



**UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE**  
**Faculté des Sciences et Techniques**  
**Béni Mellal**



*Centre d'Etudes Doctorales en Sciences et Techniques*

*Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées*

## **THÈSE**

Présentée par

**M'hamed OUTANOUE**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur**

Spécialité : *Informatique*

---

***Analyse Technico-économique de la Concurrence dans le Marché des  
Télécommunications : Approche par la Théorie des Jeux***

---

Soutenue le 09/03/2019 à 10h, devant la commission d'examen composée de :

Pr. Mohamed FAKIR	PES	USMS, FST, Béni Mellal	Président
Pr. Cherki DAOUI	PES	USMS, FST, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Mohamed EL KAMILI	PH	USMBA, FSDM, Fès	Rapporteur
Pr. Abdellatif HAIR	PES	USMS, FST, Béni Mellal	Rapporteur
Pr. Rachid EL AYACHI	PH	USMS, FST, Béni Mellal	Examineur
Pr. Said MELLIANI	PES	USMS, FST, Béni Mellal	Examineur
Pr. Mohamed BASLAM	PH	USMS, FST, Béni Mellal	Co-directeur de thèse
Pr. Belaid BOUIKHALENE	PES	USMS, FP, Béni Mellal	Directeur de thèse

# Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, il m'est agréable d'exprimer ma reconnaissance auprès de toutes les personnes dont l'intervention a favorisé l'aboutissement de ce travail.

Tout d'abord, je remercie mes directeurs de thèse les professeurs **Belaid BOUIKHALENE** et **Mohamed BASLAM**, qui se sont toujours montrés disponibles et à l'écoute pendant toutes les étapes de l'élaboration de ce travail. Je tiens à leur témoigner ma gratitude et ma reconnaissance les plus sincères.

Je présente mes sincères remerciements aux rapporteurs et examinateurs de cette thèse, qui ont mis à ma disposition leurs compétences et ont contribué par leurs remarques à l'amélioration de ce travail de recherche.

J'adresse mes remerciements à tous les membres des laboratoires LIMATI, TIAD et L2D et à mes collègues, en particulier **Driss AIT OMAR** et **Hamid GARMANI** pour leurs contributions et les échanges fructueux que nous avons entretenu pendant ces années de recherche.

Mes remerciements vont aussi à mes amis **Mohamed GOUSKIR**, **Mohamme BOUTALLINE**, **Ridallah BOUAZAMA** et **Abdelkhalk ABOULOUARD**, votre soutien m'est très utile au long de mes années de thèse.

Enfin, pour leur soutien non-scientifique mais non moins significatif, je tiens à remercier mes parents, mes frères, mes soeurs et mon épouse pour leurs soutien inconditionnel, sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour. Je leur dédie ce travail, ainsi qu'à ma petite princesse **Lina**, en témoignage de ma profonde affection pour toute la patience et les sacrifices qu'ils ont manifestés envers moi et dont je serai toujours redevable.

Que tous ceux qui m'ont apporté leurs aides, de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail, trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

# Résumé

Récemment, il y a eu un intérêt de recherche croissant pour l'analyse des réseaux de télécommunications et de la concurrence entre les fournisseurs de services (SPs) de télécommunications, ce qui conduit à de nombreuses propositions de nouveaux systèmes de tarification motivés par différents objectifs, à savoir : maximiser les revenus des SPs, garantir l'équité entre les utilisateurs et satisfaire aux exigences de qualité de service (QoS) pour des services réseau différenciés.

Les SPs qui partagent le même marché sont en concurrence pour attirer plus de clients, et chaque SP est censé chercher à maximiser ses revenus, qui dépendent des stratégies des concurrents. Plusieurs travaux présents dans la littérature étaient basés sur le prix comme seul paramètre de décision, tandis que d'autres paramètres tels que la QoS ont un impact décisif sur la souscription aux services d'un opérateur plutôt que les autres. Ainsi, les clients migrent entre les SPs en raison d'un meilleur prix, d'une meilleure QoS ou d'une meilleure réputation.

En considérant la divergence des intérêts des SPs, nous formulons leurs comportements dynamiques d'interactions en tant que jeu non coopératif de prix et de QoS. Premièrement, chaque SP choisit la QoS à garantir et le prix correspondant. Deuxièmement, chaque client choisit son SP et peut migrer vers un autre ou basculer vers un état –sans abonnement– en fonction de prix / QoS observés. Pour modéliser les comportements des clients, nous suivons deux méthodes : tout d'abord, nous utilisons la notion de fonction de demande, qui est une fonction linéaire des prix et des QoS décidés par les SPs, et ensuite, nous utilisons le modèle de Markov pour modéliser les décisions des utilisateurs.

Dans l'objectif de dériver des modèles plus réalistes, nous supposons que les clients sont rationnellement limités, ce qui signifie qu'ils n'ont pas suffisamment de capacités et d'informations pour choisir des stratégies efficaces et rationnelles afin de maximiser leurs propres profits. Nous supposons que les clients prennent leurs décisions d'abonnement de manière probabiliste selon des probabilités de choix de Luce.

Pour étendre notre étude à d'autres types d'acteurs, nous analysons la concurrence entre les fournisseurs de contenu (CPs) dans le marché de l'internet. La concurrence dans ce domaine devient de plus en plus féroce, les clients recherchent des fournisseurs qui leur offrent un bon contenu (crédibilité du contenu et QoS) avec un prix raisonnable.

À travers une analyse théorique détaillée, nous démontrons l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash (NE) pour chaque étude. Les algorithmes génétiques (GAs) et l'algorithme de meilleure réponse permettent de trouver et d'illustrer numériquement les stratégies de prix et de QoS correspondantes à la situation d'équilibre. Afin de quantifier la performance de cet équilibre, nous présentons une analyse numérique détaillée du prix de l'anarchie (PoA) induit par la solution de l'équilibre de Nash.

## Mots clés :

Tarification, Qualité du Service, Jeu de Parts de Marché, Algorithmes Génétiques, Équilibre de Nash, Apprentissage, Prix de l'Anarchie, Migration des Clients, Fournisseurs de Service, Modèle Logit, Rationalité Limitée, Modèle de Choix de Luce, Modèle de Bertrand, Fournisseurs de Contenu, Théorie des Jeux.

# Abstract

Recently, there has been an increased research interest in analysing telecommunication network and market competition between Telecommunication Service Providers (SPs), which leads to many proposals for new pricing schemes motivated by different objectives namely : to maximize SP's revenue, to guarantee fairness among users and to satisfy quality of service (QoS) requirements for differentiated network services.

The SPs that sharing the same market are competing to attract more customers, and each SP is assumed to look for a maximized revenue, which depends on the strategies of the competitors. Several works present in the literature were based on the price as the only decision parameter, whereas others parameters such as QoS have a decisive impact to register to an operator rather than the others. Therefore, the customers churn between SPs due to better prices, better QoSs or better reputation.

Due to the divergence of SPs interests, we formulate this dynamic behaviors of interactions between SPs as a non-cooperative game of price and QoS. First, each SP chooses QoS to guarantee and the corresponding price. Second, each customer chooses his SP and may churn to another or alternatively switch to -no subscription state- depending on the observed price/QoS. To model the behaviors of customers, firstly we use the notion of demand function, which is a linear function of prices and QoSs decided by SPs, and secondary, the Markovian model is used to model users decisions.

With the aim of deriving more realistic models, we assume that customers are rationally bounded, which means they do not have enough capacities and informations to choose efficient and rational strategies in order to maximize their own profits. We assume that customers make their subscription decisions probabilistically according to Luce choice probabilities. In order to model this conflict of interests, we consider a Bertrand model with rational SPs.

To extend our study to other types of actors, we analyze the competition between content providers (CPs) in the internet market. The competition in this area is becoming more and more fierce, customers are looking for providers that offer them good content (credibility of content and QoS) with a reasonable price.

Through a detailed theoretical analysis, we prove existence and discuss about uniqueness of pure Nash Equilibrium (NE) in each study. Genetic Algorithms (GAs) and Best Response algorithm are used to find and illustrate numerically the corresponding price and QoS strategies at the equilibrium. In order to quantify how this equilibrium is performant, we present a detailed numerical analysis of the Price of Anarchy (PoA) induced by the NE solution.

## **Keywords :**

Pricing, QoS, Market Share Game, Genetic Algorithms, Nash Equilibrium, Learning, Price of Anarchy, Migrating Customers, Service Providers, Logit Model, Bounded Rationality, Luce Choice Model, Bertrand Model, Content Providers, Game Theory.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>x</b>
<b>Avant-Propos</b>	<b>xii</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1. Cadre Général . . . . .	1
2. Motivations et Objectifs . . . . .	2
3. Contributions et Plan du Mémoire . . . . .	4
<b>I Généralités sur la Théorie des Jeux et ses Applications</b>	<b>6</b>
1. Introduction . . . . .	6
2. Jeux Stratégiques . . . . .	7
2.1. Définition du Jeu Stratégique . . . . .	7
2.2. Représentations des Jeux . . . . .	8
2.2.1. Arbre du Jeu ou Forme Extensive . . . . .	8
2.2.2. Description du Jeu sous sa Forme Normale . . . . .	9
3. Typologie des Jeux . . . . .	9
3.1. Jeux Coopératifs ou Non-coopératifs . . . . .	9
3.2. Jeux Simultanés ou Séquentiels . . . . .	9
3.3. Jeux Finis ou Infinis . . . . .	10
3.4. Jeux à Somme Nulle . . . . .	10
3.5. Jeux Répétés . . . . .	10
3.6. Jeux à Information Complète ou Incomplète . . . . .	10
3.7. Jeux à Information Parfaite ou Imparfaite . . . . .	10

4.	Équilibres des Jeux . . . . .	11
4.1.	Équilibre de Nash . . . . .	11
4.2.	Équilibre en Stratégies Dominantes . . . . .	12
4.2.1.	Exemple . . . . .	12
4.2.2.	Résolution des Jeux par Élimination des Stratégies Dominées . . . . .	13
4.3.	Jeux à Équilibres Multiples . . . . .	14
4.3.1.	Exemple : jeu de coordination à équilibres multiples . . . . .	14
4.4.	Équilibres en Stratégies Mixtes . . . . .	16
4.4.1.	Exemple : Jeu sans Équilibre en Stratégies Pures . . . . .	16
4.4.2.	Détermination des Équilibres en Stratégies Mixtes . . . . .	18
5.	Rationalité et Équité . . . . .	18
5.1.	Rationalité Limitée . . . . .	19
5.2.	Équité et Bien-être Commun . . . . .	19
6.	Conclusion . . . . .	20
<b>II Apprentissage de Prix-QoS à l'Équilibre par un Algorithme Génétique</b>		<b>21</b>
1.	Introduction . . . . .	21
2.	Modélisation de Problème . . . . .	22
2.1.	Modélisation de la Demande . . . . .	23
2.2.	Modélisation de l'Utilité . . . . .	23
3.	Formulation du Jeu Non-coopératif . . . . .	24
3.1.	Équilibre de Nash . . . . .	24
3.1.1.	Jeu à Prix Fixe . . . . .	25
3.1.2.	Jeu à QoS Fixe . . . . .	26
3.1.3.	Jeu de Prix-QoS . . . . .	28
3.2.	Bien-être Social et Prix de l'Anarchie . . . . .	28
4.	Apprentissage par Algorithme Génétique . . . . .	29
4.1.	Codage des Individus et Population Initiale . . . . .	29
4.2.	Sélection . . . . .	30
4.3.	Croisement . . . . .	30
4.4.	Mutation . . . . .	31
5.	Résultats et Discussions . . . . .	31
5.1.	Convergence à l'Équilibre de Nash . . . . .	32
5.2.	Influence du Coût de la Bande Passante . . . . .	34
5.3.	Influence de la Sensibilité des SPs à leurs Prix . . . . .	35
5.4.	Influence de la Sensibilité des SPs à leurs QoSs . . . . .	36
6.	Conclusion . . . . .	38

<b>III Modélisation de la Migration des Clients dans un Marché Concurrentiel</b>	<b>40</b>
1. Introduction . . . . .	40
2. Modélisation de Comportement des Clients . . . . .	41
3. Décisions Stratégiques des Fournisseurs de Service . . . . .	43
4. Modèle des Taux de Migration . . . . .	45
4.1. Taux de Migration dans la Littérature . . . . .	45
4.2. Taux de Transition . . . . .	45
5. Résultats et Discussions . . . . .	46
5.1. Jeu des Prix avec des QoS fixes . . . . .	47
5.2. Jeu des QoS avec des Prix Fixes . . . . .	50
5.3. Convergence à l'Équilibre de Nash . . . . .	53
6. Conclusion . . . . .	55
<b>IV Influence de la Rationalité des Clients sur la Compétition Prix-QoS</b>	<b>56</b>
1. Introduction . . . . .	56
2. Modélisation des Comportements des Clients . . . . .	58
2.1. Modèle Probabiliste de Luce . . . . .	58
2.2. Modèle de l'Utilité . . . . .	59
3. Modèle de Compétition de Bertrand . . . . .	59
3.1. Modèle de la Fonction d'Utilité . . . . .	60
3.2. Gains des Consommateurs dans le Marché . . . . .	60
4. Analyse du Jeu Non-coopératif . . . . .	61
4.1. Apprentissage de l'Équilibre de Nash pour le Jeu des Prix . . . . .	61
4.2. Existence et Unicité de l'Équilibre dans le Jeu des Prix . . . . .	62
4.3. Prix de l'Anarchie . . . . .	64
5. Résultats et Discussions . . . . .	65
5.1. Détermination de l'Équilibre de Nash pour le Jeu des Prix . . . . .	65
5.2. Impact du Degré de Rationalité des Utilisateurs sur le Prix à l'Équilibre	67
5.3. Influence du Coût Unitaire de la Bande Passante sur le Prix à l'Équi- libre . . . . .	67
5.4. Influence du Degré de Rationalité des Consommateurs sur leurs Re- venus . . . . .	68
5.5. Influence de la Sensibilité des Consommateurs sur leurs Revenus . . . . .	69
5.6. Efficacité de l'Équilibre . . . . .	69
6. Conclusion . . . . .	70
<b>V Analyse de la Concurrence entre les Fournisseurs de Contenu dans le Marché d'Internet</b>	<b>71</b>
1. Introduction . . . . .	71
2. Modélisation du Problème . . . . .	72

2.1.	Modèle de la Crédibilité du Contenu . . . . .	73
2.2.	Modèle de la Demande . . . . .	73
2.3.	Modèle de la Fonction d'Utilité . . . . .	74
3.	Formulation du Jeu Non-coopératif . . . . .	75
3.1.	Jeu de QoS . . . . .	75
3.2.	Jeu de Prix . . . . .	76
3.3.	Jeu de QoC . . . . .	78
3.4.	Jeu de Prix-QoC-QoS . . . . .	79
3.5.	Prix de l'Anarchie . . . . .	79
4.	Résultats et Discussions . . . . .	80
5.	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>



# Liste des tableaux

I.1	Jeux en prix du type dilemme du prisonnier (gains en millions de dollars) . . . . .	13
I.2	Jeu à deux joueurs ayant deux stratégies . . . . .	14
I.3	Jeu de téléphone, un jeu de coordination avec deux équilibres de Nash . . . . .	15
I.4	Jeu de guerre sans équilibre en stratégies pures . . . . .	16
II.1	Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique . . . . .	32
III.1	Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique . . . . .	47
IV.1	Paramètres utilisés pour l'étude numérique . . . . .	65
V.1	Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique. . . . .	80

# Liste des figures

I.1	Exemple de jeu de deux joueurs sous forme extensive . . . . .	8
II.1	Jeu du Prix : Convergence à l'équilibre de Nash des prix. . . . .	32
II.2	Jeu de QoS : Convergence à l'équilibre de Nash des QoSs. . . . .	33
II.3	Équilibre des Prix en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée $\vartheta_i$ . . . . .	33
II.4	Équilibre des QoSs en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée $\vartheta_i$ . . . . .	34
II.5	Prix de l'anarchie en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$ . . . . .	35
II.6	Prix de l'anarchie en fonction de $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$ (Sensibilité de SP $i$ à son prix $p_i$ ) . . . . .	36
II.7	Prix de l'anarchie en fonction de $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$ (Sensibilité de SP $i$ à sa QoS $q_i$ ) . . . . .	37
II.8	Équilibre du prix de SP $i$ en fonction de $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$ (Sensibilité de SP $i$ à sa QoS $q_i$ ) . . . . .	37
II.9	Équilibre de QoS de SP $i$ en fonction de $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$ (Sensibilité de SP $i$ à sa QoS $q_i$ ) . . . . .	38
II.10	Équilibre des revenus de SP $i$ en fonction de $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$ (Sensibilité de SP $i$ à sa QoS $q_i$ ) . . . . .	38
III.1	Comportement des clients comme une chaîne de Markov en temps continu. . . . .	41
III.2	Revenus nets de SP 1 en fonction de $p_1$ , pour différentes valeurs de $p_2$ , avec $q_1 = 15$ et $q_2 = 15$ . . . . .	48
III.3	Revenus nets de SP 1 en fonction de $p_1$ , pour différentes valeurs de $q_1$ , avec $q_2 = 15$ et $p_2 = 4$ . . . . .	49
III.4	Revenus nets de SP 1 en fonction de $p_1$ , pour différentes valeurs de $q_2$ , avec $q_1 = 10$ et $p_2 = 4$ . . . . .	49
III.5	Meilleure réponse du prix pour les deux SPs, pour différentes valeurs de $q_1 = q_2$ . . . . .	50

III.6	Meilleure réponse du prix pour les deux SPs, pour différentes valeurs de $q_1 \neq q_2$ . . . . .	50
III.7	Revenus nets de SP 1 en fonction de $q_1$ , pour différentes valeurs de $q_2$ , avec $p_1 = 4$ et $p_2 = 4$ . . . . .	51
III.8	Revenus nets de SP 1 en fonction de $q_1$ , pour différentes valeurs de $p_1$ , avec $q_2 = 15$ et $p_2 = 4$ . . . . .	52
III.9	Revenus nets de SP 1 en fonction de $q_1$ , pour différentes valeurs de $p_2$ , avec $q_2 = 15$ et $p_1 = 4$ . . . . .	52
III.10	Meilleure réponse de QoS pour les deux SPs, pour différentes valeurs de $p_1 = p_2$ . . . . .	53
III.11	Meilleure réponse de QoS pour les deux SPs, pour différentes valeurs de $p_1 \neq p_2$ . . . . .	53
III.12	Jeu du prix : Convergence à l'équilibre de Nash avec $(q_1, q_2) = (30, 30)$ . . .	54
III.13	Jeu de QoS : Convergence à l'équilibre de Nash avec $(p_1, p_2) = (5, 8)$ . . .	55
IV.1	Détermination graphique de prix à l'équilibre de Nash : Solution unique (point encerclé). . . . .	66
IV.2	Convergence vers les prix à l'équilibre de Nash . . . . .	66
IV.3	Prix à l'équilibre en fonction de degré d'irrationalité des clients . . . . .	67
IV.4	Prix à l'équilibre en fonction du coût unitaire de la bande passante . . . . .	68
IV.5	Revenus du client en fonction de degré d'irrationalité . . . . .	68
IV.6	Revenus de client en fonction de sa sensibilité $\beta$ . . . . .	69
IV.7	Prix de l'anarchie (PoA) en fonction de degré d'irrationalité des clients $\lambda$ . .	70
V.1	Jeu de prix : Convergence vers l'équilibre de Nash des prix. . . . .	81
V.2	Jeu de QoC : Convergence vers l'équilibre de Nash des QoCs. . . . .	81
V.3	Jeu de QoS : Convergence vers l'équilibre de Nash des QoSs. . . . .	82
V.4	Prix de l'anarchie en fonction de $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$ . . . . .	83
V.5	Prix de l'anarchie en fonction de $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$ . . . . .	83
V.6	Prix de l'anarchie en fonction de $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ . . . . .	84
V.7	Prix de l'anarchie en fonction de $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ . . . . .	84

# Avant-Propos

## Informations sur la thèse

- **Auteur de la thèse :** M'hamed OUTANOUE
- **Intitulé de la thèse :** Analyse Technico-économique de la Concurrence dans le Marché des Télécommunications : Approche par la Théorie des Jeux.
- **Directeur de thèse :** Pr. Belaid BOUIKHALENE, Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Beni Mellal.
- **Co-directeur de thèse :** Pr. Mohamed BASLAM, Professeur Habilité, Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Beni Mellal.
- **Structure de recherche :** Laboratoire d'Innovation en Mathématiques et Applications et Technologies de l'Information (LIMATI), Faculté Polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Béni-Mellal.
- **Formation doctorale :** Mathématiques et Physique Appliquées (MPA), Centre d'Etudes Doctorales en Sciences et Techniques (CED-ST), Faculté des Sciences et Techniques, Université Sultan Moulay Slimane, Béni-Mellal.

### **Publications dans des Revues Internationales**

1. M'hamed Outanoute, Hamid Garmani, Mohamed Baslam, Rachid El Ayachi & Belaid Bouikhalene, *A Non-Cooperative Game Analysis of Competition between Content Providers in the Internet Market*, International Journal of Business Data Communications and Networking (IJBDCN), Volume 15, Issue 1, 2019.  
<https://doi.org/10.4018/IJBDCN.2019010106>.
2. Driss Ait Omar, M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Mohamed Fakir & Belaid Bouikhalene, *On Understanding Price-QoS War for Competitive Market and Confused Consumers*, Computing (2018).  
<https://doi.org/10.1007/s00607-018-0642-5>.
3. M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam & Belaid Bouikhalene, *Playing Games with Genetic Algorithms : Application on Price-QoS Competition in Telecommunications Market*, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, Vol : 9, No : 6, 2015.  
<http://scholar.waset.org/1307-6892/10002944>.
4. M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam & Belaid Bouikhalene, *Genetic Algorithm Learning of Nash Equilibrium : Application on Price-QoS Competition in Telecommunications Market*, Journal of Electronic Commerce in Organizations (JECO), Vol : 13, No : 3, 2015.  
<https://doi.org/10.4018/JECO.2015070101>.

### **Communications lors des Conférences Internationales**

1. Hamid Garmani, M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Mustapha Jourhmane, *New Competition-Based Approach for Caching Popular Content in ICN*, The 6th Edition of the International Conference on NETworked sYStems (NETYS 2018), May 9-11, 2018, Essaouira, Morocco.
2. Driss Ait Omar, M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Mohamed Fakir, Belaid Bouikhalene, *Joint Price and QoS Competition with Bounded Rational Customers*, The 5th Edition of the International Conference on NETworked sYStems (NETYS 2017), May 17-19, 2017, Marrakech, Morocco.
3. M'hamed Outanoute, Hamid Garmani, Mohamed Baslam, Rachid El Ayachi, Belaid Bouikhalene, *Competition Analysis between Content Providers in the Internet Market*, The third International Conference on Business Intelligence (CBI'17), March 29-31, 2017, Beni Mellal, Morocco.
4. M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Belaid Bouikhalene, *A Customers' Discrete Choice Model for Competition over Incomes in Telecommunications Market*, The 17th International Arab Conference on Information Technology (ACIT'2016), December 6-8, 2016, Beni Mellal, Morocco.
5. M'hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Belaid Bouikhalene, *Genetic Algorithm Learning of Nash Equilibrium : Application on Price-QoS Competition in Telecommunications Market*, The second International Conference on Business Intelligence (CBI'15), April 23-25, 2015, Beni Mellal, Morocco.

# Introduction Générale

## 1. Cadre Général

Le secteur des télécommunications a connu, durant les dernières décennies, des évolutions rapides. Le monde entier connaît une prolifération de nouveaux services et une forte augmentation du nombre de fournisseurs de services (SPs) grâce à l'innovation technologique et à la déréglementation du secteur.

L'utilisation de la technologie moderne et la concurrence sur le marché sont les deux principaux facteurs responsables de la croissance des télécommunications. L'introduction de ces technologies avancées rend le secteur des télécommunications plus compétitif. Plusieurs sociétés multinationales ont montré leur intérêt à investir dans ce secteur d'où la réduction des prix et l'amélioration de la qualité de service (QoS). Au cours des années 90, le secteur des télécommunications a enregistré une croissance rapide des investissements et de la concurrence. Ces développements ont conduit les opérateurs à adopter de nouvelles stratégies pour différencier leurs services dans le but d'attirer et de fidéliser les clients. Ces développements ont des effets profonds sur la théorie et la pratique de la tarification des télécommunications.

La théorie économique de la tarification s'est considérablement développée. Cette théorie a été lancée par des économistes. Bertrand a d'abord introduit l'idée que les entreprises sélectionnent de manière égoïste les prix qui maximisent leurs propres bénéfices compte tenu des prix choisis par leurs concurrents, en s'engageant à produire suffisamment d'unités de chaque produit proposé pour répondre à la demande [1, 2]. Les prix à l'équilibre dans la concurrence de Bertrand ne sont pas simplement des prix qui rendent les marchés clairs, car les entreprises peuvent contrôler la production pour garantir cela à n'importe quel prix. Les prix à l'équilibre sont plutôt des prix qui maximisent simultanément les revenus de toutes les entreprises du secteur. Ce modèle était à l'origine une réponse à la concurrence de Cournot, qui proposait que les entreprises contrôlent stratégiquement les quantités de produits en leur possession. Ces modèles ont été généralisés et largement appliqués dans le domaine de la théorie des jeux [3, 4, 5]. De nouveaux services de tarification ont été développés et conçus pour accroître l'efficacité économique et obtenir des résultats distributifs acceptables. De plus en plus, les résultats théoriques ont été étendus pour inclure l'offre concurrentielle sur les marchés multi-produits.

Les innovations dans la théorie de tarification et leur traduction dans la pratique tarifaire ont été systématiquement examinées pour l'énergie électrique [6, 7]. Pour les télécommunications, c'est vers les années 80 qu'une évaluation comparable couvre l'évolution du secteur [8]. Depuis ce temps, de nombreux progrès théoriques en matière de tarification ont été apportés par des économistes associés au secteur des télécommunications [9]. Plusieurs principes généraux de la théorie de tarification des travaux connexes pourraient être applicables aux services des télécommunications. Ces résultats théoriques de tarification intéresseront également d'autres industries. En outre, les expériences pratiques en matière des télécommunications peuvent également être pertinentes pour les développements futurs dans d'autres secteurs.

L'application de la théorie des jeux dans les problèmes des télécommunications est un domaine de recherche actif. Des modèles de la théorie des jeux ont été développés et étudiés au cours des deux dernières décennies [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. La théorie des jeux se concentre sur la manière de prendre une décision dans différentes situations. Elle a pour objectif principal d'éviter le conflit et de réaliser l'impartialité en étudiant l'interaction entre les différents décideurs. Une notion fondamentale dans ce contexte est celle d'un équilibre de Nash, qui caractérise un comportement éventuel des agents dont ils ne sont pas incités à dévier. La conception des mécanismes pour les jeux impliquant des agents égoïstes et rationnels, de sorte que les équilibres de Nash résultants aient des propriétés souhaitables, est un sujet important de recherche en théorie des jeux. Il est possible d'appliquer cette théorie pour analyser le marché des télécommunications et étudier la contre-mesure et la stratégie pour les opérateurs.

La tarification des télécommunications est un sujet de recherche actif qui a été étudié dans plusieurs recherches [19, 20, 21, 22, 23]. Dans les références précédentes, les auteurs ont étudié, en utilisant les jeux non-coopératifs, l'interaction entre des acteurs égoïstes (Fournisseurs de services, Utilisateurs, Propriétaire du réseau, Fournisseurs de contenus ...) cherchant à maximiser leurs propres bénéfices. Ainsi, les chercheurs ont formulé les problèmes de conflit entre différents acteurs dans des situations réalistes et ont analysé différentes caractéristiques des systèmes en situation d'équilibre.

## 2. Motivations et Objectifs

Les réseaux des télécommunications sont devenus très concurrentiels et il nous semble primordial de faire face à cette concurrence dans les modèles de tarification lors de la définition des prix optimaux, car la concurrence peut fortement influencer les résultats lors de la détermination des prix. En dépit de ces transitions progressives sur le marché des télécommunications, la concurrence entre fournisseurs n'a guère attiré l'attention. Ainsi, l'une des tâches les plus importantes dans les réseaux des télécommunications actuels et futurs



consiste à définir un système de tarification approprié. Il est alors indispensable de formuler un modèle mathématique pour optimiser les paramètres et vérifier les propriétés importantes.

Internet, et plus généralement les réseaux des télécommunications, a passé d'un réseau académique ou monopolistique à un réseau commercial avec des opérateurs compétitifs. Pour obtenir un retour sur investissement, chaque SP doit définir une stratégie de tarification afin de facturer aux utilisateurs le service dont ils ont besoin. Aujourd'hui, il existe différentes manières d'accéder aux services des télécommunications via différentes technologies et avec différentes capacités de QoS. Cependant, chaque opérateur doit adapter son système de tarification pour attirer plus de clients et maximiser ses revenus. De plus, la concurrence est une réalité dans le monde actuel des télécommunications et doit être prise en considération, car elle peut entraîner des résultats très différents de ceux des situations de monopole [24].

Les interactions entre les SPs, cherchant un compromis entre prix et QoS, sont modélisées dans plusieurs travaux de recherche. La plupart de ces études ont été réalisées en se basant sur la théorie des jeux non coopératifs et en considérant un seul paramètre de décision comme le prix [15, 25, 26, 27], la QoS en terme de délai [28] et la QoS en terme de probabilités de perte [29]. Cependant, pour prendre en considération la QoS sur un réseau et développer un modèle réel, il est préférable d'utiliser plus d'un paramètre, par exemple d'intégrer conjointement le prix et une certaine mesure de la QoS. En supposant que la fonction de la demande pour les services des fournisseurs est linéaire, les chercheurs ont établi des conditions d'existence et d'unicité des équilibres pour les deux mesures de QoS [12]. Des enquêtes sur les différentes techniques et les applications des jeux compétitifs dans le domaine des télécommunications sont détaillées dans [30, 31].

la rationalité est l'une des hypothèses les plus fondamentales des modèles de la théorie des jeux. Cependant, elle est traditionnellement interprétée comme un concept normatif, cela signifie que toutes les informations concernant le jeu sont connues par tous les joueurs. Par conséquent, chaque joueur agit d'une manière rationnelle et il est capable de maximiser ses propres gains. John V. Neumann et Morgenstern ont justifié l'idée de maximiser le gain attendu [32]. Dans le monde réel, l'hypothèse d'une «rationalité parfaite» ne tient presque jamais et ne représente pas parfaitement les interactions (actions et réactions) des acteurs dans le marché. Alors, pour proposer un modèle traduisant la réalité de la concurrence dans le marché des télécommunications, il est indispensable de considérer le concept de «rationalité limitée». Ce mécanisme suppose que les acteurs n'ont pas suffisamment de capacités et d'informations pour choisir des stratégies rationnelles afin de maximiser leurs profits [13, 33, 34, 35]. La théorie standard et sa technique d'induction ascendante ne sont d'aucune aide pour comprendre comment les joueurs se comportent réellement dans de tels jeux. Il est donc nécessaire de développer des théories intégrant la rationalité limitée dans les configurations théoriques du jeu.

L'objectif principal de cette thèse est d'introduire et d'analyser des modèles de tarification traitant de la concurrence dans le contexte des réseaux et des services des télécommunications en constante évolution. Plusieurs types de situations de concurrence sont alors analysés à l'aide de différentes théories techniques, de méthodes d'analyse économique et d'algorithmes inspirés de la littérature de la théorie des jeux. Notre contribution porte sur l'analyse technico-économique des problèmes des télécommunications, prend en compte les paramètres de prix et de QoS décidés par les SPs, et aborde différentes situations observées dans le monde réel des télécommunications.

### 3. Contributions et Plan du Mémoire

Le contenu principal de la thèse est divisé en cinq chapitres et une conclusion générale. Même s'ils peuvent être lus indépendamment, leur lecture dans l'ordre présenté est recommandée, car la terminologie et la notation définies dans les premiers chapitres peuvent être omises dans les chapitres suivants. Le [premier chapitre](#) présente une introduction aux bases et aux outils de la théorie des jeux. Nous définissons les jeux stratégiques et leur typologie. Ensuite, nous introduisons le concept d'équilibre qui en résulte et expliquons comment procéder en présence de plusieurs situations d'équilibre. Nous expliquons aussi les concepts de rationalité et d'équité dans un jeu stratégique.

Dans le [deuxième chapitre](#), nous formulons la concurrence entre plusieurs SPs qui partagent le même marché. Nous utilisons un algorithme génétique pour illustrer les stratégies de tarification et de QoS qui maximisent les gains de tous les opérateurs. Ces stratégies correspondent à l'équilibre de Nash de ce jeu. Nous présentons une étude numérique détaillée pour valider notre approche et nous quantifions la performance de l'équilibre en introduisant la mesure du prix de l'anarchie. Enfin, nous interprétons les résultats et soulignons l'importance de considérer à la fois le prix et la QoS comme deux paramètres de décision.

Dans le [troisième chapitre](#), nous formulons l'interaction entre les SPs comme un jeu non coopératif en prenant en considération la migration (abonnement/désabonnement) des clients. Tout d'abord, chaque SP choisit la QoS à garantir et le prix correspondant. Ensuite, chaque client choisit son opérateur et peut migrer vers un autre ou alternativement passer à l'état «sans abonnement» en fonction des prix et des QoS observés. Dans cette étude, nous exploitons la chaîne de Markov pour modéliser les décisions des clients qui dépendent des actions stratégiques des SPs. Nous adoptons le modèle Logit pour formuler les taux de transition des clients. Enfin, nous fournissons des résultats numériques avec une interprétation détaillée.

Le [quatrième chapitre](#) présente un modèle de Bertrand avec plusieurs SPs supposés rationnels qui offrent aux clients des services homogènes. Nous supposons que tous les SPs offrent les mêmes services et cherchent à persuader plus de clients dans le même marché.

Nous modélisons cette situation de concurrence sous forme d'un jeu non coopératif. D'une part, chaque SP décide de ses politiques de prix et de QoS afin de maximiser ses profits. D'autre part, nous supposons que les clients sont rationnellement limités et prennent leurs décisions d'abonnement d'une façon probabiliste que nous modélisons par des probabilités de choix de Luce. En outre, chaque client décide à quel SP s'abonner, il peut migrer vers un autre SP ou se désabonner en fonction des prix et des QoS offerts par l'ensemble des opérateurs. Dans cette étude, nous montrons que les SPs ont intérêt à confuser les clients, c.-à-d. plus les clients sont moins rationnels, plus les SPs gagnent.

Dans le [cinquième chapitre](#), nous analysons la concurrence entre les fournisseurs de contenu (CPs) et l'influence économique de leurs stratégies sur le marché de l'internet. Nous formulons ce problème comme un jeu non coopératif entre plusieurs CPs qui partagent le même marché. A travers une analyse détaillée, nous prouvons l'unicité de l'équilibre de Nash. En outre, un algorithme entièrement distribué pour converger vers le point d'équilibre est présenté. Afin de quantifier l'efficacité de l'équilibre, une analyse détaillée du prix de l'anarchie (PoA) est adoptée pour mesurer la performance du système à l'équilibre. Enfin, nous fournissons une étude numérique et des interprétations détaillées pour décrire les interactions entre les CPs et pour souligner l'importance de la crédibilité du contenu et la qualité de sa transmission dans le marché de l'Internet.

À la fin de ce document, nous présentons une [conclusion générale](#) dédiée à la synthèse des travaux effectués, ainsi que les principaux résultats obtenus. Nous finissons notre mémoire par une présentation des perspectives sur les futurs travaux en soulignant les points importants qui n'ont pas été développés.

# Chapitre I

## Généralités sur la Théorie des Jeux et ses Applications

### 1. Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques appliquées et est un outil d'analyse des comportements humains. Le cadre de base de la théorie des jeux a été introduit en 1944 dans le livre "Theory of Games and Economic Behavior" par John von Neumann et Oskar Morgenstern [32].

La théorie des jeux permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous la forme de jeux stratégiques. Jusqu'à présent, elle est largement utilisée dans de nombreux domaines principalement dans l'économie, ainsi que l'informatique, la biologie, la politique et de nombreux autres domaines. La théorie des jeux est une description efficace des interactions stratégiques. Elle tente de saisir mathématiquement le comportement des individus dans des situations stratégiques, dans lesquels la réussite d'un individu à faire des choix dépend des choix des autres. La théorie des jeux améliore la compréhension des conflits en élaborant des théories, des modèles mathématiques et des abstractions qui servent à expliquer la nature et les résultats des conflits.

Dans la théorie des jeux, il y a certaines hypothèses de base qui sont souvent utilisés pour faciliter la construction de modèles maniables pour des situations réelles. Premièrement, on suppose que chaque individu dans le jeu a un ordre défini de préférences sur tous les résultats d'une situation donnée. Ces préférences prennent la forme d'une fonction d'utilité ou de paiement. Deuxièmement, les participants dans les jeux sont parfois considérés comme rationnels. Cela signifie qu'ils agissent toujours de façon à maximiser leurs gains, ils seront toujours capables de penser à tous les résultats possibles et en choisir l'action qui se traduira par le résultat le mieux possible.

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement certains concepts et définitions de la théo-

rie des jeux. Nous commençons par définir la notion du jeu stratégique, ses différentes représentations et les différents types des jeux. Nous distinguons les jeux coopératifs et non-coopératifs selon la possibilité de formation des coalitions entre les joueurs. Selon l'ordre de prise de décision défini dans un jeu, nous distinguons les jeux séquentiels des jeux simultanés. Un jeu peut être fini ou infini selon les espaces des stratégies de chaque joueur et peut être un jeu répété plusieurs fois ou non. Nous signalons qu'un jeu est caractérisé par la qualité et la quantité d'informations dont les joueurs disposent. Ainsi, nous distinguons les jeux à information complète et incomplète et les jeux à information parfaite et imparfaite. Puis nous montrons que la théorie des jeux permet de prédire les équilibres d'un jeu, qui sont des situations dans lesquelles aucun joueur n'a d'intérêt à modifier son comportement compte tenu des comportements de ses concurrents. Finalement, nous discutons les concepts de rationalité et d'équité qui se déterminent par la quantité et la qualité d'informations que possèdent les joueurs sur le jeu et leur degré de coopération.

## 2. Jeux Stratégiques

Des acteurs sont engagés dans un jeu stratégique quand l'utilité et les gains de chacun sont affectés non seulement par les actions qu'il entreprend mais aussi par les actions de ses rivaux. Par exemple, le jeu d'échecs est clairement un jeu stratégique parce que la victoire ou la défaite de l'un des joueurs dépend autant de ses propres choix tactiques que de ceux de son rival. De nombreuses situations économiques se ramènent à des jeux stratégiques. Par exemple, les profits d'une firme ne dépendent pas de ses seuls choix en matière de prix, mais aussi des prix annoncés par ses concurrents. De même, les conflits politiques ont souvent les caractéristiques d'un jeu stratégique.

### 2.1. Définition du Jeu Stratégique

Un jeu stratégique est un ensemble de règles qui encadre ou contraint le comportement des joueurs et qui détermine les gains des acteurs sur la base des actions entreprises [36, 37]. Selon cette terminologie, un jeu stratégique suppose une définition claire des règles de comportement des joueurs. Premièrement, on doit savoir qui sont les joueurs et si la chance ou le hasard est présent dans le jeu (comme dans les jeux des cartes). Deuxièmement, l'ordre dans lequel les joueurs effectueront leurs choix doit être précisé. Nous devons savoir qui joue le premier, qui joue le second et ainsi de suite. Nous devons aussi savoir quels sont les choix possibles des joueurs. Enfin, on doit préciser l'utilité ou le gain que retirera chaque joueur à la fin du jeu pour chaque combinaison de choix possibles.

## 2.2. Représentations des Jeux

Un jeu est défini par l'ensemble des joueurs, l'ensemble des stratégies possibles et la spécification des paiements ou des utilités des joueurs pour chaque combinaison de stratégies. Les jeux sont généralement présentés sous la forme de fonctions caractéristiques, sous forme extensive ou sous forme normale.

### 2.2.1. Arbre du Jeu ou Forme Extensive

Les règles du jeu et les gains contingents peuvent être représentés par ce que les théoriciens des jeux appellent un arbre. Ce dernier offre une description détaillée des règles du jeu et est aussi appelé la forme extensive du jeu. Figure I.1 illustre un exemple de jeu de deux joueurs sous forme d'un arbre.

Un jeu sous forme extensive est défini par :

- un ensemble  $N$  de joueurs ;
- un arbre composé de :
  - Un ensemble de nœuds représentant les coups ;
  - Un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup ;
  - Une fonction de nommage qui indique à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer ;
  - Une fonction de valuation qui associe à chaque nœud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs.
- Une partition des nœuds en un ensemble d'ensembles d'informations représentant les croyances (imparfaites) des joueurs.

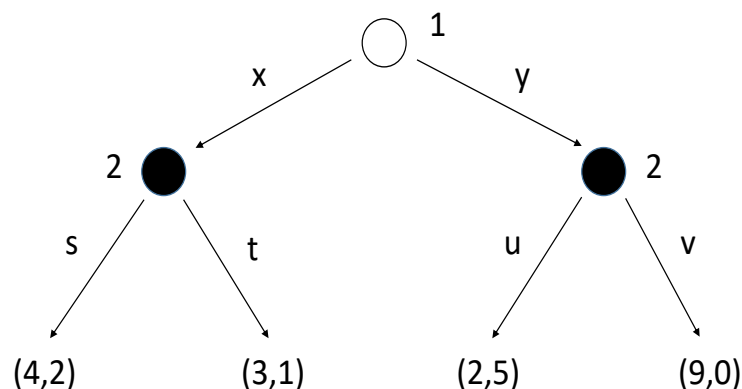


FIGURE I.1 – Exemple de jeu de deux joueurs sous forme extensive

### 2.2.2. Description du Jeu sous sa Forme Normale

Lorsqu'un jeu implique de multiples joueurs et de multiples choix, l'arbre peut devenir complexe à représenter. Pour éviter de telles difficultés, il est courant de simplifier la présentation du jeu en spécifiant la stratégie de chaque joueur. Par stratégie, nous entendons un plan d'action complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque noeud de l'arbre et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu.

Plus précisément, la description d'un jeu sous sa forme normale se compose de trois éléments :

- Un ensemble de joueurs  $N = \{1, \dots, N\}$ ,
- Un ensemble de stratégies  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ ,
- Un ensemble de gains  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ .

## 3. Typologie des Jeux

En théorie des jeux, on peut classifier les jeux en plusieurs catégories en fonction de leurs descriptions ou de leurs approches de résolution.

### 3.1. Jeux Coopératifs ou Non-coopératifs

Dans tous les modèles théoriques des jeux, l'entité de base est le joueur. Un joueur peut être interprété comme un individu ou un groupe de personnes prenant une décision. Une fois que nous avons défini l'ensemble des joueurs, nous pouvons distinguer deux types de modèles : ceux dans lesquels la coalition entre les joueurs est possible afin d'obtenir de meilleurs résultats pour les membres de la coalition et ceux dans lesquels les joueurs n'ont pas cette possibilité. Les modèles du premier type sont appelés "coopératifs", tandis que ceux du second type sont appelés "non-coopératifs".

*Exemple :* La belote à 4 est un jeu coopératif tandis que le rami est un jeu non-coopératif.

### 3.2. Jeux Simultanés ou Séquentiels

Dans un jeu simultané, les joueurs décident simultanément leurs stratégies. Tandis que dans un jeu séquentiel, un ordre des décisions peut être spécifié et un joueur peut décider de sa stratégie conditionnellement à ce qu'ont joué les autres précédemment.

*Exemple :* Le jeu pierre-papier-ciseaux est un jeu simultané, tandis que le jeu de go est un jeu séquentiel.

### 3.3. Jeux Finis ou Infinis

Lorsque l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs est fini, on parle d'un jeu fini et dans le cas contraire on dit que le jeu est infini.

*Exemple :* Le jeu pierre-papier-ciseaux est un jeu fini. Un jeu où on choisit au hasard un entier naturel non nul est un jeu infini.

### 3.4. Jeux à Somme Nulle

Un jeu à deux joueurs est dit à somme nulle ou strictement compétitif si l'intérêt de l'un des joueurs est strictement opposé à l'intérêt de l'autre.

*Exemple :* Le jeu d'échecs est un jeu à somme nulle car la victoire de l'un des joueurs est égale à la défaite de l'autre.

### 3.5. Jeux Répétés

Dans certains jeux, la répétition du jeu plusieurs fois avec connaissance des résultats intermédiaires, change souvent son déroulement. Il peut être utile, par exemple, de prendre ponctuellement le risque de perdre pour voir ou pour tester les autres joueurs et pour mettre en place des stratégies de communications par les stratégies jouées. Un tel jeu qui consiste à une répétition d'un jeu de base est appelé jeu répété.

### 3.6. Jeux à Information Complète ou Incomplète

On dit qu'un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :

- Ses possibilités d'action,
- Les possibilités d'action des autres joueurs,
- Les gains résultants de ses actions,
- Les motivations des autres joueurs.

Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on dit que le jeu est à information incomplète ou jeu bayésien.

### 3.7. Jeux à Information Parfaite ou Imparfaite

Un jeu est dit à information parfaite si chaque joueur a une connaissance parfaite de toute l'histoire du jeu. Dans le cas contraire, on dit que le jeu est à information imparfaite.



## 4. Équilibres des Jeux

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera si les joueurs sont rationnels. Nous entendons par équilibre un état ou une situation dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs. En d'autres termes, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueurs n'a d'incitation à changer sa stratégie compte tenu des stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu (peu importe la manière dont il a été obtenu), il n'y a aucune raison de le quitter.

Nous savons qu'un équilibre est constitué d'une combinaison de choix stratégiques (un choix stratégique par joueur) et nous savons qu'une fois les choix arrêtés, aucune modification n'interviendra. C'est à dire qu'aucun joueur ou groupe de joueurs n'aura d'incitation à modifier ses actions s'il suppose que ses rivaux ne modifieront pas non plus les leurs. Nous parlons ici des situations dans lesquelles chaque joueur arrête seul ses choix stratégiques sans consulter les autres joueurs. De tels jeux sont appelés *jeux non coopératifs*. Pour les jeux coopératifs, on utilise un concept d'équilibre différent. Ainsi, pour déterminer les équilibres d'un jeu non coopératif, nous considérons uniquement les incitations des joueurs pris individuellement, et non pas les incitations des groupes de joueurs à modifier leurs comportements conjointement étant donné le comportement des joueurs restants.

### 4.1. Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash est un concept fondamental en théorie des jeux. Il doit son nom au mathématicien et économiste John F. Nash, prix Nobel d'économie en 1994, qui l'introduisit en 1951. Ce concept décrit une issue dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement (ou sa stratégie) étant donné le comportement (ou la stratégie) de ses rivaux. Nous pouvons définir un équilibre de Nash d'une façon formelle.

Soient un jeu non-coopératif à  $n$  joueurs et  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  l'ensemble des stratégies formé par les ensembles des choix stratégiques  $S_i$  de tous les joueurs. Soit  $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  une combinaison de choix stratégiques de ces  $n$  joueurs où  $s_1^* \in S_1$  est le choix stratégique du joueur 1,  $s_2^* \in S_2$  le choix stratégique du joueur 2 et ainsi de suite. De plus, soit  $u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  le gain du joueur  $i$  lorsque  $s^*$  est sélectionnée, où  $i$  peut être l'indice de n'importe quel joueur ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Nous pouvons maintenant donner une définition formelle de l'équilibre de Nash : une combinaison de choix stratégiques  $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  est un *équilibre de Nash* si  $u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$  pour tout  $s_i$  dans  $S_i$  et tout joueur  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pour comprendre cette définition,  $u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*)$  est le gain du joueur  $i$  quand il choisit  $s_i^*$  et que tous les autres font un choix conforme à  $s^*$ . Alors que  $u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$  indique le gain du joueur  $i$  quand il dévie de  $s_i^*$  et choisit une autre stratégie  $s_i$ , alors que les  $n - 1$

autres joueurs font un choix conforme à  $s^*$ . Les conditions d'équilibre nous disent qu'aucun joueur  $i$  ne peut bénéficier d'une telle déviation et ce quelle que soit la stratégie qu'il choisit dans son ensemble de stratégies  $S_i$ . En d'autres termes, si nul ne peut bénéficier d'une déviation de  $s^*$ , alors nul ne le fera, ce qui est bien la preuve que  $s^*$  est un équilibre.

## 4.2. Équilibre en Stratégies Dominantes

Pour comprendre le concept d'équilibre de Nash, nous devons supposer initialement que les joueurs ont déjà arrêté une certaine configuration de choix stratégiques. Nous considérons alors uniquement les déviations unilatérales (individuelles) possibles de cette configuration dans laquelle chaque joueur envisageant de dévier suppose que tous les autres n'ont pas ce dessein. Dans ces circonstances, le concept d'équilibre de Nash nous dit qu'aucun joueur n'aura d'incitation à dévier étant donné la configuration stratégique. Ce que le concept d'équilibre ne nous dit pas c'est comment ou pourquoi une certaine configuration de choix stratégiques est arrêtée initialement.

### 4.2.1. Exemple

Pour certains jeux cependant, nous pouvons comprendre pourquoi un équilibre particulier émerge. Considérons la matrice de la table I.1 qui applique le célèbre **dilemme du prisonnier** à la concurrence en prix que se livrent les firmes en oligopole. Dans l'exemple présent, les firmes en question sont X et Y. Supposons que X et Y construisent des voitures presque identiques si bien que le prix demeure la seule variable que le consommateur prend en compte lors de l'achat d'une voiture. Le premier chiffre dans chaque case de la matrice est le profit de X et le second celui de Y. Chaque firme a deux stratégies possibles pour la tarification de ses voitures : fixer un prix élevé ou un prix bas. La matrice des gains indique les conséquences monétaires de ces différentes stratégies de prix pour chacune des firmes.

Remarquons que si X et Y fixent toutes les deux un prix élevé, nous sommes dans une situation collusive qui nuit au consommateur, chaque firme obtenant un profit élevé de 50 millions de dollars. Cependant si une firme fixe un prix élevé, alors l'autre firme peut obtenir un profit encore plus grand en baissant son prix (en déviant de la stratégie de prix élevé). Cette dernière enlève du fait à son rival la quasi-totalité du marché et obtient un profit de 70 millions de dollars ne laissant à son rival qu'un profit de 10. Si les deux firmes fixent un prix bas, elles se partagent à parts égales un marché plus étendu. Mais compte tenu du faible prix de vente, elles ne gagnent chacune que 30 millions de dollars.

$X \setminus Y$	PRIX BAS	PRIX ÉLEVÉ
PRIX BAS	30 ; 30	70 ; 10
PRIX ÉLEVÉ	10 ; 70	50 ; 50

TABLEAU I.1 – Jeux en prix du type dilemme du prisonnier (gains en millions de dollars)

Dans la table I.1, la seule combinaison de stratégies conduisent à un équilibre de Nash est celle dans laquelle X et Y fixent un prix bas et obtiennent un profit de 30 millions de dollars chacun. Si l’une des firmes s’attend à ce que l’autre fixe un prix bas, sa meilleure réponse est aussi de fixer un prix bas. C’est la seule combinaison de stratégies qui conduit à un équilibre, malgré le fait que les deux firmes auraient plutôt un intérêt commun à fixer des prix élevés (leur profit s’élèverai à 50 millions de dollars). Mais la combinaison des stratégies de prix élevés incite chacune des firmes à tricher ou à dévier.

L’équilibre en prix bas peut être justifié d’une autre manière. Nous pouvons en effet remarquer que fixer un prix bas est le meilleur choix pour chaque firme quel que soit le choix attendu de son rival. Examinons le décision de X (Y étant dans une situation symétrique, le même raisonnement s’applique pour elle). Si X s’attend à ce que Y fixe un prix élevé, sa meilleure réponse est de fixer un prix bas car elle gagne 70 millions au lieu de 50 millions de dollars (gain d’une stratégie de prix élevé). D’autre part, si X s’attend à ce que Y fixe un prix bas, sa meilleure réponse est encore de fixer un prix bas. En ne choisissant pas un prix élevé, il évite ainsi de perdre de l’argent : son gain est de 30 millions au lieu de 10 millions de dollars. Clairement X est toujours mieux en fixant un prix bas quelle que soit la stratégie attendue de Y.

Quand la stratégie d’un joueur est meilleure réponse face à toutes les stratégies possibles de ses rivaux, on dit que c’est une stratégie dominante (cette stratégie domine toutes les autres stratégies du joueur). Dans l’exemple précédent, les deux firmes ont une stratégie dominante qui consiste à fixer un prix bas. L’équilibre de ce jeu est alors appelé **équilibre en stratégie dominante**.

#### 4.2.2. Résolution des Jeux par Élimination des Stratégies Dominées

Un joueur rationnel ne doit jamais utiliser une **stratégie dominée**, c’est-à-dire une stratégie qui est dominée en terme de gains par au moins une autre de ses stratégies face à toutes les stratégies possibles de ses rivaux. Lorsque nous sommes opposés à un joueur rationnel, nous pouvons supposer que ce dernier n’utilisera jamais une telle stratégie ; nous pouvons donc l’éliminer de son ensemble de stratégies possibles. Une manière de déterminer les équilibres d’un jeu consiste à éliminer en premier toutes les stratégies dominées puis de chercher dans le jeu les équilibres. Pour illustrer cette méthode, considérons la table I.2 . Cette dernière décrit les gains d’un jeu à deux joueurs qui ont chacun deux stratégies possibles ( le

premier chiffre dans chaque case est le gain du joueur 1 et le second celui du joueur 2).

<i>Joueur1 \ Joueur2</i>	Stratégie A	Stratégie B
Stratégie a	3 ; 0	4 ; 0
Stratégie b	6 ; 3	0 ; 2

TABLEAU I.2 – Jeu à deux joueurs ayant deux stratégies

Dans ce jeu, la stratégie A du joueur 2 domine faiblement sa stratégie B car sa stratégie A est équivalente à sa stratégie B lorsque le joueur 1 a opté pour la stratégie a, et strictement meilleure lorsque le joueur 1 a opté pour la stratégie b. Si le joueur 1 pense que le joueur 2 est rationnel, il s'attend à ce que ce dernier ne recoure jamais à sa stratégie B. Le joueur 1 éliminera donc la stratégie B de l'ensemble des stratégies possibles du joueur 2. Face à la seule stratégie A du joueur 2, le joueur 1 a le choix entre la stratégie a associée à un gain de 4 et la stratégie b associée à un gain de 6. Si ce dernier est rationnel, il optera pour la stratégie b car après élimination de la stratégie dominée de joueur 2, sa stratégie b domine sa stratégie a. En éliminant les stratégies dominées (même faiblement dominées), nous avons déterminé l'équilibre de ce jeu et les gains associés (6;3).

### 4.3. Jeux à Équilibres Multiples

Tous les jeux n'ont pas des équilibres qui peuvent être déterminés par simple élimination des stratégies dominées. De plus, certains jeux sont caractérisés par des équilibres multiples, c'est-à-dire de multiples combinaisons de choix stratégiques satisfaisant à la définition d'un équilibre de Nash.

#### 4.3.1. Exemple : jeu de coordination à équilibres multiples

Considérons le jeu de coordination présenté dans la table I.3 et dont l'histoire peut être la suivante.

A la suite d'une série d'incidents techniques, la plupart des centraux téléphoniques d'une grande ville comme Paris sont hors service. France Télécom est alors dans l'obligation de rationner l'accès au réseau en limitant la durée des appels téléphoniques. La règle serait la suivante : si un appel dépasse cinq minutes, France Télécom coupe la ligne. Pour continuer la conversation, un des deux interlocuteurs doit rappeler l'autre. Nous sommes confrontés au problème suivant : lequel des deux interlocuteurs doit rappeler ? Celui qui a appelé à l'origine ou celui qui a été appelé ?

Si l'appel téléphonique est coûteux, nous pouvons supposer que chaque personne préfère être appelé. Nous avons deux stratégies pour chaque joueur : *appeler* ou *attendre*. Si les deux attendent, la conversation téléphonique ne peut se poursuivre et le gain de chaque joueur est

nul. Si les deux tentent de se rappeler, chacun tombe sur la tonalité occupée. Le résultat est aussi un gain nul. Cependant si un des joueurs appelle et l'autre attend alors le gain est de 3 pour celui qui appelle et de 6 pour celui qui est appelé. Ce dernier reçoit un gain supérieur parce qu'il ne supporte pas le coût de l'appel. Quel est l'équilibre d'un tel jeu ? En d'autres termes qui doit appeler et qui doit attendre ? Pour répondre à cette question, regardons plus attentivement la table I.3.

<i>Joueur1 \ Joueur2</i>	Attendre	Appeler
Attendre	0 ; 0	6 ; 3
Appeler	3 ; 6	0 ; 0

TABLEAU I.3 – Jeu de téléphone, un jeu de coordination avec deux équilibres de Nash

Il est clair que l'intérêt des deux joueurs est de coordonner leurs stratégies afin que l'un choisisse la stratégie *attendre* et l'autre la stratégie *appeler*. Seule une telle coordination permet aux deux joueurs d'obtenir un gain positif. Cependant, ils peuvent ne pas être d'accord sur la façon d'y parvenir. Tous les deux préfèrent la stratégie *attendre* qui rapporte le gain 6 (le gain de la stratégie *appeler* étant seulement 3).

Dans ce jeu nous avons deux équilibres de Nash. Le premier correspond à la situation où le joueur 1 choisit la stratégie *attendre* et le joueur 2 la stratégie *appeler*, le second à la situation dans laquelle le joueur 1 choisit la stratégie *appeler* et le joueur 2 la stratégie *attendre*. Pour vérifier que ces deux paires de stratégies sont des équilibres de Nash, considérons la situation dans laquelle le joueur 1 choisit la stratégie *attendre* et le joueur 2 la stratégie *appeler*. Dans ce cas, si le joueur 1 pense que le joueur 2 va choisir la stratégie *appeler*, le joueur 1 a intérêt à sélectionner la stratégie *attendre* car elle lui donne un gain de 6 (au lieu de 0 si il choisissait la stratégie *appeler*). De même, si le joueur 2 pense que le joueur 1 va choisir la stratégie *attendre*, le joueur 2 a intérêt de sélectionner la stratégie *appeler* car le gain de 3 associé à ce choix est supérieur au gain 0 associé à la stratégie *attendre*. Le même raisonnement est valable lorsque le joueur 1 choisit la stratégie *appeler* et que le joueur 2 choisit la stratégie *attendre*.

Cet exemple montre qu'un jeu peut comporter plusieurs équilibres. Initialement, la théorie des jeux ne se préoccupait pas de savoir lequel de ces équilibres allait être sélectionné par les joueurs. Depuis quelques années, la théorie des jeux s'est ouverte à des **concepts de raffinement** qui permettent de réduire le nombre des équilibres. Par exemple, les *équilibres de sous jeu parfait* ou les *équilibres robustes à la renégociation* appartiennent à ces concepts de raffinements.

Les expériences à partir de jeux de coordination ont donné des résultats intéressants. il serait naturel de penser que les joueurs dans un tel jeu choisissent toujours le meilleur équilibre, mais les résultats expérimentaux indiquent que tel n'est toujours pas le cas [38]. Ces

jeux avaient plusieurs équilibres de Nash qui pouvaient être unanimement rangés du meilleur au pire. Ces études ont montrés contre toute attente que les joueurs ne convergeaient pas vers le meilleur équilibre quand le jeu est répété un certain nombre de fois. Au contraire, il ressortait que l'issue apparue au premier coup tendait à se perpétuer aux coups suivants. Le choix de l'équilibre de coordination dépendait plus de l'histoire passée du jeu que d'une réflexion sur les avantages en terme de gains des différents équilibres. Ce résultat va à l'encontre des hypothèses en théorie des jeux selon lesquelles l'issue d'un jeu dépend de ses propriétés stratégiques et de sa matrice de gains et non des histoires qui auraient pu apparaître au cours du jeu.

#### 4.4. Équilibres en Stratégies Mixtes

Tous les jeux ne comportent pas des équilibres de Nash aussi évidents que dans les jeux étudiés précédemment. Considérons l'exemple suivant qui illustre un jeu avec équilibre en stratégies mixtes.

##### 4.4.1. Exemple : Jeu sans Équilibre en Stratégies Pures

Nous supposons que deux généraux sont opposés dans une bataille. Chaque général a deux stratégies à sa disposition : attaquer ou battre en retraite. Les gains dans la table I.4 représentent la satisfaction que les deux armées peuvent tirer des quatre combinaisons possibles de choix stratégiques. Par exemple, si le général 1 se retire et que le général 2 attaque, il n'y aura pas de bataille et les deux armées recevront un gain de 6 chacune. Nous supposons qu'il y a des raisons stratégiques à chaque gain, mais nous ne nous étendrons pas sur les explications car elles ne présentent pas un intérêt direct.

Général 1 \ Général 2	Attaquer	Battre en retraite
Attaquer	2 ; 3	8 ; 0
Battre en retraite	6 ; 6	5 ; 8

TABLEAU I.4 – Jeu de guerre sans équilibre en stratégies pures

A première vue, la paire de choix stratégiques qui fournit le gain (6,6) semble être un candidat à l'équilibre de Nash. Cependant, ce jeu n'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Par stratégie pure, nous entendons une règle spécifiant l'action (ou les actions) à entreprendre - dans ce cas attaquer ou battre en retraite. Quand nous prétendons que le jeu décrit ici n'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures, nous voulons dire qu'il n'existe pas de paire de stratégies (une pour le général 1 et une pour le général 2) qui puisse constituer un équilibre du jeu.

Par exemple, prenons la paire de stratégies associée aux gains (6,6) (le général 1 choisit

de se retirer et le général 2 d'attaquer). Ce n'est pas un équilibre de Nash car l'un des généraux a une incitation à dévier de sa stratégie initiale. Si le général 1 choisit de battre en retraite, la meilleure réponse pour le général 2 est aussi de battre en retraite afin d'obtenir un gain de 8. Ce gain est supérieur au gain de 6 obtenu en attaquant. Cependant, cette nouvelle paire de stratégies (battre en retraite, battre en retraite) n'est pas non plus un équilibre de Nash. Les gains associés à cette paire stratégique sont alors (5, 8). Le général 1 en déviant de sa stratégie de retraite peut faire mieux que 5 en terme de gain. Si il attaque l'armée du général 2 qui bat en retraite, il reçoit un gain de 8. Les deux autres paires de stratégies (attaquer, battre en retraite), et (attaquer, attaquer) associées respectivement aux gains (8, 0) et (2, 3) ne mènent pas non plus à des équilibres de Nash.

Il existe une autre méthode pour obtenir un équilibre de Nash dans des jeux du type de celui décrit dans l'exemple précédent. Il suffit d'élargir la définition d'une stratégie et d'y inclure non seulement les actions pures (telle que attaquer ou battre en retraite) mais aussi les probabilités de choisir l'une ou l'autre de ces actions. Par exemple, supposons qu'au lieu de simplement attaquer ou battre en retraite, le général 1 décide d'attribuer une probabilité positive à ces deux alternatives. Par conséquent, il se retirera avec une probabilité  $p$  et attaquera avec une probabilité  $(1 - p)$ . De même, supposons que le général 2 se retire avec une probabilité  $q$  et attaque avec une probabilité de  $(1 - q)$ . En élargissant l'espace de choix des généraux, c'est à dire en leur permettant de recourir à des probabilités, nous sommes en présence de stratégies mixtes - stratégies qui définissent les probabilités avec lesquelles les joueurs choisissent chacune de leurs actions ou de leurs stratégies pures (ici attaquer ou battre en retraite).

L'ensemble des stratégies mixtes possibles dans notre exemple est l'ensemble de tous les  $p$  vérifiant  $0 \leq p \leq 1$  et l'ensemble de tous les  $q$  vérifiant  $0 \leq q \leq 1$ . Si les joueurs ont  $n$  stratégies pures, une stratégie mixte est une distribution de probabilité sur toutes ces stratégies ; c'est à dire l'ensemble des vecteurs  $p = (p_1, \dots, p_n)$  tels que  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$  et  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Revenons à l'exemple précédent et supposons que le général 2 choisisse de battre en retraite avec la probabilité  $q$  et d'attaquer avec la probabilité  $(1 - q)$ . Si le général 1 choisit de battre en retraite, son gain espéré d'après la table I.4 est alors égal à  $q \times 5 + (1 - q) \times 6 = 6 - q$ .

La valeur espérée d'une stratégie est le gain que l'on s'attend à recevoir pondéré par les probabilités de choix de l'autre joueur. Notons que si  $q = 1$ , le général 2 décide de toujours battre en retraite. Dans ce cas si le général 1 bat en retraite, il recevra un gain certain de 5. Si  $q = 0$ , le général 2 décide de toujours attaquer. En se retirant, le général 1 recevra un gain certain de 6. Quand  $0 \leq q \leq 1$ , le général 1 recevra en se retirant soit un gain de 5 avec une probabilité de  $q$ , soit un gain de 6 avec une probabilité de  $(1 - q)$ . De même, le gain espéré de la stratégie d'attaque du général 1 s'écrit  $q \times 8 + (1 - q) \times 2 = 2 + 6q$ .

Maintenant si le général 2 choisit  $q$  tel que ce choix rende le gain espéré d'une des stratégies pures du général 1 supérieur au gain espéré de l'autre, alors cette meilleure stratégie pure en terme de gain espéré sera choisie avec une probabilité de 1 par le général 1. Par exemple, supposons que le général 2 choisisse la stratégie mixte  $q = \frac{1}{2}$  et  $(1 - q) = \frac{1}{2}$ . Si le général 1 choisit de se retirer, son gain espéré est de  $\frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 6 = 5.5$ . Si il choisit d'attaquer, son gain espéré est de  $\frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 2 = 5$ .

Clairement si le général 2 choisit la stratégie mixte  $q = \frac{1}{2}$  et  $(1 - q) = \frac{1}{2}$ , alors la meilleure réponse du général 1 est la retraite. Sachant cela, le général 2 abandonnera sa stratégie mixte et battra lui aussi en retraite. Ainsi une situation dans laquelle le général 2 utilise la stratégie mixte  $q = \frac{1}{2}$  et  $(1 - q) = \frac{1}{2}$  ne peut constituer un équilibre en stratégies mixtes.

#### 4.4.2. Détermination des Équilibres en Stratégies Mixtes

Le principe qui se dégage de l'exemple précédent, c'est que si un joueur utilise une stratégie mixte qui laisse à l'autre joueur une meilleure réponse unique en stratégie pure, alors un équilibre en stratégies mixtes n'existe pas. La seule situation dans laquelle un équilibre en stratégies mixtes apparaît est celle où les stratégies mixtes choisies laissent les deux joueurs indifférents entre les gains qu'ils peuvent s'attendre à recevoir de l'une ou l'autre de leurs stratégies pures. Par exemple, dans le jeu décrit précédemment, supposons que le général 2 utilise la stratégie mixte  $q = \frac{4}{7}$  et  $(1 - q) = \frac{3}{7}$ . Alors le gain espéré du général 1 associé à l'une ou l'autre de ces stratégies pures est le même. Le gain espéré de battre en retraite est  $\frac{4}{7} \times 5 + \frac{3}{7} \times 6 = \frac{38}{7}$ . Le gain espéré d'attaquer est  $\frac{4}{7} \times 8 + \frac{3}{7} \times 2 = \frac{38}{7}$ .

Dans ce cas, le général 1 est indifférent entre ses deux stratégies pures. Il pourrait aussi bien choisir l'une ou l'autre de façon aléatoire, c'est à dire avec les probabilités  $((p, 1 - p))$ . Par exemple, le général 1 peut se retirer avec une probabilité de  $p = \frac{3}{5}$  et attaquer avec une probabilité de  $1 - p = \frac{2}{5}$ . Et dans ce cas, le général 2 est aussi indifférent entre ses deux stratégies pures, chacune lui donnant un gain espéré de  $\frac{24}{5}$ . Une situation dans laquelle tous les joueurs choisissent leurs stratégies mixtes de façon à rendre leurs adversaires indifférents entre les gains espérés de chacune de leurs stratégies pures est appelé *équilibre en stratégies mixtes*.

## 5. Rationalité et Équité

La théorie néoclassique repose sur certaines hypothèses relatives au comportement humain - notamment que les individus sont rationnels et intéressés. Les théoriciens des jeux font aussi ces hypothèses. Ainsi lorsqu'ils considèrent un jeu, ils fondent leur analyse stratégique uniquement sur les gains que recevront les joueurs. Les théoriciens des jeux supposent qu'un joueur est intéressé par ses seuls gains et ne se soucie des gains de ses adversaires que dans la mesure où ces gains orientent les choix de ces derniers.



Cette vision traditionnelle du comportement humain a récemment été contestée par certains résultats expérimentaux. De nombreux économistes ont montré que les individus placés dans des situations de jeu étaient très soucieux d'équité dans l'issue du jeu. Évidemment, les résultats de telles études violent les hypothèses traditionnelles d'égoïsme et de rationalité. Une des expériences les plus célèbres a été réalisée en Allemagne par Guth, Schmittberger et Schwarze [39].

### 5.1. Rationalité Limitée

La rationalité implique que chaque joueur raisonne pour augmenter sa propre rentabilité. En d'autres termes, il possède toutes les informations qui lui permettent de rationaliser son choix, ce qui lui permet de maximiser son propre gain. L'idée de maximiser les gains attendus est justifiée dans [32]. Dans la réalité, l'hypothèse de la «rationalité parfaite» ne tient presque jamais et les acteurs ne sont pas censés pouvoir établir de manière claire et immédiate leurs préférences [40]. On parle alors d'une «rationalité limitée» qui constitue l'un des principaux obstacles à l'application de la théorie des jeux conventionnels dans le monde réel.

La rationalité limitée des joueurs dans un jeu considère qu'ils disposent d'une quantité d'information et de capacités cognitives limitées ne leur permettant pas d'optimiser leurs choix. Cela signifie que : plutôt que de choisir l'action optimale, les joueurs choisissent une action qui leur donne un gain plus élevé avec une probabilité plus élevée. Le concept de rationalité limitée a attiré l'attention de nombreux chercheurs et a été étudié dans de nombreux travaux de recherche. Suren Basov a discuté des modèles de rationalité limitée et a présenté le problème de conception du choix des agents en se basant sur le modèle probabiliste de Luce [41]. Dans le livre [42], les auteurs ont montré que la prise de décision irrationnelle peut être expliquée si l'on prend en compte que les capacités humaines pour traiter l'information sont limitées. Ainsi, ils ont amélioré des techniques heuristiques pour prédire la qualité de la décision en formulant et en résolvant des problèmes d'optimisation. Différents modèles traitant la rationalité limitée sont expliqués en détail dans [43].

### 5.2. Équité et Bien-être Commun

Nous avons, jusqu'à présent, reposé sur les deux hypothèses simplificatrices majeures suivantes pour l'analyse de la théorie des jeux :

- Un joueur ne se soucie que de ses propres revenus ;
- Chaque joueur choisit la meilleure stratégie qui maximise ses propres gains.

Étant donné que ces hypothèses sont si essentielles aux conclusions que nous tirons, il est important que nous prenions le temps d'examiner quand elles se présentent et quand elles échouent. L'économiste Matthew Rabin a contesté ces deux hypothèses en intégrant la notion

d'équité dans la théorie des jeux, et a conclut que la théorie des jeux classique ne permet pas de décrire avec précision le comportement humain en ce qui concerne les jeux traitant de gains inégaux entre les joueurs [44]. Pour arriver à cette conclusion, l'auteur a fait les trois importantes hypothèses suivantes :

- Les gens sont prêts à sacrifier leur propre bien-être matériel pour aider ceux qui sont gentils ;
- Les gens sont prêts à sacrifier leur propre bien-être matériel pour punir ceux qui sont méchants ;
- Ces deux motivations ont un effet important sur le comportement à mesure que le coût matériel du sacrifice devient plus petit.

Le chercheur procède ensuite à la définition d'un nouveau type d'équilibre, qu'il appelle un «*équilibre d'équité*», qui reflète les implications de ces trois hypothèses.

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les bases théoriques de la théorie des jeux en les illustrant par des exemples pédagogiques issus de la littérature. Nous avons commencé par la définition des jeux stratégiques et les différentes représentations des jeux : arbre ou forme extensive et forme normale/stratégique. Nous avons fait ensuite un bilan des différents types des jeux en fonction de leurs descriptions ou de leurs approches de résolution. Ainsi nous avons distingués les jeux coopératifs et non-coopératifs selon la possibilité de coopération et formation des coalitions entre les joueurs. Un jeu peut être simultané ou séquentiel, fini ou infini respectivement selon l'ordre de prise de décision dans le jeu et l'espace des stratégies de choix de chaque joueur. Un jeu peut être à somme nulle ou non nulle selon la structure des gains, comme il peut être joué une seule fois ou répété plusieurs fois. Les jeux peuvent être classés sur la base de l'information dont disposent les joueurs (jeux à information parfaite ou imparfaite, à information complète ou incomplète).

Le concept d'équilibre de Nash pour un jeu est défini comme étant une situation dans laquelle aucun des joueurs n'a d'incitation à modifier son comportement et changer sa stratégie unilatéralement. En cas de présence de plusieurs équilibres, nous avons expliqué comment éliminer les stratégies dominées et réduire le nombre d'équilibres. Dans le cas des jeux qui ne comportent pas d'équilibres en stratégies pures, nous avons fait appel aux stratégies mixtes (des stratégies pures probabilisées).

Finalement, nous avons discuté du concept de rationalité en abordant la rationalité limitée des joueurs et en soulignant que les joueurs sont moins égoïstes dans la réalité que ne le laissait supposer la théorie des jeux et qu'ils étaient très sensibles à la notion d'équité.

# Chapitre II

## Apprentissage de Prix-QoS à l'Équilibre par un Algorithme Génétique

### 1. Introduction

Récemment, la théorie des jeux a été largement utilisée pour analyser le comportement égoïste des clients et des fournisseurs de services (SPs) dans les systèmes de télécommunication. Plusieurs études ont montré que le comportement égoïste des clients conduit à une situation typique de dilemme du prisonnier qui provoque un effondrement du réseau. Dans la littérature, un seul paramètre de décision (par exemple le prix) est couramment utilisé pour calculer un équilibre. Cependant, il est nécessaire d'inclure plus d'un paramètre dans le modèle pour prendre en compte la qualité du service (QoS).

La concurrence en matière de prix et de QoS entre les SPs implique la formation d'un jeu non coopératif. Nous considérons un jeu de plusieurs SPs, dans lequel chaque joueur essaie de maximiser ses propres revenus. L'ensemble des SPs du système n'aurait aucun intérêt à dévier du point d'équilibre de Nash. Dans ce travail, nous présentons un modèle pour calculer un équilibre de Nash bi-critère (ici, le prix du service et la QoS) pour plusieurs SPs. Ensuite, nous analyserons les interactions entre les différents SPs qui cherchent à attirer plus de clients et maximiser leurs profits respectifs. Notre modélisation est principalement inspirée de [11, 45], où les auteurs ont construit un modèle de Markov qui formalise le comportement des clients en fonction des actions stratégiques des SPs. L'objectif est de formuler un jeu non-coopératif pour le problème des prix en introduisant la QoS comme paramètre de décision supplémentaire. Nous basons notre étude sur les concepts de demande aux services d'un SP donné. Cette demande exprimée par une fonction linéaire qui dépend des vecteurs des prix et des QoS, est une fonction couramment utilisée dans la recherche liée aux réseaux compétitifs et aux modèles d'équilibre [12, 14], pour calculer la réputation d'un fournisseur de service dans le marché.

La rationalité est l'hypothèse la plus fondamentale dans les travaux de la théorie des

jeux ; chaque joueur cherche à maximiser sa propre fonction d'utilité [32]. Dans ce contexte, les joueurs ont toutes les informations concernant le jeu, c'est-à-dire qu'il y a une information complète. Ainsi, nous considérons que tous les joueurs sont rationnels et intelligents, c'est-à-dire que chaque joueur agit de manière à maximiser son profit ou son utilité et peut en déduire ce que son adversaire fera en agissant rationnellement. En effet, les humains utilisent un calcul propositionnel dans le raisonnement. Le calcul propositionnel concerne les fonctions de vérité des propositions, qui sont des vérités logiques (affirmations qui sont vraies en vertu de leur forme). Pour cette raison, l'hypothèse d'un comportement rationnel des acteurs dans les systèmes de télécommunications est plus justifiée, car les joueurs sont généralement des appareils programmés pour fonctionner de certaines manières. Cependant, il existe des études antérieures qui ont montré que les humains n'agissent pas toujours rationnellement [46, 47].

L'application de la théorie des jeux dans les problèmes de télécommunications est un domaine de recherche actif. Plusieurs modèles ont été développés et étudiés au cours des dernières décennies [10, 12, 15, 17, 28, 31]. Ces modèles se sont intéressés à la question des prix, ils ont proposé des formulations de jeux non-coopératifs pour analyser les comportements des joueurs qui décident d'une façon égoïste de leurs stratégies pour maximiser leurs profits respectifs. D'autres travaux considèrent le critère du prix comme un paramètre implicite, qui est déterminé en fonction du degré de saturation du réseau. Typiquement dans ces approches, le prix est un prix fictif. Pour plus de détails sur ces approches, voir [48, 49, 50]. Néanmoins, le prix de l'anarchie a été étudié dans un grand nombre de jeux, par exemple dans des domaines tels que les réseaux sans fil ad hoc [51, 52], le routage et la congestion [53, 54], la création de réseaux [55], ou encore l'emplacement d'installations [56].

Dans notre modèle, nous ne prenons pas en compte la topologie du réseau, mais plutôt le service efficace proposé par chaque SP en tant qu'entité unique. En d'autres termes, le prix et la QoS proposés par un SP ne dépendront pas ni de la source, de la destination, ou de la distance, etc.. qui sous-tendent la demande de chaque utilisateur. Après la preuve de l'existence de l'équilibre de Nash, nous proposons un algorithme génétique qui permet l'apprentissage de cet équilibre pour les stratégies de prix et de QoS décidées par les opérateurs.

## 2. Modélisation de Problème

Dans ce travail, nous formulons l'interaction entre les SPs en tant que jeu non coopératif. Chaque SP choisit la QoS à garantir (cela dépend de la quantité de bande passante demandée) et le prix correspondant.

Nous considérons un système avec  $N$  fournisseurs de services. Soient  $p_i$  et  $q_i$ , respectivement, la politique tarifaire/prix et la QoS garantie par SP  $i$ . Chaque client cherche à s'abonner à l'opérateur qui lui permet une QoS suffisante pour satisfaire ses besoins, avec

un prix convenable. Nous considérons que les comportements des clients ont été manipulés par une fonction simple appelée fonction de demande, voir équation (II.1). Cette dernière dépend des stratégies de prix et de QoS de tous les SPs. Du point de vue d'un opérateur, la question est de définir la meilleure stratégie de prix et la meilleure QoS (quantité de bande passante à demander auprès du propriétaire du réseau). Les opérateurs sont censés connaître l'effet de leur politique sur la politique d'abonnement des clients. Alors que du point de vue des clients, la question est de trouver l'opérateur qui offre les meilleures conditions de compromis prix-QoS.

## 2.1. Modélisation de la Demande

Pour simplifier, nous considérons que la fonction de demande  $D_i$  pour les services du SP  $i$  est linéaire par rapport au prix fixé  $p_i$  et à la QoS promise  $q_i$  [2]. Cette fonction de demande dépend également des prix  $\mathbf{p}_{-i}$  et des QoSs  $\mathbf{q}_{-i}$  fixés par les concurrents. A savoir, la fonction de la demande du SP- $i$  dépend de  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_N]$  et  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_N]$ . Éventuellement,  $D_i$  est décroissante par rapport à  $p_i$  et croissante par rapport à  $p_j$ ,  $j \neq i$ . Alors que cette fonction de demande est croissante par rapport à  $q_i$  et décroissante par rapport à  $q_j$ ,  $j \neq i$ . Alors, la fonction de la demande aux services du SP  $i$  peut être écrite sous la forme :

$$D_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = D_i^0 - \alpha_i^i p_i + \beta_i^i q_i + \sum_{j, j \neq i} [\alpha_i^j p_j - \beta_i^j q_j], \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{II.1})$$

où  $D_i^0$  est une constante positive utilisée pour assurer des demandes non négatives dans le domaine réalisable. Alors que  $\alpha_i^j$  et  $\beta_i^j$  sont des constantes positives représentant respectivement la sensibilité du SP- $i$  au prix et à la QoS du SP- $j$ .

## 2.2. Modélisation de l'Utilité

Le revenu total du SP  $i$  est  $D_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})p_i$ . Nous supposons que nous avons un seul propriétaire de réseau, ce dernier charge chaque SP  $i$  d'un coût  $\vartheta_i$  par unité de bande passante demandée. Afin d'assurer la fidélité des clients, la quantité de bande passante  $\mu_i$  requise par SP  $i$  devrait dépendre de  $D_i(\cdot)$  et de la QoS  $q_i$  qu'il souhaite offrir à ses clients. Par conséquent, le bénéfice net de SP  $i$  est simplement la différence entre le revenu total et les frais payés au propriétaire du réseau :

$$U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = D_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})p_i - F_i(q_i, D_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

où  $F_i(q_i, D_i)$  sont les frais payés par SP  $i$  (investissement du SP  $i$ ) tels que :

$$F_i = \vartheta_i \mu_i(q_i, D_i)$$

où  $\mu_i$  est la quantité de bande passante requise par SP  $i$  et  $\vartheta_i$  est le coût unitaire de

la bande passante demandée. Nous supposons que la QoS correspond au délai prévu, nous considérons également le délai de Kleinrock qui est un retard commun utilisé dans les jeux de réseautage, donc :

$$q_i = \frac{1}{\sqrt{\text{Delay}_i}} = \sqrt{\mu_i - D_i}$$

ceci veut dire que :

$$\mu_i = q_i^2 + D_i$$

Finalement, la fonction d'utilité du SP  $i$  est donnée par la formule suivante :

$$U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = D_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (p_i - \vartheta_i) - \vartheta_i q_i^2, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{II.2})$$

### 3. Formulation du Jeu Non-coopératif

Soit  $\mathbf{G} = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_i\}, \{U_i(\cdot)\}]$  le jeu non coopératif du prix et de la QoS (JNPQ), avec  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  est l'ensemble d'indices identifiant les SPs,  $P_i$  est l'ensemble des stratégies de prix de SP  $i$ ,  $Q_i$  est l'ensemble des stratégies de QoS de SP  $i$ , et  $U_i(\cdot)$  est la fonction d'utilité. Chaque SP  $i$  sélectionne un prix  $p_i \in P_i$  et une QoS  $q_i \in Q_i$ . Soient le vecteur prix  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)^T \in P^N = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$ , le vecteur QoS  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T \in Q^N = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_N$  (où T représente l'opérateur de transposition). L'utilité de SP  $i$  lorsqu'il décide la stratégie du prix  $p_i$  pour attribuer la QoS  $q_i$  est donnée dans l'équation (II.2). Nous supposons que les espaces de stratégies  $P_i$  et  $Q_i$  de chaque SP sont des ensembles compacts et convexes avec des contraintes maximales et minimales. Pour tout utilisateur  $i$ , nous considérons les intervalles fermés  $P_i = [p_{min}, p_{max}]$  et  $Q_i = [q_{min}, q_{max}]$  comme espaces de stratégies.

Dans le but de maximiser leurs utilités, chaque SP  $i$  décide un prix  $p_i$  et une QoS  $q_i$ . Formellement, le problème JNPQ peut être exprimé comme suit :

$$\max_{p_i \in P_i, q_i \in Q_i} U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{II.3})$$

#### 3.1. Équilibre de Nash

Prenant en compte la rationalité des fournisseurs de services, le concept d'équilibre de Nash est la solution conceptuelle naturelle du jeu *JNPQ*. Nous allons d'abord étudier la solution d'équilibre de Nash pour le jeu induit tel que défini dans la section précédente. Nous montrons ensuite que la solution d'équilibre de Nash existe et est unique en utilisant la théorie des jeux concaves [57]. Nous rappelons qu'un jeu non-coopératif  $\mathbf{G}$  est appelé concave si les fonctions d'utilité de tous les joueurs sont strictement concaves par rapport à leurs stratégies correspondantes.

Un équilibre de Nash existe dans un jeu concave si l'espace conjoint de stratégies est compact et convexe, et la fonction d'utilité qu'un joueur cherche à maximiser est concave dans sa propre stratégie et continue à chaque point de l'espace des stratégies. Formellement, si la somme pondérée des fonctions d'utilité avec des poids non négatifs est diagonalement strictement concave ( voir équation II.4 ), cela implique que le point d'équilibre de Nash est unique. La notion de concavité diagonale stricte signifie qu'un utilisateur a plus de contrôle sur sa fonction d'utilité que les autres utilisateurs. Cela est prouvé en utilisant le pseudo-gradient de la somme pondérée des fonctions d'utilité [57].

$$\varphi = \sum_{i=1} x_i U_i, \quad x_i > 0 \quad \forall i. \quad (\text{II.4})$$

### 3.1.1. Jeu à Prix Fixe

En considérant une politique de prix fixe, un équilibre de Nash en matière de QoS est formellement défini comme suit :

**Définition II.1.** *Un vecteur QoS  $\mathbf{q}^* = (q_1^*, \dots, q_N^*)$  est un équilibre de Nash du jeu JNPQ :  $\mathbf{G} = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_i\}, \{U_i(\cdot)\}]$  si pour chaque  $i \in \mathcal{N}$ ,  $U_i(q_i^*, \mathbf{q}_{-i}^*) \geq U_i(q'_i, \mathbf{q}_{-i}^*)$  pour tout  $q'_i \in Q_i$ .*

**Théorème II.1.** *Un équilibre de Nash en matière de QoS pour le jeu  $\mathbf{G} = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_i\}, \{U_i(\cdot)\}]$  existe et il est unique.*

*Démonstration.* Pour démontrer l'existence, nous notons que l'espace de stratégies  $Q_i$  de chaque SP est défini par toutes les QoSs dans l'intervalle fermé borné par la QoS minimale et la QoS maximale. Ainsi, l'espace conjoint de stratégies QoS  $Q$  est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . En outre, les fonctions d'utilité sont concaves par rapport aux QoSs, comme le montre le test de la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i^2} = -2\vartheta_i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (\text{II.5})$$

ce qui assure l'existence d'un équilibre de Nash.

Pour démontrer l'unicité, nous suivons [57], et définissons la somme pondérée des fonctions d'utilité des joueurs :

$$\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i U_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}), \quad (\text{II.6})$$

Le pseudo-gradient de l'équation (II.6) est donné par :

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = [x_1 \nabla U_1(q_1, \mathbf{q}_{-1}), \dots, x_N \nabla U_N(q_N, \mathbf{q}_{-N})]^T \quad (\text{II.7})$$

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  du pseudo-gradient (par rapport à  $\mathbf{q}$ ) est :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_1^2} & x_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & x_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_1 \partial q_N} \\ x_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_2 \partial q_1} & x_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_2^2} & \cdots & x_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_2 \partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N \frac{\partial^2 U_N}{\partial q_N \partial q_1} & x_N \frac{\partial^2 U_N}{\partial q_N \partial q_2} & \cdots & x_N \frac{\partial^2 U_N}{\partial q_N^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \vartheta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2x_2 \vartheta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2x_N \vartheta_N \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\mathbf{J}$  est une matrice diagonale avec éléments diagonaux négatifs. Cela implique que  $\mathbf{J}$  est défini négatif. Désormais,  $[\mathbf{J} + \mathbf{J}^T]$  est aussi défini négatif, et selon le théorème (6) dans [57], la somme pondérée des fonctions d'utilité  $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  est diagonalement strictement concave. Ainsi le point d'équilibre de Nash du jeu à prix fixe défini dans l'équation II.8 est unique.

$$q_i^* = \arg \max_{q_i \in Q_i} U_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{II.8})$$

□

### 3.1.2. Jeu à QoS Fixe

En fixant la QoS, un équilibre de Nash en matière du prix est formellement défini comme suit :

**Définition II.2.** *Le vecteur prix  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_N^*)$  est un équilibre de Nash du jeu JNPQ :  $\mathbf{G} = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_i\}, \{U_i(\cdot)\}]$  si pour chaque  $i \in \mathcal{N}$ ,  $U_i(p_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq U_i(p_i', \mathbf{p}_{-i}^*)$  pour tout  $p_i' \in P_i$ .*

**Théorème II.2.** *Un équilibre de Nash en matière du prix pour le jeu  $\mathbf{G} = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_i\}, \{U_i(\cdot)\}]$  existe et il est unique.*

*Démonstration.* Pour démontrer l'existence, nous notons que l'espace de stratégies du prix  $P_i$  de chaque SP est défini par tous les prix dans l'intervalle fermé limité par le prix minimal et le prix maximal. Ainsi, l'espace conjoint de stratégies des prix  $P$  est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . En outre, les fonctions d'utilité sont concaves par rapport aux prix, comme le montre le test de la dérivée seconde :



$$\frac{\partial^2 U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i^2} = -2\alpha_i^i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (\text{II.9})$$

ce qui assure l'existence d'un équilibre de Nash.

La somme pondérée des fonctions d'utilité des joueurs est donnée dans l'équation (II.10).

$$\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i U_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}), \quad (\text{II.10})$$

Le pseudo-gradient de l'équation (II.10) est donné par :

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = [x_1 \nabla U_1(p_1, \mathbf{p}_{-1}), \dots, x_N \nabla U_N(p_N, \mathbf{p}_{-N})]^T. \quad (\text{II.11})$$

Afin de montrer que  $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  est diagonalement strictement concave dans ce cas, nous utilisons le lemme II.1 démontré dans [58].

**Lemme II.1.** *Si chaque  $U_i(\mathbf{p})$  est une fonction strictement concave dans  $p_i$ , chaque  $U_i(\mathbf{p})$  est convexe dans  $p_{-i}$  et il y en a des  $\mathbf{x} > 0$  tels que  $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  est concave dans  $\mathbf{p}$ , alors  $[\mathbf{J}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{p}, \mathbf{x})]$  est défini négatif, où  $\mathbf{J}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  est le Jacobien de  $g(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ .*

A partir de l'équation (II.9), nous remarquons que  $U_i(\mathbf{p})$  est strictement concave par rapport à  $p_i$ . De plus, on a :

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial p_j^2} = 0, \quad \forall i \neq j,$$

Ce qui implique que  $U_i(\mathbf{p})$  est aussi convexe par rapport à  $p_{-i}$ . Nous avons également :

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i^2} = x_i \frac{\partial^2 U_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i}^N x_j \frac{\partial^2 U_j(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = -2x_i \alpha_i^i < 0, \quad \forall i,$$

Alors  $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  est concave par rapport  $p_i$ . A partir du Lemme II.1 nous avons  $[\mathbf{J}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{p}, \mathbf{x})]$  est défini négatif. Ainsi, la somme pondérée des fonctions d'utilité  $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  est diagonalement strictement concave. Le point d'équilibre de Nash en matière de prix est alors unique et est donné par :

$$p_i^* = \arg \max_{p_i \in P_i} U_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{II.12})$$

□

### 3.1.3. Jeu de Prix-QoS

Les fonctions d'utilité  $U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ,  $\forall i \in \mathcal{N}$  sont concaves respectivement par rapport à  $q_i$  et  $p_i$ . Donc, pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , les conditions de QoS et de prix qui maximisent l'utilité donnée dans l'équation (II.2) sont respectivement :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Ainsi, le calcul de l'équilibre de Nash peut être effectué en résolvant ce dernier système.

## 3.2. Bien-être Social et Prix de l'Anarchie

Le concept de bien-être social [59] ou surplus total [60] est défini comme la somme des utilités de tous les agents dans le système. Il est bien connu dans la théorie des jeux que l'égoïsme des agents, tel que dans un équilibre de Nash, ne conduit pas en général à une situation socialement efficace. En tant que mesure de perte d'efficacité due à la divergence des intérêts des opérateurs, nous utilisons le prix de l'anarchie (PoA) [54].

Le PoA est une mesure de perte d'efficacité due à l'égoïsme des acteurs. Cette perte a été définie comme étant le rapport le plus défavorable comparant la mesure d'efficacité globale choisie à l'issue du jeu non coopératif joué par les acteurs, à la valeur optimale de cette mesure d'efficacité [54]. Un PoA proche de 1 indique que l'équilibre est approximativement socialement optimal, et donc les conséquences du comportement égoïste sont relativement bénignes.

Le concept de prix de l'anarchie a d'abord été utilisé par Koutsoupias et Papadimitriou [54], mais l'idée de mesurer l'inefficacité de l'équilibre est plus ancienne. Le concept sous sa forme actuelle a été conçu pour être l'analogue du « rapport d'approximation » dans les algorithmes d'approximation ou le « rapport de compétitivité » dans les algorithmes en ligne.

Nous mesurons la perte d'efficacité due à l'égoïsme des acteurs par le quotient entre le bien-être social obtenu à l'équilibre de Nash et la valeur maximale du bien-être social [61] :

$$PoA = \frac{\min_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} W_{NE}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\max_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} W(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \quad (\text{II.14})$$

où  $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  est la fonction de bien-être social, et  $W_{NE}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  est la somme des utilités de tous les acteurs à la situation d'équilibre de Nash.

## 4. Apprentissage par Algorithme Génétique

Les Algorithmes Génétiques (AG), élaborés initialement par Holland [62] et développés par Goldberg [63], sont basés sur le mécanisme de l'évolution naturelle et de la génétique naturelle. Ces algorithmes diffèrent des algorithmes d'inversion habituels car ils ne nécessitent pas des valeurs de départ. Les AGs utilisent un schéma de survie du plus apte avec une recherche organisée aléatoire pour trouver la meilleure solution à un problème. Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver l'optimum d'une fonction parmi un nombre fini de choix, souvent très grand.

Les applications pratiques de ces algorithmes sont nombreuses, que ce soit dans le domaine de la production industrielle, du transport ou de l'économie - partout où il est nécessaire de minimiser ou maximiser les fonctions numériques dans des systèmes où un grand nombre de paramètres sont simultanément utilisés.

L'algorithme (1) représente l'algorithme génétique utilisé pour l'apprentissage de l'équilibre de Nash du problème étudié dans les sections précédentes de ce chapitre.

---

**Algorithme 1** Algorithme génétique pour l'apprentissage de l'équilibre de Nash de la concurrence Prix-QoS.

---

- 1- Initialiser aléatoirement le vecteur prix  $\mathbf{p}$  et le vecteur QoS  $\mathbf{q}$  ;
  - 2- Pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , Pour maximiser la fonction d'utilité du SP  $i$ , faire :
    - a) Créer une population initiale ;
    - b) Répéter :
      - i) Sélection ;
      - ii) Croisement ;
      - iii) Mutation.
    - c) Tant que la condition d'arrêt n'est pas atteinte.
  - 3- Jusqu'à stabilisation des vecteurs prix et QoS.
- 

Dans la suite, nous décrivons chaque étape de l'algorithme (1).

### 4.1. Codage des Individus et Population Initiale

Le codage ou représentation chromosomique est le moyen d'encoder les individus ou solutions d'un problème. Le choix d'un codage doit prendre en compte la complexité du processus de codage / décodage qui peut ralentir les calculs et influencer considérablement la convergence de GA. Historiquement, le codage utilisé par les GAs était sous la forme de chaînes de bits contenant toutes les informations nécessaires pour décrire un point dans l'espace d'état. Cependant, ce type de codage n'est pas toujours bon [64]. Les GAs utilisant des vecteurs réels évitent ces problèmes en gardant les variables du problème dans le codage des éléments de la population sans passer par le codage binaire intermédiaire [64].

Notre fonction d'utilité est donnée dans l'équation (II.2). Pour le problème d'équilibre de Nash, nous cherchons le couple  $(p_i, q_i)$  qui maximise la fonction d'utilité d'un SP  $i$  donné, sachant a priori les autres couples  $(p_j, q_j), j \neq i$  pour ses concurrents. Chaque individu est représenté par un couple  $(p_i, q_i)$ , tel que  $p_i \in [\underline{p}, \bar{p}]$  et  $q_i \in [\underline{q}, \bar{q}]$ . Pour construire une population initiale, nous générons aléatoirement un nombre  $Np$  d'individus appartenant à l'espace d'état  $[\underline{p}, \bar{p}] \times [\underline{q}, \bar{q}]$ .

## 4.2. Sélection

Cette opération est basée sur le principe d'adaptation de chaque individu de la population à son environnement, selon la théorie de la sélection naturelle introduite par Charles Darwin. Ainsi, seuls les individus les plus aptes à répondre à certains critères seront sélectionnés pour survivre et se reproduire. La fonction d'évaluation de l'adéquation des individus évalue chaque chromosome de la population, et seuls ceux dont la qualité est suffisante seront conservés d'une génération à l'autre. D'autres individus prendront la place des plus mauvais.

La sélection de chaque individu  $k$  appartenant à la population dépend de sa probabilité  $Ps_k$  appelée probabilité de sélection. Dans le cas d'un problème de maximisation (trouver un maximum de la fonction d'adaptation, ce qui est le cas dans ce travail),  $Ps_k$  est donné par la formule :

$$Ps_k = \frac{U_i(p_k, q_k)}{\sum_{j=1}^{Np} U_i(p_j, q_j)} \quad (\text{II.15})$$

## 4.3. Croisement

Le croisement consiste à combiner deux individus (appelés parents) pour avoir deux autres individus (appelés enfants). L'opérateur de croisement n'agit pas sur toutes les paires d'individus de la population. Un individu a une chance de participer à un croisement, notée  $Pc$  (souvent prise entre 0,8 et 1). A ce niveau, nous utilisons un croisement arithmétique [65].

Soient  $C1$  et  $C2$  deux chromosomes de la population actuelle. Nous obtenons les deux descendants de  $C1$  et  $C2$  par la formule suivante :

$$\begin{cases} C'1 = r * C1 + (1 - r) * C2 \\ C'2 = (1 - r) * C1 + r * C2 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

avec  $r$  un nombre aléatoire généré entre 0 et 1.

### Exemple :

- Avant croisement

$$C1 = [150.230 \quad 1.525]$$

$$C2 = [210.120 \quad 3.015]$$

- Après croisement (pour  $r = 0.3$ )

$$C'1 = r * C1 + (1 - r) * C2 = [192.153 \quad 2.568]$$

$$C'2 = (1 - r) * C1 + r * C2 = [198.197 \quad 1.972]$$

#### 4.4. Mutation

Une mutation est une modification aléatoire d'un paramètre (gène) utilisée pour assurer la variabilité dans le processus d'évolution. Une probabilité de mutation  $Pm$  est définie, généralement choisie entre 0,0001 et 0,1. Nous utilisons ici une mutation non uniforme [66]. Après un retournement d'une pièce non biaisée, l'un des paramètres est modifié comme dans la formule (II.17).

$$C_k = \begin{cases} C_k + \delta(UB - C_k) \\ C_k - \delta(C_k - LB) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

où  $UB$  et  $LB$  sont respectivement la borne supérieure et inférieure du paramètre muté. La fonction  $\delta$  est définie dans l'équation (II.18).

$$\delta(y) = y[r(1 - t/T)^B] \quad (\text{II.18})$$

où  $r$  est un nombre aléatoire pris entre 0 et 1,  $t$  est la génération actuelle,  $T$  est la génération maximale, et  $B$  est un paramètre qui détermine le degré de dépendance vis-à-vis de la génération actuelle (généralement entre 1 et 5). A partir de l'équation (II.18), on peut déduire que l'amplitude de la mutation diminue à mesure que le nombre de générations augmente. Ce type de mutation est appelé non uniforme.

## 5. Résultats et Discussions

Pour clarifier et montrer comment tirer profit de notre étude théorique, nous suggérons d'étudier numériquement le jeu de la part de marché en considérant l'algorithme génétique, les expressions de la demande ainsi que les fonctions d'utilité décrits dans les sections précédentes. Par conséquent, nous considérons un système avec trois SPs qui cherchent à maximiser leurs revenus respectifs. Le tableau II.1 représente les valeurs des paramètres du système considérées dans cette étude numérique.

TABEAU II.1 – Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique

$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$	$\alpha_j^i, i \neq j$	$\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$	$\beta_j^i, i \neq j$
0.7	0.15	0.7	0.15
$D_0^1$	$D_0^2$	$D_0^3$	$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$
350	300	250	20
$\underline{p}_1 = \underline{p}_2 = \underline{p}_3$	$\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$	$\underline{q}_1 = \underline{q}_2 = \underline{q}_3$	$\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3$
100	500	0	10

### 5.1. Convergence à l'Équilibre de Nash

Figure. II.1 et Figure. II.2 représentent respectivement les courbes de convergence à l'équilibre de Nash du Prix et à l'équilibre de Nash de QoS. Il est clair que l'algorithme génétique converge vers l'unique équilibre de Nash du prix et de la QoS. On remarque également que la vitesse de convergence est relativement élevée (environ 7 itérations suffisent pour converger vers l'équilibre prix et QoS).

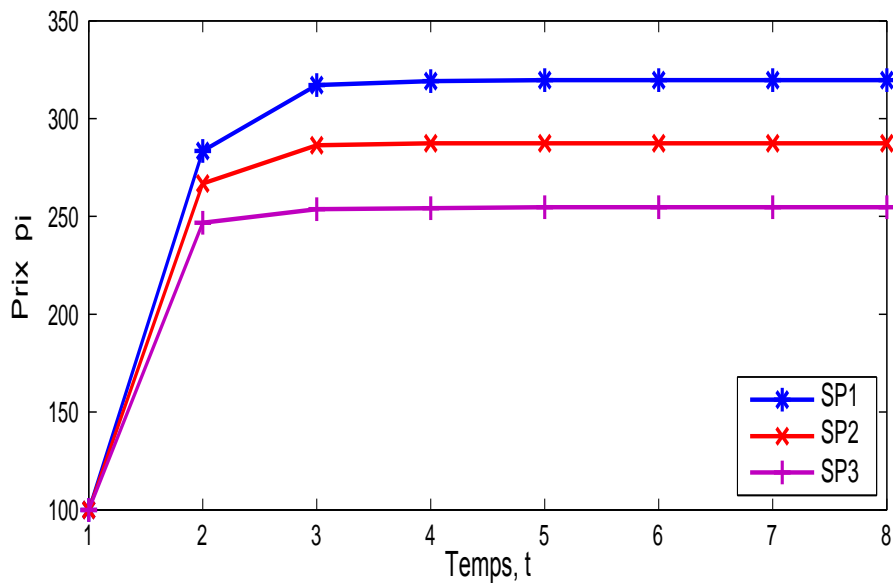


FIGURE II.1 – Jeu du Prix : Convergence à l'équilibre de Nash des prix.

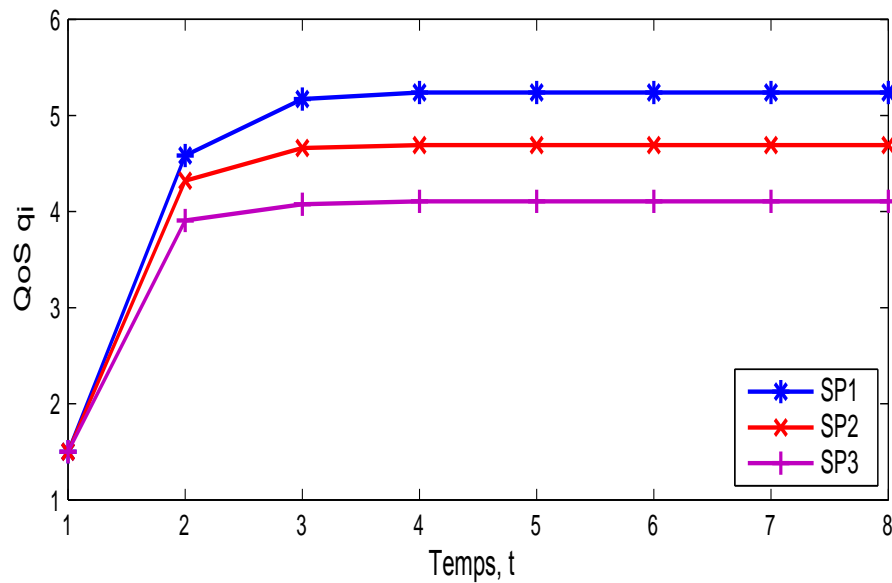


FIGURE II.2 – Jeu de QoS : Convergence à l'équilibre de Nash des QoSs.

Nous montrons dans les figures II.3 et II.4, respectivement, l'influence du coût unitaire de la bande passante ( $\vartheta_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) sur le prix et la QoS à l'équilibre de Nash, pour les trois SPs considérés dans cette étude. D'une part, nous notons que le prix à l'équilibre pour chacun des SPs augmente avec l'augmentation du coût de la bande passante. D'autre part, nous notons que la QoS à l'équilibre de tous les SPs diminue avec l'augmentation du coût de la bande passante. Lorsque le coût de la bande passante décidé par le propriétaire du réseau est moins élevé, les SPs investissent pour plus de bande passante, afin d'offrir une meilleure QoS et un prix attractif.

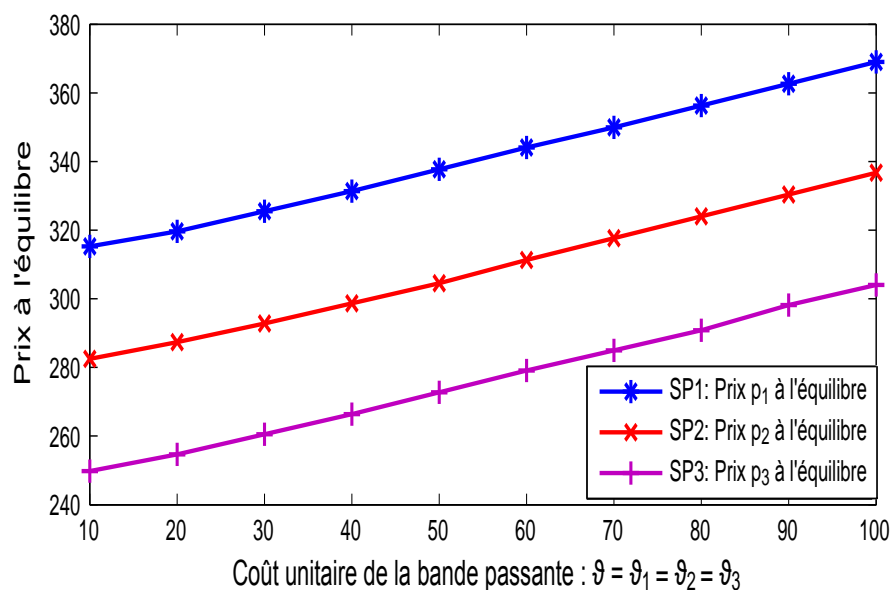


FIGURE II.3 – Équilibre des Prix en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée  $\vartheta_i$ .

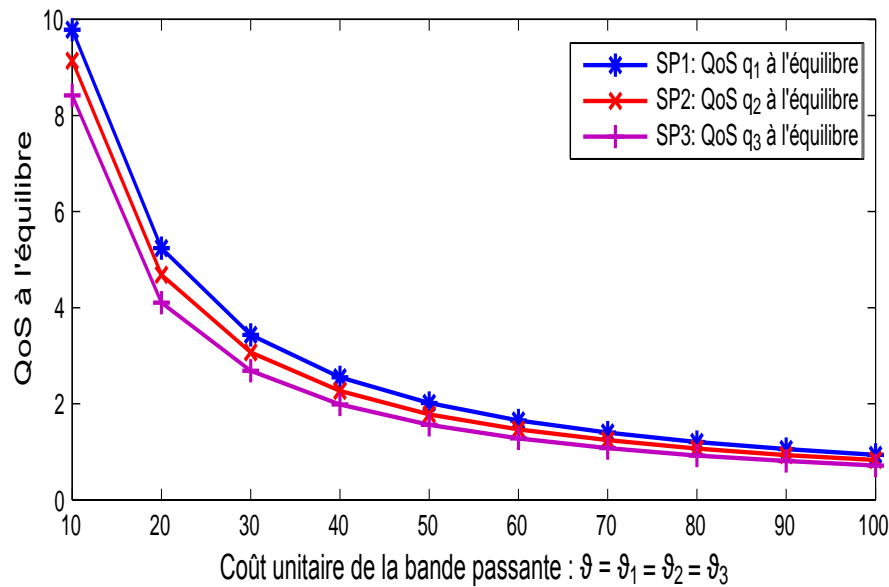


FIGURE II.4 – Équilibre des QoS en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée  $\vartheta_i$ .

Dans ce qui suit, nous étudions l'impact des paramètres du système sur son efficacité en utilisant la mesure de prix de l'anarchie.

## 5.2. Influence du Coût de la Bande Passante

Figure II.5 montre la courbe de variation du PoA en fonction du coût de la bande passante des fournisseurs  $\vartheta_i$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$ . Une caractéristique particulière est que l'équilibre de Nash fonctionne bien et la perte d'efficacité n'est que de 8%. Ce résultat indique que l'équilibre de Nash de ce jeu est équitable et socialement efficace. Désormais, les joueurs égoïstes n'auraient pas besoin de l'aide d'un régulateur (qui recommande aux joueurs le meilleur profil de stratégies pour atteindre leurs meilleurs résultats respectifs) pour être attirés par le bien-être social optimal. Cependant, le propriétaire du réseau peut utiliser la valeur du coût unitaire de bande passante pour contrôler l'égoïsme / l'agressivité des opérateurs, ce qui améliorera la performance globale du réseau.



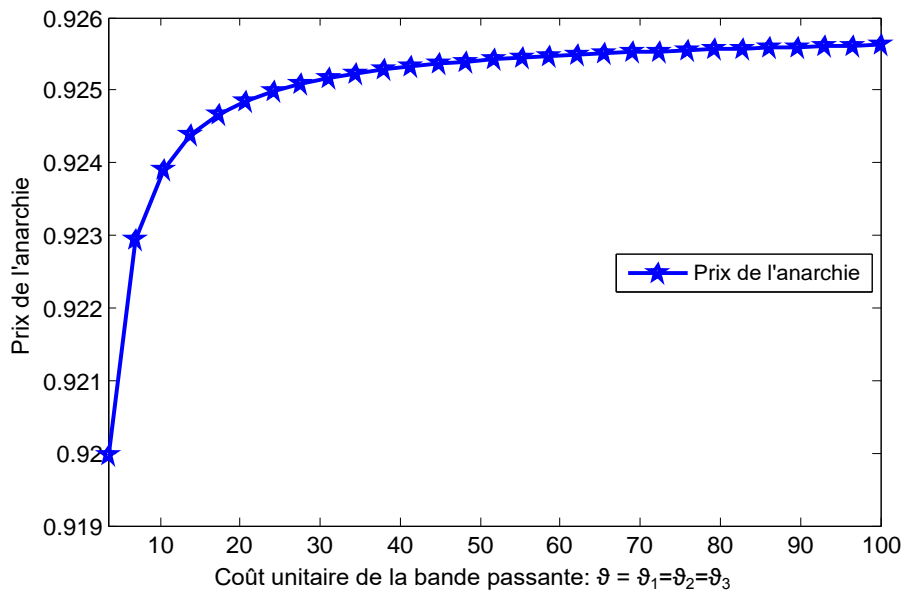


FIGURE II.5 – Prix de l’anarchie en fonction du coût unitaire de la bande passante demandée  $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$ .

### 5.3. Influence de la Sensibilité des SPs à leurs Prix

Figure II.6 montre la courbe de variation du prix de l’anarchie en fonction de  $\alpha$  qui représente la sensibilité du SP  $i$  à son prix  $p_i$ . Dans cette figure, nous remarquons d’abord que le prix de l’anarchie augmente quand  $\alpha$  augmente, ce qui trouve l’intuition simple que l’augmentation de la sensibilité des SPs à leurs prix donne plus de liberté aux SPs pour optimiser l’équilibre de Nash. D’autre part, lorsque  $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3 = 1$ , autrement dit la sensibilité d’un SP aux prix de ses concurrents est nulle ( $\alpha_1^2 = \alpha_1^3 = \alpha_2^1 = \alpha_2^3 = \alpha_3^1 = \alpha_3^2 = 0$ ), le prix de l’anarchie converge vers 1 et donc l’équilibre est approximativement socialement optimal.

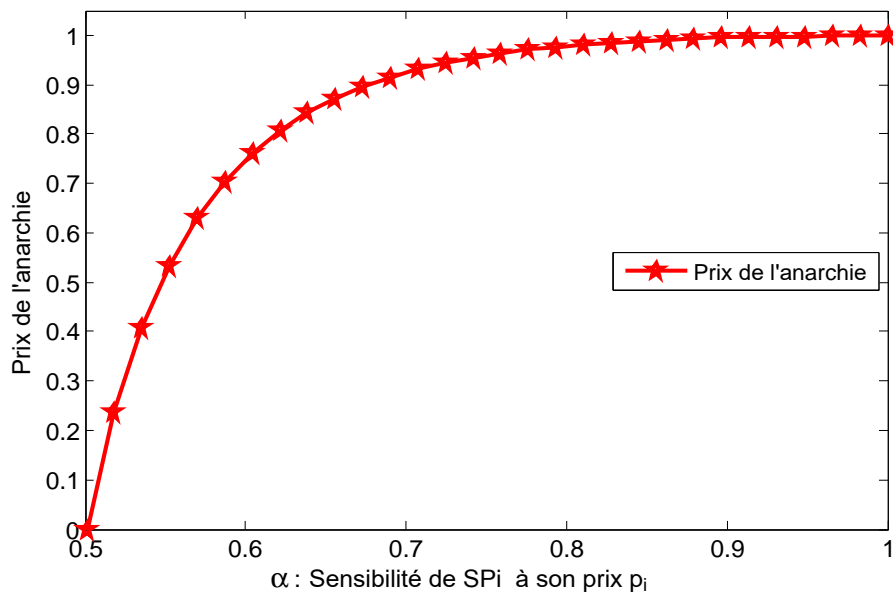


FIGURE II.6 – Prix de l’anarchie en fonction de  $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$  (Sensibilité de SP  $i$  à son prix  $p_i$ )

#### 5.4. Influence de la Sensibilité des SPs à leurs QoSs

Figure II.7 illustre les variations du PoA en fonction de  $\beta$ , qui est la sensibilité des SPs à leurs propres QoSs respectives. Nous remarquons d’abord que la perte d’efficacité est d’environ 8%. En outre, la courbe de PoA est concave, cela signifie qu’il existe  $\beta^* < 1$ , qui optimise l’équilibre ( $\beta^* = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = 0.76$ ,  $PoA^* = 0.925$ ). On remarque également que le prix de l’anarchie varie légèrement (variation de près de 0,001). Pour expliquer ce comportement, les figures II.8, II.9 et II.10 représentent respectivement les courbes du prix, de QoS et de l’utilité de chaque SP  $i$  à l’équilibre en fonction de  $\beta$ . Nous constatons que la variation induite du prix est beaucoup plus élevée par rapport à celle de QoS, et par conséquent,  $\beta$  (sensibilité des SPs à leurs propres QoSs) a un impact plus faible sur le système.

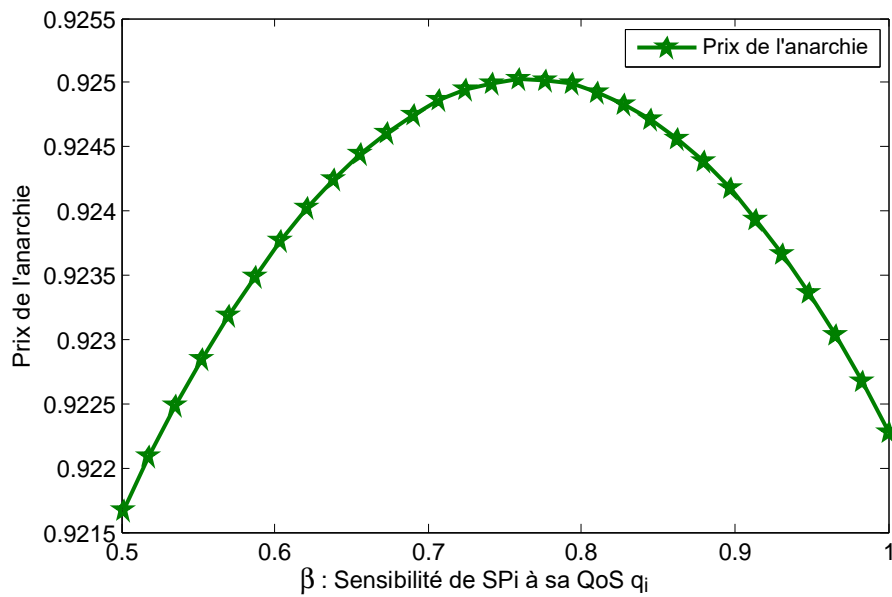


FIGURE II.7 – Prix de l’anarchie en fonction de  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$  (Sensibilité de SP  $i$  à sa QoS  $q_i$ )

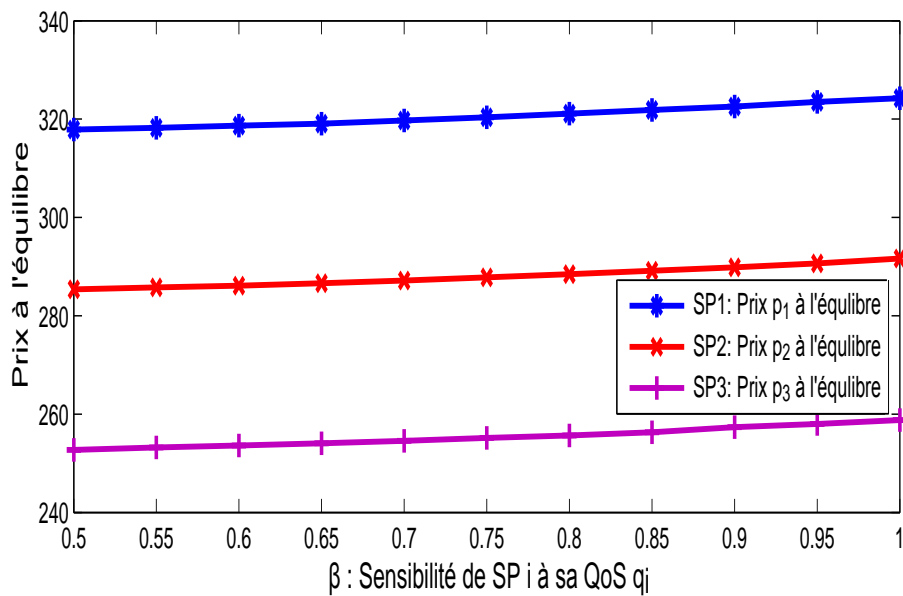


FIGURE II.8 – Équilibre du prix de SP  $i$  en fonction de  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$  (Sensibilité de SP  $i$  à sa QoS  $q_i$ )

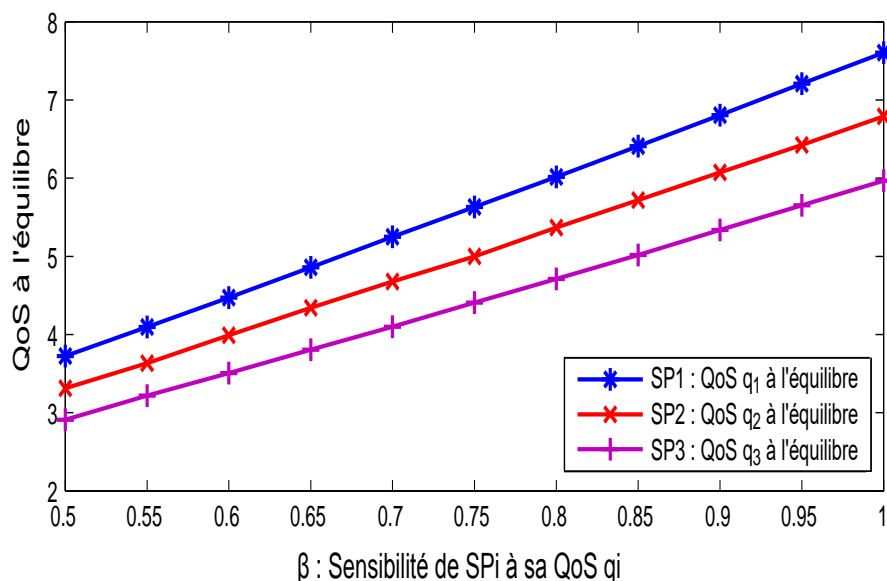


FIGURE II.9 – Équilibre de QoS de SP  $i$  en fonction de  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$  (Sensibilité de SP  $i$  à sa QoS  $q_i$ )

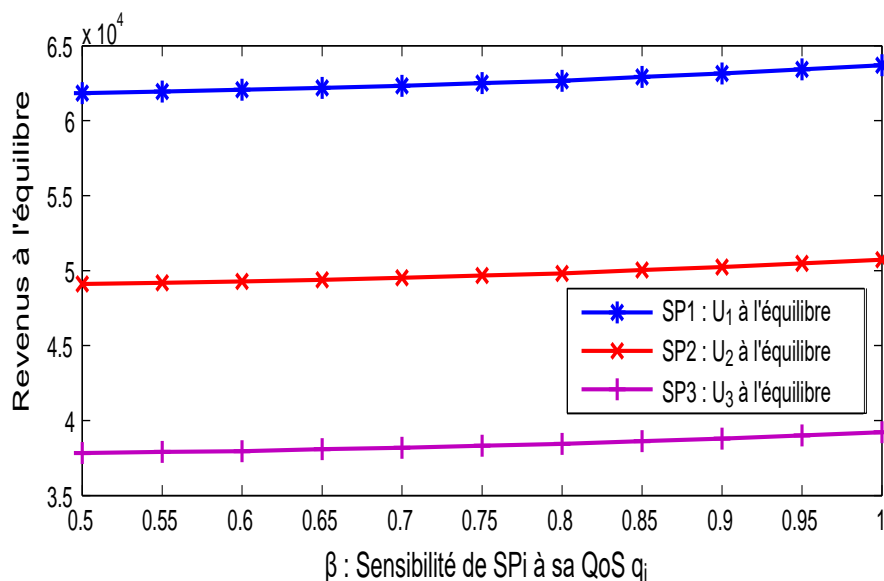


FIGURE II.10 – Équilibre des revenus de SP  $i$  en fonction de  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$  (Sensibilité de SP  $i$  à sa QoS  $q_i$ )

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons formulé une modélisation de la compétition entre différents SPs qui partagent le même marché des télécommunications. Pour cela, nous avons défini la fonction de la demande aux services des opérateurs en fonction des prix et des QoS fixés par chacun d'eux. Nous avons également défini la fonction d'utilité en mesurant le profit

réalisé par chaque SP et formulé ce problème sous forme d'un jeu non coopératif convergeant vers une stratégie d'équilibre de Nash. En mettant en œuvre un algorithme génétique pour apprendre cet équilibre, nous avons présenté les résultats obtenus et précisé la stratégie d'équilibre du système. L'algorithme proposé converge rapidement vers le prix et la QoS à l'équilibre à choisir par chaque opérateur.

Notre modèle est différent des approches précédentes car il implique deux paramètres dans une implémentation simple et avec une faible complexité. Pourtant, nous avons obtenu des résultats intéressants en étudiant l'influence des paramètres du système sur l'équilibre, tels que le coût de la bande passante, la sensibilité des opérateurs à leurs prix et à leurs QoS. Les résultats trouvés dans ce travail peuvent être étendus aux considérations générales du réseau, en particulier dans une perspective de non-neutralité ou de fonctions de demande non linéaires.

# Chapitre III

## Modélisation de la Migration des Clients dans un Marché Concurrentiel

### 1. Introduction

La libéralisation des services des télécommunications et la prolifération des fournisseurs de services (SPs) ont conduit à la pertinence du phénomène de migration des clients entre les opérateurs et à une concurrence très atroce dans le marché des télécommunications. La migration est particulièrement élevée dans les réseaux mobiles, où les taux de migration annuels atteignant 25% ne sont pas rares [67]. Les opérateurs cherchent à fidéliser leurs clients et à en attirer de nouveaux, en misant sur la prévention [68, 69] et sur des stratégies réactives [70, 71]. Parmi les facteurs qui influencent les décisions des clients à changer d'opérateur, le prix joue un rôle important [15, 26, 72].

Aujourd'hui, avec l'évolution des caractéristiques du trafic, les communications sont plus strictes dans leurs exigences de qualité (débit et temps) que les données brutes. D'où la nécessité de réexaminer les implications de l'architecture, des classes de services et des principes de conception sur les modèles de tarification des SPs [10]. Du point de vue des clients, plus la qualité de service (QoS) garantie augmente plus le SP devient attrayant. Alors que du point de vue des SPs, générer une telle QoS réduit leurs revenus nets. Il est donc clair qu'à la fois le prix et la QoS stimulent et influencent les décisions des clients pour migrer d'un opérateur à un autre. Les SPs cherchent à attirer de nouveaux clients, mais principalement à conserver ceux qui sont déjà abonnés à leurs services, car la perte d'un client implique la perte de revenus futurs associés à ce client (un jeu à somme nulle peut modéliser de telles situations).

Ce phénomène est largement modélisé dans plusieurs travaux en se basant sur la théorie des jeux non-coopératifs et en supposant un seul paramètre de décision tel que le prix [15, 25, 26, 27], la QoS en matière de délai [18] et la QoS en matière des probabilités de perte [29]. Cependant, et pour développer un modèle plus traduisant la réalité, d'autres travaux

intègrent conjointement le prix et une certaine mesure de la QoS [10, 12]. Plus de détails sur les techniques du jeu compétitif et leurs applications dans les télécommunications sont donnés dans [16, 30].

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous formulons un modèle de comportement des clients en utilisant une chaîne de Markov et une description des probabilités de migration. La section 3 présente la description du jeu non coopératif entre les SPs et les stratégies qui définissent la meilleure politique pour chacun d'eux. Dans la section 4, nous introduisons le modèle logit pour exprimer les taux de migration en fonction des prix et des QoSs. Nous fournissons des résultats numériques détaillés pour valider notre analyse dans la section 5 et nous terminons ce chapitre par un conclusion.

## 2. Modélisation de Comportement des Clients

On considère un système avec  $N$  clients et 2 fournisseurs de services (SPs). Chaque SP  $i$  décide une QoS à garantir  $q_i$  et le prix correspondant  $p_i$ . Pour choisir son opérateur, le client cherche le SP qui propose un bon compromis prix/QoS. Ensuite, chaque client décide de s'abonner à l'un des deux opérateurs ou de rester dans l'état "sans abonnement".

Du point de vue des SPs, ils doivent définir la meilleure stratégie de prix et la meilleure quantité de la bande passante à demander au propriétaire du réseau, pour augmenter leurs parts de marché. Du point de vue des clients, la question est de définir le meilleur vecteur de probabilités pour s'inscrire auprès d'un opérateur. Le problème est donc conçu comme un jeu de Stackelberg [30] où les opérateurs sont les leaders et les clients sont les suiveurs. En utilisant l'induction en amont, les fournisseurs jouent en premier et anticipent la stratégie résultante des utilisateurs finaux. Chaque client peut rester avec son ancien opérateur ou le laisser pour s'inscrire auprès d'un autre. Nous supposons que le comportement d'un client est représenté par la chaîne de Markov en temps continu représentée dans la figure III.1.

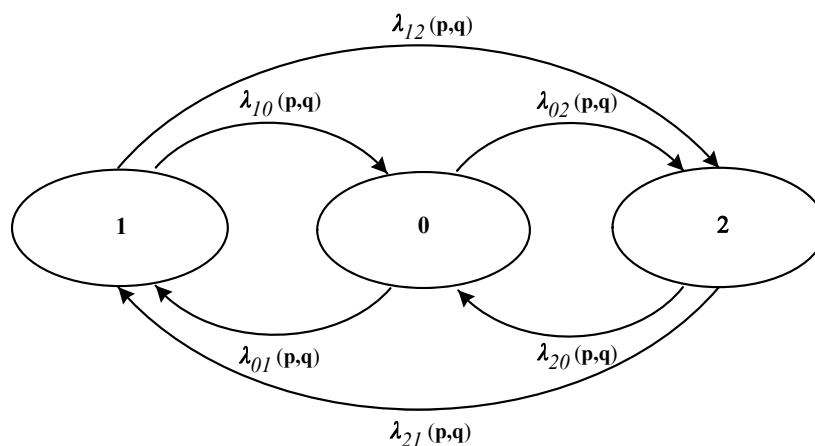


FIGURE III.1 – Comportement des clients comme une chaîne de Markov en temps continu.

Dans cette figure l'état 1 signifie que le client est avec l'opérateur 1, l'état 2 indique qu'il est avec l'opérateur 2 et l'état 0 indique que le client n'utilise aucun service des deux opérateurs. La transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  dépend non seulement des stratégies de SP  $i$  actuel qui sont  $p_i$  et  $q_i$ , mais dépend aussi des prix et des QoS offerts par ses concurrents. Notons  $\lambda_{ij}$  la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Alors,  $\lambda_{ij}$  dépend de l'ensemble du vecteur des prix  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  et de l'ensemble du vecteur des QoS  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ . Pour éviter des bénéfices négatifs, nous considérons ici que les indicateurs de prix et de la QoS sont bornés et positifs, c.à.d  $0 < p_{min} \leq p_i \leq p_{max}$  et  $0 < q_{min} \leq q_i \leq q_{max}$ .

Le générateur infinitésimal résultant de la chaîne de Markov correspondant à la figure III.1 est le suivant :

$$Q = \begin{pmatrix} -[\lambda_{01} + \lambda_{02}] & \lambda_{01} & \lambda_{02} \\ \lambda_{10} & -[\lambda_{10} + \lambda_{12}] & \lambda_{12} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -[\lambda_{20} + \lambda_{21}] \end{pmatrix}$$

Soit  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{\pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}), i \in \{0, 1, 2\}\}$  désigne l'état stationnaire du système markovien, où la probabilité qu'un client donné soit avec un SP  $i$  est  $\pi_i$ . Du point de vue de la théorie des jeux non coopératifs,  $\pi$  est la stratégie mixte d'équilibre de chaque client donné. De manière équivalente,  $\pi_i$  peut également être considérée comme la part de marché du SP  $i$ . Il en résulte que le nombre moyen des clients qui sont avec SP  $i$  est  $N\pi_i$ . La solution du problème des clients est alors une solution du système :

$$\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1, \\ \pi_i \geq 0, i = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

La solution de ce système est assez facile à obtenir pour deux SPs, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= [\lambda_{10}\lambda_{20} + \lambda_{10}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{20}] \div C, \\ \pi_1 &= [\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{21}\lambda_{02} + \lambda_{20}\lambda_{01}] \div C, \\ \pi_2 &= [\lambda_{02}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{02} + \lambda_{01}\lambda_{12}] \div C, \end{aligned}$$

où

$$C = \lambda_{10}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{02} + \lambda_{02}\lambda_{10} + \lambda_{02}\lambda_{12} + \lambda_{20}\lambda_{01} + \lambda_{20}\lambda_{10} + \lambda_{20}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{01} + \lambda_{21}\lambda_{10}.$$



### 3. Décisions Stratégiques des Fournisseurs de Service

Après avoir modélisé le comportement des clients, en tenant compte à la fois du prix et de la QoS garantie, nous allons maintenant définir la meilleure politique (prix et QoS) pour chaque SP. Nous définissons d'abord la fonction d'utilité, puis analysons le concept d'équilibre. Comme on le sait, chaque SP cherche à attirer le plus grand nombre possible de clients parmi une population de  $N$  clients. D'une part, augmenter le prix (et / ou diminuer la QoS à garantir) augmentera le revenu par client. D'autre part, cette politique peut potentiellement réduire le nombre de clients (équivalant à la part de marché). Désormais, il y a un compromis à analyser.

Ayant une part de marché  $\pi_i$ , le revenu total du SP  $i$  est alors  $N\pi_i p_i$ . Nous supposons que nous avons un seul propriétaire de réseau, ce dernier charge chaque SP  $i$  d'un coût  $\vartheta_i$  par unité de bande passante demandée. Afin d'assurer la fidélité des clients, la quantité de la bande passante  $\mu_i$  requise par SP  $i$  devrait dépendre de  $\pi_i$ ,  $N$  et de la QoS  $q_i$  qu'il souhaite offrir à ses clients. Par conséquent, le bénéfice net de SP  $i$  est simplement la différence entre le revenu total et les frais payés au propriétaire du réseau :

$$U_i(p, q) = N\pi_i p_i - F_i(q_i, \pi_i), \forall i \in \{1, 2\}. \quad (\text{III.2})$$

Les frais payés par SP  $i$  peuvent être écrits comme dans [12] :

$$F_i = \vartheta_i \mu_i(N, \pi_i, q_i), \quad (\text{III.3})$$

où  $\mu_i(N, \pi_i, q_i)$  est la quantité de bande passante requise par SP  $i$  pour garantir la QoS annoncée  $q_i$ , qui a la forme suivante :

$$\mu_i(N, \pi_i, q_i) = N\pi_i g_i(q_i) + h_i(q_i) \quad (\text{III.4})$$

où  $g_i(q_i)$  et  $h_i(q_i)$  sont des fonctions positives, ce qui signifie que la fonction d'utilité de SP  $i$  devient :

$$U_i(p, q) = N\pi_i(p_i - \vartheta_i g_i(q_i)) - \vartheta_i h_i(q_i), \forall i \in \{1, 2\}. \quad (\text{III.5})$$

Nous supposons que la mesure définissant la QoS correspond à une certaine fonction du délai prévu. Nous considérons la fonction de délai de Kleinrock qui est utilisée dans les jeux en réseau [12, 18]. De cette manière, la maximisation de la QoS nécessite une minimisation du délai. Pour cette raison, et au lieu de minimiser les délais, nous considérons la maximisation de l'inverse de sa racine carrée :

$$q_i := 1/\sqrt{\text{Delay}_i} = \sqrt{\mu_i - N\pi_i}. \quad (\text{III.6})$$

Nous allons nous concentrer dans le reste de ce chapitre au cas simple où  $g_i(q_i) = 1$  et

$h_i(q_i) = q_i^2$ . Ainsi, l'équation (III.5) devient :

$$U_i(p, q) = N\pi_i(p_i - \vartheta_i) - \vartheta_i q_i^2, \forall i \in \{1, 2\}. \quad (\text{III.7})$$

Chaque SP s'efforce de trouver sa meilleure stratégie, c.à.d son prix et sa QoS à garantir qui maximisent ses revenus, qui peut être modifié par la stratégie du concurrent. Le concept de solution à adopter ici est naturellement celui d'un équilibre de Nash.

**Définition III.1.** *Étant donné que l'état d'équilibre des clients dépend uniquement des prix fixés et des QoS offertes par les deux SPs, alors  $(p^*, q^*) = (p_1^*, p_2^*, q_1^*, q_2^*)$  est un équilibre de Nash pour les SPs s'il satisfait :*

- 1)  $(p_i^*, q_i^*) \in \underset{p_i, q_i}{\operatorname{argmax}} U_i(p_i, p_{-i}^*, q_i, q_{-i}^*), i = 1, 2$  et,
- 2)  $(p^*, q^*)$  est un profil de stratégie réalisable.

Afin de résoudre ce jeu non coopératif, nous utilisons une technique de rétro induction. Nous commençons par l'abonnement des clients et dérivons leur comportement stable en fonction du prix fixé et de la QoS offerte par les SPs. Sans hypothèses supplémentaires, on ne peut pas assurer l'existence d'un équilibre de Nash ni son unicité (si son existence est démontrée). Dans le cas où les fonctions d'utilité et les fonctions de taux sont assez simples en fonction de prix et de QoS, nous pouvons déduire analytiquement la forme des équilibres de Nash. Dans le cas contraire, les calculs peuvent être effectués numériquement en utilisant l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Calcul numérique des équilibres de Nash du jeu Prix-QoS.

---

- 1: Entrée : Taux de transition de la chaîne de Markov en fonction de  $p$  et  $q$ ,
  - 2: Pour tous les couples de valeurs possibles  $(p_2, q_2)$  de SP 2, trouver l'ensemble  $BR_1(p_2, q_2)$ ,
  - 3: Pour tous les couples de valeurs possibles  $(p_1, q_1)$  de SP 1, trouver l'ensemble  $BR_2(p_1, q_1)$ ,
  - 4: Chaque 4-tuple  $(p_1^*, p_2^*, q_1^*, q_2^*)$  tel que  $(p_1^*, q_1^*) \in BR_1(p_2^*, q_2^*)$  et  $(p_2^*, q_2^*) \in BR_2(p_1^*, q_1^*)$ , est un équilibre de Nash.
- 

Nous définissons la meilleure réponse de chaque SP en fonction de la stratégie de son adversaire par :

$$BR_1(p_2, q_2) = \underset{p_1, q_1}{\operatorname{argmax}} U_1(p, q), \quad (\text{III.8})$$

$$BR_2(p_1, q_1) = \underset{p_2, q_2}{\operatorname{argmax}} U_2(p, q). \quad (\text{III.9})$$

## 4. Modèle des Taux de Migration

Les taux de transition décrivant les probabilités de migration des clients d'un opérateur à un autre dépend des prix et des QoS définis par les fournisseurs. Le choix des cas simplifiés a montré que l'équilibre de Nash peut être obtenu analytiquement, mais pas facilement [10, 15]. Dans cette section, nous nous intéressons à l'utilisation d'un modèle aussi proche que possible de la réalité qui exprime les taux de migration en fonction des prix et des QoS.

### 4.1. Taux de Migration dans la Littérature

Plusieurs études ont été menées pour identifier les facteurs les plus pertinents qui déterminent le taux de migration des clients. Ces travaux sont basés sur des approches paramétriques et non paramétriques pour l'expression quantitative des taux de migration des clients en fonction de prix et de QoS. Parmi les approches non paramétriques, nous citons l'utilisation des réseaux de neurones et d'arbres de décision [73], et un algorithme évolutionnaire d'apprentissage [74].

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur des approches paramétriques pour obtenir une relation de forme strict. Le modèle logit est le plus répandu dans la littérature pour représenter une telle relation. Ce modèle utilise une fonction de distribution de probabilité logistique [75, 76, 77]. Cette fonction est une fonction linéaire d'un certain nombre de déterminants de migration. La probabilité qu'un utilisateur migre dans la période suivante est donnée par l'expression :

$$P_{churn} = \frac{1}{1 + e^{-I}}, \quad (\text{III.10})$$

où  $I$  est le facteur logit, donné par :

$$I = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i, \quad (\text{III.11})$$

où  $X_i, i = 1, \dots, n$  sont les déterminants de migration, et  $\beta_i, i = 1, \dots, n$  sont les coefficients représentant l'importance relative de ces déterminants.

### 4.2. Taux de Transition

Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur le prix et la QoS, de sorte que nous puissions regrouper l'impact des autres déterminants de migration dans le terme global  $\gamma$ , pour arriver à l'expression suivante :

$$P_{churn} = \frac{1}{1 + \gamma e^{-(\beta_1 p_i / p_j + \beta_2 q_j / q_i)}}, \quad (\text{III.12})$$

pour définir la probabilité que, dans une période spécifiée, l'utilisateur passe de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Nous pouvons employer cette expression pour une période de n'importe quelle durée, ainsi nous pouvons l'adopter dans le modèle de chaîne de Markov décrit précédemment. On note que, selon l'expression (III.12), il existe une probabilité non nulle, à savoir  $P_{churn} = \frac{1}{1+\gamma}$ , que l'utilisateur change d'opérateur en raison de l'ensemble des autres facteurs d'insatisfaction, même lorsque le service offert par l'opérateur quitté est gratuit et / ou que sa QoS est très élevée. La littérature considère un temps discrétisé, alors que nous formulons ici un modèle en temps continu. Cette dernière difficulté est traitée ici en supposant que les périodes considérées dans la section précédente sont courtes par rapport à la durée moyenne du séjour dans un état donné. Cela implique que les probabilités de transition en temps discret sont approximativement les taux de transition en temps continu multipliés par la durée de la période. Par conséquent, nous considérons les taux de transition de l'état  $i \in \{0, 1, 2\}$  à l'état  $j \in \{0, 1, 2\}$  de la forme :

$$\frac{k}{1 + \gamma_i e^{-(\beta_1 p_i / p_j + \beta_2 q_j / q_i)}}, \quad (\text{III.13})$$

où  $k > 0$  représente l'inverse de la durée de la période [15]. Puisque  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent respectivement la sensibilité de l'utilisateur aux prix et la sensibilité de l'utilisateur aux QoS, nous considérons qu'il en est de même pour les différents états du modèle.

Nous présentons l'asymétrie entre les fournisseurs à travers le paramètre  $\gamma_i$  comme expliqué précédemment. Ce paramètre regroupe les raisons autres que le prix et la QoS (par exemple : la réputation, ...), pour lesquelles un utilisateur doit quitter l'état  $i$ .

Les paramètres du modèle que nous considérons sont alors :

- $\beta_1$  et  $\beta_2$  : les sensibilités de l'utilisateur au prix et à la QoS ,
- $\gamma_i$  : la probabilité de rester dans l'état actuel  $i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,
- $k$  : l'inverse de la durée de la période (ce paramètre ne devrait pas jouer de rôle dans notre modèle, car nous pouvons supposer que, par un changement d'unité de temps,  $k = 1$ ),
- $p_0$  : le coût perçu par l'utilisateur pour ne pas bénéficier du service et  $q_0$  la QoS supposée dans l'état de non-abonnement.

## 5. Résultats et Discussions

Considérant les expressions précédentes des taux de transition, nous proposons d'étudier le jeu proposé dans ce chapitre. La dépendance de ces taux vis à vis des prix et les QoS fixés par les fournisseurs est trop compliquée pour pouvoir résoudre le problème analytiquement, c'est pour cela que nous proposons ici une étude numérique pour valider notre modèle décrit

précédemment. Les valeurs des paramètres considérées dans cette étude sont données dans le tableau III.1.

TABLEAU III.1 – Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique

$N$	$p_0$	$q_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$k$
10000	1	1	0.5	0.3	3	1	2	1

### 5.1. Jeu des Prix avec des QoS fixes

Dans cette partie, nous analysons le comportement du système si la QoS est fixe et que le prix est considéré comme la seule action stratégique du jeu. L'expression de l'équation (III.13) implique que tous les taux de transition soient dans un intervalle  $[k/(1 + \gamma_i), k]$  indépendamment des valeurs du prix et de QoS. Dans ce jeu avec QoS fixe, ce n'est pas réaliste, car cela impliquerait qu'un fournisseur pourrait assurer un revenu arbitrairement important en fixant un prix très élevé. Nous avons donc besoin que les taux de transition vers un fournisseur  $i$  tendent vers 0 et / ou que les taux de transition à partir d'un fournisseur  $i$  tendent vers  $\infty$ , quand  $p_i$  tend vers  $\infty$  et / ou  $q_i$  tend vers 0. Pour ce faire, nous modifions légèrement l'expression de l'équation (III.13) et prenons les taux de transition sous la forme :

$$\lambda_{ij}(p_i, p_j, q_i, q_j) = \frac{k}{\gamma_i} e^{\beta_1 p_i / p_j} e^{\beta_2 q_j / q_i} \quad (\text{III.14})$$

Figure III.2 trace l'utilité  $U_1$  du fournisseur 1 en fonction de son prix  $p_1$ , pour différentes valeurs du prix  $p_2$  de son opposant SP 2. Nous remarquons que les revenus nets du fournisseur 1 augmentent d'abord, puis baissent en fonction de  $p_1$ . En plus, l'utilité du fournisseur 1 diminue quand son prix  $p_1$  tend vers l'infini, ce qui implique l'existence d'un prix fini  $p_1^0$  qui maximise  $U_1$ . Cette valeur de prix constitue la meilleure réponse du fournisseur 1 par rapport au prix fixé par le fournisseur 2.

Nous remarquons aussi que les revenus nets de SP 1 augmentent quand le prix de l'adversaire  $p_2$  augmente, ce qui est probablement intuitif. En effet, si l'opposant choisit une stratégie de tarification plus élevée, il risque de perdre une fraction de ses clients. De plus, l'opérateur 1 peut attirer ces derniers et les inciter à changer de fournisseur. Par conséquent, son revenu net est augmenté. Étonnamment, nous avons observé une caractéristique intéressante caractérisant notre jeu de prix proposé. À travers plusieurs tests, nous avons réussi à :

- Vérifier l'existence d'une meilleure réponse unique,
- Vérifier qu'à mesure que le prix défini par SP 2 augmente, la meilleure réponse de SP 1 a tendance à augmenter aussi ! Cela nous a motivé à travailler pour prouver la super-modularité de ce jeu.

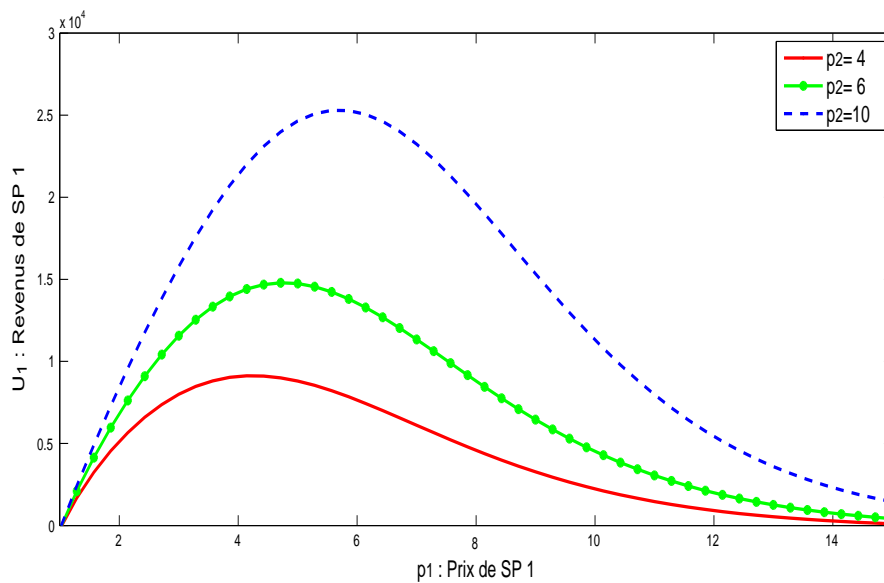


FIGURE III.2 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $p_1$ , pour différentes valeurs de  $p_2$ , avec  $q_1 = 15$  et  $q_2 = 15$ .

Figures III.3 et III.4 présentent respectivement l'influence de QoS  $q_1$  et  $q_2$  des deux fournisseurs sur le revenu net  $U_1$  de SP 1. En fonction de sa propre QoS, les revenus nets du SP se comportent de deux façons. Lorsque le SP 1 choisit un prix bas, il est généralement plus avantageux de demander une quantité de bande passante relativement faible pour fournir une QoS médiocre. Ceci est un comportement tout à fait surprenant, mais il peut avoir une explication dans la réalité. En effet, lorsqu'un SP offre un service donné à moindre coût, sa part de marché tend vers 1. En attirant la totalité des clients, le SP en question a tendance à ne plus investir et la QoS offerte devient médiocre. Un autre résultat important est que la QoS offerte augmente au fur et à mesure que la meilleure réponse augmente en respectant "Si vous en voulez plus, vous devez payer plus".

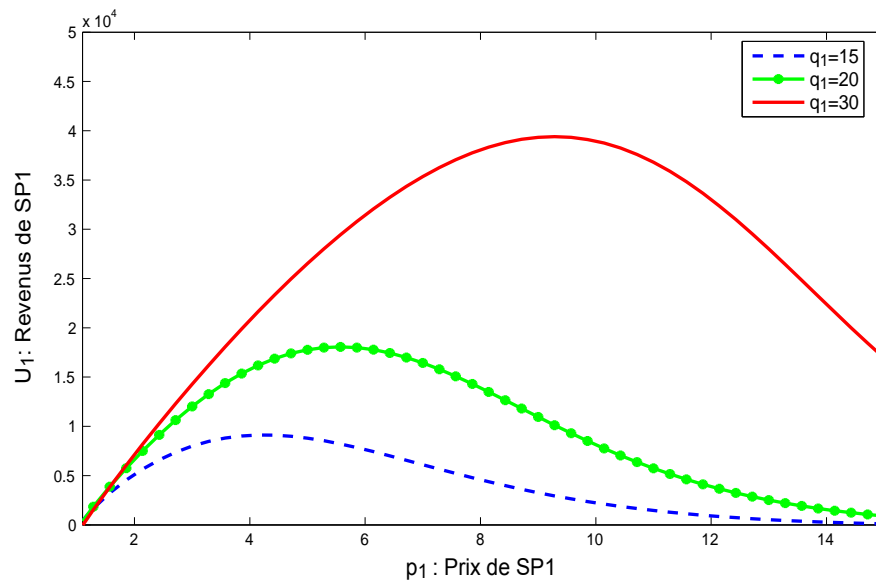


FIGURE III.3 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $p_1$ , pour différentes valeurs de  $q_1$ , avec  $q_2 = 15$  et  $p_2 = 4$ .

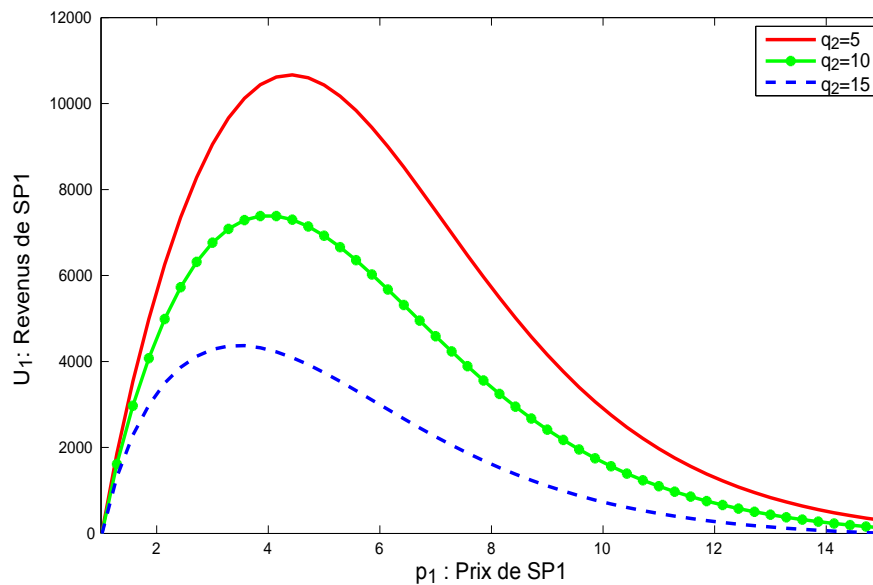


FIGURE III.4 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $p_1$ , pour différentes valeurs de  $q_2$ , avec  $q_1 = 10$  et  $p_2 = 4$ .

Ensuite, nous illustrons dans les figures III.5 et III.6 la meilleure réponse des deux SPs adversaires en choisissant respectivement des valeurs de QoS égales et différentes pour les deux SPs. Nous rappelons que ces deux figures sont obtenues en utilisant l'algorithme 2 et l'intersection entre les deux graphes représente le point d'équilibre de Nash du jeu. À travers plusieurs exemples, nous avons toujours obtenu un point d'équilibre de Nash unique. Une autre caractéristique visible est que le prix devrait évoluer dans la même direction que l'investissement. En d'autres termes, le prix final augmente à mesure que la QoS offerte

augmente.

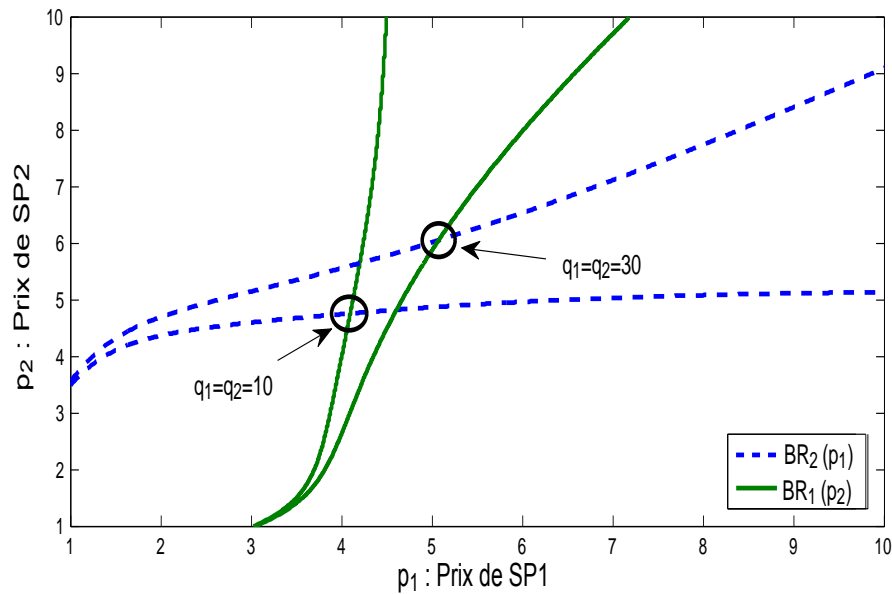


FIGURE III.5 – Meilleure réponse du prix pour les deux SPs, pour différentes valeurs de  $q_1 = q_2$ .

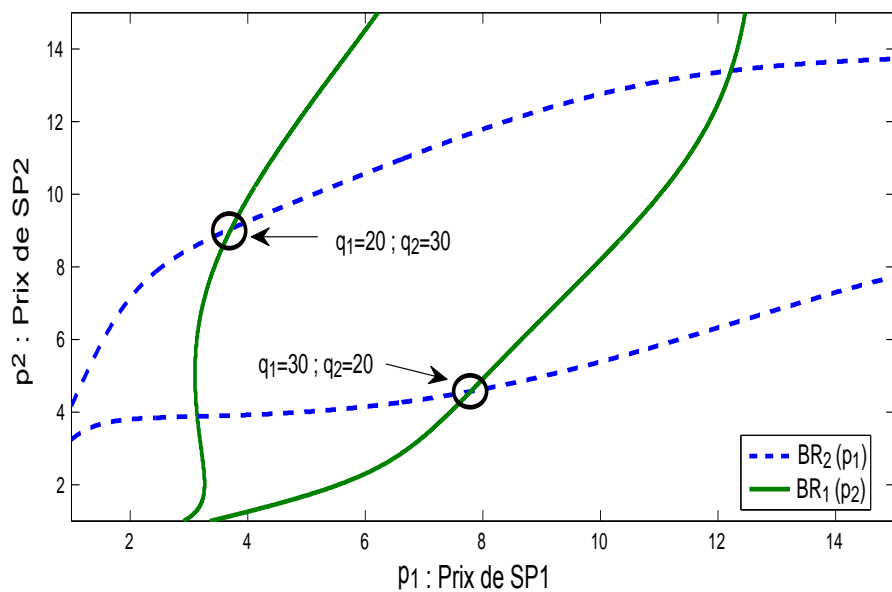


FIGURE III.6 – Meilleure réponse du prix pour les deux SPs, pour différentes valeurs de  $q_1 \neq q_2$ .

## 5.2. Jeu des QoS avec des Prix Fixes

Dans cette section, nous analysons le comportement du système si le prix est fixe et la QoS est considérée comme la seule action du jeu. Nous remarquons d'abord que les revenus nets diminuent lorsque la QoS augmente. C'est tout à fait intuitif car cela signifie que le



SP investit de plus en plus tout en facturant aux clients un prix constant, voir figure III.7. Il ressort clairement de la même figure que, lorsque l’adversaire SP 2 augmente sa QoS, il est avantageux pour SP 1 d’augmenter la sienne. Ce dernier résultat est bien connu en économie.

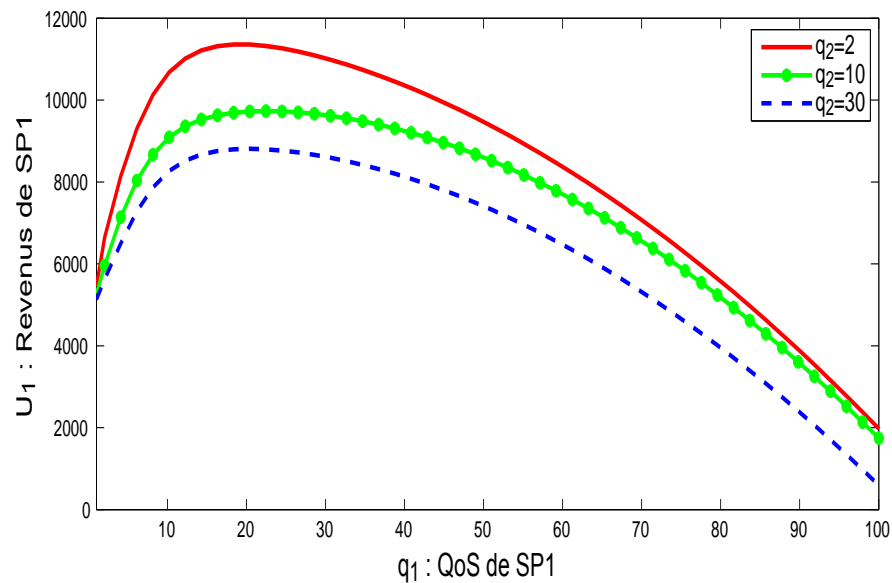


FIGURE III.7 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $q_1$ , pour différentes valeurs de  $q_2$ , avec  $p_1 = 4$  et  $p_2 = 4$ .

Figure III.8 (respectivement III.9) montre que la fonction d’utilité de SP 1 est concave par rapport à  $q_1$  pour différentes valeurs de prix  $p_1$  (respectivement  $p_2$ ). Cela signifie que la meilleure réponse en matière de QoS est unique et donc l’existence de l’équilibre en matière de QoS est assurée. D’un autre côté, les mêmes figures montrent la nécessité de définir un prix plus élevé au fur et à mesure que la QoS s’améliore et le besoin d’investir plus (amélioration de la QoS promise) quand le concurrent réduit son prix.

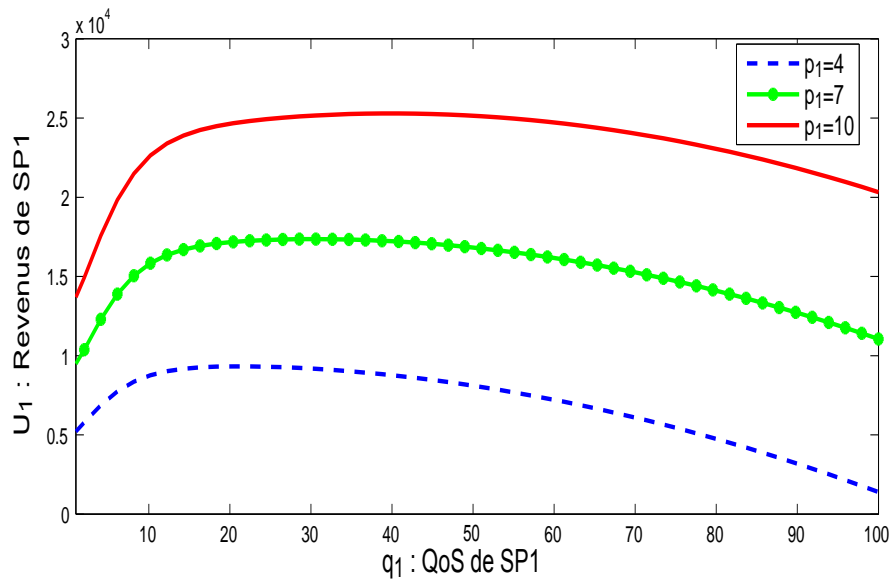


FIGURE III.8 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $q_1$ , pour différentes valeurs de  $p_1$ , avec  $q_2 = 15$  et  $p_2 = 4$ .

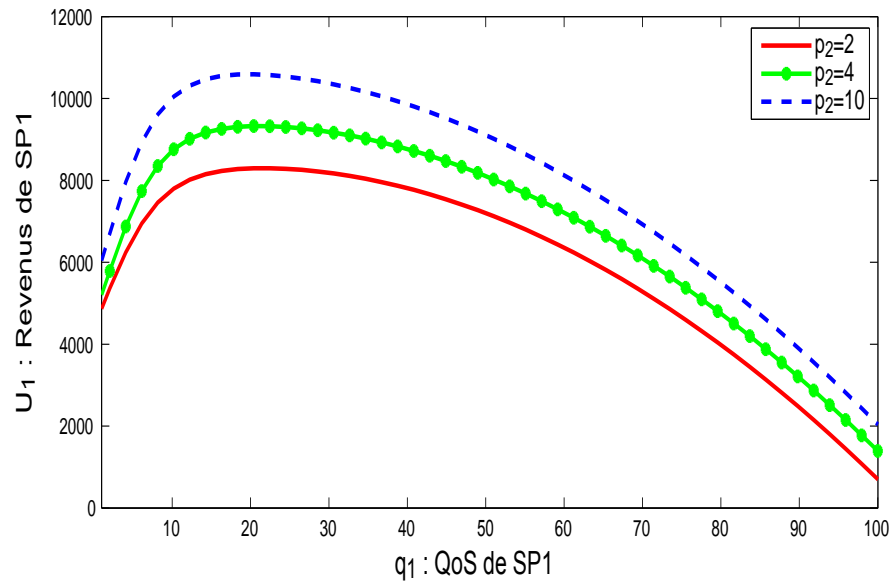


FIGURE III.9 – Revenus nets de SP 1 en fonction de  $q_1$ , pour différentes valeurs de  $p_2$ , avec  $q_2 = 15$  et  $p_1 = 4$ .

Dans la suite, nous traçons la meilleure réponse en matière de QoS lorsque les deux SPs adoptent le même prix (figure III.10) et lorsqu'ils adoptent des stratégies de tarification différentes (figure III.11).

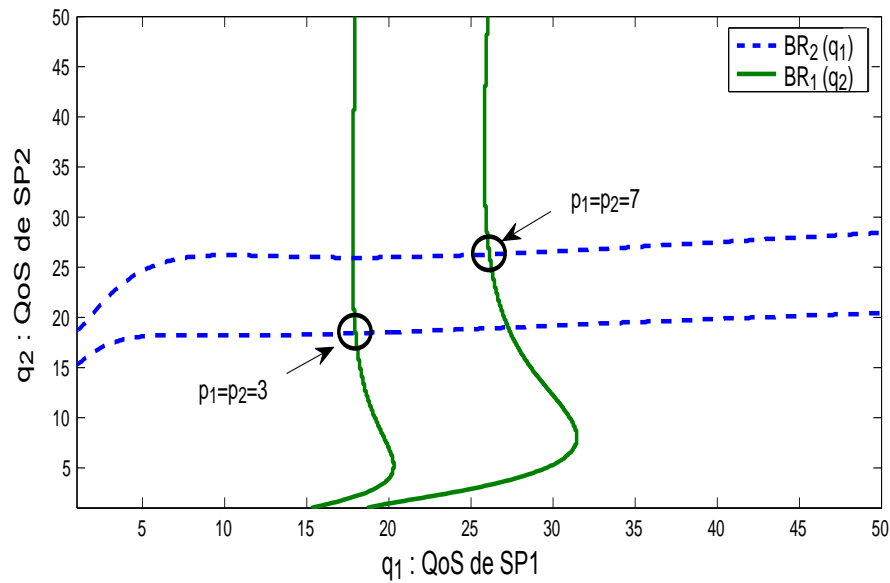


FIGURE III.10 – Meilleure réponse de QoS pour les deux SPs, pour différentes valeurs de  $p_1 = p_2$ .

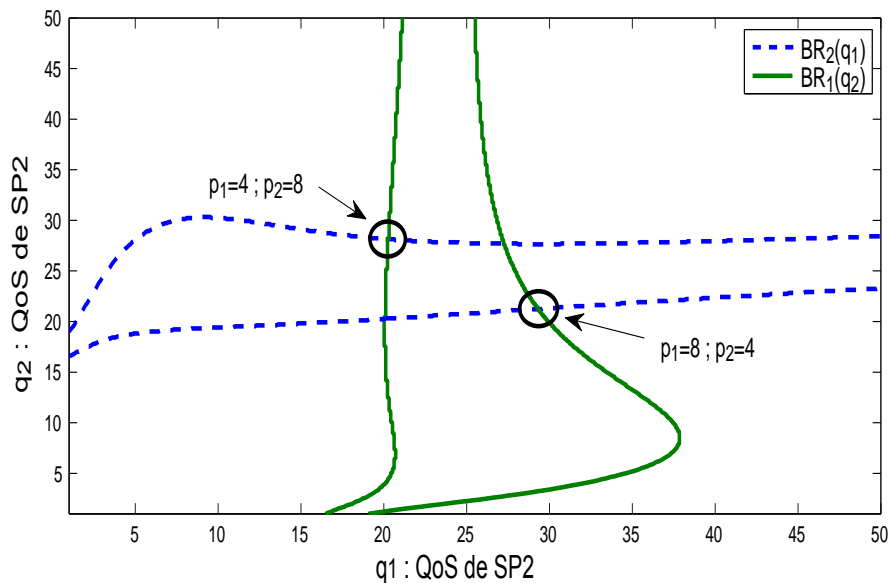


FIGURE III.11 – Meilleure réponse de QoS pour les deux SPs, pour différentes valeurs de  $p_1 \neq p_2$ .

### 5.3. Convergence à l'Équilibre de Nash

Si les SPs autorisent un service gratuit avec une qualité éventuellement nulle, c'est-à-dire que le prix et la qualité peuvent être égaux à 0, nous remarquons que  $(p_1, p_2) = (0, 0)$  est également une situation satisfaisante pour les deux SPs, ainsi il représente un point d'équilibre. Comme ce dernier apporte un revenu négatif aux fournisseurs, et de plus ce n'est pas un équilibre de Nash stable : si l'un des deux fournisseurs s'écarte légèrement de cette situation

en fixant un prix strictement positif, alors un algorithme itératif de meilleure réponse conduit à l'autre équilibre de Nash qui est stable. En imposant un prix non nul et une QoS non nulle, l'équilibre de Nash serait a priori unique et le jeu à un seul paramètre serait supermodulaire.

Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur cet équilibre quand il existe. Algorithme 3 assure la convergence des deux SPs aux points d'équilibre de Nash mis en évidence dans les figures précédentes, voir figures III.12 et III.13. Il est clair que la vitesse de convergence est relativement élevée (environ 6 itérations pour converger vers un équilibre en matière du prix et vers un équilibre en matière de QoS).

---

**Algorithme 3** Convergence à l'équilibre de Nash (s'il existe)

---

- 1:  $z_i^{t+1} = BR_i(z_{-i}^t)$ ,  $i = 1, 2$ .  
 où  $BR_i(\cdot)$  est la fonction de la meilleure réponse de SP  $i$ , et  $z_i$  est une variable générique représentant  $p_i$  ou  $q_i$  (tout en maintenant l'autre paramètre constant).
- 

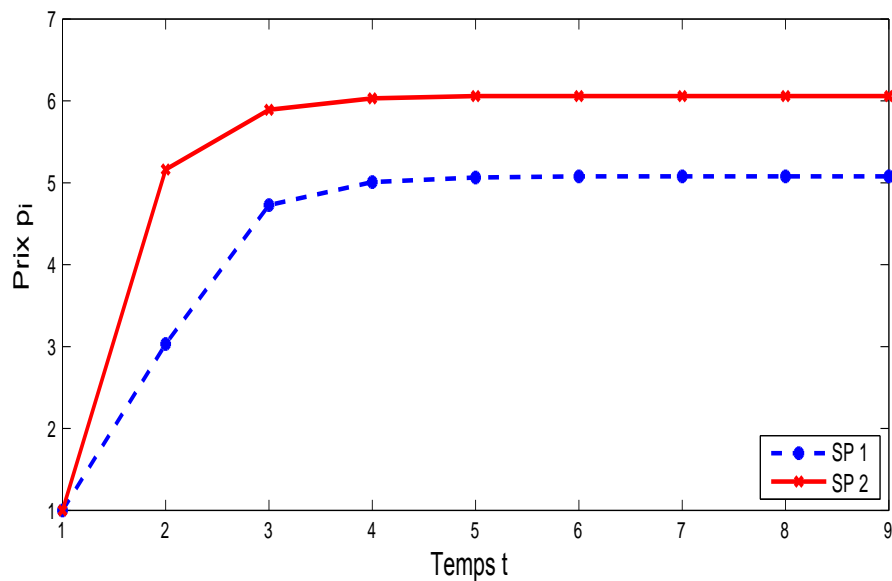


FIGURE III.12 – Jeu du prix : Convergence à l'équilibre de Nash avec  $(q_1, q_2) = (30, 30)$ .

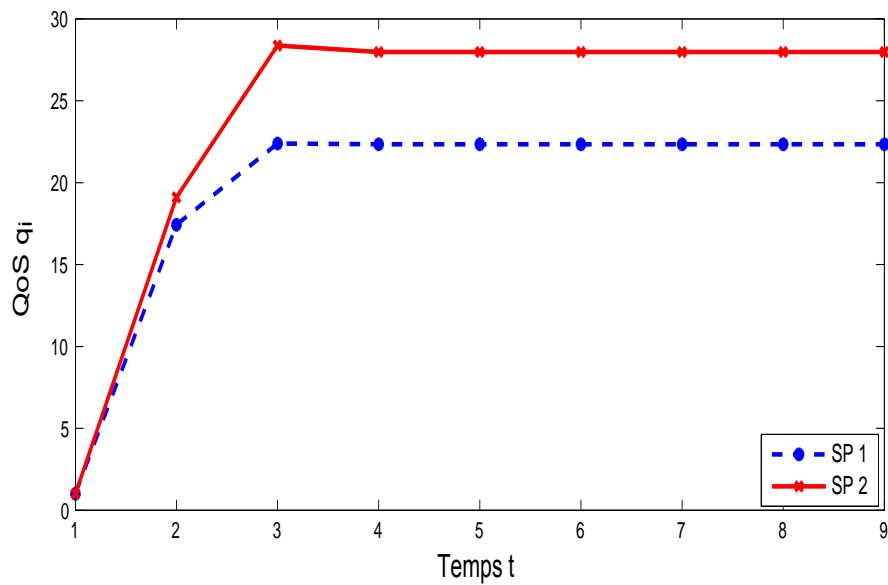


FIGURE III.13 – Jeu de QoS : Convergence à l'équilibre de Nash avec  $(p_1, p_2) = (5, 8)$ .

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une contribution à l'étude de la concurrence entre opérateurs de télécommunications. Ceux-ci prennent en compte le comportement de migration des clients pour décider du prix et de la qualité du service à offrir dans le but de maximiser leurs propres profits. Le problème est modélisé sous forme d'un jeu non coopératif basé sur le prix et la qualité de service en tant que des paramètres de décision. Le comportement de migration des clients est modélisé par une chaîne de Markov où les taux de transition sont exprimés à l'aide du modèle logit. Nous avons montré par l'étude numérique l'existence de plusieurs équilibres de Nash pour ce jeu, cet équilibre peut être unique si le jeu est symétrique et si le prix minimal  $p_{min}$  et la QoS minimale  $q_{min}$  ne sont pas nuls.

# Chapitre IV

## Influence de la Rationalité des Clients sur la Compétition Prix-QoS

### 1. Introduction

Actuellement, la théorie des jeux est largement utilisée pour analyser le comportement des clients et des fournisseurs de services (SPs) dans le marché des télécommunications. La concurrence entre les SPs en matière de prix et de QoS implique la formation de jeux non coopératifs. Dans ce chapitre, nous considérons que le marché est composé de  $N$  SPs offrant des services à des clients rationnellement limités. Afin de maximiser ses revenus, chaque SP rationnel décide de ses politiques de prix  $p_i$  et de QoS  $q_i$ . Comme les SPs partagent le même marché, le comportement de chacun dépend à la fois de comportement de ses concurrents et de celui des clients.

Nous présentons dans ce chapitre un modèle pour calculer l'équilibre de Nash à un seul critère (prix) pour plusieurs SPs, en considérant le modèle de Bertrand, ce qui implique que les joueurs (SPs) ne choisissent que les prix. Le modèle proposé est principalement inspiré de [13], où les auteurs ont considéré que les SPs sont rationnels et ont élaboré un modèle de Markov qui dérive le comportement des clients en fonction des actions stratégiques des SPs, pour étudier un jeu non coopératif pour le problème de prix en considérant la QoS comme un paramètre de décision supplémentaire. Dans notre modèle, nous considérerons que la demande aux services d'un SP dépend de la taille du marché (nombre de clients) et de la probabilité de souscrire à ses services ; pour rendre notre modèle non linéaire, et prendre en compte le degré d'irrationalité des utilisateurs  $\lambda$ .

La rationalité implique que chaque client raisonne pour augmenter sa propre rentabilité. En d'autres termes, il possède toutes les informations sur le marché qui lui permettent de rationaliser son choix, ce qui lui permet de maximiser son propre gain. L'idée de maximiser les gains attendus est justifiée dans [32]. Dans la réalité, l'hypothèse de la «rationalité parfaite» ne tient presque jamais et les acteurs économiques ne sont pas censés pouvoir éta-

blir de manière claire et immédiate leurs préférences [40]. On parle alors d'une «rationalité limitée» qui constitue l'un des principaux obstacles à l'application de la théorie des jeux conventionnels dans le monde réel.

La rationalité limitée des clients considère qu'ils disposent d'une quantité d'information et de capacités cognitives limitées ne leur permettant pas d'optimiser leurs choix, cela signifie que : plutôt que choisir l'action optimale, les clients choisissent une action qui leur donne un gain plus élevé avec une probabilité plus élevée. En particulier, nous adoptons le modèle du choix probabiliste de Luce, qui détermine la probabilité avec laquelle un client décidera de s'abonner à un SP $i$  donné. Nous considérons également que la rationalité limitée des consommateurs peut être mesurée par un degré d'irrationalité qui peut être exprimé par  $\lambda$ , avec  $\lambda = 0$  correspond au comportement parfaitement rationnel et  $\lambda \rightarrow 1$  correspond au choix complètement aléatoire.

Le concept de rationalité limitée a attiré l'attention de nombreux chercheurs et a été étudié dans de nombreux travaux de recherche. Les différents modèles traitant la rationalité limitée sont expliqués en détail dans [43]. Dans le livre [41], l'auteur a discuté des modèles de rationalité limitée et a présenté le problème de conception du choix des agents en se basant sur le modèle probabiliste de Luce. Les auteurs du livre [42] ont montré que la prise de décision irrationnelle peut être expliquée si l'on prend en compte que les capacités humaines pour traiter l'information sont limitées. Ainsi, ils ont amélioré des techniques heuristiques pour prédire la qualité de la décision en formulant et en résolvant des problèmes d'optimisation. Dans [78], les auteurs ont pu conclure des résultats intéressants sur la confusion des clients vis-à-vis du prix réel des services offerts par les SPs et l'impact de cette confusion sur la dynamique des réseaux de télécommunication. D'autres modèles de tarification supplémentaire ont été présentés dans lesquels les consommateurs doivent payer des frais supplémentaires pour compléter leurs informations et devenir rationnels [79, 80]. Les auteurs ont conclu que tant que l'incertitude est forte, la décision d'acquérir de l'information devient un complément stratégique.

La modélisation des informations partielles en tant que profits marginaux a été proposée dans [33, 34, 35, 81]. A savoir, les joueurs décident de leur stratégie en fonction de leurs profits marginaux respectifs. Les auteurs de [13] ont modélisé le comportement des clients dans le marché des télécommunications et la rationalité limitée des fournisseurs de services. Ils ont formalisé la migration ou le comportement dynamique des clients dans le domaine des télécommunications sous la forme d'une chaîne de Markov. Dans ce système dynamique, les auteurs ont démontré théoriquement et numériquement la stabilité de l'équilibre entre les joueurs qui sont les SPs. En particulier, dans le marché des télécommunications, le concept de rationalité limitée des clients est peu étudié. Les auteurs de [82] ont considéré un modèle d'oligopole de Bertrand en modélisant la rationalité des consommateurs qui prennent leurs décisions d'achat d'une façon probabiliste, selon le modèle de Luce. Ce modèle d'affaires est

destiné aux entreprises de toutes sortes ; c'est plus général. Un modèle de prix de vente est proposé dans [83] en tenant compte de la façon avec laquelle l'entreprise présente ses prix aux consommateurs en les embrouillant. Dans [84], les auteurs ont pu introduire le concept de confusion des clients sur le marché des télécommunications et ont proposé un modèle de prix compétitif entre deux SPs supposés rationnels. Les auteurs ont proposé un modèle basé sur le prix comme seul paramètre de décision, sans prendre en compte la QoS.

Dans ce chapitre, nous allons étendre l'étude en proposant un nouveau modèle compétitif du jeu entre  $N$  SPs qui prennent leurs stratégies selon le prix et la qualité de service. Notre modèle est basé sur une nouvelle formulation de la demande qui est rendue non linéaire en adaptant le modèle probabiliste de Luce utilisé dans [82] pour le cas du marché des télécommunications.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2., nous présentons la modélisation du comportement des clients en utilisant le modèle probabiliste de Luce. Ensuite, nous décrivons le modèle d'utilité des SPs et le gain des utilisateurs dans le marché des télécommunications au sens du modèle de Bertrand dans la section 3.. Nous présentons une analyse théorique et des résultats numériques des modèles proposés dans cette étude dans les sections 4. et 5. respectivement. Enfin nous concluons ce chapitre avec des perspectives dans la section 6..

## 2. Modélisation des Comportements des Clients

La modélisation du comportement des clients est une tâche primordiale et très importante pour étudier économiquement un marché. Dans le cas du marché des télécommunications, ce comportement a été modélisé sous forme d'une chaîne de Markov [15]. Dans cette étude, nous utilisons le modèle de Luce pour modéliser le choix discret des clients en exploitant la fonction softmax ou la fonction exponentielle normalisée [85, 86].

### 2.1. Modèle Probabiliste de Luce

Le modèle de Luce est le premier modèle de choix probabiliste qui incorpore le choix des clients à rationalité limitée [32, 75, 77]. En utilisant ce modèle, les clients peuvent sélectionner le SP qui maximise leur gain avec des probabilités plus élevées, mais pas nécessairement la meilleure réponse avec une probabilité égale à 1. Plus précisément, les probabilités de choix pour des stratégies spécifiques sont proportionnelles aux gains attendus associés à de telles stratégies. Nous élargissons ce cadre en incluant un paramètre libre  $\lambda$  qui détermine un degré d'irrationalité des clients. Lorsque les clients ont le choix entre différentes alternatives  $i \in \{1..N\}$ , le décideur parfaitement rationnel choisit toujours l'option la plus préférée  $i \in \{arg \max_i(u_i)\}$ , où  $u_i$  est le gain pour les utilisateurs qui ont choisi SP  $i$ .



En revanche, pour capter la rationalité limitée, nous supposons que les clients choisissent l'alternative  $i \in \{1..N\}$  avec probabilité  $\rho_i$  [87], donnée par :

$$\rho_i = \frac{\exp(u_i/\lambda)}{\sum_{j=1}^N \exp(u_j/\lambda)} \quad (\text{IV.1})$$

où  $\lambda \in [0, 1]$ , est le degré d'irrationalité des clients dans le marché des télécommunications. Si  $\lambda$  augmente (tend vers 1), le client est moins susceptible de choisir la bonne offre (SP) et il n'exploitera pas les offres des autres SPs ; dans ce cas, le choix est aléatoire et l'on dit que le choix du client est irrationnel. Mais, si  $\lambda$  diminue (tend vers 0), le client est susceptible de faire un choix rationnel.

## 2.2. Modèle de l'Utilité

Nous considérons que l'utilité  $u_i$  des clients souscrits à SP  $i$  est une fonction qui dépend des stratégies du prix  $p_i$  et de QoS  $q_i$  de SP  $i$  :

$$u_i(p_i, q_i) = v_i(q_i) - p_i \quad (\text{IV.2})$$

où  $v_i(q_i)$  sont les revenus des clients souscrits à SP  $i$ .

Nous supposons que les clients ne décident jamais de s'abonner à plus d'un SP, c'est-à-dire que chaque client a  $(N + 1)$  choix différents. Alors, la probabilité qu'un client décide de s'abonner à SP  $i$  est :

$$\rho_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\exp\left(\frac{v_i(q_i) - p_i}{\lambda}\right)}{1 + \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{v_j(q_j) - p_j}{\lambda}\right)} \quad (\text{IV.3})$$

## 3. Modèle de Compétition de Bertrand

Dans le marché des télécommunications, les SPs peuvent rivaliser sur plusieurs variables, par exemple, en fonction de leurs choix de prix et de QoS. La concurrence la plus basique et la plus fondamentale concerne les choix de prix. Le modèle de Bertrand examine l'interdépendance entre les décisions des concurrents en fonction des décisions de prix. Dans cette section, nous présentons l'utilité de tous les SPs qui offrent des services homogènes aux clients, ainsi que les gains des clients dans le marché des télécommunications.

### 3.1. Modèle de la Fonction d'Utilité

Nous considérons une population de  $n$  clients. Alors, la demande prévue aux services de SP  $i$  est donnée par  $n\rho_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Ainsi, la fonction d'utilité de SP  $i$  est exactement la différence entre ses revenus  $n\rho_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})p_i$  et les frais payés pour acheter une quantité donnée de bande passante  $\mu_i$  :

$$\begin{aligned}\Pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= n\rho_i p_i - F_i(\rho_i, q_i) \\ &= n\rho_i p_i - \vartheta_i \mu_i(n, \rho_i, q_i)\end{aligned}\quad (\text{IV.4})$$

où  $\vartheta_i$  est le prix de l'unité de bande passante, et  $\mu_i(\rho_i, q_i)$  est la quantité de bande passante requise par SP  $i$  pour garantir la QoS  $q_i$  promise, qui a la forme suivante :

$$\mu_i(n, \rho_i, q_i) = (n\rho_i)g_i(q_i) + h_i(q_i)\quad (\text{IV.5})$$

où  $n$  est le nombre de clients dans le marché et  $g_i(q_i)$  et  $h_i(q_i)$  sont des fonctions croissantes positives.

La fonction d'utilité de SP  $i$  devient :

$$\Pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{n \exp\left(\frac{v_i(q_i) - p_i}{\lambda}\right)}{1 + \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{v_j(q_j) - p_j}{\lambda}\right)} (p_i - \vartheta_i g_i(q_i)) - \vartheta_i h_i(q_i).\quad (\text{IV.6})$$

### 3.2. Gains des Consommateurs dans le Marché

Le gain réel des utilisateurs dans le marché des télécommunications ne dépend pas seulement des stratégies de  $SP_i$  auquel ils sont abonnés, mais aussi des stratégies des autres  $SP_{-i}$ . Nous présentons dans ce qui suit le modèle de ce profit. Les revenus de l'utilisateur  $u$  s'il choisit l'abonnement à SP  $i$  est :

$$R_i^u(P^*) = u_i(p_i, q_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j^u (p_i^* - p_j^*)\quad (\text{IV.7})$$

où :

- $\beta_j^u \in [0, 1] \forall j \in [1, N]$  et  $j \neq i$  est la sensibilité de l'utilisateur  $u$  aux stratégies de motivation des adversaires de son opérateur SP  $i$ . Si  $\beta_j^u \rightarrow 0$  alors l'utilisateur  $u$  est fidèle à son SP  $i$ , mais si  $\beta_j^u \rightarrow 1$  alors l'utilisateur  $u$  est totalement attiré par l'offre de l'opérateur SP  $j$  et dans ce cas nous ne parlons pas de fidélité de  $u$ .
- $P^*$  est le vecteur des prix d'équilibre de Nash.

Ensuite, le bénéfice de l'utilisateur  $u$  est l'accumulation de ses revenus pour l'ensemble des SPs. Ce gain est représenté par :

$$G_u(P^*) = \sum_{i=1}^N R_i^u(P^*) \quad (\text{IV.8})$$

## 4. Analyse du Jeu Non-coopératif

Dans cette section nous formulons le jeu non-coopératif entre des fournisseurs de service rationnels. Considérons un marché avec  $N$  SPs, qui décident de leurs stratégies de prix et de QoS afin de maximiser leurs utilités / bénéfices individuels  $\Pi_i(\cdot)$ . Ces opérateurs sont égoïstes et ils ne coopèrent pas les uns avec les autres pour gérer leurs stratégies. Soient  $P_i$  et  $Q_i$  respectivement l'ensemble des stratégies de prix et de QoS de SP  $i$ .

### 4.1. Apprentissage de l'Équilibre de Nash pour le Jeu des Prix

Considérons un jeu stratégique  $\Gamma$  de  $N$  joueurs :

$$\Gamma = \{\mathcal{N}, P_1, \dots, P_N, \Pi_1, \dots, \Pi_N\}, \quad (\text{IV.9})$$

où  $P_i$  est l'ensemble des stratégies de prix du joueur  $i$  et  $\Pi_i$  sa fonction d'utilité.

**Définition IV.1.** *Équilibre de Nash pour le jeu des prix* spécifie une stratégie  $p_i^* \in P_i$  pour chaque joueur  $i$  (avec  $i = 1, \dots, N$ ), de telle sorte que :

$$\Pi_i(p^*, q) = \max_{p_i \in P_i} \Pi(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_N^*, q), \quad (\text{IV.10})$$

lorsque le vecteur  $q$  des stratégies de QoS de tous les SPs est fixé à un moment prédéterminé.

Ci-dessous, nous analysons les prix compétitifs qui maximisent les utilités pour les  $N$  SPs. Pour ce faire, tout d'abord, nous démontrons l'existence et l'unicité de l'équilibre de ce jeu, ensuite nous calculons ce point d'équilibre. Pour analyser l'équilibre du jeu, nous devons trouver des propriétés sur la fonction d'utilité.

---

#### Algorithme 4 Algorithme de Meilleure Réponse

---

- 1: Initialisation des vecteurs prix ;
- 2: Pour chaque SP  $i$ ,  $i \in \mathcal{N}$ , à l'itération  $t$  :

$$\text{— } p_i^{t+1} = \operatorname{argmax}_{p_i \in P_i} (\Pi_i(p^t, q))$$


---

L'algorithme 5 décrit comment déterminer graphiquement l'équilibre de Nash.

---

**Algorithme 5** Déterminer graphiquement l'équilibre de Nash du jeu

---

- 1: Initialisation des vecteurs prix  $p_1$  et  $p_2$  ;
  - 2: Pour toutes les valeurs possibles de  $p_2$ , Trouver l'ensemble  $BR_1(p_2)$  de valeurs  $p_1$  maximisant  $\Pi_1(p_1, p_2, q)$  ;
  - 3: Pour toutes les valeurs possibles de  $p_1$ , Trouver l'ensemble  $BR_2(p_1)$  de valeurs  $p_2$  maximisant  $\Pi_2(p_2, p_1, q)$  ;
  - 4: Sur un même graphe, tracer les fonctions de meilleure réponse  $p_1 = BR_1(p_2)$  et  $p_2 = BR_2(p_1)$ , comme illustrées dans la figure IV.1 ;
  - 5: L'ensemble des équilibres de Nash est l'ensemble (éventuellement vide) de points d'intersection de ces fonctions.
- 

## 4.2. Existence et Unicité de l'Équilibre dans le Jeu des Prix

Dans cette partie, nous considérons que les SPs ont fixé leurs QoS  $\mathbf{q}$  à un certain vecteur de valeurs prédéterminées  $\bar{q}$ . Dans ce cas, nous considérons seulement le jeu des prix. La fonction d'utilité donnée dans l'équation (IV.6) devient :

$$\Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \frac{\mathbf{n} \exp\left(\frac{\bar{v}_i - p_i}{\lambda}\right)}{\mathbf{1} + \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{\bar{v}_j - p_j}{\lambda}\right)} (p_i - \vartheta_i \bar{g}_i) - \vartheta_i \bar{h}_i. \quad (\text{IV.11})$$

où  $v(\bar{q}_i) = \bar{v}_i$ ,  $\bar{g}_i = g_i(\bar{q}_i)$  et  $\bar{h}_i = h_i(\bar{q}_i)$  sont des constantes réelles positives.

A partir de l'équation (IV.3), on peut déduire la propriété suivante :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial p_i} = -\frac{\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda},$$

Par conséquent, la dérivée de profit pour SP  $i$  est :

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i} = -n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i) \frac{\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda} + n\rho_i, \quad \forall i = 1..N \quad (\text{IV.12})$$

La dérivée seconde du profit est alors :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} = -n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i) \frac{\rho_i(1 - \rho_i)(2\rho_i - 1)}{\lambda^2} - 2n \frac{\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda} \quad (\text{IV.13})$$

**Théorème IV.1 (Existence de l'équilibre).** *Le jeu des prix admet au moins un équilibre de Nash, si le prix satisfait la condition :  $p_i > \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{2\lambda}{2\rho_i - 1}$*

*Démonstration.* L'équation IV.13 représente la dérivée seconde de la fonction d'utilité illustrée dans l'équation IV.11 par rapport au prix. La condition pour cette fonction strictement concave est :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i})}{\partial p_i^2} < 0,$$

c'est à dire,

$$-n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i) \frac{\rho_i(1 - \rho_i)(2\rho_i - 1)}{\lambda^2} - 2n \frac{\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda} < 0,$$

D'où,

$$p_i > \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{2\lambda}{2\rho_i - 1},$$

Finalement, un équilibre de Nash existe si et seulement si  $p_i > \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{2\lambda}{2\rho_i - 1}$ . □

**Théorème IV.2 (Unicité de l'équilibre).** *Le jeu des prix admet un équilibre de Nash unique si et seulement si  $p_i > \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{3\lambda}{2(2\rho_i - 1)}$ .*

*Démonstration.* La méthode la plus utilisée pour montrer l'unicité de l'équilibre de Nash est la condition de Rosen [57, 88, 89]). Cette condition est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| < 0. \quad (\text{IV.14})$$

Vérifions alors la justesse de cette inégalité.

On a :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} = \left( \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i^2 - \rho_i) + \frac{n}{\lambda} \rho_i \right) \rho_j,$$

alors,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| &= \left| \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i^2 - \rho_i) + \frac{n}{\lambda} \rho_i \right| \sum_{j \neq i} \rho_j \\ &= \left| \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i - 1) + \frac{n}{\lambda} \right| \rho_i (1 - \rho_i), \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

A partir des équations (IV.13) et (IV.15) nous avons :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| = \rho_i(1 - \rho_i) \left( -\frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)(2\rho_i - 1)}{\lambda^2} - \frac{2n}{\lambda} + \left| \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i - 1) + \frac{n}{\lambda} \right| \right),$$

Si  $\left( \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i - 1) + \frac{n}{\lambda} \geq 0 \right)$ , i.e.  $p_i \geq \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{\lambda}{2\rho_i - 1}$ , alors,

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| = -\frac{n\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda} < 0,$$

Si  $\left( \frac{n(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda^2} (2\rho_i - 1) + \frac{n}{\lambda} \leq 0 \right)$ , i.e.  $p_i \leq \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{\lambda}{2\rho_i - 1}$ , alors,

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| = -\frac{n\rho_i(1 - \rho_i)}{\lambda} \left( \frac{2(p_i - \vartheta_i \bar{g}_i)}{\lambda} (2\rho_i - 1) + 3 \right),$$

Par conséquent, si la condition  $p_i > \vartheta_i \bar{g}_i - \frac{3\lambda}{2(2\rho_i - 1)}$  est satisfaite, le jeu des prix admet un équilibre de Nash unique. □

### 4.3. Prix de l'Anarchie

Le concept du surplus social [59] ou coût total [60], est défini comme le maximum de la somme des utilités de tous les agents du système (c'est-à-dire les fournisseurs). Il est bien connu dans la théorie des jeux que l'égoïsme des agents, comme dans un équilibre de Nash, ne conduit généralement pas à une situation socialement efficace. En tant que mesure de la perte d'efficacité due à la divergence des intérêts et l'égoïsme des agents, nous utilisons le prix de l'anarchie (PoA) [54] qui mesure à quel point un système où tous les agents agissent pour optimiser leurs intérêts peut être éloigné d'une situation optimale du point de vue global.

Cette mesure est définie comme le rapport le plus défavorable comparant la mesure d'efficacité globale choisie à l'issue du jeu non coopératif joué par les acteurs, à la valeur optimale de cette mesure d'efficacité. Un PoA proche de 1 indique que l'équilibre est approximativement socialement optimal, et donc les conséquences du comportement égoïste sont relativement bénignes. Le terme prix de l'anarchie a d'abord été utilisé par Koutsoupias et Papadimitriou [54], mais l'idée de mesurer l'inefficacité de l'équilibre est plus ancienne. La perte d'efficacité due à l'égoïsme des acteurs est mesurée comme étant le quotient du bien-être social obtenu à l'équilibre de Nash et la valeur maximale du bien-être social [61] :

$$PoA = \frac{\min_{p, \bar{q}} W_{NE}(p, \bar{q})}{\max_{p, \bar{q}} W(p, \bar{q})} \quad (IV.16)$$

où  $W(p, \bar{q}) = \sum_{i=1}^N \Pi_i(p, \bar{q})$  est la fonction du bien-être, et  $W_{NE}(p, \bar{q}) = \sum_{i=1}^N \Pi_i(p^*, \bar{q})$  est la somme des utilités de tous les acteurs à l'équilibre de Nash.

## 5. Résultats et Discussions

Dans cette section, nous examinons comment tirer profit de nos résultats analytiques. Nous proposons une étude numérique du jeu dans le marché des télécommunications en tenant compte de l'expression précédente de la fonction d'utilité des SPs. Pour des fins d'illustration, nous considérons deux SPs homogènes qui cherchent à maximiser leurs revenus. Sauf indication contraire, le tableau IV.1 résume les paramètres utilisés dans cette étude.

$n$	$N$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\lambda$	$P_1 = P_2$
100	2	25	20	0.7	[1 : 1000]
$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$
5	10	4	6	1.5	1

TABLEAU IV.1 – Paramètres utilisés pour l'étude numérique

### 5.1. Détermination de l'Équilibre de Nash pour le Jeu des Prix

Nous utilisons l'algorithme 5 pour tracer les courbes de meilleure réponse des deux fournisseurs sur le même graphe pour mettre en évidence les équilibres de Nash du jeu. La figure IV.1 illustre ces courbes. Cette figure montre que l'équilibre de Nash du jeu est unique et ceci reflète ce que nous avons trouvé dans l'étude théorique de l'unicité de l'équilibre de Nash. L'équilibre obtenu graphiquement est exactement le point d'intersection entre les courbes des vecteurs  $BR_1(P_2)$  et  $BR_2(P_1)$ .

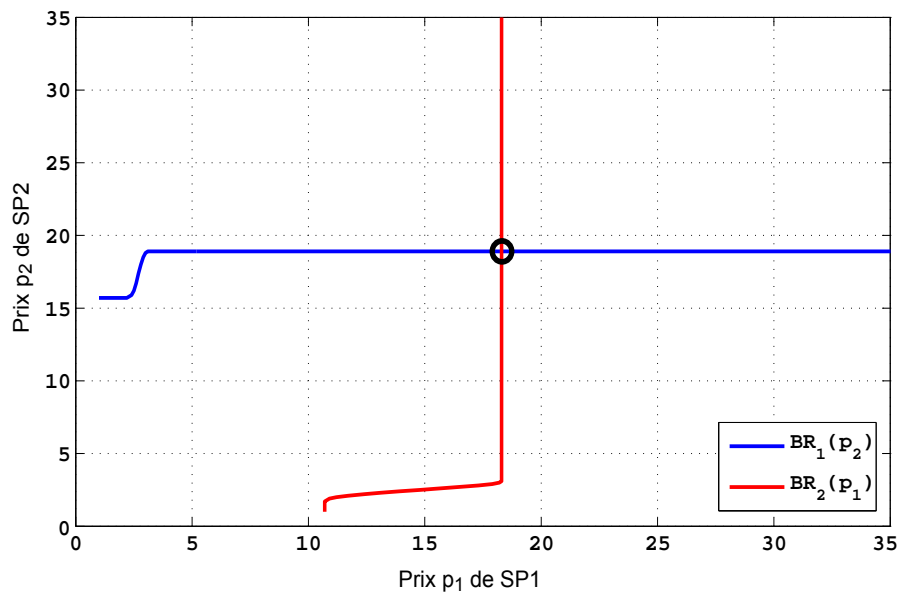


FIGURE IV.1 – Détermination graphique de prix à l'équilibre de Nash : Solution unique (point encerclé).

La figure IV.2 représente les courbes de convergence vers les prix à l'équilibre de Nash pour les deux SPs. L'algorithme de meilleure réponse dynamique utilisé dans ce cadre converge vers un équilibre de Nash unique. Ainsi, la simulation de l'algorithme 4 est capable de converger efficacement vers l'équilibre de Nash des prix.

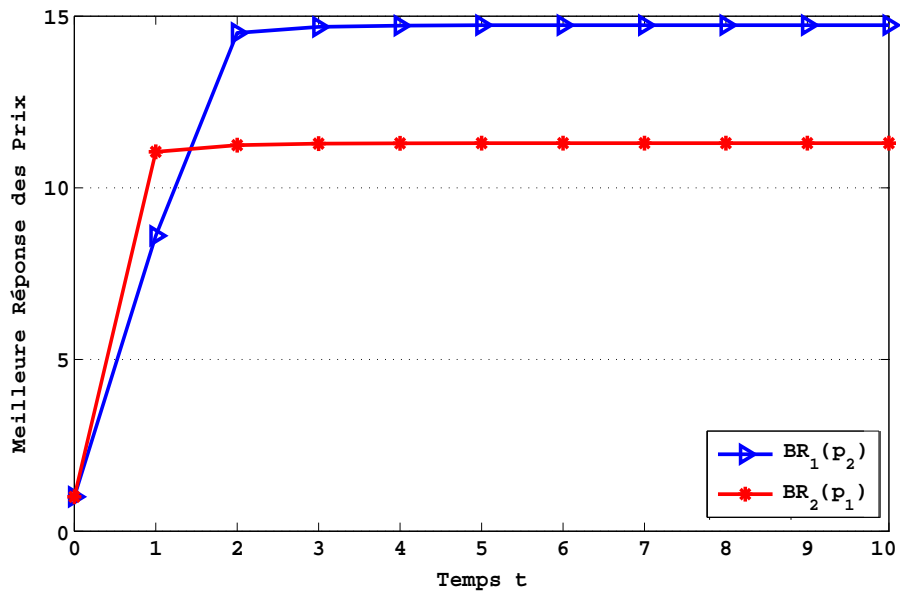


FIGURE IV.2 – Convergence vers les prix à l'équilibre de Nash



## 5.2. Impact du Degré de Rationalité des Utilisateurs sur le Prix à l'Équilibre

Dans cette simulation, nous procédons à la discrétisation à pas régulier de l'intervalle de  $\lambda$ . La figure IV.3 montre l'influence du degré d'irrationalité des clients sur les prix à l'équilibre. Pour des degrés d'irrationalité faibles ( $\lambda < 0,35$ ), le choix des utilisateurs est souvent rationnel. Le SP 1, qui commence le jeu avec des prix élevés, tend à réduire son prix pour attirer plus de clients et augmenter ses revenus. Alors que le SP 2, qui commence avec des prix motivants, tend à augmenter son prix pour assurer ses revenus. En outre, avec un degré élevé d'irrationalité des consommateurs, chaque SP augmente son prix sans se soucier de la stratégie du concurrent ; les clients prennent des décisions irrationnelles.

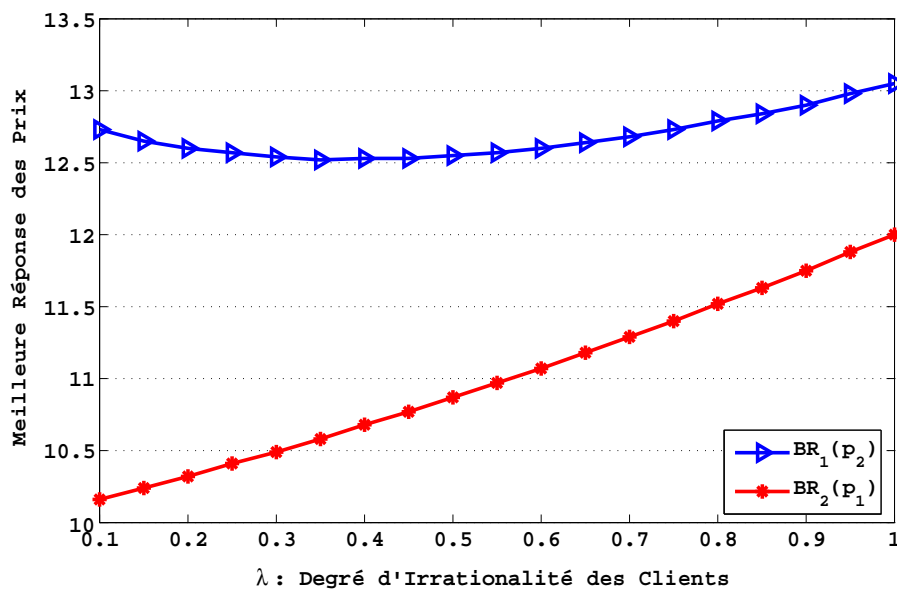


FIGURE IV.3 – Prix à l'équilibre en fonction de degré d'irrationalité des clients

## 5.3. Influence du Coût Unitaire de la Bande Passante sur le Prix à l'Équilibre

Dans cette simulation, nous procédons à la discrétisation à pas régulier de l'intervalle de  $\vartheta_i$   $i \in \{1,2\}$ . Figure IV.4 illustre l'influence du prix de l'unité de bande passante sur l'équilibre des prix. La figure montre clairement que lorsque le prix unitaire de bande passante augmente, tous les SPs sont obligés d'augmenter leurs stratégies de prix dans le but de conserver au moins leurs bénéfices actuels.

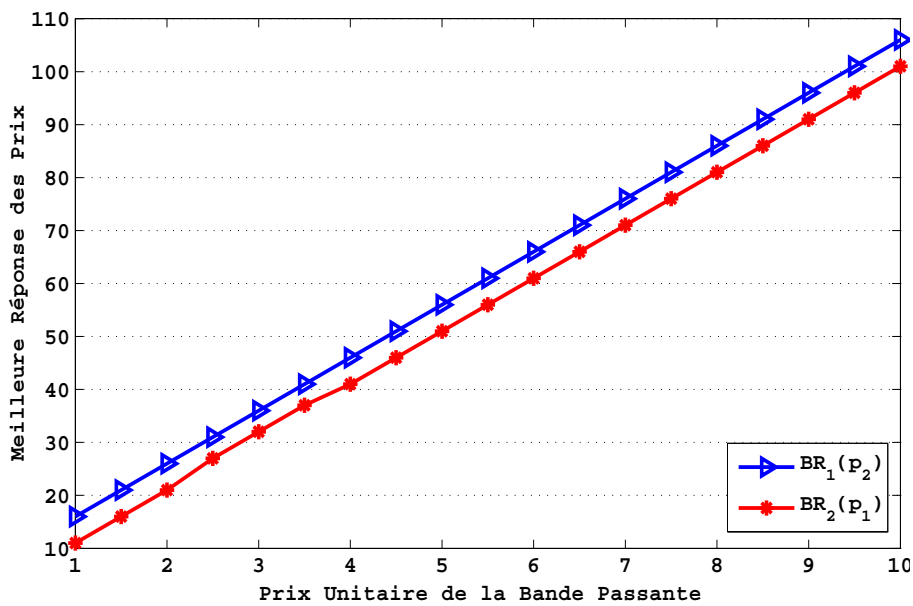


FIGURE IV.4 – Prix à l'équilibre en fonction du coût unitaire de la bande passante

### 5.4. Influence du Degré de Rationalité des Consommateurs sur leurs Revenus

Pour valider notre modèle des gains des clients dans le marché des télécommunications illustré dans l'équation IV.8, nous simulons les revenus des clients en variant le degré d'irrationalité. La figure IV.5 montre que lorsque les utilisateurs prennent des décisions rationnelles à propos des choix des SPs, leurs revenus augmentent. Alors que, lors d'un choix aléatoire du SP par les utilisateurs, les revenus de ces derniers diminuent. En résumé, plus les clients sont déroutés par leurs fournisseurs de services, plus leurs revenus diminuent.

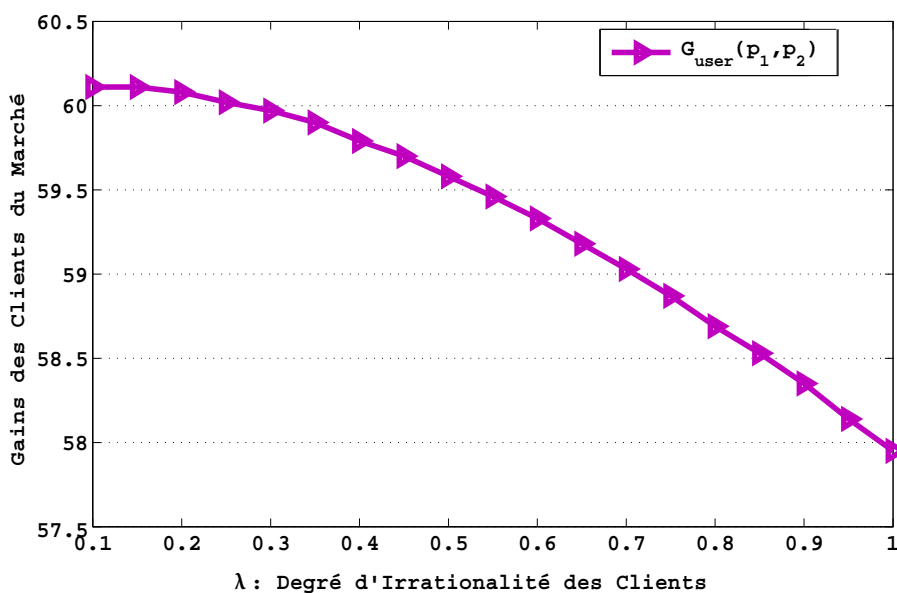


FIGURE IV.5 – Revenus du client en fonction de degré d'irrationalité

### 5.5. Influence de la Sensibilité des Consommateurs sur leurs Revenus

Dans cette section, nous considérons un utilisateur  $u$  qui souscrit aux services du SP 1 (ie  $\beta_1^u = 0$ ) et on fait varier  $\beta_2^u$  la sensibilité de  $u$  à la stratégie de SP 2 pour voir son impact sur les revenus de  $u$ . Figure IV.6 trace les variations des revenus de  $u$  en fonction de  $\beta_2^u$ . On remarque que lorsque  $\beta_2^u$  augmente, les revenus de  $u$  diminuent. Ce résultat trouve son appui dans la réalité du marché des télécommunications, de sorte que lorsqu'un utilisateur s'abonne aux services d'un SP  $i$  et que le SP  $j$  présente des offres de service plus motivantes que le SP  $i$ , l'utilisateur se sent regretter ses choix.

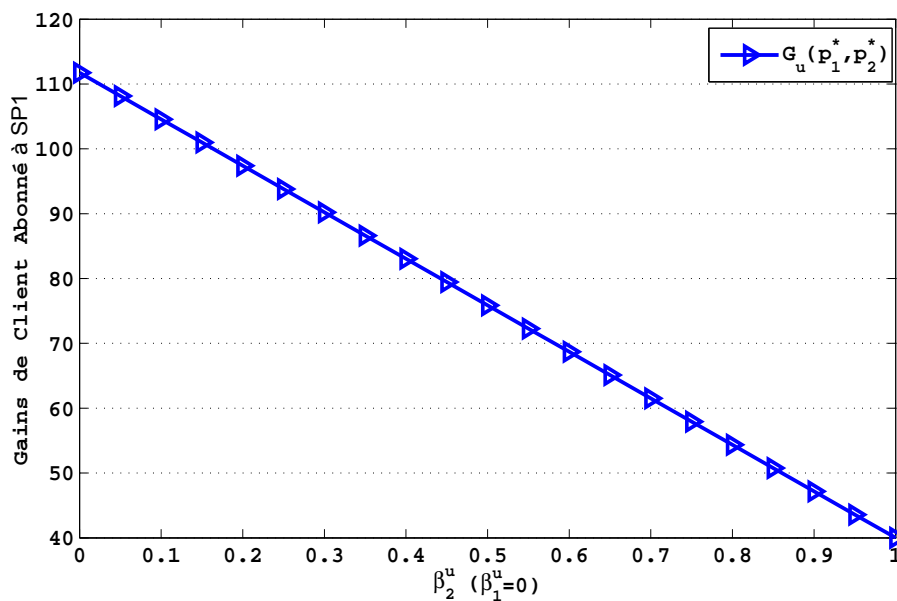


FIGURE IV.6 – Revenus de client en fonction de sa sensibilité  $\beta$

### 5.6. Efficacité de l'Équilibre

Dans cette partie, nous utilisons le concept du prix de l'anarchie présenté dans la section 4. pour discuter de l'efficacité de l'équilibre de Nash. Figure IV.7 montre la courbe de variation du PoA en fonction de  $\lambda$  le degré de rationalité des utilisateurs. Nous remarquons d'abord que le prix de l'anarchie augmente avec l'augmentation de  $\lambda$ . Lorsque le degré d'irrationalité est faible, c.-à-d. que les utilisateurs prennent leurs décisions de manière rationnelle, le prix de l'anarchie est faible, ce qui veut dire que la somme des utilités optimales est supérieure à la somme des utilités à l'équilibre ; ce qui montre que les SPs sont égoïstes et que chacun d'eux cherche à maximiser son propre profit. Alors que dans le cas où le PoA tend vers 1, les SPs ne sont pas égoïstes et chacun d'eux prend en considération la stratégie de son adversaire pour finalement tomber dans l'état d'équilibre.

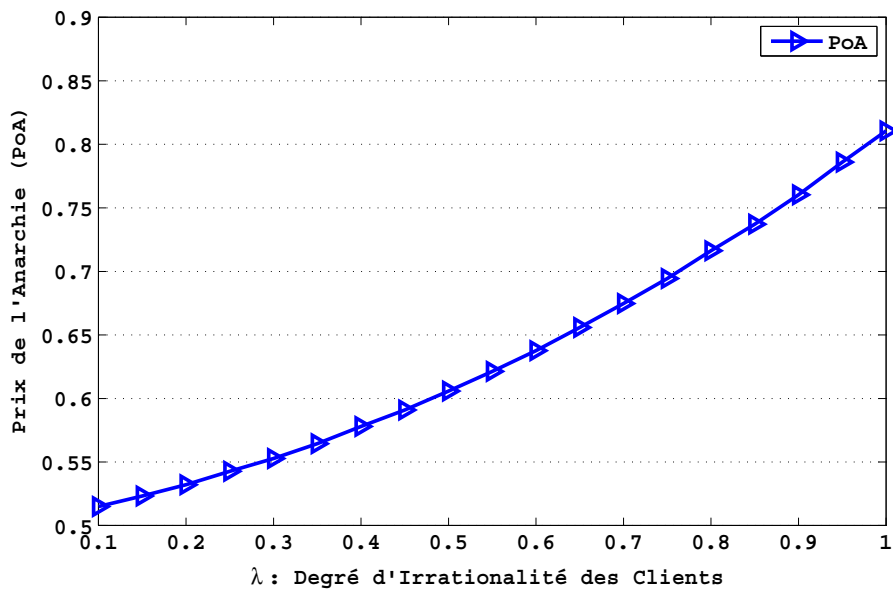


FIGURE IV.7 – Prix de l’anarchie (PoA) en fonction de degré d’irrationalité des clients  $\lambda$

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé et étudié l’impact du comportement des clients sur le marché des télécommunications en utilisant la théorie des jeux non coopératifs comme ensemble d’outils d’analyse des comportements stratégiques. D’abord, nous avons modélisé la concurrence entre les SPs selon deux paramètres de choix stratégique : le prix et la qualité de service en tenant compte de la probabilité de choisir un SP parmi d’autres. Ensuite, nous avons proposé un modèle de gains des utilisateurs dans le marché des télécommunications. Nous avons démontré l’existence et l’unicité de l’équilibre de Nash pour ce jeu, puis nous avons appliqué l’algorithme de la meilleure réponse pour l’apprentissage de cet équilibre. Enfin, nous avons montré que les SPs présents sur le marché des télécommunications ont intérêt dans la confusion des clients, ce qui signifie que moins les clients sont rationnels, les SPs gagnent plus.

Dans des travaux futurs, nous comptons étudier ce système en considérant la variabilité de la rationalité des clients. Pour cela, nous pensons modéliser la fonction de rationalité. Cette fonction dépend à la fois d’un ensemble de paramètres liés au comportement des clients et aussi d’autres liés aux offres confuses proposées par les SPs dans le marché des télécommunications.

# Chapitre V

## Analyse de la Concurrence entre les Fournisseurs de Contenu dans le Marché d'Internet

### 1. Introduction

L'Internet actuel a permis de nombreuses applications et services distribués. Cependant, les fournisseurs sont généralement confrontés à de nombreux défis pour déterminer des solutions techniques et économiques à la prestation de services [90]. Les principaux défis sont de savoir comment tarifier et facturer ces services et comment établir des relations économiques avec d'autres fournisseurs qui sont nécessaires pour fournir des services de bout en bout. Les modèles d'équilibre pour le marché de l'Internet supposent généralement des relations économiques de base et considèrent le prix comme le seul facteur qui affecte la demande des utilisateurs [91, 92, 93]. Cependant, dans les nouveaux paradigmes de l'Internet et même dans le cas des réseaux de chaîne d'approvisionnement, le prix n'est pas le seul facteur. La qualité de service (QoS), c.-à-d. la capacité à fournir différentes priorités aux applications, aux utilisateurs ou aux flux de données, entre en jeu [94, 95, 96, 97, 98].

Notre contribution dans ce chapitre est d'élargir l'étude sur le domaine de l'Internet en ajoutant un modèle d'utilité sur le revenu des fournisseurs de contenu (CPs). Les CPs peuvent être des réseaux sociaux, des moteurs de recherche Internet ou tout autre site Web. Dans cette étude, nous proposons une modélisation de la compétition entre les CPs basée sur les paramètres de prix et de crédibilité du contenu qui est utilisée pour mesurer l'efficacité du contenu fourni par un CP. La crédibilité est une fonction qui dépend de la qualité de service (QoS) et de la qualité du contenu (QoC). Le comportement des clients est modélisé par la fonction de la demande qui dépend des stratégies des fournisseurs. Nous utilisons la théorie des jeux pour étudier le comportement des CPs dans Internet. Ensuite, nous étudions l'impact de leurs décisions sur les clients et les autres CPs. Nous concentrons nos études sur les jeux

non-coopératifs en matière de solutions stables, qui sont une pure stratégie d'équilibre de Nash (NE) du jeu. Nous ne considérons pas des équilibres à stratégies mixtes, car notre environnement nécessite une stratégie concrète plutôt qu'une stratégie aléatoire, qui serait le résultat d'une stratégie mixte. Par conséquent, en utilisant le concept d'équilibre de Nash, nous sous-entendons un équilibre de Nash exacte à pure stratégie, sauf mention contraire.

Selon E. Altman [99], les CPs peuvent être confrontés à la question "comment choisir dans quel contenu se spécialiser". Dans ce travail, l'auteur considère plusieurs CPs confrontés à un problème similaire et étudie l'impact de leurs décisions les uns sur les autres en utilisant une approche de la théorie des jeux. L'auteur montre que le problème de la sélection du type de contenu est équivalent à un jeu de congestion. Dans [100], les auteurs ont étudié des problèmes de jeu impliquant deux types de CPs : un qui correspond à des CPs indépendants, et un qui correspond à des CPs ayant des accords exclusifs avec des fournisseurs d'accès Internet (ISPs). Le coût pour l'utilisateur d'Internet qui est abonné à un certain ISP pour aller chercher du contenu auprès d'un CP indépendant ou d'un CP ayant un accord exclusif avec un autre ISP est supposé être plus élevé que le coût pour récupérer du contenu auprès du CP qui a un accord exclusif avec son propre ISP.

Dans [94], les auteurs considèrent un jeu de Stackelberg, où le CP décide d'abord la récompense, et après cela, les pairs décident de la quantité de capacité. Le CP récompense les pairs en fonction de la capacité de téléchargement qu'ils apportent. Du point de vue du CP, il vise à minimiser son coût total, c.-à-d le coût du téléchargement et le coût de la récompense des pairs. L'utilité d'un pair est la récompense qu'il reçoit, moins son coût de téléchargement.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : nous présentons la problématique dans la section 2.. Dans la section 3., nous formulons notre problème comme modèle de jeu non-coopératif. Nous présentons et interprétons les résultats numériques dans la section 4. et concluons dans la section 5..

## 2. Modélisation du Problème

Dans cette section, nous formulons l'interaction entre les fournisseurs de contenu (CPs) en tant que jeu non coopératif. Chaque CP choisit la crédibilité du contenu et le prix correspondant.

Nous considérons un système avec  $N$  fournisseurs de contenu. Soient  $p_i$  et  $c_i$ , respectivement, le prix et la crédibilité du contenu garantis par CP  $i$ . Chaque client cherche le CP qui lui permet une crédibilité de contenu suffisante pour satisfaire ses besoins, avec un prix convenable. Nous considérons que les comportements des clients sont traités par une fonction simple appelée fonction de demande et donnée par l'équation (V.4). Cette fonction

dépend des stratégies du prix et de la crédibilité de contenu de tous les CPs. Les CPs sont censés connaître l'effet de leur politiques sur les clients.

## 2.1. Modèle de la Crédibilité du Contenu

On suppose que la fonction de la crédibilité du contenu  $c_i$  du CP- $i$  est définie en fonction de la QoS  $q_{s_i}$  et la qualité du contenu (QoC)  $q_{c_i}$  comme suit :

$$c_i = \lambda q_{s_i} + \mu q_{c_i} \quad (\text{V.1})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes positives représentant respectivement la sensibilité de la crédibilité du contenu à la QoS et à la QoC, telles que :

$$\lambda + \mu = 1 \quad (\text{V.2})$$

Nous considérons que la mesure définissant la QoS correspond à une certaine fonction du délai prévu [101] définie par l'inverse de la racine carrée du délai :

$$q_{s_i} = \frac{1}{\sqrt{\text{Delay}}} = \sqrt{b_i - D_i} \quad (\text{V.3})$$

où  $b_i$  est la quantité de bande passante requise par CP- $i$ .

La qualité du contenu fourni peut être spécifiée pour un domaine spécifique du contenu, par exemple le streaming vidéo.

## 2.2. Modèle de la Demande

Nous considérons que la fonction de la demande  $D_i$  du CP- $i$  est linéaire par rapport au prix  $p_i$  et à la crédibilité  $c_i$  [12]. Cette fonction de demande dépend également des prix  $p_{-i}$  et des crédibilités  $c_{-i}$  fixés par les concurrents. A savoir, la fonction de demande aux services de CP- $i$  dépend des vecteurs de stratégies  $p = [p_1, \dots, p_N]$  et  $c = [c_1, \dots, c_N]$ . Éventuellement,  $D_i$  est décroissante par rapport à  $p_i$  et croissante par rapport à  $p_j$ ,  $j \neq i$ . Alors que cette fonction est croissante par rapport à  $c_i$  et par rapport à  $c_j$ ,  $j \neq i$ .

Alors, la fonctions de la demande aux services de CP- $i$  peut être écrite comme suit :

$$D_i(p, c) = D_0^i - \alpha_i^i p_i + \beta_i^i c_i + \sum_{j, j \neq i} [\alpha_i^j p_j - \beta_i^j c_j] \quad (\text{V.4})$$

où  $D_0^i$  est une constante positive utilisée pour assurer des demandes non-négatives sur le domaine réalisable. Alors que  $\alpha_i^j$  et  $\beta_i^j$  sont des constantes positives représentant respectivement les sensibilités de CP- $i$  au prix et à la crédibilité du contenu de CP- $j$ .

$$\sum_{j=1}^N \alpha_i^j = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^N \beta_i^j = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{V.5})$$

**Hypothèse 1** : Pour tout profil de prix, les sensibilités mutuelles de prix satisfont :

$$\alpha_i^i \geq \sum_{j, j \neq i} \alpha_i^j, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

**Hypothèse 2** : Pour tout profil de crédibilité de contenu, les sensibilités mutuelles de crédibilité satisfont :

$$\beta_i^i \geq \sum_{j, j \neq i} \beta_i^j, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Les hypothèses 1 et 2 seront nécessaires pour assurer l'unicité de l'équilibre résultant. Ce sont des conditions raisonnables, dans la mesure où l'hypothèse 1 (respectivement 2) implique que l'influence du prix (respectivement crédibilité du contenu) fixé par un CP est significativement plus importante sur sa demande que les prix (respectivement crédibilités du contenu) de ses concurrents. Cette condition pourrait alors prendre en compte la présence de la fidélité des clients et / ou une connaissance imparfaite des prix des concurrents [12].

### 2.3. Modèle de la Fonction d'Utilité

Le revenu total de CP- $i$  est  $p_i D_i$ . Par conséquent, le bénéfice net de CP- $i$  représente simplement la différence entre le total des revenus et les charges.

$$U_i(p, q_s, q_c) = p_i D_i(p, q_s, q_c) - F_i(p, q_s, q_c), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{V.6})$$

où  $F_i(p, q_s, q_c)$  représente les frais payés par CP- $i$  (investissement de CP- $i$ ) :

$$F_i(p, q_s, q_c) = C_s^i + H_s^i \quad (\text{V.7})$$

avec :

- $C_s^i$  est le coût total du CP- $i$  pour produire la crédibilité du contenu  $c_i$  :

$$C_s^i = \theta_i c_i. \quad (\text{V.8})$$

où  $\theta_i$  est le coût par unité de la crédibilité du contenu pour CP- $i$ .

- $H_s^i$  est le coût total pour transmettre le contenu avec crédibilité  $c_i$ , à savoir :

$$H_s^i = \gamma_i D_i(p, q_s, q_c) c_i \quad (\text{V.9})$$



où  $\gamma_i$  est le coût pour transmettre une unité du contenu avec crédibilité  $c_i$ .

L'équation V.7 devient :

$$F_i(p, q_s, q_c) = \theta_i c_i + \gamma_i D_i(p, q_s, q_c) c_i \quad (\text{V.10})$$

Alors, à partir des équations V.1, V.8 et V.9, la fonction d'utilité du CP- $i$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$U_i(p, q_s, q_c) = p_i D_i(p, q_s, q_c) - \theta_i (\lambda q_{s_i} + \mu q_{c_i}) - \gamma_i D_i(p, q_s, q_c) (\lambda q_{s_i} + \mu q_{c_i}) \quad (\text{V.11})$$

### 3. Formulation du Jeu Non-coopératif

Soit  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(\cdot)\}]$  désigne le jeu non coopératif, où  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  est l'ensemble d'indices identifiant les CPs,  $P_i$  est l'ensemble des stratégies de prix de CP- $i$ ,  $Q_{s_i}$  est l'ensemble des stratégies de QoS de CP- $i$ ,  $Q_{c_i}$  est l'ensemble des stratégies de QoC de CP- $i$  et  $U_i(\cdot)$  est la fonction d'utilité. Soient le vecteur prix  $p = (p_1, \dots, p_N)^T \in P^N = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$ , le vecteur QoS  $q_s = (q_{s_1}, \dots, q_{s_N})^T \in Q_s^N = Q_{s_1} \times Q_{s_2} \times \dots \times Q_{s_N}$  et le vecteur QoC  $q_c = (q_{c_1}, \dots, q_{c_N})^T \in Q_c^N = Q_{c_1} \times Q_{c_2} \times \dots \times Q_{c_N}$ . L'utilité de CP- $i$  quand il décide de la stratégie  $p_i$ ,  $q_{s_i}$  et  $q_{c_i}$  est donnée dans l'équation V.11.

Nous supposons que les espaces de stratégies  $P_i$ ,  $Q_{s_i}$  et  $Q_{c_i}$  de chaque CP sont des ensembles compacts et convexes avec des contraintes maximales et minimales. Pour tout CP- $i$  donné, nous considérons que les espaces de stratégies sont les intervalles fermés  $P_i = [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$ ,  $Q_{s_i} = [\underline{q}_{s_i}, \overline{q}_{s_i}]$  et  $Q_{c_i} = [\underline{q}_{c_i}, \overline{q}_{c_i}]$ .

Afin de maximiser leurs utilités, chaque CP- $i$  décide d'un prix  $p_i$ , QoS  $q_{s_i}$  et QoC  $q_{c_i}$ . Formellement, le problème peut être exprimé comme suit :

$$\max_{p_i \in P_i, q_{s_i} \in Q_{s_i}, q_{c_i} \in Q_{c_i}} U_i(p, q_s, q_c), \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

#### 3.1. Jeu de QoS

En considérant une politique à prix et QoC fixes, un équilibre de Nash en matière de QoS est formellement défini comme suit.

**Définition V.1.** Un vecteur QoS  $q_s^* = (q_{s_1}^*, \dots, q_{s_N}^*)$  est l'équilibre de Nash en matière de QoS du jeu  $G$  défini par  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  si :

$$\forall (i, q_{s_i}) \in (\mathcal{N}, Q_{s_i}), \quad U_i(q_{s_i}^*, q_{s_{-i}}^*) \geq U_i(q_{s_i}, q_{s_{-i}}^*)$$

**Théorème V.1.** *Un équilibre de Nash en matière de QoS pour le jeu  $G$  défini par :  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  existe et il est unique.*

**Démonstration :**

Pour démontrer l'existence, nous notons que pour chaque CP- $i$ , l'espace de stratégies des QoS  $Q_{s_i}$  est défini par toutes les QoS dans l'intervalle fermé borné par les QoS minimale et maximale. Ainsi, l'espace de stratégies  $Q_s = Q_{s_1} \times Q_{s_2} \times \dots \times Q_{s_N}$  est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . En plus, les fonctions d'utilité sont concaves par rapport aux QoSs, comme le montre le test de la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{s_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) = -2\gamma_i \beta_i^i \lambda^2 \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (\text{V.12})$$

ce qui assure l'existence d'un équilibre de Nash.

L'unicité du point d'équilibre est garantie si la fonction d'utilité satisfait aux conditions de Rosen [102]. Dans [88], l'auteur a dérivé la condition de solvabilité de dominance, qui est une autre alternative pour satisfaire les conditions de Rosen. Le point d'équilibre de Nash est unique si :

$$-\frac{\partial^2}{\partial q_{s_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial q_{s_i} \partial q_{s_j}} U_i(p, q_s, q_c) \right| \geq 0 \quad (\text{V.13})$$

Le partiel mixte est écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{s_i} \partial q_{s_j}} U_i(p, q_s, q_c) = \gamma_i \beta_i^j \lambda^2. \quad (\text{V.14})$$

Après la substitution des équations V.12 et V.14 dans l'équation V.13, nous avons :

$$-\frac{\partial^2}{\partial q_{s_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial q_{s_i} \partial q_{s_j}} U_i(p, q_s, q_c) \right| = \gamma_i \lambda^2 \left( 2\beta_i^i - \sum_{j, j \neq i} \beta_i^j \right) \geq 0. \quad (\text{V.15})$$

Le point d'équilibre de Nash en matière de QoS est alors unique et donné par :

$$q_{s_i}^* \in \operatorname{argmax}_{q_{s_i} \in Q_{s_i}} U_i(q_{s_i}, q_{s_{-i}}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{V.16})$$

### 3.2. Jeu de Prix

En considérant une politique à QoS et QoC fixes, un équilibre de Nash en matière de prix est formellement défini comme suit.

**Définition V.2.** Un vecteur prix  $p^* = (p_1^*, \dots, p_N^*)$  est un équilibre de Nash en matière de prix du jeu  $G$  défini par  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  si :

$$\forall (i, p_i) \in (\mathcal{N}, P_i), U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i, p_{-i}^*)$$

**Théorème V.2.** Un équilibre de Nash en matière de prix pour le jeu  $G$  défini par :  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  existe et il est unique.

**Démonstration :**

Pour démontrer l'existence, nous notons que pour chaque CP- $i$ , l'espace de stratégies des prix  $P_i$  est défini par tous les prix dans l'intervalle fermé borné par les prix minimal et maximal. Ainsi, l'espace de stratégies  $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$  est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . En plus, les fonctions d'utilité sont concaves par rapport aux prix, comme le montre le test de la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} U_i(p, q_s, q_c) = -2\alpha_i^i \leq 0. \quad (\text{V.17})$$

ce qui assure l'existence d'un équilibre de Nash.

Le point d'équilibre de Nash en matière de prix est unique si :

$$-\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} U_i(p, q_s, q_c) \right| \geq 0 \quad (\text{V.18})$$

Le partiel mixte est écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} U_i(p, q_s, q_c) = \alpha_i^j \quad (\text{V.19})$$

Après la substitution des équations V.17 et V.19 dans l'équation V.18, nous avons :

$$-\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} U_i(p, q_s, q_c) \right| = 2\alpha_i^i - \sum_{j, j \neq i} \alpha_i^j \geq 0 \quad (\text{V.20})$$

Le point d'équilibre de Nash en matière de prix est alors unique et donné par :

$$p_i^* \in \operatorname{argmax}_{p_i \in P_i} U_i(p_i, p_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{V.21})$$

### 3.3. Jeu de QoC

En considérant une politique à prix et QoS fixes, un équilibre de Nash en matière de QoC est formellement défini comme suit.

**Définition V.3.** Un vecteur QoC  $q_c^* = (q_{c_1}^*, \dots, q_{c_N}^*)$  est un équilibre de Nash en matière de QoC du jeu  $G$  défini par  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  si :

$$\forall (i, q_{c_i}) \in (\mathcal{N}, Q_{c_i}), U_i(q_{c_i}^*, q_{c_{-i}}^*) \geq U_i(q_{c_i}, q_{c_{-i}}^*)$$

**Théorème V.3.** Un équilibre de Nash en matière de QoC pour le jeu  $G$  défini par :  $G = [\mathcal{N}, \{P_i, Q_{s_i}, Q_{c_i}\}, \{U_i(p, q_s, q_c)\}]$  existe et il est unique.

#### Démonstration :

Avec le même raisonnement que dans les sous-sections sur le jeu de QoS et le jeu de prix, les fonctions d'utilité sont concaves par rapport aux QoCs, comme le montre le test de la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{c_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) = -2\gamma_i \beta_i^i \mu^2 \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (\text{V.22})$$

Le point d'équilibre de Nash en matière de QoC est unique si :

$$-\frac{\partial^2}{\partial q_{c_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial q_{c_i} \partial q_{c_j}} U_i(p, q_s, q_c) \right| \geq 0 \quad (\text{V.23})$$

Le partiel mixte est écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{c_i} \partial q_{c_j}} U_i(p, q_s, q_c) = \gamma_i \beta_i^j \mu^2 \quad (\text{V.24})$$

Après la substitution des équations V.22 et V.24 dans l'équation V.23, nous avons :

$$-\frac{\partial^2}{\partial q_{c_i}^2} U_i(p, q_s, q_c) - \sum_{j, j \neq i} \left| \frac{\partial^2}{\partial q_{c_i} \partial q_{c_j}} U_i(p, q_s, q_c) \right| = \gamma_i \mu^2 \left( 2\beta_i^i - \sum_{j, j \neq i} \beta_i^j \right) \geq 0 \quad (\text{V.25})$$

Le point d'équilibre de Nash en matière de QoC est alors unique et donné par :

$$q_{c_i}^* \in \operatorname{argmax}_{q_{c_i} \in Q_{c_i}} U_i(q_{c_i}, q_{c_{-i}}^*), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{V.26})$$

### 3.4. Jeu de Prix-QoS-QoS

Dans les sections précédentes, nous avons montré l'existence et l'unicité de NE, en fixant à chaque fois l'un des paramètres. La prochaine tâche consiste à déterminer le prix, la QoS et la QoC à l'équilibre. Ce calcul sera basé sur l'algorithme de la meilleure réponse (algorithme 6).

---

**Algorithme 6** Algorithme de la meilleure réponse

---

1: Initialiser aléatoirement les vecteurs  $X$  ;

2: Pour chaque CP- $i$   $i \in \mathcal{N}$  à l'itération  $t$  :

$$\text{a) } x_i^{t+1} = \operatorname{argmax}_{x_i \in X_i} (U_i(X)).$$


---

où :

- $X$  désigne les vecteurs  $p$ ,  $q_s$  et  $q_c$ .
- $X_i$  désignent les profils des stratégies de prix, de QoS ou de QoC de CP- $i$ .

### 3.5. Prix de l'Anarchie

Le concept de bien-être social [59] est défini comme la somme des utilités de tous les agents dans le système (c-à-d les fournisseurs). Il est bien connu dans la théorie des jeux que l'égoïsme des agents, tel que dans un équilibre de Nash, ne conduit pas en général à une situation socialement efficace. En tant que mesure de la perte d'efficacité due à l'égoïsme et à la divergence des intérêts des acteurs, nous utilisons le Prix de l'Anarchie (PoA) [54].

Cette perte a été définie comme le rapport le plus défavorable comparant la mesure d'efficacité globale (qui doit être choisie) à l'issue du jeu non coopératif joué entre les acteurs, à la valeur optimale de cette mesure d'efficacité. Une valeur de PoA proche de 1 indique que l'équilibre est approximativement socialement optimal, et donc les conséquences du comportement égoïste sont relativement bénignes. Le concept du prix de l'anarchie a été utilisé pour la première fois dans [54], mais l'idée de mesurer l'inefficacité de l'équilibre est plus ancienne. Le concept sous sa forme actuelle a été conçu pour être l'analogue du « rapport d'approximation » dans les algorithmes d'approximation ou le « rapport de compétitivité » dans les algorithmes en ligne. Comme dans [61], nous mesurons la perte d'efficacité due à l'égoïsme des acteurs comme quotient entre le bien-être social obtenu à l'équilibre de Nash et la valeur maximale du bien-être social :

$$POA = \frac{\min_{p, q_s, q_c} W_{NE}(p, q_s, q_c)}{\max_{p, q_s, q_c} W(p, q_s, q_c)} \quad (\text{V.27})$$

où  $W(p, q_s, q_c) = \sum_{i=1}^N U_i(p, q_s, q_c)$  est une fonction de bien-être et  $W_{NE}(p^*, q_s^*, q_c^*) = \sum_{i=1}^N U_i(p^*, q_s^*, q_c^*)$  est une somme des utilités de tous les acteurs à la situation d'équilibre de Nash.

## 4. Résultats et Discussions

Pour clarifier et montrer comment tirer avantage de notre étude théorique, nous proposons d'étudier numériquement le jeu de la part de marché tout en considérant l'algorithme de la meilleure réponse et les expressions de la demande ainsi que les fonctions d'utilité des CPs. Pour cela, nous considérons un système avec trois CPs cherchant à maximiser leurs revenus respectifs. Table V.1 représente les valeurs des paramètres du système considérées dans cette étude numérique.

$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$	$\alpha_i^j, i \neq j$	$\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$	$\beta_i^j, i \neq j$
0.7	0.15	0.7	0.3
$\lambda = \mu$	$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$	$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$	$D_0^1$
0.5	2	1	400
$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3$	$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3$	$\bar{q}_{s1} = \bar{q}_{s2} = \bar{q}_{s3}$	$\bar{q}_{s1} = \bar{q}_{s2} = \bar{q}_{s3}$
1000	1	1000	1
$\bar{q}_{c1} = \bar{q}_{c2} = \bar{q}_{c3}$	$\bar{q}_{c1} = \bar{q}_{c2} = \bar{q}_{c3}$	$D_0^2$	$D_0^3$
1000	1	300	200

TABLEAU V.1 – Paramètres du système utilisés pour l'étude numérique.

Figures V.1, V.2 et V.3 présentent respectivement les courbes de la convergence à l'équilibre de Nash de prix, à l'équilibre de Nash de QoC et à l'équilibre de Nash de QoS. Il est clair que notre algorithme de la meilleure réponse converge vers un unique équilibre de Nash pour les jeux de prix, de QoC et de QoS. Nous remarquons également que la vitesse de convergence est relativement élevée (environ 5 itérations suffisent pour converger vers le point d'équilibre).

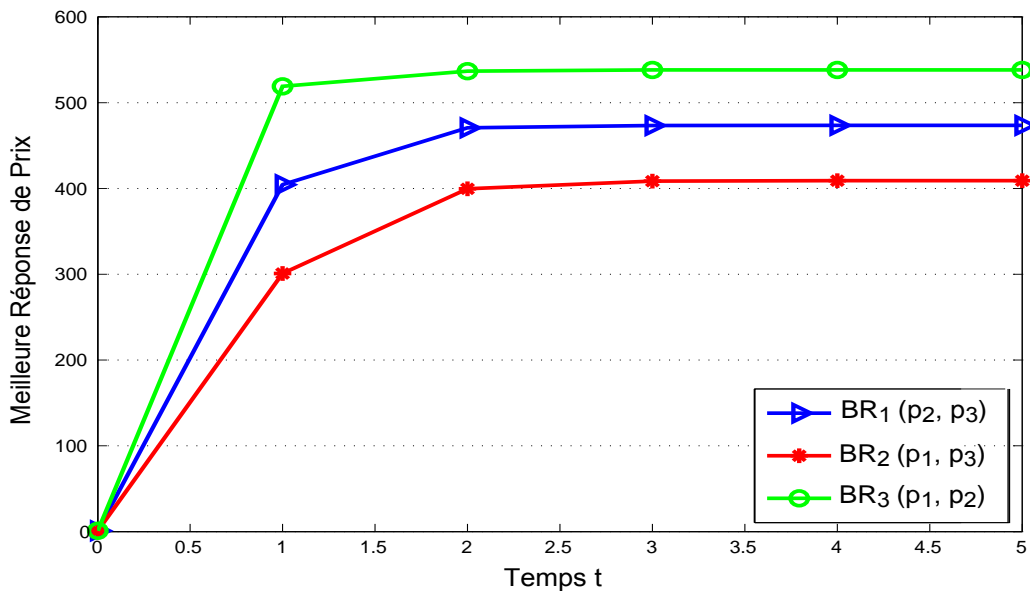


FIGURE V.1 – Jeu de prix : Convergence vers l'équilibre de Nash des prix.

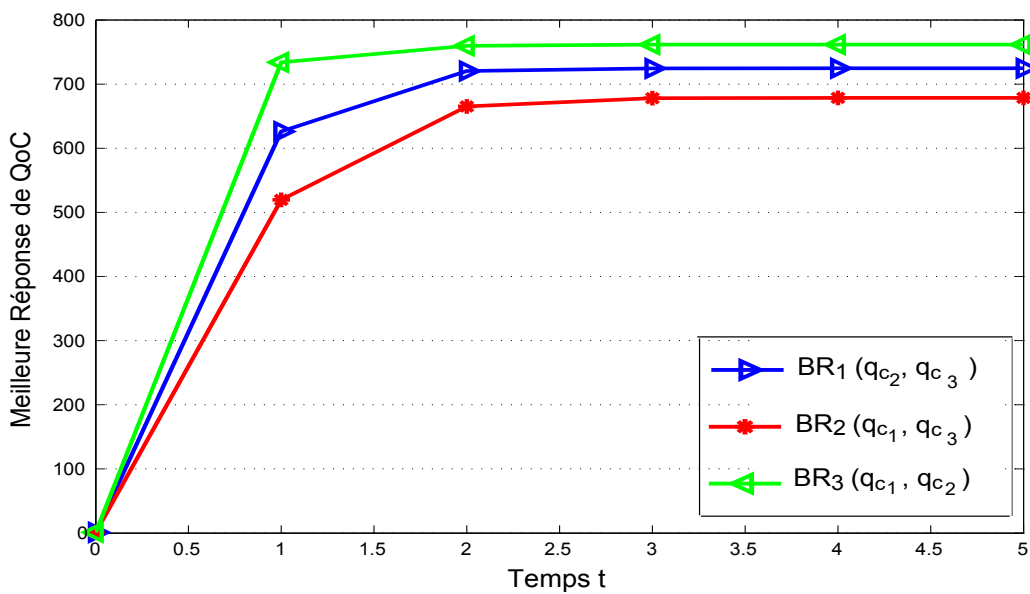


FIGURE V.2 – Jeu de QoC : Convergence vers l'équilibre de Nash des QoCs.

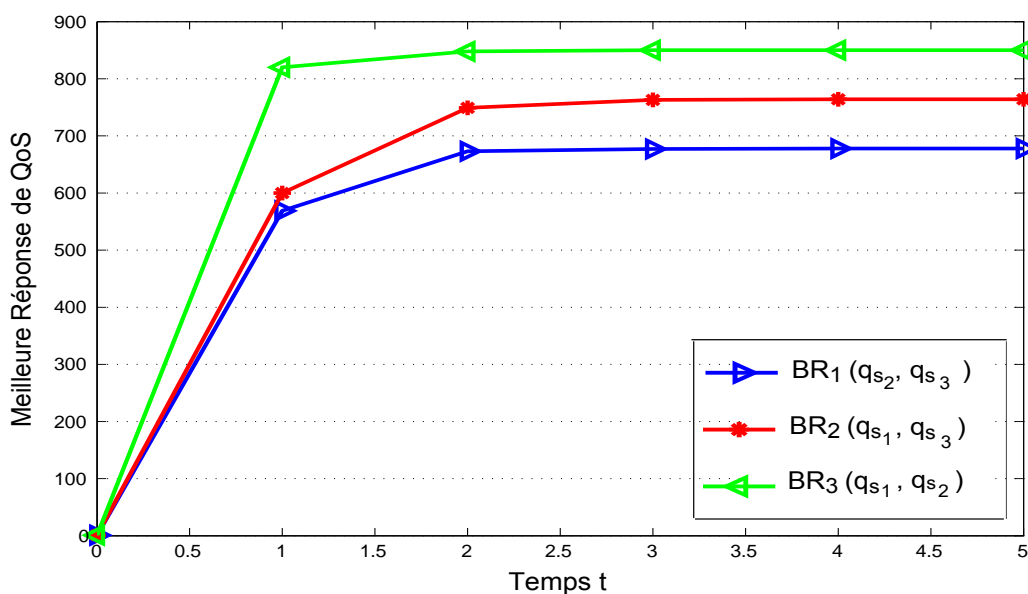


FIGURE V.3 – Jeu de QoS : Convergence vers l'équilibre de Nash des QoSs.

Dans ce qui suit, nous discutons de l'impact des paramètres du système sur l'efficacité du système représentée par le prix de l'anarchie (PoA).

Figures V.4 et V.5 tracent les courbes de variation de PoA en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  qui représentent respectivement les sensibilités de CP- $i$  à son prix  $p_i$  et à sa crédibilité de contenu  $c_i$ . Dans ces figures, nous remarquons d'abord que le PoA augmente avec l'augmentation de  $\alpha$  et  $\beta$ . Le fait que le PoA augmente avec l'augmentation de  $\alpha$  et  $\beta$  trouve l'intuition simple que l'augmentation de la sensibilité des CPs à leurs prix et à leurs crédibilités de contenu donne de plus en plus de liberté aux CPs pour optimiser l'équilibre de Nash et ainsi optimiser l'efficacité du système. Lorsque  $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3 = 1$  et  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = 1$ , en d'autres termes, lorsque la sensibilité d'un CP aux prix et aux crédibilités de ses concurrents est nulle, le PoA converge vers 1 et l'équilibre est approximativement socialement optimal.



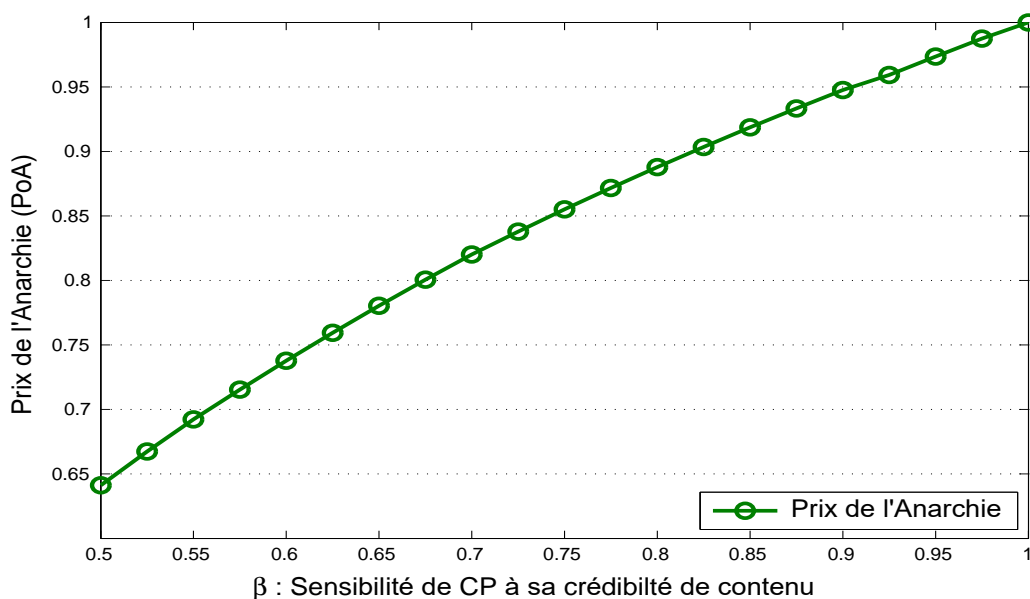


FIGURE V.4 – Prix de l'anarchie en fonction de  $\beta = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3$

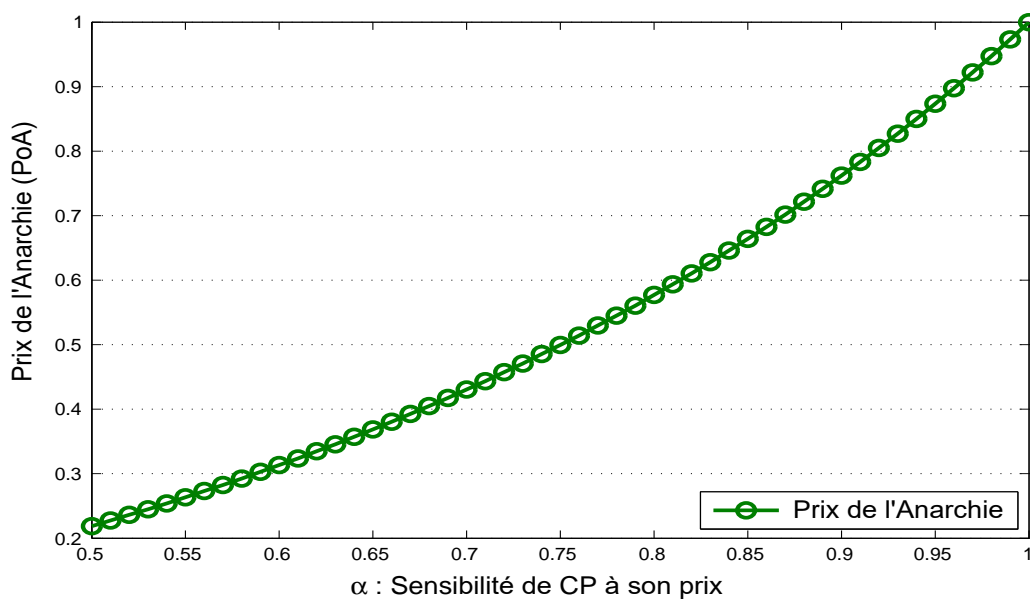


FIGURE V.5 – Prix de l'anarchie en fonction de  $\alpha = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_3^3$

Figure V.6 montre la variation de PoA en fonction de  $\theta$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ . Nous remarquons d'après la figure que l'équilibre de Nash fonctionne bien et que la perte d'efficacité n'est que d'environ 8%. Ce résultat indique que l'équilibre de Nash de ce jeu est équitable et socialement efficace.

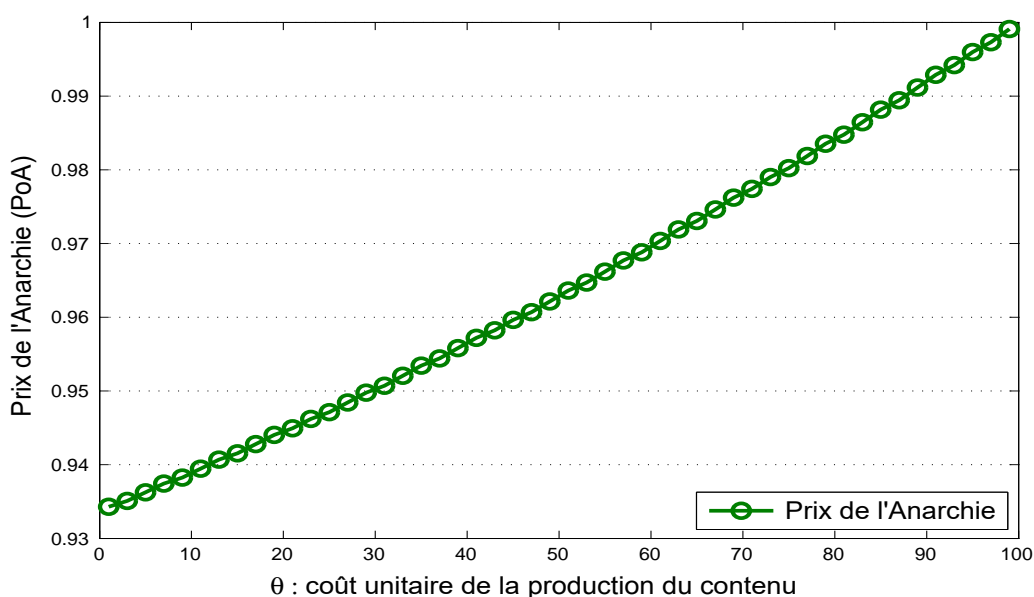


FIGURE V.6 – Prix de l’anarchie en fonction de  $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ .

Figure V.7 montre la variation de PoA en fonction de  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$  qui représente le coût de transmission d’une unité de contenu avec une certaine crédibilité. Dans cette figure, nous remarquons d’abord que le prix de l’anarchie augmente avec l’augmentation de  $\gamma$ . D’un côté, si le coût de transmission est moins cher, les CPs se comportent de manière égoïste et chacun d’eux cherche à maximiser ses revenus individuellement. De l’autre côté, si le coût est très élevé, les CPs coopèrent pour optimiser l’équilibre de Nash. Enfin, on peut dire que  $\gamma$  contrôle l’égoïsme des opérateurs.

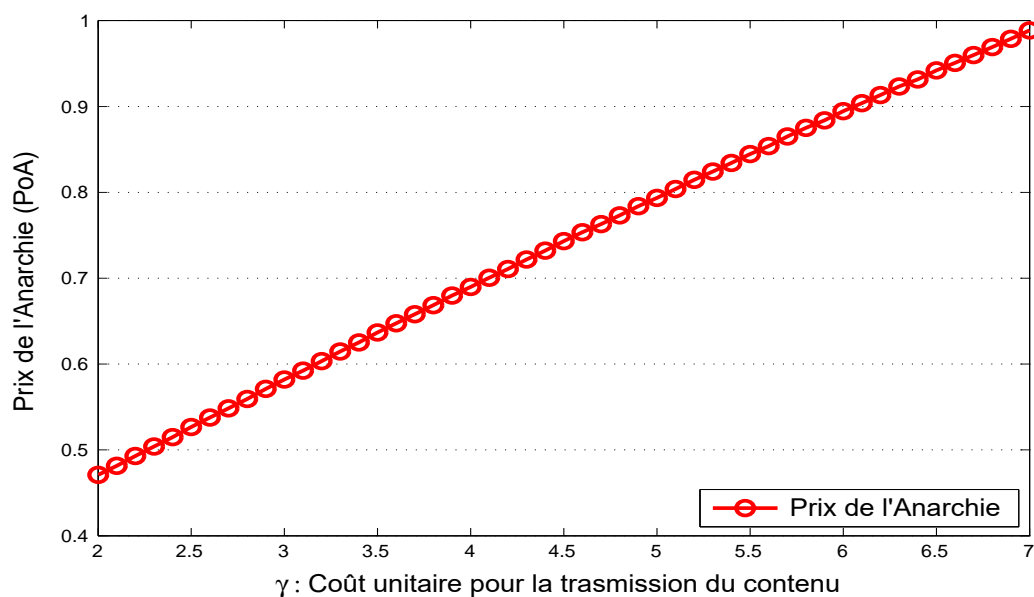


FIGURE V.7 – Prix de l’anarchie en fonction de  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ .

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une analyse pour modéliser les interactions complexes entre les fournisseurs de contenu en tant que joueurs à travers un modèle d'équilibre de Nash à deux paramètres de décision. Le modèle est basé sur une simple fonction linéaire de la demande qui décrit le comportement des clients. Ces fonctions prennent en compte les caractéristiques de tous les CPs en se basant sur deux paramètres décrivant le prix de service et la crédibilité du contenu de chaque opérateur. Nous avons établi l'existence et l'unicité d'un point d'équilibre de Nash et nous l'avons montré avec des résultats numériques pertinents. Pour quantifier l'efficacité de cet équilibre, nous avons utilisé la mesure de prix de l'anarchie et nous avons montré ses variations en fonction des paramètres du modèle. Notre algorithme proposé trouve très rapidement le prix et la crédibilité de l'équilibre à choisir par chaque CP.

Le problème étudié dans ce chapitre peut être développé en suivant les pistes suivants :

- Modéliser les choix des utilisateurs avec une fonction non linéaire et complexe traduisant plus la réalité, telle que celle basée sur le modèle Logit.
- Introduire des revenus publicitaires dans la fonction d'utilité des CPs pour couvrir le maximum de revenus. En 2010, les revenus publicitaires de Google ont dépassés 20 milliards.
- Prendre en compte le pouvoir d'achat des clients d'un marché cible pour les CPs.

# Conclusion Générale et Perspectives

Une analyse technico-économique des interactions entre fournisseurs de services (SPs) de télécommunication a été développée dans cette thèse. Notre objectif était notamment d'évaluer l'effet des comportements égoïstes sur les motivations des SPs à investir et sur l'incitation de l'utilisateur à souscrire aux services d'un SP donné. Nous avons présenté et analysé certains modèles de tarification traitant de la concurrence dans le contexte de l'évolution des réseaux et des services de télécommunication. Pour cela, nous avons examiné divers aspects du jeu non coopératif de prix / QoS entre SPs utilisant des méthodes fournies par la théorie des jeux.

Nous avons commencé par une introduction aux méthodologies couramment utilisées pour analyser les interactions entre des SPs égoïstes cherchant à maximiser leurs propres revenus. Pour souligner le bien-fondé de la théorie des jeux dans la tarification des télécommunications, nous avons présenté un état de l'art des travaux réalisés dans ce sens ainsi que leurs apports aux problématiques traitées. Nous avons également décrit le cadre général de notre thèse, nos motivations et nos contributions.

Nous avons présenté, ensuite, les bases et les principes fondamentaux de la théorie des jeux utilisés dans cette thèse pour analyser la concurrence entre les acteurs du marché des télécommunications.

Ensuite, nous avons formulé un modèle théorique de jeu non coopératif de prix et de QoS pour les comportements dynamiques des SPs. Nous avons montré que le jeu converge vers un point d'équilibre connu sous le nom d'équilibre de Nash (NE). Nous avons mis en œuvre un algorithme génétique pour l'apprentissage de cet équilibre en présentant les résultats obtenus et en précisant la stratégie d'équilibre du système. Nous avons utilisé le prix de l'anarchie pour mesurer l'efficacité de cet équilibre. L'algorithme proposé converge très rapidement vers un unique point d'équilibre qui représente les stratégies de prix et de QoS à choisir par chaque opérateur. Notre modèle implique deux paramètres (prix et QoS) dans une implémentation simple et avec une faible complexité.

Dans la suite, nous avons introduit un modèle de jeu concurrentiel, dans lequel les SPs prennent en compte le comportement des clients pour déterminer les prix et les QoS à adopter pour leurs services, afin de maximiser leurs revenus à long terme. Les décisions des

clients sont modélisées par une chaîne de Markov, avec des taux de transition dépendants à la fois des prix et des QoS fixés par les opérateurs. A partir d'une analyse numérique, nous avons montré l'existence d'un équilibre de Nash pour ce jeu. Le jeu non coopératif modélisé dans cette étude peut avoir un équilibre de Nash unique si les prix et les QoS sont supposés non nuls. En outre, une caractéristique spéciale est obtenue précisant que le jeu à un seul paramètre (prix ou QoS) semble être super modulaire. De cette façon, nous avons vérifié qu'un simple algorithme itératif basé sur la meilleure réponse permettait l'apprentissage de cet équilibre.

Pour développer des modèles qui reflètent la réalité des interactions dans le marché des télécommunications, nous avons modélisé la concurrence entre les SPs en supposant que clients présentent une rationalité bornée pour choisir leurs opérateurs d'une manière probabiliste. Nous avons proposé un modèle de gains pour les clients dans le marché. Nous avons démontré analytiquement l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash pour ce jeu puis nous avons appliqué l'algorithme de la meilleure réponse pour l'apprentissage de cet équilibre. Enfin, nous avons montré que les SPs présents sur le marché des télécommunications ont intérêt dans la confusion des clients et que les SPs gagnent plus en présence des clients moins rationnels.

Pour étendre notre étude à d'autres types d'acteurs, la dernière partie de ce mémoire analyse la concurrence entre les fournisseurs de contenu (CPs) dans le marché de l'internet. Le modèle est basé sur des fonctions linéaires de la demande qui décrivent les comportements des clients. Ces fonctions prennent en compte les caractéristiques de tous les CPs en se basant sur le prix et la crédibilité du contenu de chaque opérateur. Nous avons montré analytiquement l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash et nous l'avons illustré avec des résultats numériques pertinents. A travers ces résultats, nous avons souligné l'importance à la fois du prix, de la crédibilité et de la qualité de transmission du contenu dans le marché de l'Internet.

Actuellement, nous étudions le problème de la mise en cache du contenu. En utilisant l'approche de la théorie des jeux, nous proposons une analyse de la réplique des ressources dans un réseau par des nœuds représentant des serveurs qui agissent d'une façon égoïste. Chaque nœud est équipé d'un serveur de mise en cache, capable de stocker des copies d'objets de données. Ces objets de données sont accessibles à partir de chaque cache contenant une copie. Le problème consiste à décider du contenu de tous les serveurs de cache de sorte que la valeur de l'utilité du réseau soit maximale.

Dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, nous pouvons étendre nos recherches en choisissant d'autres paramètres autres que le prix et la QoS. En plus, les outils de la théorie des jeux peuvent être appliqués dans d'autres types de réseaux de télécommunications. Ainsi, nous pouvons étudier les réseaux hétérogènes, les réseaux distribués et

## *CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES*

---

les réseaux sans fil en analysant les problèmes de routage et de l'économie d'énergie par exemple.

Pour s'ouvrir plus sur les réalités du marché ds télécommunications, nous comptons chercher des données réels auprès des opérateurs ou de l'agence nationale de réglementation des télécommunications (ANRT), pour les analyser et en tirer des modèles et des résultats plus réalistes.

# Bibliographie

- [1] Carl Shapiro. Theories of oligopoly behavior. *Handbook of industrial organization*, 1 :329–414, 1989.
- [2] Michael R Baye and Dan Kovenock. Bertrand competition. *The New Palgrave Dictionary of Economics*, pages 1–7, 2017.
- [3] John F Nash et al. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1) :48–49, 1950.
- [4] R Duncan Luce and Howard Raiffa. *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*. Courier Corporation, 2012.
- [5] B Myerson Roger. Game theory : Analysis of conflict. *The President and Fellows of Harvard College, USA*, 1991.
- [6] Sanford V Berg and John Tschirhart. Electricity pricing : Load management via consumer storage. *University of Florida, Department of Economics, PURC Working Paper*, 1983.
- [7] Bridger M Mitchell, Willard G Manning Jr, and Jan Paul Acton. *Peak-load Pricing : European Lessons for US Energy Policy*. Ballinger Publishing Company, Cambridge, MA, 1978.
- [8] Karl-Heinz Neumann. *The International System of Telecommunications Tariffs*. Wiss. Inst. für Kommunikationsdienst d. Dt. Bundespost, 1986.
- [9] Stephen J Brown, Stephen J Brown, and David Sumner Sibley. *The Theory of Public Utility Pricing*. Cambridge University Press, 1986.
- [10] Mohamed Baslam, Loubna Echabbi, Rachid El-Azouzi, and Essaid Sabir. Joint price and qos market share game with adversarial service providers and migrating customers. In *Game Theory for Networks*, pages 642–657. Springer, 2012.
- [11] Mohamed Baslam, Rachid El-Azouzi, Essaid Sabir, Loubna Echabbi, and El-Houssine Bouyakhf. A game theoretic analysis of price-qos market share in presence of adversarial service providers. In *Game theory relaunched*. InTech, 2013.
- [12] Rachid El Azouzi, Eitan Altman, and Laura Wynter. Telecommunications network equilibrium with price and quality-of-service characteristics. *Teletraffic Science and Engineering*, 5 :369–378, September 2003.

- [13] Mohamed Baslam, Rachid El-Azouzi, Essaid Sabir, and El-Houssine Bouyakhf. New insights from a bounded rationality analysis for strategic price-qos war. In *6th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools (VALUE-TOOLS)*, pages 280–289. IEEE, 2012.
- [14] Mohamed Baslam, Rachid El-Azouzi, Essaid Sabir, and Loubna Echabbi. Market share game with adversarial access providers : A neutral and a non-neutral network analysis. In *5th International Conference on Network Games, Control and Optimization (NetGCooP)*, pages 1–6. IEEE, 2011.
- [15] Patrick Maillé, Maurizio Naldi, and Bruno Tuffin. Price war with migrating customers. In *IEEE International Symposium on Modeling, Analysis & Simulation of Computer and Telecommunication Systems (MASCOTS'09)*, pages 1–8. IEEE, 2009.
- [16] Eitan Altman and Laura Wynter. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks. *Networks and Spatial Economics*, 4(1) :7–21, 2004.
- [17] Fernando Bernstein and Awi Federgruen. A general equilibrium model for industries with price and service competition. *Operations Research*, pages 868–886, 2004.
- [18] Ariel Orda, Raphael Rom, and Nahum Shimkin. Competitive routing in multi-user environments. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, pages 510–521, 1993.
- [19] Costas Courcoubetis and Richard Weber. *Pricing Communication Networks : Economics, Technology and Modelling*. John Wiley & Sons, 2003.
- [20] Luiz A DaSilva. Pricing for qos-enabled networks : A survey. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 3(2) :2–8, 2000.
- [21] Peter Reichl and Burkhard Stiller. Nil nove sub sole : Why internet charging schemes look like as they do. *Peter Reichl*, page 37, 2001.
- [22] Burkhard Stiller, Peter Reichl, and Simon Leinen. Pricing and cost recovery for internet services : Practical review, classification, and application of relevant models. *Netnomics*, 3(2) :149–171, 2001.
- [23] Bruno Tuffin. *Charging the Internet without Bandwidth Reservation : an Overview and Bibliography of Mathematical Approaches*. PhD thesis, INRIA, 2002.
- [24] Richard Gibbens, Robin Mason, and Richard Steinberg. Internet service classes under competition. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 18(12) :2490–2498, 2000.
- [25] Patrick Maillé and Bruno Tuffin. Price war in heterogeneous wireless networks. *Computer Networks*, 54(13) :2281–2292, 2010.
- [26] Peter J Danaher. Optimal pricing of new subscription services : Analysis of a market experiment. *Marketing Science*, 21(2) :119–138, 2002.



- [27] Seung H Rhee and Takis Konstantopoulos. Optimal flow control and capacity allocation in multi-service networks. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1662–1667. IEEE, 1998.
- [28] Ariel Orda Raphael, Raphael Rom, and Nahum Shimkin. Competitive routing in multi-user communication networks. In *IEEE/ACM Transactions on Networking*. Citeseer, 1993.
- [29] Eitan Altman, Rachid El Azouzi, and Vyacheslav Abramov. Non-cooperative routing in loss networks. *Performance Evaluation*, 49(1) :257–272, 2002.
- [30] Eitan Altman, Thomas Boulogne, Rachid El-Azouzi, Tania Jiménez, and Laura Wynter. A survey on networking games in telecommunications. *Computers & Operations Research*, 33(2) :286–311, 2006.
- [31] Eitan Altman and Laura Wynter. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks. *Networks and Spatial Economics*, 4(1) :7–21, 2004.
- [32] John Von Neumann, Oskar Morgenstern, et al. Theory of games and economic behavior, 1944.
- [33] A. A. Elsadany. Dynamics of a delayed duopoly game with bounded rationality. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(9-10) :1479–1489, 2010.
- [34] MT Yassen and HN Agiza. Analysis of a duopoly game with delayed bounded rationality. *Applied Mathematics and computation*, 138(2-3) :387–402, 2003.
- [35] Gian Italo Bischi and Ahmad Naimzada. Global analysis of a dynamic duopoly game with bounded rationality. In *Advances in dynamic games and applications*, pages 361–385. Springer, 2000.
- [36] Thierry Pénard. La théorie des jeux et les outils d’analyse des comportements stratégiques. *université de Rennes 1*, 1 :10–15, Octobre 2004.
- [37] Toky Basilide Ravaliminoarimalalason. *Application de la Théorie des Jeux au Partage des Ressources d’un Réseau de File d’Attente*. PhD thesis, Université d’Antananarivo, 2016.
- [38] John B Van Huyck, Raymond C Battalio, and Richard O Beil. Tacit coordination games, strategic uncertainty, and coordination failure. *The American Economic Review*, 80(1) :234–248, 1990.
- [39] Werner Güth, Rolf Schmittberger, and Bernd Schwarze. An experimental analysis of ultimatum bargaining. *Journal of economic behavior & organization*, 3(4) :367–388, 1982.
- [40] Herbert Simon and James March. *Administrative Behavior and Organizations*. New York : Free Press, 1976.
- [41] Suren Basov. *Social Norms, Bounded Rationality and Optimal Contracts*, volume 30 of *Studies in Economic Theory*. Springer, 2016.

- [42] Joe Lorkowski and Vladik Kreinovich. *Bounded Rationality in Decision Making under Uncertainty : Towards Optimal Granularity*, volume 99 of *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer, 2018.
- [43] Hang Ren and Tingliang Huang. Modeling customer bounded rationality in operations management : A review and research opportunities. *Computers & Operations Research*, 2017.
- [44] Matthew Rabin. Incorporating fairness into game theory and economics. *The American economic review*, pages 1281–1302, 1993.
- [45] M’hamed Outanoute, Mohamed Baslam, and Belaid Bouikhalene. Genetic algorithm learning of nash equilibrium : Application on price-qos competition in telecommunications market. *Journal of Electronic Commerce in Organizations (JECO)*, 13(3) :1–14, 2015.
- [46] Jeffrey Friedman. *The Rational Choice Controversy : Economic Models of Politics Reconsidered*. Yale University Press, 1996.
- [47] Driss Ait Omar, M’hamed Outanoute, Mohamed Baslam, Mohamed Fakir, and Belaid Bouikhalene. Joint price and qos competition with bounded rational customers. In *International Conference on Networked Systems*, pages 457–471. Springer, 2017.
- [48] Frank Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *European transactions on Telecommunications*, 8(1) :33–37, 1997.
- [49] Steven H Low and David E Lapsley. Optimization flow control—i : Basic algorithm and convergence. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 7(6) :861–874, 1999.
- [50] Laura Wynter. Optimizing proportionally fair prices. *Telecommunication Systems*, 27(1) :67–83, 2004.
- [51] Stephan Eidenbenz, VS Anil Kumar, and Sibylle Zust. Equilibria in topology control games for ad hoc networks. *Mobile Networks and Applications*, 11(2) :143–159, 2006.
- [52] Magnús M Halldórsson, Joseph Y Halpern, Li Erran Li, and Vahab S Mirrokni. On spectrum sharing games. In *Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 107–114. ACM, 2004.
- [53] Baruch Awerbuch, Yossi Azar, and Amir Epstein. The price of routing unsplittable flow. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 57–66. ACM, 2005.
- [54] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst case equilibria. In *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 404–413. Springer, 1999.
- [55] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Eva Tardos, and Tom Wexler. Near-optimal network design with selfish agents. In *Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 511–520. ACM, 2003.

- [56] Adrian Vetta. Nash equilibria in competitive societies, with applications to facility location, traffic routing and auctions. In *Proceedings of The 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 416–425. IEEE, 2002.
- [57] J Ben Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 33(3) :520–534, 1965.
- [58] John C Goodman. A note on existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 48(1) :251, 1980.
- [59] Patrick Maillé and Bruno Tuffin. Analysis of price competition in a slotted resource allocation game. In *The 27th Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, pages 888–896. IEEE, 2008.
- [60] Hal R Varian. *Microeconomic Analysis*. WW Norton, 1992.
- [61] Luis Guijarro, Vicent Pla, Jose R Vidal, and Jorge Martinez-Bauset. Analysis of price competition under peering and transit agreements in internet service provision to peer-to-peer users. In *IEEE consumer communications and networking conference (CCNC)*, pages 1145–1149. IEEE, 2011.
- [62] John H Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems : An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. U Michigan Press, 1975.
- [63] David E Goldberg and John H Holland. Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, 3(2) :95–99, 1988.
- [64] Alden H Wright. Genetic algorithms for real parameter optimization. In *Foundations of genetic algorithms*, volume 1, pages 205–218. Elsevier, 1991.
- [65] ES Gopi. *Algorithm Collections for Digital Signal Processing Applications Using Matlab*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [66] Zbigniew Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [67] Ken wieland. The customer retention challenge. *Telecommunications*, 40(10) :14–17, October 2006.
- [68] Jae-Hyeon Ahn, Sang-Pil Han, and Yung-Seop Lee. Customer churn analysis : Churn determinants and mediation effects of partial defection in the korean mobile telecommunications service industry. *Telecommunications policy*, 30(10) :552–568, 2006.
- [69] Abdolreza Eshghi, Dominique Haughton, and Heikki Topi. Determinants of customer loyalty in the wireless telecommunications industry. *Telecommunications policy*, 31(2) :93–106, 2007.

- [70] Maurizio Naldi. A simple model for the effectiveness of delaying strategies for telecommunications churn reduction. In *Tenth International Conference on Computer Modeling and Simulation*, pages 461–466. IEEE, 2008.
- [71] Patrick Maillé, Maurizio Naldi, and Bruno Tuffin. Competition for migrating customers : A game-theoretic analysis in a regulated regime. In *Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, pages 1–5. IEEE, 2008.
- [72] Stefan Bühler, Ralf Dewenter, and Justus Haucap. Mobile number portability in europe. *Telecommunications Policy*, 30(7) :385–399, 2006.
- [73] Michael C Mozer, Richard Wolniewicz, David B Grimes, Eric Johnson, and Howard Kaushansky. Predicting subscriber dissatisfaction and improving retention in the wireless telecommunications industry. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11(3) :690–696, 2000.
- [74] Wai-Ho Au, Keith CC Chan, and Xin Yao. A novel evolutionary data mining algorithm with applications to churn prediction. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(6) :532–545, 2003.
- [75] Hee-Su Kim and Choong-Han Yoon. Determinants of subscriber churn and customer loyalty in the korean mobile telephony market. *Telecommunications policy*, 28(9) :751–765, 2004.
- [76] Moon-Koo Kim, JH Park, JH Paik, SH Seol, and HJ Park. An empirical study on the influencing factors of customer churning intention after introducing mobile number portability in korea. In *15th ITS Biennial Conference*, pages 4–7, Berlin, 2004.
- [77] Jiayin Qi, Yangming Zhang, Yingying Zhang, and Shuang Shi. Treelogit model for customer churn prediction. In *IEEE Asia-Pacific Conference on Services Computing (APSCC'06)*, pages 70–75. IEEE, 2006.
- [78] Sara Handouf, Sara Arabi, Essaid Sabir, and Mohammed Sadik. Telecommunication market share game : Inducing boundedly rational consumers via price misperception. In *13th International Conference of Computer Systems and Applications (AICCSA)*, pages 1–7. IEEE, 2016.
- [79] Scott Condie and Jayant Ganguli. The pricing effects of ambiguous private information. *Journal of Economic Theory*, 172 :512–557, 2017.
- [80] Antonio Mele and Francesco Sangiorgi. Uncertainty, information acquisition, and price swings in asset markets. *The Review of Economic Studies*, 82(4) :1533–1567, 2015.
- [81] E Ahmed, H. N. Agiza, and S. Z. Hassan. On modifications of puu’s dynamical duopoly. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(7) :1025–1028, 2000.
- [82] Suren Basov and Svetlana Danilkina. Bertrand oligopoly with boundedly rational consumers. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 15(1) :107–123, 2015.

- [83] Ioana Chioveanu and Jidong Zhou. Price competition with consumer confusion. *Management Science*, 59(11) :2450–2469, 2013.
- [84] Toufik Mouhyiddine, Essaid Sabir, and Mohammed Sadik. Telecommunications market share game with ambiguous pricing strategies. In *Fifth International Conference on Next Generation Networks and Services (NGNS)*, pages 202–208. IEEE, 2014.
- [85] Christopher Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [86] Timothy J Pleskac. Decision and choice : Luce’s choice axiom. In *International encyclopedia of the social & behavioral sciences*, pages 895–900. Elsevier, 2015.
- [87] Richard S Sutton and Andrew G Barto. *Introduction to Reinforcement Learning*, volume 135. MIT press Cambridge, 1998.
- [88] Herve Moulin. On the uniqueness and stability of nash equilibrium in non-cooperative games. In Alain Benoussan, Paul R. Kleindorfer, and Charles S. Tapiero, editors, *Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science*, number 130 in Contributions to Economic Analysis, page 271. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.
- [89] Paul Milgrom and John Roberts. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 1255–1277, 1990.
- [90] Tilman Wolf, James Griffioen, Kenneth L Calvert, Rudra Dutta, George N Rouskas, Ilia Baldine, and Anna Nagurney. Choice as a principle in network architecture. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 42(4) :105–106, 2012.
- [91] Jean-Jacques Laffont, Scott Marcus, Patrick Rey, and Jean Tirole. Internet interconnection and the off-net-cost pricing principle. *RAND Journal of Economics*, pages 370–390, 2003.
- [92] Zhi-Li Zhang, Papak Nabipay, Andrew Odlyzko, and Roch Guerin. Interactions, competition and innovation in a service-oriented internet : An economic model. In *Proceedings IEEE INFOCOM*, pages 1–5. IEEE, 2010.
- [93] Eitan Altman, Stéphane Caron, and George Kesidis. Application neutrality and a paradox of side payments. *arXiv preprint arXiv :1008.2267*, 2010.
- [94] Yihong Hu and Qiang Qiang. An equilibrium model of online shopping supply chain networks with service capacity investment. *Service Science*, 5(3) :238–248, 2013.
- [95] Anna Nagurney and Dong Li. A dynamic network oligopoly model with transportation costs, product differentiation, and quality competition. *Computational Economics*, 44(2) :201–229, 2014.

- [96] Anna Nagurney, Dong Li, and Ladimer S Nagurney. Pharmaceutical supply chain networks with outsourcing under price and quality competition. *International Transactions in Operational Research*, 20(6) :859–888, 2013.
- [97] Anna Nagurney, Dong Li, Tilman Wolf, and Sara Saberi. A network economic game theory model of a service-oriented internet with choices and quality competition. *NET-NOMICS : Economic Research and Electronic Networking*, 14(1-2) :1–25, 2013.
- [98] Anna Nagurney and Tilman Wolf. A cournot–nash–bertrand game theory model of a service-oriented internet with price and quality competition among network transport providers. *Computational Management Science*, 11(4) :475–502, 2014.
- [99] Eitan Altman. In which content to specialize ? a game theoretic analysis. In *International Conference on Research in Networking*, pages 121–125. Springer, 2012.
- [100] Tania Jiménez, Yezekael Hayel, and Eitan Altman. Competition in access to content. In *International Conference on Research in Networking*, pages 211–222. Springer, 2012.
- [101] Eitan Altman, Arnaud Legout, and Yuedong Xu. Network non-neutrality debate : An economic analysis. In *International Conference on Research in Networking*, pages 68–81. Springer, 2011.
- [102] J Ben Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 520–534, 1965.