



UNIVERSITÉ SULTAN MOULAY SLIMANE
Faculté des Sciences et Techniques
Béni Mellal



Centre d'Etudes Doctorales : Sciences et Techniques

Formation doctorale : Mathématiques et Physique Appliquées

THÈSE

Présentée par

Atimad HARIR

Pour l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques

Équations aux dérivées partielles à paramètres flous

Soutenue le 20/01/2017 devant la commission d'examen :

Pr. Lahcen BOUKRIM	Professeur à la Faculté Polydisciplinaire , Béni Mellal,	Président
Pr. Elhoussaine AZROUL	Professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahrez , Fès,	Rapporteur
Pr. Khalid HILAL	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques , Béni Mellal,	Rapporteur
Pr. Mohamed OUKESSOU	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques , Béni Mellal,	Rapporteur
Pr. Said MELLIANI	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques , Béni Mellal	Directeur
Pr. Lalla Saadia CHADLI	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques , Béni Mellal	Co-directeur
Pr. Adil ABBASSI	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques , Béni Mellal	Membre invité

Table des matières

Remerciements	iv
Introduction	1
1 Théorie des ensembles flous	4
1 Introduction	4
2 Notions d'ensembles flous	5
2.1 Théorie des ensembles flous	6
2.2 Sous-ensembles flous	6
2.3 Propriétés de sous-ensemble flous	7
3 Le principe d'extension	9
3.1 Opérations sur les ensembles flous	10
4 Nombres Flous	10
4.1 Quelques Formes de nombres flous	12
4.2 Opérations arithmétiques floues	13
4.2.1 Addition des nombres flous	13
4.2.2 Produit des nombres flous	15
4.2.3 Différence des nombres flous	16
4.2.4 Division des nombres flous	18
2 Étude de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous	24
1 Espace métrique des nombres flous	24
2 Continuité des fonctions à valeurs floues	25
3 Différentiabilité des fonctions à valeur floues	27
3.1 Différentiabilité de Hukuhara	27
3.2 Différentiabilité généralisée	28
3.2.1 Différentiabilité généralisée d'ordre un	28
3.2.2 Différentiabilité généralisée d'ordre supérieure	29
4 Étude de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous	31
4.1 Introduction	31
4.2 Étude du problème	32

4.3	Existence de la solution du problème	36
4.4	Exemple d'application	38
3	Méthode d'itération variationnelle	41
1	Introduction	41
2	Méthode d'itération variationnelle	45
4	Équation aux dérivées partielles à paramètres flous	46
1	Introduction	46
2	Différentes approches de solution	49
2.1	Solution de Buckley-Feuring	49
2.2	Solution de Seikkala	50
3	Équations de la chaleur à paramètres flous	51
3.1	Exemple d'un paramètre flou dans l'équation de chaleur	52
3.2	Solution de l'équation de la chaleur au sens de Buckley-Feuring	53
3.3	Solution de la chaleur au sens de Seikkala (SS)	58
3.4	Relations entre les deux solutions	59
3.5	Exemple	61
4	Équations d'onde à paramètres flous	63
4.1	Solution d'onde au sens de Buckley-Feuring et Seikkala	64
4.2	Exemples	66
	Conclusion et perspectives	72
	Bibliographie	74

Remerciements

Le remerciement suivant revient bien justement à mon directeur de thèse, Monsieur Said MELLIANI. Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. L'idée de voler de ses propres ailes est un peu effrayante, mais j'ai l'impression d'avoir grandi, d'avoir acquis une certaine confiance grâce à vous. D'un point de vue relationnel, j'ai trouvé une relation cordiale, un soutien constant, une disponibilité, une écoute, une confiance et des conseils précieux et avisés à la hauteur de ses compétences et de ses réelles qualités humaines et ce que j'ai aimé par-dessus tout une franchise à toute épreuve. J'ai énormément appris à vos côtés. Merci pour tout.

Je remercie également mon co-directeur de thèse Lalla Saadia CHADLI pour sa gentillesse, sa confiance, ses conseils pertinents, sa détermination son regard opérationnel critique ont guidé ce travail jusqu'au bout.

Je sais tout particulièrement au Professeur Khalid HILAL, au Professeur Mohamed OUKESSOU, à à Monsieur Elhoussaine AZROUL pour leur confiance, leur judicieux conseils et l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de ce travail de recherche et membres du jury

Je remercie respectueusement le Professeur Lahcen BOUKRIM, pour le temps qu'il a consacré à examiner cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury.

Le Professeur Adil ABBASSI a bien voulu s'intéresser à ce travail et a accepté de faire partie du jury. Qu'il trouve ici mes vifs remerciements.

Je voudrais aussi remercier l'ensemble des membres du Laboratoire Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique pour leur aide et soutien tout au long de ce travail de thèse.

Je n'oublie pas ma famille et notamment mes parents qui ont accepté mes choix et cru en mes possibilités.

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au parachèvement de ce travail de thèse soit par leur savoir scientifique ou par leur amitié.

Introduction

La quantification de l'incertitude joue un rôle de plus en plus important dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques. L'approche classique de la modélisation des incertitudes consiste dans l'utilisation de la théorie des probabilités. Dans certains cas, il se peut, cependant que la probabilité ne soit pas la représentation mathématique appropriée de l'incertitude. L'une des alternatives de modélisation est alors assurée par les ensembles flous.

Les vingt cinq dernières années de recherche dans la théorie des ensembles flous qui suivent le célèbre article " Fuzzy Sets " publié par L. A. Zadeh [74] a révélé le pouvoir de cette théorie comme un outil très important pour la modélisation incertaine, le processus vague et subjectif de l'information dans les modèles mathématiques.

Cette théorie nous permet de modéliser le traitement de l'information. Différentes tentatives ont été faites pour établir des théories mathématiques qui sont basées sur les ensembles flous au lieu des ensembles ordinaires. Les moyens pour comprendre le comportement humain en termes de distribution dans l'espace métrique ont été fournis, et les applications aux différents domaines de traitement de l'information ont été discutées.

La théorie des ensembles flous permet de faire intervenir les notions d'imprécision et des incertitudes dans un système. L'imprécision est due à la variabilité du matériel, la complexité, l'ignorance, l'aléatoire...etc. Lorsqu'une expérience est répétée plusieurs fois, on obtient rarement la même valeur comme résultat de la mesure effectuée. Le résultat de l'expérience est donc par nature imprécis et représenté, par exemple, par une liste de valeurs obtenues pour chaque répétition, ou de manière plus synthétique par un intervalle délimité par les valeurs extrêmes. Dans le même ordre d'idée lorsqu'on mesure une grandeur, on obtient une valeur qui peut ensuite être utilisée dans une série de calculs. Les grandeurs physiques sont en général continues (sauf par exemple en physique quantique " l'énergie d'électron est quantifiée ") et le résultat de la mesure est un nombre réel.

Pourtant, réaliser une mesure sans tenir compte de sa précision est indigne d'un bon expérimentateur. Non seulement la mesure est imprécise (le plus souvent à cause de l'appareil de mesure et de l'expérimentateur), mais elle peut également être incertaine puisque aucun appareil de mesure n'est parfaitement fiable. Les jugements humains sont

subjectifs et les expressions dans la langue naturelle doivent être interprétées en termes de nombres ou répartitions dans un espace de mesures. Nous en déduisons qu'il y a une influence sur les paramètres imprécis dans les modèles que ce soit mathématiques, techniques ou physiques (analyse des données, intelligence artificielle, théorie de la décision, control, reconnaissance des formes, etc...)

Les ensembles flous fournissent une structure convenable pour la modélisation mathématique de tels systèmes.

Le thème principal de cette thèse est l'étude des solutions pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles qui contiennent des paramètres susceptibles d'être des quantités floues.

D'une part, nous avons opté pour l'équation différentielle d'Euler floue, compte tenu de l'avantage qu'elle présente dans la résolution des équations différentielles d'ordre deux à paramètres flous. L'approche proposée comporte deux phases essentielles : la première consiste à transformer le problème en se basant sur les définitions de dérivées floues introduites par Hukuhara [52] et Hukuhara généralisées [11, 14], suivie d'une phase d'étude et de résolution de nouveaux systèmes.

D'autre part, le point le plus important de notre projet est de résoudre les équations aux dérivées partielles floues linéaires et de traiter la notion solution floue. La solution n'est pas exprimée en termes de séries, c'est pour cela qu'on a essayé de la définir par la méthode des itérations variationnelles (VIM).

Cette méthode qui permet de résoudre une grande variété de problèmes linéaires avec des approximations qui convergent rapidement vers la solution du problème. Nous présenterons bien sûr la théorie qui se cache derrière cette méthode. Ensuite, nous allons résoudre ce problème par la stratégie du Buckley-Feuring et du Seikkala, et nous allons montrer de nouveaux résultats, nos efforts ont été récompensés finalement puisque nous avons appliqués ces résultats à plusieurs exemples.

Dans le but d'aborder les différents aspects traités durant cette thèse, nous avons organisé ce mémoire en quatre chapitres, suivis par une conclusion générale et des perspectives.

Le premier chapitre est consacré aux notions de base de la théorie des ensembles flous. Nous commençons par énoncer les fondements de cette théorie, nous définissons le principe d'extension. Ensuite nous présentons la structure générale d'un nombre flou et les opérations arithmétique floue.

Dans Le second chapitre qui est consacré à l'étude de l'équation différentielle d'Euler à paramètre flou. On présente quelques notions indispensables tels que l'espace métrique, la continuité des fonctions à valeurs floues et la différentiabilité floue. Puis, on donne un

sens à la solution de ce problème en se basant sur des résultats déjà existants dans des travaux réalisés par d'autres auteurs.

Dans le troisième chapitre, on présente la méthode VIM (Variational Iteration Method) qu'on va utiliser pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer les solutions floues de certains modèles qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles qui contiennent des quantités susceptibles d'être incertaines, telles que l'équation de la chaleur, l'équation d'onde. Dans ce chapitre, nous mettons l'accent sur la représentation de la solution au sens de Buckley-Feuring et au sens de Seikkala.

Chapitre 1

Théorie des ensembles flous

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons en particulier quelques résultats fondamentaux sur le principe d'extension. Ensuite, nous donnons un résultat de différence floue qui a fait l'objet d'un article accepté [23], et nous montrerons la division généralisée floue entre deux nombres flous. Enfin, nous utiliserons ces résultats afin de montrer quelques propriétés.

1 Introduction

Les bases théoriques de la logique floue ont été formulées en 1965 par le professeur Lotfi A. Zadeh, de l'Université de Berkeley en Californie [76]. Il a introduit la notion de sous ensemble flou pour fournir un moyen de représentation et de manipulation des connaissances imparfaitement décrites, vagues ou imprécises, ces dernières peuvent être considérées comme une généralisation de la théorie des ensembles classiques, ainsi c'était un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel.

Aujourd'hui, les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...

La théorie floue a pour objectif d'étudier la représentation des connaissances imprécises des raisonnements approchés et de chercher à modéliser les notions vagues du langage naturel pour pallier l'inadéquation de la théorie des ensembles classiques.

Exemple 1.1.

Considérons la situation que nous retrouvons quotidiennement dans la vie, qui est de décider si une personne est grande de taille ou non. L'adjectif "grande" ici est un

paramètre flou ainsi en raisonnant selon la logique Aristotélicienne nous devrions définir un seuil de hauteur qui divise les gens de grande taille et celles de petite taille.

Si une personne a une taille plus grande qu'un seuil donné on dira qu'elle est grande, autrement elle est petite. Évidemment cette manière de voir la chose est différente de la façon dont nous décidons si quelqu'un est grand ou non. Notre perception de la personne est mieux décrite comme une sorte d'observation visuelle plutôt qu'un mécanisme de seuil.

C'est aussi pourquoi nous ajoutons souvent un modificateur au mot " grand " (comme : *pas, pas très, peu, quelque peu, très, etc...*) pour exprimer " les degrés de grandeur " plutôt que des réponses *vraies* ou *fausses* absolues.

La différence entre la définition classique et la définition floue de " grande taille " est illustrée dans la figure 1.1 où la correspondance classique et la correspondance floue de " grande taille " des différents membres sont indiquées par μ_C et μ_F respectivement, en définissant classiquement une personne de " grande taille " on se fixe un seuil compris entre $1.75m$ et $1.83m$ disons $1.775m$. Donc une personne ayant $1.75m$ ne sera pas plus grande que celle ayant $1.80m$.

Par contre, dans l'ensemble flou " grande taille ", on définit un degré de " grand " fournissant ainsi un continuum plutôt qu'une transition brusque du vrai ou faux [29].

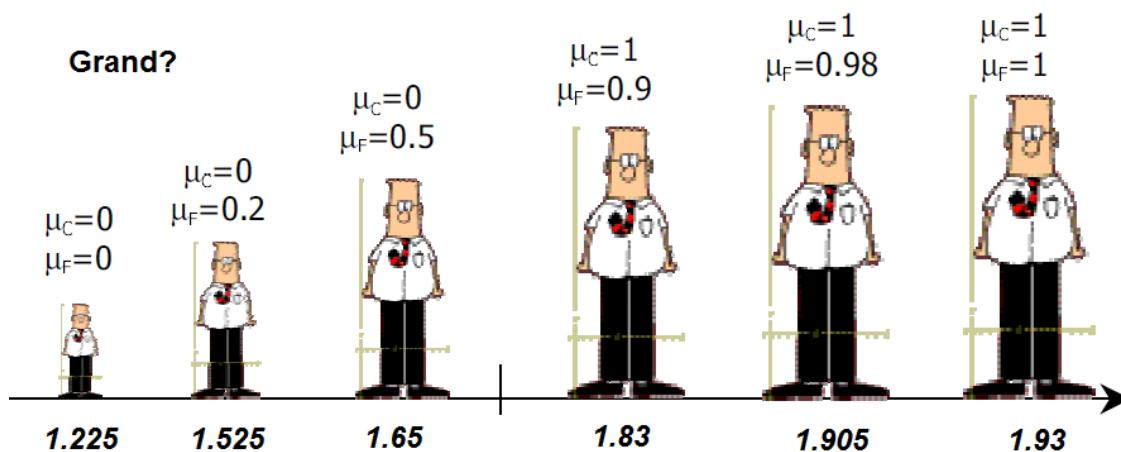


FIGURE 1.1 – Ensemble classique et ensemble flou de définition de " personne grande "

2 Notions d'ensembles flous

Dans cette section, nous allons présenter brièvement les concepts de base associés à la théorie classique des ensembles ainsi qu'à la théorie des ensembles flous telle que proposée

par Zadeh. Pour de plus amples développements de cette théorie, on peut consulter les ouvrages de base cités en [16, 35, 40, 42, 44, 54, 57, 74]

2.1 Théorie des ensembles flous

En théorie des ensembles classiques, l'appartenance (fonction caractéristique χ_A) d'un élément d'un sous ensemble est booléenne. Toutes les mesures d'une certaine variable sont ainsi divisées en deux catégories distinctes avec lesquelles il est facile de composer. La séparation entre ces deux catégories est souvent effectuée selon un seuil précis. Ce seuil est déterminé alors à l'intérieur de chaque catégorie.

On peut observer, à partir de l'exemple 1.1, que la théorie classique des ensembles permet de confirmer à un élément que son appartenance à un ensemble donnée est totale ou nulle. Cette théorie présente l'avantage d'être simple et facile à implanter d'un point de vue informatique. Toutefois, cette conceptualisation assez rigide ne permet pas de se rendre compte des situations plus nuancées rencontrées très souvent dans la réalité où la différenciation entre les éléments n'est pas abrupte, mais plutôt progressive.

Pour pallier cette lacune, la notion d'ensemble flou a été établie. La théorie des ensembles flous permet d'utiliser des éléments du langage naturel et d'introduire des concepts relatifs tels que élevé, grand ou fort, afin de définir des catégories d'objets. En fait, la théorie des ensembles flous est une extension de la théorie classique des ensembles réalisée pour incorporer le concept de vérité partielle.

Elle se base sur la théorie floue qui considère la notion d'appartenance d'un objet à un ensemble non pas comme une fonction booléenne avec deux valeurs possibles, mais plutôt comme une fonction continue pouvant prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[0,1]$. Ainsi, elle repose sur le principe selon lequel un élément appartient partiellement ou graduellement à un ou des ensembles flous définis. La fonction caractéristique d'un ensemble classique est donc remplacée par une fonction d'appartenance dans le cas d'un ensemble flou.

2.2 Sous-ensembles flous

Les sous-ensembles flous permettent en revanche de connaître le degré d'appartenance d'un élément au sous-ensemble. Un sous-ensemble flou A d'un univers \mathbb{U} est caractérisé par une fonction d'appartenance :

$$\mu_A : \mathbb{U} \rightarrow [0, 1]$$

où μ_A est le niveau ou le degré d'appartenance d'un élément de l'univers \mathbb{U} dans le sous-ensemble flou. On peut aussi définir un sous-ensemble flou A dans \mathbb{U} comme suit :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathbb{U}\}$$

avec $\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x dans A , la fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique pour un ensemble classique. On note par $\mathbb{U}_{\mathcal{F}}$ la collection de tous les sous ensembles flous de \mathbb{U} .

2.3 Propriétés de sous-ensemble flous

Un sous-ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristique de sous-ensemble flou peut être étudiée.

Noyau : Le noyau d'un sous ensemble flou A est caractérisé par l'ensemble des éléments de \mathbb{U} qui sont totalement dans A , et que l'on note par $N(A)$.

$$N(A) = \{x \in \mathbb{U}, \mu_A(x) = 1\}$$

Support : Le support d'une partie floue A est l'ensemble des éléments appartenant, même très peu à A c'est à dire dont le degré d'appartenance à A est différent de 0.

$$S(A) = \text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{U}, \mu_A(x) > 0\}$$

et par construction $N(A) \subseteq S(A)$

Pour un ensemble classique A , le noyau et le support sont confondus avec A , et sa fonction caractéristique μ n'admet que 0 ou 1 comme valeur.

Hauteur : La hauteur d'un sous-ensemble flou A de \mathbb{U} , est la valeur maximale prise par la fonction d'appartenance μ_A sur l'ensemble \mathbb{U} . Elle est définie par

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x) | x \in \mathbb{U}\}$$

Normal et Cardinalité : Un sous ensemble flou A est normalisé si sa hauteur

$$H(A) = 1$$

La cardinalité d'un sous ensemble flou A de \mathbb{U} , notée $|A|$, est le nombre d'éléments

appartenant à A pondéré par leur degré d'appartenance

$$|A| = \sum_{x \in \mathbb{U}} \mu_A(x)$$

Il est souvent intéressant de se référer à des sous-ensembles classiques correspondant de façon approximative à des sous-ensembles flous donnés, afin d'établir des critères de prise de décision. La façon la plus simple de réaliser cette approximation est d'utiliser les α -coupes (sous-ensemble de niveau α)

α -coupe : Le sous-ensemble ordinaire noté A^α défini par :

$$A^\alpha = \{x \in \mathbb{U} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1]$$

et A^α est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{A^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha; \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Remarque 2.1.

- Si l'on connaît les α -coupes d'un sous-ensemble flou, on peut reconstruire le sous-ensemble flou lui-même voir figure 1.2.
- Le réel α appartenant à l'ensemble $[0, 1]$, deux cas sont possibles :
 - Pour $\alpha = 0 \implies A^\alpha = \mathbb{U}$
 - Pour $\alpha = 1 \implies A^\alpha = N(A)$

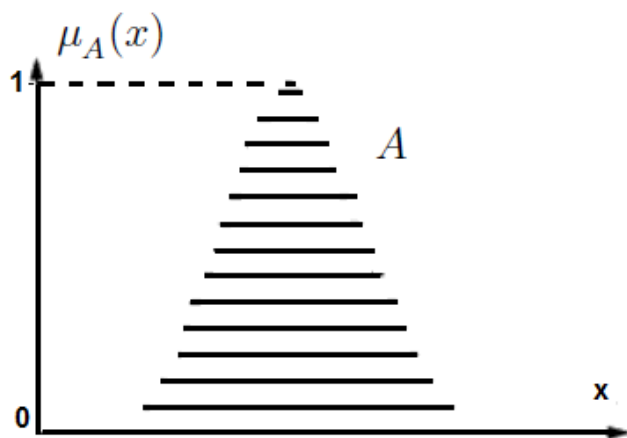


FIGURE 1.2 – Représentation d'un ensemble flou par ses α -coupes.

Exemple 2.1. Un sous-ensemble flou est présenté sur la figure 1.3. Si on applique la définition de α -coupe, on obtient les sous-ensembles ordinaires qui s'appellent α -coupe ou sous-ensembles ordinaire de niveau α .

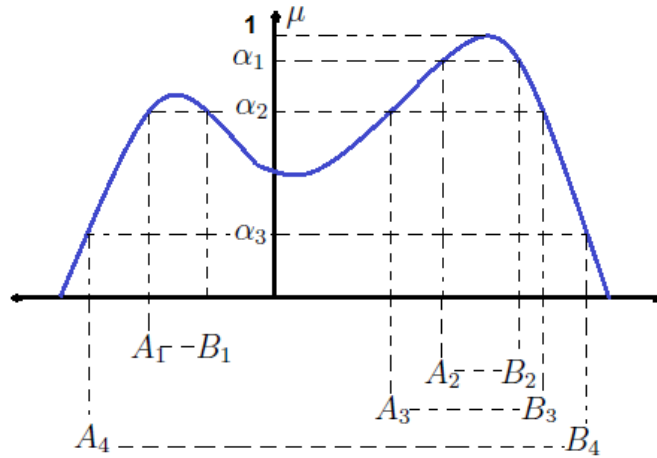


FIGURE 1.3 – La α -coupe d'un sous-ensemble flou.

3 Le principe d'extension

Nous commençons par énoncer une définition dû à D. Dubois et H. Prade, [36]. Le principe d'extension, proposé à l'origine par Zadeh, est un des outils fondamentaux de la théorie des sous-ensembles flous. Il permet d'étendre des relations fonctionnelles classiques à des quantités floues.

Soit $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ le produit cartésien de n ensembles univers. Soit A_1, A_2, \dots, A_n des sous ensembles flous de $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \dots, \mathbb{U}_n$ respectivement. Étant donnée une fonction f de \mathbb{U} dans un univers Ξ , avec $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Le principe d'extension permet de définir un sous-ensemble flou B de Ξ par :

$$B = \left\{ (y, \mu_B(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{U} \right\}$$

où

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \phi; \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \phi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le principe d'extension est utilisé pour généraliser les différents opérateurs classiques au cadre flou.

Remarque 3.1. [75] Soit $f : \mathbb{U} \rightarrow \Xi$, où \mathbb{U} et Ξ sont deux ensembles quelconques, alors on peut prolongé f à une fonction $F : \mathbb{U}_{\mathcal{F}} \rightarrow \Xi_{\mathcal{F}}$ avec $B = F(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ tel que (1.1). Nous appelons la fonction F l'extension de Zadeh de f .

Si A est un sous-ensemble flou d'un univers \mathbb{U} , de fonction d'appartenance μ_A on a :

$$\forall x \in \mathbb{U}, \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \chi_{A^\alpha}(x)$$

3.1 Opérations sur les ensembles flous

Supposons que A et B sont deux sous-ensembles flous définis dans un univers du discours \mathbb{U} par les fonctions d'appartenance μ_A et μ_B . On peut définir des opérations ensemblistes telles que l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union et le complément grâce à des opérations sur les fonctions d'appartenance.

- **Égalité** : $A = B$ si $\forall x \in \mathbb{U} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$
- **Inclusion** : $A \subset B$ si $\forall x \in \mathbb{U} \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
- **Intersection** : $A \cap B = C$ telle que $\forall x \in \mathbb{U} \quad \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- **Réunion** : $A \cup B = D$ telle que $\forall x \in X \quad \mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- **Complément** : $\forall x \in \mathbb{U} \quad \nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$
- **Comparaison** : On dit que A et B sont comparables si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$ c'est à dire l'un des ensembles flous est un sous ensemble de l'autre. Deux ensembles sont incomparables si on a $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$
- **Ensemble flou convexe** : Un ensemble flou est convexe si est seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{U}, \xi \in [0, 1], \quad \mu_A(\xi x + (1 - \xi)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

4 Nombres Flous

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés et des opérations arithmétiques d'un nombre flou, pour plus de détails à propos des nombres flous et leurs propriétés, nous renvoyons le lecteur par exemple à [32, 33, 62].

Un nombre flou A est un sous-ensemble flou défini sur \mathbb{R} , qui possède deux propriétés. Il est normalisé et convexe.

Soit $\mathbb{F}(\mathbb{R})$: ensemble de tous les sous-ensembles flous de \mathbb{R}

Définition 4.1. Soit $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} = \left\{ A \mid A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \text{ satisfait (1) - (4)} \right\} \subset \mathbb{F}(\mathbb{R})$:

1. $\forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, A$ est normal.
2. $\forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, A$ est un ensemble flou convexe (au sens flou) si :

$$A(\xi x + (1 - \xi)y) \geq \min\{A(x), A(y)\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \xi \in [0, 1]$$

3. $\forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, A$ est semi-continu supérieurement dans \mathbb{R} .
4. $[A]^0$ est un ensemble compact.

Alors $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est un espace d'un nombre flou, A est appelé nombre flou.

Soit $P_K(\mathbb{R})$ l'espace des ensembles non vide compact convexe de \mathbb{R} .

Il s'ensuit que α -coupe $[A]^\alpha \in P_K(\mathbb{R})$.

Note : α -coupe d'un nombre flou est toujours un intervalle fermé et borné, ainsi nous écrivons $[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Définition 4.2. Un nombre flou A est la paire $(a_1(\alpha), a_2(\alpha))$, les fonctions $a_1(\alpha), a_2(\alpha)$ qui satisfont les conditions suivantes :

1. $a_1(\alpha)$ est une fonction continue et croissante $\forall \alpha \in [0, 1]$
2. $a_2(\alpha)$ est une fonction continue et décroissante $\forall \alpha \in [0, 1]$
3. $a_1(\alpha) \leq a_2(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$

Exemple 4.1. La figure 1.4 représente deux nombres flous discrets et un nombre flou continu.

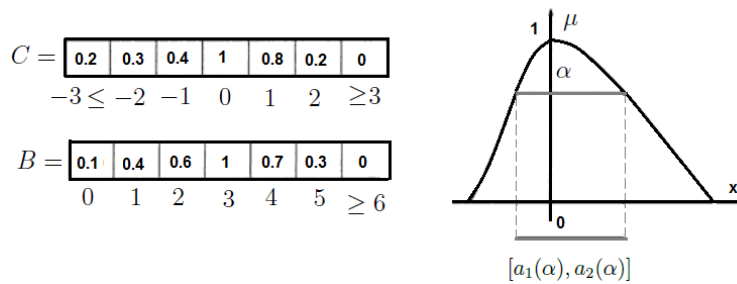


FIGURE 1.4 – Nombres flous discrets et continus.

Nous énonçons aussi le résultat suivant

Théorème 4.1. [65] Si $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, alors

- (i) $[u]^\alpha \in P_K(\mathbb{R})$ pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$
- (ii) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ pour tout $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$

(iii) Si $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ est une suite décroissante telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha$ alors on a

$$[u]^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} [u]^{\alpha_k}$$

Inversement, si $A_\alpha = \{[u_1(\alpha), u_2(\alpha)]; \alpha \in (0, 1]\}$ est l'intervalle fermé qui satisfait (i) et (ii), alors $\{A_\alpha\}$ est défini un nombre flou $u \in \mathbb{R}_F$ tel que $[u]^\alpha = A_\alpha$

4.1 Quelques Formes de nombres flous

Nous avons vu que chaque ensemble flou peut être représenté par sa fonction d'appartenance, ces fonctions peuvent avoir différentes formes :

Triangulaire

Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ est appelé un nombre flou triangulaire de centre a_2 , largeur gauche $a_2 - a_1 > 0$ et largeur droite $a_3 - a_2 > 0$, sa fonction d'appartenance figure 1.5(a) est :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(a_2 - x)}{a_2 - a_1}, & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 - \frac{(x - a_2)}{a_3 - a_2}, & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Note : Un nombre classique a est simplement représenté par

$$a_1(\alpha) = a_2(\alpha) = a, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Trapézoïdale

Un nombre flou trapézoïdale est représenté par (a_1, a_2, a_3, a_4) et sa fonction d'appartenance μ_A de A figure 1.5 (b) vérifie :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 - a_3 \text{ ou } x > a_2 + a_4 \\ 1 + (x - a_1)/a_3 & \text{si } a_1 - a_3 < x < a_1 \\ 1 & \text{si } a_1 < x < a_2 \\ 1 - (a_2 - x)/a_4 & \text{si } a_2 < x < a_2 + a_4 \end{cases}$$

Remarque 4.1. pour un nombre flou trapézoïdale $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ une α -coupe est donnée par

$$[A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4 - a_3)], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Si $a_2 = a_3$ c'est une α -coupe d'un nombre flou triangulaire .

Gaussiennes

Un nombre flou gaussien est décrit par (a_1, a_2, a_3, a_4) et sa fonction d'appartenance avec des cotés paraboliques figure 1.5 (c) est définie de la manière suivante :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 - a_3 \text{ ou } a_2 + a_4 < x \\ 1 & \text{si } a_1 < x < a_2 \text{ (} x \text{ dans le noyau de } A\text{)} \\ 2(x - a_1 + a_3)^2/a_3^2 & \text{si } a_1 - a_3 < x < a_1 - a_3/2 \\ 1 + 2(x - a_1)^2/a_3^2 & \text{si } a_1 - a_3/2 < x < a_1 \\ 1 - 2(a_2 - x)^2/a_4^2 & \text{si } a_2 < x < a_2 + a_4/2 \\ 2(x - a_2 + a_4)^2/a_4^2 & \text{si } a_1 + a_4/2 < x < a_2 \end{cases}$$

Remarque 4.2. un nombre flou $A := [a_1, a_3]$ est dit

1. strictement positif si $a_1 > 0$, qu'on note $A > 0$,
2. positif si $a_1 \geq 0$, qu'on note $A \geq 0$,
3. strictement négatif si $a_3 < 0$, qu'on note $A < 0$,
4. négatif si $a_3 \leq 0$, qu'on note $A \leq 0$.

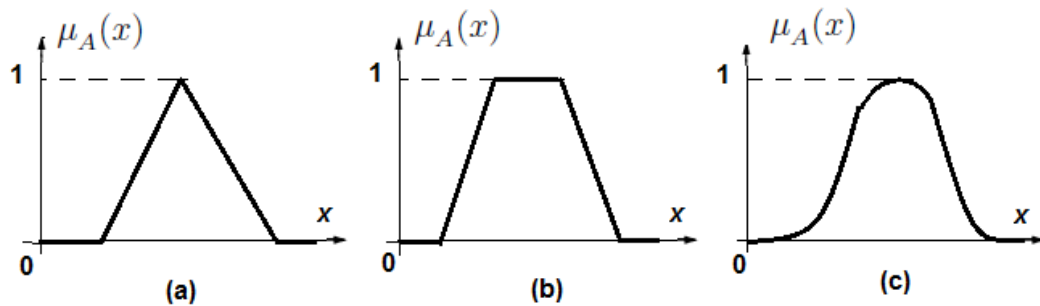


FIGURE 1.5 – Exemples de fonction d'appartenance les plus utilisées.

4.2 Opérations arithmétiques floues

4.2.1 Addition des nombres flous

Soient A, B deux nombre flous, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit la somme de deux nombres et la multiplication par un scalaire respectivement par :

$$[A]^\alpha, [B]^\alpha \in P_K(\mathbb{R}) \text{ avec } [A]^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \text{ et } [B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} [A + B]^\alpha &= [A]^\alpha + [B]^\alpha \\ &= [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\lambda.A]^\alpha &= \lambda.[A]^\alpha \\ &= \begin{cases} [\lambda a_1(\alpha), \lambda a_2(\alpha)] & \text{si } \lambda > 0 \\ [\lambda a_2(\alpha), \lambda a_1(\alpha)] & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sur la figure 1.6 on montre l'addition de deux nombres flous A et B .

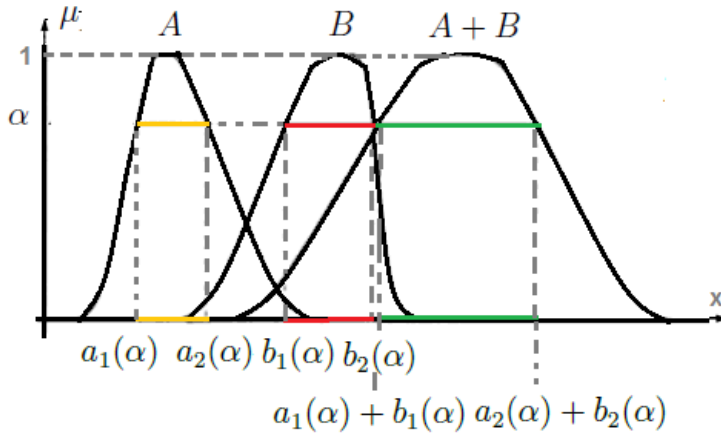


FIGURE 1.6 – Addition de deux nombres flous .

Nous aurons aussi besoin des propriétés de la somme de deux nombres flous et la multiplication d'un nombre réel par un nombre flou démontrées dans les références [7, 17, 37, 43].

1. L'addition des nombres flous est associative et commutative

$$A + B = B + A \quad \text{et} \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

2. Le singleton flou $\tilde{0} = \chi_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ figure 1.5, est un élément neutre

$$A + \tilde{0} = \tilde{0} + A = A,$$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a.b \geq 0$ et $\forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on a

$$(a + b).A = (a.A) + (b.A),$$

4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$,
5. $\forall \lambda, \nu \in \mathbb{R}$ et $\forall A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a $(\lambda.\nu).A = \lambda.(\nu.A)$.

Remarque 4.3. La condition $a.b \geq 0$ est nécessaire dans la propriété (3) comme le montre l'exemple suivant :

Soit $A = (2, 4, 5)$ un nombre flou, nous avons

$$(2 - 1).A = (2 - 1).(2, 4, 5) = (2, 4, 5)$$

et

$$2.A - A = (4, 8, 10) + (-5, -4, -2) = (-1, 4, 8).$$

4.2.2 Produit des nombres flous

Nous allons maintenant énoncer le produit de deux nombres flous [46]

Définition 4.3. Soient $A, B, C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, alors $C = A.B$ est défini par

$$c_1(\alpha) = \inf\{x.y \mid x \in [A]^\alpha, y \in [B]^\alpha\},$$

et

$$c_2(\alpha) = \sup\{x.y \mid x \in [A]^\alpha, y \in [B]^\alpha\}.$$

Le produit atteint son extremum dans les coins de son domaine. Alors,

$$\begin{aligned} (a.b)_1(\alpha) &= \min\{a_1(\alpha).b_1(\alpha), a_1(\alpha).b_2(\alpha), a_2(\alpha).b_1(\alpha), a_2(\alpha).b_2(\alpha)\} \\ (a.b)_2(\alpha) &= \max\{a_1(\alpha).b_1(\alpha), a_1(\alpha).b_2(\alpha), a_2(\alpha).b_1(\alpha), a_2(\alpha).b_2(\alpha)\} \end{aligned}$$

Exemple 4.2. Soient $A = (0, 2, 4, 6)$ et $B = (2, 3, 8)$, ses α -coupes sont données par $[2\alpha, 6 - 2\alpha]$ et $[2 + \alpha, 8 - 5\alpha]$ respectivement

$$\begin{aligned} (a.b)_1(\alpha) &= 2\alpha.(2 + \alpha) \\ (a.b)_2(\alpha) &= (6 - 2\alpha).(8 - 5\alpha) \end{aligned}$$

avec $[a.b]^1 = [6, 12]$ et $[a.b]^0 = [0, 48]$

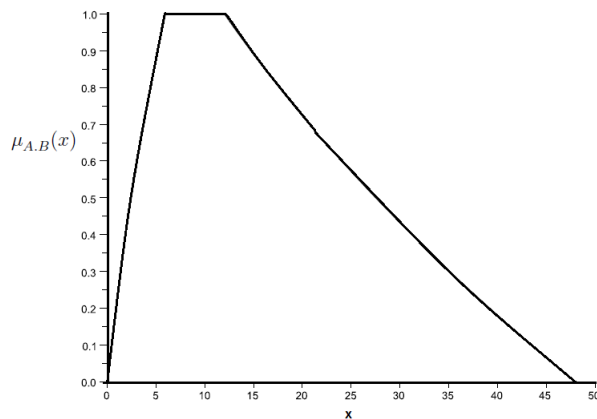


FIGURE 1.7 – Produit de deux nombres flous.

Remarque 4.4. Principe d'extension de Zadeh de produit et de division présentent certains inconvénients. Le plus important est que le produit (ou la division) de deux nombres flous triangulaires ou trapézoïdales n'est pas triangulaire et trapézoïdale. Pour améliorer cet aspect, le produit croisé de nombre flou a été proposé dans [8],[9], la division sera proposée dans la suite.

4.2.3 Différence des nombres flous

Dans ce paragraphe, nous allons donner des résultats sur la différence de deux nombres flous intervenant dans l'équation d'Euler à paramètre flou, que nous présenterons dans le deuxième chapitre. et qui seront aussi utiles pour l'étude de l'existence d'une solution de ce problème. Pour plus de détails le lecteur peut consulter par exemple [14, 52, 67, 70, 71]

Définition 4.4. (**La différence de Hukuhara**) Soient $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux nombres flous, s'il existe un nombre flou $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tel que $A = B + C$, alors C appelé la différence de Hukuhara (H -différence), existe et de plus elle est notée $A \ominus B = C$.

Si $A \ominus B = C$ existe alors son α -coupe est donnée par

$$[A \ominus B]^{\alpha} = [a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)].$$

Comme on a vu les opérateurs sur les α -coupes sont des cas particuliers des opérateurs sur les intervalles.

Définition 4.5.

La différence de Hukuhara généralisée de deux intervalles $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in P_K(\mathbb{R})$ est définie comme suit :

$$[a_1, a_2] \ominus_g [b_1, b_2] = \left[\min\{a_1 - b_1, a_2 - b_2\}, \max\{a_1 - b_1, a_2 - b_2\} \right].$$

Alors, pour $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$, nous avons :

$$A \ominus_g B = \begin{cases} [a_1 - b_1, a_2 - b_2] & \text{si } \text{lon}(A) \geq \text{lon}(B) \\ [a_2 - b_2, a_1 - b_1] & \text{si } \text{lon}(A) < \text{lon}(B) \end{cases}$$

si $A, B, C \in P_K(\mathbb{R})$

$$A \ominus_g B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (i) A = B + C & \text{si } \text{lon}(A) \geq \text{lon}(B) \\ \text{ou } (ii) B = A + (-C) & \text{si } \text{lon}(A) < \text{lon}(B) \end{cases}$$

Nous rappelons que $\text{lon}(A) = a_2 - a_1$ est appelée longueur de l'intervalle A .

Définition 4.6. (La différence de Hukuhara généralisée) est définie par :

Soient $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux nombre flous, s'il existe un nombre flou C tel que :

$$A \ominus_g B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (i) A = B + C \\ \text{ou } (ii) B = A + (-C) \end{cases}$$

Proposition 4.1. [70, 71] Soient $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Si $A \ominus_g B$ existe, alors :

- (i) $A \ominus_g A = \{0\}$,
- (ii) $(A + B) \ominus_g B = A$; $A \ominus_g (A - B) = B$,
- (iii) Si $A \ominus_g B$ existe, alors $(-B) \ominus_g (-A)$ existe et

$$\{0\} \ominus_g (A \ominus_g B) = (-B) \ominus_g (-A),$$

- (iv) $A \ominus_g B = B \ominus_g A = C$ si et seulement si $C = -C$ (en particulier $C = \{0\}$) si et seulement si $A = B$,
- (v) Si $A \ominus_g B$ existe alors $A + (B \ominus_g A) = A$ ou $B - (B \ominus_g A) = A$ et les deux inégalités vérifiées ainsi $B \ominus_g A$ est un ensemble classique.

Remarque 4.5. Pour tous $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on a :

$$\begin{aligned} [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \ominus_g [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \\ = [\min\{a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)\}, \max\{a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)\}] \end{aligned}$$

Remarque 4.6.

1. Soit $A = [a_1, a_2]$ un intervalle

$$A + (-A) = [a_1, a_2] + [-a_2, -a_1] = [a_1 - a_2, a_2 - a_1] \neq 0$$

2. Si $x, y \in \mathbb{R}$ alors on a $(x + y) - y = x$ mais pour le cas de x, y deux nombres flous $(x + y) \ominus y \neq x$

Pour pallier cette lacune (1) et (2), la différence de Hukuhara et la différence de Hukuhara généralisée ont été établies respectivement.

Ceci d'après le résultat cité dans les références suivantes ([69, 70, 71]).

Nous énonçons le résultat de la différence qui sera utile pour la suite.

Lemme 4.1. Soient A, B et $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, si $b.c > 0 \forall b \in B$ et $\forall c \in C$ alors nous avons $A.(B \ominus C) = A.B \ominus A.C$

Démonstration :

Soit $D = C + B$, si $b.c > 0 \forall b \in B$ et $\forall c \in C$ alors nous avons :

$$A.D = A.(B + C) = A.B + A.C \Rightarrow A.D \ominus A.B = A.C, \quad (1.2)$$

nous savons que $(C + B) \ominus B = C$ alors $A.((C + B) \ominus B) = A.C$.

Par conséquent,

$$A.(D \ominus B) = A.C. \quad (1.3)$$

D'après (1.3) et (1.2) nous obtenons

$$A.(D \ominus B) = A.D \ominus A.B.$$

□

4.2.4 Division des nombres flous

Dans le paragraphe suivant nous allons définir la division entre deux nombres flous, qui va nous permettre d'établir un nombre flou [21].

Définition 4.7. la division de $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, est le nombre flou w s'il existe, tel que :

$$[u]^\alpha \div [v]^\alpha = [w]^\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & [u]^\alpha = [v]^\alpha [w]^\alpha \\ \text{ou } (ii) & [v]^\alpha = [u]^\alpha ([w]^\alpha)^{-1} \end{cases} \quad (1.4)$$

où $([w]^\alpha)^{-1} = [1/w_2(\alpha), 1/w_1(\alpha)]$

La définition 4.7 montre que w est réellement un nombre flou, où les multiplications entre les intervalles sont effectuées dans l'arithmétique d'intervalle usuel.

La division \div est bien définie si la α -coupe $[w]^\alpha$ est telle que : $w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ($w_1(\alpha)$ est croissante et $w_2(\alpha)$ décroissante, $w_1(1) \leq w_2(1)$).

Il est clair que, si $u \div v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ existe, elle a les propriétés d'intervalle [70].

Proposition 4.2. [70] Soient $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ (ici 1 est équivalent à $\{1\}$), nous avons :

1. si $0 \notin [u]^\alpha \forall \alpha$, alors $u \div u = 1$,
2. si $0 \notin [v]^\alpha \forall \alpha$, alors $uv \div v = u$,
3. si $0 \notin [v]^\alpha \forall \alpha$, alors $1 \div v = v^{-1}$ et $1 \div v^{-1} = v$,
4. si $v \div u$ existe alors $u(v \div u) = v$ ou $u(v \div u)^{-1} = u$ et les deux égalités sont satisfaites si et seulement si $v \div u$.

Il est facile de voir que si $w = u \div v$ existe selon (i) alors $z = u \otimes v$ existe et $w = z$ voir [17], mais l'existence de $v \div u$ selon (ii) n'est pas autorisée pour $u \otimes v$.

En général, il est possible que la division de deux nombres flous n'existe pas.

Exemple 4.3. Soient $u = (1, 1.5, 5)$ et $v = (-4, -2, -1)$ deux nombres flous triangulaires, où les α -coupes sont données par : $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\left[1 + 0.5\alpha, 5 - 3.5\alpha \right], \quad \left[-4 + 2\alpha, -1 - \alpha \right],$$

nous divisons u par v , nous obtenons :

$$\left[1 + 0.5\alpha, 5 - 3.5\alpha\right] \div \left[-4 + 2\alpha, -1 - \alpha\right] = \left[(5 - 3.5\alpha)/(-4 + 2\alpha), (1 + 0.5\alpha)/(-1 - \alpha)\right],$$

nous avons le résultat d'existence de la division, mais les intervalles résultent ne sont pas une α -coupe d'un nombre flou.

Comme on a signalé dans l'exemple 3.2, la division en général n'existe pas. Pour résoudre ce problème, une nouvelle division a été proposée dans ([70]), dont l'existence est vérifiée.

Dans le paragraphe suivant, nous allons proposer une division de deux nombres flous, puis, nous donnerons une définition et des résultats qui sont démontrés. Pour plus de détails le lecteur peut consulter par exemple [70].

Définition 4.8. La division généralisée (G -division) de $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $0 \notin [v]^\alpha \forall \alpha \in [0, 1]$, est donnée par expression

$$[u \div_G v]^\alpha = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta), \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (1.5)$$

où la division \div est avec les β -coupes de $[u]^\beta$ et $[v]^\beta$.

Remarque 4.7.

- On note que d'après [70] la division existe mais les intervalles résultant ne sont pas une α -coupe d'un nombre flou, alors en appliquant G -division (4.1), nous obtenons un nombre flou.
- $w = u \div_G v$ est considérée comme une généralisation de la division des nombres flous, avec $0 \notin [v]^\alpha$ et $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Proposition 4.3. La G -division (4.1) est donnée par l'expression suivante :

$$[u \div_G v]^\alpha = \left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right]. \quad (1.6)$$

Démonstration :

Soit $\alpha \in [0, 1]$. Nous observons que pour toute $\beta \geq \alpha$, $0 \notin [v_1^0, v_2^0]$ nous avons

$$\begin{aligned} [u]^\beta \div [v]^\beta &= \left[\min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right] \\ &\subseteq \left[\inf_{\lambda \geq \beta} \min \left\{ \frac{u_1(\lambda)}{v_1(\lambda)}, \frac{u_1(\lambda)}{v_2(\lambda)}, \frac{u_2(\lambda)}{v_1(\lambda)}, \frac{u_2(\lambda)}{v_2(\lambda)} \right\}, \sup_{\lambda \geq \beta} \max \left\{ \frac{u_1(\lambda)}{v_1(\lambda)}, \frac{u_1(\lambda)}{v_2(\lambda)}, \frac{u_2(\lambda)}{v_1(\lambda)}, \frac{u_2(\lambda)}{v_2(\lambda)} \right\} \right] \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta) \subseteq \left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right].$$

Soit

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta) = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} \left[\min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right].$$

Pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\}$ telle que :

$$\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} > a_n - \frac{1}{n}.$$

Aussi, il existe $b_n \in \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\}$ telle que :

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} < b_n + \frac{1}{n},$$

nous avons alors

$$[a_n, b_n] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta), \forall n \geq 1$$

et nous obtenons :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} [a_n, b_n] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta).$$

Finalement

$$\left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta)$$

En conclusion :

$$\left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right] = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta).$$

□

Il reste à montrer les notations $u \dot{\div}_G v$ et $v \dot{\div}_G u$, qui sont obtenues par la proposition suivante :

Proposition 4.4. Soient $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deux nombres flous, les deux G -divisions $u \dot{\div}_G v$ et $v \dot{\div}_G u$ existent et pour toute $\alpha \in [0, 1]$ nous avons $u \dot{\div}_G v = (v \dot{\div}_G u)^{-1}$ avec $0 \notin [v]^\beta$, $0 \notin [u]^\beta$ et

$$[u \dot{\div}_G v]^\alpha = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)] \quad \text{et} \quad [v \dot{\div}_G u]^\alpha = \left[\frac{1}{d_2(\alpha)}, \frac{1}{d_1(\alpha)} \right]$$

où

$$d_1(\alpha) = \inf(D_\alpha) \quad d_2(\alpha) = \sup(D_\alpha)$$

et les ensembles

$$D_\alpha = \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\} \cup \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\} \cup \left\{ \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\} \cup \left\{ \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \mid \beta \geq \alpha \right\}. \quad (1.7)$$

Démonstration :

Considérons $\alpha \in [0, 1]$. D'après la proposition (4.1), nous savons que :

$$[u \dot{\div}_G v]^\alpha = \left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \right].$$

Nous pouvons alors écrire :

$$[u \dot{\div}_G v]^\alpha \subseteq [\inf(D_\alpha), \sup(D_\alpha)] = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)].$$

D'une part, nous avons, pour tout $n \geq 1$ et d'après la définition de $d_1(\alpha)$ et $d_2(\alpha)$, il existe $a_n, b_n \in D_\alpha$ telles que :

$$d_1(\alpha) \leq a_n < d_1(\alpha) + \frac{1}{n}, \quad d_2(\alpha) - \frac{1}{n} < b_n \leq d_2(\alpha),$$

nous obtenons :

$$\lim a_n = d_1(\alpha), \quad \lim b_n = d_2(\alpha),$$

D'autre part, $[a_n, b_n] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \dot{\div} [v]^\beta), \forall n \geq 1$ et alors

$$\bigcup_{n \geq 1} [a_n, b_n] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \dot{\div} [v]^\beta).$$

Il en résulte que :

$$[d_1(\alpha), d_2(\alpha)] = [\lim a_n, \lim b_n] \subseteq \bigcup_{n \geq 1} [a_n, b_n] \subseteq cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]^\beta \div [v]^\beta).$$

□

Remarque 4.8. Nous observons qu'il y a d'autres expressions pour la G -division telle que :

$$[u \div_G v]^\alpha = \left[\min \left\{ \inf_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)} \right), \inf_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)} \right), \inf_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)} \right), \inf_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right) \right\}, \right. \\ \left. \max \left\{ \sup_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)} \right), \sup_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)} \right), \sup_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)} \right), \sup_{\beta \geq \alpha} \left(\frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right) \right\} \right].$$

Nous devons montrer que la G -division est bien définie.

Proposition 4.5. [70] Soient deux nombres flous $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $0 \notin [v_1(0), v_2(0)]$ la G -division $u \div_G v$ existe et c'est un nombre flou.

Démonstration :

Nous considérons la quantité floue $u \div_G v$ puis en fonction du résultat précédent, si l'on note

$$w_1 = (u \div_G v)_1 \quad \text{et} \quad w_2 = (u \div_G v)_2 \quad \text{avec} \quad 0 \notin [v]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

nous avons :

$$w_1(\alpha) = \inf_{\beta \geq \alpha} \min \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\} \\ \leq w_2(\alpha) = \sup_{\beta \geq \alpha} \max \left\{ \frac{u_1(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_1(\beta)}{v_2(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_1(\beta)}, \frac{u_2(\beta)}{v_2(\beta)} \right\},$$

évidemment w_1, w_2 sont bornées et (décroissant, croissant) respectivement.

Aussi w_1, w_2 sont continues à gauche sur $(0, 1]$, puisque $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_1}{v_2}, \frac{u_2}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}$ sont continues à gauche sur $(0, 1]$, ils sont continues à droite à 0 puisque les fonctions $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_1}{v_2}, \frac{u_2}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}$ sont continues à 0 □

Proposition 4.6. Soient $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ (ici 1 est équivalent $\{1\}$). nous avons

1. $u \div_G v = u \div v$, si $0 \notin [v]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ quand l'expressions (en particulier)
 $u \div_G u = 1$ si $0 \notin [u]^\alpha \quad \forall \alpha$
2. $(uv) \div_G v = u$,
3. $1 \div_G v = v^{-1}$ et $1 \div_G v^{-1} = v$,
4. si $0 \notin [u]^\alpha$ et $0 \notin [v]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ alors $1 \div_G (v \div_G u) = u \div_G v$
5. $v \div_G u = u \div_G v = w$ si et seulement si $w = w^{-1}$, de plus, $w = 1$ si et seulement si $u = v$.

Démonstration :

La preuve de (1) et (3) sont évidentes . Il reste alors à prouver (2) nous pouvons utiliser (1), en effet, dans ce cas $uv \div u$ existe et nous avons

$$uv \div_G v = uv \div v = u.$$

En effet pour (4) d'après (1.7) pour tout $\alpha \in [0, 1]$ nous avons :

$$\begin{aligned} [1 \div_G (v \div_G u)]^\alpha &= [1, 1] \div_G [d_1(\alpha), d_2(\alpha)] \\ &= \left[\min\left\{\frac{1}{d_1(\alpha)}, \frac{1}{d_2(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{1}{d_1(\alpha)}, \frac{1}{d_2(\alpha)}\right\} \right] \\ &= \left[\frac{1}{d_2(\alpha)}, \frac{1}{d_1(\alpha)} \right] \\ &= \left[1/\max\left\{\frac{v_1(\alpha)}{u_1(\alpha)}, \frac{v_1(\alpha)}{u_2(\alpha)}, \frac{v_2(\alpha)}{u_1(\alpha)}, \frac{v_2(\alpha)}{u_2(\alpha)}\right\}, 1/\min\left\{\frac{v_1(\alpha)}{u_1(\alpha)}, \frac{v_1(\alpha)}{u_2(\alpha)}, \frac{v_2(\alpha)}{u_1(\alpha)}, \frac{v_2(\alpha)}{u_2(\alpha)}\right\} \right] \\ &= \left[\min\left\{\frac{u_1(\alpha)}{v_1(\alpha)}, \frac{u_1(\alpha)}{v_2(\alpha)}, \frac{u_2(\alpha)}{v_1(\alpha)}, \frac{u_2(\alpha)}{v_2(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{u_1(\alpha)}{v_1(\alpha)}, \frac{u_1(\alpha)}{v_2(\alpha)}, \frac{u_2(\alpha)}{v_1(\alpha)}, \frac{u_2(\alpha)}{v_2(\alpha)}\right\} \right] \\ &= [u \div_G v]^\alpha. \end{aligned}$$

Pour prouver (5) en appliquant (1.7) pour tout $\alpha \in [0, 1]$ nous avons $[w]^\alpha = [v \div_G u]^\alpha = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)]$ et $[w]^\alpha = [u \div_G v]^\alpha = [\frac{1}{d_2(\alpha)}, \frac{1}{d_1(\alpha)}]$ tel que $w = w^{-1}$ inversement, on a $w = w^{-1}$ d'après (1) et le fait que $w = w^{-1} = 1$ équivalent à $d_1(\alpha) = d_2(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ cela est vrai si et seulement si $\frac{u_1(\alpha)}{v_1(\alpha)} = 1$ et $\frac{u_2(\alpha)}{v_2(\alpha)} = 1$ c-à-d, $u_1(\alpha) = v_1(\alpha)$ et $u_2(\alpha) = v_2(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$. \square

Ce résultat est devenu un outil très efficace pour montrer l'existence de la solution pour l'équation différentielle hybride floue, nous renvoyons le lecteur par exemple à [21, 54].

Chapitre 2

Étude de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous

L'objectif de ce chapitre est de présenter une synthèse sur des techniques afin de résoudre l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous. Pour ce faire, nous présentons dans un premier temps quelques propriétés de l'espace métrique des nombres flous [32, 33, 67]. Puis la définition de la continuité des fonctions à valeur flous [12]. Ensuite la différentiabilité floue [52, 67], nous utilisons alors la différentiabilité généralisée [13, 14], pour écrire les (n, m) -systems du problème. Dans un deuxième temps, nous passons à l'équation différentielle d'Euler flou à savoir la nouvelle forme de cette équation. Dans cette phase, nous formulons puis nous résolvons des (n, m) -systèmes du problème à partir des définitions et des lemmes qui permettent de tenir compte de donner et de montrer l'existence des (n, m) -solutions du problème. Nous donnons des théorèmes pour montrer que (n, m) -solutions sont des solutions du (n, m) -systèmes. Nous proposons ensuite un exemple. Ce résultat a fait l'objet d'un article accepté [23].

1 Espace métrique des nombres flous

Soit $P_K(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les sous ensembles non vides convexes compacts de \mathbb{R} et $A \in P_K(\mathbb{R})$. La distance entre l'ensemble A et un point x de \mathbb{R} est définie par :

$$\rho^*(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

Soient A et B deux éléments de $P_K(\mathbb{R})$. les séparations de Hausdorff de B à A et de A à B sont définies respectivement :

$$\begin{aligned}\rho(B, A) &= \sup_{b \in B} \rho^*(b, A) \\ \rho(A, B) &= \sup_{a \in A} \rho^*(a, B)\end{aligned}$$

notons que ρ n'est pas une métrique en fait : $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq B$.

la distance de Hausdorff H dans $P_K(\mathbb{R})$ est définie par :

$$H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \quad A, B \in P_K(\mathbb{R}).$$

Remarque 1.1. Soient $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$ deux intervalles de \mathbb{R} .

La distance de Hausdorff est donnée par :

$$H(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Nous allons énoncer la définition de l'espace métrique des nombres flous.

Définition 1.1. L'application $D : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} D(A, B) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} H(A[\alpha], B[\alpha]) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|, |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|\} \end{aligned}$$

où H est appelée distance de Hausdorff dans $P_K(\mathbb{R})$ avec $A[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ et $B[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$.

Proposition 1.1. Soient A, B, C et E sont des ensembles flous dans $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

- (i) $D(A + C, B + C) = D(A, B)$
- (ii) $D(kA, kB) = |k|D(A, B) \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- (iii) $D(A + B, C + E) \leq D(A, C) + D(B, E)$
- (iv) $D(A \ominus B, C \ominus E) \leq D(A, B) + D(A, E)$ à condition que $A \ominus B$ et $C \ominus E$ existent
. \ominus est la différence de Hukuhara (4.4)
- (v) $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ est un espace métrique complet

2 Continuité des fonctions à valeurs floues

Définition 2.1. Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction, et soit t_0 un point de $[a, b]$. On dit que F est continue au point t_0 si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall t \in [a, b] \quad |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ entraîne que $D(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$

Remarque 2.1. F est continue au point t_0 et $\forall \alpha \in [0, 1]$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, \alpha) > 0 \mid \forall t \in [a, b] \quad |t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$$

entraîne que $D([F(t)]^\alpha, [F(t_0)]^\alpha) < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, \alpha) > 0 \mid \forall t \in [a, b] \quad |t - t_0| < \delta(\varepsilon, \alpha)$$

entraîne que $\sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ |f_1(t, \alpha) - f_1(t_0, \alpha)|, |f_2(t, \alpha) - f_2(t_0, \alpha)| \right\} < \varepsilon$

Nombres flous avec les frontières des ensembles α -coupes continues

Soit $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^c$ l'ensemble des nombres flous tels que les frontières des ensembles α -coupes sont continues, est défini par :

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^c = \left\{ f \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \mid [F]^\alpha = [f_1(\alpha), f_2(\alpha)] \quad \text{avec} \quad f_i(\alpha) \in C[0, 1] \text{ pour } i = 1, 2 \right\}.$$

Remarque 2.2.

- On peut avoir une fonction $F \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ discontinue et les fonctions $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ sont continues comme dans l'exemple suivant : Soit F la fonction caractéristique

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

l'ensemble α -coupes associé à cette fonction floue est donné par :

$$[F]^\alpha = [a, b], \quad \alpha \in [0, 1].$$

avec $f_1(\alpha) = a$, $f_2(\alpha) = b$ sont des constantes pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

- Soient la fonction $F \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ continue et les fonctions $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ sont discontinues comme dans l'exemple suivant : soit $F : [0, 4] \rightarrow [0, 1]$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } x \in [0, 1]; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [1, 2]; \\ \frac{x-1}{2}, & \text{si } x \in [2, 3]; \\ 4-x, & \text{si } x \in [3, 4]. \end{cases}$$

et on a $f_1(\frac{1}{2}) = 1$ alors que $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} f_1(\alpha) = 2$.

3 Différentiabilité des fonctions à valeur floues

3.1 Différentiabilité de Hukuhara

Soit $I = (a, b)$ un intervalle compact de \mathbb{R} .

Définition 3.1. L'application $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite différentiable au sens de Hukuhara si les H -différences $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ et $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ existent et s'il existe $F'(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0) \quad (2.1)$$

pour tout $h > 0$ suffisamment petit.

Dans ce cas $F'(t_0)$ est appelée la dérivée de Hukuhara de F au point t_0 .

À présent, nous énonçons la définition de la dérivée [39, 63, 68] qui sera utile dans le chapitre 4.

Définition 3.2. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, la dérivée de Seikkala de F est définie par :

$$[F'(t_0)]^\alpha = [f'_1(t_0, \alpha), f'_2(t_0, \alpha)]$$

pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$ à condition que $F'(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Remarque 3.1. Si $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ sont continûment différentiables par rapport à t_0 et uniformément par rapport à α , alors F est Hukuhara différentiable si et seulement si F est Seikkala différentiable.

Les deux définitions coïncident, en effet

$$\begin{aligned} F \text{ est } H\text{-différentiable} &= \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} \right] \\ &= \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t_0 + h, \alpha) - f_1(t_0, \alpha)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_2(t_0 + h, \alpha) - f_2(t_0, \alpha)}{h} \right] \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Donc F est Seikkala différentiable.

Réciproquement si F est Seikkala différentiable alors nous avons :

$$\text{lon}([F]^\alpha) = f_2(\alpha) - f_1(\alpha) \geq 0 \quad t_0 \in I \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, 1]$$

donc la H -différence $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ et $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ existent et en considérant $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h}$ nous obtenons la différentiabilité au sens de Hukuhara.

Proposition 3.1. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, une fonction différentiable au sens de Seikkala alors $[F]^0$ admet une longueur croissante.

Exemple 3.1. Soit $F(t) : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, une fonction des nombres flous triangulaires $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Supposons que F est Hukuhara différentiable et x, y, z sont des fonctions réelles différentiables. On peut écrire la α -coupe de F sous la forme

$$[F(t)]^\alpha = \left[x(t) + \alpha(y(t) - x(t)), z(t) - \alpha(z(t) - y(t)) \right].$$

Alors

$$[F'(t)]^\alpha = \left[x'(t) + \alpha(y'(t) - x'(t)), z'(t) - \alpha(z'(t) - y'(t)) \right].$$

Donc $F'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Alors si F est Hukuhara différentiable et x, y, z sont des fonctions réelles différentiables, alors $F'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ est un nombre flou triangulaire.

La remarque suivante montre l'inconvénient de la différentiabilité au sens de Hukuhara.

Remarque 3.2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonction différentiable en $t_0 \in I$ et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ définie par $F(t_0) = \gamma \cdot f(t_0)$ alors, si $f'(t_0) > 0$, alors F est Hukuhara différentiable et si $f'(t_0) < 0$, alors F n'est pas Hukuhara différentiable.

Exemple 3.2.

- Soit $F(t) = (-1, 0, 1)e^t = (-e^t, 0, e^t)$ une fonction des nombres flous triangulaires, alors si F est Hukuhara différentiable et la fonction exponentielle différentiable donc $F'(t) = (-e^t, 0, e^t)$ est un nombre flou triangulaire.
- Soit $F(t) = (1, 2, 3)e^{-t} = (e^{-t}, 2e^{-t}, 3e^{-t})$. Supposons que F est Hukuhara différentiable alors on a $F'(t) = (-e^{-t}, -2e^{-t}, -3e^{-t})$ mais $F' \notin \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, donc n'est pas hukuhara différentiable.

3.2 Différentiabilité généralisée

3.2.1 Différentiabilité généralisée d'ordre un

Nous avons alors le résultat cité dans les références suivantes [11, 13, 14, 39], qui rappelle la définition et quelques propriétés de la différentiabilité généralisée.

Définition 3.3. L'application $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite (1)-différentiable en $t_0 \in I$, s'il existe un élément $F'(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tel que pour tout $h > 0$ assez petit les H -différences $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ et $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ existent et on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0) \quad (2.2)$$

F est dite (2)-différentiable en $t_0 \in I$ pour tout $h < 0$ assez petit les H -différences $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$ et $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ existent et on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0 - h) \ominus F(t_0)}{h} = F'(t_0) \quad (2.3)$$

Notons que si F est dite (n)-différentiable en t_0 , nous écrivons les dérivées premières par $D_n^1 F(t_0)$, pour $n = 1, 2$

La dérivée première est donnée par le théorème suivant (cf. [27]) comme exemple.

Théorème 3.1. Une application $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est une fonction floue, où $[F(t)]^\alpha = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

(i) Si F est (1)-différentiable, alors $f_1(t, \alpha)$ et $f_2(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_1^1 F(t)]^\alpha = [f_1'(t, \alpha), f_2'(t, \alpha)]$$

(ii) Si F est (2)-différentiable, alors $f_1(t, \alpha)$ et $f_2(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_2^1 F(t)]^\alpha = [f_2'(t, \alpha), f_1'(t, \alpha)]$$

Proposition 3.2. Si $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est une fonction à valeur floue triangulaire, alors

a) Si F est (1)-différentiable (H -différentiable), alors $F'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

b) Si F est (2)-différentiable, , alors $F'(t) = (z'(t), y'(t), x'(t))$

3.2.2 Différentiabilité généralisée d'ordre supérieure

Nous allons introduire les définitions des dérivées d'ordre supérieur basées sur la sélection des types dérivées dans chaque étape de la différenciation.

Par souci de commodité, nous nous concentrons sur le cas de second ordre.

Pour une fonction à valeur floue (abrégée une fonction floue) F , nous avons deux possibilités (Definition 3.3) pour obtenir la dérivée de F à t : $D_1^1 F(t)$ et $D_2^1 F(t)$. Ensuite, pour chacune de ces deux dérivées, nous avons encore deux possibilités :

$$\begin{array}{ccc} & D_1^1(D_1^1 F(t)) & D_2^1(D_1^1 F(t)) \\ & \nearrow & \nearrow \\ D_1^1 F(t) & & \text{et pour } D_2^1 F(t) \\ & \searrow & \searrow \\ & D_1^1(D_2^1 F(t)) & D_2^1(D_2^1 F(t)) \end{array}$$

Définition 3.4. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $n, m = \{1, 2\}$. On dit que F est (n, m)-différentiable à $t_0 \in I$, si $D_n^1 F$ existe au voisinage de t_0 comme une fonction floue et elle est (m)-différentiable à t_0 .

Les dérivées secondes de F sont désignées par $D_{n,m}^2 F(t_0)$ pour $n, m = \{1, 2\}$

Nous énonçons le résultat de dérivées secondes qui va nous aider pour la suite [58].

Théorème 3.2. Soient $D_1^1 F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $D_2^1 F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ des fonctions flous, où $[F(t)]^\alpha = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

- Si $D_1^1 F$ est (1)-différentiable, alors $f_1'(t, \alpha)$ et $f_2'(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_{1,1}^2 F(t)]^\alpha = [f_1''(t, \alpha), f_2''(t, \alpha)]$$

- Si $D_1^1 F$ est (2)-différentiable, alors $f_1'(t, \alpha)$ et $f_2'(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_{1,2}^2 F(t)]^\alpha = [f_2''(t, \alpha), f_1''(t, \alpha)]$$

- Si $D_2^1 F$ est (1)-différentiable, alors $f_1'(t, \alpha)$ et $f_2'(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_{2,1}^2 F(t)]^\alpha = [f_2''(t, \alpha), f_1''(t, \alpha)]$$

- Si $D_2^1 F$ est (2)-différentiable, alors $f_1'(t, \alpha)$ et $f_2'(t, \alpha)$ sont différentiables et

$$[D_{2,2}^2 F(t)]^\alpha = [f_1''(t, \alpha), f_2''(t, \alpha)]$$

Remarque 3.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, on définit $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ par

$F(t) = \gamma f(t)$, $\forall t \in I$, si f est différentiable dans I alors F est différentiable dans I avec $F(t) = \gamma \cdot f(t)$, comme elle est signalée dans la remarque 3.1, l'exemple 3.2 et le théorème 3.1. Alors si $f(t) \cdot f'(t) > 0$ donc F est (1)-différentiable dans I , nous avons aussi si $f(t) \cdot f'(t) < 0$ donc F est (2)-différentiable dans I et si $f(t) \cdot f'(t) = 0$ par [13] nous avons $F'(t) = \gamma \cdot f'(t)$.

Nous pouvons étendre ce résultat de différentiabilité d'ordre supérieure suivant dû à Khastan, Bahrami et Ivaz.[58] :

Théorème 3.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I , $\gamma \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ définie par $F(t) = \gamma f(t)$ pour tout $t \in I$

- $f(t) \cdot f'(t) > 0$ et $f'(t) \cdot f''(t) > 0$ alors $F(t)$ est (1, 1)-différentiable et

$$D_{1,1}^2 F(t) = \gamma \cdot f''(t)$$

- $f(t) \cdot f'(t) > 0$ et $f'(t) \cdot f''(t) < 0$ alors $F(t)$ est (1, 2)-différentiable et

$$D_{1,2}^2 F(t) = \gamma \cdot f''(t)$$

- $f(t) \cdot f'(t) < 0$ et $f'(t) \cdot f''(t) > 0$ alors $F(t)$ est $(2, 1)$ -différentiable et

$$D_{2,1}^2 F(t) = \gamma \cdot f''(t)$$

- $f(t) \cdot f'(t) < 0$ et $f'(t) \cdot f''(t) < 0$ alors $F(t)$ est $(2, 2)$ -différentiable et

$$D_{2,2}^2 F(t) = \gamma \cdot f''(t)$$

4 Étude de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous

4.1 Introduction

Les équations différentielles floues apparaissent comme une manière naturelle pour modéliser la propagation de l'incertitude épistémique dans un environnement dynamique. Il y a plusieurs interprétations d'une équation différentielle floue.

La première historiquement a été basée sur la dérivée au sens de Hukuhara. L'inconvénient de cette interprétation est que les solutions d'une équation différentielle floue est toujours à un support de longueur croissante.

Ce fait implique que le futur comportement d'un système dynamique flou est de plus en plus incertain à temps. Ce phénomène ne permet pas l'existence de solutions périodiques ou des phénomènes asymptotiques.

Voilà pourquoi les différentes idées et les méthodes pour résoudre des équations différentielles floues ont été développées. L'un d'eux résout les équations différentielles à l'aide de Zadeh principe d'extension (Buckley-Feuring [19]). Tandis qu'une autre approche interprète les équations différentielles à valeurs initiales floues par [58] et les inclusions différentielles [3, 4, 26, 28, 34, 56].

Ces dernières et les équations différentielles floues sont deux matières qui sont très intéressantes [31, 59].

Puisque, l'équation différentielle d'Euler peut ramenée par changement de variable à une equation différentielle linéaire, nous travaillons avec les interprétations basées sur le principe de la différentiabilité généralisée d'ordre deux, nous interprétons le $n^{\text{ième}}$ ordre de l'équation différentielle d'Euler floue en utilisant ce concept et nous introduisons une nouvelle définitions de solution de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous.

4.2 Étude du problème

Dans toute la suite de cette partie, I intervalle peut être $(0, a)$ pour certains $a > 0$ ou $I = (0, \infty)$. Nous basons sur les résultats abstraits du paragraphe précédent, nous allons étudier le problème de l'équation différentielle d'Euler à paramètres flous :

$$\begin{cases} a \cdot x^2 y''(x) + b \cdot xy'(x) + c \cdot y(x) = F(x) \\ y(x_0) = d \\ y'(x_0) = e \end{cases} \quad (2.4)$$

où a, b, c, d, e sont des nombres flous et $F(x)$ est une fonction floue continue sur un intervalle I , et leurs α -coupes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [a]^\alpha &= [a_1(\alpha), a_2(\alpha)], & [b]^\alpha &= [b_1(\alpha), b_2(\alpha)], & [c]^\alpha &= [c_1(\alpha), c_2(\alpha)], & [d]^\alpha &= [d_1(\alpha), d_2(\alpha)], \\ [e]^\alpha &= [e_1(\alpha), e_2(\alpha)], & [y(x)]^\alpha &= [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)], & [F(x)]^\alpha &= [f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)] \end{aligned}$$

La stratégie de résoudre (2.4) est basée sur le changement de variables $t = \ln(x)$ et $y(x) = z(t)$ dans l'équation différentielle d'Euler floue (2.4), la déclaration de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à paramètres flous.

$$\begin{cases} \beta \cdot z''(t) + \gamma \cdot z'(t) + \eta \cdot z(t) = F(t) \\ z(t_0) = d \\ z'(t_0) = e \end{cases} \quad (2.5)$$

où β, γ et $\eta \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Et sur le choix du type dérivée de l'équation différentielle floue. Nous commençons d'énoncer quelques résultats qui seront utiles afin de résoudre l'équation (2.4). Nous énonçons tout d'abord les lemmes et leurs démonstrations qui seront utiles dans la suite.

Lemme 4.1.

Soit la fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, pour $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(x)$ où $[y(x)]^\alpha = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)]$ et $[z(t)]^\alpha = [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)]$

(i) Si y est (1)-différentiable, alors z est (1)-différentiable et

$$[D_1^1 z(t)]^\alpha = [z'_1(t, \alpha), z'_2(t, \alpha)] = [xy'_1(x, \alpha), xy'_2(x, \alpha)] = [xD_1^1 y(x)]^\alpha$$

(ii) Si y est (2)-différentiable, alors z est (2)-différentiable et

$$[D_2^1 z(t)]^\alpha = [z'_2(t, \alpha), z'_1(t, \alpha)] = [xy'_2(x, \alpha), xy'_1(x, \alpha)] = [xD_2^1 y(x)]^\alpha$$

Démonstration :

Nous présentons les détails pour le cas (i), l'autre cas est analogue.

Si $h > 0$ et $\alpha \in [0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} [z(t+h) \ominus z(t)]^\alpha &= [z_1(t+h, \alpha) - z_1(t, \alpha), z_2(t+h, \alpha) - z_2(t, \alpha)] \\ &= [y_1(e^{t+h}, \alpha) - y_1(e^t, \alpha), y_2(e^{t+h}, \alpha) - y_2(e^t, \alpha)] \end{aligned}$$

et en multipliant par $\frac{1}{h}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{[z(t+h) \ominus z(t)]^\alpha}{h} &= \left[\frac{y_1(e^{t+h}, \alpha) - y_1(e^t, \alpha)}{h}, \frac{y_2(e^{t+h}, \alpha) - y_2(e^t, \alpha)}{h} \right] \\ &= \left[\frac{y_1(e^{t+h}, \alpha) - y_1(e^t, \alpha)}{h}, \frac{y_2(e^{t+h}, \alpha) - y_2(e^t, \alpha)}{h} \right] \\ &= \left[\frac{y_1(e^{t+h}, \alpha) - y_1(e^t, \alpha)}{u(t)} \frac{u(t)}{h}, \frac{y_2(e^{t+h}, \alpha) - y_2(e^t, \alpha)}{u(t)} \frac{u(t)}{h} \right] \end{aligned}$$

où $u(t) = e^{t+h} - e^t$ et $\lim_{h \rightarrow 0} u(t) = 0$

De la même façon, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{[z(t) \ominus z(t-h)]^\alpha}{h} &= \left[\frac{y_1(e^t, \alpha) - y_1(e^{t-h}, \alpha)}{h}, \frac{y_2(e^t, \alpha) - y_2(e^{t-h}, \alpha)}{h} \right] \\ &= \left[\frac{y_1(e^t, \alpha) - y_1(e^{t-h}, \alpha)}{h}, \frac{y_2(e^t, \alpha) - y_2(e^{t-h}, \alpha)}{h} \right] \\ &= \left[\frac{y_1(e^t, \alpha) - y_1(e^{t-h}, \alpha)}{u(t)} \frac{u(t)}{h}, \frac{y_2(e^t, \alpha) - y_2(e^{t-h}, \alpha)}{u(t)} \frac{u(t)}{h} \right] \end{aligned}$$

où $u(t) = e^t - e^{t-h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0} u(t) = 0$

nous passons à la limite, nous avons :

$$\begin{aligned} [D_1^1 z(t)]^\alpha &= [z'_1(t, \alpha), z'_2(t, \alpha)] \\ &= [xy'_1(x, \alpha), xy'_2(x, \alpha)] \\ &= [xD_1^1 y(x)]^\alpha \end{aligned}$$

□

Lemme 4.2. Soient $f(x) = e^{(x)}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction différentiable (g est différentiable comme dans la définition (2.3) pour (i) ou (ii)).

(i) Si g est (1)-différentiable, alors $f.g$ est (1)-différentiable et

$$(f.g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(ii) Si g est (2)-différentiable, alors $f.g$ est différentiable et

$$(f.g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) \ominus (-f'(x)) \cdot g(x)$$

Démonstration :

Nous présentons les détails pour le cas (ii), l'autre cas est analogue.

g est (2)-différentiable par apport à x , la H -différence $g(x) \ominus g(x+h)$ existe pour $h > 0$ suffisamment petit c'est-à-dire, il existe $u(x, h) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, telle que :

$$g(x) = g(x+h) + u(x, h) \quad \text{et} \quad e^{(x+h)} = e^{(x)} + e^{(x)} \cdot h + o(h)$$

où

$$u(x, h) = g(x) \ominus g(x+h) \quad \text{et} \quad e^{(x)} \cdot h + o(h) = e^{(x+h)} - e^{(x)}$$

pour $h > 0$ suffisamment petit, alors nous avons :

$$e^{(x)} \cdot g(x) + (e^{(x)} \cdot h + o(h)) \cdot g(x) = e^{(x+h)} \cdot g(x+h) + e^{(x+h)} \cdot u(x, h)$$

Si la H -différence $e^{(x+h)} \cdot g(x+h) \ominus e^{(x)} \cdot g(x)$ existe, entraîne que la H -différence $(e^{(x)} \cdot h + o(h)) \cdot g(x) \ominus e^{(x+h)} \cdot u(x, h)$ existe et

$$e^{(x+h)} \cdot g(x+h) \ominus e^{(x)} \cdot g(x) = (e^{(x)} \cdot h + o(h)) \cdot g(x) \ominus e^{(x+h)} \cdot u(x, h).$$

en multipliant par $\frac{1}{h}$ et nous passons au limite avec $h > 0$, voir (Lemma 2 [36]) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} \cdot g(x+h) \ominus e^{(x)} \cdot g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{(x)} \cdot h + o(h))}{h} \cdot g(x) \ominus \lim_{h \rightarrow 0} e^{(x+h)} \cdot \frac{u(x, h)}{h} \\ &= e^{(x)} \cdot g(x) \ominus (-e^{(x)}) \cdot g'(x) \\ &= e^{(x)} \cdot g'(x) \ominus (-e^{(x)}) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Par analogie nous obtenons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x)} \cdot g(x) \ominus e^{(x-h)} \cdot g(x-h)}{h} = e^{(x)} \cdot g(x) \ominus (-e^{(x)}) \cdot g'(x)$$

et la conclusion dans le cas (ii) est obtenue.

Si la H -différence $e^{(x)} \cdot g(x) \ominus e^{(x+h)} \cdot g(x+h)$ existe et donc la H -différence $e^{(x+h)} \cdot u(x, h) \ominus (e^{(x)} \cdot h + o(h)) \cdot g(x)$ existe et nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x-h)} \cdot g(x-h) \ominus e^{(x)} \cdot g(x)}{-h} &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{(x+h)} \cdot \frac{u(x, h)}{-h} \ominus \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{(x)} \cdot h + o(h))}{-h} \cdot g(x) \\ &= e^{(x)} \cdot g'(x) \ominus (-e^{(x)}) \cdot g(x) \end{aligned}$$

De même,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x)} \cdot g(x) \ominus e^{(x+h)} \cdot g(x+h)}{-h} = e^{(x)} \cdot g'(x) \ominus (-e^{(x)}) \cdot g(x)$$

D'où le résultat. □

Remarque 4.1. Nous avons les mêmes résultats si nous prenons une fonction différentiable positive à la place de la fonction exponentielle.

Pour plus de détails dans le cas d'une fonction différentiable positive voir (Théorème 5 [13]).

Lemme 4.3. Soit $D_1^{(1)}y : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ou $D_2^{(1)}y : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction floue, $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(x)$ où $[y(x)]^\alpha = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)]$ et $[z(t)]^\alpha = [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)]$

(i) Si $D_1^{(1)}y$ est (1)-différentiable, alors z est (1, 1)-différentiable et

$$[D_{1,1}^2 z(t)]^\alpha = [x^2 D_{1,1}^2 y(x)]^\alpha + [x D_1^1 y(x)]^\alpha$$

(ii) Si $D_1^{(1)}y$ est (2)-différentiable, alors z est (1, 2)-différentiable et

$$[D_{1,2}^2 z(t)]^\alpha = [x^2 D_{1,1}^2 y(x)]^\alpha \ominus [(-x) D_1^1 y(x)]^\alpha$$

(iii) Si $D_2^{(1)}y$ est (1)-différentiable, alors z est (2, 1)-différentiable et

$$[D_{2,1}^2 z(t)]^\alpha = [x^2 D_{2,1}^2 y(x)]^\alpha + [x D_2^1 y(x)]^\alpha$$

(iv) Si $D_2^{(1)}y$ est (2)-différentiable, alors z est (2, 2)-différentiable et

$$[D_{2,2}^2 z(t)]^\alpha = [x^2 D_{2,2}^2 y(x)]^\alpha \ominus [(-x) D_2^1 y(x)]^\alpha$$

Démonstration :

Nous présentons les détails pour le cas (i), puisque les autres cas sont analogues.

Si $h > 0$ et $\alpha \in [0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} [D_1^{(1)}z(t+h) \ominus D_1^{(1)}z(t)]^\alpha &= [D_1^{(1)}z_1(t+h, \alpha) - D_1^{(1)}z_1(t, \alpha), D_1^{(1)}z_2(t+h, \alpha) - D_1^{(1)}z_2(t, \alpha)] \\ &= [D_1^{(1)}e^{(t+h)}y_1(e^{(t+h)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t)}y_1(e^{(t)}, \alpha), \\ &\quad D_1^{(1)}e^{(t+h)}y_2(e^{(t+h)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t)}y_2(e^{(t)}, \alpha)] \end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{1}{h}$, nous avons :

$$\frac{[D_1^{(1)}z(t+h) \ominus D_1^{(1)}z(t)]^\alpha}{h} = \left[\frac{D_1^{(1)}e^{(t+h)}y_1(e^{(t+h)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t)}y_1(e^{(t)}, \alpha)}{h}, \frac{D_1^{(1)}e^{(t+h)}y_2(e^{(t+h)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t)}y_2(e^{(t)}, \alpha)}{h} \right]$$

De la même façon, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{[D_1^{(1)}z(t) \ominus D_1^{(1)}z(t-h)]^\alpha}{h} &= \left[\frac{D_1^{(1)}z_1(t, \alpha) - D_1^{(1)}z_1(t-h, \alpha)}{h}, \frac{D_1^{(1)}z_2(t, \alpha) - D_1^{(1)}z_2(t-h, \alpha)}{h} \right] \\ &= \left[\frac{D_1^{(1)}e^{(t)}y_1(e^{(t)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t-h)}y_1(e^{(t-h)}, \alpha)}{h}, \right. \\ &\quad \left. \frac{D_1^{(1)}e^{(t)}y_2(e^{(t)}, \alpha) - D_1^{(1)}e^{(t-h)}y_2(e^{(t-h)}, \alpha)}{h} \right] \end{aligned}$$

Nous passons au limite en utilisant les lemmes (4.2),(4.1), nous avons :

$$[D_{1,1}^2z(t)]^\alpha = [x^2D_{1,1}^2y(x)]^\alpha + [xD_1^1y(x)]^\alpha$$

□

4.3 Existence de la solution du problème

Nous donnons les définitions suivantes pour les solutions de (2.4).

Définition 4.1. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, et $n, m \in \{1, 2\}$ on dit y est une (n, m) -solution pour le problème (2.4) dans I si $D_n^1yD_{n,m}^2y$ existe dans I , et

$$\begin{cases} a.x^2D_{n,m}^2y(x) + b.xD_n^1y(x) + c.y(x) = F(x) \\ y(x_0) = d \\ D_n^1y(x_0) = e \end{cases}$$

Avant de s'intéresser à l'étude de l'existence de la solution du problème (2.4), nous faisons tout d'abord traduire le problème (2.4) à un système de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à paramètres flous (2.5), nous utilisons les théorèmes (3.1),(3.2), les lemmes (4.1),(4.2) et lemme (4.1). Cela signifie que pour $n, m \in \{1, 2\}$ le problème (2.5) admet quatre systèmes d'équations différentielles ordinaires possibles, est appelé (n, m) -système, est définie comme suit :

(1, 1)-système

$$\begin{aligned} &[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_1''(t, \alpha), z_2''(t, \alpha)] \ominus [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] \\ &+ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] + [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] \cdot [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)] \end{aligned}$$

$$[z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)], \quad [z_1'(t_0, \alpha), z_2'(t_0, \alpha)] = [e_1(\alpha), e_2(\alpha)].$$

(1, 2)-système

$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_2''(t, \alpha), z_1''(t, \alpha)] + (-[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]) \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] \\ + [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] + [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] \cdot [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$$

$$[z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)], \quad [z_1'(t_0, \alpha), z_2'(t_0, \alpha)] = [e_1(\alpha), e_2(\alpha)].$$

(2, 1)-système

$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_2''(t, \alpha), z_1''(t, \alpha)] \ominus [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] \\ + [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] + [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] \cdot [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$$

$$[z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)], \quad [z_2'(t_0, \alpha), z_1'(t_0, \alpha)] = [e_1(\alpha), e_2(\alpha)].$$

(2, 2)-système

$$[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot [z_1''(t, \alpha), z_2''(t, \alpha)] + (-[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]) \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] \\ + [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] + [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] \cdot [z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$$

$$[z_1(t, \alpha), z_2(t, \alpha)] = [d_1(\alpha), d_2(\alpha)], \quad [z_2'(t_0, \alpha), z_1'(t_0, \alpha)] = [e_1(\alpha), e_2(\alpha)].$$

Nous donnons les démonstrons des deux théorèmes d'existence de la (n, m) -solution du problème (2.4)

Théorème 4.1. Soient $n, m \in \{1, 2\}$ et $y = [y_1, y_2]$ est une (n, m) -solution pour le problème (2.4) dans I , alors y_1 et y_2 résolvent le (n, m) -systèmes correspondant.

Démonstration :

Supposons y est (n, m) -solution du problème (2.4), d'après la définition (4.1), alors $D_n^1 y$ et $D_{n,m}^2 y$ existent et vérifient le problème (2.4). d'après les théorèmes (3.1),(3.2) et nous remplaçons y_1, y_2 et leurs dérivées dans (2.4), nous obtenons (n, m) -système correspondant au (n, m) -solution. \square

Théorème 4.2. Soient $n, m \in \{1, 2\}$, $f_1(t, \alpha)$ et $f_2(t, \alpha)$ résolvent le (n, m) -système dans I . Si $[f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$ est une α -coupe de F dans I et $D_n^1 F, D_{n,m}^2 F$ existent, alors F est une (n, m) -solution du problème (2.4).

Démonstration :

Puisque

$$[F(t)]^\alpha = [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)]$$

est une fonction floue (n, m) -différentiable, à l'aide des théorèmes (3.1) et (3.2) nous

pouvons calculer D_n^1 et $D_{n,m}^2$ et d'après

$$f_1'(t, \alpha), \quad f_2'(t, \alpha), \quad f_1''(t, \alpha), \quad f_2''(t, \alpha).$$

Puisque $f_1(t, \alpha)$ et $f_2(t, \alpha)$ résolvent (n, m) -système, d'après la définition (4.1), alors F est une (n, m) -solution pour (2.4). \square

Les théorèmes (4.2),(4.1) illustrent la méthode de résoudre le problème (2.4). Nous choisissons d'abord le type de solution et nous traduisons le problème (2.4) au problème (2.5) et le problème (2.5) au système d'équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous résolvons le système d'équations différentielles ordinaires obtenu. Après, nous trouvons un tel domaine dans lequel la solution et ses dérivés ont des α -coupes validées et nous utilisons le théorème [55] avec lequel nous pouvons construire la solution du problème initial à valeur floue (2.5), finalement nous avons changé $t = \ln(x)$ alors nous pouvons obtenir la solution de l'équation différentielle floue Euler (2.4).

Remarque 4.2. Nous voyons que la solution de l'équation différentielle d'Euler floue (2.4) dépend de la sélection de dérivés. Il est clair que dans cette nouvelle procédure, l'unicité de la solution est perdue, la situation attendue dans le contexte flou. Pourtant, nous pouvons considérer l'existence des quatre solutions comme illustration dans l'exemple suivant :

4.4 Exemple d'application

Exemple 4.1. Prenons le problème de l'équation différentiel d'Euler floue suivante :

$$\begin{cases} a \cdot x^2 y''(x) + b \cdot xy'(x) = \sigma \\ y(1) = d \\ y'(1) = e \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\sigma = d = e$ sont des nombres flous triangulaires ayant α -coupe $[\alpha - 1, 1 - \alpha]$.

$a = b$ sont des nombres flous triangulaires ayant α -coupe $[\alpha + 1, 3 - \alpha]$.

Si z est $(1, 1)$ -solution pour le problème (2.7), alors y est $(1, 1)$ -solution pour le problème (2.6), d'où :

$$\begin{aligned} & [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1''(t, \alpha), z_2''(t, \alpha)] \ominus [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] \\ & \quad + [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [z_1(0), z_2(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \\ [z_1'(0), z_2'(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{cases} \quad (2.7)$$

et qui satisfont (1, 1)-système associé avec (2.4). D'autre part, l'équation différentielle ordinaire correspondante au (1, 1)-système n'a que la solution suivante :

$$\begin{cases} y_1(x, \alpha) = (\alpha - 1)\left(\frac{(\ln(x))^2}{2(\alpha+1)} + \ln(x) + 1\right) \\ y_2(x, \alpha) = (1 - \alpha)\left(\frac{(\ln(x))^2}{2(3-\alpha)} + \ln(x) + 1\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous voyons que $[y(x)]^\alpha = [y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha)]$ sont des α -coupes validées pour tout $x \geq 1$. Et nous devons assurer que $\text{lon}(z_2'' - z_1'') \geq \text{lon}(z_2' - z_1')$ pour $x \in [1, e]$ avec $y(x)$ a un ensemble de niveau α pour tout $x \in [1, e]$, dans le théorème (3.3), nous pouvons voir y est une (1, 1)-solution pour $[1, e]$ (1, 2)-système

$$\begin{aligned} & [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_2''(t, \alpha), z_1''(t, \alpha)] + (-[\alpha + 1, 3 - \alpha]) \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] \\ & \quad + [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [z_1(0), z_2(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \\ [z_1'(0), z_2'(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour (1, 2)-solution, nous obtenons les solutions suivantes pour (1, 2)-système :

$$\begin{cases} y_1(x, \alpha) = (\alpha - 1) \left[\frac{3\alpha-1}{2(\alpha+1)} + \frac{(3-\alpha)}{2(\alpha+1)} e^{\left(\frac{2(\alpha+1)}{3-\alpha} \ln(x)\right)} \right] \\ y_2(x, \alpha) = (1 - \alpha) \left[\frac{-3\alpha+5}{2(3-\alpha)} + \frac{(\alpha+1)}{2(3-\alpha)} e^{\left(\frac{2(3-\alpha)}{\alpha+1} \ln(x)\right)} \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

nous voyons que $y(x)$ a un ensemble de niveau α validée et est (1,1)-différentiable pour ($x \geq 1$). Comme le (1, 2)-système n'a que la solution ci-dessus, alors (1,2)-solution n'existe pas (d'après le théorème (3.3)).

(2, 1)-système

$$\begin{aligned} & [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_2''(t, \alpha), z_1''(t, \alpha)] \ominus [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] \\ & \quad + [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1'(t, \alpha), z_2'(t, \alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [z_1(0), z_2(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \\ [z_2'(0), z_1'(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{cases} \quad (2.11)$$

La solution est :

$$\begin{cases} y_1(x, \alpha) = (\alpha - 1) \left(\frac{-(\ln(x))^2}{2(3-\alpha)} - \ln(x) + 1 \right) \\ y_2(x, \alpha) = (1 - \alpha) \left(\frac{-(\ln(x))^2}{2(\alpha+1)} - \ln(x) + 1 \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $y(x)$ a un ensemble de niveaux α validée pour $x \in [1, e^{\sqrt{3}-1}]$.

Nous pouvons voir $y(x)$ est (2, 1)-solution sur $[1, e^{\sqrt{3}-1}]$

Enfin, (2,2)-système

$$[\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_1''(t, \alpha), z_2''(t, \alpha)] + (-[\alpha + 1, 3 - \alpha]) \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] \\ + [\alpha + 1, 3 - \alpha] \cdot [z_2'(t, \alpha), z_1'(t, \alpha)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$$

$$\begin{cases} [z_1(0), z_2(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \\ [z_2'(0), z_1'(0)] = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \end{cases}$$

le (2-2)-système donne

$$\begin{cases} y_1(x, \alpha) = (\alpha - 1) \left[\frac{7-\alpha}{2(3-\alpha)} - \frac{\alpha+1}{2(3-\alpha)} \exp\left(\frac{2(3-\alpha)}{\alpha+1} \ln(x)\right) \right] \\ y_2(x, \alpha) = (1 - \alpha) \left[\frac{5-\alpha}{2(1+\alpha)} - \frac{3-\alpha}{2(1+\alpha)} \exp\left(2\left(\frac{1+\alpha}{3-\alpha}\right) \ln(x)\right) \right] \end{cases} \quad (2.13)$$

Si (2.13) ne peut pas être une solution floue pour (2.6), alors (2,2)-solution n'existe pas .

Alors nous avons un exemple de l'équation différentielle d'Euler floue avec quatre solutions différentes.

Chapitre 3

Méthode d'itération variationnelle

Historiquement, la méthode d'itération variationnelle a été introduite dans l'année 1997 par Ji-Huan He, cette méthode a été employée afin de résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non linéaires avec des approximations convergentes rapidement vers des solutions. Dans ce chapitre, on rappelle les résultats classiques concernant la méthode d'itération variationnelle, qui sera utile dans le chapitre quatre.

1 Introduction

Les méthodes variationnelles sont des outils forts dans la résolution des problèmes non linéaires et apparaissent dans plusieurs disciplines où les méthodes classiques échouent. Il y a beaucoup de techniques, telles que les méthodes de perturbation, pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires. Une attention particulière devrait être accordée par la méthode de décomposition [5] et la méthode d'analyse d'homotopique de Liao [45, 50, 60], avec ces méthodes, la plupart des équations aux dérivées partielles peuvent être résolues avec succès environ sans linéarisation ou faible linéarisation ou des petites perturbations. Cependant, l'approximation obtenue par la méthode décomposition ne peut pas toujours satisfaire l'ensemble de ses conditions aux limites, ce qui conduit à l'erreur près limitée.

Il est évident que le rapprochement ne satisfait pas ses conditions aux limites. En 1995, Liu [61] propose une méthode modifiée d'Adomian appelée méthode de décomposition résiduelle pondérée, avec cette méthode, il a obtenu avec des rapprochements qui satisfont toutes ses conditions aux limites, elle est donc la plus appropriée que la méthode d'Adomian. En 1978, Inokuti. [53] a proposé la méthode de multiplicateur de Lagrange général pour résoudre les équations non linéaires, qui a été d'abord appliquée principalement à la mécanique quantique. Dans cette méthode, la solution est plus précise, en fonction de son procès-fonction, elle peut-être obtenue pour certains points particuliers. Elle ne donne pas des solutions analytiques approximatives. La méthode sera modifiée dans la méthode d'itération.

La méthode d'itération variationnelle est une généralisation de la méthode de Lagrange générale proposée dans [53], à la fin du procédé, l'approximation est extrêmement bien précise à un moment spécial qui peut être obtenue mais pas une solution analytique.

Multiplicateur de Lagrange général

Supposons que nous essayons de trouver la racine x_0 de l'équation algébrique

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

avec $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle x , continue et dérivable au voisinage de x_0 . Nous écrivons une estimation par l'expression suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n) \tag{3.2}$$

et en supposant que nous connaissons une racine approximative x_{n+1} , différente de x_n par une petite quantité c'est à dire $x_{n+1} = x_n + \delta x_n$, alors $f(x_n) \neq 0$ et $-\lambda f(x_n)$ représente une correction à x_n .

Nous voulons choisir λ de telle sorte que cette correction est optimale.

En effet : nous insérons $x_1 = x_0 + \delta x$ dans (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \delta x - \lambda f(x_0 + \delta x) \\ &= x_0 + \delta x - \lambda[f(x_0) + \delta x f'(x_0)] + O(\delta x^2) \\ &= x_0 + [1 - \lambda \delta x f'(x_0)]\delta x + O(\delta x^2) \end{aligned}$$

le choix $\lambda = [f'(x_0)]^{-1}$ est optimale, dans le sens qu'elle rend x_1 différent de x_0 par $O(\delta x^2)$, λ optimale est malheureusement difficile à calculer parce qu'elle implique une racine exacte de x_0 , mais ceci ce n'est pas un problème. la quantité λ est le multiplicateur de $f(x)$ qui est une petite quantité de $O(\delta x_n^2)$, donc nous avons besoin seulement d'une approximations de λ , alors nous pouvons remplacer λ dans (3.2) par $[f'(x_n)]^{-1}$ sans provoquer une erreur qui ne dépasse pas $O(\delta x_n^2)$, par conséquent, nous arrivons à l'estimation variationnelle

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

Ce résultat est la méthode de Newton figure 3.1, mais elle est instructive à interpréter le sens de λ à plusieurs façons.

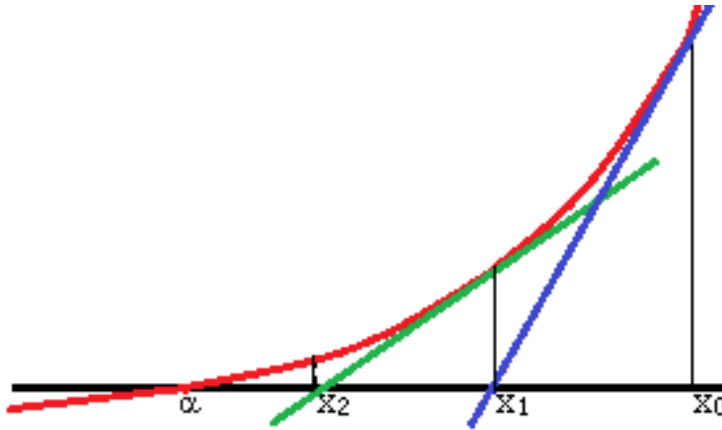


FIGURE 3.1 – La méthode de Newton.

Exemple 1.1. Supposons que nous essayons de calculer $y_1(x)$, c'est à dire la valeur de la fonction $y(x)$ définie par :

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

la solution exacte $y_0(x) = \frac{1}{1+x}$ et $y_0(1) = \frac{1}{2}$, prétendre que nous ne connaissons pas cette solution exacte, nous écrivons l'estimation variationnelle

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \lambda_n [y_n'(x) + y_n^2(x)] \quad (3.3)$$

pour $n = 1$ nous obtenons

$$y_1(x) = y_0(x) - \int_0^1 \lambda(x) [y_0'(x) + y_0^2(x)] dx$$

nous insérons la fonction d'essai $y_1(x) = y_0(x) + \delta y(x)$ avec $y(0) = 1$ pour que $\delta y(0) = 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) + \delta y(x) - \int_0^1 \lambda(x) [\delta y(x)]' dx \\ &\quad - 2 \int_0^1 \lambda(x) y(x) \delta y(x) dx + 0(\delta y^2). \end{aligned}$$

Nous appliquons l'intégration par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) + \left[[1 - \lambda(x)] \delta y(x) \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left[\lambda'(x) - 2y(x)\lambda(x) \right] \delta y(x) dx + 0(\delta y^2). \end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons l'optimale $\lambda(x)$ est donnée à condition que :

$$\begin{cases} \lambda'(x) - 2y(x)\lambda(x) = 0, \\ 1 - \lambda(x)|_{x=1} = 0, \end{cases}$$

soient réalisées. ou

$$\lambda(x) = \exp\left[2 \int_1^x y(t) dt\right].$$

Alors, nous arrivons à l'estimation variationnelle

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) - \int_0^1 \exp\left[2 \int_1^x y(\tau) d\tau\right] \left[y_0'(x) + y_0^2(x)\right] dx. \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) = 0.56 \end{aligned}$$

la précision 13.5 est remarquable compte tenu de la crudité de la première approximation.

Remarque 1.1. Nous pouvons écrire l'expression suivante :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^1 \exp\left[2 \int_1^x y(\tau) d\tau\right] \left[y_n'(x) + y_n^2(x)\right] dx \quad (3.4)$$

En principe le processus peut être poursuivi aussi loin que nous le souhaitons, mais les intégrales résultantes deviennent rapidement très lourdes, donc une certaine simplification dans le processus d'identification de multiplicateur de Lagrange sera discutée.

Nous reconsidérons la correction fonctionnelle (3.4) comme suit :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \left[y_n'(\tau) + y_n^2(\tau)\right] d\tau \quad (3.5)$$

où le terme non linéaire y_n^2 est considéré comme une variation ou une variation limitée non variationnelle [38] c'est à dire $\delta y_n^2 = 0$.

Par conséquent le multiplicateur de Lagrange peut être facilement identifié, et la formule d'itération variationnelle est obtenue sous la forme suivante :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x \left[y_n'(\tau) + y_n^2(\tau)\right] d\tau \quad (3.6)$$

pour $n = 1$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0(x) - \int_0^x \left[y_0'(\tau) + y_0^2(\tau)\right] d\tau \\ &= 1 - \int_0^x (0 + 1) d\tau = 1 - x \end{aligned}$$

Avec la même manipulation, la n-ième approximation sera obtenue et qui convergera vers la solution exacte lentement, en raison de l'identification approximative du multiplicateur de Lagrange.

2 Méthode d'itération variationnelle

L'étude de la méthode d'itération variationnelle nécessite le choix du système. Dans le paragraphe suivant nous allons considérer en général l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante cf.[20, 47, 48, 49, 51, 73]

$$L_t u + L_x u + L_y u + Nu = f(t, x, y, k) \quad (3.7)$$

avec L_t , L_x et L_y sont des opérateurs linéaires de t , x et y , respectivement et N est un opérateur non linéaire, aussi $f(t, x, y, k)$ est le terme non homogène. Selon l'exemple 3.5, nous pouvons exprimer la fonction de correction suivante pour (3.7) dans les directions t , x et y , peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t, x, y) &= u_n(t, x, y) + \int_0^t \lambda_1 \{L_s u_n + (L_x + L_y + N)\tilde{u}_n - f(s, x, y, k)\} ds \\ u_{n+1}(t, x, y) &= u_n(t, x, y) + \int_0^x \lambda_2 \{L_s u_n + (L_t + L_y + N)\tilde{u}_n - f(t, s, y, k)\} ds \\ u_{n+1}(t, x, y) &= u_n(t, x, y) + \int_0^y \lambda_3 \{L_s u_n + (L_t + L_x + N)\tilde{u}_n - f(t, x, s, k)\} ds \end{aligned}$$

avec λ_i , $1 \leq i \leq 3$ sont des multiplicateurs de Lagrange generals, qui peuvent être identifiés de façon optimale via la théorie variationnelle (comme l'exemple 3.5) et \tilde{u}_n est une variation limitée qui signifie $\delta\tilde{u}_n = 0$.

Il est nécessaire d'abord de déterminer les multiplicateurs de Lagrange λ_i qui seront identifiés de manière optimale grâce à l'intégration par partie.

Les approximations u_{n+1} , $n \geq 0$, de la solution $u(t, x, y)$ suivront immédiatement après toute aide sélective de la fonction u_0 . Les valeurs initiales $u(0, x, y)$ et $u_t(0, x, y)$ sont utilisés généralement pour l'approximation u_0 , avec les multiplicateurs de Lagrange λ_i déterminées, puis plusieurs rapprochements $u_i(t, x, y)$, $i \geq 0$, peuvent être déterminés. Par conséquent, la solution est donnée comme suit :

$$u(t, x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x, y)$$

Chapitre 4

Équation aux dérivées partielles à paramètres flous

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des solutions floues pour les équations aux dérivées partielles dépendant des paramètres susceptibles d'être des quantités floues. Cette partie de mon travail a été réalisée dans le cadre de l'article [18]. Elle a donné lieu aux publications suivantes [22, 24, 25].

Nous commençons ce chapitre en présentant l'équation aux dérivées partielles (EDP). Nous considérons en effet que les paramètres de l'équation sont flous et nous écrivons l'équation aux dérivées partielles floues (EDPF), en se basant sur le principe d'extension de Zadeh¹ et les définitions de dérivées floues introduite par Seikkala². Puis afin d'introduire les concepts à la compréhension de notre exposé, nous faisons dans la section (2), une présentation élémentaire de la stratégie de Buckley-Feuring et de Seikkala. Dans les sections (3),(4), nous étudions l'équation de la chaleur et l'équation d'onde à paramètres flous.

1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles forment une base de très nombreux modèles mathématiques des phénomènes physiques, chimiques et biologiques, et plus récemment leur utilisation est répandue dans l'économie, prévisions financières, traitement d'images et d'autres domaines. La connaissance des systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles est souvent incomplète ou imprécise.

Par exemple, pour les quantités paramétriques, les relations fonctionnelles, ou les conditions initiales, les méthodes bien connues de la résolution des équations aux dérivées partielles floues (EDPF) analytiques ou numériques ne peuvent être utiliser pour trouver le comportement du système sélectionné, par exemple, en fixant des paramètres

1. déjà citée dans le chapitre 1

2. déjà citée dans le chapitre 2

inconnus à des valeurs plausibles.

De cette façon, il est impossible de caractériser l'ensemble des comportements des systèmes compatibles avec notre connaissance partielle.

Nous considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\varphi(D_t, D_x, D_y, p(x, \gamma), q(y, \beta))u(t, x, y) = f(t, x, y, k) \quad (4.1)$$

Pour certains conditions initiales et aux limites. Avec

- $I_1 = [0, M_1]$, $I_2 = [M_2, M_3]$ et $I_3 = [M_4, M_5]$ sont des intervalles où M_{n_1} ($n_1 = 2, 3, 4, 5$) est négative ou positive et $M_1 > 0$.
- Les fonctions $f(t, x, y, k)$, $u(t, x, y)$, $p(x, \gamma)$ et $q(y, \beta)$ seront des fonctions continues pour $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$.
- $p(x, \gamma)$ et $q(y, \beta)$ a un nombre fini de racine pour chaque $(x, y) \in I_2 \times I_3$.
- $k = (k_1, \dots, k_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_e)$ sont des vecteurs ayant des constantes $k_j \in J_j$, $c_i \in l_i$, $\gamma_r \in H_r \subset \mathbb{R}$ et $\beta_l \in D_l$.
- l'opérateur $\varphi(D_t, D_x, D_y, p, q)$ est un polynôme à coefficients p et q dans D_x et D_y où D_t, D_x, D_y représentent les dérivées partielles par rapport à t, x, y .

Remarque 1.1.

1. On ne donne pas une structure explicite sur les conditions aux limites, mais on peut dire qu'elles dépendent des constantes c_1, \dots, c_m avec $c_i \in L_i$, $1 \leq i \leq m$.
2. On suppose que le problème (4.2) avec certaines conditions aux limites possède une solution $u(t, x, y, \gamma, \beta, k, c)$

Nous allons maintenant introduire des paramètres flous. Nous supposons que les constantes k_j , c_i , γ_r et β_l sont imprécises dans leurs valeurs.

Nous allons modéliser cette incertitude en substituant des nombres flous triangulaires pour k_j , c_i , γ_r et β_l . Si nous procédons à une fuzzification (4.2), on obtient alors l'équation aux dérivées partielles floue.

En utilisant le principe d'extension que nous avons vu dans le chapitre 1, on calcule F , P et Q à partir de f , p et q respectivement avec $F(t, x, y, K)$, $K = (K_1, \dots, K_n)$ et $P(x, \boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_s)$ et $Q(y, \boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_e)$ pour K_j , $\boldsymbol{\gamma}_r$ et $\boldsymbol{\beta}_l$ des nombres flous triangulaires dans J_j ($0 \leq j \leq n$), H_r ($0 \leq r \leq s$) et D_l ($0 \leq l \leq e$).

La fonction u est remplacée par U avec $U : \prod_{j=1}^3 I_j \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Par conséquent, la solution $U(t, x, y, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, K)$ du système des (EDP) sera également floue.

Le système devient :

$$\varphi\left(D_t, D_x, D_y, P(x, \boldsymbol{\gamma}), Q(y, \boldsymbol{\beta})\right)U(t, x, y) = F(t, x, y, K) \quad (4.2)$$

Avec ces fonctions d'appartenances sont :

$$\mu_U(\cdot, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, K)(z) = \sup_{\gamma, \beta, k: \begin{cases} z = u(t, x, y, \gamma, \beta, k), \\ \text{l'équation (4.2)}, \end{cases}} \mu_{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, K}(\gamma, \beta, k)$$

$$\mu_{F(t, x, y, K)}(z) = \sup_{k: \begin{cases} z = f(t, x, y, k), \\ \text{l'équation (4.2)}, \end{cases}} \mu_K(k)$$

$$\mu_{P(x, \boldsymbol{\gamma})}(z) = \sup_{\gamma: \begin{cases} z = p(x, \gamma), \\ \text{l'équation (4.2)}, \end{cases}} \mu_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma)$$

et

$$\mu_{Q(y, \boldsymbol{\beta})}(z) = \sup_{\beta: \begin{cases} z = q(y, \beta), \\ \text{l'équation (4.2)}, \end{cases}} \mu_{\boldsymbol{\beta}}(\beta)$$

Il est souvent supposé dans la modélisation floue que les différents paramètres sont indépendants.

Définition 1.1. Soient A, B deux nombres flous, on dit qu'ils sont indépendants, si

$$\mu_{A, B}(a, b) = \min(\mu_A(a), \mu_B(b)).$$

Une conséquence importante de l'indépendance dont nous aurons besoin quand $K_1, \dots, K_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sont des nombres flous indépendants, les α -coupes de $K := K_1, \dots, K_n$ sont des hyper-rectangles c'est à dire

$$K[\alpha] = K_1[\alpha] \times \dots \times K_n[\alpha] \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1].$$

Alors dans la suite de notre travail on a :

$$K[\alpha] = \prod_{j=1}^n K_j[\alpha], \quad \boldsymbol{\gamma}[\alpha] = \prod_{r=1}^s \boldsymbol{\gamma}_r[\alpha], \quad C[\alpha] = \prod_{i=1}^m C_i[\alpha] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta}[\alpha] = \prod_{l=1}^e \boldsymbol{\beta}_l[\alpha]. \quad (4.3)$$

En raison de l'indépendance de $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}$ et K nous avons par la définition (1.1)

$$\mu_{U(t,x,y,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta},K)}(z) = \sup_{\gamma,\beta,k: \begin{cases} z = u(t,x,y,\gamma,\beta,k), \\ \text{l'équation (4.2),} \end{cases}} \min(\mu_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma), \mu_{\boldsymbol{\beta}}(\beta), \mu_K(k))$$

Ces fonctions d'appartenances

$$\mu_{U(t,x,y,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta},K)}(z), \quad \mu_{F(t,x,y,K)}(z), \quad \mu_P(x,\boldsymbol{\gamma})(z) \quad \text{et} \quad \mu_Q(y,\boldsymbol{\beta})(z)$$

sont très difficiles à calculer directement. Nous allons utiliser l'approche de la α -coupe, Notez, que cette dernière ne peut être appliquée que si les applications sont continues. Alors nous énonçons aussi le résultat suivant (cf. [75])

Théorème 1.1. Soit $F : \mathbb{V} \rightarrow W$ une application continue et $A \in \mathbb{V}_{\mathcal{F}}$ un ensemble flou à support compact et semi-continue supérieurement. Ensuite, l'extension de Zadeh F satisfait

$$[F(A)]^\alpha = F([A]^\alpha)$$

qu'on peut encore simplifier sous la forme :

$$[F(A)]^\alpha = \left[\min_{a \in [A]^\alpha} F(a), \max_{a \in [A]^\alpha} F(a) \right]$$

quand $W = \mathbb{R}$.

puisque $(\gamma, \beta, k) \mapsto u(t, x, y, \gamma, \beta, k)$ est continue sur $\left[(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, K) \right]^0$, (même chose pour $p(x, \boldsymbol{\gamma}), q(y, \boldsymbol{\beta}), f(t, x, y, k)$ sont continues), que nous ne prouverons pas ici, mais simplement supposer.

Nous avons alors

$$[U(t, x, y, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, K)]^\alpha = \left[\min_{\substack{\gamma \in [\boldsymbol{\gamma}]^\alpha, \beta \in [\boldsymbol{\beta}]^\alpha, \\ k \in [K]^\alpha}} u(t, x, y, \gamma, \beta, k), \max_{\substack{\gamma \in [\boldsymbol{\gamma}]^\alpha, \beta \in [\boldsymbol{\beta}]^\alpha, \\ k \in [K]^\alpha}} u(t, x, y, \gamma, \beta, k) \right]$$

Après nous allons étudier cette solution pour l'équation de la chaleur et l'équation d'onde contenant des paramètres flous avec différents type.

2 Différentes approches de solution

2.1 Solution de Buckley-Feuring

Pour traiter un problème flou, on a besoin de suivre la stratégie de Buckley-Feuring suivante :

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou $y = f(x_1, \dots, x_n)$, avec x_i et y sont des variables réelles. Soit X_i , $1 \leq i \leq n$, un nombre flou triangulaire avec sa fonction d'appartenance $\mu_{X_i}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$.

D'après le principe d'extension, nous obtenons

$$\mu_Y(y) = \sup\{\pi(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = y\}$$

avec $\pi(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{X_i}(x_i)\}$.

- Encore une autre procédure équivalente pour déterminer Y est la proche de la α -coupe.
Soit $U(\alpha) = [U_1]^\alpha \times [U_2]^\alpha \times \dots \times [U_n]^\alpha$. L'extension de f pour $0 \leq \alpha \leq 1$ est (cf.[64], p.19)

$$\Omega(\alpha) = \{y \mid y = f(x), x \in U(\alpha)\},$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- On définit W un sous-ensemble flou des nombres réels, par sa fonction d'appartenance

$$\mu_W(y) = \sup\{\alpha \mid y \in \Omega(\alpha)\},$$

Cette stratégie a été traduite dans le résultat suivant (cf.[18, 19, 20])

Théorème 2.1.

1. $W = Y$
2. Si f est continue, alors $[W]^\alpha = \Omega(\alpha) = [Y]^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$

2.2 Solution de Seikkala

L'approche de Seikkala pour traiter un problème flou est de résoudre le problème classique et de se baser sur le concept de dérivée (voir la différentiabilité du Hukuhara (4.4)).

Exemple 2.1.

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_1(\alpha) \quad (4.4)$$

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_2(\alpha) \quad (4.5)$$

pour tout $\alpha \in (0, 1]$ et puis étudier la dépendance de α des solutions.

Nous allons obtenir une solution floue u dans le sens suivant :

Théorème 2.2. Soit $\beta \in (0, 1]$, il existe $t_\beta > 0$ tel que les équations

$$[U(t)]^\alpha = [u_1(t, \alpha), u_2(t, \alpha)], \quad \beta \leq \alpha \leq 1,$$

$$[U(t)]^\alpha = [u_1(t, \beta), u_2(t, \beta)], \quad 0 < \alpha \leq \beta,$$

avec $u_1(t, \alpha)$ et $u_2(t, \alpha)$ sont les solutions (4.4) et (4.5) respectivement, qui définissent la partie minimale et maximale d'une application floue $U : [0, t_\beta] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

3 Équations de la chaleur à paramètres flous

Nous considérons les équations de la chaleur qui peuvent être écrites dans les formes (cf.[2]) suivantes :

– Unidimensionnel :

$$u_t(t, x) + p(x, \gamma)u_{xx}(t, x) = f(t, x, k) \quad (4.6)$$

– Bidimensionnel :

$$u_t(t, x, y) + p(x, \gamma)u_{xx}(t, x, y) + q(y, \beta)u_{yy}(t, x, y) = f(t, x, y, k) \quad (4.7)$$

ou

$$u_t(t, x, y) + q(y, \beta)u_{xx}(t, x, y) + p(x, \gamma)u_{yy}(t, x, y) = f(t, x, y, k) \quad (4.8)$$

pour certains conditions initiales et aux bords .

Ces conditions initiales et aux bords, dans le cas de deux dimensions peuvent être sous la forme :

$$u(0, x, y) = c_1, \text{ ou } u(0, x, y) = g_1(x, y, c_2), \text{ ou } u(M_1, x, y) = g_2(x, y, c_3, c_4), \dots,$$

Dans cette partie, la méthode est appliquée pour l'équation de la chaleur (4.7). pour (4.6) et (4.8), nous faisons la même chose. On suppose que le problème (4.7) avec certaines conditions aux limites possède une solution

$$u(t, x, y) = g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta) \quad (4.9)$$

et

$$\left((g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta))_t + p(x, \gamma)(g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta))_{xx} + q(y, \beta)(g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta))_{yy} \right)$$

sont continues où $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$, $k \in J = \prod_{j=1}^n J_j$, $c \in L = \prod_{i=1}^m L_i$, $\gamma \in H = \prod_{r=1}^s H_r$ et $\beta \in D = \prod_{l=1}^e D_l$.

L'équation de la chaleur floue est :

$$U_t(t, x, y) + P(x, \boldsymbol{\gamma})U_{xx}(t, x, y) + Q(y, \boldsymbol{\beta})U_{yy}(t, x, y) = F(t, x, y, K) \quad (4.10)$$

sous réserve de certaines conditions initiales et aux limites. Ces conditions initiales et aux limites peuvent être sous la forme :

$$U(0, x, y) = C_1 \text{ ou } U(0, x, y) = G_1(x, y, C_2) \text{ ou } U(M_1, x, y) = G_2(x, y, C_3, C_4)$$

G_j est la fuzzification g_j via le principe d'extension. Alors, nous allons résoudre le problème donné en (4.10). Enfin, nous fuzzifions g dans (4.9).

Remarque 3.1. Nous allons voir la solution g de l'équation aux dérivées partielles, qui n'est pas définie en termes de séries. C'est pour cette raison, on ne peut pas utiliser les séries de Fourier pour définir g . Puisque nous devons fuzzifier g . Alors on a besoin de la solution g afin qu'elle soit simple. Donc on suppose également que les fonctions de Bessel et de Legendre ne sont pas utilisées pour obtenir g .

3.1 Exemple d'un paramètre flou dans l'équation de chaleur

Nous avons considéré le flux de chaleur à travers une barre rectangulaire [30]. L'équation de la chaleur unidimensionnelle est représentée comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0 \\ T(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad T(0, t) = T_0. \end{cases}$$

où, la constante $\kappa = \frac{K}{\rho C}$ signifie la conductivité thermométrique, K représente la conductivité thermique, ρ la densité du matériel et C la chaleur spécifique du matériel du corps. Du point de précision dans les mesures, les valeurs mesurées de ces paramètres sont imprécises et donc on peut supposer la présence d'incertitude dans K , ρ et C séparément. la conductivité thermique est prise seulement comme paramètre flou et la densité et la chaleur spécifique sont déterminées. La température T_0 est mesurée possède une incertitude qui est prescrite flou gouvernée par la fonction d'appartenance représenté dans la figure (4.1).

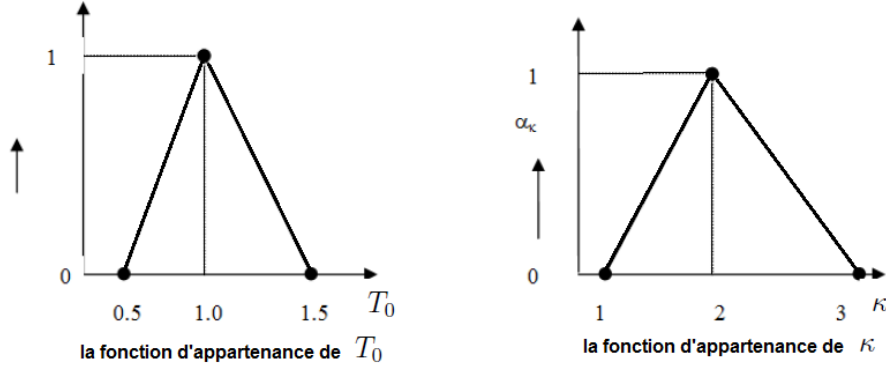


FIGURE 4.1 – Fonctions d'appartenance des paramètres flous

3.2 Solution de l'équation de la chaleur au sens de Buckley-Feuring

À présent, nous présenterons un résultat sur la solution au sens de Buckley-Feuring de l'équation (4.7).

Soit

$$Z(t, x, y) = G(t, x, y, K, C, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$$

avec Z est calculée en utilisant le principe d'extension, Z est une solution floue.

On définit pour tous t, x, y et $\alpha \in [0, 1]$,

$$Z(t, x, y)[\alpha] = [z_1(t, x, y, \alpha), z_2(t, x, y, \alpha)],$$

$$F(t, x, y, K)[\alpha] = [F_1(t, x, y, \alpha), F_2(t, x, y, \alpha)]$$

et vérifiant (4.10), nous devons calculer $P(x, \boldsymbol{\gamma})$ et $Q(y, \boldsymbol{\beta})$.

les α -coupes de $P(x, \boldsymbol{\gamma})$ et $Q(y, \boldsymbol{\beta})$ peuvent être trouvées comme suit :

$\forall \alpha \in [0, 1]$

$$P(x, \boldsymbol{\gamma})[\alpha] = [P_1(x, \alpha), P_2(x, \alpha)],$$

$$Q(y, \boldsymbol{\beta})[\alpha] = [Q_1(y, \alpha), Q_2(y, \alpha)].$$

Soit $W = K[\alpha] \times C[\alpha] \times \boldsymbol{\gamma}[\alpha] \times \boldsymbol{\beta}[\alpha]$. Et par définition

$$z_1(t, x, y, \alpha) = \min \left\{ g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta) : (k, c, \gamma, \beta) \in W \right\} \quad (4.11)$$

$$z_2(t, x, y, \alpha) = \max \left\{ g(t, x, k, y, c, \gamma, \beta) : (k, c, \gamma, \beta) \in W \right\} \quad (4.12)$$

$$\forall (t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, 1]$$

et

$$F_1(t, x, y, \alpha) = \min \left\{ f(t, x, y, k) : k \in K[\alpha] \right\} \quad (4.13)$$

$$F_2(t, x, y, \alpha) = \max \left\{ f(t, x, y, k) : k \in K[\alpha] \right\} \quad (4.14)$$

$\forall (t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$

et

$$P_1(x, \alpha) = \min \left\{ p(x, \gamma) \mid \gamma \in \mathcal{Y}[\alpha] \right\} \quad (4.15)$$

$$P_2(x, \alpha) = \max \left\{ p(x, \gamma) \mid \gamma \in \mathcal{Y}[\alpha] \right\}$$

$\forall x \in I_2$ et $\alpha \in [0, 1]$

et

$$Q_1(y, \alpha) = \min \left\{ q(y, \beta) \mid \beta \in \mathcal{B}[\alpha] \right\}, \quad (4.16)$$

$$Q_2(y, \alpha) = \max \left\{ q(y, \beta) \mid \beta \in \mathcal{B}[\alpha] \right\}$$

$\forall y \in I_3$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Dans la suite nous supposons que $p(x, \gamma) > 0$, $q(y, \beta) > 0$ c'est à dire $P_1(x, \alpha) > 0$, $Q_1(y, \alpha) > 0$ respectivement et $z_i(t, x, y, \alpha)$ pour $i = 1, 2$, a des dérivées partielles continues si

$$(z_i)_t + P_i(z_i)_{xx} + Q_i(z_i)_{yy}$$

est continu pour tous $t, x, y \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et tout $\alpha \in [0, 1]$. On définit

$$\Gamma(t, x, y, \alpha) = \left[(z_1)_t + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx} + Q_1(y, \beta)(z_1)_{yy}, \right. \\ \left. (z_2)_t + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx} + Q_2(y, \beta)(z_2)_{yy} \right] \quad (4.17)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et tout α .

Si, pour chaque $t, x, y \in \prod_{j=1}^3 I_j$ fixées, $\Gamma(t, x, y, \alpha)$ définit la α -coupe d'un nombre flou, alors dit que $Z(t, x, y)$ est différentiable, est écrit comme suit :

$$Z_t[\alpha] + P[\alpha]Z_{xx}[\alpha] + Q[\alpha]Z_{yy}[\alpha] = \Gamma(t, x, y, \alpha) \quad (4.18)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et α .

Nous vérifions donc Les conditions suffisantes pour que $\Gamma(t, x, y, \alpha)$ définit des α -coupes d'un nombre flou sont (cf.[44]) :

- (i) $(z_1)_t(t, x, y, \alpha) + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx}(t, x, y, \alpha) + Q_1(y, \alpha)(z_1)_{yy}(t, x, y, \alpha)$ est une fonction croissante de α pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$
- (ii) $(z_2)_t(t, x, y, \alpha) + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx}(t, x, y, \alpha) + Q_2(y, \alpha)(z_2)_{yy}(t, x, y, \alpha)$ est une fonction décroissante de α pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et
- (iii) pour $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$

$$(z_1)_t(t, x, y, 1) + P_1(x, 1)(z_1)_{xx}(t, x, y, 1) + Q_1(y, 1)(z_1)_{yy}(t, x, y, 1)$$

$$\leq (z_2)_t(t, x, y, 1) + P_2(x, 1)(z_2)_{xx}(t, x, y, 1) + Q_2(y, 1)(z_2)_{yy}(t, x, y, 1)$$

Nous supposons que $z_i(t, x, y, \alpha)$ a des dérivées partielles continues si

$$(z_i)_t + P_i(x, \alpha)(z_i)_{xx} + Q_i(y, \alpha)(z_i)_{yy}$$

est continue sur $\prod_{j=1}^3 I_j \times [0, 1]$, pour $i = 1, 2$.

Donc, si les conditions (i)-(iii) au-dessus sont vérifiées, $Z(t, x, y)$ est différentiable.

En remarquant, pour que $Z(t, x, y)$ soit une solution de Buckley-Feuring de l'équation de la chaleur floue nous avons besoin des conditions suivantes :

- (a) $Z(t, x, y)$ différentiable,
- (b) (4.10) vérifier pour $U(t, x, y) = Z(t, x, y)$,
- (c) $Z(t, x, y)$ Satisfait les conditions initiales et aux limites.

$Z(t, x, y)$ est une SBF (sans les conditions initiales et les conditions aux limites).

Si $Z(t, x, y)$ est différentiable et

$$(Z)_t + P(x, \boldsymbol{\gamma})(Z)_{xx} + Q(y, \boldsymbol{\beta})(Z)_{yy} = F(t, x, y, K)$$

où les équations suivantes doivent être vérifiées

$$(z_1)_t + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(z_1)_{yy} = F_1(t, x, y, \alpha) \quad (4.19)$$

$$(z_2)_t + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(z_2)_{yy} = F_2(t, x, y, \alpha) \quad (4.20)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Remarque 3.2. Si $Z(t, x, y)$ est une SBF qui satisfait les conditions initiales et aux limites, nous allons dire que $Z(t, x, y)$ est une SBF satisfaisant les conditions initiales et aux limites.

Nous présenterons une condition suffisante pour l'existence de la solution au sens de Buckley-Feuring. Puisque il y a un tels assortiment les conditions initiales et les conditions aux limites possibles. Nous allons donc les omettre du théorème suivant.

Il faut vérifier séparément les conditions initiales et aux limites. Donc, nous allons omettre les constantes c_i , $1 \leq i \leq m$, du problème. Par conséquent, (4.9) devient

$$u(t, x, y) = g(t, x, y, k, \gamma, \beta),$$

Donc

$$Z(t, x, y) = G(t, x, y, K, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$$

.

Théorème 3.1. Supposons que $Z(t, x, y)$ est différentiable.

(a) Si

$$p(x, \gamma_i) > 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial \gamma_i} \frac{\partial g}{\partial \gamma_i} > 0 \quad x \in I_2 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m \quad (4.21)$$

$$q(y, \beta_l) > 0 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial \beta_l} \frac{\partial g}{\partial \beta_l} > 0 \quad y \in I_3 \text{ pour } l = 1, 2, \dots, e \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial g}{\partial k_j} \frac{\partial f}{\partial k_j} > 0 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

Alors $SBF = Z(t, x, y)$

(b) Si l'une des relations (4.21) ou (4.22) ou (4.23) n'est pas vérifiée pour i ou l ou j respectivement, alors $Z(t, x, y)$ n'est pas une SBF.

Démonstration :

(a) Pour la simplicité supposons $k_j = k$, $\gamma_i = \gamma$, $\beta_l = \beta$ et

$$\frac{\partial g}{\partial k} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial k} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} < 0.$$

La preuve pour

$$\frac{\partial g}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \gamma} < 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} > 0$$

est similaire et est omise.

Puisque $\frac{\partial g}{\partial k} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial \gamma} > 0$ et $\frac{\partial g}{\partial \beta} < 0$, alors de (4.11) et (4.12) nous avons

$$\begin{aligned} z_1(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_2(\alpha)\right), \\ z_2(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) \end{aligned}$$

d'après (4.13), (4.14) et $\frac{\partial f}{\partial k} < 0$ nous avons

$$F_1(t, x, y, \alpha) = f\left(t, x, y, k_2(\alpha)\right), \quad F_2(t, x, y, \alpha) = f\left(t, x, y, k_1(\alpha)\right) \quad (4.24)$$

d'après (4.16) et $\frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0$ nous avons

$$P_1(x, \alpha) = p\left(x, \gamma_1(\alpha)\right), \quad P_2(x, \alpha) = p\left(x, \gamma_2(\alpha)\right)$$

d'après (4.17) et $\frac{\partial q}{\partial \beta} < 0$ nous avons

$$Q_1(y, \alpha) = q\left(y, \beta_2(\alpha)\right), \quad Q_2(y, \alpha) = q\left(y, \beta_1(\alpha)\right)$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$ avec

$$K[\alpha] = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)], \quad \boldsymbol{\gamma}[\alpha] = [\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)], \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta}[\alpha] = [\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)].$$

Comme nous savons, $g(t, x, y, k, \gamma, \beta)$ résout (4.7), ce qui signifie

$$g_t + p(x, \gamma)g_{xx} + q(y, \beta)g_{yy} = f(t, x, y, k) \quad (4.25)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$, $k \in J$, $\gamma \in H$ et $\beta \in D$.

Supposons que $Z(t, x, y)$ est différentiable et $p(x, \gamma) > 0$ et $q(y, \beta) > 0$ si

$$\partial_t z_1(t, x, y, \alpha) + P_1(x, \alpha)\partial_{xx}z_1(t, x, y, \alpha) + Q_1(y, \alpha)\partial_{yy}z_1(t, x, y, \alpha) = F_1(t, x, y, \alpha)$$

$$\partial_t z_2(t, x, y, \alpha) + P_2(x, \alpha)\partial_{xx}z_2(t, x, y, \alpha) + Q_2(y, \alpha)\partial_{yy}z_2(t, x, y, \alpha) = F_2(t, x, y, \alpha)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$

D'où, (4.19) et (4.20) vérifiées et $Z(t, x, y)$ est une solution au sens de BF.

(b) Nous considérons la situation où (4.21) ou (4.22) ou (4.23) n'est pas satisfaite.

Nous ne regardons un cas où $\frac{\partial q}{\partial \beta} < 0$ (assumons

$$\frac{\partial g}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} > 0,$$

$p(x, \gamma) > 0$ et $q(y, \beta) > 0$). Alors nous avons

$$\begin{aligned} z_1(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) \\ z_2(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_2(\alpha)\right) \end{aligned}$$

$$F_1(t, x, y, \alpha) = f\left(t, x, y, k_1(\alpha)\right) \quad F_2(t, x, y, \alpha) = f\left(t, x, y, k_2(\alpha)\right)$$

et

$$\begin{aligned} P_1(x, \alpha) &= p\left(x, \gamma_1(\alpha)\right) \quad P_2(x, \alpha) = p\left(x, \gamma_2(\alpha)\right) \\ Q_1(y, \alpha) &= q\left(y, \beta_2(\alpha)\right) \quad Q_2(y, \alpha) = q\left(y, \beta_1(\alpha)\right) \end{aligned}$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t z_1(t, x, y, \alpha) + P_1(x, \alpha) \partial_{xx} z_1(t, x, y, \alpha) + Q_1(y, \alpha) \partial_{yy} z_1(t, x, y, \alpha) &= F_1(t, x, y, \alpha) \\ \partial_t z_2(t, x, y, \alpha) + P_2(x, \alpha) \partial_{xx} z_2(t, x, y, \alpha) + Q_2(y, \alpha) \partial_{yy} z_2(t, x, y, \alpha) &= F_2(t, x, y, \alpha) \end{aligned}$$

laquelle n'est pas vraie. parce que

$$\begin{aligned} g_t\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) + p(x, \gamma_1(\alpha)) g_{xx}\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) \\ + q(y, \beta_2(\alpha)) g_{yy}\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) &= f(t, x, y, k_1(\alpha)) \\ g_t\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_2(\alpha)\right) + p(x, \gamma_2(\alpha)) g_{xx}\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_2(\alpha)\right) \\ + q(y, \beta_1(\alpha)) g_{yy}\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_2(\alpha)\right) &= f(t, x, y, k_2(\alpha)) \end{aligned}$$

□

Donc, si $Z(t, x, y)$ est une solution au sens de BF et si elle satisfait les conditions initiales et les conditions aux limites nous dirons que $Z(t, x, y)$ est une solution de BF satisfaisant les conditions initiales et les conditions aux limites.

Par conséquent la solution $Z(t, x, y)$ au sens de BF peut être n'existe pas, alors nous considérons la solution au sens de Seikkala.

3.3 Solution de la chaleur au sens de Seikkala (SS)

Nous définissons la solution au sens de Seikkala. Soit

$$U(t, x, y)[\alpha] = \left[u_1(t, x, y, \alpha), u_2(t, x, y, \alpha) \right]$$

Par exemple :

(A) Si $p(x, \gamma) < 0$ et $q(y, \beta) > 0$, alors nous considérons l'équations de la chaleur

$$(u_1)_t + P_1(x, \alpha)(u_2)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(u_1)_{yy} = F_1(t, x, y, \alpha) \quad (4.26)$$

$$(u_2)_t + P_2(x, \alpha)(u_1)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(u_2)_{yy} = F_2(t, x, y, \alpha) \quad (4.27)$$

ou

(B) Si

$$p(x, \gamma) > 0, \quad q(y, \beta) > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} < 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} > 0$$

$$(u_1)_t + P_1(x, \alpha)(u_1)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(u_1)_{yy} = F_1(t, x, y, \alpha) \quad (4.28)$$

$$(u_2)_t + P_2(x, \alpha)(u_2)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(u_2)_{yy} = F_2(t, x, y, \alpha) \quad (4.29)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Nous ajoutons à (4.26) et (4.27) les conditions initiales et aux limites.

Par exemple, si $U(0, x, y) = C$ alors nous ajoutons

$$u_1(0, x, y, \alpha) = c_1(\alpha) \quad (4.30)$$

$$u_2(0, x, y, \alpha) = c_2(\alpha) \quad (4.31)$$

avec $C[\alpha] = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$.

Soit $u_i(t, x, y, \alpha)$ $i=1,2$, résoudre (4.26) et (4.27) plus les conditions initiales et aux limites.

Si

$$\left[u_1(t, x, y, \alpha), u_2(t, x, y, \alpha) \right], \quad (4.32)$$

On définit les α -coupes d'un nombre flou, pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$,

alors $U(t, x, y)$ est une SS.

Nous dirons que la condition de dérivée est vérifiée pour l'équation de chaleur floue lorsque les équations. (4.21),(4.22) et (4.23) sont vraies.

3.4 Relations entre les deux solutions

Dans cette section, on s'intéresse à donner un résultat sur la relation entre les deux solutions (SBF et SS).

Théorème 3.2.

1. Si SBF= $Z(t, x, y)$, alors $SS = Z(t, x, y)$
2. Si $SS = U(t, x, y)$ et la condition de dérivée est vérifiée, alors SBF= $U(t, x, y)$

Démonstration :

1. Selon la définition de SBF et SS.
2. Si $SS=U(t, x, y)$ alors la dérivée au sens de Seikkala existe et puisque la condition de dérivé est vérifiée, par conséquent, les équations. suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}(u_1)_t + P_1(x, \alpha)(u_1)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(u_1)_{yy} &= F_1(t, x, y, \alpha) \\ (u_2)_t + P_2(x, \alpha)(u_2)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(u_2)_{yy} &= F_2(t, x, y, \alpha)\end{aligned}\quad (4.33)$$

Supposons aussi $k_j = k, \gamma_i = \gamma, \beta_l = \beta,$

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial k} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial k} < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} > 0$$

(Les autres cas sont similaires et sont omis). Nous voyons

$$\begin{aligned}z_1(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) \\ z_2(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_2(\alpha)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_1(t, x, y, \alpha) &= f\left(t, x, y, k_2(\alpha)\right), \quad F_2(t, x, y, \alpha) = f\left(t, x, y, k_1(\alpha)\right) \\ P_1(x, \alpha) &= p\left(x, \gamma_2(\alpha)\right), \quad P_2(x, \alpha) = p\left(x, \gamma_1(\alpha)\right) \\ Q_1(y, \alpha) &= q\left(y, \beta_1(\alpha)\right), \quad Q_2(y, \alpha) = q\left(y, \beta_2(\alpha)\right)\end{aligned}$$

D'après les équations (4.19), (4.20), (4.11) et (4.12), alors

$$\begin{aligned}u_1(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_2(\alpha), \gamma_2(\alpha), \beta_1(\alpha)\right) = z_1(t, x, y, \alpha) \\ u_2(t, x, y, \alpha) &= g\left(t, x, y, k_1(\alpha), \gamma_1(\alpha), \beta_2(\alpha)\right) = z_2(t, x, y, \alpha)\end{aligned}$$

donc $SBF = U(t, x, y)$

□

Nous allons énoncer le résultat de l'équation de chaleur unidimensionnel (4.6)

Lemme 3.1. Supposons $Z(t, x)$ est différentiable.

(a) Si

$$p(x, \gamma_i) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma_i} \frac{\partial g}{\partial \gamma_i} > 0 \quad x \in I_2 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial g}{\partial k_j} \frac{\partial f}{\partial k_j} > 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

Alors $SBF=Z(t, x)$

- (b) Si l'une des relations (4.34) ou (4.35) n'est pas vérifiée pour certains i ou j respectivement, alors $Z(t, x)$ n'est pas une SBF.

Démonstration :

C'est similaire au théorème (3.1) □

3.5 Exemple

Application de la méthode itération variationnelle

D'après la VIM, nous construisons une correction fonctionnelle pour (4.7) dans la direction t comme suit :

$$u_{n+1}(t, x, y) = u_n(t, x, y) + \int_0^t \lambda(s) \{ (u_n)_s + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \} ds \quad (4.36)$$

où $n \geq 0$ et λ est le multiplicateur de lagrange. Nous déterminons le multiplicateur de lagrange

$$\delta u_{n+1}(t, x, y) = \delta u_n(t, x, y) + \delta \int_0^t \lambda(s) \{ (u_n)_s + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \} ds$$

Par conséquent, les conditions stationnaires sont :

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= 0 \\ 1 + \lambda(s)|_{s=t} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le multiplicateur de lagrange est $\lambda = -1$. Donc les résultats dans (4.36) conduisent à la formule d'itération suivante

$$u_{n+1}(t, x, y) = u_n(t, x, y) - \int_0^t \{ (u_n)_s + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \} ds \quad (4.37)$$

Le début de la formule d'itération avec l'approximation initiale, par exemple

$$u_0(t, x, y) = u(0, x, y).$$

Notez que la VIM est utilisée pour les équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires de [72], afin d'obtenir la solution de Seikkala.

Dans ce paragraphe nous citons un exemple d'application et pour plus des exemples le lecteur peut consulter [24]

Exemple 3.1. Nous considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$u_t + \frac{\gamma}{2}x^2u_{xx} = k \quad (4.38)$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = cx^2$$

où $t \in (0, M_1]$, $x \in (0, M_2]$, $k \in [0, J]$, $\gamma \in [0, H]$ et $c \in [L, 0]$ sont des constantes.

D'après la VIM, une correction fonctionnelle pour (4.38) de (4.37) peut être construite comme suit

$$u_{n+1}(t, x) = u_n(t, x) - \int_0^t \{(u_n)_s(s, x) + \frac{\gamma}{2}x^2(\tilde{u}_n)_{xx}(s, x) - f(s, x, k)\} ds$$

Commençant par un rapprochement initial $u_0(t, x) = u(0, x) = cx^2$, nous pouvons obtenir les approximations successives suivantes :

$$u_1(t, x) = cx^2(1 - \gamma t) + kt$$

$$u_2(t, x) = cx^2(1 - \gamma t + \gamma^2 \frac{t^2}{2!}) + kt$$

$$u_3(t, x) = cx^2(1 - \gamma t + \gamma^2 \frac{t^2}{2!} - \gamma^3 \frac{t^3}{3!}) + kt$$

$$\text{et } u_n(t, x) = cx^2(1 - \gamma t + \gamma^2 \frac{t^2}{2!} - \gamma^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n \gamma^n \frac{t^n}{n!}) + kt, \quad n \geq 1$$

La VIM admet l'utilisation de $u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x)$, qui donne la solution exacte

$$u(t, x) = cx^2 \exp(-\gamma t) + kt$$

Nous fuzzifions $f(t, x, k)$, $p(x, \gamma)$ et

$$g(t, x, k, c, \gamma) = cx^2 \exp(-\gamma t) + kt.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} F(t, x, K) &= K \\ P(x, \gamma) &= \frac{\gamma}{2}x^2 \end{aligned}$$

pour que

$$\begin{aligned} F_1(t, x, \alpha) &= k_1(\alpha), & F_2(t, x, \alpha) &= k_2(\alpha) \\ P_1(x, \alpha) &= \frac{\gamma_1}{2}x^2, & P_2(x, \alpha) &= \frac{\gamma_2}{2}x^2 \end{aligned}$$

Aussi $G(t, x, K, C, \boldsymbol{\gamma}) = Cx^2 \exp(-\boldsymbol{\gamma}t) + Kt$, donc

$$z_i(t, x, \alpha) = c_i(\alpha)x^2 \exp(-\gamma_i(\alpha)t) + k_i(\alpha)t$$

pour $i = 1, 2$ et $C < 0$ ($C = (c_1, c_2, c_3)$, avec $c_3 < 0$),

$$K[\alpha] = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)], \quad C[\alpha] = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)], \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}[\alpha] = [\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)].$$

$Z(t, x)$ est différentiable parce que

$$(z_i(t, x, \alpha))_t + \frac{\gamma_i(\alpha)}{2}x^2(z_i(t, x, \alpha))_{xx} = k_i(\alpha)$$

pour $i = 1, 2$ sont des α -coupes de K c'est à dire des α -coupes d'un nombre flou.

En raison de

$$p(x, \gamma) > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial k} > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \gamma} = -cx^2t \exp(-\gamma t) > 0$$

c'est à dire $(Z)_t + \frac{\boldsymbol{\gamma}}{2}x^2(Z)_{xx} = K$, un nombre flou.

Donc le lemme 3.1 implique le résultat $Z(t, x)$ est une solution de BF.

Nous voyons facilement que

$$z_i(0, x, \alpha) = c_i(\alpha)x^2$$

pour $i = 1, 2$, alors $Z(t, x)$ satisfait également la condition initiale. La SBF qui satisfait la condition initiale peut être écrite comme

$$Z(t, x) = Cx^2 \exp(-\boldsymbol{\gamma}t) + Kt$$

pour tout $(t, x) \in (0, M_1] \times (0, M_2]$

4 Équations d'onde à paramètres flous

Nous considérons les équations d'onde qui peuvent être écrits dans les formes (cf.[6])

– Unidimensionnel :

$$u_{tt}(t, x) + p(x, \gamma)u_{xx}(t, x) = f(t, x, k) \quad (4.39)$$

– Bidimensionnel :

$$u_{tt}(t, x, y) + p(x, \gamma)u_{xx}(t, x, y) + q(y, \beta)u_{yy}(t, x, y) = f(t, x, y, k) \quad (4.40)$$

ou

$$u_{tt}(t, x, y) + q(y, \beta)u_{xx}(t, x, y) + p(x, \gamma)u_{yy}(t, x, y) = f(t, x, y, k) \quad (4.41)$$

avec certaines conditions initiales et aux limites. Ce type des conditions peuvent prendre diverses formes :

$$u(0, x, y) = c_1 \quad \text{ou} \quad u(0, x, y) = g_1(x, y, c_2) \quad \text{ou} \quad u(M_1, x, y) = g_2(x, y, c_3, c_4), \dots$$

$$u(0, x, y) = c_1 \quad \text{ou} \quad u(0, x, y) = g_1(x, y, c_2) \quad \text{ou} \quad u(M_1, x, y) = g_2(x, y, c_3, c_4), \dots$$

4.1 Solution d'onde au sens de Buckley-Feuring et Seikkala

Nous avons vu dans la section précédente l'étude de la solution de l'équation de chaleur, Nous appliquons cette dernière sur l'équation d'onde (4.40) (De même pour (4.39) et (4.41)), alors on suppose que (4.40) a une solution

$$u(t, x, y) = g(t, x, y, k, c, \gamma, \beta) \quad (4.42)$$

et

$$g_{tt}(t, x, y, k, c, \gamma, \beta) + p(x, \gamma)g_{xx}(t, x, y, k, c, \gamma, \beta) + q(y, \beta)g_{yy}(t, x, y, k, c, \gamma, \beta)$$

sont continues avec $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$, $k \in J = \prod_{j=1}^n J_j$, $c \in L = \prod_{i=1}^m L_i$,

$$\gamma \in H = \prod_{r=1}^s H_r \quad \text{et} \quad \beta \in D = \prod_{l=1}^e D_l.$$

D'après le principe d'extension, l'équation d'onde floue est :

$$U_{tt}(t, x, y) + P(x, \boldsymbol{\gamma})U_{xx}(t, x, y) + Q(y, \boldsymbol{\beta})U_{yy}(t, x, y) = F(t, x, y, K) \quad (4.43)$$

avec certaines conditions initiales et aux limites floues :

$$U(0, x, y) = C_1 \quad \text{ou} \quad U(0, x, y) = G_1(x, y, C_2) \quad \text{ou} \quad U(M_1, x, y) = G_2(x, y, C_3, C_4)$$

Nous voulons résoudre le problème donné dans l'équation (4.43). Enfin, nous fuzzifions g dans (4.42). Alors, nous utilisons les équations (4.11)-(4.17) et nous supposons $p(x, \gamma) > 0$, $q(y, \beta) > 0$ et $z_i(t, x, y, \alpha)$ $i = 1, 2$, a des dérivées partielles continues donc

$$(z_i)_{tt} + P_i(z_i)_{xx} + Q_i(z_i)_{yy}$$

est continue pour tous $t, x, y \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et tout $\alpha \in [0, 1]$.

Et si $\Gamma(t, x, y, \alpha)$ définit les α -coupes d'un nombre flou pour tous $t, x, y \in \prod_{j=1}^3 I_j$ fixés,

avec

$$\Gamma(t, x, y, \alpha) = \left[(z_1)_{tt} + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx} + Q_1(y, \beta)(z_1)_{yy}, \right. \\ \left. (z_2)_{tt} + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx} + Q_2(y, \beta)(z_2)_{yy} \right]$$

pout tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et tout α , nous montrons que

$$(z_1)_{tt}(t, x, y, \alpha) + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx}(t, x, y, \alpha) + Q_1(y, \alpha)(z_1)_{yy}(t, x, y, \alpha)$$

est une fonction croissante en α pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$,

$$(z_2)_{tt}(t, x, y, \alpha) + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx}(t, x, y, \alpha) + Q_2(y, \alpha)(z_2)_{yy}(t, x, y, \alpha)$$

est une fonction décroissante en α pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$.

Et pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$

$$(z_1)_{tt}(t, x, y, 1) + P_1(x, 1)(z_1)_{xx}(t, x, y, 1) + Q_1(y, 1)(z_1)_{yy}(t, x, y, 1) \\ \leq (z_2)_{tt}(t, x, y, 1) + P_2(x, 1)(z_2)_{xx}(t, x, y, 1) + Q_2(y, 1)(z_2)_{yy}(t, x, y, 1)$$

Alors $Z(t, x, y)$ est différentiable s'écrit :

$$Z_{tt}[\alpha] + P[\alpha]Z_{xx}[\alpha] + Q[\alpha]Z_{yy}[\alpha] = \Gamma(t, x, y, \alpha)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et tout α . Par conséquent, $Z(t, x, y)$ est une SBF de l'équation (4.40), c'est à dire si $Z(t, x, y)$ est différentiable et

$$(Z)_{tt} + P(x, \boldsymbol{\gamma})(Z)_{xx} + Q(y, \boldsymbol{\beta})(Z)_{yy} = F(t, x, y, K)$$

où les équations suivantes doivent être vérifiées

$$(z_1)_{tt} + P_1(x, \alpha)(z_1)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(z_1)_{yy} = F_1(t, x, y, \alpha) \quad (4.44)$$

$$(z_2)_{tt} + P_2(x, \alpha)(z_2)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(z_2)_{yy} = F_2(t, x, y, \alpha) \quad (4.45)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$.

Et pour l'existence de SBF en appliquant le théorème (3.1), si elle n'existe pas on passe à la solution de SS.

Par exemple si

$$p(x, \gamma) > 0, \quad q(y, \beta) < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \gamma} < 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} > 0,$$

alors nous avons

$$(u_1)_{tt} + P_1(x, \alpha)(u_1)_{xx} + Q_1(y, \alpha)(u_2)_{yy} = F_1(t, x, y, \alpha) \quad (4.46)$$

$$(u_2)_{tt} + P_2(x, \alpha)(u_2)_{xx} + Q_2(y, \alpha)(u_1)_{yy} = F_2(t, x, y, \alpha) \quad (4.47)$$

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$ et $\alpha \in [0, 1]$. Nous ajoutons aux équations. (4.46) et (4.47) toutes les conditions initiales et aux limites.

Si $u_i(t, x, y, \alpha)$ pour $i = 1, 2$, on résout les équations (4.46) et (4.47) plus les conditions initiales et aux limites et définit la α -coupe d'un nombre flou,

pour tout $(t, x, y) \in \prod_{j=1}^3 I_j$, alors $U(t, x, y)$ est une SS.

4.2 Exemples

Application de la méthode itération variationnelle

Selon la VIM, nous construisons une correction fonctionnelle pour (4.40) dans la direction t comme suit :

$$u_{n+1}(t, x, y) = u_n(t, x, y) + \int_0^t \lambda(s) \left\{ (u_n)_{ss} + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \right\} ds \quad (4.48)$$

avec $n \geq 0$ et λ est un multiplicateur de Lagrange. Nous déterminons le multiplicateur de lagrange

$$\delta u_{n+1}(t, x, y) = \delta u_n(t, x, y) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left\{ (u_n)_{ss} + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \right\} ds$$

$$\delta u_{n+1}(t, x, y) = \delta u_n(t, x, y) + \lambda(s) \delta \left((u_n)_s \right) |_{s=t} - \lambda'(s) \delta u_n |_{s=t} + \int_0^t \lambda''(s) \delta u_n ds$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta u_n & : \lambda''(s) = 0, \\ \delta u_n & : 1 - \lambda'(s)|_{s=t} = 0, \\ \delta \left((u_n)_s \right) & : \lambda(s)|_{s=t} = 0. \end{aligned}$$

Alors $\lambda = s - t$. En remplaçant $s - t$ dans (4.48) nous obtenons :

$$u_{n+1}(t, x, y) = u_n(t, x, y) + \int_0^t (s - t) \left\{ (u_n)_{ss} + p(x, \gamma)(\tilde{u}_n)_{xx} + q(y, \beta)(\tilde{u}_n)_{yy} - f(s, x, y, k) \right\} ds \quad (4.49)$$

Exemple 4.1. Considérons l'équation d'onde à deux dimensions avec des coefficients réels

$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{\gamma}{2}x^2u_{xx} + \frac{\beta}{2}y^2u_{yy} = k_1x^2 - k_2y^2 \\ u(0, x, y) = c_1x^2 \\ \left(u(0, x, y) \right)_t = c_2y \end{cases} \quad (4.50)$$

avec $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, $x, y \in [0, 1]$, $k_1 \in [J_1, 0[$, $k_2 \in]0, J_2]$, $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$, $c_1 \in]0, L_1]$, $c_2 \in [0, L_2]$ et $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$

De même, nous pouvons établir une formule d'itération sous la forme :

$$u_{n+1}(t, x, y) = u_n(t, x, y) + \int_0^t (s - t) \left\{ (u_n(s, x, y))_{ss} + \frac{\gamma}{2}x^2(\tilde{u}_n(s, x, y))_{xx} + \frac{\beta}{2}y^2(\tilde{u}_n(s, x, y))_{yy} - k_1x^2 + k_2y^2 \right\} ds \quad (4.51)$$

Nous commençons avec une approximation initiale arbitraire :

$$u_0(t, x, y) = u(0, x, y) = c_1x^2 + c_2yt$$

et en utilisant la formule d'itération (4.51), nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\begin{aligned} u_1(t, x, y) &= c_1x^2(1 - \frac{\gamma t^2}{2!}) + \frac{k_1}{\gamma}x^2(\frac{\gamma t^2}{2!}) - \frac{k_2}{\beta}y^2(\frac{\beta t^2}{2!}) + c_2yt \\ u_2(t, x, y) &= c_1x^2(1 - \frac{\gamma t^2}{2!} + \frac{\gamma^2 t^4}{4!}) + \frac{k_1}{\gamma}x^2(\frac{\gamma t^2}{2!} - \frac{\gamma^2 t^4}{4!}) - \frac{k_2}{\beta}y^2(\frac{\beta t^2}{2!} - \frac{\beta^2 t^4}{4!}) + c_2yt \\ u_3(t, x, y) &= c_1x^2(1 - \frac{\gamma t^2}{2!} + \frac{\gamma^2 t^4}{4!} - \frac{\gamma^3 t^6}{6!}) + \frac{k_1}{\gamma}x^2(\frac{\gamma t^2}{2!} - \frac{\gamma^2 t^4}{4!} + \frac{\gamma^3 t^6}{6!}) \\ &\quad - \frac{k_2}{\beta}y^2(\frac{\beta t^2}{2!} - \frac{\beta^2 t^4}{4!} + \frac{\beta^3 t^6}{6!}) + c_2yt \end{aligned}$$

et

$$u_n(t, x, y) = c_1 x^2 \left(1 - \gamma \frac{t^2}{2!} + \gamma^2 \frac{t^4}{4!} + \dots + (-1)^n \gamma^n \frac{t^{2n}}{2n!} \right) + \frac{k_1}{\gamma} x^2 \left(\gamma \frac{t^2}{2!} - \gamma^2 \frac{t^4}{4!} + (-1)^{n+1} \gamma^n \frac{t^{2n}}{2n!} \right) - \frac{k_2}{\beta} y^2 \left(\beta \frac{t^2}{2!} - \beta^2 \frac{t^4}{4!} + (-1)^{n+1} \beta^n \frac{t^{2n}}{2n!} \right) + c_2 y t$$

Ensuite, la solution exacte est donnée par

$$u(t, x, y) = c_1 x^2 \cos(\sqrt{\gamma}t) + \frac{k_1}{\gamma} x^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\gamma}t) \right) - \frac{k_2}{\beta} y^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\beta}t) \right) + c_2 y t$$

nous fuzzifions $f(t, x, k_1, k_2)$, $p(x, \gamma)$, $q(y, \beta)$ et

$$g\left(t, x, k_1, k_2, c, \gamma, \beta\right) = c_1 x^2 \cos(\sqrt{\gamma}t) + \frac{k_1}{\gamma} x^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\gamma}t) \right) - \frac{k_2}{\beta} y^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\beta}t) \right) + c_2 y t$$

la production de leur α -coupes

$$z_1(t, x, y, \alpha) = c_{11}(\alpha) x^2 \cos(\sqrt{\gamma_1(\alpha)}t) + \frac{k_{11}(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)} x^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\gamma_1(\alpha)}t) \right) - \frac{k_{22}(\alpha)}{\beta_1(\alpha)} y^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\beta_1(\alpha)}t) \right) + c_{21}(\alpha) y t$$

$$z_2(t, x, y, \alpha) = c_{12}(\alpha) x^2 \cos(\sqrt{\gamma_2(\alpha)}t) + \frac{k_{12}(\alpha)}{\gamma_2(\alpha)} x^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\gamma_2(\alpha)}t) \right) - \frac{k_{21}(\alpha)}{\beta_2(\alpha)} y^2 \left(1 - \cos(\sqrt{\beta_2(\alpha)}t) \right) + c_{22}(\alpha) y t$$

$$F_1(t, x, y, \alpha) = k_{11}(\alpha) x^2 - k_{22}(\alpha) y^2, \quad F_2(t, x, y, \alpha) = k_{12}(\alpha) x^2 - k_{21}(\alpha) y^2$$

$$P_1(x, \alpha) = \frac{\gamma_1(\alpha)}{2} x^2, \quad P_2(x, \alpha) = \frac{\gamma_2(\alpha)}{2} x^2$$

$$Q_1(x, \alpha) = \frac{\beta_1(\alpha)}{2} y^2, \quad Q_2(x, \alpha) = \frac{\beta_2(\alpha)}{2} y^2$$

avec $K_1[\alpha] = [k_{11}(\alpha), k_{12}(\alpha)]$, $K_2[\alpha] = [k_{21}(\alpha), k_{22}(\alpha)]$, $C_1[\alpha] = [c_{11}(\alpha), c_{12}(\alpha)]$, $C_2[\alpha] = [c_{21}(\alpha), c_{22}(\alpha)]$, $\boldsymbol{\gamma}[\alpha] = [\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)]$ et $\boldsymbol{\beta}[\alpha] = [\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)]$.

Nous vérifions d'abord si $Z(t, x, y)$ est différentiable. Nous calculons

$$\left[(z_1)_{tt} + \frac{\gamma_1(\alpha)}{2} x^2 (z_1)_{xx} + \frac{\beta_1(\alpha)}{2} y^2 (z_1)_{yy}, (z_2)_{tt} + \frac{\gamma_2(\alpha)}{2} x^2 (z_2)_{xx} + \frac{\beta_2(\alpha)}{2} y^2 (z_2)_{yy} \right]$$

qui sont des α -coupes de $K_1 x^2 - K_2 y^2$ c'est à dire. α -coupes d'un nombre flou.

Donc, $Z(t, x, y)$ est différentiable. Puisque

$$\begin{aligned} p(x, \gamma) &> 0, & q(y, \beta) &> 0 \\ \frac{\partial g}{\partial k} &> 0, & \frac{\partial f}{\partial k} &> 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \gamma} &> 0, & \frac{\partial g}{\partial \gamma} &= -\frac{ctx^2}{2\sqrt{\gamma}} \sin(\sqrt{\gamma}t) + \left(-\frac{k_1}{\beta^2}(1 - \cos(\sqrt{\gamma}t)) + \frac{k_1 t}{2\gamma\sqrt{\gamma}} \sin(\sqrt{\gamma}t)\right)x^2 > 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \beta} &> 0, & \frac{\partial g}{\partial \beta} &= \left(\frac{k_2}{\beta^2}(1 - \cos(\sqrt{\beta}t)) - \frac{k_2 t}{2\beta\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}t)\right)y^2 > 0 \end{aligned}$$

Puis d'après le théorème (3.1), donc $Z(t, x, y)$ est une SBF.

Les conditions initiales

$$\begin{aligned} z_i(0, x, y, \alpha) &= c_{1i}(\alpha)x^2 \\ (z_i(0, x, y, \alpha))_t &= c_{2i}(\alpha)y \end{aligned}$$

par suite $Z(t, x, y)$ est une SBF qui satisfait les conditions initiales.

Ceci SBF peut être écrite

$$Z(t, x, y) = C_1 x^2 \cos(\sqrt{\gamma}t) + \frac{K_1}{\gamma} x^2 (1 - \cos(\sqrt{\gamma}t)) - \frac{K_2}{\beta} y^2 (1 - \cos(\sqrt{\beta}t)) + C_2 y t$$

pour tous $x, y \in [0, 1]$, $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

Exemple 4.2. Nous considérons le modèle unidimensionnel de l'équation d'onde

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t, x) + \gamma x \partial_{xx}u(t, x) = -kx^2 \\ u(0, x) = c \sin(x) \end{cases} \quad (4.52)$$

avec $t \in [0, 1]$, $x \in [0, \pi]$, et la valeur des paramètres k , c et γ appartiennent aux intervalles $[0, J]$, $[0, L]$ et $]0, H]$, respectivement.

Nous pouvons obtenir la formule d'itération suivante pour l'équation (4.52)

$$u_{n+1}(t, x) = u_n(t, x) + \int_0^t (s-t) \left\{ (u_n(s, x))_{ss} + \gamma x (\tilde{u}_n(s, x))_{xx} + kx^2 \right\} ds \quad (4.53)$$

Nous commençons avec une première approximation : $u(0, x) = c \sin(x)$.

Dans l'équation (4.53), après deux itérations la solution exacte est donnée sous la forme suivante :

$$u(t, x) = g(t, x, k, c, \gamma) = c \sin(x) + cx \sin(x) (\cosh(\sqrt{\gamma}t) - 1) + \gamma k x \frac{t^4}{12} - x^2 \frac{t^2}{2}$$

comme $\frac{\partial f}{\partial k} = -x^2 < 0$ et $\frac{\partial g}{\partial k} = \gamma x \frac{t^4}{12} - x^2 \frac{t^2}{2} > 0$ pour

$$\sqrt{\frac{6x}{\gamma}} < t \leq 1 \text{ et } 0 < x < \frac{\gamma}{6}$$

alors il n'y a pas de SBF (lemme 3.1). Nous procédons à la recherche d'une SS. Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} (u_1(t, x, \alpha))_{tt} + \gamma_1(\alpha)x(u_1(t, x, \alpha))_{xx} &= -k_2(\alpha)x^2 \\ (u_2(t, x, \alpha))_{tt} + \gamma_2(\alpha)x(u_2(t, x, \alpha))_{xx} &= -k_1(\alpha)x^2 \end{aligned}$$

avec

$$u_i(0, x, \alpha) = c_i(\alpha) \sin(x)$$

pour $i= 1,2$ et

$$K[\alpha] = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)], \quad C[\alpha] = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)] \text{ et } \boldsymbol{\gamma}[\alpha] = [\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha)].$$

D'après VIM, la solution est :

$$\begin{aligned} u_1(t, x, \alpha) &= c_1(\alpha) \sin(x) \\ &+ c_1(\alpha)x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_1(\alpha)})t - 1 \right) + \gamma_1(\alpha)k_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} - k_2(\alpha)x^2 \frac{t^2}{2} \quad (4.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t, x, \alpha) &= c_2(\alpha) \sin(x) \\ &+ c_2(\alpha)x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_2(\alpha)})t - 1 \right) + \gamma_2(\alpha)k_1(\alpha)x \frac{t^4}{12} - k_1(\alpha)x^2 \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $u_i(t, x, \alpha)$ sont continues et $u_1(t, x, 1) = u_2(t, x, 1)$ alors nous demandons seulement pour vérifier si $\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} > 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial \alpha} < 0$ et $K, C, \boldsymbol{\gamma}$ sont des nombres flous triangulaires, par conséquent, nous choisissons des paramètres flous simples pour que $k'_1(\alpha) = c'_1(\alpha) = \gamma'_1(\alpha) = \lambda$ et $k'_2(\alpha) = c'_2(\alpha) = \gamma'_2(\alpha) = -\lambda$.

Alors pour la SS existe, nous devons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} &= \lambda \left(\sin(x) + x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_1(\alpha)})t - 1 \right) \right. \\ &\left. + c_1(\alpha) \frac{t}{2\sqrt{\gamma_1(\alpha)}} x \sin(x) \sinh \left(\sqrt{\gamma_1(\alpha)} t \right) - \gamma_1(\alpha)x \frac{t^4}{12} + k_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + x^2 \frac{t^2}{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = & -\lambda \left(\sin(x) + x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_2(\alpha)})t - 1 \right) \right. \\ & \left. + c_2(\alpha) \frac{t}{2\sqrt{\gamma_2(\alpha)}} x \sin(x) \sinh \left(\sqrt{\gamma_2(\alpha)}t \right) - \gamma_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + k_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + x^2 \frac{t^2}{2} \right) < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les inégalités sont vérifiées si

$$\begin{aligned} & \sin(x) + x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_1(\alpha)})t - 1 \right) \\ & + c_1(\alpha) \frac{t}{2\sqrt{\gamma_1(\alpha)}} x \sin(x) \sinh \left(\sqrt{\gamma_1(\alpha)}t \right) - \gamma_1(\alpha)x \frac{t^4}{12} + k_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + x^2 \frac{t^2}{2} > 0 \quad (4.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin(x) + x \sin(x) \left(\cosh(\sqrt{\gamma_2(\alpha)})t - 1 \right) \\ & + c_2(\alpha) \frac{t}{2\sqrt{\gamma_2(\alpha)}} x \sin(x) \sinh \left(\sqrt{\gamma_2(\alpha)}t \right) - \gamma_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + k_1(\alpha)x \frac{t^4}{12} + x^2 \frac{t^2}{2} > 0 \quad (4.56) \end{aligned}$$

il suffit que

$$- \gamma_2(\alpha)x \frac{t^4}{12} + k_1(\alpha)x \frac{t^4}{12} + x^2 \frac{t^2}{2} > 0 \quad (4.57)$$

pour $t \in [0, 1]$, $x \in (0, \pi]$. L'inégalité (4.57) est vérifiée si

$$0 \leq t \leq 1 \quad (\gamma_2(\alpha) - k_1(\alpha)) \frac{t^2}{6} < x \leq \pi \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1]$$

Ainsi, sous les hypothèses ci-dessus, nous pouvons choisir

$$\mathfrak{R} = \left\{ (t, x) \mid 0 \leq t \leq 1 \quad (\gamma_2(\alpha) - k_1(\alpha)) \frac{t^2}{6} < x \leq \pi \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1] \right\}$$

et la SS existe dans \mathfrak{R} sous la forme équation (4.54).

Conclusion et perspectives

En définitive, nous présentons les principaux résultats de cette thèse, et nous donnons un aperçu des possibilités d'orientations de la recherche dans le futur. Les principaux résultats sont résumés comme suit :

- * Nous avons présenté les notions de base de la théorie des ensembles flous ainsi que les outils mathématiques nécessaires à leur manipulation.
- * Nous avons montré le résultat de la différence entre deux nombres flous.
- * Nous avons introduit une nouvelle définition de la division entre deux nombres flous et les démonstrations des propriétés nécessaires de cette division. Cette dernière nous a permis d'établir un nombre flou.
- * L'équation différentielle d'Euler à paramètres flous a été étudiée pour présenter les équations différentielles floues, compte tenu de l'avantage qu'elle offre afin de résoudre les EDs floues d'ordre deux. L'approche proposée comprend deux étapes essentielles.
 - La première concerne la transformation du problème en une ED, à partir de la définition de la dérivée de Hukuhara généralisée.
 - La seconde étape consiste en l'étude et la résolution des nouveaux systèmes. Dans ce cadre, nous avons proposé des nouveaux résultats.
- * Nous nous sommes intéressés aussi dans cette thèse, aux équations aux dérivées partielles à paramètres flous, dans le but d'étudier les solutions floues. La difficulté de l'obtention de la solution à l'aide de la transformation de Fourier est en effet très pénalisante lors de l'utilisation des techniques floues.

Ainsi, nous avons présenté dans un premier temps la méthode d'itération variationnelle, qui nous a permis de résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non linéaires avec des approximations convergentes rapidement vers la solution. Après nous avons étudié cette solution à l'aide de deux stratégies :

- Dans la première stratégie, nous avons discuté l'approche de Buckley-Feuring, qui est basée sur le principe d'extension, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes et nous avons montré la solution au sens de BF.

- Dans la seconde stratégie, l'approche de Seikkala, consiste à résoudre le problème classique (l'approche de la α -coupe), qui est basée sur le concept de dérivée de Hukuhara et nous avons trouvé la solution au sens de Seikkala.

Ensuite nous avons montré la relation entre les deux approches. Enfin, pour la validation de nos approches, nous avons présenté et étudié des exemples d'applications pour chaque modèle (l'équation de la chaleur et l'équation d'onde).

Sur la base de cette approche, nous pouvons dresser les perspectives de recherche suivantes :

- Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre l'équation de la chaleur fractionnaire et l'équation d'onde fractionnaire à paramètres flous.
- Appliquer l'approche pour traiter les équations télégraphes et les équations télégraphes fractionnaires à paramètres flous.
- Trouver l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles fractionnaires à paramètres flous en se basant sur la dérivée de Hukuhara généralisée.
- Appliquer la nouvelle division aux équations différentielles hybrides à condition initiale floue puis aux équations différentielles hybrides à paramètres flous.
- Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre l'équation de la chaleur et l'équation d'onde à paramètres intuitionnistes flous.
- Proposer un algorithme afin de trouver les solutions au sens de Buckley-Feuring et de Seikkala pour les équations aux dérivées partielles et les équations fractionnaires à paramètres flous.

Bibliographie

- [1] T. A. Abassy, M. A. El Tawil, and H. El Zoheiry. Toward a modified variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207 :137–147, 2007.
- [2] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, and H. Rouhparvar. The variational iteration method for exact solutions of fuzzy heat-like equations with variable coefficients. *Journal of American Science*, 2 :338–345, 2011.
- [3] S. Abbasbandy, Juan J. Nieto, and M. Alavi. Tuning of reachable set in one dimensional fuzzy differential inclusions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 26 :1337–1341, 2014.
- [4] S. Abbasbandy, T. A. Viranloo, and Ó. López-Pouso. Numerical methods for fuzzy differential inclusions. *Computers and Mathematics with Applications*, 48 :1633–1641, 2004.
- [5] G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Applic*, 135 :501–544, 1988.
- [6] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, and H. Rouhparvar. The exact solutions of fuzzy wave-like equations with variable coefficients by a variational iteration method. *Applied Soft Computing*, 11 :2186–2192, 2011.
- [7] G. A. Anastassiou and S. G. Gal. On a fuzzy trigonometric approximation theorem of weierstrass type. *Applied Soft Computing*, 9 :701–708, 2001.
- [8] A. I. Ban and B. Bede. Cross product of l-r fuzzy numbers and applications. *Annals of the University of Oradea, Fasc. Math*, 9 :95–108, 2003.
- [9] A. I. Ban and B. Bede. Properties of the cross product of fuzzy numbers. journal of fuzzy mathematics. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 14 :513–531, 2006.
- [10] L. C. Barros, R. C. Bassanezi, and P.A. Tonelli. On the continuity of the zadeh’s extension. *IFSA, Congress*, 1997.
- [11] B. Bede and S. G. Gal. Almost periodic fuzzy-number-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 147 :385–403, 2004.
- [12] B. Bede and S. G. Gal. Generalizations of the differentiability of fuzzy-numbervalued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 151 :581–599, 2005.

- [13] B. Bede, I. J. Rudas, and A. L. Bencsik. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Information Sciences*, 177(7) :1648–1662, 2007.
- [14] B. Bede and L. Stefanini. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230 :119–141, 2013.
- [15] N. Bildik and A. Konuralp. The use of variational iteration method, differential transform method and adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(1) :65–70, 2006.
- [16] B. Bouchon-Meunier and C. Marsala. Logique floue, principes, aide à la décision. *Hermes*, 2003.
- [17] R. Boukezzoula, S. Galichet, and L. Foulloy. Inverse arithmetic operators for fuzzy intervals. *EUSFLAT Conf*, 2007.
- [18] J. J. Buckley and T. Feuring. Introduction to fuzzy partial differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 105 :241–248, 1999.
- [19] J. J. Buckley and T. Feuring. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 110 :43–54, 2000.
- [20] J. J. Buckley and Y. Qu. Solving fuzzy equations : a new solution concept. *Fuzzy Sets and Systems*, 50 :1–14, 1992.
- [21] L. S. Chadli, A. Harir, A. Kajoni, and S. Melliani. Solving hybrid fuzzy differential equations via generalized division. *Advances in Fuzzy Systems*, pages xx–xx, 2016.
- [22] L. S. Chadli, A. Harir, and S. Melliani. Solutions of fuzzy wave-like equations by variational iteration method. *Ann. Fuzzy Math. Inform*, 8(4) :527–547, October 2014.
- [23] L. S. Chadli, A. Harir, and S. Melliani. Fuzzy euler differential equation. *SOP Trans. Appli. Math*, 2(1) :1–12, January 2015.
- [24] L. S. Chadli, A. Harir, and S. Melliani. Solutions of fuzzy heat-like equations by variational iterative method. *Ann. Fuzzy Math. Inform*, 10(1) :29–44, July 2015.
- [25] L. S. Chadli, A. Harir, and S. Melliani. Solving fuzzy burgers equation by variational iteration method. *Journal of fuzzy set valued analysis*, pages xx–xx, 2016.
- [26] Y. Chalco-Cano and H. Roman-Flores. Some remarks on fuzzy differential equations via differential inclusions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230 :3–20, 2013.
- [27] Y. Chalco-Cano and H. Romàn-Flores. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(1) :112–119, 2008.
- [28] Y. Chalco-Cano and H. Romàn-Flores. Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160 :1517–1527, 2009.
- [29] Paolo Dadone. Design optimization of fuzzy logic systems. *PH :Doctor of Philosophy in Electrical Engineering*, May 2001.

- [30] D. Datta. Non-probabilistic uncertainty analysis of analytical and numerical solution of heat conduction. *International Journal of Energy, Information and Communications*, 2 :xx–xx, 2011.
- [31] P. Diamond. Stability and periodicity in fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8 :583–590, 2000.
- [32] P. Diamond and P. Kloeden. Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. *Handbook Fuzzy Sets Ser. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 7 :583–641, 2000.
- [33] P. Diamond and P.E. Kloeden. Metric spaces of fuzzy sets, theory and applications. *World Scientific*, 160, 1994.
- [34] P. Diamond and P. Watson. Regularity of solution sets for differential inclusions quasi-concave in a parameter. *Applied Mathematics Letters*, 13 :31–35, 2000.
- [35] D. Dubois and H. Prade. Operations on fuzzy number. *International Journal of Systems Science*, 9 :613–626, 1978.
- [36] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy sets and systems, theory and applications. *Mathematics in science and Engineering*, 144, 1980.
- [37] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy numbers, an overview. *In Analysis of Fuzzy Information. Mathematical Logic*, 1 :3–39, 1987.
- [38] B. A. Finlayson. The method of weighted residuals and variational principles. *Acad. Press*, 1972.
- [39] M. Friedman, M. Ming, and A. Kandel. Fuzzy derivatives and fuzzy chauchy problems using lp metric. *Da Ruan (Ed.), Fuzzy Logic Foundations and Industrial Applications, Kluwer, Dordrecht*, pages 57–72, 1996.
- [40] M. Friedman, M. Ming, and A. Kandel. Numerical procedures for solving fuzzy differential and integral equations. *Internat. Conf. Fuzzy Logic and Applications, Zichron Yaakov, Israel*, pages 18–21, May 1997.
- [41] R. Fullér and T. Keresztfalvi. On generalization of nguyen’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 41 :371–374, 1990.
- [42] L. Gacôgne. Eléments de logique floue. *Hermes*, 41, 1997.
- [43] S. G. Gal. Linear continuous functionals on fn-type spaces. *HermesJ. Fuzzy Math*, 17(3) :535–553, 2009.
- [44] R. Goetschel and W. Voxman. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 18 :31–43, 1986.
- [45] S. Guo, L. Mei, and Y. Li. Fractional variational homotopy perturbation iteration method and its application to a fractional diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :5909–5917, 2013.
- [46] M. Hanss. Applied fuzzy arithmetic. *Springer*, 219, 2005.

- [47] J. H. He. A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2(4) :203–205, 1997.
- [48] J. H. He. A variational iteration approach to nonlinear problems and its applications. *Mechanic Applications*, 20(1) :30–31, 1998.
- [49] J. H. He. Variational iteration method-a kind of nonlinear analytical technique : some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 :699–708, 1999.
- [50] J. H. He. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. *Int. J. Mod. Phys.*, 20 :1141–1199, 2006.
- [51] J.H. He. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167 :57–68, 1998.
- [52] M. Hukuhara. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10 :205–223, 1967.
- [53] M. Inokuti. General use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics. *S. Nemat-Nasser(ed). Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon*, pages 156–162, 1978.
- [54] J. Kacprzyk. Studies in fuzziness and soft computing. *Springer*, 2013.
- [55] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3) :301–317, 1987.
- [56] O. Kaleva. A note on fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis*, 64 :895–900, 2006.
- [57] A. Kaufmann. Introduction à la théorie des ensembles flous. *Masson*, 1, 1973.
- [58] A. Khastan, F. Bahrami, and K. Ivaz. New results on multiple solutions for nth-order fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Bound. Value Probl*, 13, 2009.
- [59] V. Lakshmikantham and R. N. Mohapatra. Theory of fuzzy differential equations and inclusions. *CRC Press*, 2003.
- [60] S. J. Liao. Homotopy analysis method-a kind of nonlinear analytical technique not depending on small parameters. *Shanghai J. Mech*, 18(3) :196–200, 1997.
- [61] G. L. Liu. Weighted residual decomposition method in nonlinear applied mathematics. *Proc. of 6th Congress of Modern Mathematics and Mechanics (MMM-VI)*, pages 643–648, 1995.
- [62] M. Ma, M. Friedman, and A. Kandel. A new fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 108 :83–90, 1999.
- [63] M. T. Malinowski. Interval cauchy problem with a second type. *Hukuhara derivative Information Sciences*, 213 :94–105, 2012.
- [64] R. E. Moore. Methods and applications of interval analysis. *Studies in Applied Mathematics*, 230, 1979.

- [65] C. Negoita and D. Ralescu. Application of fuzzy sets to system analysis. *Wiley, New York*, 1975.
- [66] H. T. Nguyen. A note on the extension principle for fuzzy sets. *UCB/ERL Memo M-611. Univ. of California, Berkeley. Also in J. Math. Anal. Appl*, 64(2) :369–380, 1976.
- [67] L. M. Puri and D. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Anal. Appl*, 91 :552–558, 1983.
- [68] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24 :319–330, 1987.
- [69] L. Stefanini. A generalization of hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic. *Papers Series in Economics, Mathematics and Statistics, University of Urbino*, 2008.
- [70] L. Stefanini. A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 161 :1564–1584, 2010.
- [71] L. Stefanini and B. Bede. Generalized hukuhara differentiability of intervalvalued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 71 :1311–1328, 2009.
- [72] A. M. Wazwaz. The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of pdes. *Comput. Math. Appl*, 54 :95–902, 2007.
- [73] A. M. Wazwaz and A. Gorguis. Exact solutions for heat-like and wave-like equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput*, 149 :15–29, 2004.
- [74] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Inform. and Control*, 8 :338–353, 1965.
- [75] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, 8 :199–249, 1975.
- [76] L. A. Zadeh. Soft computing and fuzzy logic. *IEEE Software*, 11(6) :48–56, 1994.