $\square$

Dans Song-Wu-Lee [66], l'existence et l'unicité de la solution dans cette interprétation ont été prouvées. Cette approche est proche du théorème de Pickard-Lindelöf et l'utilisation du théorème de point fixe de Banach dans la démonstration. Des différentes approches basées sur les résultats d'Arzela-Ascoli se trouvent dans la littérature, mais il est dur généralement l'extraction d'une sous-suite bornée.

On montre d'abord que les fonctions Lipschitziennes sont également bornées, suite à Lupulescu.

**Lemme 3.1.2.** (Lupulescu [39]) Soit  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$  et supposons que  $f : R_0 \rightarrow E^n$  est continue et vérifie la condition de Lipschitz

$$D(f(t, x), f(t, y)) \leq LD(x, y), \quad \forall (t, x), (t, y) \in R_0.$$



Alors  $f$  est bornée, i.e., il existe  $M > 0$  tel que

$$D(f(t, x), \tilde{0}) \leq M.$$

*Démonstration.* On remarque que

$$\begin{aligned} D(f(t, x), \tilde{0}) &= D(f(t, x) + f(t, x_0), f(t, x_0)) \\ &\leq D(f(t, x), f(t, x_0)) + D(f(t, x_0), \tilde{0}). \end{aligned}$$

La fonction réelle  $D(f(t, x_0), \tilde{0})$  est bornée pour  $t \in [t_0, t_0 + p]$ , i.e., il existe  $M_1 > 0$  avec

$$D(f(t, x_0), \tilde{0}) \leq M_1.$$

On obtient

$$D(f(t, x), \tilde{0}) \leq LD(x, x_0) + M_1 \leq Lq + M_1 = M.$$

Ainsi  $f$  est bornée. □

**Théorème 3.1.1.** ([5, 39, 66]) Soit  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, p)$ ,  $p > 0$ ,  $x_0 \in E^1$  et  $f : R_0 \rightarrow E^1$  continue de sorte que la condition de Lipschitz soit vérifiée : il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$D(f(t, x), f(t, y)) \leq LD(x, y), \quad \forall (t, x), (t, y) \in R_0.$$

Alors Le PVIF

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in E^n \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + k]$  pour certain  $k > 0$ .

*Démonstration.* Considérons l'espace  $\mathcal{C}([t_0, t_0 + p], E^n)$ , et l'opérateur

$$\begin{aligned} P(x_0)(t) &= x_0, \\ P(x)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $P$  est bien défini. D'après le lemme 3.1.2, et la condition de Lipschitz,  $f$  est bornée et aussi  $P$  est borné,

$$\begin{aligned} D(P(x)(t), x_0) &\leq \int_{t_0}^t D(f(s, x(s)), \tilde{0}) ds \\ &\leq M(t - t_0), \end{aligned}$$

où  $M = \sup_{(t,x) \in R_0} D(f(t,x), \tilde{0})$  est assurée par le lemme 3.1.2. Soit  $d = \min \left\{ p, \frac{q}{M} \right\}$  et  $K_1 = \mathcal{C}([t_0, t_0 + d], \overline{B}(x_0, q))$ .

Considérons maintenant

$$P : K_1 \longrightarrow \mathcal{C}([t_0, t_0 + d], E^n).$$

On a

$$D(P(x)(t), x_0) \leq M(t - t_0) \leq Md \leq M \frac{q}{M} = q.$$

Ainsi, pour  $x_0 \in K_1$  donnée,  $P(x) \in K_1$ .

On remarque que  $K_1$  est un espace métrique complet considéré avec la distance uniforme, comme un sous espace fermé d'un espace métrique complet.

Maintenant, on montre que  $P$  est une contraction. En effet,

$$\begin{aligned} D(P(x)(t), P(y)(t)) &\leq \int_{t_0}^t D(f(s, x(s)), f(s, y(s))) ds \\ &\leq 2L(t - t_0)D(x, y). \end{aligned}$$

Maintenant, on choisit  $k = \min \left\{ d, \frac{1}{2L} \right\}$  et plus restrictive :  $P : K_2 \longrightarrow K_2$ , avec  $K_2 = \mathcal{C}([t_0, t_0 + k], \overline{B}(x_0, q))$ .

On obtient que  $P$  est une contraction. Du théorème de point fixe de Banach, il existe un point fixe  $x^* \in K_2$  avec  $P(x^*) = x^*$ . C'est-à-dire que  $x^*$  est une solution du lemme 3.1.1.

Finalement, à partir du lemme 3.1.1, on obtient que  $x^*$  est une solution du PVIF

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

pour  $t \in [t_0, t_0 + k]$ .

L'unicité découle de l'unicité du point fixe de  $P$ , qui est une conséquence du théorème de point fixe de Banach.  $\square$

Dans la suite, on démontre un résultat de caractérisation.

**Théorème 3.1.2.** (Bede [1]) Soit  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, p)$ ,  $p > 0$ ,  $x_0 \in E^n$  et  $f : R_0 \longrightarrow E^1$  continue telle que

$$[f(t, x)]^\alpha = [f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)], \quad \alpha \in [0, 1].$$

Si,  $f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)$ ,  $f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  sont équicontinues, i.e.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que

$$|f_\alpha^\pm(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) - f_\alpha^\pm(t, (x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+)| < \epsilon$$

quand

$$\| (t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) - (t, (x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+) \| < \delta,$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$ , et uniformément lipschitziennes par rapport à la deuxième et la troisième variable, c'est-à-dire il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$|f_\alpha^\pm(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) - f_\alpha^\pm(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)| < L(|x_\alpha^- - y_\alpha^-| + |x_\alpha^+ - y_\alpha^+|),$$

pour tous  $(t, x), (t, y) \in R_0$  et pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

Alors le problème (3.1) admet une solution unique définie sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + k]$  pour certain  $k > 0$ , et de plus la solution unique est de  $\alpha$ -coupes  $[x]^\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$  caractérisées par le système d'EDO

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Il est facile de voir que les conditions assurent l'existence et l'unicité des solutions pour le système (3.3) par le théorème classique de Picard-Lindel. De plus l'équicontinuité garantit que  $f$  est continue en tant que fonction à valeurs floues. La condition de Lipschitz uniforme entraîne la condition de Lipschitz dans le théorème 3.1.1 et donc l'existence d'une solution unique du problème (3.1).

Maintenant, on a une fonction différentiable  $x$  a des  $\alpha$ -coupes différentiables et

$$[x']^\alpha = [(x_\alpha^-)', (x_\alpha^+)], \alpha \in [0, 1].$$

Aussi, tenons compte les  $\alpha$ -coupes de l'équation  $x'(t) = f(t, x(t))$ , on obtient

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), \alpha \in [0, 1]. \end{cases}$$

Mais cette équation a une solution unique. En conclusion, on obtient que la solution unique du système (3.3) caractérise la solution unique du problème à valeur initiale flou (3.1).  $\square$

**Exemple 3.1.1.** On considère le PVIF

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2e^{-t}(-1, 0, 1) \\ x(0) = (-1, 0, 1). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que les conditions du théorème 3.1.1 et 3.1.2 sont vérifiées.

On cherche une solution triangulaire de la forme  $x = (x_0^-, x_1, x_0^+)$ .

En suite, on a

$$\begin{cases} (x_0^-)' = -x_0^+ - 2e^{-t} \\ x_1' = -x_1 \\ (x_0^+)' = -x_0^- + 2e^{-t}, \end{cases}$$

on obtient la solution

$$x(t) = (e^{-t} - 2e^t, 0, 2e^t - e^{-t}), \quad t \in (0, +\infty),$$

représentée dans la figure 3.1.

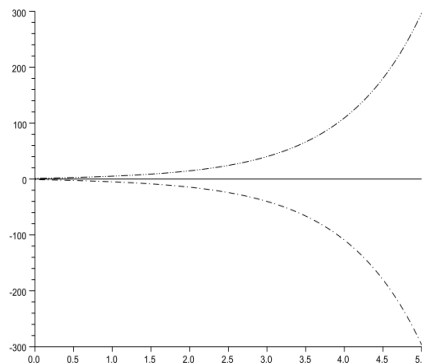


FIGURE 3.1 – Solution de l'équation différentielle floue

## 3.2 Problème à valeur initiale flou sur un intervalle $[a, b]$

On considère le problème à valeur initiale flou suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(a) = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $F : [a, b] \times E^1 \longrightarrow E^1$  et  $a > 0$ .

**Lemme 3.2.1.** Soit  $F : [a, b] \times E^1 \longrightarrow E^1$  une fonction continue. Alors la fonction  $u : [a, b] \longrightarrow E^1$  est une solution de (3.4) si, et seulement si, elle est continue et satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = u(a) + \int_a^t F(s, u(s)) ds. \quad (3.5)$$

A titre d'exemple, on considère  $u(t) = At$ . Nous avons vu dans l'exemple 1.7.1 que  $u'(t) = A$ . Donc

$$u(t) = Aa + \int_a^t A ds = u(a) + \int_a^t u'(s) ds.$$

**Corollaire 3.2.1.** Si  $u$  est une solution de (3.4), alors pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ , la fonction

$$d(t) = \text{diam}([u(t)]^\alpha) = u_\alpha^+(t) - u_\alpha^-(t),$$

est croissante.

*Démonstration.* D'après le lemme précédent on a,

$$\begin{aligned} [u(t)]^\alpha &= [u_\alpha^-(a), u_\alpha^+(a)] + \left[ \int_a^t F_\alpha^-(s, u(s)) ds, \int_a^t F_\alpha^+(s, u(s)) ds \right] \\ &= \left[ u_\alpha^-(a) + \int_a^t F_\alpha^-(s, u(s)) ds, u_\alpha^+(a) + \int_a^t F_\alpha^+(s, u(s)) ds \right] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{diam}([u(t)]^\alpha) &= u_\alpha^+(t) - u_\alpha^-(t) \\ &= (u_\alpha^+(a) - u_\alpha^-(a)) + \int_a^t (F_\alpha^+(s, u(s)) - F_\alpha^-(s, u(s))) ds, \end{aligned}$$

est croissant, car  $F_\alpha^+(s, u(s)) - F_\alpha^-(s, u(s)) \geq 0$ , pour tout  $s \in [a, b]$ .  $\square$

**Exemple 3.2.1.** Pour étudier quelque applications des équations différentielles floues. On suppose que dans le modèle Malthusien, seule la condition initiale est floue et on considère le taux de variation positif (**Population en expansion**) et le taux de variation négatif (**Population en rétraction**).

(a) On considère le modèle Malthusien flou avec un taux de variation positif  $\lambda > 0$ , population en expansion :

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = u_0 \in E^1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Supposons que  $[u(t)]^\alpha = [u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(t)]$  et que la condition initiale est floue et donnée par les  $\alpha$ -coupes

$$[u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha].$$

D'après la remarque 1.7.4, pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ , nous devons résoudre l'équation

$$\begin{cases} [u'(t)]^\alpha = \lambda [u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(t)] \\ u(0) = u_0 \in E^1 \text{ et } \lambda > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

En multipliant les nombres flous par un nombre réel positif  $\lambda$ , on a la solution de cette équation est obtenue à partir de la solution du système déterministe :

$$\begin{cases} (u_{\alpha}^{-})'(t) = \lambda u_{\alpha}^{-}(t), \text{ avec } u_{\alpha}^{-}(0) = u_{01}^{\alpha}, \\ (u_{\alpha}^{+})'(t) = \lambda u_{\alpha}^{+}(t), \text{ avec } u_{\alpha}^{+}(0) = u_{02}^{\alpha}. \end{cases}$$

Pour chaque  $\alpha$ , la solution du système (3.7) existe et donnée par :

$$\begin{cases} u_{\alpha}^{-}(t) = u_{01}^{\alpha} e^{\lambda t}, \\ u_{\alpha}^{+}(t) = u_{02}^{\alpha} e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Et

$$\begin{aligned} [u(t)]^{\alpha} = [u_{\alpha}^{-}(t), u_{\alpha}^{+}(t)] &= [u_{01}^{\alpha} e^{\lambda t}, u_{02}^{\alpha} e^{\lambda t}] \\ &= [u_{01}^{\alpha}, u_{02}^{\alpha}] e^{\lambda t} \\ &= [u_0]^{\alpha} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ .

**Remarque 3.2.1.** Si  $[u_0]^1$  est un intervalle de longueur nulle, c'est-à-dire  $u_{01} = u_{02} = x_0$ , alors  $[u(t)]^1$  se comporte comme la solution du modèle Malthusien déterministe, c'est-à-dire

$$[u(t)]^1 = x_0 e^{\lambda t}.$$

(b) On considère maintenant le modèle Malthusien flou avec un taux de variation négatif, population en rétraction :

$$\begin{cases} u'(t) = -\lambda u(t) \\ u(0) = u_0 \in E^1, \text{ et } \lambda > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

D'après la remarque 1.7.4, pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ , nous devons résoudre l'équation

$$[u'(t)]^{\alpha} = -\lambda [u_{\alpha}^{-}(t), u_{\alpha}^{+}(t)],$$

La multiplication d'un nombre négatif et un intervalle des  $\alpha$ -coupes donne :

$$\begin{cases} (u_{\alpha}^{-})'(t) = -\lambda u_{\alpha}^{+}(t), \text{ avec } u_{\alpha}^{-}(0) = u_{01}^{\alpha}, \\ (u_{\alpha}^{+})'(t) = -\lambda u_{\alpha}^{-}(t), \text{ avec } u_{\alpha}^{+}(0) = u_{02}^{\alpha}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dont la solution est

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{-}(t) &= \frac{u_{01}^{\alpha} - u_{02}^{\alpha}}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{01}^{\alpha} + u_{02}^{\alpha}}{2} e^{-\lambda t} \\ u_{\alpha}^{+}(t) &= \frac{u_{02}^{\alpha} - u_{01}^{\alpha}}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{01}^{\alpha} + u_{02}^{\alpha}}{2} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution du problème (3.10) est la fonction floue  $u(\cdot)$  avec les  $\alpha$ -coupes sont données par les équations ci-dessus.

**Remarque 3.2.2.** 1. Le diamètre de  $[u(t)]^\alpha$ , donné par

$$\text{diam}([u(t)]^\alpha) = u_\alpha^+(t) - u_\alpha^-(t) = (u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha) e^{\lambda t},$$

est toujours croissant en  $t$ , sauf si  $u_{02}^\alpha = u_{01}^\alpha$ , c'est-à-dire  $u_0 \in \mathbb{R}$ . c'est la critique majeure de la dérivée de Hukuhara. Il y a une difficulté pour définir le concept de stabilité, ainsi qu'un attracteur, avec ce type d'équations différentielles floues.

2. Résoudre  $u' = -\lambda u$  est différent de la résolution de  $u' + \lambda u = 0$ .

3. Si on a un problème de condition initiale flou dont le champ de direction est une extension d'un champ déterministe, alors chaque solution déterministe est une solution préférée, dans le sens qu'elle possède un degré d'appartenance égal à 1 sur l'ensemble des solutions floues.

Pour illustrer ce point, on considère l'équation Malthusienne floue précédente. Le problème déterministe associé est

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.11)$$

dont la solution est

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, si  $x_0 \in [u_0]^1$ , il est facile de voir que

$$u_\alpha^-(t) \leq x(t) \leq u_\alpha^+(t), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Cela signifie que  $x(t) \in [u(t)]^1$  pour tout  $t$ . Alors la solution déterministe a un degré d'appartenance égal à 1 dans l'ensemble des solutions floues. Par conséquent, c'est une solution préférée.

D'après la remarque 1, il y a une difficulté pour définir la stabilité pour ce type d'équation différentielle, puisque le diamètre des solutions augmente avec le temps pour tout  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Les chercheurs ont cherché à contourner le problème en utilisant d'autres méthodes pour étudier les systèmes dynamiques flous. Deux méthodes sont capables de résoudre le problème de croissance des diamètres des solutions pour certains problèmes de conditions initiales flous qui sont l'inclusion différentielle floue et la méthode du principe d'extension.

### 3.3 Problème de condition initiale flou généralisé

On continue notre étude des systèmes flous par les deux approches distinctes, par les inclusions différentielles floues et par le principe d'extension de Zadeh.

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, u(t)) \\ u(a) = u_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $F : [a, b] \times E^1 \longrightarrow E^1$ ,  $u_0 \in E^1$  et  $\frac{du}{dt}$  représente le taux de variation continu de la fonction  $u(\cdot)$  dans un certain sens.

Si  $\frac{du}{dt}$  est la dérivée de Hukuhara de la fonction  $u(\cdot)$ , l'étude du problème est réduite à ce que nous avons discuté dans la section précédente.

Une fonction  $u : [a, b] \longrightarrow E^1$  est une solution de (3.12), si et seulement si, elle satisfait l'équation (3.12) et  $u(a) = u_0$ . Pour ce problème généralisé, on définit, pour chaque  $t \geq 0$ , une famille de fonctions par

$$\begin{aligned} \varphi_t : E^1 &\longrightarrow E^1 \\ u_0 &\mapsto \varphi_t(u_0) := u(t, u_0), \end{aligned}$$

où  $u(t, u_0)$  est une solution de (3.12) à l'instant  $t$ , avec la condition initiale  $u(a) = u_0$ .

L'objectif dans la suite est de proposer deux façons d'obtenir la famille  $\varphi_t$ .

#### 3.3.1 Problème de condition initiale flou par inclusion différentielle

On commence par les inclusions différentielles comme approche alternative de la dérivée de Hukuhara. Pour étudier un problème à valeur initiale flou, le concept de la dérivée d'une fonction floue n'est pas utilisé. La dérivée utilisée est l'habituelle des fonctions déterministes et la solution floue de (3.12) est constituée à partir des fonctions déterministes. L'idée est la suivante :

Le champ  $F : [a, b] \times E^1 \longrightarrow E^1$  est tel que, pour chaque pair  $(t, u)$ , on a  $F(t, u) \in E^1$ , et donc la solution floue de (3.12) sera constituée de toutes les trajectoires déterministes qui satisfont les inclusions différentielles classiques

$$\begin{cases} x'(t) \in [F(t, x(t))]^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1] \\ x(a) \in [u_0]^\alpha. \end{cases} \quad (3.13)$$

Une fonction déterministe  $x_\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (3.12), avec un degré d'appartenance  $\alpha$ , si elle est absolument continue et satisfait (3.13) presque pour tout



$t \geq a$ .

Alors la solution floue de (3.12) est une fonction floue  $u : [a, b] \longrightarrow E^1$  dont les  $\alpha$ -coupes sont

$$[u]^\alpha = \{x_\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ solution de (3.13)}\}.$$

Sous certaines conditions de régularité sur  $F$ , Les ensembles  $[u]^\alpha$  satisfont le théorème 1.1.3, et la fonction  $u$  est bien définie (voir [15]).

Ainsi, pour chaque  $t$ , les fonctions  $\varphi_t : E^1 \longrightarrow E^1$  associées à (3.12) sont données par :

$$\varphi_t(u_0) = u(t, u_0),$$

où  $u$  est une solution de (3.12). Dans ce cas, les  $\alpha$ -coupes de  $\varphi_t(u_0)$  sont les intervalles  $[\varphi_t(u_0)]^\alpha$ .

On considère le modèle Malthusien pour illustrer les concepts présentés ici, et pour vérifier que les diamètres des  $\alpha$ -coupes des solutions  $[\varphi_t(u_0)]^\alpha$  croissent lentement pour les populations en expansion et décroissent pour les populations en rétraction.

**Exemple 3.3.1.** (Taux de croissance bien déterminé) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u_0 \in E^1$ , alors le Modèle de Malthus est de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \\ x_\alpha(0) \in [u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha], \end{cases} \quad (3.14)$$

dont la solution floue est formée par les fonctions déterministes

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(0)e^{\lambda t}, \text{ avec } x_\alpha(0) \in [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha].$$

Ainsi,

$$[\varphi_t(u_0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{\lambda t}, u_{02}^\alpha e^{\lambda t}] = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha] e^{\lambda t} = [u_0]^\alpha e^{\lambda t}.$$

Donc

$$\varphi_t(u_0) = u_0 e^{\lambda t}.$$

Les diamètres des  $\alpha$ -coupes de la solution floue  $\varphi_t(u_0)$  sont

$$diam([\varphi_t(u_0)]^\alpha) = (u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha) e^{\lambda t}.$$

Par conséquent, pour les populations en expansion ( $\lambda > 0$ ), on a le diamètre est croissant avec le temps  $t$ , et pour les populations en rétraction ( $\lambda < 0$ ), le diamètre est décroissant.

**Exemple 3.3.2.** (Taux de croissance et état initiale incertains) Si le taux de croissance et la condition initiale sont incertains, c'est-à-dire  $\Lambda \in E^1$ , avec  $[\Lambda]^\alpha = [\lambda_\alpha^-, \lambda_\alpha^+]$ , et  $u_0 \in E^1$ , alors le modèle Malthusien prend la forme

$$\begin{cases} x'(t) \in [\Lambda x(t)]^\alpha = x(t)[\lambda_\alpha^-, \lambda_\alpha^+] \\ x_\alpha(0) \in [u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha], \end{cases} \quad (3.15)$$

dont la solution floue est donnée par les fonctions déterministes :

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(0)e^{\lambda t}, \text{ avec } \lambda \in [\lambda_\alpha^-, \lambda_\alpha^+] \text{ et } x_\alpha(0) \in [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha].$$

Supposons que  $\lambda_\alpha^- > 0$  (**expansion forte**), on a

$$[\varphi_t(u_0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{\lambda_\alpha^- t}, u_{02}^\alpha e^{\lambda_\alpha^+ t}],$$

et dans ce cas,  $\text{diam}([\varphi_t(u_0)]^\alpha)$  croît avec le temps  $t$ , puisque  $\lambda_\alpha^+ > \lambda_\alpha^- > 0$ .

D'autre part, supposons que  $\lambda_\alpha^+ < 0$  (**rétraction forte**),

$$[\varphi_t(u_0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{\lambda_\alpha^+ t}, u_{02}^\alpha e^{\lambda_\alpha^- t}],$$

et dans ce cas,  $\text{diam}([\varphi_t(u_0)]^\alpha)$  décroît avec le temps  $t$ , puisque  $\lambda_\alpha^- < \lambda_\alpha^+ < 0$ .

### 3.3.2 Problème à valeur initiale flou avec l'extension de Zadeh

Selon cette interprétation, un PVIF est résolu comme suit : on considère l'EDO déterministe (crisp) qui conduit à l'équation floue considérée et la résoudre. Ensuite, la solution du PVIF est générée en utilisant le principe d'extension de Zadeh appliqué à la solution classique.

Donc, on commence avec une EDO classique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), a) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est un paramètre qui apparaît dans l'équation différentielle donnée.

Rappelons le résultat suivant concernant l'existence, l'unicité et la dépendance continue sur les paramètres et la valeur initiale d'une EDO.

**Théorème 3.3.1.** (Perko [53]) Soit  $f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times [a_0 - r, a_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe  $L_1$  telle que

$$|f(t, x, a) - f(t, y, a)| \leq L_1 |x - y|.$$

Supposons de plus que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la troisième variable, c'est-à-dire qu'il existe  $L_2$  telle que

$$|f(t, x, a) - f(t, x, b)| \leq L_2|a - b|.$$

Alors le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), a) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution unique. De plus, la solution unique dépend continuellement à la fois de l'état initial et des paramètres.

Soit  $\hat{f} : [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q) \times \overline{B}(a_0, r) \longrightarrow E^1$  (ici  $\overline{B}(x_0, q)$  et  $\overline{B}(a_0, r)$  sont des boules fermées dans  $E^1$ ) l'extension de Zadeh de la fonction  $f$ .

**Définition 3.3.1.** Soient  $A, X_0 \in E^n$  des nombres flous et  $\hat{f}$  l'extension de Zadeh de  $f$ . Le problème à valeur initiale flou

$$\begin{cases} X'(t) = \hat{f}(t, X(t), A) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

est dit avoir la solution  $X : [t_0, t_0 + p] \longrightarrow E^1$ , où  $X$  est l'extension de Zadeh de la solution  $x : [t_0, t_0 + p] \longrightarrow \mathbb{R}$  du problème classique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), a) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

En se basant sur le théorème précédent et le théorème 1.5.2, on obtient le résultat d'existence et unicité suivant.

**Théorème 3.3.2.** Soit  $f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times [a_0 - r, a_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe  $L_1$  telle que

$$|f(t, x, a) - f(t, y, a)| \leq L_1|x - y|.$$

Supposons de plus que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la troisième variable, c'est-à-dire qu'il existe  $L_2$  telle que

$$|f(t, x, a) - f(t, x, b)| \leq L_2|a - b|.$$

Alors la solution du problème

$$\begin{cases} X'(t) = \widehat{f}(t, X(t), A) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \quad (3.16)$$

est interprétée comme dans la définition 3.3.1 est bien définie et continue. De plus, ses  $\alpha$ -coupes sont données par

$$[X]^\alpha = x(t, [X_0]^\alpha, [A]^\alpha) = \{x(t, x_0, a) : x_0 \in [X_0]^\alpha, a \in [A]^\alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

où  $x(t, x_0, a)$  désigne l'unique solution du problème classique

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), a) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

*Démonstration.* D'après le théorème 3.3.1, le problème (3.17) admet une solution unique  $x(t, x_0, a)$  qui dépend continuellement de  $x_0$  et  $a$ .

D'après le théorème 1.5.2, l'extension de Zadeh de  $x(t, x_0, a)$  est unique, bien définie et continue. On la note par  $X(t, X_0, A)$ .

Aussi, à partir du théorème 1.5.2, on obtient ses  $\alpha$ -coupes, pour  $\alpha \in [0, 1]$

$$[X]^\alpha = x(t, [X_0]^\alpha, [A]^\alpha) = \{x(t, x_0, a) : x_0 \in [X_0]^\alpha, a \in [A]^\alpha\}.$$

□

**Exemple 3.3.3.** Considérons le PVIF simple suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -(1, 2, 3)x(t) \\ x(0) = (1, 2, 3), \end{cases}$$

avec des nombres flous triangulaires. On considère ce problème sous l'interprétation en utilisant le principe d'extension de Zadeh.

La solution du problème obtenue symboliquement à partir du problème à valeur initiale pour l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec la solution  $x(t) = x_0 e^{-at}$ .

En utilisant le principe d'extension de Zadeh, on obtient la solution floue

$$x(t) = (1, 2, 3)e^{-(1,2,3)t},$$

dont les  $\alpha$ -coupes sont  $[x]^\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ , avec

$$x_\alpha^-(t) = (1 + \alpha)e^{-(3-\alpha)t}, \quad x_\alpha^+(t) = (3 - \alpha)e^{-(1+\alpha)t},$$

qui existes pour  $t \in [0, 1]$ .

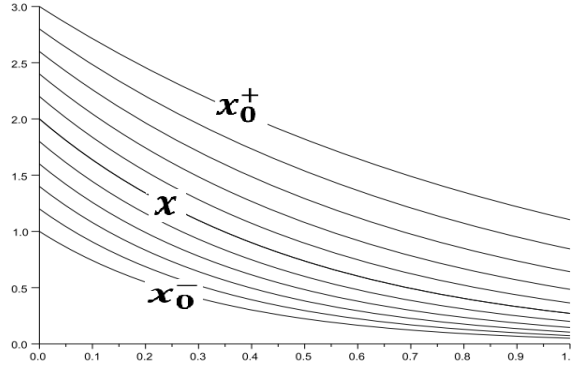


FIGURE 3.2 – La solution de l'équation différentielle floue basée sur l'extension Zadeh

Comme dans le cas d'inclusion différentielle floue, nous avons deux cas. Dans le premier cas, seule la condition initiale est donnée par un nombre flou. Dans le deuxième cas, on suppose que la condition initiale et/ou certains paramètres du problème sont/et flous.

### 3.3.2.1 Condition initiale floue

On considère que seule la condition initiale est floue. Dans ce cas, le problème est donné par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(a) = u_0 \in E^1, \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $f$  est continue.

On suppose que pour chaque condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le problème déterministe

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

admet une solution unique  $\phi_t$  alors, pour chaque  $t$ , la solution floue  $\varphi_t$  de (3.18) est définie comme l'extension de Zadeh de la solution déterministe  $\phi_t$ , c'est-à-dire

$$\text{Si } u_0 \in E^1 \text{ alors } \varphi_t(u_0) = \widehat{\phi}_t(u_0).$$

Dans ce cas, puisque  $\phi_t$  est continue par rapport à la condition initiale alors, d'après le théorème 1.5.1, on a

$$[\varphi_t(u_0)]^\alpha = \left[ \widehat{\phi}_t(u_0) \right]^\alpha = \phi_t([u_0]^\alpha) = \phi_t([u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]).$$

Notons que la formule ci-dessus indique que le degré d'appartenance de  $x_0$  à  $u_0$  est le même que celui de  $\phi_t(x_0)$  à  $\widehat{\phi}_t(u_0)$ , pour tout  $t$ . Avec cette procédure, on trouve la solution du modèle Malthusien.

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u_0 \in E^1$ , on a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x(t) \\ x(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.20)$$

Le flot déterministe du modèle Malthusien est donné par

$$\phi_t(x_0) = x_0 e^{\lambda t}.$$

Par conséquent, en utilisant la définition 1.5.1, le flot flou est

$$\widehat{\phi}_t(u_0) = u_0 e^{\lambda t},$$

dont les  $\alpha$ -coupes sont données par

$$\left[ \widehat{\phi}_t(u_0) \right]^\alpha = \phi_t([u_0]^\alpha) = [u_0]^\alpha e^{\lambda t} = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha] e^{\lambda t}.$$

Ainsi, pour chaque  $t$ , les diamètres des  $\alpha$ -coupes de la solution sont donnés par

$$\text{diam} \left( \left[ \widehat{\phi}_t(u_0) \right]^\alpha \right) = (u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha) e^{\lambda t},$$

qui coïncide avec ceux obtenus dans le cas précédent d'inclusion différentielle (3.14).

Cela nous permet de conclure que ces diamètres croissent pour les populations en expansion et décroissent pour les populations en rétraction.

### 3.3.2.2 Paramètre et condition initiale flous

On suppose que le problème (3.12) est flou, car certains paramètres  $\Lambda$  et la condition initiale sont flous. Ainsi le problème est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \widehat{f}(t, \Lambda, x(t)) \\ x(0) = u_0 \in E^1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans ce cas, on a le cas précédent et on ajoute une nouvelle équation ( $y = \lambda$ , avec  $y' = 0$ ). C'est-à-dire, en regardant le paramètre en tant que variable et dans le modèle déterministe

(3.19), on ajoute la paire  $(\lambda, x_0)$  à la condition initiale.

On suppose que le taux de croissance  $\Lambda \in E^1$  et la condition initiale  $u_0 \in E^1$ . On a les solutions du modèle Malthusien déterministe

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = \lambda \end{cases}$$

Sont données par

$$\phi_t(\lambda, x_0) = x_0 e^{\lambda t},$$

où  $x_0$  et  $\lambda$  sont des nombres réels.

Maintenant, si

$$[\Lambda]^\alpha = [\lambda_\alpha^-, \lambda_\alpha^+] \text{ et } [u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha],$$

alors la solution de (3.21) avec  $\widehat{f}(t, \Lambda, x(t)) = \Lambda x(t)$  est donnée par

$$[\varphi_t(\Lambda, u_0)]^\alpha = [\widehat{\phi}_t(\Lambda, u_0)]^\alpha = \phi_t([\lambda_\alpha^-, \lambda_\alpha^+], [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]). \quad (3.22)$$

Par conséquent, on suppose que  $\lambda_\alpha^- > 0$  (**expansion forte**),

$$[\varphi_t(\Lambda, u_0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{\lambda_\alpha^- t}, u_{02}^\alpha e^{\lambda_\alpha^+ t}],$$

et dans ce cas,  $\text{diam}([\varphi_t(\Lambda, u_0)]^\alpha)$  croît avec le temps  $t$ , car  $\lambda_\alpha^+ > \lambda_\alpha^-$ .

D'autre part, on suppose que  $\lambda_\alpha^+ < 0$  (**rétraction forte**),

$$[\varphi_t(\Lambda, u_0)]^\alpha = [u_{01}^\alpha e^{\lambda_\alpha^+ t}, u_{02}^\alpha e^{\lambda_\alpha^- t}],$$

et dans ce cas,  $\text{diam}([\varphi_t(\Lambda, u_0)]^\alpha)$  décroît avec le temps  $t$ , car  $\lambda_\alpha^+ > \lambda_\alpha^-$ .

### 3.4 Application numérique

Dans [65] Seamus Paul Whelton et al. Une méta-analyse d'études observationnelles sur la consommation de poisson et les maladies coronariennes (Coronary Heart Disease CHD) a été effectuée. Ces résultats indiquent que la consommation de poisson est associée à un risque significativement plus faible de maladies coronariennes fatales et totales. Ces résultats suggèrent que la consommation de poisson peut être un élément important de la modification du mode de vie pour la prévention des maladies coronariennes.

Les résultats de Jusheng Zheng et al. dans [67] indiquent que la consommation faible de

poisson (1 repas/semaine) ou modérée (2 à 4 repas/semaine) a un effet bénéfique significatif sur la prévention de la mortalité par CHD. La consommation forte du poisson (> 5 repas/semaine) n'a qu'un effet marginalement protecteur sur la mortalité par la maladie coronarienne.

La motivation est due au stock de poissons vivant le long des 3500 Kms des côtes méditerranéennes et atlantiques pour le Maroc, avec la sardine comme espèce la plus abondante. Malgré cela, la consommation individuelle marocaine de poisson est faible (8kg/personne/an) et le Maroc se classe parmi ceux qui ont un taux élevé de mortalité par la maladie coronarienne [54].

On se basant sur le modèle mathématique qui a été proposé dans [38] et qui traite la relation entre la consommation de poisson et la mortalité coronarienne en étudiant la dynamique d'une population à risque de CHD et celle des populations de poissons vivant le long des côtes marocaines :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Lambda - (\mu + \nu)x + \xi y \\ \frac{dy}{dt} = -(\mu + \delta R_R + \xi)y + \nu x \\ \frac{dz}{dt} = r \left(1 - \frac{z}{k}\right) z - qEz \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Avec :

$x = x(t)$  : le nombre de personnes sans risque de CHD,

$y = y(t)$  : le nombre de personnes avec un risque de CHD,

$z = z(t)$  : la biomasse de la population de poissons sur les côtes marocaines,

$r$  : le potentiel biotique,

$k$  : la capacité de charge,

$E$  : l'effort total de récolte,

$q$  : le coefficient de capturabilité,

$\Lambda$  : le recrutement de personnes sans risque de maladie coronarienne,

$\mu$  : le taux de mortalité naturelle,

$\delta$  : le taux de mortalité dû aux CHD,

$\nu$  : la probabilité d'avoir une CHD,

$\xi$  : le taux de patients atteints de CHD qui sont guéris,

$R_R$  : le risque relatif en fonction de la consommation de poisson.



Quand on fait des statistiques, on se concentre sur un échantillon, puis on généralise la caractéristique étudiée sur une population entière et voici le terme flou. Donc, ce qu'on propose est, dans une certaine mesure, une généralisation des concepts de démographie et d'environnement de manière stochastique, en utilisant la subjectivité qui vient du "flou" du phénomène biologique, puisque la densité d'une variable aléatoire est un exemple d'ensemble flou.

### 3.4.0.3 Le Modèle déterministe

Avant de donner graphiquement une solution au problème flou, on commence par la solution graphique du problème déterministe.

Le risque relatif est une fonction logistique dépendant de  $z$  qui décrit la probabilité (pour comparer) de développement de CHD dans un groupe d'individus mangeant du poisson comparé avec des individus qui consomment un peu ou pas (dans la suite on prend  $R_R = 1$  : Pas de consommation de poisson ou au moins d'un repas par mois).

On prend les paramètres suivants :

$\Lambda = 500000$ ,  $\mu = 0.014$ ,  $\nu = 0.06$ ,  $\xi = 0.005$ ,  $\delta = 0.006$ ,  $r = 1$ ,  $k = 1.1 \times 3.75 \times 10^9$ ,  $q = 0.04$ ,  $E = 10$ ,  $P_t = 32 \times 10^6$ ,  $x_0 = P_t \times 0.75 = 2.4 \times 10^7$ ,  $y_0 = P_t \times 0.25 = 8 \times 10^6$ ,  $z_0 = 2.25 \times 10^9$ .

La solution graphique du problème déterministe est donnée dans les figures suivantes :

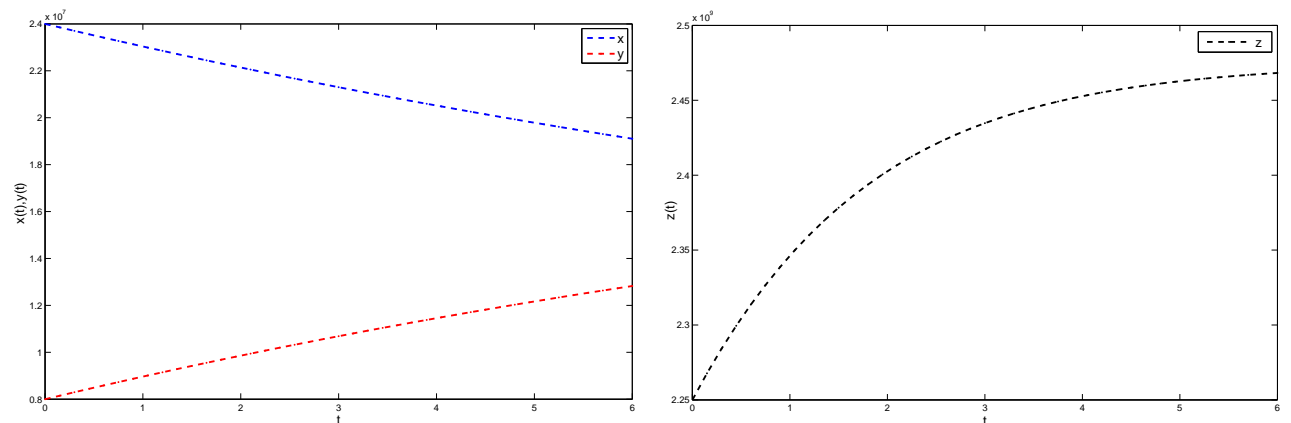


FIGURE 3.3 – Solution déterministe du Problème (3.23)

### 3.4.0.4 Le Modèle flou

Lorsque on fait des statistiques nous nous concentrons sur un échantillon puis on généralise la caractéristique étudiée sur la population tout entière, dans cette opération il apparaît le terme d'incertitude, donc il sera plus significatif de modéliser les paramètres

par des nombres flous, on considère alors le modèle flou suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Lambda - (\mu + \nu)x + \xi y \\ \frac{dy}{dt} = -(\mu + \delta R_R + \xi)y + \nu x \\ \frac{dz}{dt} = r \left(1 - \frac{z}{k}\right) z - qEz \\ x(0) = x_0 \in E^1, y(0) = y_0 \in E^1, z(0) = z_0 \in E^1. \end{cases} \quad (3.24)$$

On considère les  $\alpha$ -coupes suivantes :

$$[x(t)]^\alpha = [x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)], [x_0]^\alpha = [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+],$$

$$[y(t)]^\alpha = [y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)], [y_0]^\alpha = [y_{0\alpha}^-, y_{0\alpha}^+],$$

$$[z(t)]^\alpha = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)], [z_0]^\alpha = [z_{0\alpha}^-, z_{0\alpha}^+],$$

et  $[\Lambda]^\alpha = [\Lambda_\alpha^-, \Lambda_\alpha^+]$ , pour  $\alpha \in [0, 1]$ .

Selon la définition 1.7.5,  $x$  peut être différentiable dans la première forme ou dans la deuxième forme, de même  $y$  et  $z$  peuvent être différentiables dans la première forme ou dans la deuxième forme. On a donc quatre problèmes de valeur initiale différents pour  $x$  et  $y$ , et deux problèmes de valeur initiale différents pour  $z$ .

- Si  $x$  et  $y$  sont différentiables dans la première forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = \Lambda_\alpha^- - (\mu + \nu)x_\alpha^+ + \xi y_\alpha^- \\ (x_\alpha^+)'(t) = \Lambda_\alpha^+ - (\mu + \nu)x_\alpha^- + \xi y_\alpha^+ \\ (y_\alpha^-)'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_\alpha^+ + \nu x_\alpha^- \\ (y_\alpha^+)'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_\alpha^- + \nu x_\alpha^+ \\ x_\alpha^-(0) = x_{0\alpha}^-, x_\alpha^+(0) = x_{0\alpha}^+, y_\alpha^-(0) = y_{0\alpha}^-, y_\alpha^+(0) = y_{0\alpha}^+. \end{cases}$$

- Si  $x$  est différentiable dans la première forme et  $y$  est différentiable dans la deuxième forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) = \Lambda_\alpha^- - (\mu + \nu)x_\alpha^+ + \xi y_\alpha^- \\ (x_\alpha^+)'(t) = \Lambda_\alpha^+ - (\mu + \nu)x_\alpha^- + \xi y_\alpha^+ \\ (y_\alpha^-)'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_\alpha^- + \nu x_\alpha^+ \\ (y_\alpha^+)'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_\alpha^+ + \nu x_\alpha^- \\ x_\alpha^-(0) = x_{0\alpha}^-, x_\alpha^+(0) = x_{0\alpha}^+, y_\alpha^-(0) = y_{0\alpha}^-, y_\alpha^+(0) = y_{0\alpha}^+. \end{cases}$$

- Si  $x$  est différentiable dans la deuxième forme et  $y$  est différentiable dans la première forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (x_{\alpha}^{-})'(t) = \Lambda_{\alpha}^{+} - (\mu + \nu)x_{\alpha}^{-} + \xi y_{\alpha}^{+} \\ (x_{\alpha}^{+})'(t) = \Lambda_{\alpha}^{-} - (\mu + \nu)x_{\alpha}^{+} + \xi y_{\alpha}^{-} \\ (y_{\alpha}^{-})'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_{\alpha}^{+} + \nu x_{\alpha}^{-} \\ (y_{\alpha}^{+})'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_{\alpha}^{-} + \nu x_{\alpha}^{+} \\ x_{\alpha}^{-}(0) = x_{0\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}(0) = x_{0\alpha}^{+}, y_{\alpha}^{-}(0) = y_{0\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}(0) = y_{0\alpha}^{+}. \end{cases}$$

- Si  $x$  et  $y$  sont différentiables dans la deuxième forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (x_{\alpha}^{-})'(t) = \Lambda_{\alpha}^{+} - (\mu + \nu)x_{\alpha}^{-} + \xi y_{\alpha}^{+} \\ (x_{\alpha}^{+})'(t) = \Lambda_{\alpha}^{-} - (\mu + \nu)x_{\alpha}^{+} + \xi y_{\alpha}^{-} \\ (y_{\alpha}^{-})'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_{\alpha}^{-} + \nu x_{\alpha}^{+} \\ (y_{\alpha}^{+})'(t) = -(\mu + \delta R_R + \xi)y_{\alpha}^{+} + \nu x_{\alpha}^{-} \\ x_{\alpha}^{-}(0) = x_{0\alpha}^{-}, x_{\alpha}^{+}(0) = x_{0\alpha}^{+}, y_{\alpha}^{-}(0) = y_{0\alpha}^{-}, y_{\alpha}^{+}(0) = y_{0\alpha}^{+}. \end{cases}$$

Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , la condition  $0 < a < b$  entraîne

$$\min\{r(1-a)a; r(1-b)a; r(1-a)b; r(1-b)b\} = r(1-b)a,$$

et

$$\max\{r(1-a)a; r(1-b)a; r(1-a)b; r(1-b)b\} = r(1-a)b.$$

Par conséquent

$$[z'(t)]^{\alpha} = \left[ r \left( 1 - \frac{z}{k} \right) z - qEz \right]^{\alpha} = \left[ r \left( 1 - \frac{z_{\alpha}^{+}}{k} \right) z_{\alpha}^{-} - qEz_{\alpha}^{+}, r \left( 1 - \frac{z_{\alpha}^{-}}{k} \right) z_{\alpha}^{+} - qEz_{\alpha}^{-} \right].$$

puisque  $0 < z_{\alpha}^{-} < z_{\alpha}^{+}$ .

- Si  $z$  est différentiable dans la première forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (z_{\alpha}^{-})'(t) = r \left( 1 - \frac{z_{\alpha}^{+}}{k} \right) z_{\alpha}^{-} - qEz_{\alpha}^{+} \\ (z_{\alpha}^{+})'(t) = r \left( 1 - \frac{z_{\alpha}^{-}}{k} \right) z_{\alpha}^{+} - qEz_{\alpha}^{-} \\ z_{\alpha}^{-}(0) = z_{0\alpha}^{-}, z_{\alpha}^{+}(0) = z_{0\alpha}^{+}. \end{cases}$$

– Si  $z$  est différentiable dans la deuxième forme, selon la définition 1.7.5, à partir du problème (3.24), nous avons

$$\begin{cases} (z_{\alpha}^{-})'(t) = r \left(1 - \frac{z_{\alpha}^{-}}{k}\right) z_{\alpha}^{+} - qE z_{\alpha}^{-} \\ (z_{\alpha}^{+})'(t) = r \left(1 - \frac{z_{\alpha}^{+}}{k}\right) z_{\alpha}^{-} - qE z_{\alpha}^{+} \\ z_{\alpha}^{-}(0) = z_{0\alpha}^{-}, z_{\alpha}^{+}(0) = z_{0\alpha}^{+}. \end{cases}$$

On considère que :  $x_0$  est "à peu près de  $2.4 \times 10^7$ ",  $y_0$  est "à peu près de  $8 \times 10^6$ ",  $z_0$  est "à peu près de  $2.25 \times 10^9$ " et  $\Lambda$  est "à peu près  $5 \times 10^5$ ". Les expressions précédentes peuvent être modélisées mathématiquement par les nombres flous triangulaires symétriques :  $(2.38 \times 10^7; 2.4 \times 10^7; 2.42 \times 10^7)$ ,  $(7.95 \times 10^6; 8 \times 10^6; 8.05 \times 10^6)$ ,  $(2.2492 \times 10^9; 2.25 \times 10^9; 2.2508 \times 10^9)$ , et  $(4.999 \times 10^5; 5 \times 10^5; 5.001 \times 10^5)$  respectivement.

Pour  $\alpha \in [0, 1]$ . Il est facile de voir que les  $\alpha$ -coupes sont données par

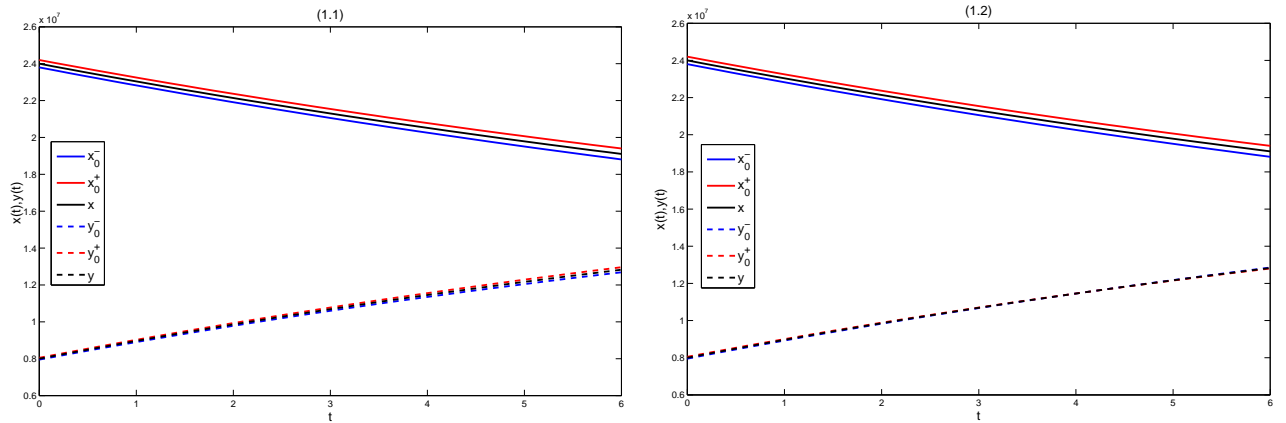
$$[x_0]_{\alpha} = [(238 + 2\alpha) \times 10^5, (242 - 2\alpha) \times 10^5]$$

$$[y_0]_{\alpha} = [(795 + 5\alpha) \times 10^4, (805 - 5\alpha) \times 10^4]$$

$$[z_0]_{\alpha} = [(22492 + 8\alpha) \times 10^5, (22508 - 8\alpha) \times 10^5]$$

$$[\Lambda]_{\alpha} = [499900 + 100\alpha, 500100 - 100\alpha].$$

Pour  $\alpha = 0$  les solutions graphiques de  $x$  et  $y$  de tous les cas sont données dans la figure (3.4).



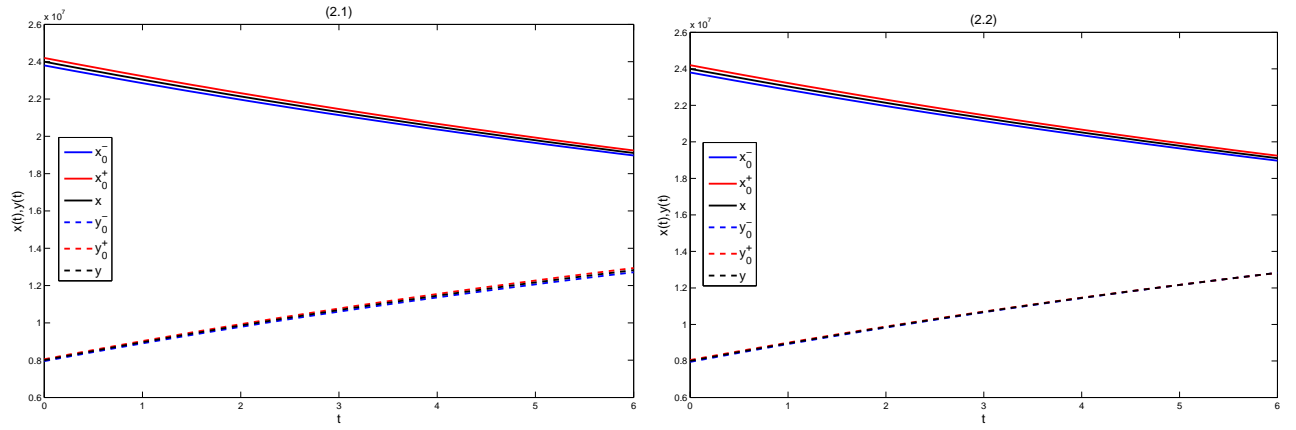


FIGURE 3.4 – Solution déterministe et solution floue de  $x(t)$  et  $y(t)$  pour  $\alpha = 0$

Dans la figure (3.4), (1,1) signifie que  $x$  et  $y$  sont différentiables dans la première forme selon la définition 1.7.5, (1,2) signifie  $x$  est différentiable dans la première forme et  $y$  est différentiable dans la deuxième forme, (2,1) signifie que  $x$  est différentiable dans la deuxième forme et  $y$  est différentiable dans la première forme. Maintenant, si on analyse la figure (3.4). On observe que les solutions graphiques de tous les cas sont biologiquement significatives, de plus la solution graphique est cohérente avec la solution déterministe.

Pour  $\alpha = 0$  les solutions graphiques de  $z$  pour les deux cas sont données dans la figure (3.5).

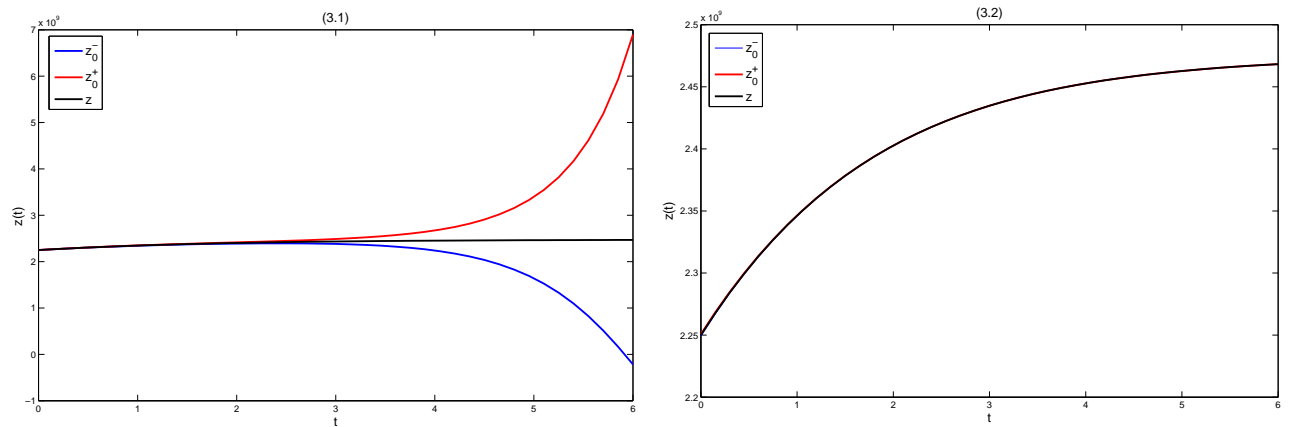


FIGURE 3.5 – Solution déterministe et solution floue de  $z(t)$  pour  $\alpha = 0$

Dans la figure (3.5), (3,1) signifie que  $z$  est différentiable dans la première forme selon la définition 3.5.1, (3,2) signifie  $z$  est différentiable dans la deuxième forme. Maintenant, si on analyse la figure (3.5). On observe que lorsque  $z$  est différentiable dans la deuxième forme, les solutions graphiques sont biologiquement significatives, de plus la solution graphique est cohérente avec la solution déterministe. Au contraire, quand elle est différentiable dans la première forme comme (3,1), les solutions graphiques sont

incompatibles avec les faits biologiques.

Alors on se concentre sur la situation où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont différentiables dans la deuxième forme. On donne la solution graphique déterministe et la solution graphique floue pour  $\alpha \in [0, 1]$ .

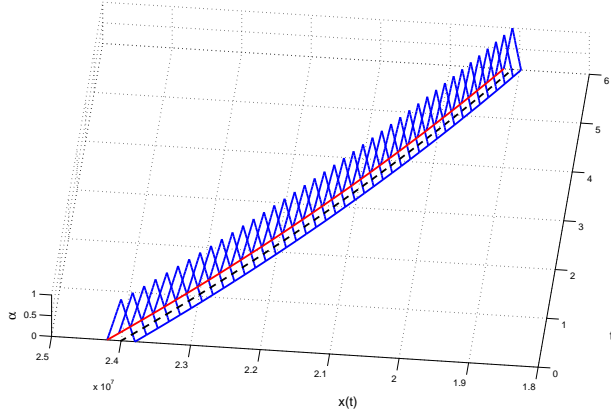


FIGURE 3.6 –  $x(t)$  pour  $\alpha \in [0, 1]$

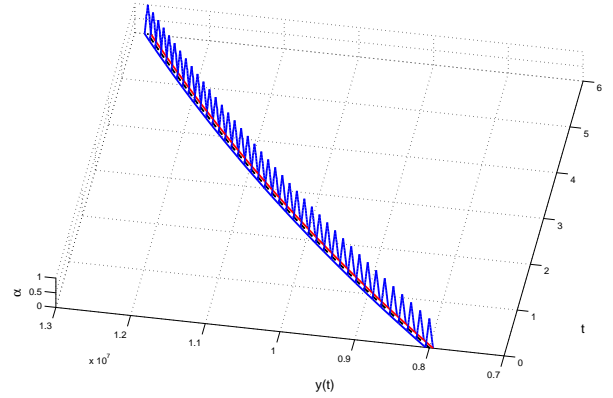


FIGURE 3.7 –  $y(t)$  pour  $\alpha \in [0, 1]$

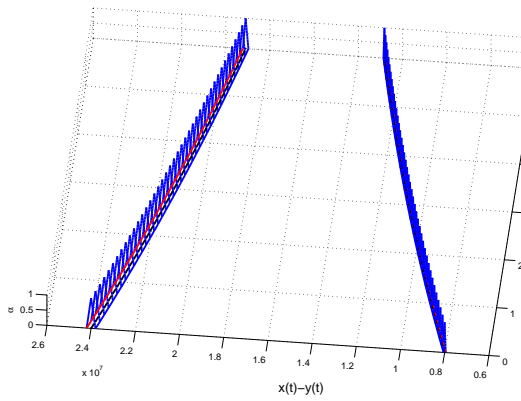


FIGURE 3.8 –  $x(t)$  et  $y(t)$  pour  $\alpha \in [0, 1]$

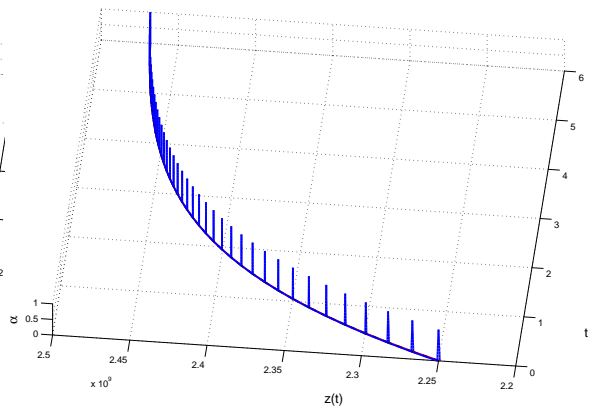


FIGURE 3.9 –  $z(t)$  pour  $\alpha \in [0, 1]$

Dans les figures (3.6) et (3.7), si on prend  $\alpha = 0$  on voit bien que la solution déterministe est confinée par les branches gauches et droites des variables dépendantes  $x(t)$  et  $y(t)$ . Par exemple dans la figure (3.6),  $x(t)$  est limité par  $x_0^-$  et  $x_0^+$ . De plus, si on prend  $\alpha = 1$ , la projection des pics des triangles coïncide avec la solution déterministe, et ainsi de suite.

### 3.5 Stabilité des systèmes dynamiques flous

L'étude de la stabilité des états d'équilibre joue un rôle fondamental pour les systèmes dynamiques. Par conséquent, on présente ensuite une introduction à la stabilité des systèmes dynamiques flous formulés par des inclusions différentielles ou par le principe

d'extension de Zadeh.

Maintenant on s'intéresse seulement aux problèmes de valeur initiale qui sont autonomes, c'est-à-dire, le champ  $F$  ne dépend pas explicitement de  $t$ . On considère seulement les systèmes autonomes dont les problèmes de valeur initiale flous ont une solution unique. L'avantage des systèmes autonomes qui sont explorés ici, vient du fait que leurs solutions ont la propriété d'un flot.

On considère le problème à valeur initiale flou suivant

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U), U \subset \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.25)$$

Le principe d'extension de Zadeh a été utilisé pour obtenir les solutions de (3.25) ([8, 9, 45, 46, 51]), de la façon suivante : Si la fonction floue  $F : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ , est obtenue par l'extension de Zadeh d'une fonction continue  $f : U \rightarrow U$ , alors une solution de (3.25) est définie comme l'extension de Zadeh de la solution déterministe  $\varphi_t(u_0)$  du problème de valeur initiale associé

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \in U. \end{cases} \quad (3.26)$$

Cette solution floue de l'équation (3.25) est notée  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$ .

L'équation (3.25) aussi a autres interprétations distinctes. Certains auteurs utilisent la dérivé de Hukuhara de la variation  $\mathbf{u}$  [4, 16, 17, 18, 32, 34, 41]. D'autres construisent de la solution de (3.25) en utilisant une famille d'inclusions différentielles [15, 57, 64, 29, 12, 33, 45].

Soit  $\varphi_t : U \rightarrow U$  le flot de l'équation (3.26). On suppose que la solution déterministe est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  (voir [28]).

Lorsque  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans (3.26) est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et elle a une constante de Lipschitz  $k > 0$ , la solution déterministe satisfait l'inégalité

$$\|\varphi_t(u_0) - \varphi_t(v_0)\| \leq \|u_0 - v_0\|e^{kt}, \quad (3.27)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  ( voir [61]).

La solution d'équilibre est très importante pour l'analyse qualitative des solutions déterministes non linéaires. Soit  $u_e$  un point d'équilibre pour l'équation (3.26), donc  $f(u_e) = 0$ . Si la matrice Jacobienne de  $f$ , calculée en  $u_e$  a des valeurs propres avec des parties réelles négatives, alors il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $u_e$  tel que, pour tout  $u_0 \in V$ , la solution déterministe  $\varphi_t(u_0)$  existe pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  satisfaisant l'inégalité

$$\|\varphi_t(u_0) - u_e\| \leq M\|u_0 - u_e\|e^{-at}, \quad (3.28)$$

pour des constantes  $M, a$  (voir [61]).

Un point d'équilibre avec cette propriété est appelé attracteur exponentiel.

La région d'attraction d'un point d'équilibre  $u_e \in U$  est l'ensemble  $A(u_e) \subset U$ , défini par

$$A(u_e) = \{u_0 \in \mathbb{R}^n : \varphi_t(u_0) \longrightarrow u_e, t \rightarrow +\infty\}.$$

Pour les point d'équilibres asymptotiquement stables, on a le théorème suivant.

**Théorème 3.5.1.** ([45]) Soit  $u_e$  un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation (3.26). Si  $K \subseteq A(u_e)$  est compact, alors

$$\rho(\varphi_t(K), u_e) = \sup_{u_0 \in K} \|\varphi_t(u_0) - u_e\| \longrightarrow 0,$$

lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

En d'autre termes, le dernier théorème garantit qu'un point d'équilibre asymptotiquement stable attire les sous-ensembles compacts de la région d'attraction.

**Remarque 3.5.1.** On remarque que lorsque l'équation (3.26) est autonome, la solution floue  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  vérifie :

1.  $\widehat{\varphi}_0(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0$ ,
2.  $\widehat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{u}_0) = \widehat{\varphi}_t(\widehat{\varphi}_s(\mathbf{u}_0))$ , pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U)$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Alors, l'application  $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$  définit un flot, qui associe chaque  $\mathbf{u}_0$  à un point  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$ . L'espace de phase de  $\widehat{\varphi}_t$  est l'espace métrique  $(\mathcal{F}(U), D)$ .

$\varphi_t$  est continue par rapport à la condition initiale, alors  $\widehat{\varphi}_t$  est aussi continue. La continuité de la solution floue par rapport à la condition initiale  $\mathbf{u}_0$  peut être prouvée par l'estimation suivante.

**Théorème 3.5.2.** Soit  $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$  l'extension de Zadeh du flot déterministe  $\varphi_t : U \longrightarrow U$ . Pour chaque  $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$  dans  $\mathcal{F}(U)$ , on a l'expression suivante

$$D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{v}_0)) \leq D(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)e^{kt}, \quad (3.29)$$

pour certaines constantes  $k > 0$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

*Démonstration.* Pour  $u_0, v_0 \in U$ , la solution de (3.26) satisfait l'inégalité (3.27). Ici  $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathcal{F}(U)$ , pour chaque  $\alpha \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{v}_0]^\alpha)) &= \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \inf_{v_0 \in [\mathbf{v}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - \varphi_t(v_0)\| \\ &\leq \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \inf_{v_0 \in [\mathbf{v}_0]^\alpha} \|u_0 - v_0\| e^{kt} \\ &\leq \rho([\mathbf{u}_0]^\alpha, [\mathbf{v}_0]^\alpha) e^{kt}. \end{aligned}$$



De même

$$\rho(\varphi_t([\mathbf{v}_0]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha)) \leq \rho([\mathbf{v}_0]^\alpha, [\mathbf{u}_0]^\alpha) e^{kt}.$$

Alors

$$d(\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{v}_0]^\alpha)) \leq d([\mathbf{u}_0]^\alpha, [\mathbf{v}_0]^\alpha) e^{kt}.$$

Ensuite, par définition de la distance  $D$ , on a

$$D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{v}_0)) \leq D(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) e^{kt}.$$

□

La famille  $(\widehat{\varphi}_t)_t$  sera appelée un système dynamique flou.

Similaire au cas déterministe, nous pouvons définir le concept du point d'équilibre pour  $\widehat{\varphi}_t$  comme un point invariant par la solution floue.

**Définition 3.5.1.** Un nombre flou  $\mathbf{u}_e \in \mathcal{F}(U)$  est un point d'équilibre ou un état stationnaire de (3.26) si

$$\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

c'est-à-dire, si  $\mathbf{u}_e$  est un point fixe de  $\widehat{\varphi}_t$ .

**Théorème 3.5.3.** Tout point d'équilibre de (3.26) est un point d'équilibre de (3.25). De plus les nombres réels qui sont équilibres de (3.25) sont également des points d'équilibres de (3.26) si la solution est donnée par la méthode d'extension de Zadeh ou par l'inclusion différentielle.

*Démonstration.* D'après le théorème 1.5.1 on a

$$[\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u_e\}})]^\alpha = \varphi_t([\chi_{\{u_e\}}]^\alpha) = \varphi_t(u_e),$$

où  $\chi_{\{u_e\}}$  est la fonction d'appartenance de  $u_e$ ,  $\varphi_t$  est le flot déterministe et  $\widehat{\varphi}_t$  est le flot flou.

Ainsi

$$\varphi_t(u_e) = u_e \Leftrightarrow [\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u_e\}})]^\alpha = [\chi_{\{u_e\}}]^\alpha,$$

c'est-à-dire,  $u_e$  est un point d'équilibre de (3.26) si et seulement si  $\chi_{\{u_e\}}$  est un point d'équilibre de (3.25). □

La stabilité des systèmes dynamiques sera étudiée par les flots de ses solutions. En utilisant la distance  $D$ , on définit la stabilité des points d'équilibres.

**Définition 3.5.2.** Soit  $\mathbf{u}_e$  un point d'équilibre de (3.25). Alors

1.  $\mathbf{u}_e$  est stable, si  $\forall \epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  telle que

$$\text{si } D(\mathbf{u}, \mathbf{u}_e) \leq \delta, \text{ alors } D(\mathbf{u}_e, \widehat{\varphi}_t(\mathbf{u})) \leq \epsilon, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Les points d'équilibres qui ne sont pas stables sont dits instables.

2.  $\mathbf{u}_e$  est asymptotiquement stable, si il est stable et il existe  $r > 0$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{u}_e) = 0 \text{ lorsque } D(\mathbf{u}_e, \mathbf{u}) \leq r.$$

Il est facile de voir que, avec cette notion de stabilité, il n'est pas possible d'avoir un point d'équilibre asymptotiquement stable pour les systèmes flous, pour lesquels la dérivée utilisée est la dérivée de Hukuhara.

Le résultat principal de la stabilité que nous développons dans la suite est pour les systèmes flous dont les solutions sont obtenues à travers le principe d'extension de Zadeh. On remarque que, avec la définition 3.5.2 de la stabilité, il est facile de vérifier que le modèle de la population Malthusien en rétraction, dont les solutions sont obtenues par les inclusions différentielles floues ou par l'extension de Zadeh, sont asymptotiquement stables. Le résultat suivant généralise cette observation.

**Théorème 3.5.4.** Soit  $u_e$  un point d'équilibre du problème de valeur initiale déterministe (3.26). Alors

1.  $u_e$  est stable pour (3.26) si et seulement si  $\chi_{\{u_e\}}$  est stable pour (3.25).
2.  $u_e$  est asymptotiquement stable pour (3.26) si et seulement si  $\chi_{\{u_e\}}$  est asymptotiquement stable pour (3.25).

*Démonstration.* (voir [29]) □

**Corollaire 3.5.1.** Soit  $u_e$  un point d'équilibre de (3.26). Alors, le point d'équilibre  $\chi_{\{u_e\}}$  de (3.25) sera stable si  $f'(u_e) < 0$ , et instable si  $f'(u_e) > 0$ .

De la même manière que pour le cas déterministe, on peut faire l'estimation de la diminution pour un point d'équilibre flou.

**Théorème 3.5.5.** Soit  $u_e$  un attracteur exponentiel. Alors il existe des constantes positives  $M, a$ , et un voisinage  $\mathbf{V} \subset \mathcal{F}(U)$  de  $\chi_{\{u_e\}}$  tel que

$$D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \chi_{\{u_e\}}) \leq MD(\mathbf{u}_0, \chi_{\{u_e\}}) e^{-at},$$

pour chaque  $t \geq 0$  et  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ .

*Démonstration.* Étant donné  $M, a > 0$ , soit  $V$  un voisinage de  $u_e$ , alors on a

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset V\}.$$

D'une part, par l'inégalité (3.28), pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$  on a

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha), u_e) &= \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - u_e\| \\ &\leq \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} M \|u_0 - u_e\| e^{-at}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \rho(u_e, \varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha)) &= \inf_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - u_e\| \\ &\leq \inf_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} M \|u_0 - u_e\| e^{-at}. \end{aligned}$$

Alors

$$d(\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha), u_e) \leq M d([\mathbf{u}_0]^\alpha, u_e) e^{-at},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \chi_{\{u_e\}}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} d(\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha), u_e) \\ &\leq MD(\mathbf{u}_0, \chi_{\{u_e\}}) e^{-at}. \end{aligned}$$

□

En général, la convergence de la solution déterministe de (3.26) vers un point d'équilibre  $u_e$  peut dépendre de la condition initiale. Pour illustrer cela, on suppose qu'il existe une fonction  $u_e : A \subseteq U \rightarrow U$  qui associe chaque  $u_0$  avec un point d'équilibre  $u_e(u_0) \in U$  vers lequel la solution déterministe  $\varphi_t(u_0)$  converge. C'est-à-dire, pour chaque  $u_0 \in A$ , on a  $\varphi_t(u_0) \rightarrow u_e(u_0)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 3.5.6.** Soit  $u_e : A \rightarrow U$  continue,  $A \subseteq U$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U)$  avec  $[\mathbf{u}_0]^0 \subseteq A$  et  $\mathbf{u}_e = \widehat{u}_e(\mathbf{u}_0)$ .

Sous ces conditions, on a

1. Si  $\varphi_t(u_e(u)) = u_e(u)$  pour tout  $u \in A$ , alors  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e$  pour chaque  $t \geq 0$ .
2. Si  $\varphi_t : U \rightarrow U$  converge uniformément dans  $A$  vers  $u_e : A \rightarrow U$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , alors  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  converge vers  $\mathbf{u}_e$  et  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e$  pour chaque  $t \in \mathbb{R}_+$ .

*Démonstration.* 1. Étant donné  $u_e : A \rightarrow U$ , le domaine de l'extension de Zadeh  $\widehat{u}_e$  est l'ensemble  $\mathcal{F}(A)$ . Par conséquent, nous abusons de la notation lorsque on note  $\mathbf{u}_e = \widehat{u}_e(\mathbf{u}_0)$ . En réalité,  $\mathbf{u}_e = \widehat{u}_e(\mathbf{v}_0)$  où  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{F}(A)$  et  $[\mathbf{v}_0]^\alpha = [\mathbf{u}_0]^\alpha$ , pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

$u_e$  est continue sur  $A$  et on a  $[\mathbf{u}_0]^0 \subset A$ , alors

$$[\mathbf{u}_e]^\alpha = [\widehat{u}_e(\mathbf{v}_0)]^\alpha = u_e([\mathbf{v}_0]^\alpha) = u_e([\mathbf{u}_0]^\alpha).$$

et on a

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{u}_e]^\alpha) = \varphi_t(u_e([\mathbf{u}_0]^\alpha)) = \{\varphi_t(u_e(u)) : u \in [\mathbf{u}_0]^\alpha\}.$$

Par hypothèse, on a  $\varphi_t(u_e(u)) = u_e(u)$  pour chaque  $u \in A$ .

Ainsi

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{u}_e]^\alpha) = \{u_e(u) : u \in [\mathbf{u}_0]^\alpha\} = u_e([\mathbf{u}_0]^\alpha) = [\mathbf{u}_e]^\alpha.$$

D'où  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e$ .

2. Pour montrer (2), nous devons montrer que  $D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_e) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Soit  $\alpha \in [0, 1]$ , sous l'hypothèse de la convergence uniforme, si  $\epsilon > 0$ , il existe  $T > 0$  tel que

$$\|\varphi_t(u_0) - u_e(u_0)\| < \epsilon,$$

pour tout  $t > T$  et pour  $u_0 \in A$ .

D'où, on a

$$\begin{aligned} \rho([\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)]^\alpha, [\mathbf{u}_e]^\alpha) &= \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \inf_{v_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - u_e(v_0)\| \\ &\leq \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - u_e(u_0)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

D'un autre côté, il est également vrai que

$$\begin{aligned} \rho([\mathbf{u}_e]^\alpha, [\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)]^\alpha) &= \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \inf_{v_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(v_0) - u_e(u_0)\| \\ &\leq \sup_{u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha} \|\varphi_t(u_0) - u_e(u_0)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

D'où

$$d([\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)]^\alpha, [\mathbf{u}_e]^\alpha) \leq \epsilon,$$

on déduit que  $D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_e) \leq \epsilon$ , pour chaque  $t > T$ . Il s'ensuit que  $D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_e) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et  $\mathbf{u}_e \in \mathcal{F}(U)$  est un point d'équilibre flou.

□

En d'autres termes, le théorème qu'on a montré affirme que si la solution déterministe  $\varphi_t(u_0)$  converge uniformément vers la fonctions  $u_e(u_0)$ , l'extension de Zadeh  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  converge vers l'extension de Zadeh  $\widehat{u}_e(\mathbf{u}_0)$ , c'est-à-dire

$$\varphi_t(u_0) \xrightarrow{u} u_e(u_0), u_0 \in A \Rightarrow \widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0) \rightarrow \widehat{u}_e(\mathbf{u}_0), [\mathbf{u}_0]^0 \subset A,$$

où  $\xrightarrow{u}$  indique la convergence uniforme dans  $A$  de  $\varphi_t : U \rightarrow U$  vers  $u_e : A \rightarrow U$ .

Les théorèmes 3.5.3 et 3.5.4 peuvent être considérés comme des cas particuliers du

théorème 3.5.6. Ils établissent la relation entre les points d'équilibre de la solution déterministe et les points d'équilibre pour la solution floue. En plus de fournir des conditions suffisantes pour l'existence de points d'équilibre flous, le théorème 3.5.6 fournit un moyen pratique de déterminer de tels points. C'est-à-dire que le point d'équilibre flou vers lequel la solution floue  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  converge est obtenu par l'extension de Zadeh appliquée à la fonction  $u_e(u_0)$  et évaluée à  $\mathbf{u}_0$ .

**Corollaire 3.5.2.** Soit  $u_e \in U$  un point d'équilibre de  $\varphi_t$  et  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U)$ . Alors :

1.  $\chi_{\{u_e\}}$  est un point d'équilibre de  $\widehat{\varphi}_t$ .
2. Si  $u_e$  est asymptotiquement stable et  $[\mathbf{u}_0]^0$  est borné par la région d'attraction de  $u_e$ , alors  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0) \rightarrow \chi_{\{u_e\}}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* 1. On utilise le théorème 3.5.6 et on prend  $A = U$ , où  $u_e : U \rightarrow U$  est définie par  $u_e(u) = u_e$  pour tout  $u \in U$ .

2. Soit  $A = A(u_e)$  et  $u_e : A \rightarrow U$  définie par  $u_e(u) = u_e$ . On a  $\varphi_t(u_e(u)) = u_e(u)$  pour tout  $u \in U$  et  $\widehat{u}_e(\mathbf{u}_0) = \chi_{\{u_e\}}$  pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U)$ , avec  $[\mathbf{u}_0]^0 \subset A$ . De plus par le théorème 3.5.1, pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $T > 0$  tel que

$$\|\varphi_t(u_0) - u_e\| < \epsilon,$$

pour tout  $t > T$  et  $u_0 \in [\mathbf{u}_0]^0$ .

D'où, on a besoin seulement d'appliquer le théorème 3.5.6 avec  $A = A(u_e)$  et  $u_e(u) = u_e$ .

□

Dans l'exemple suivant, on va montrer l'existence d'un point d'équilibre flou.

**Exemple 3.5.1.** Le modèle le plus simple qui explique le comportement des maladies infectieuses est donné par le système d'équation

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI, & S(0) = S_0 > 0, \\ \frac{dI}{dt} = rSI, & I(0) = I_0 > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Dans l'équation ci-dessus,  $r$  est une constante positive,  $S(t)$  est la variable qui représente le nombre d'individus sensibles à la maladie, tandis que  $I(t)$  est le nombre d'infectieux individuels.

Puisque

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0, \quad (3.31)$$

alors il n'y a pas de variation de la population, donc

$$S(t) + I(t) = S_0 + I_0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

Le système (3.30) est en équilibre lorsque  $I = 0$  ou  $S = 0$ .

Il n'est pas difficile de voir que la solution déterministe  $\varphi_t(S_0, I_0)$  de (3.30) converge vers le point d'équilibre  $u_e = (0, I_0 + S_0)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le point d'équilibre dépend du choix des conditions initiales pour les individus infectieux et sensibles. Par conséquent, le point d'équilibre vers lequel la solution converge peut être vu comme une fonction  $u_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ , qui associe chaque condition initiale  $(S_0, I_0)$  à la valeur  $u_e(S_0, I_0) = (0, I_0 + S_0)$ .

Puisque  $S(t)$  et  $I(t)$  sont monotones, alors pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $T > 0$  tel que

$$\|\varphi_t(S_0, I_0) - u_e(S_0, I_0)\| < \epsilon,$$

pour tout  $t > T$  et  $(S_0, I_0)$  dans un compact  $K$ .

D'après le théorème 3.5.6, étant donné  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^2)$ , la solution floue  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  converge vers le point d'équilibre flou  $\mathbf{u}_e = \widehat{u}_e(\mathbf{u}_0)$ .

La fonction d'équilibre est alors donnée par

$$\mu_{\mathbf{u}_e}(S, I) = \begin{cases} \sup_{S_0} \mu_{\mathbf{u}_0}(S_0, I - S_0) & \text{si } S = 0, \\ 0 & \text{si } S \neq 0. \end{cases}$$

Dans la figure (3.10), on a une représentation graphique de la solution floue pour différentes valeurs de  $t$  dans l'espace des phases. Dans ce cas, la condition initiale est donnée par la fonction d'appartenance

$$\mu_{\mathbf{u}_0}(S_0, I_0) = \max \{1 - 0.01(S_0 - 80)^2 - 0.25(I_0 - 5)^2, 0\}.$$

Dans [47, 48] nous pouvons voir la solution floue  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  avec l'évolution du temps.

Dans la figure suivante, les tons de gris varient en fonction du degré d'appartenance au point  $u \in \widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$ . Plus la couleur est sombre, le degré d'appartenance est élevé.

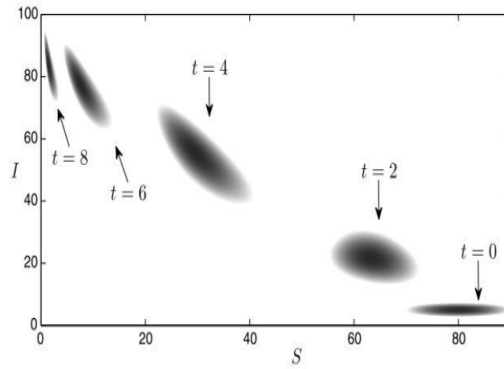


FIGURE 3.10 –  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$  pour différentes valeurs de  $t$

## 3.6 Ensembles invariants et attracteurs pour les systèmes dynamiques flous

Dans l'analyse qualitative des équations différentielles autonomes, les ensembles invariants jouent un rôle important pour comprendre le comportement d'un flot avec l'évolution du temps. Les points d'équilibre et les orbites sont les deux principaux exemples d'ensembles invariants. En général, les ensembles invariants sont des objets fondamentaux dans l'analyse asymptotique des systèmes dynamiques dans les espaces métriques complets.

### 3.6.1 Ensembles invariants et attracteurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans le contexte des systèmes dynamiques, une orbite (positive) d'un point  $u_0 \in U$  est le sous-ensemble de l'espace de phase défini par

$$\gamma(u_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi_t(u_0) = \{\varphi_t(u_0) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

et pour chaque sous-ensemble  $B \subset U$ , on a  $\gamma(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma(u_0)$ .

L'ensemble  $\gamma(u_0)$  est appelé orbite périodique s'il existe  $\tau > 0$  tel que

$$\varphi_{t+\tau}(u_0) = \varphi_t(u_0).$$

Le plus petit nombre  $\tau > 0$  qui vérifie cette propriété est appelé le période de l'orbite [62].

L'ensemble  $\omega$ -limite d'un sous-ensemble  $B \subset U$  est défini par

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \varphi_t(B)}$$

Il résulte de cette définition qu'on a  $v \in \omega(u_0)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que  $\varphi_{t_n}(u_0) \rightarrow v$ .

Un ensemble  $S \subset U$  est appelé invariant si  $\gamma(u_0) \subset S$  pour tout  $u_0 \in S$ . Il s'ensuit que  $S$  est invariant si et seulement si  $\varphi_t(S) = S$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Les orbites et  $\omega$ -limite sont des exemples d'ensembles invariants.

Toujours dans le contexte des systèmes dynamiques, on dit qu'un ensemble  $M \subset U$  attire un ensemble  $B \subset \mathbb{R}^n$ , par le flot  $\varphi_t$ , si  $\rho(\varphi_t(B), M) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

En d'autres termes, on dit qu'un ensemble  $M$  attire un ensemble  $B$  si et seulement si  $M$  attire uniformément toutes les orbites avec la condition initiale dans  $B$ , c'est-à-dire,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \{ \rho(\varphi_t(u_0), M) : u_0 \in B \} = 0.$$

La région d'attraction d'un ensemble  $M$  est l'ensemble  $A(M)$  défini par

$$A(M) = \{ u_0 \in U : \rho(\varphi_t(u_0), M) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \}.$$

L'ensemble  $M$  est appelé attracteur s'il existe un sous-ensemble ouvert  $V \supset M$  tel que  $V \subset A(M)$ . Si  $M$  est un attracteur et attire les sous-ensembles compacts de  $A(M)$ , alors  $M$  est un attracteur uniforme.

La définition de la stabilité pour les ensembles invariants est similaire à la définition de la stabilité pour les points d'équilibre. C'est-à-dire qu'un ensemble invariant  $S$  est stable si pour tout voisinage  $V$  de  $S$ , il existe un voisinage  $V'$  de  $S$  tel que  $\varphi_t(V') \subset V$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Lorsque  $S$  est stable et de plus il existe un voisinage  $W$  tel que  $S$  attire les points de  $W$  alors  $S$  est un ensemble asymptotiquement stable.

**Théorème 3.6.1.** (voir [63]) Soit  $M$  un ensemble compact invariant. Alors  $M$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $M$  est un attracteur uniforme.

Comme un cas particulier, les points d'équilibre et les orbites asymptotiquement stables sont des sous-ensembles invariants qui attirent les compacts dans les régions d'attraction.

### 3.6.2 Ensembles invariants et attracteurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Les propriétés suivantes caractérisent les ensembles invariants pour un système dynamique flou.

**Théorème 3.6.2.** Soit  $S \subset U$  et considérons  $\mathbf{S} \subset \mathcal{F}(U)$  défini par

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{u}]^\alpha \subset S \}.$$

Alors,  $S$  est invariant par  $\varphi_t$  si et seulement si  $\mathbf{S}$  est invariant par  $\widehat{\varphi}_t$ .



*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{S}$ . Nous devons montrer que  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0) \in \mathbf{S}$ , en d'autres termes,  $\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha) \subset S$ , pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{S}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Par hypothèse,  $S$  est invariant et donc  $\varphi_t(u_0) \in S$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $u_0 \in S$ .

Maintenant, puisque  $[\mathbf{u}_0]^\alpha \subset S$  alors

$$\varphi_t([\mathbf{u}_0]^\alpha) = \{\varphi_t(\mathbf{u}_0) : u_0 \in [\mathbf{u}_0]^\alpha\} \subset S,$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

Par conséquent,  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0) \in \mathbf{S}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $u_0 \in S$ . Puisque  $\mathbf{S}$  est invariant et  $\chi_{\{u_0\}} \in \mathbf{S}$  alors,  $\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u_0\}}) \in \mathbf{S}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Donc,  $\varphi_t(\{u_0\}) \subset S$  et  $S$  est invariant.

□

Soit  $\omega(B)$  l'ensemble  $\omega$ -limite déterminé par le flot déterministe et considérons l'ensemble  $\omega(B) \subset \mathcal{F}(U)$  défini par

$$\omega(B) = \{\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}_0]^\alpha \subset \omega(B)\}.$$

Comme un cas particulier, on a la relation suivante entre l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(B)$  et l'ensemble  $\omega(B)$ .

**Corollaire 3.6.1.** L'ensemble  $\omega(B)$ ,  $B \subset U$ , est invariant par  $\varphi_t$  si et seulement si l'ensemble  $\omega(B)$  est invariant par  $\widehat{\varphi}_t$ .

Nous nous intéressons également aux relations impliquant la stabilité des ensembles invariants  $S \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{S} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Comme on a vu dans le théorème 3.6.1, les ensembles asymptotiquement stables attirent les sous-ensembles compacts de la région d'attraction.

On définit

$$dist(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{B}} D(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

La distance entre deux ensembles  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 3.6.1.** Soit

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{u}]^0 \subset A \subset \mathbb{R}^n\}$$

Si  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\rho(v, A) \leq dist(\mathbf{v}, \mathbf{A}), \text{ pour tout } v \in [\mathbf{v}]^0.$$

*Démonstration.* Par la définition de la distance de Hausdorff, on a

$$d([\mathbf{v}]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) \geq \rho([\mathbf{v}]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1],$$

et donc

$$D(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geq \rho([\mathbf{v}]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1].$$

Par conséquent,

$$\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} D(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} \rho([\mathbf{v}]^0, [\mathbf{u}]^0).$$

On a,

$$\rho([\mathbf{v}]^0, [\mathbf{u}]^0) \geq \rho(v, [\mathbf{u}]^0), \text{ pour tout } v \in [\mathbf{v}]^0,$$

et alors

$$\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} \rho(v, [\mathbf{u}]^0).$$

Donc, si  $[\mathbf{u}]^0 \subset A$  alors  $\rho(v, [\mathbf{u}]^0) \geq \rho(v, A)$ , et on constate l'inégalité

$$\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \geq \rho(v, A), \text{ pour tout } v \in [\mathbf{v}]^0.$$

□

La stabilité des ensembles invariants pour  $\widehat{\varphi}_t$  dans  $\mathcal{F}(U)$  est caractérisée par le résultat suivant.

**Théorème 3.6.3.** Soit  $S \subset U$  un ensemble invariant par  $\varphi_t$ , et considérons l'ensemble  $\mathbf{S} \subset \mathcal{F}(U)$  défini par

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset S\}.$$

Alors :

1.  $S$  est stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\mathbf{S}$  est stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .
2.  $S$  est asymptotiquement stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\mathbf{S}$  est asymptotiquement stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .

*Démonstration.* 1.( $\Rightarrow$ ) Soit  $\epsilon > 0$ , on considère un voisinage  $\mathbf{V} \subset \mathcal{F}(U)$  de  $\mathbf{S}$ , défini par

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) < \epsilon\}.$$

Montrer que  $\mathbf{S}$  est stable. On cherche un voisinage  $\mathbf{V}'$  de  $\mathbf{S}$ , tel que

$$\widehat{\varphi}_t(\mathbf{V}') \subset \mathbf{V}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par hypothèse, pour un voisinage  $V = \{u \in U : \rho(u, S) < \epsilon\}$  de  $S$ , il existe un voisinage  $V'$ , tel que

$$\varphi_t(V') \subset V, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, considérons l'ensemble

$$\mathbf{V}' = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset V'\}.$$

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}'$ .

Pour tout  $u \in [\mathbf{u}]^\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , on a  $\varphi_t(u) \in V$ .

Alors, pour  $t > 0$  fixée, il existe  $\bar{v}_u \in S$ , tel que

$$\|\varphi_t(u) - \bar{v}_u\| < \epsilon, \quad \forall u \in [\mathbf{u}]^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

On définit, pour tout  $\alpha \in (0, 1]$ , l'ensemble

$$A_\alpha = \overline{\bigcup_{u \in [\mathbf{u}]^\alpha} \bar{v}_u} = \overline{\{\bar{v}_u : u \in [\mathbf{u}]^\alpha\}},$$

et pour  $\alpha = 0$ , on définit

$$A_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}.$$

Puisque

$$\inf_{u \in [\mathbf{u}]^\alpha} \|\varphi_t(u) - v\| < \epsilon, \quad \forall v \in A_\alpha, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Donc

$$\rho(A_\alpha, \varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha)) = \sup_{v \in A_\alpha} \inf_{u \in [\mathbf{u}]^\alpha} \|\varphi_t(u) - v\| \leq \epsilon.$$

De plus, on a toujours

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A_\alpha) &= \sup_{u \in [\mathbf{u}]^\alpha} \inf_{v \in A_\alpha} \|\varphi_t(u) - v\| \\ &\leq \sup_{u \in [\mathbf{u}]^\alpha} \|\varphi_t(u) - \bar{v}_u\| \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

et donc

$$d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A_\alpha) \leq \epsilon, \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Puisque  $\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U)$ . Le théorème 1.1.3 assure que

$$[\mathbf{u}]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\mathbf{u}]^\alpha}.$$

Ainsi, si  $u \in [\mathbf{u}]^0$ , alors il existe  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{supp}(\mathbf{u})$ , tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ .

Donc, pour chaque  $u_n$ , il existe  $\bar{v}_{u_n} \in A_0$ , tel que

$$\|\varphi_t(u_n) - \bar{v}_{u_n}\| < \epsilon,$$

et ceci implique que

$$\rho(\varphi_t(u_n), A_0) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par continuité de la fonction définie par  $f(u) = \rho(u, A)$  et  $\varphi_t$ , on a

$$\rho(\varphi_t(u), A_0) \leq \epsilon, \quad \forall u \in [\mathbf{u}]^0,$$

et on a

$$\rho(\varphi_t([\mathbf{u}]^0), A_0) \leq \epsilon.$$

De la même manière, on a

$$\rho(A_0, \varphi_t([\mathbf{u}]^0)) \leq \epsilon.$$

Ainsi

$$d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A_\alpha) \leq \epsilon, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.32)$$

Maintenant, nous devons montrer que la famille  $\{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$  construite précédemment satisfait les hypothèses du théorème 1.1.2. En effet :

Les hypothèses 1 et 4 résultent directement de la définition de  $A_\alpha$  et  $A_0$  respectivement, et on a  $[\mathbf{u}]^\alpha \subseteq [\mathbf{u}]^\beta$ , pour tout  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ .

Alors,  $A_\alpha \subseteq A_\beta$ , et donc l'hypothèse 2 est aussi vérifiée.

Nous avons juste prouvé que, si  $a \in A_\alpha$ , alors  $a \in A_\beta$ , pour tout  $\beta \in [0, \alpha)$ . Donc

$$A_\alpha \subseteq \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta$$

D'un autre coté, supposons que

$$a \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta$$

Alors  $a \in A_\beta$  pour tout  $\beta \in [0, \alpha)$ .

Si  $a \notin A_\alpha$ , alors  $\rho(a, \varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha)) \geq \epsilon$ . Mais

$$[\mathbf{u}]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}]^\beta,$$

Alors, par continuité il existe  $\alpha > \beta$ , tel que

$$d(a, \varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha)) \geq \epsilon.$$

Ce qui est absurde.

Alors,  $a \in A_\alpha$  et on a

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta.$$

Par conséquent, le théorème 1.1.2 assure qu'il existe  $\mathbf{v}_t \in \mathbf{S}$ , tel que  $[\mathbf{v}_t]^\alpha = A_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , mais de (3.32) ceci implique que

$$\begin{aligned} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}_t) &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), [\mathbf{v}_t]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A_\alpha) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{S}) &= \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Et alors,  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ .

Puisque,  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}'$  est arbitraire, alors  $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{V}') \subset \mathbf{V}$ .

1.( $\Leftarrow$ ) Soit  $\epsilon > 0$ , on considère un voisinage  $V = \{u \in U : \rho(u, S) < \epsilon\}$  de  $S$ .

Puisque  $\mathbf{S}$  est stable, alors pour un voisinage  $\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) < \epsilon\}$  de  $\mathbf{S}$ , il existe un voisinage  $\mathbf{V}'$  de  $\mathbf{S}$ , tel que

$$\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}', \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Considérons maintenant  $V' = \{u \in U : \chi_{\{u\}} \in \mathbf{V}'\}$ .

D'après le lemme 3.6.1, on a

$$\rho(\varphi_t(u), S) \leq \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u\}}), \mathbf{S}) < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Car, on a

$$\varphi_t(u) \in [\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u\}})]^0 = \varphi_t([\chi_{\{u\}}]^0) = \varphi_t(\{u\}).$$

Alors,  $\varphi_t(u) \in V$ , pour tous  $u \in V'$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Par conséquent,  $\varphi_t(V') \subset V$ .

2.( $\Rightarrow$ ) Par hypothèse,  $S$  est asymptotiquement stable, alors  $S$  est stable et il existe un voisinage  $W$  de  $S$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi_t(u), S) = 0, \quad \text{si } u \in W.$$

De la propriété 1 du théorème, on a  $\mathbf{S}$  est stable. On veut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{S}) = 0, \quad \text{si } \mathbf{u} \in \mathbf{W} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset W\}.$$

On suppose que  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ . Soit  $\epsilon > 0$ , le théorème 3.6.1 assure qu'il existe  $T > 0$ , tel que

$$\rho(\varphi_t([\mathbf{u}]^0), S) < \epsilon, \quad \forall t > T.$$

Soit  $t > T$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors pour  $u \in [\mathbf{u}]^\alpha$ , nous avons  $\rho(\varphi_t(u), S) < \epsilon$ .

Ainsi, de la même manière que dans la preuve de la propriété 1, nous pouvons construire  $\mathbf{v}_t \in \mathbf{S}$ , tel que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{S}) &= \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \\ &\leq D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}_t) \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), [\mathbf{v}_t]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A_\alpha) \\ &\leq \epsilon, \quad \forall t > T. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{S}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}.$$

Alors  $\mathbf{S}$  est asymptotiquement stable pour le système dynamique flou  $\widehat{\varphi}_t$ .

2.( $\Leftarrow$ ) Par hypothèse,  $\mathbf{S}$  est stable et il existe un voisinage  $\mathbf{W}$  de  $\mathbf{S}$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{S}) = 0.$$

La propriété 1 assure que  $S$  est stable pour le système dynamique déterministe  $\varphi_t$ . Considérons le voisinage  $W = \{u \in U : \chi_{\{u\}} \in \mathbf{W}\}$  de  $S$ , et on choisit  $u \in W$ . Le lemme 3.6.1 assure que

$$\rho(\varphi_t(u), S) \leq \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{u\}}), \mathbf{S}) \longrightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Alors,  $S$  est asymptotiquement stable pour le système dynamique déterministe  $\varphi_t$ . □

Le théorème 3.6.3 est une généralisation du théorème 3.5.4. Si  $u_e$  est un point d'équilibre alors  $\{u_e\}$  est un ensemble invariant par  $\varphi_t$  et  $\{\chi_{\{u_e\}}\}$  est invariant par  $\widehat{\varphi}_t$ .

**Corollaire 3.6.2.** Soit  $u_e$  un point d'équilibre de  $\varphi_t$ . Alors :

1.  $u_e$  est stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\chi_{\{u_e\}}$  est stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .
2.  $u_e$  est asymptotiquement stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\chi_{\{u_e\}}$  est asymptotiquement stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .

De même, si  $\gamma$  est une orbite périodique pour  $\varphi_t$  alors  $\gamma$  est invariant. Donc l'ensemble  $\gamma$  est invariant par  $\widehat{\varphi}_t$  et d'après le théorème 3.6.3 on a le résultat suivant :

**Corollaire 3.6.3.** Soit  $\gamma$  une orbite périodique pour  $\varphi_t$  de période  $\tau > 0$  et

$$\gamma = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset \gamma\}.$$

l'ensemble périodique flou défini par  $\gamma$ . Alors :

1.  $\gamma$  est stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\gamma$  est stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .
2.  $\gamma$  est asymptotiquement stable pour  $\varphi_t$  si et seulement si  $\gamma$  est asymptotiquement stable pour  $\widehat{\varphi}_t$ .

Par les définitions précédentes, un ensemble  $\mathbf{A} \subset \mathcal{F}(U)$  attire un ensemble  $\mathbf{B} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  par  $\widehat{\varphi}_t$  si  $\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  dans lequel

$$\begin{aligned} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) &= \sup_{\mathbf{v} \in \widehat{\varphi}_t(\mathbf{B})} \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} D(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= \sup_{\mathbf{u}_0 \in \mathbf{B}} \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{A}} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Soient  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , et  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  définis respectivement par

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{u}]^0 \subset A\} \text{ et } \mathbf{B} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{u}]^0 \subset B\}.$$

**Théorème 3.6.4.** Soit  $A$  et  $B$  des sous-ensembles de  $U$ . L'ensemble  $A$  attire  $B$  par le flot déterministe  $\varphi_t$  si et seulement si  $\mathbf{A}$  attire  $\mathbf{B}$  par le flot flou  $\widehat{\varphi}_t$ .

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  attire  $B$  par le flot déterministe  $\varphi_t$ . Par définition de la distance, pour  $\epsilon > 0$  donné, il existe  $T > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_t(C), A) &= \sup_{u \in C} \inf_{v \in A} \|\varphi_t(u) - v\| \\ &\leq \sup_{u \in B} \inf_{v \in A} \|\varphi_t(u) - v\| \\ &= \rho(\varphi_t(B), A) \\ &< \epsilon, \quad \forall t > T, \quad C \subset B. \end{aligned}$$

C'est-à-dire  $A$  attire n'importe quel ensemble  $C$  dans  $B$ . En particulier pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{B}$ , on a

$$\rho(\varphi_t(u), A) \leq \rho(\varphi_t([\mathbf{u}]^\alpha), A) < \epsilon, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad t > T.$$

Comme précédemment, pour  $t > T$ , on peut établir  $\mathbf{v}_t \in \mathbf{A}$  tel que  $D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}_t) \leq \epsilon$ , et

$$\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{A}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{A}} D(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \leq \epsilon$$

Alors,  $\forall t > T$  on a

$$\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{B}} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{A}) \leq \epsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathbf{A}$  attire  $\mathbf{B}$ , alors il existe  $T > 0$  tel que

$$\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) < \epsilon, \quad \forall t > T, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Du lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_t(u), A) &\leq \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{A}) \\ &\leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{B}} \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{u}), \mathbf{A}) \\ &= \text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\rho(\varphi_t(B), A) = \sup_{u \in B} \rho(\varphi_t(u), A) \leq \epsilon.$$

Ceci, montre que  $A$  attire  $B$  par le flot déterministe  $\varphi_t$ . □

Par le théorème précédent, on peut établir le résultat suivant, entre  $\omega(A)$  du flot déterministe et l'ensemble  $\omega(A) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset \omega(A)\}$ .

**Corollaire 3.6.4.** L'ensemble  $\omega(A)$  attire  $A \subset U$  par le flot déterministe  $\varphi_t$  si et seulement  $\omega(A)$  attire  $\mathbf{A} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{F}(U) : [\mathbf{u}]^0 \subset A\}$  par le flot flou  $\widehat{\varphi}_t$ .



# Chapitre 4

## Semi-groupes flous

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions des semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions à valeurs floues, et différentes applications aux équations différentielles floues sont présentées.

### 4.1 Fonction exponentielle floue

Soient  $f : E^n \rightarrow E^n$ ,  $i : E^n \rightarrow E^n$  l'application identité sur  $E^n$ ,  $x \in E^n$  et  $j : E^n \rightarrow C$  l'injection donnée dans le théorème 1.4.2. Nous montrons d'abord que l'injection des itérations  $\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)$  dans  $C$  nous donne des itérations dans un espace de Banach. Ensuite, nous montrons que ces itérations convergent et donc on aura la convergence de  $\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)$ .

**Théorème 4.1.1.** Pour tout  $k \geq 1$ , nous avons

$$j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^k(x)\right) = \left(I + \frac{f_1}{m}\right)^k(j(x)),$$

où  $I$  est l'application identité sur  $X$  et  $f_1 = jfj^{-1} : C \rightarrow C$ .

*Démonstration.* Pour  $k = 1$ . Par les propriétés de  $j$  nous avons

$$j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)(x)\right) = \left(j(x) + \frac{j(f(x))}{m}\right) = \left(j(x) + \frac{j(f(j^{-1}(j(x))))}{m}\right) = \left(I + \frac{f_1}{m}\right)(j(x)).$$

Supposons que l'identité est vraie pour certain  $k$ . Alors

$$\begin{aligned} j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^{k+1}(x)\right) &= j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^k\left(i + \frac{f}{m}\right)(x)\right) = \left(I + \frac{f_1}{m}\right)^k\left(j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)(x)\right)\right) \\ &= \left(I + \frac{f_1}{m}\right)^k\left(I + \frac{f_1}{m}\right)(j(x)) \\ &= \left(I + \frac{f_1}{m}\right)^{k+1}(j(x)), \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. □

Dans la suite, on suppose que  $f$  satisfait les conditions d'Osgood suivantes :

1. La fonction réelle  $\delta(r) = \sup_{D(x,y) \leq r} D(f(x), f(y)) < \infty$  pour tout  $r \geq 0$ ,
2. L'intégrale  $\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\delta(t)} dt$  existe pour tout  $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ,
3. Les intégrales  $\int_0^r \frac{1}{\delta(t)} dt$  et  $\int_r^\infty \frac{1}{\delta(t)} dt$  divergent pour tout  $0 < r < \infty$ .

Clairement, la fonction  $\delta$  est croissante et  $\delta(0) = 0$ . Puisque  $\int_r^1 \frac{1}{\delta(t)} dt < \infty$  et  $\int_0^1 \frac{1}{\delta(t)} dt$  diverge, alors  $\lim_{r \rightarrow 0} \delta(r) = 0$ . Donc, par définition de  $\delta$ , on voit bien que  $f$  est uniformément continue. Puisque  $j$  est isométrie alors  $j^{-1}$  est aussi, et donc

$$\|f_1(u) - f_1(v)\| = D(f(j^{-1}(u)), f(j^{-1}(v))) \text{ et } D(j^{-1}(u), j^{-1}(v)) = \|u - v\|, \forall u, v \in C.$$

Donc

$$\sup_{\|u-v\| \leq r} \|f_1(u) - f_1(v)\| = \sup_{D(x,y) \leq r} D(f(x), f(y)), \quad u, v \in C, \quad x = j^{-1}(u), \quad y = j^{-1}(v),$$

et par conséquent,  $f_1$  satisfait aussi les conditions d'Osgood.

**Théorème 4.1.2.** Si  $f : E^n \rightarrow E^n$  vérifie les conditions d'Osgood, alors  $\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)$  converge pour tout  $x \in E^n$ .

*Démonstration.* Par le lemme 1 donné dans Seppälä [59],  $\left(I + \frac{f_1}{m}\right)^m(j(x)) \in C$  converge.

Par le théorème 4.1.1,  $j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)\right)$  converge. Puisque  $j^{-1}$  est continue alors

$$j^{-1}\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)\right)\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} j^{-1}\left(j\left(\left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x)\right)\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x),$$

existe pour tout  $x \in E^n$ . □

**Définition 4.1.1.** Soit  $f : E^n \rightarrow E^n$  satisfait les conditions d'Osgood. La fonction exponentielle floue  $e^f$  est définie par

$$e^f(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(i + \frac{f}{m}\right)^m(x).$$

**Remarque 4.1.1.** D'après le théorème 4.1.1, on a  $j(e^f(x)) = e^{f_1}(j(x))$ .

## 4.2 Semi-groupes flous liés aux problèmes de Cauchy autonomes

**Définition 4.2.1.** Une famille de fonctions  $\{T(t), t \geq 0\}$ , avec  $T(t) : E^n \rightarrow E^n$ , est un semi-groupe flou si

1.  $T(0) = i$ .
2.  $T(t+s) = T(t)T(s)$ , pour tous  $t, s \geq 0$ .
3. La fonction  $g : [0, +\infty[ \rightarrow E^n$ , définie par  $g(t) = T(t)(x)$ , est continue pour tout  $x \in E^n$ .

Pour abrégé, on pose  $T(t)x = T(t)(x)$ .

Soit  $f : E^n \rightarrow E^n$  une fonction continue, considérons le problème autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in E^n \end{cases}$$

Il est bien connu, voir par exemple Kaleva [32], qu'au lieu de l'équation différentielle précédente il est possible d'étudier une équation intégrale équivalente.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

Une solution  $x$  de cette équation est indépendante de l'instant initial  $t_0$ . En fait, prenons  $s_0 < a$  et posons  $y(t) = x(s_0 + t)$ . Alors

$$y'(t) = x'(s_0 + t) = f(x(s_0 + t)) = f(y(t)) \text{ et } y(t_0) = x(s_0 + t_0) = y_0.$$

Donc  $x$  et  $y$  sont des solutions de la même équation différentielle avec deux valeurs initiales différentes.

**Théorème 4.2.1.** Si  $x$  est une solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Alors  $T(t)x_0 = x(t)$  est un semi-groupe flu. De plus,  $T(t)x_0$  est différentiable par rapport à  $t$  et

$$T'(t)x_0 = f(x(t)) = f(T(t)x_0)$$

.

*Démonstration.* Soit  $s > 0$  fixé, on a  $y(t) = x(t+s)$  est solution du problème

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x(s). \end{cases}$$

Par conséquent

$$T(t+s)x_0 = x(t+s) = y(t) = T(t)x(s) = T(t)T(s)x_0, \quad (4.2)$$

et  $T(0)x_0 = x(0) = x_0$ .

Puisque  $x$  est solution du problème, alors  $T(t)x_0$  est différentiable par rapport à  $t$  et

$$T'(t)x_0 = x'(t) = f(x(t)) = f(T(t)x_0).$$

□

**Théorème 4.2.2.** Supposons qu'un semi-groupe flou  $T(t)x$  soit différentiable par rapport à  $t$  pour tout  $x \in E^n$ . Alors  $T(t)x_0$  est une solution du problème (4.1) avec  $f(x) = T'(0)x$ .

*Démonstration.* Par les propriétés du semi-groupe, on obtient

$$\begin{aligned} T'(t)x_0 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x_0 - T(t)x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x_0 - T(t)x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x_0 - T(0)T(t)x_0}{h} = T'(0)T(t)x_0, \end{aligned}$$

et  $T(0)x_0 = x_0$ .

□

Donc toute solution du problème (4.1) définit un semi-groupe flou différentiable et inversement un semi-groupe différentiable est une solution du problème (4.1) avec le générateur  $f(x) = T'(0)(x)$ .

### 4.3 Semi-groupe flou défini par une fonction exponentielle floue

Soit  $f : E^n \rightarrow E^n$  une fonction qui satisfait les conditions d'Osgood et  $t > 0$ . Alors  $tf : E^n \rightarrow E^n$  est aussi satisfait les conditions d'Osgood.

On définit l'application

$$T(t)x_0 = e^{tf}(x_0), \quad x_0 \in E^n.$$

Alors,  $T(0)x_0 = x_0$ .

L'application  $tf_1, t \geq 0$ , peut être vu comme une fonction de deux arguments  $F(t, x)$ , qui est linéaire par rapport au premier argument.

D'après Seppälä [60],  $\left(I + \frac{F(t, \cdot)}{m}\right)^m(j(x))$  converge uniformément dans  $B_t \times B_{j(x)}$ , où  $B_t$  est une boule ouverte quelconque de  $\mathbb{R}^+$  et  $B_{j(x)}$  est une boule ouverte convenablement choisie centrée en  $j(x)$ . Il s'ensuit que  $e^{tf_1}(j(x))$  et par conséquent  $e^{tf}(x) = T(t)x$  est continue en  $t$  pour tout  $x \in E^n$ , elle est Riemann ainsi qu'Aumann intégrable et les

intégrales coïncident.

Pour l'intégrale de Riemann, on a

$$e^{tf}(x_0) = x_0 + \int_0^t f(e^{sf}(x_0)) ds.$$

Soit  $0 \leq k \leq m$ , on note  $O_m^k(t, x) = \left(i + \frac{tf}{m}\right)^k(x)$ . Alors

$$e^{tf}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} O_m^m(t, x), \quad O_m^0(t, x) = x, \quad O_m^k(t, x) = O_k^k\left(\frac{k}{m}t, x\right), \quad O_m^{k+1}(t, x) = O_m^k(t, x) + \frac{t}{m}f(O_m^k(t, x)).$$

On obtient

$$\begin{aligned} e^{tf}(x) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} O_m^m(t, x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( O_m^0(t, x) + \frac{t}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(O_m^k(t, x)) \right) \\ &= x + \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{t}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(O_m^k(t, x)) \\ &= x + \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{t}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(O_k^k\left(\frac{k}{m}t, x\right)\right). \end{aligned}$$

Par approximation de l'intégrale par une somme de Riemann, nous avons

$$x + \int_0^t f(e^{sf}(x)) ds = x + \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{t}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(e^{\frac{k}{m}tf}(x)\right).$$

Puisque  $D(u + w, v + w) = D(u, v)$  pour tous  $u, v, w \in E^n$ , alors en utilisant l'inégalité triangulaire, il est facile de montrer l'inégalité

$$D\left(\sum_{k=0}^m u_k, \sum_{k=0}^m v_k\right) \leq \sum_{k=0}^m D(u_k, v_k).$$

Donc

$$D\left(e^{tf}(x), x + \int_0^t f(e^{sf}(x)) ds\right) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{t}{m} \sum_{k=1}^{m-1} D\left(f\left(O_k^k\left(\frac{k}{m}t, x\right)\right), f\left(e^{\frac{k}{m}tf}(x)\right)\right).$$

En procédant exactement comme dans [31], lorsque les distances de l'espace de Banach  $\|v - w\|$  sont remplacées par les distances  $D(v, w)$ , on voit que la limite du côté droit est égale à zéro, ce qui donne

$$e^{tf}(x) = x + \int_0^t f(e^{sf}(x)) ds.$$

Par conséquent,  $T(t)x_0$  est une solution continue de l'équation intégrale  $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$  et par conséquent une solution du problème (4.1). Ainsi par le théorème 4.2.1,  $T(t)x_0$  est un semi-groupe flou.

**Exemple 4.3.1.** On considère le problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0 \in E^n. \end{cases}$$

Pour  $t \geq 0$ , on a  $\left(i + \frac{tf}{m}\right)(x_0) = x_0 + \frac{t}{m}x_0 = \left(1 + \frac{t}{m}\right)x_0$ . Alors

$$\left(i + \frac{tf}{m}\right)^m(x_0) = \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m x_0 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^t x_0,$$

ce qui est une solution du problème.

La même solution est obtenue par la méthode des  $\alpha$ -coupes pour la résolution des équations différentielles floues.

**Théorème 4.3.1.** Si  $A : E^n \rightarrow E^n$  est un opérateur linéaire borné, alors la fonction exponentielle floue a une représentation d'une série

$$e^{tA}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x, \quad t \geq 0.$$

*Démonstration.* Soit  $A : E^n \rightarrow E^n$  un opérateur linéaire borné. Alors

$$\delta(r) = \sup_{D(x,y) \leq r} D(Ax, Ay) = r \|A\|,$$

et donc  $A$  satisfait les conditions d'Osgood, par conséquent

$$e^{tA}(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(i + \frac{tA}{m}\right)^m(x_0),$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

On définit  $S(t)$  par la série

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

$S(t)$  est un semi-groupe flou (voir [25]), et donc par le théorème 4.2.2,  $S(t)x_0$  est une solution du problème (4.3).

Puisque, un opérateur linéaire borné est lipschitzien, il s'ensuit, d'après le théorème 6.1 de [32], que le problème (4.3) admet une solution unique.

D'où,  $e^{tA}(x_0) = S(t)x_0$  pour tout  $x_0 \in E^n$ . □

## 4.4 Semi-groupes flous fortement continus

En se basant sur la définition des semi-groupes sur un espace de Banach donnée par Brezis et Pazy [6, 7, 58], et en s'inspirant de l'injection de l'espace des nombres flous dans un espace de Banach, on donne la définition d'un semi-groupe flou fortement continu (voir [20, 21, 22, 42, 43]).

**Définition 4.4.1.** Un semi-groupe flou fortement continu d'opérateurs, ou  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe flou, est une famille d'opérateurs  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  sur  $E^n$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\pi(0) = i$ ,
2.  $\forall t, s \geq 0 \quad \pi(t + s) = \pi(t)\pi(s)$ ,
3. La fonction  $t \mapsto \pi(t)x$  est continue au point  $t = 0$  pour tout  $x \in E^n$ , c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} D(\pi(t)x, x) = 0.$$

4. Il existe deux constantes  $M > 0, \omega \in \mathbb{R}$  telles que

$$D(\pi(t)x, \pi(t)y) \leq M e^{\omega t} D(x, y), \forall x, y \in E^n.$$

Si  $M = 1$  et  $\omega = 0$ , on dit que  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un semi-groupe flou de contraction sur  $E^n$ .

**Remarque 4.4.1.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe flou, alors la fonction

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty[ &\longrightarrow E^n \\ t &\longmapsto g(t) = \pi(t)x \end{aligned}$$

est continue pour tout  $x \in E^n$ .

En effet :

D'après 3.  $g$  est continue en 0.

Pour  $t > 0, h > 0$  et  $x \in E^n$  assez petit, on a

$$D(g(t+h), g(t)) = D(\pi(t+h)x, \pi(t)x) = D(\pi(t)\pi(h)x, \pi(t)x) \leq M^{\omega t} D(\pi(h)x, x) = M e^{\omega t} D(g(h), g(0)).$$

Alors  $g$  est continue à droite en  $t$ .

De même, on a

$$D(g(t-h), g(t)) = D(\pi(t-h)x, \pi(t-h)\pi(h)x) \leq M^{\omega(t-h)} D(x, \pi(h)x) \leq M e^{\omega t} D(g(0), g(h)).$$

Alors  $g$  est continue à gauche en  $t$ , et par suite, elle est continue en  $t$ .

**Remarque 4.4.2.** Pour  $t = 0$ , on peut vérifier facilement que  $M \geq 1$ .

**Définition 4.4.2.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe flou, et  $x \in E^n$ . Si pour  $h > 0$  assez petit, la différence de Hukuhara  $\pi(h)x - x$  existe, on définit l'opérateur  $A$  par

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\pi(h)x - x}{h}.$$

Alors l'opérateur  $A : x \mapsto Ax$  défini sur

$$D(A) = \left\{ x \in E^n, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\pi(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\} \subset E^n$$

s'appelle le générateur infinitésimal de  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ .

**Remarque 4.4.3.** Le générateur infinitésimal d'un  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe flou est unique.

**Exemple 4.4.1.** Soit  $k \in \mathbb{R}$ , on définit sur  $E^n$  l'opérateur  $\pi(t) : x \mapsto e^{kt}x$ , pour  $t \geq 0$ , on a

1.  $\pi(0)x = x, \forall x \in E^n$  i.e  $\pi(0) = i$ .
2. Pour  $t, s \geq 0, x \in E^n$

$$\pi(t+s)x = e^{kt+ks}x = (e^{kt}e^{ks})x = e^{kt}(e^{ks}x) = \pi(t)(e^{ks}x) = \pi(t)\pi(s)x.$$

3. pour  $t \geq 0, x \in E^n, D(\pi(t)x, x) = D(e^{kt}x, x)$ . Supposons que  $k \geq 0$ , alors  $e^{kt} - 1 \geq 0$ , et on en déduit que :  $(e^{kt} - 1)x + x = e^{kt}x$ , par conséquent la différence de Hukuhara  $e^{kt}x - x$  (i.e  $\pi(t)x - x$  existe), et on a  $\pi(t)x - x = e^{kt}x - x = (e^{kt} - 1)x$ .  
Alors

$$D(\pi(t)x, x) = D(e^{kt}x - x, \tilde{0}) = D((e^{kt} - 1)x, \tilde{0}) = (e^{kt} - 1)D(x, \tilde{0}).$$

Or  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{kt} - 1 = 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \pi(t)x = x$ .

4. Pour  $t \geq 0, x \in E^n, D(\pi(t)x, \pi(t)y) = D(e^{kt}x, e^{kt}y) = e^{kt}D(x, y)$ .

Par conséquent,  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un semi-groupe flou fortement continu.

On définit sur  $E^n$ , l'opérateur  $A : x \mapsto Ax = kx$ , en utilisant l'identité suivante

$$\begin{aligned} \frac{\pi(t)x - x}{t} &= \left( \frac{e^{kt} - 1}{t} \right) x = \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^{p-1} k^p}{p!} \right) x \\ &= kx + \left( \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1} k^p}{p!} \right) x \\ &= Ax + \left( \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1} k^p}{p!} \right) x. \end{aligned}$$

Par conséquent la différence de Hukuhara  $\frac{\pi(t)x - x}{t} - Ax$  existe, et on a

$$\frac{\pi(t)x - x}{t} - Ax = \left( \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1} k^p}{p!} \right) x.$$



D'où

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{\pi(t)x - x}{t}, Ax\right) &= D\left(\left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1}k^p}{p!}\right)x, \tilde{0}\right) \\
&= \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{t^{p-1}k^p}{p!}\right) D(x, \tilde{0}) \\
&= \left(\frac{e^{kt} - 1 - kt}{t}\right) D(x, \tilde{0}).
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{kt} - 1 - kt}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}k^2t + O(t)\right) = 0$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\pi(t)x - x}{t} = Ax, \quad \forall x \in E^n.$$

Ainsi,  $A$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe flou  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ .

**Proposition 4.4.1.** Soient  $A : E^n \longrightarrow E^n$  et  $A_1 = jAj^{-1} : C \longrightarrow C$  deux opérateurs.  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  sur  $E^n$  si et seulement si  $A_1$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu  $\{\pi_1(t), t \geq 0\}$  défini sur l'ensemble convexe fermé  $C$  par  $\pi_1(t) = j\pi(t)j^{-1}$  pour  $t \geq 0$ .

**Lemme 4.4.1.** ([44]) Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  sur  $E^n$ , alors pour tout  $x \in E^n$  tel que  $\pi(t)x \in D(A)$ , pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $t \longmapsto g(t) = \pi(t)x$  est différentiable et

$$g'(t) = A\pi(t)x \quad \text{i.e} \quad \frac{d}{dt}(\pi(t)x) = A\pi(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

## 4.5 Relation entre semi-groupes et systèmes dynamiques flous

Dans cette partie, on donne une relation entre les semi-groupes et les systèmes dynamiques flous. On considère la famille  $(\varphi_t(\cdot))_{t \geq 0}$  qui définit un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  la famille donnée par

$$\begin{aligned}
\pi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(t, x) &\longmapsto \pi(t)x = \varphi_t(x).
\end{aligned}$$

Notons que, la famille  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  définit un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{R}^n$ . En utilisant l'extension de Zadeh, on peut définir un système dynamique flou  $\widehat{\varphi}_t(\cdot)$ .

On définit la famille  $\{\widehat{\pi}(t), t \geq 0\}$  comme suite

$$\begin{aligned}\widehat{\pi} : \mathbb{R}_+ \times E^n &\longrightarrow E^n \\ (t, x) &\longmapsto \widehat{\pi}(t)x = \widehat{\varphi}_t(x).\end{aligned}$$

D'après la remarque 3.5.1, on a

1.  $\widehat{\pi}(0)x = x$ , pour tout  $x \in E^n$ .
2.  $\widehat{\pi}(t+s)x = \widehat{\pi}(t)\widehat{\pi}(s)x$ , pour tout  $x \in E^n$ ,  $t, s \geq 0$ .

**Théorème 4.5.1.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\|\pi(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Alors

$$D(\widehat{\pi}(t)x, \widehat{\pi}(t)y) \leq Me^{\omega t}D(x, y), \quad \forall x, y \in E^n, \quad t \geq 0.$$

*Démonstration.* Soient  $x, y \in E^n$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned}\rho(\pi(t)[x]^\alpha, \pi(t)[y]^\alpha) &= \sup_{a \in [x]^\alpha} \inf_{b \in [y]^\alpha} \|\pi(t)a - \pi(t)b\| \\ &\leq Me^{\omega t} \sup_{a \in [x]^\alpha} \inf_{b \in [y]^\alpha} \|a - b\| \\ &\leq Me^{\omega t} \rho([x]^\alpha, [y]^\alpha) \\ &\leq Me^{\omega t} \max\{\rho([x]^\alpha, [y]^\alpha), \rho([y]^\alpha, [x]^\alpha)\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho(\pi(t)[y]^\alpha, \pi(t)[x]^\alpha) &= \sup_{a \in [y]^\alpha} \inf_{b \in [x]^\alpha} \|\pi(t)a - \pi(t)b\| \\ &\leq Me^{\omega t} \sup_{a \in [y]^\alpha} \inf_{b \in [x]^\alpha} \|a - b\| \\ &\leq Me^{\omega t} \rho([y]^\alpha, [x]^\alpha) \\ &\leq Me^{\omega t} \max\{\rho([x]^\alpha, [y]^\alpha), \rho([y]^\alpha, [x]^\alpha)\}.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}d([\widehat{\pi}(t)x]^\alpha, [\widehat{\pi}(t)y]^\alpha) &= d(\pi(t)[x]^\alpha, \pi(t)[y]^\alpha) \\ &= \max\{\rho(\pi(t)[x]^\alpha, \pi(t)[y]^\alpha), \rho(\pi(t)[y]^\alpha, \pi(t)[x]^\alpha)\} \\ &\leq Me^{\omega t} \max\{\rho([x]^\alpha, [y]^\alpha), \rho([y]^\alpha, [x]^\alpha)\} \\ &= Me^{\omega t}d([x]^\alpha, [y]^\alpha)\end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que

$$D(\widehat{\pi}(t)x, \widehat{\pi}(t)y) \leq Me^{\omega t}D(x, y).$$

□

**Corollaire 4.5.1.**  $\{\widehat{\pi}(t), t \geq 0\}$  est un semi-groupe flou fortement continu.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.  $\square$

Maintenant, on peut conclure que, à partir d'un système dynamique flou, on peut définir un semi-groupe flou fortement continu.

**Exemple 4.5.1.** On définit sur  $\mathbb{R}$  la famille des opérateurs  $(\varphi_t(\cdot))_{t \geq 0}$  par

$$\varphi_t(x) = e^{kt}x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$(\varphi_t(\cdot))_{t \geq 0}$  est un système dynamique sur  $\mathbb{R}$ .

On considère la famille  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  définie par

$$\pi(t)x = \varphi_t(x).$$

$\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un semi-groupe fortement continu sur  $\mathbb{R}$ , et l'opérateur  $A$  défini par  $Ax = kx$  est leur générateur infinitésimal.

D'après le corollaire 4.5.1 la famille des applications continues  $\{\widehat{\pi}(t), t \geq 0\}$  définie par  $\widehat{\pi}(t)x = \widehat{\varphi}_t(x) = e^{kt}x$ , ( $\widehat{\varphi}_t(\cdot)$  est le système dynamique flou obtenu par l'extension de Zadeh appliquée à  $\varphi_t(\cdot)$ ) définit un semi-groupe flou fortement continu.

## 4.6 Équations différentielles et semi-groupes flous

L'objectif de la construction des semi-groupes flous est la résolution des équations d'évolution floues. On considère le problème traité dans [44] défini par :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(h(t))), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 + (-1)g(x), \end{cases} \quad (4.4)$$

avec  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  et  $D(A) = E^n$ ,  $x_0 \in E^n$ ,  $f : [0, T] \times E^n \rightarrow E^n$ , et  $0 \leq h(t) \leq t$ ,  $\forall t \in [0, T]$  satisfont les conditions suivantes :

(**H**<sub>1</sub>)  $f$  est continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire, il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$D(f(t, x), f(t, y)) \leq LD(x, y), \quad \forall t \in [0, T], x, y \in E^n.$$

(**H**<sub>2</sub>)  $h$  est continue.

(**H**<sub>3</sub>)  $g : \mathcal{C}([0, T], E^n) \longrightarrow E^n$  est lipschitzienne, c'est-à-dire, il existe une constante  $l > 0$  telle que

$$D(g(u), g(v)) \leq lD(u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}([0, T], E^n).$$

(**H**<sub>4</sub>) Il existe une constante  $M \geq 1$  telle que

$$D(\pi(t)x, \pi(t)y) \leq MD(x, y), \quad \forall t \geq 0, x, y \in E^n.$$

**Définition 4.6.1.** On dit que  $x$  est solution faible de l'équation (4.4) si

1.  $x \in \mathcal{C}([0, T], E^n)$ ,  $x(t) \in D(A)$  pour tout  $t \in [0, T]$  ;
2.  $x(t) = \pi(t) [x_0 + (-1)g(x)] + \int_0^t \pi(t-s)f(s, x(h(s)))ds$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Théorème 4.6.1.** ([44]) Supposons que les hypothèses (**H**<sub>1</sub>) – (**H**<sub>4</sub>) sont vérifiées, et si de plus  $M(l + TL) < 1$ . Alors pour tout  $x_0 \in E^n$ , le problème (4.4) admet une solution unique.

**Théorème 4.6.2.** (Dépendance continue solutions-données initiales [44]) Supposons que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Soient  $x$  et  $y$  deux solutions du problème (4.4) associées aux conditions initiales  $x_0$  et  $y_0$  respectivement. Alors

$$H(x, y) \leq \frac{M}{1 - M(l + TL)} D(x_0, y_0).$$

Comme un cas particulier, on considère l'équation spéciale suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 + (-1) \sum_{i=1}^p g_i(x(t_i)), \end{cases} \quad (4.5)$$

avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq T$ . On suppose que

(**H**<sub>5</sub>) Il existe deux constantes  $M_0 \geq 1$ ,  $\omega_0 > 0$  telles que

$$D(\pi(t)x, \pi(t)y) \leq M_0 e^{-\omega_0 t} D(x, y), \quad \text{pour } t \geq 0, x, y \in E^n \text{ avec } M_0 L - \omega_0 < 0 \text{ et } LM_0 T < 1.$$

(**H**<sub>6</sub>) Il existe  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  telles que

$$D(g_i(x), g_i(y)) \leq k_i D(x, y), \quad x, y \in E^n, \quad i = 1, \dots, p.$$

**Théorème 4.6.3.** Supposons que les hypothèses (**H**<sub>1</sub>), (**H**<sub>5</sub>) – (**H**<sub>6</sub>) sont vérifiées, si de plus

$$\sum_{i=1}^p k_i M_0 e^{(M_0 L - \omega_0) t_i} < 1.$$

Alors pour chaque  $x_0 \in E^n$ , le problème (4.5) admet une solution unique.

### 4.6.1 Solution Maximale d'une équation différentielle floue

Dans cette partie, nous étendons la solution de l'équation différentielle floue (4.4), en cherchant un intervalle maximal sur lequel nous avons la solution. On étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (4.4), mais cette fois-ci  $f : [0, +\infty) \times E^n \rightarrow E^n$  est continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $u \in E^n$ , uniformément en  $t$  sur des intervalles bornés, avec des conditions sur les fonctions  $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  et  $g : \mathcal{C}([0, +\infty), E^n) \rightarrow E^n$ , et  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu.

Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(h(t))), & t \in [0, +\infty[ \\ x(0) = x_0 + (-1)g(x), \end{cases} \quad (4.6)$$

**Proposition 4.6.1.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un semi-groupe flou fortement continu. Alors pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\pi(t) \in \mathcal{L}(E^n)$ .

*Démonstration.* Soient  $x, y \in E^n$ , il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\omega$  telles que

$$D(\pi(t)x, \pi(t)y) \leq M e^{\omega t} D(x, y).$$

Or  $D(x, y) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow y$ . Alors  $D(\pi(t)x, \pi(t)y) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow y$ . Ce qui implique que  $\pi(t) \in \mathcal{L}(E^n)$ , pour tout  $t \geq 0$ .  $\square$

**Définition 4.6.2.** Soit  $f : [0, +\infty) \times E^n \rightarrow E^n$ , on dit que  $f$  satisfait une condition de Lipschitz locale en  $u$ , uniformément en  $t$  sur des intervalles bornés, si, pour chaque  $t' \geq 0$  et  $c \geq 0$  il existe une constante  $L(c, t')$  telle que

$$D(f(t, u), f(t, v)) \leq L(c, t')D(u, v), \quad (4.7)$$

pour tout  $u, v \in E^n$  avec  $\|u\|_{\mathcal{F}} \leq c, \|v\|_{\mathcal{F}} \leq c$  et  $t \in [0, t']$ .

**Définition 4.6.3.** On dit que  $x$  est solution faible maximale de (4.6) s'il existe un intervalle maximal  $[0, t_{max}[$  ( $t_{max} \leq +\infty$ ), tel que  $x$  est solution de (4.6) sur  $[0, t_{max}[$ .

Nous étudions d'abord l'existence et l'unicité de la solution faible maximale sous les hypothèses suivantes. Soit  $t_0 > 0$  fixé,

(**A**<sub>0</sub>)  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe flou fortement continu  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ , tel que  $D(A) = E^n$ .

(**A**<sub>1</sub>)  $f : [0, +\infty) \times E^n \rightarrow E^n$  est continue en  $t$  pour  $t \geq 0$ , et localement Lipschitzienne en  $u$ , uniformément en  $t$  sur des intervalles bornés. i.e pour chaque  $t' \geq 0$ , et  $c \geq 0$ , il existe une constante  $L(c, t') > 0$  telle que

$$D(f(t, u), f(t, v)) \leq L(c, t')D(u, v), \quad \forall u, v \in E^n \text{ avec } \|u\|_{\mathcal{F}} \leq c, \|v\|_{\mathcal{F}} \leq c. \quad (4.8)$$

(**A**<sub>2</sub>)  $h$  continue et  $0 \leq h(t) \leq t$ ,  $\forall t \geq 0$  et  $g : \mathcal{C}([0, +\infty), E^n) \rightarrow E^n$  est Lipschitzienne avec une constate  $l > 0$  i.e

$$H(g(u), g(v)) \leq lH(u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^n),$$

tel que  $l\|\pi(t)\| < 1$ ,  $\forall t \leq t_0 + 1$ .

(**A**<sub>3</sub>)  $\pi(t)$  satisfait

$$D(\pi(t)x, \pi(t)y) \leq \|\pi(t)\|D(x, y), \quad \forall x, y \in E^n, \quad t \in [0, 1].$$

Ensuite, nous avons la version suivante du théorème 4.6.1.

**Théorème 4.6.4.** On suppose que les hypothèses (**A**<sub>0</sub>)-(**A**<sub>3</sub>) et (**H**<sub>2</sub>) sont vérifiées, et si de plus  $M(l + t_0L(K(t_0), t_0 + 1)) < 1$ . Alors pour chaque  $x_0 \in E^n$ , le problème (4.6) admet une solution maximale unique  $x$  sur  $[0, t_{max}[$ .

De plus, si  $t_{max} < +\infty$  alors  $\lim_{t \nearrow t_{max}} \|x(t)\|_{\mathcal{F}} = +\infty$ .

*Démonstration.* Pour tout  $t \geq 0$ , le problème (4.6) admet, sous les hypothèses du théorème 4.6.1, une solution faible unique  $x$  sur un intervalle  $[t_0, t_1]$  dont la longueur est délimitée ci-dessous par

$$\delta(t_0, \|x_0\|_{\mathcal{F}}) = \min \left\{ 1, \frac{\|x_0\|_{\mathcal{F}}}{K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1) + N(t_0)} \right\} \quad (4.9)$$

avec  $L(c, t)$  est la constante de Lipschitz locale de  $f$  définie par (4.8),

$$M(t_0) = \max \{ \|\pi(t)\| : 0 \leq t \leq t_0 + 1 \},$$

$$K(t_0) = \frac{2\|u_0\|_{\mathcal{F}}M(t_0)}{1 - lM(t_0)},$$

$$N(t_0) = \max \{ \|f(t, \tilde{0})\|_{\mathcal{F}} : 0 \leq t \leq t_0 + 1 \}.$$

En effet, soit  $t_1 = t_0 + \delta(t_0, \|x_0\|_{\mathcal{F}})$ , où  $\delta(t_0, \|x_0\|_{\mathcal{F}})$  est donnée par (4.9).

Soit  $B(\tilde{0}, K(t_0))$  la boule de rayon  $K(t_0)$  centrée en  $\tilde{0}$  dans  $\mathcal{C}([t_0, t_1], E^n)$ .

On définit l'application  $\Gamma : B(\tilde{0}, K(t_0)) \rightarrow B(\tilde{0}, K(t_0))$  par

$$(\Gamma x)(t) = \pi(t - t_0) [x_0 + (-1)g(x)] + \int_{t_0}^t \pi(t - s)f(s, x(h(s)))ds, \quad x \in B(\tilde{0}, K(t_0)), t \in [t_0, t_1].$$

Cela résulte de l'estimation

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma x)(t)\|_{\mathcal{F}} &= D \left( \pi(t-t_0) [x_0 + (-1)g(x)] + \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, x(h(s)))ds, \tilde{0} \right) \\
&= D \left( \pi(t-t_0) [x_0 + (-1)g(x)] + \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, x(h(s)))ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, \tilde{0})ds, \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, \tilde{0})ds \right) \\
&\leq D \left( \pi(t-t_0) [x_0 + (-1)g(x)], \tilde{0} \right) + D \left( \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, x(h(s)))ds, \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, \tilde{0})ds \right) \\
&\quad + D \left( \tilde{0}, \int_{t_0}^t \pi(t-s)f(s, \tilde{0})ds \right) \\
&\leq \|\pi(t-t_0) [x_0 + (-1)g(x)]\|_{\mathcal{F}} + \int_{t_0}^t D \left( \pi(t-s)f(s, x(h(s))), \pi(t-s)f(s, \tilde{0}) \right) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|\pi(t-s)f(s, \tilde{0})\|_{\mathcal{F}} ds \\
&\leq \|\pi(t-t_0)\| \|x_0 + (-1)g(x)\|_{\mathcal{F}} + \int_{t_0}^t \|\pi(t-s)\| \|D(f(s, x(h(s))), f(s, \tilde{0}))\| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|\pi(t-s)\| \|f(s, \tilde{0})\|_{\mathcal{F}} ds \\
&\leq M(t_0) (\|x_0\|_{\mathcal{F}} + \|g(x)\|) + (t-t_0)L(K(t_0), t_0+1)M(t_0)\|x\| + (t-t_0)M(t_0)N(t_0) \\
&\leq M(t_0) (\|x_0\|_{\mathcal{F}} + l\|x\|) + (t-t_0)K(t_0)L(K(t_0), t_0+1)M(t_0) + (t-t_0)M(t_0)N(t_0) \\
&= M(t_0) [\|x_0\|_{\mathcal{F}} + lK(t_0) + (t-t_0)K(t_0)L(K(t_0), t_0+1) + (t-t_0)N(t_0)]
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma x)(t)\|_{\mathcal{F}} &\leq M(t_0) \left[ \|x_0\|_{\mathcal{F}} + l \frac{2\|x_0\|_{\mathcal{F}}M(t_0)}{1-lM(t_0)} + (t-t_0)K(t_0)L(K(t_0), t_0+1) + (t-t_0)N(t_0) \right] \\
&\leq M(t_0) \left[ 2\|x_0\|_{\mathcal{F}} + l \frac{2\|x_0\|_{\mathcal{F}}M(t_0)}{1-lM(t_0)} \right] \\
&= \frac{2\|x_0\|_{\mathcal{F}}M(t_0)}{1-lM(t_0)} \\
&= K(t_0).
\end{aligned}$$

Parce que, à partir de (4.9) nous avons

$$t - t_0 \leq t_1 - t_0 = \delta(t_0, \|x_0\|_{\mathcal{F}}) \leq \frac{\|x_0\|_{\mathcal{F}}}{K(t_0)L(K(t_0), t_0+1) + N(t_0)}.$$

Par conséquent  $(t-t_0) [K(t_0)L(K(t_0), t_0+1) + N(t_0)] \leq \|x_0\|_{\mathcal{F}}$ .

Alors  $\|\Gamma x\| \leq K(t_0)$  i.e  $\Gamma$  est définie de  $B(\tilde{0}, K(t_0))$  à valeurs dans lui-même.

Dans cette boule,  $\Gamma$  satisfait la condition de Lipschitz uniforme avec la constante  $L = l + M(t_0)L(K(t_0), t_0+1)$ , et ainsi comme dans la preuve du théorème 4.6.1, il possède un point fixe unique  $x$  dans la boule. Ce point fixe est la solution de (4.6) sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .

De ce que nous venons de montrer, il s'ensuit que si  $x$  est une solution faible de (4.6) sur l'intervalle  $[0, \tau]$ , elle peut être étendue à l'intervalle  $[0, \tau + \delta]$  avec  $\delta > 0$ , en définissant

sur  $[\tau, \tau + \delta]$ ,  $x(t) = w(t)$  où  $w(t)$  est la solution de l'équation intégrale

$$w(t) = \pi(t - \tau) [x(\tau) + (-1)g(x)] + \int_{\tau}^t \pi(t - s) f(s, x(h(s))) ds, \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta,$$

De plus,  $\delta$  ne dépend que de  $\|x(\tau)\|_{\mathcal{F}}$ ,  $K(\tau)$  et  $N(\tau)$ .

Soit  $[0, t_{max}[$  l'intervalle maximal d'existence de la solution faible  $x$  de (4.6).

Si  $t_{max} < +\infty$ , alors  $\lim_{t \nearrow t_{max}} \|x(t)\|_{\mathcal{F}} = +\infty$ , car sinon il existe une suite  $t_m \uparrow t_{max}$  telle que  $\|x(t_m)\|_{\mathcal{F}} \leq C$  pour tout  $m$ . Cela impliquerait par ce que nous venons de prouver que pour chaque  $t_m$ , assez proche de  $t_{max}$ ,  $x$  définie sur  $[0, t_m]$  peut être étendue à  $[0, t_m + \delta]$  où  $\delta > 0$  est indépendant de  $t_m$  et donc  $x$  peut être étendue au-delà de  $t_{max}$  contredisant la définition de  $t_{max}$ .

Pour Montrer l'unicité de la solution faible locale  $x$  de (4.6) on note que si  $y$  est une solution faible de (4.6), alors sur chaque intervalle fermé  $[0, t_0]$  sur lequel existent à la fois  $x$  et  $y$  elles coïncident avec l'argument d'unicité donné dans le théorème 4.6.1. Par conséquent,  $x$  et  $y$  ont le même  $t_{max}$  et sur  $[0, t_{max}[$ ,  $x$  et  $y$  coïncident.  $\square$

## 4.6.2 Dépendance continue des solutions faibles maximales par rapport aux données initiales

Dans cette partie, nous étudions la dépendance continue des solutions du problème précédent par rapport aux données initiales.

**Théorème 4.6.5.** Supposons que  $f, g, h$  sous les hypothèses du théorème précédent. Soient  $x$  et  $y$  des solutions faibles maximales de (4.6) sur  $[0, t_{max}[$  correspondant à  $x_0$  et  $y_0$  respectivement. Si  $t_{max} < \infty$  et  $lC(t_{max}) + t_{max}C(t_{max})L(c, t_{max}) < 1$ , alors

$$H(x, y) \leq \frac{C(t_{max})}{1 - [lC(t_{max}) + t_{max}C(t_{max})L(c, t_{max})]} H(x_0, y_0).$$

où  $C(t_{max}) = M \sup_{0 \leq t \leq t_{max}} e^{\omega t}$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} D(x(t), y(t)) &= D\left(\pi(t) [x_0 + (-1)g(x)] + \int_0^t \pi(t - s) f(s, x(h(s))) ds, \right. \\ &\quad \left. \pi(t) [y_0 + (-1)g(y)] + \int_0^t \pi(t - s) f(s, y(h(s))) ds\right) \\ &\leq D(\pi(t) [x_0 + (-1)g(x)], \pi(t) [y_0 + (-1)g(y)]) \\ &\quad + D\left(\int_0^t \pi(t - s) f(s, x(h(s))) ds, \int_0^t \pi(t - s) f(s, y(h(s))) ds\right) \\ &\leq M \sup_{0 \leq t \leq t_{max}} e^{\omega t} D(x_0 + (-1)g(x), y_0 + (-1)g(y)) \\ &\quad + \int_0^t D(\pi(t - s) f(s, x(h(s))), \pi(t - s) f(s, y(h(s)))) ds \\ &\leq C(t_{max}) [D(x_0, y_0) + D(g(x), g(y))] + M \int_0^t e^{\omega(t-s)} D(f(s, x(h(s))), f(s, y(h(s)))) ds \end{aligned}$$



$$\leq C(t_{max})D(x_0, y_0) + \left[ lC(t_{max}) + t_{max}C(t_{max})L(c, t_{max}) \right] H(x, y)$$

Finalement, on obtient

$$H(x, y) \leq \frac{C(t_{max})}{1 - \left[ lC(t_{max}) + t_{max}C(t_{max})L(c, t_{max}) \right]} H(x_0, y_0).$$

□

## 4.7 Semi-groupes flous fractionnaires conformes

Dans cette partie, nous introduisons les semi-groupes fractionnaires flous (conformes) d'opérateurs dont le générateur sera la dérivée conforme du semi-groupe à  $t = 0$ .

**Définition 4.7.1.** Une application  $f : [0, +\infty) \rightarrow E^n$  est dite différentiable floue au sens conforme au point  $t$  à l'ordre  $\alpha$ , s'il existe  $F_\alpha(f)(t) \in E^1$  tel que la limite suivante

$$f^{(\alpha)}(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon},$$

existe est égale à  $F_\alpha(f)(t)$ .

Si  $f^{(\alpha)}(t)$  existe sur  $(0, b)$ ,  $b > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_\alpha(f)(t)$  existe, alors on prend

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

**Définition 4.7.2.** Soit  $\alpha \in (0, a]$ ,  $a > 0$ . Une famille  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  sur  $E^1$  est dite un semi-groupe flou fractionnaire fortement continu (ou  $\alpha$ -semi-groupe flou) si

1.  $\pi(0) = i$ .
2.  $\pi(t + s)^{\frac{1}{\alpha}} = \pi(t^{\frac{1}{\alpha}})\pi(s^{\frac{1}{\alpha}})$ , pour tous  $t, s \geq 0$ .
3. Pour chaque  $x \in E^1$  fixé,

$$\pi(t)x \rightarrow x \text{ quand } t \rightarrow 0^+.$$

4. Il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  telles que

$$D\left(\pi(t)^{\frac{1}{\alpha}}x, \pi(t)^{\frac{1}{\alpha}}y\right) \leq Me^{\omega t^{\frac{1}{\alpha}}} D(x, y), \text{ pour } t \geq 0, x, y \in E^1.$$

En particulier si  $M = 1$  et  $\omega = 0$ , on dit que  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un  $\alpha$ -semi-groupe flou de contraction.

**Remarque 4.7.1.** Clairement, si  $\alpha = 1$ , alors les 1-semi-groupes flous ne sont que les semi-groupes flous fortement continus.

**Exemple 4.7.1.** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^1)$ , on définit la famille d'opérateurs  $\pi(t)$  par

$$(\pi(t)f)(s) = f(s + 2\sqrt{t}).$$

$\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un  $\frac{1}{2}$ -semi-groupe flou. En effet :

On a

1.  $(\pi(0)f)(s) = f(s)$ , pour toute  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^1)$ .
2. Pour  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^1)$

$$\begin{aligned} (\pi(t_1 + t_2)^2 f)(s) &= f\left(s + 2\sqrt{(t_1 + t_2)^2}\right) \\ &= f(s + 2(t_1 + t_2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\pi(t_1^2)\pi(t_2^2)f)(s) &= \left(\pi(t_1^2)f\left(s + 2\sqrt{t_2^2}\right)\right) \\ &= (\pi(t_1^2)f)(s + 2t_2) \\ &= f\left(s + 2t_2 + 2\sqrt{t_1^2}\right) \\ &= f(s + 2(t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

Alors

$$\pi(t_1 + t_2)^2 f = \pi(t_1^2)\pi(t_2^2)f.$$

3. Pour  $t \geq 0$ ,  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^1)$ , on a

$$D((\pi(t)f)(s), f(s)) = D(f(s + 2\sqrt{t}), f(s)) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow 0^+.$$

4. Pour  $t \geq 0$ ,  $f, g \in \mathcal{C}([0, +\infty), E^1)$ , on a

$$\begin{aligned} D((\pi(t)f)(s), (\pi(t)g)(s)) &= D\left(f(s + 2\sqrt{t}), g(s + 2\sqrt{t})\right) \\ &\leq H(f, g), \quad \forall s \geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$H(\pi(t)f, \pi(t)g) \leq H(f, g).$$

par conséquent,  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un  $\frac{1}{2}$ -semi-groupe flou.

**Définition 4.7.3.** Soit  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  un  $\alpha$ -semi-groupe flou et  $x \in E^1$ . Si pour  $t > 0$  assez petit,

$$\pi^{(\alpha)}(t)x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})x - \pi(t)x}{\epsilon},$$

existe, on définit

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)x.$$

Alors, l'opérateur  $A : E^1 \rightarrow E^1$ ,  $x \mapsto Ax$  défini sur

$$D(A) = \left\{ x \in E^1 : \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)x \text{ existe} \right\} \subset E^1,$$

est dit  $\alpha$ -générateur infinitésimal de  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ .

**Exemple 4.7.2.** On définit sur  $E^1$  la famille des opérateurs  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  par  $\pi(t)x = e^{\lambda\sqrt{t}}x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour  $\lambda \geq 0$ ,  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un  $\frac{1}{2}$ -semi-groupe flou, et l'opérateur  $A$  défini par  $Ax = \frac{\lambda}{2}x$  est son  $\frac{1}{2}$ -générateur infinitésimal.

**Proposition 4.7.1.** ([22]) Soit  $A : E^1 \rightarrow E^1$  et  $A_1 = jAj^{-1} : C \rightarrow C$  deux opérateurs.  $A$  est le  $\alpha$ -générateur infinitésimal d'un  $\alpha$ -semi-groupe flou  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  si et seulement si  $A_1$  est le  $\alpha$ -générateur infinitésimal du  $\alpha$ -semi-groupe  $\{\pi_1(t), t \geq 0\}$  défini sur  $C$  par  $\pi_1(t) = j\pi(t)j^{-1}$ , pour  $t \geq 0$ .

*Démonstration.* Il est facile de voir que  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est un  $\alpha$ -semi-groupe flou si et seulement si  $\{\pi_1(t), t \geq 0\}$  est un  $\alpha$ -semi-groupe sur  $C$ .

On suppose que  $A$  est un  $\alpha$ -générateur infinitésimal d'un  $\alpha$ -semi-groupe flou  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ .

Soit  $x \in D(A_1)$ , on a

$$\begin{aligned} \pi_1^{(\alpha)}(t)x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t + \epsilon t^{1-\alpha})x - \pi_1(t)x}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{j\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})j^{-1}x - j\pi(t)j^{-1}x}{\epsilon} \\ &= j \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})j^{-1}x - \pi(t)j^{-1}x}{\epsilon} \right) \\ &= j\pi^{(\alpha)}(t)j^{-1}x. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \pi_1^{(\alpha)}(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} j\pi^{(\alpha)}(t)j^{-1}x = j \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)j^{-1}x = jAj^{-1}x = A_1x.$$

Inversement, si  $A_1$  est le  $\alpha$ -générateur infinitésimal du semi-groupe  $\{\pi_1(t), t \geq 0\}$  sur  $C$ , alors pour tout  $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \pi^{(\alpha)}(t)x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})x - \pi(t)x}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{j^{-1}\pi_1(t + \epsilon t^{1-\alpha})jx - j^{-1}\pi_1(t)jx}{\epsilon} \\ &= j^{-1} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t + \epsilon t^{1-\alpha})jx - \pi_1(t)jx}{\epsilon} \right) \\ &= j^{-1}\pi_1^{(\alpha)}(t)jx. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \pi^{(\alpha)}(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} j^{-1} \pi_1^{(\alpha)}(t)jx = j^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi_1^{(\alpha)}(t)jx = j^{-1} A_1 jx = Ax.$$

□

**Remarque 4.7.2.** Puisque le  $\alpha$ -générateur infinitésimal  $A_1$  de  $\{\pi_1(t), t \geq 0\}$  est unique, on en déduit que le  $\alpha$ -générateur infinitésimal  $A$  de  $\{\pi(t), t \geq 0\}$  est aussi unique.

**Théorème 4.7.1.** Soit  $A$  le  $\alpha$ -générateur infinitésimal d'un  $\alpha$ -semi-groupe flou  $\{\pi(t), t \geq 0\}$ , alors pour tout  $x \in D(A)$  tel que  $\pi(t)x \in D(A)$  pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $t \mapsto g(t) = \pi(t)x$  est différentiable floue au sens conforme au point  $t$  à l'ordre  $\alpha$  et

$$g^{(\alpha)}(t) = \pi^{(\alpha)}(t)x = A\pi(t)x.$$

*Démonstration.* Pour  $t \geq 0$ ,  $x \in E^1$ , on a

$$\begin{aligned} g^{(\alpha)}(t) = \pi^{(\alpha)}(t)x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t + \epsilon t^{1-\alpha})x - \pi(t)x}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} x - \pi(t)x}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(t^\alpha + (t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} x - \pi(t)x}{\epsilon} \end{aligned}$$

Puisque  $\pi(t)$  est un  $\alpha$ -semi-groupe flou, alors  $\pi(a + b)^{\frac{1}{\alpha}} = \pi\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right) \pi\left(b^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \pi^{(\alpha)}(t)x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \pi(t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} x - \pi(t)x}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{j^{-1} \pi_1((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} j j^{-1} \pi_1(t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} jx - j^{-1} \pi_1(t)jx}{\epsilon} \\ &= j^{-1} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_1((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \pi_1(t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} jx - \pi_1(t)jx}{\epsilon} \right) \\ &= j^{-1} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_1((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \pi_1(t)jx - \pi_1(t)jx}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Par le théorème fondamental de la dérivée fractionnaire conforme (voir[35]), on obtient

$$\frac{\pi_1((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \pi_1(t)jx - \pi_1(t)jx}{\epsilon} = \pi_1^{(\alpha)}(c) \pi_1(t)jx \frac{[(t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha]}{\alpha \epsilon}$$

pour  $0 < c < (t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha$ .

Si  $\epsilon \rightarrow 0$ , alors  $c \rightarrow 0$ , et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi_1^{(\alpha)}(c) \pi_1(t)jx = \pi_1^{(\alpha)}(0) \pi_1(t)jx = A_1 \pi_1(t)jx$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \pi^{(\alpha)}(t)x &= j^{-1} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_1((t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \pi_1(t)jx - \pi_1(t)jx}{\epsilon} \right) \\ &= j^{-1} \left( A_1 \pi_1(t)jx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[(t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha]}{\alpha \epsilon} \right). \end{aligned}$$

Par la règle d'Hopital, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[(t + \epsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha]}{\alpha \epsilon} = 1.$$

$$\text{Ainsi } g^{(\alpha)}(t) = \pi^{(\alpha)}(t)x = j^{-1}A_1\pi_1(t)jx = j^{-1}A_1jj^{-1}\pi_1(t)jx = A\pi(t)x$$

□

# Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail nous avons étudié les semi-groupes d'opérateurs linéaires sur des espaces des fonctions floues, nous avons aussi établi une relation entre les semi-groupes et les systèmes dynamiques flous, puis nous avons démontré de nouveaux résultats dans ce sujet, notamment l'existence et l'unicité de la solution maximale d'une équation d'évolution floue.

A titre d'application et d'un point de vue d'analyse numérique, nous avons étudié un système d'équations différentielles floues non linéaires qui traite la relation entre la consommation de poisson et la mortalité coronarienne.

Il est important de noter que la majorité des travaux sur les EDFs se contente de traiter le cas des EDFs linéaires, et notre exemple (voir chapitre 3) est parmi les travaux rares étudiant le cas non linéaire.

Ensuite, nous avons généralisé la notion des semi-groupes flous au cas des opérateurs fractionnaires flous, dans laquelle les semi-groupes sur l'espace des fonctions floues deviennent un cas particulier des semi-groupes flous fractionnaires.

Nous avons également mis en évidence quelques propriétés de ce type des semi-groupes. Ces résultats apparaissent encourageant pour continuer de creuser dans ce domaine pour mieux explorer les équations différentielles floues, surtout dans le cas non linéaire, puisque la modélisation de certains phénomènes réels se ramène à l'étude des équations d'évolution non linéaires floues.

Dans le cadre de nos futures recherches, nous envisageons aussi d'étudier les équations aux dérivés partielles et les équations intégro-différentielles fractionnaires floues.

## Bibliographie

- [1] Barnabás Bede. Note on “Numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor–corrector method”. *Information Sciences*, 178(7) :1917–1922, 2008.
- [2] Barnabás Bede and Sorin G. Gal. Almost periodic fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 147(3) :385–403, 2004.
- [3] Barnabás Bede and Sorin G. Gal. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 151 :581–599, 2005.
- [4] Barnabás Bede, Imre J. Rudas, and Attila L. Bencsik. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Information Sciences*, 177(7) :1648–1662, 2007.
- [5] S Bede and Sorin G Gal. Solutions of Fuzzy Differential Equations based on Generalized Differentiability. *Communications in Mathematical Analysis*, 9 :22–41, 2010.
- [6] H Brezis and A Pazy. Semigroups of nonlinear contractions on convex sets. *Journal of Functional Analysis*, 6(2) :237–281, 1970.
- [7] H Brezis and A Pazy. Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, 9(1) :63–74, 1972.
- [8] James J. Buckley and Thomas Feuring. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 110(1) :43–54, 2000.
- [9] M.S. Ceconello, R.C. Bassanezi, A.V. Brandão, and J. Leite. Periodic orbits for fuzzy flows. *Fuzzy Sets and Systems*, 230 :21–38, 2013.
- [10] M.S. Ceconello, J. Leite, R.C. Bassanezi, and A.J.V. Brandão. Invariant and attractor sets for fuzzy dynamical systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 265 :99–109, 2015.
- [11] Y. Chalco-Cano and H. Roman-Flores. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(1) :112–119, 2008.
- [12] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores. Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(11) :1517–1527, 2009.
- [13] Laécio Carvalho de Barros, Rodney Carlos Bassanezi, and Weldon Alexander Lodwick. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathe-*

- matics*, volume 347 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Berlin Heidelberg, 2017.
- [14] Laecio C de Barros, Rodney C Bassanezi, and Pedro A Tonelli. On the Continuity of The Zadeh's Extension. *Proc. IFSA 1997 Congress, Prague*, page 6, 1997.
- [15] P. Diamond. Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6), 1999.
- [16] P. Diamond. Stability and periodicity in fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5) :583–590, 2000.
- [17] Phil Diamond. Metric spaces of fuzzy sets : theory and applications, 1994.
- [18] Phil Diamond. Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 129(1) :65–71, 2002.
- [19] Didier Dubois and Henri Prade. The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3) :279–300, 1987.
- [20] A. El Allaoui, S. Melliani, and L. S. Chadli. Complex fuzzy dynamical systems and stability of the equilibrium point. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 3 :223–233, 2016.
- [21] A. El Allaoui, S. Melliani, and L. S. Chadli. Fuzzy dynamical systems and invariant attractor sets for fuzzy strongly continuous semigroups. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2 :148–155, 2016.
- [22] A. El Allaoui, S. Melliani, and L. S. Chadli. Fuzzy  $\alpha$ -semigroups of operators. *General Letters in Mathematics*, 2 :42–49, 2017.
- [23] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag, 2000.
- [24] Róbert Fullér and Tibor Keresztfalvi. On generalization of Nguyen's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 41(3) :371–374, 1991.
- [25] C. S Gal and S. G Gal. Semigroups of Operators on Spaces of Fuzzy-number-valued Functions with Applications to Fuzzy Differential Equations. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 13(3) :647–682, 2005.
- [26] Ciprian G. Gal and Sorin G. Gal. Semigroups of Operators on Spaces of Fuzzy-Number-Valued Functions with Applications to Fuzzy Differential Equations. *arXiv :1306.3928 [math]*, 2013.
- [27] Roy Goetschel and William Voxman. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(1) :31–43.



- [28] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [29] Eyke Hüllermeier. Numerical methods for fuzzy initial value problems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 07(05) :439–461, 1999.
- [30] Mohammed AL Horani, Roshdi Khalil, and Thabet Abdeljawad. Conformable Fractional Semigroups of Operators. *arXiv :1502.06014 [math]*, 2014.
- [31] O. Kaleva and V. Seppälä. On exponential function as the unique solution of autonomous differential equations in banach spaces. *Rend. Mat*, 4(1) :647–658, 1982.
- [32] Osmo Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3), 1987.
- [33] Osmo Kaleva. A note on fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 64(5) :895–900, 2006.
- [34] A. Kandel and W.J. Byatt. *Fuzzy differential equations*. Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society, Tokyo, 1981.
- [35] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014.
- [36] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic : theory and applications*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [37] Werner Krabs and Stefan Pickl. *Dynamical systems : stability, controllability and chaotic behavior*. Springer, Heidelberg ; New York, 2010.
- [38] M. E. N. Lamlili, A. Boutayeb, M. Derouich, W. Boutayeb, and A. Moussi. Fish consumption impact on coronary heart disease mortality in morocco : A mathematical model with optimal control. *Engineering Letters*, 24(3), 2016.
- [39] Vasile Lupulescu. On a class of fuzzy functional differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(11) :1547–1562, 2009.
- [40] Ma Ming. On embedding problems of fuzzy number spaces : Part 4. *Fuzzy Sets and Systems*, 58(2) :185–193, 1993.
- [41] Marek T. Malinowski. On random fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21) :3152–3165, 2009.
- [42] S. Melliani, A. El Allaoui, and L. S. Chadli. Relation between fuzzy semigroups and fuzzy dynamical systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 17 :60–69, 2017.

- [43] S. Melliani, A. El Allaoui, and L. S. Chadli. Controlled fuzzy evolution equations : Theoretical aspects and applications. *Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems , Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 372 :113–126, 2019.
- [44] Said Melliani, El Hassan Eljaoui, and Lalla Saadia Chadli. Fuzzy differential equation with nonlocal conditions and fuzzy semigroup. *Advances in Difference Equations*, 2016(1), 2016.
- [45] Marina Tuyako Mizukoshi, Laécio C. Barros, Yurilev Chalco-Cano, Heriberto Román-Flores, and Rodney Carlos Bassanezi. Fuzzy differential equations and the extension principle, 2007.
- [46] Marina Tuyako Mizukoshi, Laécio Carvalho Barros, and Rodney Carlos Bassanezi. Stability of Fuzzy Dynamic Systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(01) :69–83, 2009.
- [47] Moiseis dos Santos Ceconello. Fuzzy SI Model.
- [48] J. D. Murray. *Mathematical biology*. Interdisciplinary applied mathematics. Springer, New York, 3rd ed edition, 2002.
- [49] Hung T Nguyen. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64(2) :369–380, 1978.
- [50] Hung T. Nguyen and Elbert A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [51] M. Oberguggenberger and S. Pittschmann. Differential Equations With Fuzzy Parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5(3) :181–202, 1999.
- [52] Witold Pedrycz and Fernando Gomide. An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design. page 60.
- [53] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 3 edition, 2001.
- [54] Madan L. Puri and Dan A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (2) :552–558, 1983.
- [55] Dr Rodney. Tese apresentada ao Instituto de Matematica Estatística e Computação Científica (UNICAMP), como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada. page 111.
- [56] Heriberto Román-Flores, Laécio C. Barros, and Rodney C. Bassanezi. A note on Zadeh’s extensions. *Fuzzy Sets and Systems*, 117(3) :327–331, 2001.

- [57] Tadeusz Rzeżuchowski and Janusz Wsowski. Differential Equations with Fuzzy Parameters via Differential Inclusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 255(1) :177–194, 2001.
- [58] Abdelati El Allaoui Said Melliani and Lalla Saadia Chadli. A general class of periodic boundary value problems for controlled nonlinear impulsive evolution equations on banach spaces. *Advances in Difference Equations*, 290 :1–13, 2016.
- [59] V. Seppälä. A banach space exponential function concept. *Rend. Mat*, 2(4) :191–212, 1971.
- [60] V. Seppälä. Solution of a family of initial condition problems in terms of the banach space exponential function. *Rend. Mat*, 2(5) :329–347, 1972.
- [61] Morris Hirsch Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic, 1974.
- [62] Shiji Song, Lei Guo, and Chunbo Feng. Global existence of solutions to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(3) :371–376, 2000.
- [63] Shiji Song, Cheng Wu, and E. S. Lee. Asymptotic equilibrium and stability of fuzzy differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 49(7) :1267–1277, 2005.
- [64] Dmitri Vorobiev and Seppo Seikkala. Towards the theory of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 125(2) :231–237, 2002.
- [65] Seamus Paul Whelton, Jiang He, Paul Kieran Whelton, and Paul Muntner. Meta-analysis of observational studies on fish intake and coronary heart disease. *The American Journal of Cardiology*, 93(9) :1119–1123, 2004.
- [66] Congxin Wu, Shiji Song, and E. Stanley Lee. Approximate Solutions, Existence, and Uniqueness of the Cauchy Problem of Fuzzy Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202(2) :629–644, 1996.
- [67] Jusheng Zheng, Tao Huang, Yinghua Yu, Xiaojie Hu, Bin Yang, and Duo Li. Fish consumption and CHD mortality : an updated meta-analysis of seventeen cohort studies. *Public Health Nutrition*, 15 :725–737, 2012.