N° d'ordre : —/2019

UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE

Faculté des Sciences et Techniques

Béni Mellal

Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

IDRIS BAKHADACH

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Structures Algèbriques Floues Intuitionistiques.

Soutenue le 15/07/2019 devant le jury :

Pr. Khalid HILAL	Professeur à la FST, Béni Mellal	Président
Pr. Elhoussine AZROUL	Professeur à la FS Dhar El Mehrez, Fes	Rapporteur
Pr. Hassan EL AMRI	Professeur à l'ENS, casablanca	Rapporteur
Pr. Adil ABBASSI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Examinateur
Pr. Laarbi AFIFI	Professeur à la FS Ain Chock, casablanca	Examinateur
Pr. Said MELLIANI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Encadrant
Pr. Lala Saadia CHADLI	Professeur à la FST, Béni Mellal	Co-encadrant
Pr. M'hamed ELOMARI	Professeur à l'EST, Fes	Invité.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer, ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur **Said MELLIANI**, directeur du laboratoire de recherche "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique" et responsable du master "Génie Mathématiques et Applications", qui m'a honoré par la confiance qu'il m'a accordé, par son soutien et ses précieuses directives durant toutes les années de thèse. Je tiens aussi à le remercier d'avantage pour son encadrement fructueux et pour la précieuse formation qu'elle m'a donnée.

Je tiens également à adresser, du fond du cœur, mes plus sincères remerciements à ma chère directrice de thèse Madame, le professeur **Lalla Saadia CHADLI**, pour son aide capitale, pour sa disponibilité et son inconditionnelle patience tout au long de la réalisation de ce travail, pour tout le temps qu'elle a consacrée à m'orienter pour faire les bons choix et pour ses conseils qui ont été particulièrement la source de réussite de cette thèse.

Je tient à présenter ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à Monsieur **M'hamed Elomari** pour ses conseils, ses critiques, ainsi que ses encouragements. Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Les mêmes expressions de reconnaissance vont également à tous les enseignants du Département de Mathématiques.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique", qui m'ont accueilli parmi eux. Nos rencontres, nos échanges ont été d'une précieuse assistance pour mon travail de recherche.

Mes expressions de respect et d'amour les plus chaleureuses sont destinées à ma mère, mon père, ma sœur et mes frères, pour leurs soutiens et leurs encouragements permanents, leur patience et leur compréhension durant toutes les années consacrées à ce travail, qu'ils soient certains de toute ma reconnaissance.

Que mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Table des matières

Table des figures

Chapitre 0

Introduction

Le présent travail est réalisé, au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (LMACS) à la faculté des sciences et techniques de Beni mellal, pour obtenir le diplôme de doctorat en mathématiques de l'université Sultan Moulay Slimane pour l'année 2018/2019.

L'algèbre se base sur la théorie des ensembles qui est une théorie fondamentale conçu par Cantor au XIXème siècle. Un ensemble est une notion première qui désigne de façon intuitive une collection d'objets. Les objets, ou éléments d'un ensemble peuvent être de types différents. On peut avoir un ensemble de points, un ensemble de nombres, un ensemble de jours ou encore un ensemble de fruits. Ce qui est essentiel dans la théorie des ensembles initialement développée, c'est la notion d'appartenance, c'est-à-dire le fait de savoir si un objet fait partie d'un ensemble ou non. Contrairement aux ensembles classiques dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs possibles 0 ou 1. Les classes d'objets rencontrées dans le monde réel ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis. Ce constat ne fait que souligner le fossé qui sépare les représentations mentales de la réalité, des modèles mathématiques usuels (à base de logique binaire, de nombres réels, d'équations différentielles, etc.). Les classes d'objets auxquelles Zadeh [58] fait allusion n'existent qu'à travers ces représentations mentales et correspondent à des termes vagues du langage naturel, tels que "température élevée", "puissance moyenne", etc.

La notion d'ensemble classique semble mal adaptée pour représenter des classes de ce type. Par exemple, si l'on considère le concept "homme jeune", il est difficile de proposer un seuil en dessous duquel un homme est considéré comme "jeune". L'idée de Zadeh a été de suggérer qu'au lieu de chercher, à tout prix, un seuil unique pour l'appartenance à l'ensemble des âges "jeunes" dans un contexte donné, il semblait plus réaliste de considérer deux seuils $s_1 < s_2$, tels que le terme jeune s'applique parfaitement aux âges plus petits que s_1 (par exemple 19 ans), et ne s'applique plus du tout au dessus de s_2. Les âges plus petits que s_1 auront le degré d'appartenance maximal (en général supposé égal à 1) et les âges plus grands que s_2 (par exemple 60 ans) auront un degré d'appartenance minimal (en général égal à 0). Entre s_1 et s_2, les degrés d'appartenance seront intermédiaires, par convention entre 0 et 1.

La théorie des ensembles flous est en fait selon Zadeh [58], un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel : un rapprochement né de l'incessante quête humaine, pour une meilleure compréhension des cheminements mentaux de la connaissance (Kaufman [23], 1973). Elle a donc pour objet d'étude : la représentation des connaissances imprécises et le raisonnement approché. De ce fait (Gacône [16], 1997), on peut la situer à côté des heuristiques de résolutions de problèmes, des systèmes experts, de l'apprentissage, de l'intelligence artificielle distribuée et même du traitement de la langue naturelle. Aujourd'hui, les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...

Les structures algébriques jouent un rôle de premier plan dans les mathématiques avec des applications variées dans de nombreuses disciplines telles que la physique théorique, les sciences informatiques, l'ingénierie de contrôle, sciences de l'information, théorie du codage, espaces topologiques et similaires. Ceci fournit la motivation suffisante aux chercheurs d'examiner divers concepts et les résultats du domaine de l'algèbre abstrait dans le cadre plus large de la création floue.

Les dernières années, le recourt à la théorie floue devient indispensable, d'où le besoin de l'extension de pas mal de notions mathématiques classiques dans cette théorie, En 1971, Rosenfeld [50] utilisé la notion dun ensemble flou pour introduir la notion dun groupe flou. Cependant, Liu [29] en 1982 a introduit la notion dun anneau flou. ces deux notions (groupe et anneau flous) ont été étudiées et abordées par plusieurs chercheurs, à titre dexemple, Abdul [1], Akgul [2], Alam [3], Liu [29], Yuan [56].

En 1983, K.Atanassov a introduit la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques. qui est en fait une extension de la théorie des sous-ensembles flous, et chaque sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X est caractérisé par les deux fonctions μ_A et ν_A appelées respectivement degré d'appartenance et degré de non-appartenance, et vérifient la condition suivante :

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X$$

Le traitement de ce projet est composé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on va introduire les notions de base de la théorie des ensembles flous suite aux différents travaux élaborer par L.Zadeh [58], H. Prade et D. Dubois [14], H. Bandemer [11], S. Miyamoto [40], A. Kaufmann [24], H. Nguyen [45], M.Mizumoto et K. Tanaka [41].

Dans le second chapitre, on présentera la notion de structures algébriques flous, à savoir la notion des sous-groupes et sous-anneaux flous et leurs propriétés [29, 30, 48, 46, 47, 53, 54, 55, 50]. Puis, on introduit la notion de structures algébriques flous en se basant sur la notion des points flous introduite par [49].

Le troisième chapitre, sera consacré à la théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques et ses propriétés élaborées par K. Atanassov.

Dans le quatrième chapitre, on va focalisé le travail à la construction des structures algébriques flous intuitionistiques en se basant sur la notion des points flous intuitionistiques. Puis, on va présenté quelques propriétés sur ces structures définies avec cette nouvelle vision.
Enfin, la **conclusion générale** résumera notre contribution et donnera lieu à d'autre piste de recherche .

Chapitre 1

Sous-ensembles flous

1.1 Notions fondamentales

Définitions et exemples

Soit X un univers.

Définition 1.1 *On définit un sous-ensemble A de X par la donnée d'une fonction*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1],$$

cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de A.
On peut aussi représenter le sous-ensemble flou A par

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\}.$$

On note par $\mathbb{F}(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Remarque 1.1 *Un ensemble classique M est un sous-ensemble flou, il suffit de considérer sa fonction d'appartenance égale à sa fonction caractéristique.*

$$\mu_M = \chi_M$$

Définition 1.2 *Soit A un sous-ensemble flou de X.*

— *On appelle Support de A noté $S(A)$, ($Supp(A)$), l'ensemble*

$$S(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) > 0\Big\}.$$

— *On appelle noyau de A noté $N(A)$, l'ensemble*

$$N(A) = \Big\{x \in X, \quad \mu_A(x) = 1\Big\}.$$

— *On dit que A est normal, s'il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$\mu_A(x_0) = 1.$$

— *On appelle hauteur de A notée $h(A)$ le réel*

$$h(A) = \sup\Big\{\mu_A(x), \quad x \in X\Big\}.$$

Remarque 1.2 *Le* sup *n'est pas forcement atteint par la fonction d'appartenance μ_A. En prenant l'exemple de la fonction tangente hyperbolique* ($\forall x \in X$, $\mu_A(x) = \tanh(x)$).

Les α-coupes associées à un ensemble flou

Il est souvent intéressant de se référer à des sous-ensembles classiques correspondant de façon approximative à des sous-ensembles flous donnés, afin d'établir des critères de prise de décision.
La façon la plus simple de réaliser cette approximation est de fixer une limite inférieure, notée α, aux degrés d'appartenance. On construit ainsi le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé au sous-ensemble flou A appartenant à $\mathbb{F}(X)$ pour le seuil α, en sélectionnant tous les éléments de X qui appartiennent à A avec un degré au moins égal à la valeur du réel α.

Définition 1.3 *On appelle la α-coupe ou sous-ensemble de niveau α, le sous-ensemble ordinaire A_α, défini par l'application Γ_α.*

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_\alpha : & \mathbb{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & A & \longmapsto & \Gamma_\alpha(A) \end{array}$$

tel que $\Gamma_\alpha(A) = A_\alpha = \{x \in X : \ \mu_A(x) \ \geq \alpha\}$, *avec* $0 \leq \alpha \leq 1$

Lorsqu'on construit une α-coupe A_α d'un sous-ensemble flou A, on peut dire que α représente le seuil d'appartenance, relativement à la définition de A. Plus on est exigeant sur la notion d'appartenance, plus on augmente ce seuil.

Propriétés 1.1 *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$. Alors,*

1) $\mu \subseteq \nu \Rightarrow \mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}, \forall \alpha_1 \in [0,1]$

2) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \mu_{\alpha_2} \subseteq \mu_{\alpha_1}, \ \forall (\alpha_1, \ \alpha_2) \in [0,1]^2$

Démonstration

Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$, et $(\alpha_1,\ \alpha_2)\ \in\ [0,1]^2$

1) On suppose que $\mu \subseteq \nu$.

Montrons que $\mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

On a

$$\begin{aligned}(x \in \mu_{\alpha_1}) &\Leftrightarrow (x \in X,\ \mu(x)\ \geq \alpha_1)\\ &\Rightarrow (x \in X,\ \nu(x)\ \geq \alpha_1)\\ &\Leftrightarrow (x \in \nu_{\alpha_1}) \qquad \mathit{car}\ \mu \subseteq \nu,\end{aligned}$$

donc $\mu_{\alpha_1} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

2) On suppose que $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Montrons que $\mu_{\alpha_2} \subseteq \nu_{\alpha_1}$.

On a

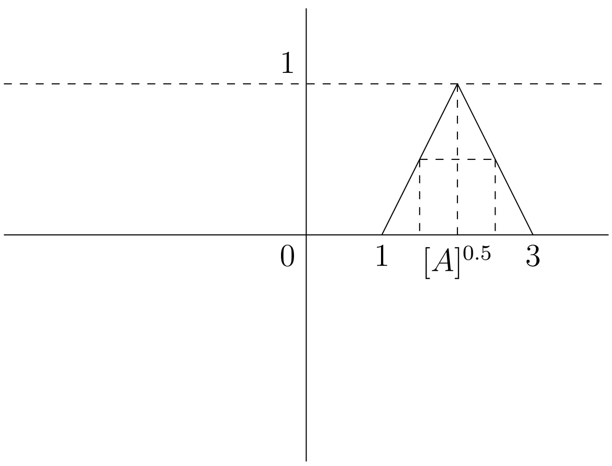
$$\begin{aligned}(x \in \mu_{\alpha_2}) &\Leftrightarrow (x \in X,\ \mu(x)\ \geq \alpha_2)\\ &\Rightarrow (x \in X,\ \mu(x)\ \geq \alpha_1)\\ &\Leftrightarrow (x \in \mu_{\alpha_1}),\end{aligned}$$

donc $\mu_{\alpha_2} \subseteq \nu_{\alpha_1}$

Exemple 1.1 *Soit le sous ensemble flou A décrit par sa fonction d'appartenance*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-1 & \mathit{pour}\ \ x \in [1,2] \\ -x+3 & \mathit{pour}\ \ x \in [2,3] \\ 0 & \quad \mathit{ailleurs} \end{cases}$$

A est un ensemble flou de $\mathbb{R}$ *dont le support est* $Supp(A) =]1,3[$ *et* $A^1 = \{2\}$.



Théorème 1.1 *Soit* $\{\mu_i \ / \ i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$. *Alors,* $\forall \alpha \in [0,1]$, *on a*

1. $\bigcup\limits_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \subseteq (\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)_a$
2. $\bigcap\limits_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i)_a.$

Démonstration

Soients $\{\mu_i \ / \ i \in I\} \subseteq \mathbb{F}(X)$ et soit $\alpha \in [0,1]$. Alors,

1.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I}(\mu_i)_\alpha &\Leftrightarrow \exists i \in I \quad : x \in (\mu_i)_\alpha \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I : \mu_i(x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \bigvee\nolimits_{i\in I}\mu_i(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow (\bigcup_{i\in I}\mu_i)(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in (\bigcup_{i\in I}\mu_i)_\alpha. \end{aligned}$$

Donc, $\bigcup\limits_{i\in I}(\mu_i)_\alpha \subseteq (\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

2.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_\alpha &\Leftrightarrow \forall i \in I \ : \ x \in (\mu_i)_\alpha \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : \mu_i(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\mu_i(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in (\bigcap_{i\in I}\mu_i)_\alpha. \end{aligned}$$

Donc, $\bigcap\limits_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

Remarque 1.3 *Si* I *est finie alors on a l'égalité* $\bigcup\limits_{i\in I}(\mu_i)_\alpha = (\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)_\alpha$.

Remarque 1.4 *Si* $\forall x \in X$, $\mu(x) \leq \nu(x)$, *on dit que* μ *est contenu dans* ν *(ou* ν *contient* μ*) et on écrit :* $\mu \subseteq \nu$.
Si $\mu \subseteq \nu$ *et* $\nu \neq \mu$ *alors, on dit que* μ *est contenu entièrement dans* ν *et on écrit* $\mu \subset \nu$.
$\subseteq$ *est une relation d'ordre partiel dans* $\mathbb{F}(X)$.

Démonstration

Montrons que $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{F}(X)$.

Réflexivité :
Soit $\mu \in \mathbb{F}(X)$.
On a $\mu = \mu \Rightarrow \mu \subseteq \mu$,
donc, $\subseteq$ est Réflexive dans $\mathbb{F}(X)$.
Antisymétrie :
Soient $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$ On a

$$\begin{aligned}((\mu \subseteq \nu) \ et \ (\nu \subseteq \mu)) &\Leftrightarrow ((\forall x \in X \ : \ \mu(x) \ \leq \nu(x)) \ et \ (\forall x \in X \ : \ \nu(x) \ \leq \mu(x))) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X : \mu(x) = \nu(x)) \\ &\Leftrightarrow (\mu = \nu),\end{aligned}$$

donc, $\subseteq$ est antisymétrique dans $\mathbb{F}(X)$.
Transitivité :
Soient $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{F}(X)$, on a

$$\begin{aligned}(\mu \subseteq \nu \ et \ \nu \subseteq \xi) &\Leftrightarrow (\forall x \in X, \ \mu(x) \ \leq \nu(x) \ et \ \nu(x) \ \leq \xi(x)) \\ &\Rightarrow (\forall x \in X : \ \mu(x) \ \leq \xi(x)) \\ &\Leftrightarrow \mu \subseteq \xi,\end{aligned}$$

donc, $\subseteq$ est transitive dans $\mathbb{F}(X)$.
Par conséquent, $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{F}(X)$.

1.2 Principe d'extension de Zadeh

Le principe d'extension a été décrit par L.A.Zadeh [58]. Il nous permet de donner un sens à l'extension du domaine d'une application ou d'une relation définie sur un ensemble X aux sous ensembles flous de X. On a montré dans [41] que l'approche ensembliste (i.e. l'utilisation des α-coupes d'un ensemble flou) est très simple que l'approche fonctionnelle ($i.e.$ l'utilisation des fonctions d'appartenances).
L'application du principe d'extension aux ensembles flous peut être regardée comme une application de ce principe aux α-coupes de l'ensemble flou en question.
En général, si

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

et si A et B sont des sous ensembles flous respectifs de X et Y , respectivement, on obtient

$$\Big(f\,(A, B)\Big)_{\alpha} = f\Big(A_{\alpha}, B_{\alpha}\Big)$$

où A_α, B_α et $(f(A,B))_\alpha$ sont respectivement les α-coupes de A, B et $f(A,B)$.

Résolution de l'identité

Pour $\alpha \in]0,1]$, rappelons que l'ensemble α-coupe de A est défini par

$$A_\alpha = \Big\{x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors par définition,

$$A = B \ \text{ si et seulement si } \ \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

Si $A, B \in \mathbb{F}(X)$, alors ,

$$A = B \ \text{ si et seulement si } \ A_\alpha = B_\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1]$$

Il est aussi évident que

$$Supp(A) = \bigcup_{\alpha \in]0,1]} A_\alpha$$

D'autre part, on a

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \Big(\alpha \chi_{A_\alpha}(x)\Big) \tag{1.1}$$

Opérations sur les ensembles flous

Les opérations sur les sous-ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.). Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques.

— **Complémentaire** : Soit $A \in \mathbb{F}(X)$ caractérisé par la fonction d'appartenance μ_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou, noté $\overline{A}$, et caractérisé par la fonction d'appartenence $\mu_{\overline{A}}$, définie par :

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Réunion** : Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, la réunion de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cup B$, et

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \qquad \forall x \in X$$

— **Intersection** Pour tout $A, B \in \mathbb{F}(X)$, l'intersection de A et B est un sous-ensemble flou de X, noté $A \cap B$, et

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X.$$

Principe d'extension

Définition 1.4 *[32] Soit $f : X \longrightarrow Y$, et $A \in \mathbb{F}(X)$ et $B \in \mathbb{F}(Y)$, alors l'ensemble flou $f(A)$ est défini, via le principe d'extension, par*

$$f(A) \in \mathbb{F}(Y) \qquad et \qquad \mu_{f(A)}(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \tag{1.2}$$

Ainsi on définit $f^{-1}(B)$ par :

$$\forall x \in X,\ f^{-1}(B)(x) = \mu_B(f(x)) \tag{1.3}$$

$f(A)$ s'appelle l'image directe de A par f.
$f^{-1}(B)$ s'appelle l'image réciproque de B par f.

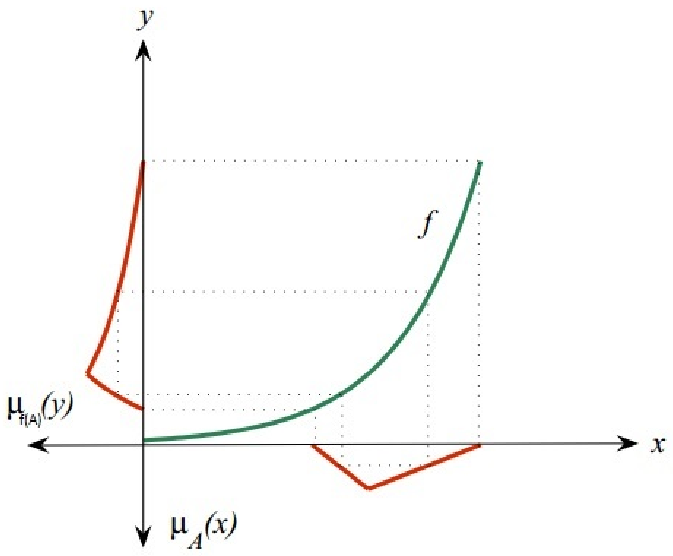


FIGURE 1.1 – Principe d'extension

Remarque 1.5 *Dans l'ordre d'appliquer ce principe aux applications floues, on reécrit*

(1.2) *sous la forme équivalente suivante*

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min\Big(\mu_A(x), \chi_{\{f(x)\}}(y)\Big) \tag{1.4}$$

Théorème 1.2 *Soit f une application de X dans Y. Alors,*

1. $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}(X)\ \ \mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2)$
2. *Pour tout $\mu_i \in\ \mathbb{F}(X)$ et $i \in I$. On a :*
$$f(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)$$
3. *Pour tout $\nu_j \in\ \mathbb{F}(Y)$ et $j \in J$. On a :*
$$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} \nu_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(\nu_j)$$
4. *Pour tout $\nu_i \in\ \mathbb{F}(Y)$ et $i \in J$. On a :*
$$f^{-1}(\bigcap_{j \in J} \nu_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(\nu_j)$$
5. $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}(Y):\ \ \nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$
6. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X) : \mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$
7. *Si f est une application injective de X dans Y, alors,*
$$\forall \mu \in \mathbb{F}(X)\ \ :\ \ \mu = f^{-1}(f(\mu))$$
8. *Si f est une application injective de X dans Y, alors,*
$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{F}(X) & \longrightarrow & \mathbb{F}(Y) \\ \mu & \longmapsto & f(\mu) \end{array} \right.$$
est injective.
9. *Si f est une application injective de X dans Y, alors,*
$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{F}(Y) & \longrightarrow & \mathbb{F}(X) \\ \nu & \longmapsto & f^{-1}(\nu) \end{array} \right.$$
est surjective.
10. $\forall \nu \in \mathbb{F}(Y):\ \ f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$.

11. *Si f est une application surjective, alors,*

$$\forall \nu \in \mathbb{F}(Y): \; f(f^{-1}(\nu)) = \nu$$

12. *Si f est une application surjective, alors, ψ est surjective.*
13. *Si f est une application surjective, alors, ϕ est injective.*
14. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X), \; \forall \nu \in \mathbb{F}(Y): \; f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu)$.
15. $\forall \mu \in \mathbb{F}(X)$, *on a* $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$.
16. $\forall \xi \in \mathbb{F}(Z)$, *on a* $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$.

Démonstration

En utilisant le principe d'extension Définition (1.4) et les définitions de la réunion et l'intersection flou, on peut montrer les assertions de (1) jusqu'au (5) .

6. Montrons que : $\forall \mu \in \mathbb{F}(X)$, on a $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$. Soit $\mu \in \mathbb{F}(X)$ et soit $x \in X$, alors

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(\mu))(x) & = & f(\mu)(f(x)) \\ & = & \bigvee\{\mu(x')/x' \in X; \; f(x') = f(x)\} \\ & \geq & \mu(x). \end{array}$$

Donc $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$. En particulier, si f est une injection, alors

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(\mu))(x) & = & f(\mu)(f(x)) \\ & = & \bigvee\{\mu(x')/x' \in X; \; f(x') = f(x)\} \\ & = & \mu(x). \end{array}$$

Donc, (7) est vrai.

Par suite l'application ψ est injective et l'application ϕ est surjective, d'où on a (8) et (9).

Pour prouver (10). Soit $\nu \in \mathbb{F}(Y)$, alors,

$$\begin{array}{rcl} f(f^{-1}(\nu))(y) & = & \bigvee\{f^{-1}(\nu)(x)/x \in X; \; f(x) = y\} \\ & = & \bigvee\{\nu(f(x))/x \in X; \; f(x) = y\} \\ & = & \begin{cases} \nu(y) & si \; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & sinon \end{cases} \\ & \leq & \nu(y), \end{array}$$

$\forall y \in Y$. Donc $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ si f est une surjection. Par suite on a les assertions de (11) à (13) sont vrais.

L'assertion (14) est une conséquence immédiate des affirmations (1) à (13).

15. Montrons que $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$. Soit $z \in Z$

$$\begin{aligned} g(f(\mu))(z) &= \bigvee\{f(\mu)(y)/y \in Y;\ g(y) = z\} \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\mu(x)/x \in X\ f(x) = y\}\ /y \in Y;\ g(y) = z\} \\ &= \bigvee\{\mu(x)/x \in X;\ (g \circ f)(x) = z\} \\ &= (g \circ f)(z). \end{aligned}$$

Donc $g(f(\mu)) = (g \circ f)(z)$

16. Soit $\xi \in \mathbb{F}(Z)$ Montrons que $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (gof)^{-1}(\xi)$. Soit $x \in X$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(\xi)) &= \xi(g(f(x))) \\ &= g^{-1}(\xi)(f(x)) \\ &= f^{-1}((g^{-1}(\xi))(x)). \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$.

Définition 1.5 *Soit $A_i \in \mathbb{F}(X_i)$ pour tout $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$. On définit*

$$\begin{aligned} \tau :\ \mathbb{F}(X_1) \times ...\mathbb{F}(X_n) &\longrightarrow \mathbb{F}\left(X_1 \times ... \times X_n\right) \\ (\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}) &\longrightarrow \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n} \end{aligned}$$

où $\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}$ est le produit cartésien flou des sous-ensembles flous $A_1, ..., A_n$ défini par :

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$

Définition 1.6 *Soit*

$$\begin{aligned} g :\quad X_1 \times ... \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, ..., x_n) &\longmapsto g(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

On lui associée la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\widehat{g} : \begin{cases} \mathbb{F}(X_1) \times ... \times \mathbb{F}(X_n) \longrightarrow \mathbb{F}(Y) \\ (A_1, ..., A_n) \longrightarrow \widehat{g}(A_1, ..., A_n) \end{cases}$$

avec

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup_{(x_1,...,x_n)\in A_1\times...\times A_n, g(x_1,...,x_n)=y} \min(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n))$$

Si l'ensemble $\Big\{(x_1, ..., x_n),\ g(x_1, ..., x_n) = y\Big\}$ *est vide, alors on pose par définition*

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = 0$$

Remarque 1.6 *Soit* $x = (x_1, ..., x_n)$*. D'après la définition 1.5 , on a*

$$\mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(x_1, ..., x_n) = \min\Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\Big)$$

Ainsi, le principe d'extension donné par la définition 1.4

$$\mu_{\widehat{g}(A_1,...,A_n)}(y) = \sup \mu_{A_1} \otimes ... \otimes \mu_{A_n}(g^{-1}(y)).$$

Théorème 1.3 *Soient* $f : X \longrightarrow Y$ *et* $g : Y \longrightarrow Z$ *alors, d'après le principe d'extension on obtient :* $\widehat{g} \circ \widehat{f} = \widehat{g \circ f}.$

Démonstration

Soit $A \in \mathbb{F}$ et $z \in Z$, alors on a,

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{g\circ f}}(z) &= \sup \mu_A\Big((g \circ f)^{-1}(z)\Big)\\
&= \sup \mu_A\Big(f^{-1}(g^{-1}(z))\Big)\\
&= \sup \bigcup_{y\in g^{-1}(z)} \mu_A\Big(f^{-1}(y)\Big)\\
\mu_{\widehat{g}\circ\widehat{f}} &= \sup \mu_{\widehat{f}(A)}(g^{-1}(z))\\
&= \sup\ \Big\{\sup \mu_A\Big(f^{-1}(y)\Big),\ y \in g^{-1}(z)\Big\}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Groupes et anneaux flous

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques définitions et propriétés concernant les groupes et les anneaux flous, ensuite nous allons introduire le concept d'anneau des points flous et en fin nous allons donner quelques propriétés sur cette nouvelle structure.

2.1 Groupes flous

Pour le reste de cette section, sauf précision contraire, les groupes sont notés multiplicativement et on note e l'élément neutre de G. Afin de définir la notion d'un sous-groupe flou et pour examiner ses propriétés, nous présentons certaines opérations sur un sous-ensemble flou d'un groupe G en ce qui concerne le fonctionnement du groupe.

Définitions et Propriétés

Définition 2.1 *[50] Soit G un groupe, on dit que $\mu \subset G$ est un sous-groupe flou si et seulement si $\forall x, y \in G$.*

1. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,

2. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Notons par : $\mathbb{FG}(G)$, l'ensemble de tous les sous-groupes flous de G. Rappelons si $\mu \in \mathbb{F}(G)$ satisfait la condition (1) de la définition 2.1, alors $\mu(x^n) \geq \mu(x)$, $\forall x \in G$, avec $n \in \mathbb{N}$. De plus, μ satisfait les conditions (1) et (2) de la définition 2.1 si et seulement si $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$, $\forall x, y \in G$.

Définition 2.2 *On définit l'opération binaire " $\circ$ " sur $\mathbb{F}(G)$ et l'opération inverse sur $\mathbb{F}(G)$ comme suit :*

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{F}(G) \ \textit{et} \ \forall x \in G, \ (\mu \circ \nu)(x) = \bigvee \{\mu(y) \wedge \nu(z) / y, z \in G, yz = x\}$$

et

$$\forall \mu \in \mathbb{F}(G) \ \textit{et} \ \forall x \in G, \ \mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}).$$

Nous appelons $\mu \circ \nu$ le produit de μ et ν, et μ^{-1} est l'inverse de μ.

Il est facile de vérifier que l'opération binaire $\circ$ (définition (2.2)) est associative. A l'aide des notions précédemment définies, il est possible de prouver le théorème suivant et ainsi, nous admettons sa preuve.

Théorème 2.1 . *Soit $\mu, \nu, \mu_i \in \mathbb{F}(G)$, $i \in I$. Soit $a = \bigvee\{\mu(x) \ /x \in G\}$. Alors, on a les assertions suivantes :*

1.

$$\begin{aligned}(\mu \circ \nu)(x) &= \bigvee_{y\in G} (\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)) \\ &= \bigvee_{y\in G} (\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y)) \ \forall x \in G.\end{aligned}$$

2. $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$;
3.

$$\begin{aligned}\mu \subseteq \mu^{-1} &\Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \mu \\ &\Leftrightarrow \mu = \mu^{-1} \\ &\Leftrightarrow \mu(x) \leq \mu(x^{-1}) \ \forall x \in G \\ &\Leftrightarrow \mu(x^{-1}) \leq \mu(x) \ \forall x \in G \\ &\Leftrightarrow \mu(x) = \mu(x^{-1}), \ \forall x \in G;\end{aligned}$$

4. $\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1}$;
5. $(\bigcup\limits_{i\in I} \mu_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i\in I} \mu_i^{-1}$;
6. $(\bigcap\limits_{i\in I} \mu_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i\in I} \mu_i^{-1}$;
7. $(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}$.

Remarque 2.1 *Si $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ et H est un sous-groupe de G. Alors, $\mu|_H \in \mathbb{FG}(H)$.*

Lemme 2.1 *Soit $\mu \in \mathbb{FG}(G)$. Alors, $\forall x \in G$,*

1. $\mu(e) \geq \mu(x)$,
2. $\mu(x) = \mu(x^{-1})$.

Démonstration

Soit $x \in G$.

1. $\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$.
2. $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Par conséquent, $\mu(x) = \mu(x^{-1})$.

Remarque 2.2 *Notons que si μ est un sous-groupe flou d'un groupe G et si $x, y \in G$ avec $\mu(x) \neq \mu(y)$, alors, $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$.*

Démonstration
Supposons que $\mu(x) > \mu(y)$.
Alors,

$$\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \mu(x^{-1}) \wedge \mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(xy).$$

Ainsi,

$$\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(xy)$$

et puisque, $\mu(x) > \mu(y)$,
on a alors,

$$\mu(y) \geq \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(y).$$

Par conséquent,

$$\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

On peut utilisé la même démarche si $\mu(y) > \mu(x)$.

Théorème 2.2 *Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$.*
Alors, μ est un sous-groupe flou de G si et seulement si μ_a est un sous-groupe de G, $\forall a \in \ \mu(G) \cup \{b \in \ (0,1]/ \ b \leq \mu(e)\}$.

Démonstration
Supposons que μ est un sous-groupe flou de G, et soit $a \in \mu(G)$.
Puisque,

$$\mu(e) \geq \mu(x), \ \forall x \in G, e \in \mu_a,$$

ainsi,

$$\mu_a \neq \emptyset.$$

Soit $x, y \in \mu_a$.
Alors, $\mu(x) \geq a$ et $\mu(y) \geq a$.
Puisque μ est un sous-groupe flou,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq a \wedge a = a.$$

Par conséquent,

$$xy^{-1} \in \mu_a.$$

Donc, μ_a est un sous-groupe de G.
De même, si $a \leq \mu(e)$, alors on peut démontrer que μ_a est un sous-groupe de G.
Inversement, supposons que μ_a est un sous-groupe de G,

$$\forall a \in \ \mu(G) \cup \{b \ \in \ (0,\ 1] \mid b \ \leq \ \mu(e)\}.$$

Alors, $\forall a \in \mu(G)$, Nous devons avoir $e \in \mu_a$ et donc on a $\mu(e) \geq a$.
Soit $x, y \in G$ et soit $\mu(x) = a$ et $\mu(y) = b$. Soit $c = a \wedge b$.
Alors,

$$x, y \in \mu_c \text{ et } c \leq \mu(e).$$

D'après l'hypothèse, μ_c est un sous-groupe de G,
alors,

$$xy^{-1} \in \mu_c.$$

Ainsi,

$$\mu(xy^{-1}) \geq c = a \wedge b = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Par conséquent, μ est un sous-groupe flou de G.

Proposition 2.1 *Soit H un sous-ensemble de G, χ_H sa fonction caractéristique. Alors, H est un sous-groupe de G, si et seulement si χ_H est un sous-groupe flou non nul de G.*

Démonstration
Supposons que H est un sous-groupe de G, alors , $\chi_H(e) = 1$, donc, $\chi_H \neq \emptyset$, soit x, y de G.
Si $x \in H$ et $y \in H$ et par suite, $\chi_H(xy^{-1}) = 1 = \chi_H(x) \wedge \chi_H(y)$.
Si $x \notin H$ ou $y \notin H$ on a $\chi_H(x) = 0$ ou $\chi_H(y) = 0$,
d'où,

$$\chi_H(x) \wedge \chi_H(y) = 0 \leq \chi_H(xy^{-1})$$

Par conséquent, χ_H est un sous-groupe flou de G.
Réciproquement, comme χ_H est n'est nul, il existe $x \in G$ tel que $\chi_H(x) = 1$, ce qui prouve que $H \neq \emptyset$, de plus, si $x, y \in H$ $\chi_H(x) = \chi_H(y) = 1$,
d'où, comme $\chi_H(xy^{-1}) \geq \chi_H(x) \wedge \chi_H(y)$, $\chi_H(xy^{-1}) = 1$ et par suite, $xy^{-1} \in H$.
Donc H est un sous-groupe de G.

Théorème 2.3 *Soit $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{FG}(G)$ avec I un ensemble d'indices.*
Alors, $\bigcap\limits_{i \in I} \mu_i \in \mathbb{FG}(G)$.

Démonstration
Soit $x, y \in G$.
Alors,

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{i\in I}\mu_i)(xy^{-1}) &= \wedge\{\mu_i(xy^{-1})|i \in I\} \geq \{\mu_i(x) \wedge \mu_i(y)/\ i \in I\} \\
&= (\wedge\{\mu_i(x)/\ i \in I\}) \wedge (\wedge\{\mu_i(y)/\ i \in I\}) \\
&= (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(x)\ \wedge\ (\bigcap_{i\in I}\mu_i)(y).
\end{aligned}$$

Proposition 2.2 *La réunion de deux sous-groupes flous n'est pas nécessairement un sous-groupe flou.*

Théorème 2.4 . *Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$.*
Alors, $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ si et seulement si μ satisfait les conditions suivantes :

1. $\mu \circ \mu \subseteq \mu$,
2. $\mu^{-1} \subseteq \mu$ *(ou* $\mu^{-1} \supseteq \mu$, *ou* $\mu^{-1} = \mu$*)* .

Démonstration
$\Rightarrow$)
Montrons que les conditions (1) et (2) sont vérifiés. Pour (1), Soit $x \in G$ on a

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \mu)(x) &= \bigvee_{y\in G}(\mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x)) \\
&= \bigvee_{y\in G}(\mu(y) \wedge \mu(y^{-1}x)) \\
&\leq \bigvee_{y\in G}\mu(yy^{-1}x) \\
&= \bigvee_{y\in G}\mu(x) \\
&= \mu(x).
\end{aligned}$$

Donc (1) est vérifié. Pour (2), il suffit d'utiliser la définition d'un sous-groupe flou.
$\Leftarrow$)
On suppose que μ vérifie (1) et (2), Montrons que $\mu \in \mathbb{FG}(G)$.
Soit $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(xy) &\geq (\mu \circ \mu)(xy) \\
&= \bigvee_{y\in G}(\mu(z) \wedge \mu(z^{-1}xy)) \\
&\geq \mu(x)\ \wedge\ \mu(x^{-1}xy) \\
&\geq \mu(x) \wedge \mu(y),
\end{aligned}$$

donc (1) est vérifié.
D'autre part soit $x \in G$, on a $\mu^{-1} \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu \subseteq \mu^{-1}$,
donc, $\mu(x) \leq \mu^{-1}(x)$. Par conséquent, $\mu \in \mathbb{FG}(G)$.

Théorème 2.5 *Soit $\mu, \nu \in \mathbb{FG}(G)$. Alors, $\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G)$ si et seulement si $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.*

Démonstration
Supposons que
$$\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G).$$
Alors,
$$\mu \circ \nu = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \nu \circ \mu.$$
Inversement, supposons que
$$\mu \circ \nu = \nu \circ \mu.$$
Alors, $(\mu \circ \nu)^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = \mu \circ \nu$ et

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) &= \mu \circ (\nu \circ \mu) \circ \nu \\
&= \mu \circ (\mu \circ \nu) \circ \nu \\
&= (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) \\
&\subseteq \mu \circ \nu.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème (2.4), $\mu \circ \nu \in \mathbb{FG}(G)$.

Théorème 2.6 *Soit $\mu \in \mathbb{FG}(G)$ et H un groupe. Supposons que f est un homomorphisme de G dans H. Alors, $f(\mu) \in \mathbb{FG}(H)$.*

Démonstration
Soit $u, v \in H$.
Supposons que soit $u \notin f(G)$ ou $v \notin f(G)$.
Donc,
$$f(\mu)(u) \wedge f(\mu)(v) = 0 \leq f(\mu)(uv).$$
D'autre part puisque $u \notin f(G)$, alors, $u^{-1} \notin f(G)$.
Par suite,
$$f(\mu)(u) = 0 = f(\mu)(u^{-1}).$$

Supposons maintenant que $u = f(x)$ et $v = f(y)$, donc pour $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned}
(f(\mu))(uv) &= \vee\{\mu(z) \mid z \in G,\ f(z) = uv\} \\
&\geq \vee\{\mu(xy) \mid x,\ y \in G,\ f(x) = u,\ f(y) = v\} \\
&\geq \vee\{\mu(x) \wedge \mu(y) \mid x,\ y \in G,\ f(x) = u,\ f(y) = v\} \\
&= (\vee\{\mu(x) \mid x \in G,\ f(x) = u\}) \wedge (\vee\{\mu(y) \mid y \in G,\ f(y) = v\}) \\
&= (f(\mu))(u) \ \wedge \ (f(\mu))(v).
\end{aligned}$$

De plus,

$$(f(\mu))(u^{-1}) = \vee\{\mu(z) \mid z \in H,\ f(z) = u^{-1}\} = \vee\{\mu(z^{-1}) | z \in H, f(z^{-1}) = u\} = (f(\mu))(u).$$

Par conséquent,

$$f(\mu) \in \mathbb{FG}(H).$$

Théorème 2.7 *Soit H un groupe et $\nu \in \mathbb{FG}(H)$. Soit f un homomorphisme de G dans H. Alors, $f^{-1}(\nu) \in \mathbb{FG}(G)$.*

Démonstration
Soit $x, y \in G$.
Alors,

$$f^{-1}(\nu)(xy) = \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)) \geq \nu(f(x)) \wedge \nu(f(y)) = f^{-1}(\nu)(x) \wedge f^{-1}(\nu)(y).$$

De plus,

$$f^{-1}(\nu)(x^{-1}) = \nu(f(x^{-1})) = \nu(f(x)^{-1}) = \nu(f(x)) = f^{-1}(\nu)(x).$$

Par conséquent,

$$f^{-1}(\nu) \in \mathbb{F}(G).$$

Définition 2.3 *Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$. On note par*

$$\langle\mu\rangle = \cap\{\nu \ / \ \mu \subseteq \nu,\ \nu \in \mathbb{FG}(G)\}.$$

*Alors, $\langle\mu\rangle$ est appelé le sous-groupe flou de G **généré** par μ.*

Clairement, $\langle\mu\rangle$ est le plus petit sous-groupe flou de G qui contient μ.
Nous présentons maintenant une autre procédure de construction de $\langle\mu\rangle$. Définissons $\mu^1 = \mu$ et
$\mu^n = \mu^{n-1} \circ \mu$, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Théorème 2.8 *Soit* $\mu \in \mathbb{F}(G)$ *et soit* $a = \wedge\{\eta(e) \mid \mu \subseteq \eta,\ \eta \in \mathbb{FG}(G)\}$. *Alors,*

$$\langle\mu\rangle = e_a \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(e_a \cup \mu \cup \mu^{-1})^n.$$

Démonstration

Soit

$$\nu = e_a \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n).$$

Pour tout $x \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\nu(x^{-1}) &= (e_a \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n)(x^{-1}) \\
&= e_a(x^{-1}) \vee (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n)(x^{-1}) \\
&= e_a(x^{-1}) \vee (\bigvee_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n(x^{-1})) \\
&= e_a(x) \vee (\bigvee_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n(x)) \\
&= (e_a \vee (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1})^n))(x) \\
&= \nu(x).
\end{aligned}$$

Soit $x, y \in G$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Alors,

$$\begin{aligned}
(\mu \cup \mu^{-1})^n(xy) &= \vee\{(\mu \cup \mu^{-1})(\nu_n) \wedge ... \wedge (\mu \cup \mu^{-1})(\nu_1) | xy = \nu_n \cdots \nu_1, \nu_i \in G, i = 1, ..., n\} \\
&\geq \vee\{(\mu \cup \mu^{-1})(x_1) \wedge \cdots \wedge (\mu \cup \mu^{-1})(x_k) \wedge (\mu \cup \mu^{-1})(y_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (\mu \cup \mu^{-1})(y_n)\} \\
&\quad | x = x_1 \ldots x_k, y = y_{k+1} \ldots y_n, x_i, y_j \in G, i = 1, .., k, j = k+1, .., n; k \in \{1, \ldots,\ n - \\
&\geq \vee\{(\mu \cup \mu^{-1})(x_i) \wedge ... \wedge (\mu \cup \mu)^{-1}(x_k) | x = x_1 ... x_k, x_i \in G, i = 1, ..., k\} \\
&\quad \wedge \vee \{(\mu \cup \mu^{-1})(y_{k+1}) \wedge ... \wedge (\mu \ \cup \ \mu^{-1})(y_n) | y = y_{k+1} \ldots y_n, y_j \in G, j : \{k+1, ..., n\} \\
&= (\mu \cup \mu^{-1})^k(x) \wedge (\mu \cup \mu^{-1})^{n-k}(y) \text{ pour } k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(\mu \cup \mu^{-1})^n(xy) \geq (\mu \cup \mu^{-1})^k(x) \wedge (\mu \cup \mu^{-1})^{n-k}(y), k = 1, ..., n-1.$$

Ainsi,

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu \cup \mu^{-1}))(xy) \geq (\mu \cup \mu^{-1})^k(x) \wedge (\mu \cup \mu^{-1})^{n-k}(y)\ \forall k = 1, ..., n-1.$$

Par conséquent,

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu\cup\mu^{-1})^n)(xy) \geq (\bigvee_{n=1}^{\infty}(\mu\cup\mu^{-1})^n)(x) \wedge (\bigvee_{n=1}^{\infty}(\mu\cup\mu^{-1})^n)(y).$$

Ainsi, il s'ensuit que ν est un sous-groupe flou de G.
Il est clair que,

$$\mu \subseteq \nu.$$

D'où

$$\langle\mu\rangle \subseteq \nu.$$

Soit ξ un sous-groupe flou de G tel que $\mu \subseteq \xi$.
Donc, $e_a \subseteq \xi$ et $(\mu\cup\mu^{-1})^n \subseteq \xi$.
Ainsi,

$$\nu \subseteq \xi.$$

Par conséquent,

$$\nu \subseteq \langle\mu\rangle.$$

Sous-groupe distingué flou

La notion de sous-groupe distingué est un des concepts centraux de la théorie des groupes classiques. Il joue un rôle important dans l'étude de la structure générale des groupes. De même qu'un sous-groupe distingué joue un rôle important dans la théorie des groupes classiques, un sous-groupe distingué flou joue un rôle semblable dans la théorie de sous-groupes flous.

Théorème 2.9 *Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mu(yx) = \mu(xy), \quad \forall x, y \in G$ *; dans ce cas, μ est appelé un sous-ensemble flou abélien de G.*
2. $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y), \quad \forall x, y \in G.$
3. $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y), \quad \forall x, y \in G.$
4. $\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y), \quad \forall x, y \in G.$
5. $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu, \quad \forall \nu \in \mathbb{F}(G)$.

Démonstration
(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $x, y \in G$. Alors, $\mu(xyx^{-1}) = \mu(x^{-1}.\, xy) = \mu(y)$.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Évident.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(x^{-1} \cdot xyx^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) = \mu(y), \quad \forall x, y \in G.$
(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit $x, y \in G$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} \mu(xy) & = & \mu(x \cdot yx \cdot x^{-1}) \\ & \leq & \mu(yx) \\ & = & \mu(y \cdot xy \cdot y^{-1}) \\ & \leq & \mu(xy). \end{array}$$

Par suite,

$$\mu(xy) = \mu(yx).$$

(1) $\Rightarrow$ (5) : Soit $x \in G$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} (\mu \circ \nu)(x) & = & \vee_{y \in G}\{\mu(xy^{-1}) \ \wedge \ \nu(y)\} \\ & = & \vee_{y \in G}\{\mu(y^{-1}x) \ \wedge \ \nu(y)\} \\ & = & (\nu \circ \mu)(x). \end{array}$$

Par suite,

$$\mu \circ \nu = \nu \circ \mu.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) : Maintenant $1_{y^{-1}} \circ \mu = \mu \circ 1_{y^{-1}}$, $\forall y \in G$.
Ainsi, $\forall x, y \in G$.

$$(1_{y^{-1}} \circ \mu)(x) = (\mu \circ 1_{y^{-1}})(x).$$

Par conséquent, $\forall x, y \in G$.

$$\mu(yx) = \mu(xy)$$

Définition 2.4 *[42] Soit $\mu \in \mathbb{FG}(G)$. Alors, μ est appelé un sous-groupe distingué flou de G Si c'est un sous-ensemble flou abélien de G. Soit $\mathbb{NF}(G)$ désigne l'ensemble de tous les sous-groupes normaux flous de G.*

Définition 2.5 *[43] Soit $\mu, \nu \in \mathbb{F}(G)$. Alors, s'il existe $u \in G$ tel que $\mu(x) = \nu(uxu^{-1})$, $\forall x \in G$, μ et ν sont appelés sous-groupes conjugués flous (par rapport à u), et nous écrivons, $\mu = \nu^u$, avec $\nu^u(x) = \nu(uxu^{-1})$ pour tout $x \in G$.*

Il est clair que, 1_G et $1_{\{e\}}$ sont des sous-groupes flous normaux de G. Si G est un groupe commutatif, chaque sous-groupe flou de G est distingué. Un sous-groupe flou μ de G est distingué si et seulement si $\mu = \mu^z$, $\forall z \in G$.

Théorème 2.10 *Soit $\mu \in \mathbb{F}(G)$. Alors, $\mu \in \mathbb{NF}(G)$ si et seulement si μ_a est un sous-groupe distingué de G, $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in \ (0,\ 1] \mid b \leq \mu(e)\}$.*

Démonstration

Supposons que $\mu \in \mathbb{NF}(G)$. Soit $a \in \mu(G) \cup \{b \ \in \ (0,\ 1] \mid b \ \leq \ \mu(e)\}$.
Puisque, $\mu \in \mathbb{FG}(G)$, μ_a est un sous-groupe de G.
Si $x \in G$ et $y \in \mu_a$, on a d'après le théorème 2.9

$$\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) \geq a.$$

Ainsi,

$$xyx^{-1} \in \mu_a.$$

Par conséquent, μ_a est un sous-groupe distingué de G.
Inversement, supposons que μ_a est un sous-groupe distingué de G, alors

$$\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in L/\ b \leq \mu(e)\}.$$

D'après le théorème 2.2, on a

$$\mu \in \mathbb{FG}(G).$$

Soit $x, y \in G$ et $a = \mu(y)$.
Alors, $y \in \mu_a$ et $xyx^{-1} \in \mu_a$.
Par suite,

$$\mu(xyx^{-1}) \geq a = \mu(y).$$

Donc, μ satisfait la condition (3) du théorème 2.9.
Par conséquent, il résulte d'après le théorème 2.9 que

$$\mu \in \mathbb{NF}(G).$$

2.2 Anneaux et idéaux flous

Anneaux flous

Dans cette section, nous introduisons quelques opérations sur des sous-ensembles flous d'un anneau R.

Définitions et propriétés

Définition 2.6 *Soit $\mu, \nu \in \mathbb{F}(R)$. On définit $\mu+\nu, -\mu, \mu-\nu, \mu\circ\nu \in \mathbb{F}(R)$ de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} (\mu+\nu)(x) &= \vee\{\mu(y)\wedge\nu(z) \mid y,\ z\in R,\ y+z=x\}, \\ (-\mu)(x) &= \mu(-x)\ , \\ (\mu-\nu)(x) &= \vee\{\mu(y)\wedge\nu(z) \mid y,\ z\in R,\ y-z=x\}, \\ (\mu\circ\nu)(x) &= \vee\{\mu(y)\wedge\nu(z) \mid y,\ z\in R,\ yz=x\}, \end{aligned}$$

$\forall x\in R$. $\mu+\nu,\ \mu-\nu$ et $\mu\circ\nu$ sont appelés la somme, la différence et le produit de μ et ν, respectivement, et $-\mu$ est appelé l'opposé de μ.

Par définition, il s'ensuit que $\mu+\nu=\nu+\mu$, $\mu-\nu=\mu+(-\nu)$, et puisque R est commutatif, $\mu\circ\nu=\nu\circ\mu$, $\forall\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$

Théorème 2.11 *Soit $\mu,\nu,\xi\in\mathbb{F}(R)$. Alors, $\mu\circ(\nu+\xi)\subseteq\mu\circ\nu+\mu\circ\xi$.*

Démonstration
Soit $w\in R$ et soit $u,v\in R$ tel que $uv=w$. Alors,

$$\begin{aligned} \mu(u)\wedge(\nu+\xi)(v) &= \mu(u)\wedge(\vee\{\nu(y)\wedge\xi(z) \mid y,z\in R,\ y+z=v\}) \\ &= \vee\ \{(\mu(u)\wedge\nu(y))\wedge(\mu(u)\wedge\xi(z))\ |y,\ z\in R,\ y+z=v\} \\ &\leq \vee\{(\mu(u)\wedge\nu(y))\wedge(\mu(u)\wedge\xi(z)) \mid y,z\in R,\ uy+uz=uv\} \\ &\leq \vee\{(\mu\circ\nu)(uy)\wedge(\mu\circ\xi)(\mu\circ\nu+\mu\circ\xi)(w).\ (uz)\ |y,\ z\in R,\ uy+uz=uv\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\mu\circ(\nu+\xi))(w) &= \vee\{\mu(u)\wedge(\nu+\xi)(v) \mid u,\ v\in R,\ uv=w\} \\ &\leq (\mu\circ\nu+\mu\circ\xi)(w)\forall w\in R. \end{aligned}$$

par conséquent, $\mu\circ(\nu+\xi)\subseteq\mu\circ\nu+\mu\circ\xi$.

Définition 2.7 *Soit $\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$. On définit $\mu\nu\in\mathbb{F}(R)$ par : $(\mu\nu)(x)=\vee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(y_i)\wedge\nu(z_i)) \mid y_i,\ z_i\in R,\ 1\leq i\leq n,\ n\in \mathrm{N},\ \sum_{i=1}^{n}y_iz_i=x\},\ \forall x\in R.$*

Puisque R est commutatif, $\mu\nu=\nu\mu$, $\forall\mu,\nu\in\mathbb{F}(R)$.

Théorème 2.12 *[31] Soient μ, ν et $\xi \in \mathbb{F}(R)$. Alors, on a les assertions suivantes :*

1. $\mu \circ \nu \subseteq \mu\nu$.
2. $\nu \subseteq \xi \Rightarrow \mu\nu \subseteq \mu\xi$.
3. $(\mu\nu)\xi = \mu(\nu\xi)$.
4. $(\mu\nu)(x+y) \geq (\mu\nu)(x) \wedge (\mu\nu)(y) \forall x, y \in R$.
5. *Si R admet un élément neutre 1 et $1_{\{1\}} \subseteq \nu$, alors $\mu \subseteq \mu\nu$.*
6. $1_R \circ \mu \subseteq \mu$.

Notons que pour tout

$$w \in R,\ ((\mu\nu)\xi)(w) = \vee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(x_i)\wedge\iota(y_i)\wedge\xi(z_i))|x_i, y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i = w\}.$$

Définition 2.8 *Soit $\mu \in \mathbb{F}(R)$. On définit μ^n et $\mu^{(n)} \in \mathbb{F}(R)$ de la manière suivante, avec $n \in \mathbb{N}, n > 1$:*

$$\begin{aligned} \mu^1 &= \mu \\ \mu^n &= \mu^1 \circ \mu^{n-1}; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= \mu \\ \mu^{(n)} &= \mu^{(1)}\mu^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Définition 2.9 *[29] Soit R un anneau, on dit que $\mu \subset R$ est un sous-anneau flou si et seulement si*

1. $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\mu(xy) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)$. $\forall x, y \in R$. *Si de plus R est unitaire on ajoute la 3^{eme} condition*
3. $\mu(1) = 1$

Exemple 2.1 *Soit*

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Q} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

μ est un sous anneau flou de $\mathbb{Q}$.

Propriétés 2.1 *Soit $\nu \subset R$ un sous anneau flou. Alors on a :*

1. $\mu(0) \geq \mu(x), \qquad \forall x \in R$
2. *soit $x, y \in R$, si $\mu(x-y) = \mu(0)$. Alors, $\mu(x) = \mu(y)$*
3. $\mu(x) = \mu(-x)$.

Démonstration

1. On a $\mu(0) = \mu(x-x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x), \qquad \forall x \in R$
2. on a $\forall x, y \in R$

$$\begin{aligned} \mu(x) = \mu(x-y+y) &\geq \mu(x-y) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(0) \wedge \mu(y) \\ &\geq \mu(y). \end{aligned}$$

De même $\mu(y) \geq \mu(x)$. Donc on a légalité $\mu(x) = \mu(y)$.

3. on a :

$$\begin{aligned} \mu(-x) = \mu(0-x) &\geq \mu(x) \wedge \mu(0) \\ &\geq \mu(x) \\ \mu(-x) &\geq \mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) = \mu(0-(-x)) &\geq \mu(-x) \wedge \mu(0) \\ &\geq \mu(-x) \\ \mu(x) &\geq \mu(-x). \end{aligned}$$

Par conséquent $\mu(x) = \mu(-x)$.

Théorème 2.13 *μ est un sous-anneau flou de R si et seulement si μ_t est un sous-anneau de R, $\forall t \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1]/\ b \leq \mu(0)\}$.*

Démonstration

Il est clair que $\mu_t = \{x \in R, \quad \mu(x) \geq t\}$ est non vide.
Soit $x, y \in \mu_t$ alors, par définition on a $\mu(x) \geq t$, et $\mu(y) \geq t$,
alors,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \text{ car } \mu \text{ est un sous-anneau flou de} R$$

ce qui implique que

$$x - y \in \mu_t.$$

De même,

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

d'où,

$$\mu(xy) \geq t.$$

Par suite,

$$xy \in \mu_t.$$

Inversement, soit $x, y \in R$ et soit $\mu(x) = t_1$, et $\mu(y) = t_2$,
donc, $x \in \mu_{t_1}$ et $y \in \mu_{t_2}$.
Supposons que $t_2 > t_1$,
alors

$$\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1},$$

donc,

$$y \in \mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1},$$

et puisque x et $y \in \mu_{t_1}$ alors, $x - y \in \mu_{t_1}$, et $xy \in \mu_{t_1}$.
Par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq t_1 = \mu(x) \wedge \mu(y)\, et\, \mu(xy) \geq t_1 = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Définition 2.10 *[28] Soit A un ensemble non vide et $x_\alpha : A \longrightarrow [0,1]$ un sous ensemble flou de A avec $x \in A$ et $\alpha \in (0,1]$ défini par :*

$$x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & si \qquad x = y \\ 0 & si \qquad x \neq y, \end{cases}$$

est un point flou.

Définition 2.11 *Soit μ un sous anneau flou de R, et x_t un point flou de R. On écrit : $x_t \in \mu$ pour dire que $\mu(x) \geq t$.*
Par le principe d'extension de Zadeh, on a :

$$x_t + y_s = (x+y)_{t \wedge s}$$

$$x_s y_t = (xy)_{t \wedge s}.$$

Théorème 2.14 *Soit μ un sous-ensemble flou de R .*
μ est un sous-anneau flou de R si et seulement si $\forall x_t, y_s \in \mu$ on a $x_t - y_s \in \mu$ et $x_t y_s \in \mu$.

Démonstration

Soit $x_t, y_s \in \mu$.

Supposons que μ est un sous-anneau flou de R, alors,

$$\begin{aligned}\mu(x-y) &\geq \mu(x)\wedge\mu(y)\\ &\geq t\wedge s\end{aligned}$$

Ce qui implique que $x_t - y_s \in \mu$.

De même, puisque μ est un sous-anneau flou de R, on a :

$$\begin{aligned}\mu(xy) &\geq \mu(x)\wedge\mu(y)\\ &\geq t\wedge s.\end{aligned}$$

Par suite, $x_t y_s \in \mu$.

Inversement, soit $x, y \in R$, on a

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \quad et \quad y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu,$$

donc par hypothèse on a

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} - y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \quad et \quad x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu.$$

Ce qui implique que

$$(x-y)_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu \quad et \quad (xy)_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$$

par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x)\wedge\mu(y) \quad et \quad \mu(xy) \geq \mu(x)\wedge\mu(y).$$

Étude des ensembles $F_\mu(R)$

Soit $\underline{R}$ l'ensemble de tous les points flous de R.[49]

Soit

$$F_\mu(R) = \{x_\alpha \in \underline{R} \mid \ \mu(x) \geq \alpha\}$$

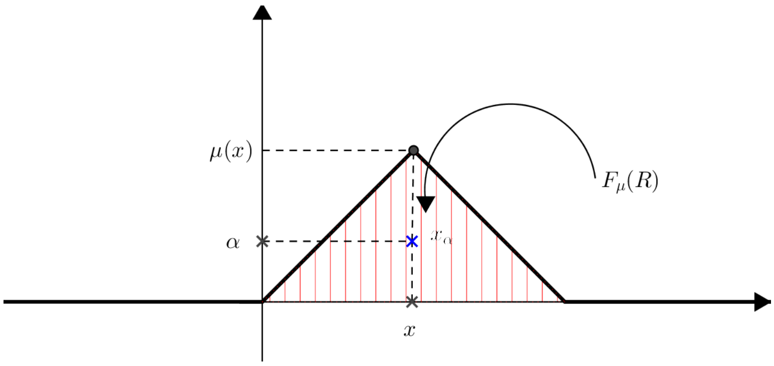


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de l'ensemble $F_\mu(R)$

Proposition 2.3 *Soit A un sous-ensemble de R, alors,*

$$x_\alpha \in F_{\chi_A}(R) \Leftrightarrow x \in A.$$

Démonstration

Supposons que $x_\alpha \in F_{\chi_A}(R)$, $\forall x \in R$, donc,

$$\chi_A(x) \geq \alpha.$$

Par suite, $\chi_A(x) = 1$ pour tout $\alpha > 0$.
Ce qui implique que

$$x \in A.$$

Inversement, soit $x \in A$.
Alors,

$$\chi_A(x) = 1 \geq \alpha, \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Par conséquent,

$$x_\alpha \in F_{\chi_A}(R).$$

Proposition 2.4 *Soit A, B deux sous-ensemble de R, on a :*

1. $A \subseteq B \Longleftrightarrow F_{\chi_A}(R) \subseteq F_{\chi_B}(R)$
2. $\chi_A \subseteq \chi_B \Longleftrightarrow F_{\chi_A}(R) \subseteq F_{\chi_B}(R)$.

Démonstration

1. Supposons que $A \subseteq B$, et soit $x_\alpha \in F_{\chi_A}(R)$.
Alors d'après la proposition (2.3), $x \in A \subseteq B$ et $x_\alpha \in F_{\chi_B}(R)$.
Ce qui implique que $F_{\chi_A}(R) \subseteq F_{\chi_B}(R)$.
Inversement, supposons que $F_{\chi_A}(R) \subseteq F_{\chi_B}(R)$.

Soit $x \in A$ d'après la proposition (2.3) $x_\alpha \in F_{\chi_A}(R)$ pour $\alpha > 0$, $x_\alpha \in F_{\chi_B}(R)$ et par suite $x \in B$.

2. Soit $x_\alpha \in F_{\chi_A}(R) \subseteq F_{\chi_B}(R)$, Donc, d'après 1.) $A \subseteq B$, Ce qui implique que $\chi_A \subseteq \chi_B$.

D'où le résultat.

Théorème 2.15 *[34] Soit R un anneau unitaire. Soit μ un sous-ensemble flou. Si μ est un sous-anneau flou de R, alors $(F_\mu(R), +, \times)$ est un anneau.*

Démonstration

Soit $x_t, y_s, z_u \in F_\mu(R)$.

On a :

$$x_t + y_s = (x+y)_{t\wedge s} \in F_\mu(R),$$

et

$$\begin{aligned} x_t + (y_s + z_u) &= x_t + (y+z)_{s\wedge u} \\ &= (x + (y+z))_{t\wedge(s\wedge u)} \\ &= ((x+y)+z)_{(t\wedge s)\wedge u} \\ &= (x_t + y_s) + z_u. \end{aligned}$$

L'élément neutre est $0_s \in F_\mu(R)$ $s \in (0,1]$ car $\mu(0) \geq \mu(1) = 1$.

L'élément symétrique est $-x_t \in F_\mu(R)$ car $\mu(-x) \geq \mu(x) \geq t$ et $x_s - x_s = 0_s$.

De plus, $x_t + y_s = x_t + y_s$.

Pour la stabilité de " $\times$ ", on a $x_t \times y_s = (xy)_{t\wedge s} \in F_\mu(R)$,

et

$$\begin{aligned} x_t \times (y_s \times z_u) &= x_t \times (y \times z)_{s\wedge u} \\ &= (x \times (y \times z))_{t\wedge(s\wedge u)} \\ &= ((x \times y) \times z)_{(t\wedge s)\wedge u} \\ &= (x_t \times y_s) \times z_u. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} x_t \times (y_s + z_u) &= (x \times (y+z))_{t\wedge(s\wedge u)} \\ &= (xy + xz)_{t\wedge s\wedge u} \\ &= (xy)_{t\wedge s} + (xz)_{t\wedge u} \end{aligned}$$

Proposition 2.5 *Soit R un anneau commutatif unitaire .*
Soit μ et ν deux sous-anneaux flous de R tels que $\mu \subseteq \nu$. Alors, $F_\mu(R)$ est un sous-anneau de $F_\nu(R)$.

Démonstration
μ est un sous-anneau flou de R, Donc $F_\mu(R)$ est un anneau.
De même pour $F_\nu(R)$ est un anneau .
Soit $x_t \in F_\mu(R)$ alors $\mu(x) \geq t$ et puisque $\mu \subset \nu$, alors $\nu(x) \geq t$, ce qui implique que $F_\mu(R) \subset F_\nu(R)$, de plus l'élément neutre $1_1 \in F_\mu(R)$.
D'où le résultat.

Définition 2.12 *Soit μ un sous-anneau flou de R, alors le singleton $a_t \neq 0_t \in F_\mu(R)$ avec $t \in (0,1]$, est dit un diviseur de zéro flou, s'il existe un singleton flou $b_s \in F_\mu(R)$ non nul $s \in (0,1]$ tel que $a_t.b_s = 0_\lambda$ avec $\lambda = \min(s,t)$.*

Définition 2.13 *Soit $F_\mu(R)$ un anneau.*
On dit que $F_\mu(R)$ est intègre s'il ne contient pas des diviseurs de zéro (i,e si $x_t.y_s = 0_{t\wedge s}$ alors $x_t = 0_t$ ou $y_s = 0_s$ avec $t, s \in (0,1]$).

Théorème 2.16 *$F_\mu(R)$ est intègre si et seulement si R est intègre.*

Démonstration
Soit $x_t, y_t \in F_\mu(R)$ avec $x_t.y_s = 0_{t\wedge s}$.
Montrons que $x_t = 0_t$ ou $y_s = 0_s$, $t, s \in (0,1]$.
On a
$$x_t.y_s = 0_{t\wedge s}.$$
Ce qui implique que
$$\forall z \in R \ (xy)_{t\wedge s}(z) = 0_{t\wedge s}(z),$$
c'est-à-dire
$$(t \wedge s)\chi_{\{xy\}}(z) = (t \wedge s)\chi_{\{0\}}(z).$$
Donc, $xy = 0$ et puisque R intègre on aura $x = 0$ ou $y = 0$.
Par conséquent, $x_t = 0_t$ ou $y_s = 0_s$, $\forall t, s \in (0,1]$.
Réciproquement, supposons que $F_\mu(R)$ est intègre.
Soient x et y tels que $xy = 0$, montrons que $x = 0$ ou $y = 0$. On a
$$\begin{aligned} xy = 0 \ &\Rightarrow \ (xy)_t = 0_t \quad t \in (0,1] \\ &\Rightarrow \ x_t = 0_t \ \ ou \ \ y_t = 0_t \end{aligned}$$

donc, $\forall u, v \in R$, $x_t(u) = 0_t(u)$ ou $y_t(v) = 0_t(v)$
$\Rightarrow$

$$x_t(u) = \begin{cases} t & si \quad x = u \\ 0 & si \quad x \neq u \end{cases} = \begin{cases} t & si \quad 0 = u \\ 0 & si \quad 0 \neq u \end{cases} = 0_t(u)$$

ou

$$y_t(v) = \begin{cases} t & si \quad y = v \\ 0 & si \quad y \neq v \end{cases} = \begin{cases} t & si \quad 0 = v \\ 0 & si \quad 0 \neq v \end{cases} = 0_t(v)$$

c'est-à-dire

$$x_t(u) = 0_t(u) = \begin{cases} t & si \quad x = u = 0 \\ 0 & si \quad x \neq u \neq 0 \end{cases}$$

ou

$$y_t(v) = 0_t(v) \begin{cases} t & si \quad y = v = 0 \\ 0 & si \quad y \neq v \neq 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $x = 0 \;\; ou \;\; y = 0$.

Idéaux Flous

Définitions et propriétés

Dans cette section on introduit des notions fondamentales sur les idéaux flous et deux types d'idéaux (premier et maximal flous) opérant sur un anneau R muni de deux lois "+" et ".", où "0" est l'élément neutre pour la loi "+".
On rappelle l'ensemble suivant qui sera utile par la suite.

$$\mu^* = \{x \in R \,/\;\; \mu(x) = \mu(0)\},$$

où μ est un sous ensemble flou d'un anneau R.

Définition 2.14 *[29] Soit R un anneau. On dit que $\mu \subset R$ est un idéal flou si et seulement si :*

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ $,\forall x, y \in R$.

Exemple 2.2 *Soit*

$$\mu : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1/2 & si \quad x = 0,2 \\ \frac{1}{3} & si \quad x = 1,3 \end{cases}$$

μ est un idéal flou de $\mathbb{Z}_4$.
avec $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

Théorème 2.17 *Soit $\mu \subset R$. Alors, μ est un idéal flou si est seulement si μ_a est un idéal de R, $\forall a \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1] \mid b \leq \mu(0)\}$.*

Démonstration
Soit μ un idéal flou et $a \in (0,1]$ tel que $a \leq \mu(0)$ ou $a \in \mu(R)$.
Soit $x, y \in \mu_a$ et $r \in R$.
Alors, $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq a$ et $\mu(rx) \geq \mu(x) \geq a$. Puisque $x - y, rx \in \mu_a$.
Par conséquent, μ_a est un idéal de R.
Inversement, soit μ_a un idéal de R, $\forall a \in \mu(R) \cup \{b \in (0,1] | b \leq \mu(0)\}$.
Soit $x, y, r \in R$ et $a = \mu(x) \wedge \mu(y)$.
Alors, $a \leq \mu(0)$ et $x, y \in \mu_a$.
Ainsi,

$$x - y \in \mu_a.$$

Par suite,

$$\mu(x-y) \geq a = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Soit $b = \mu(x) \in \mu(R)$. Alors, $x \in \mu_b$. Donc, $rx \in \mu_b$ puisque μ_b est un idéal de R.
Ainsi,

$$\mu(rx) \geq b = \mu(x).$$

Par conséquent, μ est un idéal flou de R.

Théorème 2.18 *μ est un idéal flou de R si et seulement si :*

1. $\forall x_t, y_s \in \mu, \quad x_t - y_s \in \mu$
2. $\forall x \in R$, $\forall t \in (0,1]$, $\forall y_s \in \mu$, $x_t . y_s \in \mu$, *pour tout* $s \in (0,1]$

Démonstration
$\Rightarrow$) Supposons que μ est un idéal flou. On a pour tout $x_t, y_s \in \mu$.

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) \\ &\geq t \wedge s. \end{aligned}$$

Alors,

$$x_t - y_s = (x-y)_{t\wedge s} \in \mu.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mu(x.y) &\geq \mu(x) \vee \mu(y) \\ &\geq t \vee s \\ &\geq t \wedge s. \end{aligned}$$

Ainsi, $(x.y)_{t\wedge s} = x_t.y_s \in \mu$, pour tout $t \in (0,1]$.
$\Leftarrow$) Soient x et $y \in R$, on a $x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$ et $y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu$. On a alors,

$$x_{\mu(x)\wedge\mu(y)} - y_{\mu(x)\wedge\mu(y)} \in \mu.$$

Par conséquent,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Montrons maintenant que $\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$.
Soient x et $y \in R$. Supposons que $\mu(y) \geq \mu(x)$, donc pour

$$t = s = \mu(x) \vee \mu(y),$$

on a,

$$y_{t\vee s} \in \mu.$$

Or $x \in R$ et $t \vee s \in (0,1]$, alors

$$x_{t\vee s}.y_{t\vee s} \in \mu,$$

Ainsi,

$$\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y).$$

Proposition 2.6 *Soient μ et ν deux idéaux flous de R, alors $\mu \cap \nu$ est un idéal flou .*

Démonstration
Soient $x, y \in R$.
Montrons que

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x-y) \geq \Big(\mu \cap \nu\Big)(x) \wedge \Big(\mu \cap \nu\Big)(y).$$

On a

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x-y) = \mu(x-y) \wedge \nu(x-y),$$

puisque μ est un idéal flou de R, alors

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

De même,

$$\nu(x-y) \geq \nu(x) \wedge \nu(y).$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
\mu(x-y) \wedge \nu(x-y) &\geq \Big(\mu(x) \wedge \mu(y)\Big) \wedge \Big(\nu(x) \wedge \nu(y)\Big) \\
&\geq \Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \wedge \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) \\
&\geq \Big(\mu \cap \nu\Big)(x) \wedge \Big(\mu \cap \nu\Big)(y).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x-y) \geq \Big(\mu \cap \nu\Big)(x) \wedge \Big(\mu \cap \nu\Big)(y).$$

On a

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x.y) = \mu(x.y) \wedge \nu(x.y),$$

or μ est un idéal flou de R, alors

$$\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y).$$

De même, $\nu(x.y) \geq \nu(x) \vee \nu(y)$.
Donc, on a

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x-y) = \mu(x-y) \wedge \nu(x-y).$$

Or μ est un idéal flou de R, alors

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

De même, $\nu(x-y) \geq \nu(x) \wedge \nu(y)$.
Alors,

$$\mu(x.y) \wedge \nu(x.y) \geq \Big(\mu(x) \vee \mu(y)\Big) \wedge \Big(\nu(x) \vee \nu(y)\Big).$$

Or

$$\Big(\mu(x) \vee \mu(y)\Big) \wedge \Big(\nu(x) \vee \nu(y)\Big) \geq \Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big). \tag{2.1}$$

En effet si

$$\begin{cases} \mu(x) \leq \mu(y) \\ \\ \nu(x) \leq \nu(y) \end{cases}$$

Alors,

$$\Big(\mu(x) \vee \mu(y)\Big) \wedge \Big(\nu(x) \vee \nu(y)\Big) \;=\; \mu(y) \wedge \nu(y).$$

Comme,

$$\begin{aligned} \Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) &\leq \nu(y) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) \\ &\leq \nu(y). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) &\leq \mu(y) \vee \Big(\nu(y) \wedge \nu(y)\Big) \\ &\leq \mu(y). \end{aligned}$$

On a alors,

$$\Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) \leq \mu(y) \wedge \nu(y).$$

Si maintenant

$$\begin{cases} \mu(y) \leq \mu(x) \\ \\ \nu(x) \leq \nu(y) \end{cases}$$

Alors,

$$\Big(\mu(x) \vee \mu(y)\Big) \wedge \Big(\nu(x) \vee \nu(y)\Big) \;=\; \mu(x) \wedge \nu(y).$$

Puisque,

$$\begin{aligned} \Big(\mu(x) \wedge \nu(x)\Big) \vee \Big(\mu(y) \wedge \nu(y)\Big) &\leq \mu(x) \vee \Big(\mu(x) \wedge \nu(y)\Big) \\ &\leq \mu(x). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big) &\leq \Big(\mu(x)\wedge\nu(y)\Big)\vee\Big(\mu(x)\wedge\nu(y)\Big)\\ &\leq \Big(\mu(x)\wedge\nu(y)\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big)\leq\Big(\mu(x)\wedge\nu(y)\Big).$$

Finalement, pour

$$\begin{cases}\mu(x)\leq\mu(y)\\ \\ \nu(y)\leq\nu(x)\end{cases}$$

Alors,

$$\Big(\mu(x)\vee\mu(y)\Big)\wedge\Big(\nu(x)\vee\nu(y)\Big) = \mu(y)\wedge\nu(x).$$

Or,

$$\begin{aligned}\Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big) &\leq \Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\nu(x)\\ &\leq \nu(x).\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big) &\leq \mu(y)\vee\Big(\nu(y)\wedge\nu(y)\Big)\\ &\leq \mu(y).\end{aligned}$$

Donc,

$$\Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big)\leq\mu(y)\wedge\nu(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Big(\mu(x)\vee\mu(y)\Big)\wedge\Big(\nu(x)\vee\nu(y)\Big) &\geq \Big(\mu(x)\wedge\nu(x)\Big)\vee\Big(\mu(y)\wedge\nu(y)\Big)\\ &\geq \Big(\mu\cap\nu\Big)(x)\vee\Big(\mu\cap\nu\Big)(y).\end{aligned}$$

Corollaire 2.1 *L'intersection d'une famille d'idéaux flous de R est un idéal flou de R.*

Proposition 2.7 *Soient R_1 et R_2 deux anneaux et μ et ν deux idéaux flous de R_1 et R_2 respectivement. Alors Le produit $\mu \times \nu$ est un idéal flou de $R_1 \times R_2$.*

Démonstration
Soient $(x, y), (a, b) \in A_1 \times A_2$.
Montrons que :

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x, y) - (a, b)\Big) \geq \Big(\mu \times \nu\Big)(x, y) \wedge \Big(\mu \times \nu\Big)(a, b),$$

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x, y).(a, b)\Big) \geq \Big(\mu \times \nu\Big)(x, y) \vee \Big(\mu \times \nu\Big)(a, b).$$

On a

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x, y) - (a, b)\Big) = \Big(\mu \times \nu\Big)\Big(x - a, y - b\Big) = \mu(x - a) \wedge \nu(y - b).$$

Or μ est un idéal flou de R_1, donc,

$$\mu(x - a) \geq \mu(x) \wedge \mu(a).$$

De même ν est un idéal flou de R_2, cela implique que

$$\nu(y - b) \geq \nu(y) \wedge \nu(b).$$

Par suite,

$$\mu(x - a) \wedge \nu(y - b) \geq \Big(\mu(x) \wedge \mu(a)\Big) \wedge \Big(\nu(y) \wedge \nu(b)\Big).$$

Ce qui implique,

$$\mu(x - a) \wedge \nu(y - b) \geq \Big(\mu(x) \wedge \nu(y)\Big) \wedge \Big(\mu(a) \wedge \nu(b)\Big).$$

On obtient,

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x, y) - (a, b)\Big) \geq \Big(\mu \times \nu\Big)(x, y) \wedge \Big(\mu \times \nu\Big)(a, b).$$

D'autre part, on a

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x, y).(a, b)\Big) = \Big(\mu \times \nu\Big)\Big(xa, yb\Big) = \mu(xa) \wedge \nu(yb).$$

Or μ est un idéal flou de R_1, donc

$$\mu(xa) \geq \mu(x) \vee \mu(a).$$

De même, ν est un idéal flou de R_2, cela entraîne

$$\nu(yb) \geq \nu(y) \vee \nu(b).$$

Par conséquent,

$$\mu(xa) \wedge \nu(yb) \geq \Big(\mu(x) \vee \mu(a)\Big) \wedge \Big(\nu(y) \vee \nu(b)\Big).$$

ce qui implique que

$$\mu(xa) \wedge \nu(yb) \geq \Big(\mu(x) \vee \mu(a)\Big) \wedge \Big(\nu(y) \wedge \nu(b)\Big).$$

En utilisant le résultat de l'équation 2.1, on trouve

$$\mu(xa) \wedge \nu(yb) \geq \Big(\mu(x) \wedge \nu(y)\Big) \vee \Big(\mu(a) \wedge \nu(b)\Big).$$

Donc,

$$\Big(\mu \times \nu\Big)\Big((x,y)(a,b)\Big) \geq \Big(\mu \times \nu\Big)\Big(x,y) \wedge \Big(\mu \times \nu\Big)\Big(a,b).$$

On déduit finalement que $\mu \times \nu$ est un idéal flou de $R_1 \times R_2$.

Remarque 2.3 *En général la réunion de deux idéaux flous de R n'est pas un idéal flou de R .*

En effet, soient μ et ν deux idéaux flous de $\mathbb{Z}_{12}$, définies par
$\mu(x) = \begin{cases} 0.9 & si \quad x = 0,4,8 \\ 0 & sinon, \end{cases}$ et $\nu(x) = \begin{cases} 0.8 & si \quad x = 0,6 \\ 0 & sinon. \end{cases}$ Alors,

$$(\mu \vee \nu)(6+4) = \mu(10) \vee \nu(10) = 0,$$

et,

$$(\mu \vee \nu)(6) = 0.8, \quad (\mu \vee \nu)(4) = 0.9.$$

Par conséquent, $(\mu \vee \nu)(6+4) \ngeq (\mu \vee \nu)(6) \wedge (\mu \vee \nu)(4)$.

Lemme 2.2 *Soient R_1 et R_2 deux anneaux et $f : R_1 \longrightarrow R_2$ un morphisme d'anneaux, si f est surjective et μ un idéal flou de R_1, alors $f(\mu)$ est un idéal flou de R_2.*
Si ν est un idéal flou de R_2, alors $f^{-1}(\nu)$ est un idéal flou de R_1.

Démonstration
Soient $x, y \in R_2$, on a

$$f(\mu)(x-y) = \sup_{f(z)=x-y} \mu(z),$$

alors il existe $a \in R_1$ tel que

$$x = f(a)$$

(respectivement il existe $b \in R_1$ tel que $y = f(b)$).
On a

$$f(a-b) = f(a) - f(b) = x - y.$$

Par suite,

$$\sup_{f(z)=x-y} \mu(z) \geq \mu(a-b) \geq \mu(a) \wedge \mu(b).$$

Donc,

$$\sup_{f(z)=x-y} \mu(z) \geq \sup_{f(a)=x} \mu(a) \wedge \sup_{f(b)=y} \mu(b).$$

Ainsi,

$$f(\mu)(x-y) \geq f(\mu)(x) \wedge f(\mu)(y).$$

D'autre part, on a

$$f(\mu)(x.y) = \sup_{f(z)=x.y} \mu(z),$$

et

$$f(a.b) = f(a).f(b) = x.y.$$

Alors,

$$\sup_{f(z)=x.y} \mu(z) \geq \mu(a.b) \geq \mu(a) \vee \mu(b).$$

Ainsi,

$$\sup_{f(z)=x.y} \mu(z) \geq \sup_{f(a)=x} \mu(a) \vee \sup_{f(b)=y} \mu(b).$$

Par conséquent,

$$f(\mu)(x.y) \geq f(\mu)(x) \vee f(\mu)(y).$$

Soit ν un idéal flou de R_2, on a pour tout $u, v \in R_1$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\nu)(u-v) &= \nu(f(u-v)) \\
&= \nu(f(u) - f(v)) \\
&\geq \nu(f(u)) \wedge \nu(f(v)) \\
&\geq f^{-1}(\nu)(u) \wedge f^{-1}(\nu)(v).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\nu)(u.v) &= \nu(f(u.v)) \\ &= \nu(f(u).f(v)) \\ &\geq \nu(f(u)) \vee \nu(f(v)) \\ &\geq f^{-1}(\nu)(u) \vee f^{-1}(\nu)(v). \end{aligned}$$

Proposition 2.8 *Soient R_1 et R_2 deux anneaux et $h : R_1 \longrightarrow R_2$ un isomorphisme d'anneaux. Si μ et ν deux idéaux flous de R_1 et R_2 respectivement. Alors,*

1. $h\Big(h^{-1}(\nu)\Big) = \nu$,

2. $h^{-1}\Big(h(\mu)\Big) \supseteq \mu$,

3. $h^{-1}\Big(h(\mu)\Big) = \mu$, *si ν est constant sur $ker h$.*

Démonstration

1. Soit $y \in R_2$, alors il existe un unique $x \in R_1$ tel que $h(x) = y$. Posons $t = \nu(y)$ et montrons que $h(h^{-1}(\nu))(y) = t$.

$$h^{-1}(\nu)(x) = \nu\Big(h(x)\Big) = \nu(y) = t.$$

On a

$$\begin{aligned} h\Big(h^{-1}(\nu)\Big)(y) &= \sup_{h(x)=y} h^{-1}(\nu)(x) \\ &= \sup_{x=h^{-1}(y)} h^{-1}(\nu)(x) \\ &= \sup\{t\} \\ &= t. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h\Big(h^{-1}(\nu)\Big) = \nu$$

2. Soit $a \in R_1$.

Posons

$$b = h(a) \in R_2$$

$$\begin{aligned} h^{-1}\Big(h(\mu)\Big)(a) &= h(\mu)\Big(h(a)\Big) \\ &= h(\mu)(b) \\ &= \sup_{h(z)=b} \mu(z) \\ &\geq \mu(a) && \text{(car } h(a) = b\text{).} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h^{-1}\Big(h(\mu)\Big) \supseteq \mu.$$

3. soit $x \in R_1$. Montrons que $h^{-1}\Big(h(\mu)\Big)(x) = \mu(x)$.
Posons $\mu(x) = t$ et $h(x) = y$.
Soient $a, b \in h^{-1}(y)$, donc

$$h(a) = h(b).$$

Cela entraîne que $h(a) - h(b) = 0$,
ainsi,

$$h(a - b) = 0.$$

Alors,

$$a - b \in Kerh.$$

Puisque μ est constant sur $Kerh$ et $0 \in Kerh$, on aura

$$\mu(a - b) = \mu(0).$$

Donc,

$$\mu(a) = \mu(b).$$

Soit $x \in h^{-1}(y)$, on aura $\mu(a) = \mu(b) = \mu(x) = t$.
Alors,

$$h^{-1}\Big(h(\mu)\Big)(x) = h(\mu)\Big(h(x)\Big) = h(\mu)(y) = \sup_{x \in h^{-1}(y)} \mu(x) = \sup\{t\} = t = \mu(x).$$

Ainsi,

$$h^{-1}\Big(h(\mu)\Big) = \mu.$$

Proposition 2.9 *Soit μ un idéal flou R, alors μ^* est un idéal de R.*

Démonstration
Soit $x, y \in \mu^*$, alors $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(0)$. Par suite, $\mu(x - y) = \mu(0)$.
D'où, $x - y \in \mu^*$.
Soit $r \in R$ et $x \in \mu^*$, alors $\mu(rx) \geq \mu(x) = \mu(0)$.
Donc,

$$\mu(rx) = \mu(0).$$

Ainsi, $xr \in \mu^*$ pour tout $r \in R$ et $x \in \mu^*$.
Par conséquent, μ^* est un idéal de R.

Lemme 2.3 *Soit μ et ν deux idéaux flous de R, alors*

$$\mu^* \cap \nu^* \subseteq \Big(\mu \cap \nu\Big)^*.$$

Démonstration

soit $x \in \mu^* \cap \nu^*$,

alors,

$$\mu(x) = \mu(0) \quad \text{et} \quad \nu(x) = \nu(0).$$

Ainsi,

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = \mu(0) \wedge \nu(0) = \Big(\mu \cap \nu\Big)(0).$$

L'autre inclusion n'est pas toujours vraie.

Exemple 2.3 *Soit R un anneau et soient μ et ν deux sous-ensembles flous de R tel que*

$$\mu(x) = 0 \text{ et } \nu(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 0 \\ \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

μ et ν sont deux idéaux flous, $\mu^* \cap \nu^* = R \cap \{0\} = \{0\}$ et $\Big(\mu \cap \nu\Big)^* = R$.

Ainsi,

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)^* \nsubseteq \mu^* \cap \nu^*.$$

Lemme 2.4 *Soit μ et ν deux idéaux flous d'un anneau R tel que $\mu(0) = \nu(0) = 1$. Alors,*

$$\mu^* \cap \nu^* = \Big(\mu \cap \nu\Big)^*.$$

Démonstration

Soit $x \in \Big(\mu \cap \nu\Big)^*$,

alors,

$$(\mu \cap \nu\Big)(x) = (\mu \cap \nu\Big)(0).$$

Ainsi,

$$\mu(x) \wedge \nu(x) = \mu(0) \wedge \nu(0) = 1,$$

donc,

$$\mu(x) = \nu(x) = 1.$$

Par suite, $x \in \mu^* \cap \nu^*$. Ainsi,

$$\Big(\mu \cap \nu\Big)^* \subseteq \mu^* \cap \nu^*,$$

Puisque

$$\mu^* \cap \nu^* \subseteq \Big(\mu \cap \nu\Big)^*.$$

On a alors,

$$\mu^* \cap \nu^* = \Big(\mu \cap \nu\Big)^*.$$

Corollaire 2.2 *Soit I un ensemble d'indice et $\Big\{\mu_i \ / \ \ i \in I\Big\}$ une famille d'idéaux flous de R tel que $\mu_i(0) = 1, \ \forall i \in I$. Alors,*

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i^* = \Big(\bigcap_{i\in I} \mu_i\Big)^*.$$

Théorème 2.19 *Soit μ un idéal flou de R, alors*

$$\mu^i(0) = \mu(0), \ \ \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration

Le résultat est vrai pour $i = 1$, par récurrence on suppose qu'il est vrai à l'ordre i et montrons qu'il reste vrai à l'ordre $(i+1)$.

On a

$$\mu^{i+1}(0) = \Big(\mu^i \circ \mu\Big)(0) = \sup_{0=yz} \Big(\mu^i(y) \wedge \mu(z)\Big) = \mu(0),$$

Lemme 2.5 *Soit μ un idéal flou de R. Alors,*

$$\Big(\mu^i\Big)^* \subseteq \mu^*, \ \forall i \geq 1.$$

Démonstration

Soit $x \in \Big(\mu^i\Big)^*$. Alors,

$$\mu^i(x) = \mu^i(0) = \mu(0). \tag{2.2}$$

Puisque $\mu^i(x) \leq \mu(x)$, ainsi, $\mu(x) = \mu(0)$, alors, $x \in \mu^*$, et par suite, $\Big(\mu^i\Big)^* \subseteq \mu^*, \ \forall i \geq 1$.

Proposition 2.10 *Soit μ un idéal flou de R, et $k \in \mathbb{N}^*$*
si $x_1, x_2, \cdots, x_k \in R$, alors

$$\mu^k(x_1....x_k) \geq \min\Big(\mu(x_1), \mu(x_2), \cdots, \mu(x_k)\Big). \tag{2.3}$$

Démonstration

pour $k = 1$, on a $\mu(x_1) \geq \mu(x_1)$.

Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $k \geq 1$.

On a

$$\begin{aligned} \mu^{k+1}(x_1....x_{k+1}) &= \mu^k \circ \mu(x_1....x_{k+1}) \\ &= \sup_{x_1....x_{k+1}=yz} \Big(\mu^k(y), \mu(z)\Big) \\ &\geq \min\Big(\mu^k(x_1....x_k), \mu(x_{k+1})\Big). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \mu^k(x_1....x_k) &= \mu^{k-1} \circ \mu(x_1....x_k) \\ &\geq \min\Big(\mu^{k-1}(x_1....x_{k-1}), \mu(x_k)\Big) \\ &\geq \min\Big(\mu(x_1), \cdots, \mu(x_k)\Big). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mu^{k+1}(x_1....x_{k+1}) &\geq \min\Bigg(\min\Big(\mu(x_1), \cdots, \mu(x_k)\Big), \mu(x_{k+1})\Bigg) \\ &= \min\Big(\mu(x_1), \cdots, \mu(x_k), \mu(x_{k+1})\Big). \end{aligned}$$

Théorème 2.20 *Soit $\Big\{\mu_k \ / \ k \geq 1\Big\}$ une famille finie d'idéaux flous de R. Alors,*

$$\Big(\mu^i\Big)^* = \Big(\mu^*\Big)^i, \quad \forall\, 1 \leq i \leq k.$$

Démonstration
Pour $i = 1$, on a $\mu^* = \mu^*$.
En utilisant un raisonnement par récurrence, soit $x \in \Big(\mu^{i+1}\Big)^*$.
Alors,

$$\mu^{i+1}(x) = \mu^{i+1}(0) = \mu(0),$$

or

$$\mu^{i+1}(x) = \sup_{x=ab} \Big\{\mu^i(a) \wedge \mu(b)\Big\} = \mu(0).$$

Ainsi,

$$\mu^i(a) = \mu(0) = \mu(b),$$

Donc, $a \in \Big(\mu^i\Big)^* = \Big(\mu^*\Big)^i$, et $b \in \mu^*$,
or $x = ab$, donc

$$x \in \Big(\mu^*\Big)^i \mu^* = \Big(\mu^*\Big)^{i+1}.$$

par conséquent,

$$\Big(\mu^{i+1}\Big)^* \subseteq \Big(\mu^*\Big)^{i+1}.$$

Inversement, pour $x = \sum_{j=1}^{r} x_{j_1}x_{j_2}....x_{j_{i+1}} \in \left(\mu^*\right)^{i+1}$, avec $x_{j_k} \in \mu^*$, pour tout $k = 1, \cdots, i+1$ et $j = 1, \cdots, r$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\mu^{i+1}(x) &\geq \min\Big(\mu^{i+1}(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{i+1}}), \cdots, \mu^{i+1}(x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots, x_{r_{i+1}})\Big) \\
&\geq \min\Bigg(\min\Big(\mu(x_{j_1}), \mu(x_{j_2}), \cdots, \mu(x_{j_{i+1}}\Big), \cdots, \min\Big(\mu(x_{r_1}, \mu(x_{r_2}), \cdots, \mu(x_{r_{i+1}})\Big)\Bigg) \\
&= \mu(0).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\mu^{i+1}(x) = \mu(0) = \mu^{i+1}(0).$$

Ainsi, on a $x \in \left(\mu^{i+1}\right)^*$.
Donc,

$$\left(\mu^*\right)^{i+1} \subseteq \left(\mu^{i+1}\right)^*$$

D'où

$$\left(\mu^*\right)^{i+1} = \left(\mu^{i+1}\right)^*.$$

Théorème 2.21 *Soit* $\Big\{\mu_i \ / \ \ i \geq 1\Big\}$ *une famille d'idéaux flous de* R. *Alors,*

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu^i\Big)^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*\right)^i.$$

Démonstration
Soit $x \in R$. Alors,

$$\begin{aligned}
x \in \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu^i\Big)^* &\iff \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu^i\Big)(x) = \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu^i\Big)(0) \\
&\iff \min\Big(\mu^i(x)\Big) = \min\Big(\mu^i(0)\Big) = \mu(0) \\
&\iff \mu^i(x) = \mu(0) = \mu^i(0).
\end{aligned}$$

Donc, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*\right)^i$.
par conséquent, $\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu^i\Big)^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*\right)^i$.

Remarque 2.4 *Soit* $I \subseteq R$ *on considère le sous-ensemble de* R *défini par*

$$\lambda_{I_t}(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in I \\ \\ t & sinon \end{cases}$$

On remarque que pour $t = 0$, λ_{I_t} coïncide avec la fonction indicatrice de I,noté par λ_I.

Proposition 2.11 *I est un idéal ordinaire d'un anneau R si et seulement si λ_{I_t} est un idéal flou de R.*

Démonstration
$\Rightarrow$) supposons que I est un idéal ordinaire de R, on va discuter trois cas :
-Premier cas : si $x, y \in I$, alors $x - y \in I$, et $xy \in I$.
Ainsi,

$$\lambda_{I_t}(x-y) \geq \lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y) \text{ et } \lambda_{I_t}(xy) \geq \lambda_{I_t}(x) \vee \lambda_{I_t}(y).$$

-Deuxième cas : si $x \in I, y \in R$, alors $x - y \in R$, et $xy \in I$.
Or

$$\lambda_{I_t}(x) = 1 \text{ et } \lambda_{I_t}(y) = t,$$

alors,

$$\lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y) = t.$$

Par conséquent,

$$\lambda_{I_t}(x-y) \geq \lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y),$$

de plus

$$\lambda_{I_t}(xy) \geq \lambda_{I_t}(x) \vee \lambda_{I_t}(y).$$

-Troisième cas : si $x \in R, y \in R$. Comme

$$\lambda_{I_t}(x) = t \text{ et } \lambda_{I_t}(y) = t,$$

alors,

$$\lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y) = t.$$

Par conséquent,

$$\lambda_{I_t}(x-y) \geq \lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y)$$

de plus, on a

$$\lambda_{I_t}(xy) \geq \lambda_{I_t}(x) \vee \lambda_{I_t}(y).$$

$\Leftarrow$) Soit $x, y \in I$. Alors,

$$\lambda_{I_t}(x) = \lambda_{I_t}(y) = 1,$$

puisque

$$\lambda_{I_t}(x-y) \geq \lambda_{I_t}(x) \wedge \lambda_{I_t}(y),$$

alors,

$$\lambda_{I_t}(x-y)=1.$$

Ainsi,

$$x-y\in I.$$

Prenons $z\in R$, on a

$$\lambda_{I_t}(x)\vee\lambda_{I_t}(z)=\lambda_{I_t}(x)=1,$$

or

$$\lambda_{I_t}(xy)\geq\lambda_{I_t}(x)\vee\lambda_{I_t}(z).$$

Donc,

$$xy\in I.$$

Théorème 2.22 *Soit μ un idéal flou non constant de R tel que $\mu(x)\neq 1$, $\forall x\in R$. Alors, il existe un idéal flou ν de R tel que $\nu(x)\neq 1$, et $\mu\subset\nu$.*

Démonstration

-Premier cas : $\mu(0)\neq 1$, soit $t\in]\mu(0),1[$ et ν un sous-ensemble flou de R tel que

$$\nu(x)=t,\quad\forall x\in R,$$

alors ν est un idéal flou , de plus

$$\mu\subset\nu$$

où

$$\nu(x)\neq 1,\quad\forall x\in R$$

-Deuxième cas : $\mu(0)=1$, donc il existe un élément x de R tel que $\mu(x)\ \neq\ 1$.
soit $t\in]\mu(x),\mu(0)[$, puisque μ_t est un idéal ordinaire de R d'après le théorème (2.17). Donc ν défini par :

$$\nu(a)=\begin{cases}1 & \text{si } a\in\mu_t\\ \\ t & \text{si } a\notin\mu_t\end{cases}$$

est un idéal flou de R (d'après la proposition 2.11), et que

$$\mu\subset\nu,$$

comme $t\in]\mu(x),\mu(0)[$, donc

$$x\notin\mu_t.$$

Cela entraine que

$$\nu(x) = t \neq 1.$$

Idéal Premier Flou

Définition 2.15 *[44] Un idéal flou P d'un anneau R est dit premier si :*

- *P n'est pas une fonction constante,*
- *A, B deux idéaux de R, $A \circ B \subseteq P \quad \Rightarrow \quad A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

Théorème 2.23 *Si $I(\neq R)$ est un idéal premier dans un anneau R, alors la fonction caractéristique χ_I est un idéal premier flou.*

Démonstration

Puisque $I \neq R$, alors χ_I est une fonction non constante sur R. Soit A et B deux idéaux flous de R tels que, $A \circ B \subseteq \chi_I$ et $A \not\subset \chi_I$ et $B \not\subset \chi_I$.
Alors il existe $x, y \in R$ tel que $A(x) > \chi_I(x)$, $B(y) > \chi_I(y)$.
Donc, $A(x) \neq 0$ et $B(y) \neq 0$, or $\chi_I(x) = 0$ et $\chi_I(y) = 0$,
par suite, $x \notin I$ et $y \notin I$, puisque I est un idéal premier il existe $r \in R$ tel que $xry \notin I$.
Soit $a = xry$, alors $\chi_I(a) = 0$. Donc,

$$A \circ B(a) = 0. \tag{2.4}$$

Or,

$$\begin{aligned} A \circ B(a) &= \sup_{a=cd}\{A(c) \wedge B(d)\} \\ &\geq A(x) \wedge B(ry) \\ &\geq A(x) \wedge B(y) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Contradiction avec 2.4.
Par conséquent, pour tout idéal A et B, on a $A \circ B \leq \chi_I$ implique soit $A \subseteq \chi_I$, ou $B \subseteq \chi_I$.

Théorème 2.24 *Si I est un idéal dans un anneau R tel que χ_I est un idéal premier flou. Alors I est un idéal premier.*

Démonstration

On a χ_I, est un idéal premier flou, Alors $I \neq R$.
Soient A, B deux idéaux de R tels que, $AB \subseteq I$, et soit $x \in R$,

Si $\chi_A \circ \chi_B(x) = 0$ alors, $\chi_A \circ \chi_B(x) \leq \chi_I(x)$.
Supposons que $\chi_A \circ \chi_B(x) \neq 0$. Alors,

$$\chi_A \circ \chi_B(x) = \sup_{x=yz}\{\chi_A(y) \wedge \chi_B(z))\} \neq 0.$$

Donc, il existe $y, z \in R$ tel que $x = yz$ et $\chi_A(y) \neq 0,\ \chi_B(z) \neq 0$.
Par suite,

$$\chi_A(y) = 1,\ \text{et}\ \chi_B(z) = 1.$$

Ce qui implique que

$$y \in A,\ \text{et}\ z \in B.$$

D'où,

$$x = yz \in AB \subseteq I.$$

Ainsi,

$$\chi_I(x) = 1.$$

Alors, on en déduit que $\chi_A \circ \chi_B(x) \leq \chi_I(x)$ pour tout $x \in R$.
Par conséquent

$$\chi_A \circ \chi_B \subseteq \chi_I,$$

et puisque χ_I est un idéal flou premier, alors on a $\chi_A \subseteq \chi_I$ ou $\chi_B \subseteq \chi_I$.
Cela entraîne que $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$.
Par conséquent, I est un idéal premier de R.

Lemme 2.6 *[44] Un sous-ensemble flou μ de R est un idéal premier flou si et seulement si pour tout $x, y \in R$,*

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\mu(x.y) = \mu(x) \vee \mu(y)$.

Théorème 2.25 *Soit μ un idéal premier flou de R, alors μ^* est un idéal premier de R.*

Démonstration
Supposons que μ est un idéal premier flou de R. Alors d'après la proposition (2.9), μ^* est un idéal.
Maintenant soit $xy \in \mu^*$, alors, $\mu(xy) = \mu(0)$, donc $\mu(x) \vee \mu(y) = \mu(0)$.
Par suite, $\mu(x) = \mu(0)$ ou $\mu(y) = \mu(0)$.
Ainsi, $x \in \mu^*$ ou $y \in \mu^*$.
Par conséquent, μ^* est un idéal premier de R.

Proposition 2.12 *Soit I un idéal premier de R et $s \in [0, 1)$.*
Considérons μ le sous-ensemble flou de R défini par :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in I \\ \\ s & sinon \end{cases}$$

alors, μ est un idéal premier flou de R.

Démonstration
En s'inspirant du fait que I est un idéal de R, d'après la proposition 2.11, μ est un idéal flou de R.
Par conséquent,

$$\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Alors, supposons que $x \in I$ ou $y \in I$,
par suite, $xy \in I$, donc,

$$\mu(x) \vee \mu(y) = 1 = \mu(xy).$$

Sinon $x \notin I$ et $y \notin I$,
Ce qui implique que $xy \notin I$, car I est premier. et alors,

$$\mu(x) \vee \mu(y) = s = \mu(xy).$$

Idéal Maximal Flou

Notons dans la suite que pour un sous-ensemble flou A de R, $A^i = \underbrace{A \circ A \cdots \circ A}_{i \text{ fois}}$

Définition 2.16 *[33] Soit μ un idéal flou de R. On dit que μ est un idéal maximal de R si :*

1. *μ n'est pas constant*
2. *pour tout idéal flou ν de R, si $\mu \subset \nu \quad \Rightarrow \quad \mu^* = \nu^*$ ou $\nu = \lambda_R$.*

Proposition 2.13 *Soit μ un idéal maximal flou de R, alors $\mu(0) = 1$*

Démonstration
Supposons que $\mu(0) \neq 1$, soit $t \in]\mu(0), 1[$.
Posons

$$\nu(x) = t, \quad \forall x \in R$$

Alors, ν est un idéal flou de R, et de plus

$$\mu \subset \nu$$

Or

$$\mu^* \neq \nu^* = R \text{ et } \nu \neq \lambda_R,$$

donc, μ n'est pas un idéal maximal flou (absurde).
Ainsi, $\mu(0) = 1$.

Théorème 2.26 *Soit μ un idéal maximal flou de R. Alors, μ^* est un idéal maximal de R.*

Démonstration
On a μ n'est pas constant, $\mu^* \neq R$, Soit $t \in [0, 1[$ et M un idéal de R tel que $\mu^* \subset M$, d'après la Proposition 2.11

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M \\ \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

est un idéal flou de R et que

$$\mu \subset \nu$$

puisque μ est un idéal maximal flou de R, on aura

$$\mu^* = \nu^* \quad \text{ou} \quad \nu = \lambda_R$$

- si $\mu^* = \nu^*$, alors
$$\mu^* = M \quad (\text{car} \ \ \nu^* = M)$$
- si $\nu = \lambda_R$, alors
$$M = R.$$

Ainsi μ^* est un idéal maximal de R.
L'implication inverse est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.27 *[33] Soit μ un idéal flou de R.*
Si μ^* est un idéal maximal de R et $\mu(0) = 1$, alors μ est un idéal maximal flou de R

Corollaire 2.3 *Si $I \neq R$ un idéal de R.*
I est un idéal maximal de R si et seulement si λ_I est un idéal maximal flou de R.

Démonstration

$\Rightarrow$) Supposons que I est un idéal maximal de R.

On a

$$\left(\lambda_I\right)^* = I \text{ et } \lambda_I(0) = 1 \quad (\text{car } 0 \in I).$$

Donc d'après le Théorème 2.27, λ_I est un idéal maximal flou de R.

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que λ_I est un idéal flou de R, alors d'après le théorème 2.26.

$$\left(\lambda_I\right)^* = I$$

est un idéal maximal de R.

Proposition 2.14 *Soit μ un idéal maximal flou de R, alors μ est un idéal premier flou.*

Démonstration

Supposons que μ est un idéal maximal flou de R. Prenons $s \in [0, 1[$, on définit l'idéal flou ν de R comme suit :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R \\ \\ s & \text{sinon} \end{cases}$$

alors, $\mu \subseteq \nu$, puisque $\nu^* = R$, alors pour tout $x \in R$ on a $\mu(x) = \mu(0)$, or la définition d'un idéal flou entraîne que

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \mu(x) \vee \mu(y) \\ &= \mu(0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu(xy) = \mu(0) = \mu(x) \vee \mu(y).$$

par conséquent, μ est un idéal premier flou.

Proposition 2.15 *Soit μ un idéal non-constant flou de R. Alors, il existe un idéal maximal flou ν de R tel que $\mu \subseteq \nu$.*

Démonstration

Puisque μ non-constant, il existe $x \in R$ tel que $\mu(x) < \mu(0)$.

Soit $t \in [0, 1)$ tel que $\mu(x) < t < \mu(0)$,

alors, μ_t, est un idéal de R.

Donc, il existe un idéal maximal M de R tel que $\mu_t \subseteq M$.

Considérons l'idéal flou ν défini par :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M \\ \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème (2.27), ν est un idéal maximal flou, et il est clair que $\mu \subseteq \nu$.

Chapitre 3

Théorie des sous-ensembles flous intuitionistiques

Le développement de la théorie des ensembles flous, a été spectaculaire dans les trois dernières décennies. Néanmoins, il y a des problèmes qui pour une meilleure analyse exigent une philosophie semblable à la notion floue, dans lequel non seulement le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble est pris en considération, mais aussi bien son degré de non-appartenance à cet ensemble. Dans cette direction, en 1984, La notion des ensembles flous intuitionistiques (IFS) a été introduite par K.Atanassov dans [5] comme une généralisation de la notion des ensembles flous (FS) qui a été décrite par Zadeh [58].

3.1 Exemples et motivations

Premier Exemple :
Deux personnes "x" et "y" ont acheté une boîte de chocolat, cette boîte contient 10 pièces. 7 ont été mangés par "y", deux par "x" et une pieèce de chocolat est tombé sous la table. à ce moment là "z" un ami de "x", est venu, et "x" déclare :

"Nous ne pouvons pas te donner de chocolat, parce que "y" a mangé toutes les pièces "

Donnons une estimation de la valeur de vérité de cette déclaration avant qu'on ait une connaissance des évènements ultérieurs. Puisque "y" n'a pas été le seul qui a mangé le chocolat, alors à partir du point de vue classique qui utilise 0 et 1 pour les estimations, la déclaration de "x" a une valeur de vérité nulle.
D'autre part, on est convaincu d'une façon intuitive que la déclaration est plus vraie que fausse. Parce qu'il ne reste plus de chocolat.
Si on estime la déclaration de "x" dans les termes de logiques ternaires, introduite par Jan Lukasiewicz en 1926 [24], qui prend l'ensemble $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ comme ensemble des estimations, sa valeur de vérité devra être $\frac{1}{2}$.
Lukasiewicz a généralisé son idée à la notion de plusieurs valeurs logiques [24]. Par exemple, si on utilise onze valeurs logiques, en prenant comme estimations l'ensemble

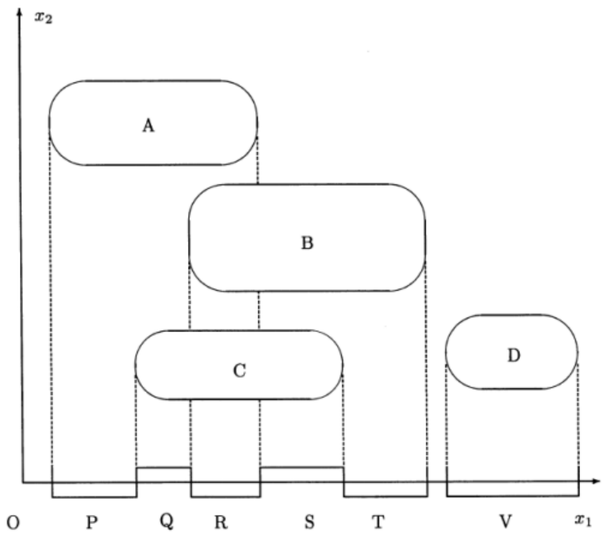
des éléments $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., 1\}$, et dans ce cas, notre problème est à nouveau facile à résoudre : la vérité de l'estimation de la déclaration est exactement $\frac{1}{7}$. Mais si nous prenons six valeurs logiques, l'estimation est décrit par l'ensemble $\{0, \frac{1}{5}, .., 1\}$, maintenant, on ne saura pas évaluer correctement la valeur de vérité de la déclaration précèdente. On hésitera entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, mais aucune de ces deux valeurs ne sera correcte, parce que

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}$$

Ces deux valeurs seraient éloignées de la valeur $\frac{7}{10}$.
Il y a plusieurs façons pour évaluer l'estimation de vérité, pour gérer le même problème, ainsi on aboutit à l'idée d'ensemble flou élaborée par Lotfi Zadeh, qui utilise $[0, 1]$ comme ensemble d'évaluation.
Maintenant il est claire que la valeur de vérité est égale à 0.7. Cependant, dans le prochain moment "y" peut prendre le chocolat tombé et le placé dans la boîte, en conservant la valeur de vérité qui est égale à 0.7, et le reste c'est 0.3. Mais il peut aussi manger le dérnier morceau, et dans ce cas la valeur de vérité prend 0.8 et le reste c'est 0.2. Dans ce sens, la déclaration dépend essentiellement aux actions de "y". Donc l'appareil des ensembles flous intuitionistiques nous donne la réponse la plus précise $< 0.7, 0.2 >$, et maintenant le degré d'incertitude c'est 0.1.
Deuxième Exemple :
Dans cette sous-section on va présenter un exemple d'un sous-ensemble intuitionistique propre, c'est à dire : n'est pas floue.
Soient A,B,C et D quatre parties compactes, fermées et convexes du plan (O, x_1, x_2), telles que

$$A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$$

Dans le même plan considèrons $P \cup R \cup Q$, $Q \cup R \cup S$, $R \cup S \cup T$ et V leurs projections orthogonales sur Ox_1.



Soit aussi $X = A \cup B \cup C \cup D$, considèrons les parties F et G telles que.

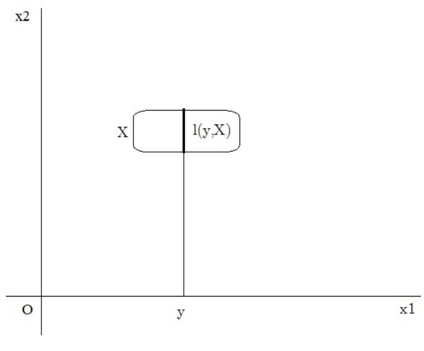
— $A \subset F \subset A \cup C \cup D$

— $B \subset G \subset B \cup C \cup D$

— $F \cap G = \emptyset$

— $F \cup G \subset X$

Remarquons que la partie F est incluse dans le complémentaire de la partie G dans X. On suppose qu'on peut seulement observer les projections des points de X sur (Ox_1), et pour $x \in X$. On ne connait $l(y, X)$ que si X est l'une des parties A, B, C ou D.
On note $l(y, X)$ la longueur d'un segment dans X construit sur une ligne perpendiculaire à (Ox_1), incident d'un point y de (Ox_1)(voir figure).



Notre objectif est d'expliquer le degré d'appartenance et non-appartennace d'un élément x par rapport à la partie F, en respectant la position des quatre parties.
Si $y \in P$, il est clair que y est la projection orthogonale d'un point $x \in F$, donc dans ce cas

$$\mu_F(x) = 1$$

Si $y \in Q$, alors $x \in A$ ou $x \in C$.
Si $x \in A$, alors $x \in F$. Mais si $x \in C$, alors on n'est pas sûr que $x \in F$ ou $x \in G$. Donc

$$\mu_F(x) = \frac{l(y,A)}{l(y,A) + l(y,C)}$$

On en déduit que

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \ si \ y \in Q \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in R \\ 0, \text{ si } y \in S \cup T \cup V \end{cases}$$

De la même manière

$$\nu_F(x) = \mu_G(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup Q \cup V \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in S \\ \frac{l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \ si \ y \in R \\ 1, \text{ si } y \in T \end{cases}$$

Alors

$$\mu_F(x) + \nu_G(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,A)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \\ \frac{l(y,A)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ \frac{l(y,B)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ 0, \text{ si } y \in V \end{cases}$$

Il est clair que $0 \leq \mu_F(x) + \nu_F(x) < 1$.

La valeur d'incertitude est donnée par

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } y \in P \cup T \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,A)+l(y,C)}, \; si \; y \in Q \\ \\ \frac{l(y,C)+l(y,B)}{l(y,A)+l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in R \\ \\ \frac{l(y,C)}{l(y,B)+l(y,C)}, \; si \; y \in S \\ \\ 1, \text{ si } y \in V \end{cases}$$

3.2 Notions fondamentales

Définition 3.1 *On définit un sous-ensemble flou intuitionistique A d'un univers X par la donnée de deux fonctions*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

et

$$\nu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

appelées respectivement fonction d'appartenance et fonction de non-appartenance de A, qui vérifient

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X$$

On peut représenter A sous la forme suivante :

$$A = \Big\{ < x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, \quad 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \Big\}$$

On note $\mathbb{IF}(X)$ l'espace de sous-ensembles floues intuitionistiques de X.

Remarque 3.1 *Tout sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou intuitionistique. En effet, on a*

$$0 \leq \mu_A + \nu_A = 1$$

Soit X un univers.

Définition 3.2 *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X. On appelle support de A l'ensemble*

$$S(A) = \Big\{ x \in X, \nu_A(x) < 1 \Big\}$$

Définition 3.3 *Soient n sous-ensembles flous intuitionistiques $A_1, ..., A_n$ respectivement de $X_1, ..., X_n$. Le produit cartésien de $A_1, ..., A_n$ est un sous-ensemble flou intuitionistique de $X_1 \times ... \times X_n$, défini par*

$$\mu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \min \Big(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n) \Big)$$
$$\nu_{A_1 \times ... \times A_n}(x_1, ..., x_n) = \max \Big(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n) \Big)$$

$\forall x_i \in A_i, \ i = 1, 2, ...$

3.3 Opérations de base sur les sous-ensembles flous intuitionistiques

On définit les opérations sur l'espace des sous-ensembles flous intuitionistiques comme suit :

— **Egalité**

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) = \nu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Inclusion**

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \nu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Complémentaire**

Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de X caractérisé par μ_A et ν_A. Le complémentaire de A est un sous-ensemble flou intuitionistique caractérisé par :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \nu_A(x) \quad \text{et} \quad \nu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

— **Intersection**

L'intersection de deux sous-ensembles flous intuitionistiqus A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cap B}(x) = \max\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

— **Réunion**

La réunion de deux sous-ensembles flous intuitionistiques A et B de X est un sous-ensemble flou intuitionistique défini par :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \quad \text{et} \quad \nu_{A\cup B}(x) = \min\Big(\nu_A(x), \nu_B(x)\Big), \quad \forall x \in X$$

D'après [7, 6] on a pour $A, B \in \mathbb{IF}(X)$.On a les assertions suivantes

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

3.4 Interprétations géométriques

interprétation géométrique d'un sous-ensemble flou intuitionistique

Dans cette section, plusieurs interprétations géométriques des $\mathbb{IF}(X)$ sont représentées.

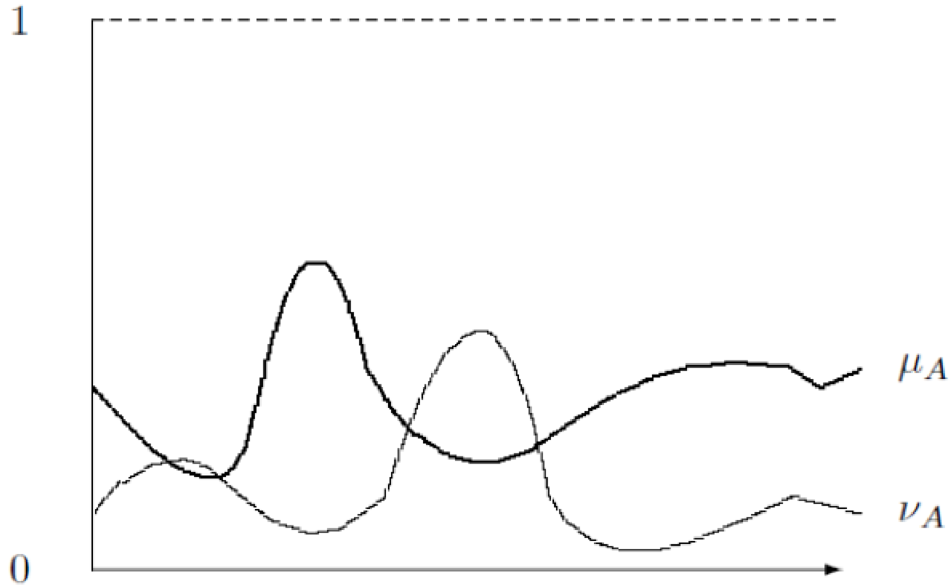


Figure 3.1 – L'interprétation géométrique la plus largement acceptée

Son analogue est donné en figure 3.2

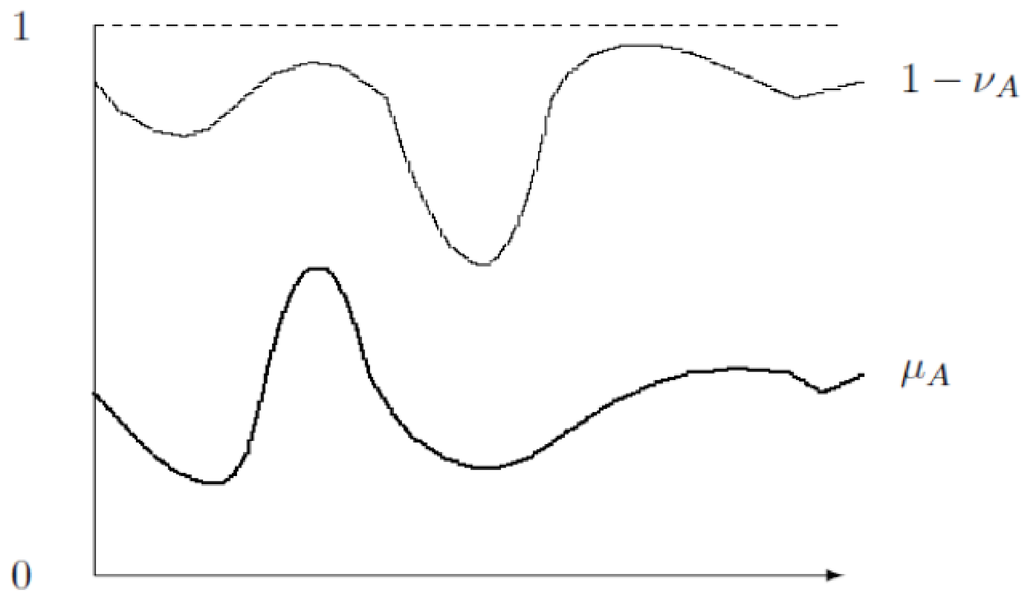


FIGURE 3.2 – Équivalente à la figure 3.1

On peut aussi donner une interprétation géométrique par un segment de longueur 1.

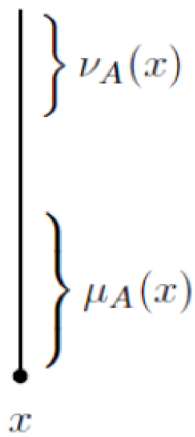


FIGURE 3.3 – Présentation sur un segment de longueur 1

Les interprétations suivantes sont impossibles car on peut remarquer que $\mu(x) + \nu(x) \geq 1$ pour un x de $\mathbb{R}$.

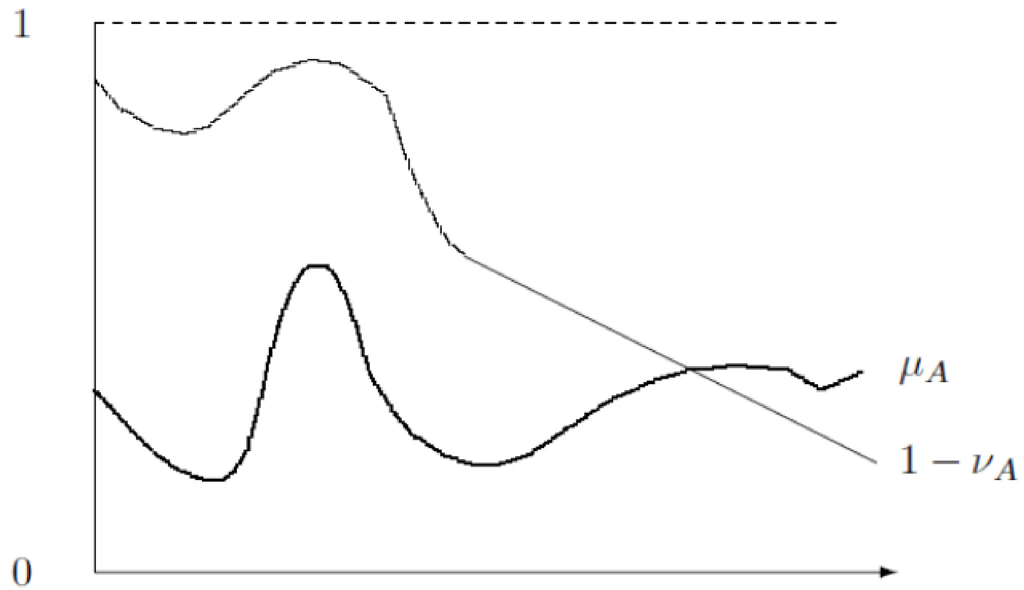


FIGURE 3.4 – Situation impossible

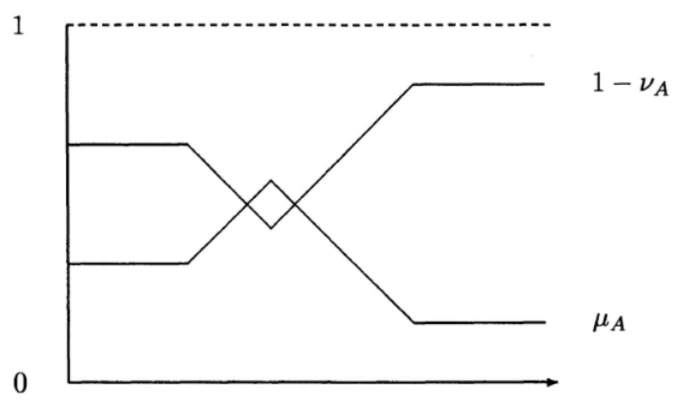


FIGURE 3.5 – Intérprétation impossible

Interprétation géométrique des opérations

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cup B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cup B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

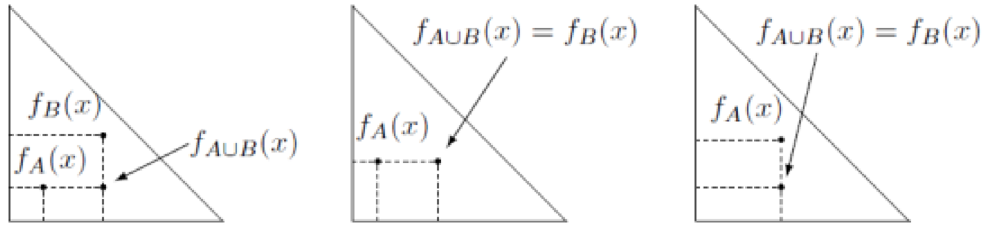


FIGURE 3.6 – Interprétation géométrique de la réunion

Si $A, B \in \mathbb{IF}(X)$, on note $f_{A\cap B}$ la fonction qui à tout $x \in X$ fait associer $f_{A\cap B}(x)$ point du plan (O, x_1, x_2) de coordonnées $< \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} >$

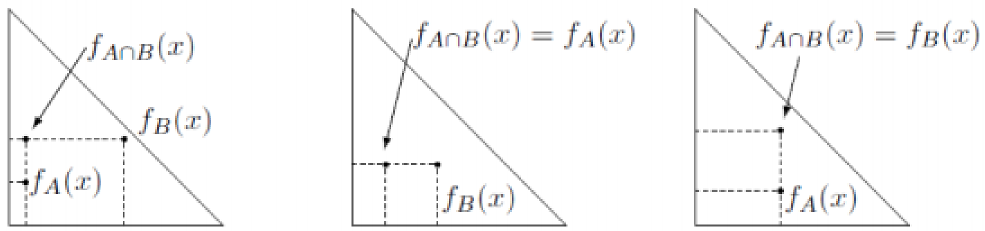


FIGURE 3.7 – Interprétation géométrique de l'intersection

3.5 Transformation de $\mathbb{IF}(X)$ dans $\mathbb{F}(X)$

On introduit les deux opérateurs suivants $\Box$ et $\diamond$ qui transforment un sous-ensemble flou intuitionistique en un sous-ensemble flou.
Soit $A \in \mathbb{IF}(X)$

$$\Box A = \left\{ < x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) >, x \in X \right\}$$

et

$$\diamond A = \left\{ < x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X \right\}$$

Si A est un sous-ensemble flou alors

$$\Box A = A = \diamond A$$

Remarque 3.2 *La dernière égalité montre que les opérateurs* $\square$ *et* $\diamond$ *n'admettent pas une analogie sur l'espace des sous-ensembles flous, ce qui entraine aussi que* $\mathbb{IF}(X)$ *est une extension propre de l'ensemble des sous-ensembles flous.*

On a les propriétés suivantes

— $\overline{\square \overline{A}} = \diamond A$
— $\overline{\diamond \overline{A}} = \square A$
— $\square A \subset A \subset \diamond A$
— $\square \square A = \square A$
— $\diamond \square A = \square A$
— $\diamond \diamond A = \diamond A$

On note $\subset_{\square}$, $\subset_{\diamond}$ et $\sqsubseteq$, trois opérations définies sur $\mathbb{IF}(X)$ par

$$A \subset_{\square} B \Longleftrightarrow \square A \subset \square B$$

$$A \subset_{\diamond} B \Longleftrightarrow \diamond A \subset \diamond B$$

$$A \sqsubseteq B \Longleftrightarrow \pi_A(x) \leq \pi_B(x),\ \forall x \in X$$

On obtient

— Si $A \subset_{\square} B$ et $A \subset_{\diamond} B$, alors $A \sqsubseteq B$
— Si $A \subset_{\square} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$
— Si $A \subset_{\diamond} B$ et $A \sqsubseteq B$, alors $A \sqsubseteq B$

L'interprétation géométrique pour les deux opérateurs est donnée par :

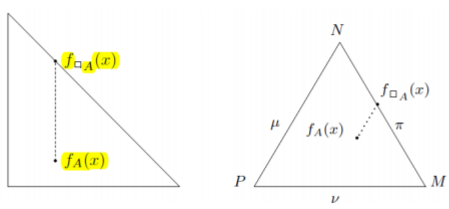


FIGURE 3.8 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\square$

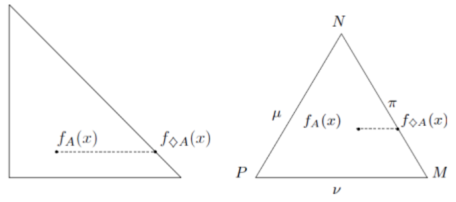


FIGURE 3.9 – Interprétation géométrique de l'opérateur $\diamond$

3.6 (α, β)-coupe d'un ensemble flou intuitionistique

Dans cette section on va donner une généralisation de la notion de α-coupe utilisée dans le cas d'un ensemble flou.

Définition 3.4 *Une (α, β)-coupe d'un sous-ensemble flou intuitionistique*

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) >, x \in X\}$$

est définie par

$$A^{\alpha,\beta} = \left\{ x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha, \quad et \quad \nu_A(x) \leq \beta \right\}$$

où $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $\alpha + \beta \leq 1$.

On définit aussi

$$A^{\beta} = \left\{ x \in X, \quad \nu_A(x) \leq \beta \right\}$$

et

$$A_{\alpha} = \left\{ x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha \right\}.$$

On obtient la proposition suivante

Proposition 3.1

$$A^{\alpha,\beta}(A) = A_{\alpha} \cap A^{\beta}(A).$$

Exemple 3.1 $X = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $A = \{< a, 0.5, 0.3 >, < b, 0.1, 0.7 >, < c, 1, 0 >, < d, 0, 0 >, < e, 0, 1 >\}$.
$A^{0.3,0.4} = \{a, c\}$, $A_{0.3} = \{a, c\}$, $A^{0.4} = \{a, c, d\}$

Chapitre 4

Structures algébriques floues intuitionistiques

Dans ce chapitre, nous construisons deux structures algébriques, (groupes et anneaux) flous intuitionistiques sur l'ensemble des points flous intuitionistiques donné par [21].

4.1 Groupes flous intuitionistiques

Approche fonctionnelle

Définition 4.1 *[12] Soit G un Groupe. l'ensemble flou intuitionistique $B = \{< x, \mu(x), \nu(x) >: x \in G\}$ de A est dit sous-groupe flou intuitionnistique de G si $\forall x, y \in G$*

1. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\nu(xy) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$
3. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$
4. $\nu(x^{-1}) \leq \nu(x)$.

Nous désignerons par $\mathbb{IFG}(G)$ l'ensemble de tous les sous-groupes flous intuitionistiques de G.

Exemple 4.1 *considérons le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$, et soit l'application $A = (\mu_A,\ \nu_A) : \mathbb{Z} \to [0,1] \times [0,1]$ définit par :*

$$\mu_A(0) = 1, \qquad et \qquad \nu_A(0) = 0.$$

$$\mu_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ est } \textit{impair}, \\ \frac{2}{3} \text{ si } n \text{ est } \textit{pair} \end{cases}$$

et

$$\nu_A(n) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } n \text{ est } \textit{impair}, \\ \frac{1}{5} \text{ si } n \text{ est } \textit{pair}. \end{cases}$$

Alors, A est un $\mathbb{IFG}$ de $\mathbb{Z}$.

Remarque 4.1 *Soit G un groupe.*

- *Si μ_A est un sous-groupe flou de G, alors $A = (\mu_A,\ \mu_{A^C}) \in \mathbb{IFG}(G)$.*
- *Si $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, μ_A et ν_{A^C} sont des sous-groupes flous de G.*

Proposition 4.1 *Soit $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, $A(x^{-1}) = A(x)$, i.e, $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$, $\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$ et $A(x) \leq A(e)$, i.e, $\mu_A(x) \leq \mu_A(e)$, $\nu_A(x) \geq \nu_A(e)$ pour tout $x \in G$, avec e c'est l'élément neutre de G.*

Démonstration

D'après la proposition 5.4 de [29], on a
$\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ et $\mu_A(x) \leq \mu_A(e)$ pour tout $x \in G$.
Donc il suffit de démontrer que $\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$, et $\nu_A(x) \geq \nu_A(e)$ pou tout $x \in G$.
Soit $x \in G$. Alors,

$$\nu_A(x) = \nu_A((x^{-1})^{-1}) \leq \nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x).$$

D'une autre part, on a

$$\nu_A(e) = \nu_A(xx^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A((x^{-1}) \leq \nu_A(x).$$

Donc, $\nu_A(x^{-1}) = \nu_A(x)$ et $\nu_A(e) \leq \nu_A(x)$ pour tout $x \in G$.

Proposition 4.2 *Si $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Alors, $G_A = \{x \in G :\ \ A(x) = A(e)\}$. est un sous-groupe de G.*

Démonstration

Soit $x, y \in G_A$.
Alors, $\mu_A(x) = \mu_A(e),\ \nu_A(x) = \nu_A(e)$ et $\mu_A(y) = \mu_A(e)$, $\nu_A(y) = \nu_A(e)$.
Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mu_A(xy^{-1}) & \geq & \mu_A(x) \wedge \mu_A(y^{-1}) \\ & = & \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \quad \text{(par la proposition4.1)} \\ & = & \mu_A(e) \wedge \mu_A(e) = \mu_A(e), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \nu_A(xy^{-1}) & \leq & \nu_A(x) \vee \nu_A(y^{-1}) \\ & = & \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \quad \text{(par la proposition4.1)} \\ & = & \nu_A(e) \vee \nu_A(e) = \nu_A(e). \end{array}$$

D'autre part, par la proposition 4.1,

$$\mu_A(xy^{-1}) \leq \mu_A(e) \text{ et } \nu_A(xy^{-1}) \geq \nu_A(e).$$

Donc, $\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A(e)$ et $\nu_A(xy^{-1}) = \nu_A(e)$.
Ainsi,

$$xy^{-1} \in G_A.$$

Par conséquent, G_A est un sous-groupe de G.

Proposition 4.3 *Soit $A \in \mathbb{IFG}(G)$. Si $A(xy^{-1}) = A(e)$ pour tout $x, y \in G$, alors $A(x) = A(y)$.*

Démonstration
Soit $x, y \in G$. Alors,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) = \mu_A((xy^{-1})y) &\geq \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(y) \\ &= \mu_A(e) \wedge \mu_A(y) = \mu_A(y) \ . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ par la proposition 4.1,
on a

$$\mu_A(xy^{-1}) = \mu_A((yx^{-1})^{-1}) = \mu_A(yx^{-1})$$

par suite,

$$\begin{aligned} \mu_A(y) = \mu_A((yx^{-1})x) &\geq \mu_A(yx^{-1}) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(xy^{-1}) \wedge \mu_A(x) \\ &= \mu_A(e) \wedge \mu_A(x) = \mu_A(x) \ . \end{aligned}$$

Donc,

$$\mu_A(x) = \mu_A(y).$$

Par un raisonnement similaire, on a

$$\nu_A(x) = \nu_A(y).$$

Proposition 4.4 [10], *$A \in \mathbb{IFG}(G)$ si et seulement si $\mu_A(xy^{-1}) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$ pour tout $x, y \in G$.*

Proposition 4.5 *Soit A un $\mathbb{IFG}$ d'un groupe G, et soit $x \in G$. Alors, $A(xy) = A(y)$ pour tout $y \in G$ si et seulement si $A(x) = A(e)$.*

Démonstration
$(\Rightarrow)$: Supposons que $A(xy) = A(y)$ pour tout $y \in G$. Alors, $A(x) = A(e)$.

($\Leftarrow$) : Supposons que $A(x) = A(e)$.
Alors, par la proposition 4.1, $\mu_A(y) \leq \mu_A(x)$ et $\nu_A(y) \leq \nu_A(x)$ pour tout $y \in G$.
Puisque A est un $\mathbb{IFG}$ de G, alors $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$.
Par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(y) \text{ pour tout } y \in G.$$

D'autre part, par la proposition 4.1,

$$\mu_A(y) = \mu_A(x^{-1}xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(xy),$$

et

$$\nu_A(y) = \nu_A(x^{-1}xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(xy).$$

Puisque $\mu_A(x) \geq \mu_A(y)$ et $\nu_A(x) \leq \nu_A(y)$, pour tout $y \in G$,
alors,

$$\mu_A(x) \wedge \mu_A(xy) = \mu_A(xy) \text{ et} nu_A(x) \vee \nu_A(xy) = \nu_A(xy).$$

Donc,

$$\mu_A(y) \geq \mu_A(xy) \text{ et } \nu_A(y) \leq \nu_A(xy) \text{ pour out } y \in G.$$

Ainsi,

$$\mu_A(xy) = \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) = \nu_A(y) \text{ pour tout } y \in G.$$

Approche par Points

Afin de définir la notion de sous-groupe flou intuitionistique d'une manière rigoureuse nous commençons premièrement par la définition des sous structures algébriques.

Semi-groupes Flous Intuitionistiques

Tout d'abord, nous donnons quelques définitions élémentaires que nous utilisons dans la suite.

Définition 4.2 *[18] Si $(X, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne $\forall a, b, c \in X, (a * b) * c = a * (b * c)$. Alors $*$ est dite associative et $(X, *)$ est appelé un semi-groupe.*

Définition 4.3 *Un sous-semi-groupe d'un semi-groupe G est un sous-ensemble non vide I de G tel que $I^2 \subseteq I$.*

Définition 4.4 *[46] Un sous-semi-groupe I d'un semi-groupe G est appelé un idéal intérieur de G si $GIG \subseteq I$.*

Définition 4.5 *[46] Un sous-semi-groupe I d'un semi-groupe G est appelé bi-idéal de G si $IGI \subseteq I$.*

Définition 4.6 *[46] Un idéal à gauche (à droite) d'un semi-groupe G est un sous-ensemble non vide I de G tel que $GI \subseteq I\,(IG \subseteq I)$. Si I est à la fois un idéal à gauche et à droit d'un semi-groupe G, alors on dit que I est un idéal de G.*

Définition 4.7 *[46] Soit G un semi-groupe. Alors un idéal I de G est appelé premier si*

1. *pour les idéaux A, B de G, $AB \subseteq I$ implique que $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$,*
2. *semi-premier si pour tout idéal A de G, $A^2 \subseteq I$ implique que $A \subseteq I$.*

Définition 4.8 *[21] Soit $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$. Un point flou intuitionistique, écrit sous la forme $x_{(\alpha,\beta)}$, est défini comme un sous-ensemble flou intuitionnistique de G, donné par*

$$x_{(\alpha,\beta)}(y) = \begin{cases} (\alpha,\ \beta) & \text{si } x = y \\ (0,1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 4.9 *[52] Un sous-ensemble flou intuitionnistique non vide $A = (\mu_A,\ \nu_A)$, d'un semi-groupe G est appelé un semi-groupe flou intuitionistique de G. Si*

1. $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}$, $\forall x, y \in G$
2. $\nu_A(xy) \leq \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}$, $\forall x, y \in G$.

Définition 4.10 *[52] Un sous-semi-groupe flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G, est appelé un idéal intérieur flou intuitionistique de G. Si*

1. $\mu_A(xay) \geq \mu_A(a)$, $\forall x, a, y \in G$
2. $\nu_A(xay) \leq \nu_A(a)$, $\forall x, a, y \in G$.

Définition 4.11 *[52] Un sous-semi-groupe flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G est appelé un bi-idéal flou intuitionistique de G si*

1. $\mu_A(x\omega y) \geq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}$, $\forall x, \omega, y \in G$
2. $\nu_A(x\omega y) \leq \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}$, $\forall x, \omega, y \in G$.

Définition 4.12 *[52] Un sous-semi-groupe flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G est appelé un idéal à gauche (à droite) flou intuitionistique de G si*

1. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ *(resp.* $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$*)*, $\forall x, y \in G$

2. $\nu_A(xy) \leq \nu_A(y)$ *(resp.* $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x)$*),* $\forall x, y \in G$.

Définition 4.13 *[52] Un sous-semi-groupe flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G est appelé un idéal flou intuitionistique de G si*

1. $\mu_A(xy) \geq \max\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\},\ \forall x, y \in G$

2. $\nu_A(xy) \leq \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\},\ \forall x, y \in G$.

Définition 4.14 *[52] Un idéal flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G est appelé un idéal semi-premier flou intuitionistique de G si*

1. $\mu_A(x) \geq \mu_A(x^2),\ \forall x \in G$,

2. $\nu_A(x) \leq \nu_A(x^2),\ \forall x \in G$.

Définition 4.15 *[52] Un idéal flou intuitionistique $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ d'un semi-groupe G est appelé un idéal premier flou intuitionistique de G si*

1. $\mu_A(xy) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\},\ \forall x, y \in G$,

2. $\nu_A(xy) = \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\},\ \forall x, y \in G$.

Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$, $B = (\mu_B,\ \nu_B) \in \mathbb{IF}(G)$, le produit de A et B est un ensemble flou intuitionistique $A \circ B$ définit par :

$$A\ \circ B = \{< x,\ (\mu_A \circ \mu_B)(x),\ (\nu_A \circ \nu_B)(x)\ \ >: x \in G\}$$

avec $(\mu_A \circ \mu_B)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x=uv}[\min\{\mu_A(u),\ \mu_B(v)\} : u,\ v \in G] \\ 0,\ \text{si}\, pour\, tout\, u,\ v \in G\ ,\ x \neq uv \end{cases}$

et $(\nu_A \circ \nu_B)(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x=uv}[\max\{\nu_A(u),\ \nu_B(v)\}\ :\ u,\ v \in G] \\ 1,\ \text{si}\ pour\, tout\ u,\ v \in G\ ,\ x \neq uv \end{cases}$

Il est claire que $(A\ \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$, et on a $A \subseteq B$, alors $A \circ C \subseteq B \circ C$ et $C \circ A \subseteq C \circ B$ pour tout $A, B, C \in \mathbb{IF}(G)$.

Donc, $\mathbb{IF}(G)$ est un semi-groupe avec le produit $\circ$. Notons par $\underline{G}$ l'ensemble de tous les points flous intuitionistiques de G.

Pour tout $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathbb{IF}(G)$, on note $\underline{A}$ l'ensemble de tous les points flous intuitionistiques de A avec $\underline{A} = \{x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{G} :\ \mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta\}$.

$\underline{G}$ est un semi-groupe de $\mathbb{IF}(G)$.

En effet, on a $x_{(\alpha,\beta)}y_{(\alpha',\beta')} = (xy)_{(\alpha\wedge\alpha',\beta\vee\beta')} \in \underline{G}$ et

$x_{(\alpha,\beta)}(y_{(\alpha',\beta')}z_{(\alpha'',\beta'')}) = (xyz)_{(\alpha\wedge\alpha'\wedge\alpha'',\beta\vee\beta'\vee\beta')} = (x_{(\alpha,\beta)}y_{(\alpha',\beta')})z_{(\alpha'',\beta'')}$ pour tout $x_{(\alpha,\beta)}, y_{(\alpha',\beta')}$ et $z_{(\alpha'',\beta'')} \in \underline{G}$.

Donc, $\underline{G}$ est un semi-groupe de $\mathbb{IF}(G)$.

Proposition 4.6 *Soit* $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ *et* $B = (\mu_B,\ \nu_B)$ *deux sous-ensembles flous intuitionistiques de* G*. Alors,*

1. $\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$.

2. $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$.

3. $\underline{A \circ B} \supseteq \underline{A} \circ \underline{B}$.

Démonstration

1. Soit

$$\begin{aligned} x_{(\alpha,\beta)} &\in \underline{A \cup B} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : (\mu_A \cup \mu_B)(x) \geq \alpha \,\text{et}\, (\nu A \cup \nu_B)(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \geq \alpha \quad \text{et} \quad \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow [x \in \underline{G} : \{\mu_A(x) \geq \alpha \text{ ou } \quad \mu_B(x) \geq \alpha\} \text{ et}\{\nu_A(x) \leq \beta \quad \text{ou} \quad \nu_B(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : \mu_A(x) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \nu_A(x) \leq \beta\} \,\text{ou} \\ &\qquad \{x \in \underline{G} : \mu_B(x) \geq \alpha \ \ \text{et} \\ \nu_B(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A} \quad \text{ou } x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{B} \\ &\Leftrightarrow \ x(\alpha,\beta) \ \in \underline{A} \cup \underline{B}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$.

2.

Soit
$$\begin{aligned} x_{(\alpha,\beta)} &\in \underline{A \cap B} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : (\mu_A \cap \mu_B)(x) \geq \alpha \quad \text{et} \quad (\nu A \cap \nu_B)(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \geq \alpha \quad \text{et} \quad \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow [x \in \underline{G} : \{\mu_A(x) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mu_B(x) \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{\nu_A(x) \leq \beta \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \underline{G} : \mu_A(x) \geq \alpha \, et \, \nu_A(x) \leq \beta\} \quad \text{et} \\ &\qquad \{x \in \underline{G} : \mu_B(x) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \nu_B(x) \leq \beta\} \\ &\Leftrightarrow x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A} \quad \text{et} \quad x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{B} \\ &\Leftrightarrow x_(\alpha,\beta) \ \in \underline{A} \cap \underline{B}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}.$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\underline{A}\circ\underline{B} &= \{x_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\gamma,\delta)} \ : x_{(\alpha,\beta)} \ \in \underline{A},\ y_{(\gamma,\delta)} \ \in \underline{B}\} \\
&= \{(xy)_{(\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)} : \mu_A(x)\geq\alpha \quad \text{et} \quad \nu_A(x)\leq\beta, \mu_B(y)\geq\gamma \quad \text{et} \quad \nu_B(y)\leq\delta\} \\
&= \{(xy)_{(\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)} : \mu_A(x)\geq\alpha \quad \text{et} \quad \mu_B(y)\geq\gamma, \nu_B(x)\leq\beta \quad \text{et} \quad \nu_B(y)\leq\delta\} \\
&= \{(xy)_{(\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)} :\ \min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\geq\alpha\wedge\gamma, \max\{\nu_B(x),\nu_B(y)\}\leq\beta\vee\delta\} \\
&\leq \{(xy)_{(\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)} : \sup_{x,\ y\in G,\mu_A(x)\geq\alpha\mu_B(y)\geq\gamma} [\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}] \ \geq\alpha\wedge\gamma, \\
&\qquad \inf_{x,\ y\in G\nu_A(x)\leq\beta\nu_B(y)\leq\delta} [\max\{\nu_A(x),\nu_B(y)\}] \ \leq\beta\vee\delta\} \\
&= \{(u)_{(\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)} \ :\ (\mu_A\circ\mu_B)(u) \ \geq\alpha\wedge\gamma,\ (\nu_A\circ\nu_B)(u) \ \leq\beta\vee\delta\} \\
&= A\circ B.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\underline{A}\circ\underline{B}\subseteq\underline{A\circ B}.$$

Théorème 4.1 *Soit $A=(\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique de G. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1.) *$A=(\mu_A,\nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G,*

2.) *$\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.*

Démonstration

(1.) $\Rightarrow$ (2.) Soit $A=(\mu_A,\nu_A)$ un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G.
Soit $x_{(\alpha,\beta)}$, $y_{(\gamma,\delta)}\in\underline{A}$.
Alors,

$$\mu_A(x)\geq\alpha>0, \quad \mu_A(y)\geq\gamma>0 \quad \text{et} \quad \nu_A(x)\leq\beta<1, \nu_A(y)\leq\delta<1.$$

car $\mu_A(xy)\geq\min\{\mu_A(x), \quad \mu_A(y)\}\geq\alpha\wedge\gamma$, et $\nu_A(xy)\leq\max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}\leq\beta\vee\delta$.
Par conséquent,

$$x_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\gamma,\delta)}=(xy)_{(\alpha}\wedge\gamma,\beta\vee\delta)\in\underline{A}.$$

Ce qui implique que $\underline{A}^2\subseteq\underline{A}$.
Par conséquent, $\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
(2.) $\Rightarrow$ (1.) Supposons que $\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
Soit $x,y\in G$. Si $\mu_A(x)=\mu_A(y)=0$ et $\nu_A(x)=\nu_A(y)=1$,
alors,

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}=0\leq\mu_A(xy) \text{ et} max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}=1\geq\nu_A(xy).$$

Si $\mu_A(x),\ \mu_A(y) \neq 0$, et $\nu_A(x),\ \nu_A(y) < 1$,
alors,

$$x_{(\mu_A(x),\nu_A(x))}, y_{(\mu_A(y),\nu_A(y))} \in \underline{A},$$

puisque $\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$,
alors on a

$$(xy)_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),\nu_A(x)\vee\nu_A(y))} = x_{(\mu_A(x),\nu_A(x))} \circ y_{(\mu_A(y),\nu_A(y))} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)\wedge\mu_A(y) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x)\vee\nu_A(y) = \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}.$$

Par suite, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G.

Théorème 4.2 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un ensemble flou intuitionistique d'un groupe G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un bi-idéal flou intuitionistique de G*
2. *$\underline{A}$ est un bi-idéal de $\underline{G}$.*

Démonstration
1 ⇒ 2 : Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un bi-idéal flou intuitionistique de G.
Alors, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G.
Donc, d'après le théorème 4.1, $\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
Soit $x_{(\alpha,\beta)}, z_{(\eta,\theta)} \in \underline{A}$ et $y_{(\gamma,\delta)} \in \underline{G}$.
Alors,

$$\mu_A(x) \geq \alpha > 0,\ \mu_A(z) \geq \eta > 0 \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta < 1,\ \nu_A(z) \leq \theta < 1.$$

Puisque $\mu_A(xyz) \geq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(z)\} \geq \alpha \wedge \gamma \wedge \eta$, (car $\gamma > 0$),
et $\nu_A(xyz) \leq \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(z)\} \leq \beta \vee \delta \vee \theta$ (car $\delta < 1$).
Par conséquent,

$$x_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\gamma,\delta)} \circ z_{(\eta,\theta)} = (xyz)_{(\alpha\wedge\gamma\wedge\eta,\beta\vee\delta\vee\theta)} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que

$$\underline{A}\ \underline{G}\ \underline{A} \subseteq \underline{A}.$$

Par conséquent, $\underline{A}$ est un bi-idéal de $\underline{G}$.
2 ⇒ 1 : Supposons que $\underline{A}$ est un bi-idéal de $\underline{G}$.
Donc, A est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
Alors, d'après le théorème 4.1, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G.

Soit $x, y, z \in S$. Si $\mu_A(x) = \mu_A(z) = 0$ et $\nu_A(x) = \nu_A(z) = 1$.
Alors,

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(z)\} = 0 \leq \mu_A(xyz) \text{ et } \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(z)\} = 1 \geq \nu_A(xyz).$$

Si $\mu_A(x) = \mu_A(z) \neq 0$, et $\nu_A(x) = \nu_A(z) < 1$,
alors,

$$x_{(\mu_A(x),\nu(x))} \in \underline{A}, z_{(\mu_A(z),\nu_A(z))} \in \underline{A}.$$

Puisque $\underline{A}$ est un bi-idéal de $\underline{G}$, alors on a

$$\begin{aligned}(xyz)_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(z),\nu_A(x)\vee\nu_A(z))} &= (xyz)_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(x)\wedge\mu_A(z),\nu_A(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_A(z))} \\ &= x_{(\mu_A(x),\nu_A(x))} \circ y_{(\mu_A(x),\nu_A(x))} \circ z_{(\mu_A(z),\nu_A(z))} \in \underline{A}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\mu_A(xyz) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(z) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(z)\} \text{ et } \nu_A(xyz) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(z) = \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(z)\}.$$

Par conséquent, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est bi-idéal flou intuitionistique de G.

Théorème 4.3 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal intérieure flou intuitionistique de G,*
2. *$\underline{A}$ est un idéal intérieure $\underline{G}$.*

Démonstration
(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un idéal intérieure flou intuitionistique de G.
Alors, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G,.
Donc d'après le théorème 4.1, $\underline{A}$ est sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
Soit $x_{(\alpha,\beta)}, z_{(\eta,\theta)} \in \underline{G}$ et $y_{(\gamma,\delta)} \in \underline{A}$,
alors,

$$\mu_A(y) \geq \gamma > 0 \text{ et } \nu_A(y) \leq \delta < 1,$$

puisque $\mu_A(xyz) \geq \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \gamma \wedge \eta$ car $(\alpha, \eta > 0)$ et $\nu_A(xyz) \leq \nu_A(y) \leq \beta \vee \delta \vee \theta$ car $(\beta, \theta < 1)$.
Par conséquent,

$$x_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\gamma,\delta)} \circ z_{(\eta,\theta)} = (xyz)_{(\alpha\wedge\gamma\wedge\eta,\beta\vee\delta\vee\theta)} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que $\underline{G}\ \underline{A}\ \underline{G} \subseteq \underline{A}$.
Par suite, $\underline{\mathrm{A}}$ est un idéal intérieure $\underline{\mathrm{G}}$
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Supposons que $\underline{A}$ est un idéal intérieure $\underline{G}$.
Alors, $\underline{A}$ est un sous-semi-groupe de $\underline{G}$.
Donc, d'après le théorème 4.1, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un sous-semi-groupe flou intuitionistique de G,.
Soit $x, y, z \in G$.
Si $\mu_A(y) = 0$ et $\nu_A(y) = 1$,
alors,

$$\mu_A(y) = 0 \leq \mu_A(xyz) \text{ et } \nu_A(y) = 1 \geq \nu_A(xyz).$$

Si $\mu_A(y) \neq 0$ et $\nu_A(y) < 1$,
alors,

$$y_{(\mu_A(y), \nu_A(y))} \in \underline{A}.$$

Puisque $\underline{A}$ est un idéal intérieure $\underline{G}$,
alors, on a

$$\begin{aligned} (xyz)_{(\mu_A(y), \nu(y))} &= (xyz)_{(\mu_A(y) \wedge \mu_A(y) \wedge \mu_A(y), \nu_A(y) \vee \nu_A(y) \vee \nu_A(y))} \\ &= x_{(\mu_A(y), \nu_A(y))} \circ y_{(\mu_A(y), \nu_A(y))} \circ z_{(\mu_A(y), \nu_A(y))} \in \underline{A}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\mu_A(xyz) \geq \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xyz) \leq \nu_A(y).$$

Par suite, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal intérieure flou intuitionistique de G.

Théorème 4.4 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal (à gauche, à droite) flou intuitionistique de G,*
2. *$\underline{A}$ est un idéal (à gauche, à droite) $\underline{G}$*

Démonstration
(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal à droit intérieure flou intuitionistque de G.
Soit $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$ et $y_{(\gamma,\delta)} \in \underline{G}$.
Alors, $\mu_A(x) \geq \alpha > 0$ et $\nu_A(x) \leq \beta < 1$.
Puisque $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \geq \alpha \wedge \gamma$ (car $\gamma > 0$) et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \leq \beta \vee \delta$ (car $\delta < 1$).
Par conséquent,

$$x_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\gamma,\delta)} = (xy)_{(\alpha\wedge\gamma, \beta\vee\delta)} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que $\underline{\text{A}}\ \underline{\text{G}} \subseteq \underline{\text{A}}$.
Donc, $\underline{\text{A}}$ est un idéal à droit de $\underline{G}$.
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Supposons que $\underline{A}$ est un idéal de $\underline{G}$.
Soit $x, y \in G$. Si $\mu_A(x) = 0$ et $\nu_A(x) = 1$,
alors,

$$\mu_A(x) = 0 \leq \mu_A(xy) \text{ et } \nu_A(x) = 1 \geq \nu_A(xy).$$

Si $\mu_A(x) \neq 0$ et $\nu_A(x) < 1$,
alors,

$$x_{(\mu_A(x),\nu_A(x))} \in \underline{A}.$$

Puisque $\underline{A}$ est un idéal à droit de $\underline{G}$,
alors, on a

$$(xy)_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(x),\nu_A(x)\vee\nu_A(x))} = x_{(\mu_A(x),\nu(x))} \circ y_{(\mu_A(x),\nu A(x))} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x).$$

Par conséquent, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal (à droite) flou intuitionistique de G.
De même on peut prouver le théorème pour l'idéal à gauche et l'idéal.

Remarque 4.2 *il est claire que tout idéal d'un semi-groupe G est un idéal intérieur de G. Il est encore claire que tout idéal flou intuitionistique de semi-groupe G est un idéal intérieur flou intuitionistique de G.*

Définition 4.16 *[26] On dit qu'un semi-groupe G est régulier si, pour chaque élément a de G, il existe un élément $x \in G$ tel que $a = axa$. Un semi-groupe G est appelé inter-régulier si, pour chaque élément $x \in G$, il existe des éléments $a, b \in G$ tels que $x = ax^2b$.*

Théorème 4.5 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe régulier G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal (à gauche, à droite) flou intuitionistique de G,*

2. *$\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$*

Démonstration
(**1**) $\Rightarrow$ (**2**) : D'après remarque 4.2 et le théorème 4.3.
(**2**) $\Rightarrow$ (**1**) : Supposons que $\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$.
Soit $x \in G$.
Alors, il existe un élément $a \in G$ tel que $x = xax$, (car G est régulier).

Si $\mu_A(x) = 0$ et $\nu_A(x) = 1$,
alors,

$$\mu_A(x) = 0 \leq \mu_A(xy) \text{ et } \nu_A(x) = 1 \geq \nu_A(xy).$$

Si $\mu_A(x) \neq 0$ et $\nu_A(x) < 1$,
alors,

$$x_{(\mu_A(x),\nu(x))} \in \underline{A} \text{ et } y_{(\mu_A(x),\nu(x))} \in \underline{G}.$$

Puisque, $\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$,
alors, on a

$$\begin{aligned}
(xy)_{(\mu_A(x),\nu(x))} &= (xaxy)_{(\mu_A(x),\nu(x))} \\
&= ((xa)xy)_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(x)\wedge\mu_A(x),\nu_A(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_A(x))} \\
&= (xa)_{(\mu_A(x),\nu_A(x)} \circ y_{(\mu_A(x),\nu_A(x))} \in \underline{A}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x)$.
Par conséquent, $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal à droit flou intuitionistique de G.
La preuve est similaire en cas d'idéal gauche flou intuitionistique et d'idéal flou intuitionistique.

Théorème 4.6 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe inter-régulier G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal (à gauche, à droite) flou intuitionistique de G,*

2. *$\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$*

Démonstration
(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : D'après remarque 4.2 et le théorème 4.3.
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Supposons que $\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$.
Soit $x, y \in G$.
Alors, il existent $a \in G$ et $b \in G$ tels que $x = ax^2b$, (car G est inter-régulier).
Si $\mu_A(x) = 0$ et $\nu_A(x) = 1$,
alors,

$$\mu_A(x) = 0 \leq \mu_A(xy) \text{ et } \nu_A(x) = 1 \geq \nu_A(xy).$$

Si $\mu_A(x) \neq 0$ et $\nu_A(x) < 1$,
alors,

$$x_{(\mu_A(x),\nu(x))} \in \underline{A} \text{ et } y_{(\mu_A(x),\nu(x))} \in \underline{G}.$$

Puisque $\underline{A}$ est un idéal intérieur de $\underline{G}$,
alors, on a

$$\begin{aligned}(xy)_{(\mu_A(x),\nu(x))} &= (ax^2by)_{(\mu_A(x),\nu(x))}\\ &= ((ax)x(by))_{(\mu_A(x)\wedge\mu_A(x)\wedge\mu_A(x),\nu_A(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_A(x))}\\ &= (ax)_{(\mu_A(x),\nu_A(x))}\circ x_{(\mu_A(x),\nu_A(x))}\circ (by)_{(\mu_A(x),\nu_A(x))}\in \underline{A}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\mu_A(xy)\geq \mu_A(x) \text{ et } \nu_A(xy)\leq \nu_A(x).$$

Donc, $A=(\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal à droite flou intuitionistique de G.
La preuve est similaire en cas d'idéal à gauche flou intuitionistique et d'idéal flou intuitionistique.

Théorème 4.7 *un semi-groupe G est inter-régulier si et seulement si le semi-groupe $\underline{G}$ est inter-régulier.*

Démonstration
Soit $a_{(\alpha,\beta)}\in\underline{G}$ et $a\in G$.
Alors, il existent deux éléments $x,y\in G$ tels que $a=xa^2y$, (car G est inter-régulier) .
Donc, $x_{(\alpha,\beta)},y_{(\alpha,\beta)}\in\underline{G}$.
Alors,

$$\begin{aligned}x_{(\alpha,\beta)}\circ a_{(\alpha,\beta)}\circ a_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\alpha,\beta)} &= x_{(\alpha,\beta)}\circ (a^2)_{(\alpha\wedge\alpha,\beta\vee\beta)}\circ y_{(\alpha,\beta)}\\ &= x_{(\alpha,\beta)}\circ (a^2)_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\alpha,\beta)}\\ &= (xa^2y)_{(\alpha\wedge\alpha\wedge\alpha,\beta\vee\beta\vee\beta)}\\ &= a_{(\alpha,\beta)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{G}$ est inter-régulier.
Inversement, soit $\underline{G}$ inter-régulier et $a\in G$.
Alors, pour tout $\alpha,\beta\in[0,1]$, il existe $x_{(\gamma,\delta)},y_{(\eta,\theta)}\in\underline{G}$ tel que,

$$\begin{aligned}a_{(\alpha,\beta)} &= x_{(\gamma,\delta)}\circ a_{(\alpha,\beta)}\circ a_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\eta,\theta)}\\ &= x_{(\gamma,\delta)}\circ (a^2)_{(\alpha\wedge\alpha,\beta\vee\beta)}\circ y_{(\eta,\theta)}\\ &= x_{(\gamma,\delta)}\circ (a^2)_{(\alpha,\beta)}\circ y_{(\eta,\theta)}\\ &= (xa^2y)_{(\gamma\wedge\alpha\wedge\eta,\delta\vee\beta\vee\theta)}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $a=xa^2y$ et $x,y\in G$.

Par suite G est inter-régulier.

Théorème 4.8 *un semi-groupe G est régulier si et seulement si le semi-groupe $\underline{G}$ est régulier*

Démonstration

Soit $a_{(\alpha,\beta)} \in \underline{G}$ et $a \in G$.
Alors, il existe un élément $x, \in G$ tel que $a = axa$, (car G est régulier) .
Donc, $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{G}$.
Alors,

$$\begin{aligned} a_{(\alpha,\beta)} \circ x_{(\alpha,\beta)} \circ a_{(\alpha,\beta)} &= (axa)_{(\alpha \,\wedge\, \alpha \,\wedge\, \alpha, \beta \,\vee\, \beta \,\vee\, \beta)} \\ &= (axa)_{(\alpha,\beta)} \\ &= a_{(\alpha,\beta)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{G}$ est régulier.
Inversement, soit $\underline{G}$ régulier et $a \in G$.
Alors, pour tout $\alpha, \beta \in [0,1]$, il existe un élément $x_{(\gamma,\delta)} \in \underline{G}$ tel que,

$$\begin{aligned} a_{(\alpha,\beta)} &= a_{(\alpha,\beta)} \circ x_{(\gamma,\delta)} \circ a_{(\alpha,\beta)} \\ &= (axa)_{(\alpha \,\wedge\, \gamma \,\wedge\, \alpha, \beta \,\vee\, \delta \,\vee\, \beta)} \\ &= (axa)_{(\gamma \,\wedge\, \alpha, \beta \,\vee\, \delta)}. \end{aligned}$$

Cela implique que $a = axa$ et $x \in G$.
Alors, G est régulier.

Théorème 4.9 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique de semi-groupe G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.) *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal semi-premier flou intuitionistique de G,*

2.) *$\underline{A}$ est un idéal semi-premier de $\underline{G}$.*

Démonstration

(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : Soit $A = (\mu_A, \nu_A)$ un idéal semi-premier flou intuitionistique de G.
Alors,

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(x^2) \text{ et } \nu_A(x) \leq \nu_A(x^2) \quad \forall x \in G.$$

Soit $x_{(\alpha,\beta)} \circ x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$, i.e, $(x^2)_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$.
Alors,

$$\mu_A(x^2) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x^2) \leq \beta.$$

Puisque $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal semi-premier flou intuitionistique de G,
alors,

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(x^2) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \nu_A(x^2) \leq \beta,$$

Ce qui implique que

$$x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}.$$

Par conséquent, $\underline{A}$ est un idéal semi-premier de $\underline{G}$.
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Soit $\underline{A}$ un idéal semi-premier de $\underline{G}$.
Soit $\mu_A(x^2) = \alpha$ et $\nu_A(x^2) = \beta$.
Alors,

$$(x^2)_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A} \text{ i.e } x_{(\alpha,\beta)} \circ x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A},$$

ce qui implique que $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$, (car A un idéal semi-premier de G).
Par suite,

$$\mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta,$$

c'est à dire,

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(x^2) \text{ et } \nu_A(x) \leq \nu_A(x^2).$$

Donc, $A = (\mu_A, \nu_A)$ un idéal semi-premier flou intuitionistique de G,

Lemme 4.1 *pour un semi-groupe G les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un inter-régulier semi-groupe*
2. *tout idéal flou intuitioistique $A = (\mu_A, \nu_A)$ de G est un idéal semi-premier flou intuitioistique de G*

Théorème 4.10 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe inter régulier G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal flou intuitionistique de G,*
2. *$\underline{A}$ est un idéal semi-premier de $\underline{G}$*

Démonstration
(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : Soit $A = (\mu_A,\ \nu A)$ un idéal flou intuitionistique de G,.
Alors, d'après le lemme (4.1), $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal semi-premier flou intuitioistique de G, et on a d'après le théorème (4.9), $\underline{A}$ un idéal semi-premier de $\underline{G}$.
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Soit $\underline{A}$ un idéal semi-premier de $\underline{G}$.
Alors, d'après le théorème (4.9), $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal semi-premier flou intuitionistique de G et donc $A = (\mu_A, \nu_A)$ est un idéal flou intuitioistique de G.

Théorème 4.11 *Soit $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ un sous-ensemble flou intuitionistique d'un semi-groupe G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal premier flou intuitionistique de G,*
2. *$\underline{A}$ est un idéal premier de $\underline{G}$*

Démonstration
(**1.**) $\Rightarrow$ (**2.**) : Soit $A = (\mu_A, \nu_A)$ un idéal premier flou intuitionistique de G,.
Alors,

$$\mu_A(xy) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \text{ et } \nu_A(xy) = \min\{\nu_A(x), \nu_A(y)\},\ \forall x, y \in G.$$

Soit $x_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$, *i.e*, $(xy)_{(\alpha\wedge\alpha,\beta\vee\beta)} = (xy)_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$.
Alors,

$$\mu_A(xy) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(xy) \leq \beta,$$

ce qui implique que,

$$\max\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \geq \alpha \text{ et } \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\} \leq \beta.$$

Donc, $(\mu_A(x) \geq \alpha$ ou $\mu_A(y) \geq \alpha)$, et $(\nu_A(x) \leq \beta$ ou $\nu_A(y) \leq \beta)$,
c'est à dire,

$$(\mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta) \text{ ou } (\mu_A(y) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta),$$

par suite, $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$ ou $y_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$.
Par conséquent, $\underline{\text{A}}$ est un idéal premier de $\underline{G}$.
(**2.**) $\Rightarrow$ (**1.**) : Soit $\underline{A}$ un idéal premier de $\underline{G}$.
Soit $\mu_A(xy) = \alpha$ et $\nu_A(xy) = \beta$.
Alors,

$$x_{(\alpha,\beta)} \circ y_{(\alpha,\beta)} = (xy)_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}.$$

Ce qui implique que $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$ ou $y_{(\alpha,\beta)} \in \underline{A}$, car ($\underline{A}$ est un idéal premier de $\underline{G}$).
Alors, $(\mu_A(x) \geq \alpha$ et $\nu_A(x) \leq \beta)$ ou $(\mu_A(y) \geq \alpha$ et $\nu_A(y) \leq \beta)$,
Ainsi,

$$\max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \geq \mu_A(xy) \text{ et } \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\} \leq \nu_A(xy) \qquad (A).$$

Puisque $\underline{A}$ est un idéal premier de $\underline{G}$,
alors, $\underline{A}$ est un idéal $\underline{G}$.

Par suite, d'après le théorème (4.4), $A = (\mu_A,\ \nu_A)$ est un idéal flou intuitionistique de G. Donc,

$$\mu_A(xy) \geq \max\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \text{ et } \nu_A(xy) \leq \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\},\ \forall x, y \in G \qquad (B).$$

Ainsi, de (A) et (B) on a, $\mu_A(xy) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}$ et $\nu_A(xy) = \min\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}$, $\forall x, y \in G$.

Par conséquent, $A = (\mu_A, \nu_A)$ est un idéal premier flou intuitionistique de G .

Sous-groupe flou intuitionistique

On note $L = \{(\alpha, \beta)/\alpha, \beta \in [0, 1]/\alpha + \beta \leq 1\}$.

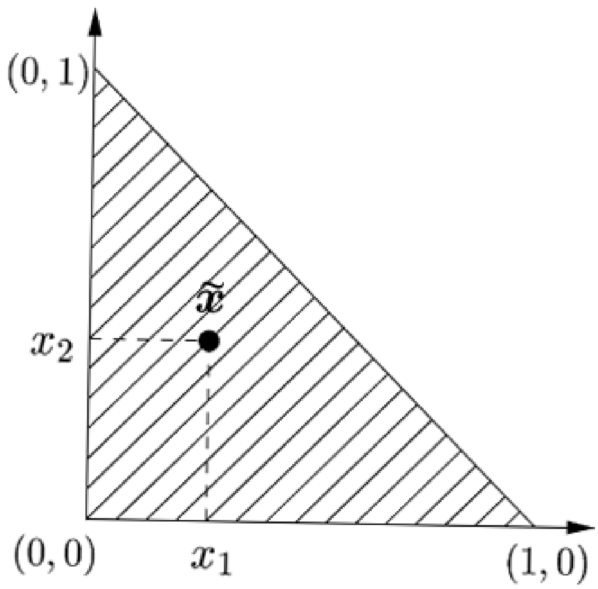


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de l'ensemble L

Théorème 4.12 *Soit G un groupe et A un sous-ensemble flou intuitionistique de G, Alors A est un $\mathbb{IFG}$ de G, si et seulement si*

1. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \ \Rightarrow (xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A$,
2. $x_{(\alpha,\beta)} \in A \Rightarrow (x^{-1})_{(\alpha,\beta)} \in A$,

Démonstration

$\Rightarrow$, (**1.** et **2.**) Soit $\alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, $\beta = \max\{\nu_A(x)\nu_A(y)\}$, alors $\alpha + \beta \leq 1$ et

$$\mu_A(x) \geq \alpha, \mu_A(y) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \beta, \nu_A(y) \leq \beta.$$

Alors,

$$x_{(\alpha,\beta)} \in A \text{ et } y_{(\alpha,\beta)} \in A,$$

puisque A un $\mathbb{IFG}$ de G, alors $(xy)_{(\alpha,\beta)} \in A$,
par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \alpha = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \text{ et } \nu_A(xy) \leq \beta = \nu_A(x) \vee \nu_A(y).$$

(**3.** et **4.**). Évident.
$\Leftarrow$
Soit $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A$,
alors, $\mu_A(x) \geq \alpha$, $\mu_A(y) \geq \lambda$, et $\nu_A(x) \leq \beta$, $\nu_A(y) \leq \gamma$
par conséquent,

$$\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda \text{ et } \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma,$$

alors,

$$(xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A.$$

Et puisque $x_{(\alpha,\beta)} \in A$
alors,

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(x^{-1}) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq \nu_A(x^{-1}) \leq \beta,$$

par suite,

$$(x^{-1})_{(\alpha,\beta)} \in A.$$

Par conséquent, A est un $\mathbb{IFG}$ de G.
Notons qu'on a $\mu_A(e) = 1, \nu_A(e) = 0$.

Lemme 4.2 *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de E. Pour $(\alpha,\beta) \in L$, soit*

$$A_\alpha = \{x \in E,\ \mu_A(x) \geq \alpha\},\ et\ \ A^\beta = \{x \in E,\ \nu_A(x) \leq \beta\}.$$

Alors, $\mu_A(x) = \vee\{\alpha/\ x \in A_\alpha\}$, et $\nu_A(x) = \wedge\{\beta | x \in A^\beta\}$.

Théorème 4.13 *Soit G un groupe et A un sous-ensemble flou intuitionistique de G. Alors A est un sous-groupe flou intuitionistique de G si et seulement si A_α et A^β sont des sous-groupes de G pour chaque $(\alpha,\beta) \in L$.*

Démonstration
Soit A un $\mathbb{IFG}$ de G.
On va démontrer que A^β est sous-groupe de G.
Soit $x, y \in A^\beta$,
alors,

$$\nu_A(x) \leq \beta, \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta.$$

Donc, on a

$$\nu_A(xy^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y^{-1}) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta,$$

Par suite,

$$xy^{-1} \in A^{\beta}.$$

Par conséquent, A^{β} est un sous-groupe de G.
Inversement.
On a

$$\begin{aligned} \mu_A(xy) = \vee\{\alpha \ /xy \in A_\alpha\} &\geq \vee\{\alpha \ /x \in A_\alpha \text{ et } y \in A_\alpha\} \\ &= \vee\{\alpha \ /\mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \mu_A(y) \geq \alpha\} \\ &= \vee\{\alpha \ /\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha\} \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_A(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \nu_A(xy) = \wedge\{\beta \ /xy \in A^\beta\} &\leq \wedge\{\beta \ /x \in A^\beta \text{ et } y \in A^\beta\} \\ &= \wedge\{\beta \ /\nu_A(x) \leq \beta \text{ et } \nu_A(y) \leq \beta\} \\ &= \wedge\{\beta \ /\nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta\} \\ &= \nu_A(x) \vee \nu_A(y). \end{aligned}$$

Et

$$\mu_A(x^{-1}) = \vee\{\alpha \ /x^{-1} \in A_\alpha\} = \vee\{\alpha \ /x \in A_\alpha\} = \mu_A(x)$$

$$\nu_A(x^{-1}) = \wedge\{\beta \ /x^{-1} \in A^\beta\} = \wedge\{\beta \ /x \in A^\beta\} = \nu_A(x)$$

Par conséquent, A est un $\mathbb{IFG}$ de G.

Corollaire 4.1 *Soit* $A_{\underline{\alpha}} = \{x \in E,\ \mu_A(x) > \alpha\}$, *et* $A^{\underline{\beta}} = \{x \in E,\ \nu_A(x) < \beta\}$. *Alors,*

1. $\mu_A(x) = \vee\{\alpha,\ x \in A_{\underline{\alpha}}\}$ *et* $\nu_A(x) = \wedge\{\beta,\ x \in A^{\underline{\beta}}\}$
2. *A est un sous-groupe flou intuitionistique de G si et seulement si* $A_{\underline{\alpha}}$ *et* $A^{\underline{\beta}}$ *sont des sous-groupes de G. pour tout* $(\alpha,\ \beta) \in L$.

Sous-groupe distingué flou intuitionistique

Définition 4.17 *Soit A un sous-groupe flou intuitionistique de G. Si* $x_{(\alpha,\beta)} \in A \Rightarrow (y^{-1}xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A,\ \forall y_{(\lambda,\gamma)} \in G$.
Alors, A est appelé un sous-groupe distingué flou intuitionistique de G, noté ($\mathbb{NIFG}$)

Clairement on a :

Théorème 4.14 *Soit A un sous-groupe flou intuitionistique de G. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *A est un $\mathbb{NIFG}$ de G*
2. *$\mu_A(y^{-1}xy) \geq \mu_A(x)$, $\nu_A(y^{-1}xy) \leq \nu_A(x)$, pour chaque $x, y \ \in G$*
3. *$\mu_A(xy) = \mu_A(yx)$, $\nu_A(xy) = \nu_A(yx)$, pour chaque $x, y \ \in G$*
4. *A_α et A^β sont des sous-groupes distingués de G pour tout $(\alpha, \beta) \in L$.*
5. *$A_{\underline{\alpha}}$ et $A^{\underline{\beta}}$ sont des sous-groupes distingués de G pour tout $(\alpha, \beta) \in L$.*

Définition 4.18 *Soit A un sous-ensemble flou intuitionistique de G. Soit $a \in G$. Alors, On définit*

$$aA = \{< x, \mu_{aA}(x), \nu_{aA}(x) > | x \in G\},$$

où

$$\mu_{aA}(x) = \mu_A(a^{-1}x)$$

et

$$\nu_{aA}(x) = \nu_A(a^{-1}x)$$

. aA est appelé la classe à gauche de A sur G.

Définition 4.19 *Soit A, B deux sous-ensembles flous intuitionistiques de G. On définit*

$$AB = \{< x, \mu_{AB}(x), \nu_{AB}(x) > | x \in G\}$$

avec

$$\mu_{AB}(x) = \vee_{a \in G}(\mu_A(a) \wedge \mu_B(a^{-1}x))$$

et

$$\nu_{AB}(x) = \wedge_{a \in G}(\nu_A(a) \vee \nu_B(a^{-1}x)).$$

$$A^{-1} = \{< x, \mu_A(x^{-1}), \nu_A(x^{-1}) > | x \in G\}.$$

Proposition 4.7 *On a*

$$\mu_{AB}(x) + \nu_{AB}(x) \leq 1, \quad \forall x \in G$$

Démonstration

Supposons qu'il existe $x \in G$ tel que $\mu_{AB}(x) + \nu_{AB}(x) > 1$.
Alors, il existe $a \in G$ tel que

$$1 - \nu_{AB}(x) < \mu_A(a) \wedge \mu_B(a^{-1}x)$$

alors, $1-(\mu_A(a)\vee\nu_B(a^{-1}x)<\mu_A(a)\wedge\mu_B(a^{-1}x)$
Donc,

$$\mu_A(a)\wedge\mu_B(a^{-1}x)+\nu_A(a)\vee\nu_B(a^{-1}x)>1 \tag{4.1}$$

Puisque $\mu_A(a)+\nu_A(a)\leq 1$ et $\mu_B(a^{-1}x)+\nu_B(a^{-1}x)\leq 1$.
Alors, $\mu_A(a)\wedge\mu_B(a^{-1}x)+\nu_A(a)\vee\nu_B(a^{-1}x)\leq 1$, contradiction avec (4.1).

Théorème 4.15 *Soit A, B deux sous-groupes flous intuitionistiques de G. Si A est un $\mathbb{NIFG}$ de G, alors AB est un $\mathbb{IFG}$ de G*

Démonstration
Pour tout $(\alpha,\beta)\in L$,
donc si, $\mu_{AB}(x)>\alpha$ alors, il existe $a\in G$ tel que $\mu_A(a)\wedge\mu_B(a^{-1}x)>\alpha$,
par suite, $a\in A_{\underline{\alpha}}$, et $a^{-1}x\in B_{\underline{\alpha}}$.
Ce qui implique que

$$x=a(a^{-1}x)\in A_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}},$$

donc,

$$(AB)_{\underline{\alpha}}\subseteq A_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}},$$

et il est clair que $A_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}}\subseteq(AB)_{\underline{\alpha}}$.
Par conséquent,

$$A_{\underline{\alpha}}B_{\underline{\alpha}}=(AB)_{\underline{\alpha}}.$$

De même on peut montrer que $A^{\underline{\beta}}B^{\underline{\beta}}=(AB)^{\underline{\beta}}$.
Et d'après le corollaire (4.1) on a AB est un $\mathbb{IFG}$ de G.

Théorème 4.16 *Soit A un $\mathbb{NIFG}$ de G. Alors,*

1. $(aA)(bA)=\ (ab)A$

2. $(aA)^{-1}=a^{-1}A$

3. $G/A=\{aA,\ a\in G\}$ *est un groupe.*

Démonstration
On va juste démontrer que $\nu_{(aA)(bA)}=\nu_{(ab)A}$ les autres résultats sont clairs. On a

$$\begin{aligned}
\nu_{(aA)(bA)}(x) &= \wedge_{g\in G}(\nu_{aA}(g)\vee\nu_{bA}(g^{-1}x))\\
&= \wedge_{g\in G}(\nu_A(a^{-1}g)\vee\nu_A(b^{-1}g^{-1}x))\\
&\leq (\nu_A(a^{-1}a)\vee\nu_A(b^{-1}a^{-1}x))\\
&\leq (\nu_A(e)\vee\nu_A((ab)^{-1}x))\\
&= \nu_A((ab)^{-1}x)\\
&= \nu_{(ab)A}(x).
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\nu_A(a^{-1}g) \vee \nu_A(b^{-1}g^{-1}x) &= \nu_A(a^{-1}g) \vee \nu_A(g^{-1}xb^{-1}) \\
&\geq \nu_A(a^{-1}xb^{-1}) \\
&= \nu_A(b^{-1}a^{-1}x) \\
&= \nu_A((ab)^{-1}x) \\
&= \nu_{(ab)A}(x).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\nu_{(aA)(bA)}(x) \geq \wedge_{g\in G}(\nu_A(a^{-1}g) \vee \nu_A(b^{-1}g^{-1}x)) \geq \nu_{(ab)A}(x).$$

Par conséquent,

$$\nu_{(aA)(bA)}(x) = \nu_{(ab)A}(x), \ \forall x \in G.$$

Remarque 4.3 *G/A est appelé groupe quotient flou intuitionistique.*

4.2 Anneaux et idéaux flous intuitionistiques

Anneaux flous intuitionistiques

Définition 4.20 *[19] Soit R un anneau. Un sous-ensemble flou intuitionistique $A = \{< x, \mu(x), \nu(x) >: x \in R\}$ de R est dit sous-anneau flou intuitionnistique de R, $(\mathbb{IFR})$ de R si $\forall x, y \in R$*

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\nu(x - y) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$
3. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
4. $\nu(xy) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$.

Proposition 4.8 *Si $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ est un $\mathbb{IFR}$. Alors*

- *$\mu_A(0) \geq \mu_A(x)$ et $\nu_A(0) \leq \nu_A(x)$ pour tout $x \in R$*
- *si R est un anneau unitaire alors $\mu_A(1) \leq \mu_A(x)$ et $\nu_A(1) \geq \nu_A(x)$, pour tout $x \in R$.*

Proposition 4.9 *Si $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ est un $\mathbb{IFR}$.*
Alors, $\mu_A(x) = \mu_A(-x)$ et $\nu_A(x) = \nu_A(-x)$.

Théorème 4.17 *Soit* $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$*, et* $B = \{\langle x,\ \mu_B(x),\ \nu_B(x)\rangle / x \in R\}$ *deux* $\mathbb{IFR}$*. Alors,* $A \cap B$ *est un* $\mathbb{IFR}$*.*

Théorème 4.18 *Soit* $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ *et* $B = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ *deux* $\mathbb{IFR}$*. Alors,* $A \cup B$ *est un* $\mathbb{IFR}$ *si et seulement si* $A \subseteq B$ *ou* $B \subseteq A$*.*

Théorème 4.19 *Soit* $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ *et* $B = \{\langle x,\ \mu_B(x),\ \nu_B(x)\rangle / x \in R\}$ *deux* $\mathbb{IFR}$*. Alors,* AB *est un* $\mathbb{IFR}$*.*

Démonstration
Soit $x, y \in R$. Alors,

$$\begin{aligned}(\nu_A\nu_B)(x-y) &= (\nu_A\nu_B)(x+(-y)) \\ &\leq (\nu_A\nu_B)(x)\ \vee\ (\nu_A\nu_B)(-y) \\ &= (\nu_A\nu_B)(x)\ \vee\ (\nu_A\nu_B)(y)\ .\end{aligned}$$

Soit $x, y \in R$. Alors,

$$\begin{aligned}(\nu_A\nu_B)(xy) \quad &= \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} (\nu_A(x_iy_j) \vee \nu_B(x_i'y_j'))/x_i, x_i', y_j, y_j' \in R, \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix_i'y_jy_j' \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} ((\nu_A(x_i) \vee \nu_A(y_j)) \vee (\nu_B(x_i') \vee \nu_B(y_j')))/x_i, x_i', y_j, y_j' \in R, \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix_i'y_jy_j' \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\ &= \quad \wedge\{\vee_{i=1}^{n} \vee_{j=1}^{m} ((\nu_A(x_i) \vee \nu_B(x_i')) \vee (\nu_A(y_j) \vee \nu_B(y_j')))/x_i, x_i', y_j, y_j' \in R, \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_ix_i'y_jy_j' \quad &= xy,\ i,\ j \in \mathbb{N}\} \\ &= \quad (\wedge\{\ \vee_{i=1}^{n}(\nu_A(x_i)\ \vee \nu_B(x_i'))/x_i,\ x_i' \in R,\ i \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} x_ix_i' = x\}) \\ &\vee \quad (\wedge\{\vee_{j=1}^{m}(\nu_A(y_j)\ \vee\}\nu_B(y_j'))/y_j,\ y_j' \in R, j \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{m} y_jy_j' = y\}) \\ &= \quad (\nu_A\nu_B)(x)\ \vee\ (\nu_A\nu_B)(y).\end{aligned}$$

Par conséquent, AB est un $\mathbb{IFR}$.

Théorème 4.20 *Soit* R *un anneau et* A *un sous-ensemble flou intuitionistique de* R*. Alors* A *est un* $\mathbb{IFR}$ *de* R*, si et seulement si*

1. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \Rightarrow (x-y)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A$,

2. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A \Rightarrow (xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A$.

Démonstration

$\Rightarrow$) On a pour **1.** et **2.** d'après le théorème 4.12.

Pour **3.** et **4.**. Soit $\alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, $\beta = \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$, alors $\alpha + \beta \leq 1$ et

$$\mu_A(x) \geq \alpha, \mu_A(y) \geq \alpha \ \text{ et } \ \nu_A(x) \leq \beta, \nu_A(y) \leq \beta.$$

Alors, $x_{(\alpha,\beta)} \in A$ et $y_{(\alpha,\beta)} \in A$,
puisque A un $\mathbb{IFR}$ de R, alors $(xy)_{(\alpha,\beta)} \in A$.
Par conséquent, $\mu_A(xy) \geq \alpha = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$ et $\nu_A(xy) \leq \beta = \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$.
$\Leftarrow$
Soit $x_{(\alpha,\beta)} \in A$, $y_{(\lambda,\gamma)} \in A$,
alors, $\mu_A(x) \geq \alpha$, $\mu_A(y) \geq \lambda$, et $\nu_A(x) \leq \beta$, $\nu_A(y) \leq \gamma$
par conséquent, $\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda$ et $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma$,
Et $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \geq \alpha \wedge \lambda$ et $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \leq \beta \vee \gamma$, alors,

$$(x-y)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A.$$

Et

$$(xy)_{(\alpha\wedge\lambda,\beta\vee\gamma)} \in A,$$

Par conséquent, A est un $\mathbb{IFR}$ de R.

Idéal flou Intuitionistique

Définition 4.21 *[20] Soit $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle / x \in R\}$ un $\mathbb{IFR}$ de R. Alors, A est dit idéal flou Intuitionistique de R ($\mathbb{IFI}$) si,*

1. $\mu_A(x-y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$

2. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \vee \mu_A(y)$

3. $\nu_A(x-y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

4. $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \wedge \nu_A(y)$ *, pour tout $x, y \in R$.*

Théorème 4.21 *[8] $A =< \mu, \nu >$ est un idéal flou intuitionistique de R si et seulement si :*

1. $\forall x_{(\alpha,\beta)}, y_{(\alpha',\beta')} \in < \mu_A, \nu_A >$, $x_{(\alpha,\beta)} - y_{(\alpha',\beta')} \in < \mu, \nu >$

2. $\forall x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{R}$, $\forall y_{(\alpha',\beta')} \in < \mu, \nu >$, $x_{(\alpha,\beta)} y_{(\alpha',\beta')} \in < \mu, \nu >$.

Démonstration

$\Rightarrow$) Supposons que $< \mu, \nu >$ idéal flou intuitionistique, alors, on a pour tout $x_{(\alpha,\beta)}, y_{(\alpha',\beta')} \in <\mu,\nu>$.

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &\geq \mu(x)\wedge\mu(y) \\ &\geq \alpha\wedge\alpha', \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(x-y) &\leq \nu(x)\vee\nu(y) \\ &\leq \beta\vee\beta'. \end{aligned}$$

Alors,

$$x_{(\alpha,\beta)} - y_{(\alpha',\beta')} = (x-y)_{(\alpha\wedge\alpha',\beta\vee\beta')} \in <\mu,\nu> .$$

Et on a $x_{(\alpha,\beta)} \in \underline{R}$, et $y_{(\alpha',\beta')} \in <\mu,\nu>$

$$\begin{aligned} \mu(x.y) &\geq \mu(x)\vee\mu(y) \\ &\geq \mu(y) \\ &\geq \alpha' \\ &\geq \alpha\wedge\alpha', \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nu(x.y) &\leq \nu(x)\wedge\nu(y) \\ &\leq \nu(y) \\ &\leq \alpha' \\ &\leq \alpha\vee\alpha', \end{aligned}$$

par suite,

$$(x.y)_{(\alpha\wedge\alpha',\beta\vee\beta')} = x_{(\alpha,\beta)}y_{(\alpha',\beta')} \in <\mu,\nu> .$$

$\Leftarrow$) Soit $x, y \in R$.
On a $x_{(\mu(x)\wedge\mu(y),\nu(x)\vee\nu(y))} \in <\mu,\nu>$ et $y_{(\mu(x)\wedge\mu(y),\nu(x)\vee\nu(y))} \in <\mu,\nu>$,
donc,

$$x_{(\mu(x)\wedge\mu(y),\nu(x)\vee\nu(y))} - y_{(\mu(x)\wedge\mu(y),\nu(x)\vee\nu(y))} \in <\mu,\nu> .$$

Alors,

$$\mu(x-y) \geq \mu(x)\wedge\mu(y), \text{ et } \nu(x-y) \leq \nu(x)\vee\nu(y).$$

Montrons Maintenant que $\mu(x.y) \geq \mu(x)\vee\mu(y)$ et $\nu(xy) \leq \nu(x)\wedge\nu(y)$.

Soit $x, y \in R$, supposons que $\mu(y) \geq \mu(x)$ et $\nu(x) \leq \nu(y)$,
alors, pour $\alpha = \alpha' = \mu(x) \vee \mu(y)$, et $\beta = \beta' = \nu(x) \wedge \nu(y)$.
On a

$$y_{(\alpha\vee\alpha',\beta\wedge\beta')} \in < \mu, \nu >,$$

puisque $x_{(\alpha\vee\alpha',\beta\wedge\beta')} \in \underline{R}$.
Ce qui implique que

$$x_{(\alpha\vee\alpha',\beta\wedge\beta')} . y_{(\alpha\vee\alpha',\beta\wedge\beta')} \in < \mu, \nu > .$$

Par conséquent

$$\mu(x.y) \geq \mu(x) \vee \mu(y) \,\text{et}\, \nu(xy) \leq \nu(x) \wedge \nu(y).$$

De même, si $\mu(x) \geq \mu(y)$ et $\nu(x) \leq \nu(y)$.
Le résultat suivant nous permet de caractériser l'idéal premier flou intuitionistique en utilisant la fonction d'appartenance.
Rappelons tout d'abord la définition d'un idéal premier flou intuitionistique doneé par K. Hur et al [20].

Définition 4.22 *Un idéal flou intuitionnistique P dun anneau R, est dit premier flou intuitionnistique. Si pour tout idéaux flous intuitionnistiques A et B tels que $AB \subset P$ implique que $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

Théorème 4.22 *[8] Soit $A =< \mu, \nu >$ un sous-ensemble flou intuitionistique est dite un idéal premier flou intuitionistique si et seulement si :*

1. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2. $\nu(x - y) \leq \nu(x) \vee \nu(y)$
3. $\mu(x.y) = \mu(x) \vee \mu(y)$
4. $\nu(x.y) = \nu(x) \wedge \nu(y)$.

Démonstration
Soit $< \mu, \nu >$ un idéal premier flou intuitionistique .
Supposons que $\mu(xy) > \mu(x) \vee \mu(y)$ et $\mu(x) \geq \mu(y,)$
et supposons que $\nu(xy) < \nu(x) \wedge \nu(y)$ et $\nu(x) \leq \nu(y)$,
alors,

$$\mu(xy) > \mu(x) \geq \mu(y),$$

et $\nu(xy) < \nu(x) \leq \nu(y)$.
Ce qui implique que

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu > \quad \text{et} \quad y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin < \mu, \nu > .$$

D'après [25] on a

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))}y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin <\mu,\nu>$$

ce qui est absurde, alors

$$\mu(xy) = \mu(x) \vee \mu(y) \quad \text{et} \quad \nu(x.y) = \nu(x) \wedge \nu(y).$$

Inversement. Soit $x_{(\alpha,\beta)}$, $y_{(\alpha',\beta')}$ deux points flous intuitionistiques de R, tels que $x_{(\alpha,\beta)}y_{(\alpha',\beta')} \ \in <\mu,\nu>$.
Supposons que $x_{(\alpha,\beta)} \notin <\mu,\nu>$ et $y_{(\alpha',\beta')} \notin <\mu,\nu>$
pour $\alpha = \alpha' = \mu(xy)$ et $\beta = \beta' = \nu(xy)$,
on a $\mu(x) < \mu(xy)$ et $\mu(y) < \mu(xy)$ et $\nu(x) > \nu(xy)$ et $\nu(y) > \nu(xy)$.
Ce qui implique que

$$x_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin <\mu,\nu>, \text{ et } y_{(\mu(xy),\nu(xy))} \notin <\mu,\nu> .$$

Contradiction avec le fait que $<\mu,\nu>$ est un idéal premier flou intuitionistique.

Conclusion et perspectives

Après l'introduction de la théorie des ensembles flous, l'objectif des chercheurs était de détendre tous les résultats des mathématiques classique sur les sous ensemble flous, ce qui ne pourrait pas être toujours le cas suite aux difficultés dues à l'utilisation des fonctions d'appartenances ou α-coupes. En fait le but de notre travail de recherche vise la proposition d'une nouvelle méthode qui construit les groupes et les anneaux flous intuitionistiques à l'aide du concept du points flous intuitionistiques.
Cette construction permettra le développement de certains axes importants tels que :

1. La notion du corps et espace vectoriel flous intuitionistiques.
2. La notion de modules et algèbres flous intuitionistiques.
3. L'étude des systèmes d'équations à paramètres flous intuitionistiques.
4. Lancer des travaux sur l'arithmétique sur l'ensemble des points flous intuitonistiques.

Bibliographie

[1] R. S. Abdul et M.F. Marashdeh. Intuitionistic Fuzzy Rings, International Journal of Algebra, 5 (2011), no. 1, 37 - 47. 2

[2] M. Akgul. Some Properties of Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 133 (1988), 93-100. 2

[3] M. Z. Alam. Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings With Operators, J. Math (IOSR-JM), (2015), 48-54. 2

[4] K. Atanassov. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 61 (1994) 137-142.

[5] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20 (1986) 87-96. 59

[6] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets, theory and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing., 35 (1999) Physica-Verlag, Heidelberg. 65

[7] K. Atanassov. On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory, Springer, Berlin (2012) 65

[8] I. Bakhadach , S. Melliani, M. Oukessou and L.S. Chadli. Intuitionistic fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy prime ideal in a ring, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 22, 2016, no. 2 pp 59-63. 97, 99

[9] I. Bakhadach, S. Melliani and L. S. Chadli. On intuitionistic fuzzy implications, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets. Vol. 23, 2017, No. 5, 719.

[10] B. Baldev and Dhiren Kr.Basnet. Intuitionistic fuzzy subrings and ideals. J.Fuzzy mathematics 11 (1) 2003. 139-155. 75

[11] H. Bandemer, Fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy methods with applications, John Wiley (1996) 2

[12] R. Biswas, Intuitionistic fuzzy subgroups, Math. Forum, 10, (1989), 3746 73

[13] J. Calais, Éléments de la théorie des groupes, Presses Universitaires de France, 1984

[14] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York, (1980). 2

[15] M. Elomari , S. Melliani, I. Bakhadach and L.S. Chadli, Intuitionistic fuzzy soft generalized superconnectedness, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 22 (2016), no. 2 pp 44-51

[16] L. Gacôgne. Eléments de logique floue, (1997) Hermes. 2

[17] J. A. Gogun, L-fuzzy sets, J. Math. Appl. 18 (1967), 149-156

[18] J.M. Howie. Fundamentals of semigroup theory, London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. 76

[19] K. Hur, H. W. Kang and H. K. Song, Intuitionistic Fuzzy Subgroups and Subrings, Honam Math J, 25 (2003) (1), 1941. 95

[20] K. Hur, H. W. Kang and H. K. Song, Intuitionistic Fuzzy Ideals of a Ring, Journal of the Korea Society of Mathematical Education, Series B, 12 (2005) (3), 193209. 97, 99

[21] Y.B. Jun, S.M. Hong and J. Meng. Fuzzy interior ideals in semigroups, Indian J. of Pure Appl. Math, vol 26, no 9, (1995), 859-863. 73, 77

[22] Y.B. Jun and S.Z. Song. Intuitionistic fuzzy semipreopen sets and intuitionistic fuzzy semiprecontinuous mappings, Journal of Appl. Math. and Computing, vol 191, no 2, (2005) 467-474.

[23] A. Kaufman, Introduction a la théorie des sous-ensembles flous, Vols 4 , Masson, l'Université du Michigan 1973. 2

[24] A. Kaufmann and M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications, Van Nostran d Rehinold, New York, NY, (1985). 2, 59

[25] N. Kuroki. On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 5, (1981) 203-215. 100

[26] N. Kuroki. On fuzzy semigroups, Information Sciences, 53 (1991) 203-236. 84

[27] N. Kuroki. Fuzzy semiprime quasi ideals in semigroups, Inform. Sci, 75 (3)(1993) 201-211.

[28] Kyoung ho Kim. On fuzzy points in semigroups . IJMMS 26, 11 (2001) 707712 31

[29] W.J. liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 133-139 2, 3, 29, 36, 74

[30] W.J. liu, operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983) 31-41 3

[31] D.S. Malik,and J .N. Mordeson, Fuzzy directsums of fuzzy rings,FSS 45 (1992) 83-91 29

[32] D.S. Malik, and J.N. Mordeson, Extensions of fuzzy subrings and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 45 (1992), 245-259. 11

[33] D.S. Malik, and J.N. Mordeson, Fuzzy maximal, radical and primary ideals of a ring, Inform.Sci. 53 (1991), 151-165. 55, 56

[34] S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli. Fuzzy Rings and Fuzzy Polynomial Rings, Homological and Combinatorial Methods in Algebra. SAA 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 228, (2018). pp 89-98. 34

[35] S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli. Intuitionistic Fuzzy Group With Extended Operations, Homological and Combinatorial Methods in Algebra. SAA 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 228 ,55-65.

[36] S. Melliani, I. Bakhadach, H.Sadiki, L. S. Chadli, (2019) Quotient Rings Induced via Intuitionistic Fuzzy Ideals, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing-springer, vol 372.45-54.

[37] S. Melliani, I. Bakhadach, H.sadiki and L. S. Chadli, Solving the Intuitionistic fuzzy fractional equation by means of the homotopy analysis method,Journal Nonlinear Analysis and Application, (2018) No.1 106-116

[38] S. Melliani, I. Bakhadach, M. ElomariL. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy Dirichlet problem, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, 2018, No. 4, 7284

[39] S. Melliani, I. Bakhadach, M. Elomari, L. S. Chadli, Intuitionistic fuzzy actions ,Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 24, 2018, No. 3, 1126.

[40] S. Miyamoto. Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis, Kluwer academic publishers, (1990). 2

[41] M. Mizumoto and K. Tanaka, Algebraic proprerties of fuzzy numbers, Comminication in Inter. Conf. on Cybernetics and Society, Washington D.C, (1976). 2, 9

[42] N.P. Mukherjee, and P. BhattAcharya, Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, Inform. Sci. 34, 225-239 (1984). 26

[43] N.P. Mukherjee and P. Bhattacharya, Fuzzy groups, Some group theoretic analogs, Inform. Sci.39 (1986) 247-268. 26

[44] T.K. Mukherjee, M.K. Sen,Prime fuzzy ideal in rings, Fuzzy Sets and Systems 32 (1989) 337-341. 53, 54

[45] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl, 64 (1978), 369-380. 2

[46] John N. Mordeson et all. Fuzzy semigroups, Springer-Verlag (2003), Heidelberg. 3, 77

[47] John N. Mordeson. Fuzzy coefficient fields of fuzzy subrings. Fuzzy Sets and Systems 58 (1993) 227-237 North-Holland. 3

[48] John N. Mordeson, Kiran R. Bhutani, Azriel Rosenfeld. Fuzzy Group Theory, Studies in Fuzziness and Soft Computing 182. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005). 3

[49] P.M. Pu and Y.M. Liu. Fuzzy topology I, neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J. Math. Anal. Appl, 76 (2) (1980) 571-599. 3, 32

[50] A. Rosnenfeld, Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 512-517 2, 3, 17

[51] H.Sadiki, S. Melliani, I. Bakhadach, L. S. Chadli. On Intuitionistic Fuzzy Vector Spaces, Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing-springer, vol 372,pp 291-299.

[52] S.K. Sardar, M. Mandal and S.K. Majumder. On intuitionistic fuzzy magnified translation in semigroups,(2011). 77, 78

[53] X.P. Wang, Z.W. Mo and W.J. Liu. Fuzzy ideals generated by fuzzy point in semigroups, Sichuan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban,vol 154 (1992) 17-24. 3

[54] X.Y. Xie. Fuzzy ideal extensions of semigroups, Soochow Journal of Mathematics, vol 272 (April 2001) 125-138. 3

[55] X.Y. Xie. Fuzzy ideal extensions of ordered semigroups, Lobach Journal of Mathematics, 19(2005) 29-40. 3

[56] X. Yuan. Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004), 631-641 2

[57] Y.H. Yon. The semigroup of fuzzy points, Submitted in Comm. Algebra.

[58] L.A. Zadeh. Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353. 1, 2, 9, 59