

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Physique des Hautes Energies - Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le : **28/11/2020** par :

Karim MEJRHIT

Contribution à l'étude Thermodynamique Non-Extensive des Trous Noirs dans le cadre de la Gravité Quantique à Boucles.

JURY

Abdallah EI KENZ	PES	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Président
Rachid AHL LAAMARA	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Directeur de thèse
Lalla Btissam DRISSI	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Rapporteur / Examineur
Khadija HTOUTOU	PH	Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Fés-Meknès, Meknès.	Rapporteur / Examineur
Omkaltoume EL FATNI	PH	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Rapporteur / Examineur
El Hassan SAIDI	PES	Faculté des sciences, Université Mohammed V-Rabat	Examineur
Mostafa MANSOUR	PES	Faculté des sciences, Université Ain Chock, Casablanca	Examineur

Année Universitaire : 2019 / 2020

J'ai lu avec grand plaisir et intérêt cette thèse, qui résume de façon claire les résultats majeurs de la théorie de la gravité quantique à boucles, et présente des contributions intéressantes sur le spectre de la radiation de Hawking et sur la stabilité thermodynamique des trous noirs. Je félicite Karim MEJRHIT pour sa passion et pour ce travail.

Carlo Rovelli

Dédicaces

Ma reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de ce travail : ma famille et ma femme.

Je ne trouve pas les mots qui peuvent exprimer ma reconnaissance et mon affection envers mes chers parents pour tous les sacrifices qu'ont fait pour moi depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte. Vos prières et vos bénédictions m'ont été un grand secours pour mener à bien mes études. Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et leur encouragements durant les années universitaires.

Je tiens aussi à exprimer tous mes sentiments les plus chaleureux et les plus affectueux à ma chère femme pour tous ses sacrifices et pour toute sa patience des voyages et des congés souvent gâchés ou souvent ratés par la suite des obligations imposées par ce travail et de m'avoir supporté le long de ces rudes années de travail qui ont été heureusement couronnées par cette thèse.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos sincères remerciements et nos profondes reconnaissances à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Mes remerciements les plus distingués vont à mes très chers amis et collègue R. Hajji, M. Ezzi et E. Salah Eddine leurs conseils prodigués avec profusion m'ont été un stimulant bienfaisant et salvateur et j'espère du fond de mon cœur poursuivre avec eux des collaborations aussi enrichissantes que fructueuses.

Nombreux sont ceux que je voudrais remercier pour m'avoir aidé, soutenu ou accompagné durant ces années de thèse. C'est pour leur montrer toute ma gratitude et reconnaissance que je consacre cette page.

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein de l'Équipe de Recherche Physique des Hautes Énergies, Modélisation et Simulation (LPHE-MS) au département de physique à la Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V Rabat. Sous la direction du Professeur Rachid AHL LAAMARA.

Un très grand merci à Monsieur Rachid AHL LAAMARA, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour avoir accepté la direction de cette thèse. Sa disponibilité, son expérience, ses qualités scientifiques, pédagogiques et tout simplement humaines ont été sans conteste à l'origine du si bon déroulement de cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr Abdallah EL KENZ, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences, Rabat qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon profond respect.

Je voudrais sincèrement remercier Mme Lalla Btissam DRISSI, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences, Rabat, pour ce grand honneur qu'elle nous a fait en acceptant de juger ce travail et d'en être le rapporteur et examinateur de cette thèse. Elle est une personne de principe et de rigueur.

Mes vifs remerciements vont à Mme Omkaltoum EL FATNI, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences Rabat pour le grand honneur qu'elle m'a donné en acceptant d'évaluer ce travail et d'avoir accepté de participer en tant que rapporteur et examinateur dans le jury de ma soutenance.

Je suis également reconnaissant à Mme Khadija HTOUTOU, Professeur Habilité au Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation, Fès-Meknès, pour l'intérêt qu'il a manifesté en participant en tant que rapporteur et examinateur dans le jury, pour le temps consacré à la lecture de ce travail ainsi que pour ses efforts.

Je souhaite également remercier Mr El Hassan Saidi, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences Rabat, d'avoir accepté de participer en tant que examinateur dans le jury de ma soutenance. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Je tiens remercier chaleureusement Mr Mostafa MANSOUR, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences, Ain Chock, Casablanca, d'avoir accepté d'être membre du jury en tant que examinateur. Veuillez accepter mes plus sincères remerciements pour votre présence dans ce jury et soyez assuré, Monsieur de tout mon respect et de ma profonde gratitude.

Remerciements

Je voudrais exprimer ma reconnaissance et mes gratitudes les plus profondes et les plus distinguées au grand physicien italien connu comme spécialiste chevronné en gravitation quantique à boucles (LQG) et l'un des pères fondateurs de la physique de la gravitation quantique, le professeur Carlo ROVELLI pour m'avoir accordé l'honneur de lire mon travail et de préfacier ma thèse, mes remerciements les plus sincères et les plus chaleureux s'adressent également au deuxième pilier de la théorie de la LQG, le physicien américain réputé par son œuvre personnelle en matière, le professeur Lee SMOLIN pour le rôle crucial que ses remarques pertinentes et ses suggestions constructives ont joué pour la mise au point et l'avancement de ce travail, ainsi que les discussions fructueuses que j'ai eu avec un savant encyclopédique du calibre du professeur Lee SMOLIN, ces discussions m'ont fait un grand honneur et elles étaient décisives pour ma formation personnelle dans les mondes vastes et fascinants de la théorie de la LQG.

Résumé

Cette thèse constitue une modeste contribution esquissant la théorie de la gravitation quantique à boucles qui ne prétend pas être exhaustive et qui est la principale rivale de la mastodonte théorie des cordes dans le cadre de l'élaboration d'une théorie quantique de la gravitation. Elle est formulée sur la base d'un formalisme hamiltonien de la relativité générale avec une quantification effectuée de manière non perturbative et indépendamment du fond (background). Dans le cadre de la relativité générale canoniquement quantifiée, il est montré que l'espace est quantifié aux échelles de Planck, et un tel résultat conduit à l'application de la gravité quantique à boucle aux calculs des valeurs d'entropie des trous noirs. Ce travail consiste aussi à l'étude des résultats indiquant que l'entropie des trous noirs et autres grandeurs thermodynamiques statistiques peuvent être calculées de manière cohérente en gravité quantique à boucles et que les résultats retrouvés sont en accord avec l'analyse semi-quantique de Hawking pour toutes les valeurs du paramètre de Barbero-Immirzi. Après, nous avons abordé l'entropie de Bekenstein-Hawking des horizons d'événement des trous noirs de Schwarzschild comme une entropie de Tsallis non-extensive en vertu de la gravité quantique à boucles. Enfin, nous avons montré que le trou noir a une température minimale à M_{min} qui est déterminée par le paramètre q et que la chaleur spécifique du système est positive avec $M > M_{min}$; ce qui signifie qu'un trou noir massif est thermodynamiquement stable, contrairement au résultat standard dans lequel toutes les solutions semblent instables. Ce résultat est très similaire à celui annoncé pour un trou noir dans l'espace Anti-de Sitter (AdS), où il est également montré qu'une transition de phase Hawking-Page du trou noir se produit à une température critique qui repose sur le paramètre q de la formule de Tsallis.

Mots clés : Relativité générale, Trous noirs, Gravité quantique à boucles, Réseaux de spins, Paramètre de Barbero-Immirzi, Entropie Bekenstein-Hawking, Non-extensive.

Abstract

This thesis mainly concerns an introduction to loop quantum gravity which is the main rival of String Theory for a quantized theory of gravity. It is formulated on the basis of a Hamiltonian formalism of General Relativity with quantization made in a non-perturbative and background independent method. In this framework, the canonically quantizing General Relativity, it is shown that spacetime is quantized at Planckian scales and such a result leads to applying Loop Quantum Gravity to calculations of black hole entropy values. The present thesis includes contributions to the study of the results that indicate that black hole entropy and other statistical thermodynamics quantities is discussed can be consistently calculate in loop quantum gravity and that the results are in approval with Hawking's semi-quantum analysis for all values of the Barbero-Immirzi parameter. Then, we regarded the Bekenstein-Hawking entropy of Schwarzschild black holes event horizons as a non-extensive Tsallis entropy from loop quantum gravity framework, we shown that the black hole has a minimum temperature at M_{min} which relies on the q parameter, and the specific heat of system is positive with $M > M_{min}$; this means that the large black hole is thermodynamically stable against radiation, in contrast to the standard result where all solutions appear to be unstable. This result is very similar to the ones announced from a black hole in Anti-de Sitter (AdS) space, where it is also proved that a Hawking-Page black hole phase transition results at a critical temperature which relies on the q -parameter of the Tsallis formula.

Keywords : General Relativity, Blacks Holes, Loop Quantum Gravity, Spin networks, Barbero-Immirzi parameter, Bekenstein-Hawking entropy, Non-extensive.

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Introduction générale	1
Chapitre 1 RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET MÉCANIQUE QUANTIQUE	6
1.1 Formulations Lagrangiennes de la Relativité Générale	6
1.1.1 Formulation d'Einstein-Hilbert	6
1.1.2 Formulation par tétrade	16
1.2 Mécanique Quantique	24
1.2.1 Axiomes de la mécanique quantique	24
1.2.2 Opérateurs de la mécanique quantique	27
1.2.3 Quantification canonique	30
1.2.4 La formulation de Yang-Mills	33
Chapitre 2 QUANTIFICATION CANONIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE	36
2.1 Formalisme ADM	37
2.1.1 Géométrie des hypersurfaces	37
2.1.2 Géométrie intrinsèque et extrinsèque	40
2.1.3 Relations de Gauss-Codazzi	45
2.1.4 Décomposition $3 + 1$ du tenseur de Riemann	49
2.1.5 Expression de la courbure scalaire de l'espace-temps	51
2.1.6 Forme $3 + 1$ de l'action de Hilbert	52
2.2 Analyse hamiltonienne dans le formalisme ADM	53
2.2.1 Contraintes	54
2.2.2 Structure symplectique	58
2.3 Vers les variables : Formalisme de la triade	60
2.4 Nouvelles variables canoniques d'Ashtekar-Barbero	63
2.5 Algèbre de contrainte et transformations de Jauge	65

Table des matières

2.6	Holonomies	71
2.6.1	Raison de l'utilisation des holonomies	72
2.6.2	Boucles de Wilson	75
Chapitre 3	GRAVITÉ QUANTIQUE À BOUCLES : Cinématique	79
3.1	Méthode de quantification de Dirac	79
3.2	Réseaux de spin	83
3.3	Géométrie Quantique des réseaux de spin	97
3.4	Opérateurs d'aire et de volume	99
Chapitre 4	QUANTIFICATION DES TROUS NOIRS	109
4.1	Thermodynamique des trous noirs et rayonnement	109
4.1.1	Lois de la mécanique des trous noirs	110
4.1.2	Entropie de Bekenstein-Hawking	114
4.1.3	Discrétisation d'entropie du trou noir de Schwarzschild	118
4.2	Trou noir et réseau de spins	120
4.2.1	Dérivation de l'entropie de Bekenstein-Hawking	120
4.2.2	Fréquences des modes de sonnerie	120
Contribution I	127
Contribution II	128
Conclusion générale	129
Bibliographie	131

Table des figures

1.1	Exemple de la déformation d'un espace plat par la présence d'un objet massif. L'analogie courante est de comparer cette situation à un drap sur lequel on pose un bille : il se courbe alors sous l'effet de son poids.	7
1.2	Schéma représentant le plan tangent $T_X M$ à une sphère M en un point X . Un vecteur $A^\mu(x)$ dans le référentiel Lorentzien est transporté sur un vecteur $\tilde{A}^\alpha(x)$ de la sphère grâce à la tétrade.	17
2.1	Coordonnées (x^μ) sur les hypersurfaces Σ_t : chaque ligne $(x^\mu = cte)$ coupe la foliation $(\Sigma_t$ et $\Sigma_{t+\delta t})$. Fonction Lapse (Lapse Function) N et vecteur Déplacement (Shift Vector) N^μ représentent la décomposition normale et tangentielle du vecteur temps t_μ	38
2.2	L'interprétation géométrique de la courbure extrinsèque.	43
3.1	Un graphe $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ est une collection fini de L courbes orientés par morceaux $\alpha_l, l = 1, \dots, L$, plongés dans la 3-variété Σ . Les courbes α_l formant le graphe Γ sont appelés liens ou arête, et leurs points de rencontre sont appelés les nœuds $a_n, n = 1, \dots, N$ ou vertex du graphe.	84
3.2	Exemple d'un graphe Γ avec des lien coloré par des spins j_l et les nombres quantiques m_l et n_l	87
3.3	L'espace sur chaque vertex $\mathcal{H}_{j_1(a)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_N(a)}$	91
3.4	Graphique comportant six liens et quatre vertex à tri-valences, avec l'un des états orthogonaux dans l'espace cinématique associé. Chaque couple $ j_l m_l\rangle \otimes j_l m_l\rangle$ représente l'élément de la matrice de Wigner $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$, tandis que les triples autour de chaque vertex représentent le $SU(2)$ produits tenseur invariants.	95

3.5	Graphique avec quatre liens et deux vertex à tétra-valents, avec l'un des états orthogonaux dans l'espace cinématique associé. Chaque couple $ j_l m_l\rangle \otimes j_l m_l\rangle$ représente l'élément de matrice de Wigner $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$, tandis que les quartets autour de chaque vertex représentent le $SU(2)$ entrelaceurs invariants, identifiés par le lien virtuel k_n	96
3.6	Exemples de liens virtuels pour un vertex tétra-valent et penta-valent. Il existe en général plusieurs valeurs de spins virtuels possibles, qui doivent satisfaire la condition de Clebsh-Gordan en chacun.	98
3.7	Exemple d'intersection d'un lien α avec une surface \mathcal{S}	102
3.8	La partition de $\mathcal{S} : P_k \in \mathcal{S} \cap \Gamma$	106
3.9	Liens décrivant leurs surfaces frontières, le volume et l'aire étant donnés par les spins portés par les liens.	107
4.1	L'horizon d'un trou noir, traversé par les liens du réseau de spin qui détermine sa géométrie bidimensionnel.	123

Liste des tableaux

4.1	Analogies entre les principes de la thermodynamique et les lois de la mécanique des trous noirs	113
-----	---	-----

INTRODUCTION

La formulation de la mécanique quantique, et sa version la plus sophistiquée, la théorie quantique des champs (QFT pour Quantum Field Theory), a permis de décrire avec succès trois des quatre forces fondamentales de la nature, ce qui a abouti à l'élaboration du modèle standard (SM), théorie unifiée des particules élémentaires et de leurs interactions fondamentales. D'autre part, la relativité générale (GR) a réussi à fournir un cadre théorique adéquat pour la gravitation, la force fondamentale restante. Ces deux théories semblent difficiles à réconcilier en une seule afin d'obtenir une théorie quantique de la gravitation [1]. Alors la théorie quantique des champs et la relativité générale sont efficaces dans leurs domaines respectifs, la première dans le monde microscopique et la deuxième dans le monde macroscopique, pourtant elles ne sont pas compatibles l'une avec l'autre ; à savoir la relativité générale ne peut pas être appliquée aux échelles subatomique et subnucléaire sur lesquelles la théorie quantique des champs possède une précision diabolique. Les tentatives pour surmonter ces divergences et mettre au point une théorie cohérente applicable aux échelles subatomique et cosmique, ont naturellement conduit à de diverses approches visant la quantification de la gravitation, un problème qui intéresse les physiciens depuis des décennies (A. Einstein, G.Bluck, M.A.Tonnelat, I. Frenkel ...). À travers l'histoire du développement de la physique, il est évident que la fusion de deux théories apparemment différentes en une structure unifiée donne naissance à une nouvelle physique ; L'unification des lois de mouvements terrestre a conduit Newton et Galilée à l'élaboration de la mécanique classique ; le synthèse de l'électricité et de magnétisme a abouti aux équations de Maxwell ; la fusion de la mécanique newtonienne et de l'électromagnétisme de Maxwell a donné naissance à la relativité restreinte, l'unification de l'électricité, de la mécanique rationnelle et de l'optique a eu pour conséquence le développement de la mécanique quantique ; la mise en parallèle de la mécanique quantique et de la relativité spéciale a conduit à la mécanique quantique relativiste la sœur aînée de la théorie quantique des champs. Il est probable que l'unification de la relativité générale et de la théorie quantique des champs éclaircisse à nouveau un point noir qui nous mènera vers une nouvelle physique qui permettra, par exemple, la théorie quantique à boucles peut décrire correctement la physique des trous noirs et notamment les étapes finales de son évaporation. Cette théorie purement géométrique peut aussi avoir une importance cosmologique pour élucider les différents phénomènes qu'ont connu les premières secondes de l'univers primordial et même les phases antérieures au Big-Bang.

Il existe actuellement de nombreux candidats à la théorie de la gravitation quantique, notamment la théorie des twistors de Penrose, la théorie des ensembles causaux, la théorie des

supercordes, la géométrie non commutative de Connes, les relativités complexe et d'échelle de Charon et de Nottale, la supergravité, les automates cellulaires quantiques et la gravitation quantique à boucles (ou Loop Quantum gravity (LQG) en anglais) sur laquelle notre étude va se focaliser [2–6]. Parmi tous ces édifices théoriques, la théorie des supercordes et la LQG sont les deux candidats principalement étudiés. Il convient de noter que la théorie des supercordes (c'est-à-dire une théorie qui unifie les quatre forces fondamentales) est essentiellement différente de la LQG. Le succès partiel de la théorie des cordes se fait toutefois au prix des dimensions supplémentaires (les théories à 26 et à 10 dimensions) et d'un nombre infini de particules au-delà de celles prédites par le modèle standard ; la théorie est aussi nécessairement supersymétrique, une propriété (qui n'a pas été confirmée expérimentalement). En revanche, la LQG est une théorie qui vise la quantification de la gravitation plutôt que l'unification des interactions fondamentales. Ainsi, il ne souffre pas des complications supplémentaires auxquelles la théorie des cordes est exposée, comme indiqué ci-dessus. Plus important encore, contrairement à la théorie des supercordes, dont la quantification de la gravité découle de calculs perturbatifs, la quantification de la Gravité Quantique à Boucles n'est pas perturbative [7–10]. Cette quantification non perturbative présente deux avantages : l'indépendance d'une trame de fond¹ et l'absence des divergences². Depuis la quantification de l'électromagnétisme, la description mathématique des forces nucléaires faible et forte, on utilise le formalisme perturbatif et l'extension non-abélienne de l'électrodynamique quantique (Théorie de Yang-Mills), il est tout à fait naturel de considérer également la quantification de la gravité via les perturbations. Le processus est similaire à celui de la théorie quantique des champs et définit une intégrale fonctionnelle pour la relativité générale. Cela implique la séparation de la métrique en tant que somme de la métrique plane de Minkowski et de quelques petites fluctuations qui jouent le rôle du champ dynamique comme dans la théorie quantique des champs [11]. Le résultat générique est une théorie du champ non renormalisable dont les quanta sont interprétés comme des gravitons. Il convient toutefois de noter qu'il est possible de formuler une théorie de la gravitation renormalisable en considérant une théorie du champ efficace. C'est essentiellement la base de la théorie des supercordes [12].

La non-renormalisation n'est pas un fait surprenant puisque la gravitation est non renormalisable par comptage de puissance. Les théories non renormalisables sont généralement consi-

1. Ou background independent dans la langue de Shakespeare, c'est à dire indépendante de la préexistence d'une trame de fond spatio-temporelle qui est à l'origine du problème de l'unification de la gravitation avec les autres interactions fondamentales.

2. Une théorie non renormalisable est une théorie au sein de laquelle subsistent des problèmes d'infini qui ne peuvent être éliminés.

dérées comme indésirables car elles produisent des divergences impossibles à gérer systématiquement. La LQG, cependant, est indépendante des calculs perturbatifs et donc libre de ces contraintes.

L'indépendance d'une trame de fond est une autre caractéristique essentielle de la relativité générale qui doit être préservée, mais dans la théorie quantique des champs, la métrique implicite sur laquelle les calculs sont effectués est la métrique de Minkowski et en d'autres termes la théorie dépend d'une trame de fond, cette théorie traite principalement des particules ponctuelles comme une sorte que la rétro-réaction³ est négligeable. La relativité générale, cependant, est une théorie décrivant l'interaction de la matière et de la métrique elle-même; par conséquent, négliger la rétro-réaction est dénué de sens et cela est dû à la non-linéarité des équations du champ d'Einstein. Comme aucune structure sur la métrique ne peut être supposée avant les calculs. La gravité quantique à boucles est formulée conformément à cette propriété de relativité générale et est construite sur une structure quantique qui soit indépendante de la préexistence d'une trame de fond spatio-temporelle, appelée états de réseau de spin, dont les détails apparaîtront dans les discussions ultérieures.

En regardant l'équation d'Einstein, on peut déduire une autre caractéristique fondamentale de la relativité générale : la covariance du difféomorphisme connue sous le nom d'invariance du difféomorphisme ou covariance générale dite généralement covariance, c'est à dire l'invariance des équations par l'application d'une transformation générale des coordonnées. Ceci est une déclaration technique sur l'indépendance des lois physique du système de coordonnées. Parce que l'équation d'Einstein est une équation tensorielle, elle est nécessairement indépendante des coordonnées. Cette propriété, ainsi que indépendante de la préexistence d'une trame de fond spatio-temporelle, sont cruciales au développement du formalisme ADM, introduit initialement en 1959 par Richard Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner.

Les étapes suivies dans la gravité quantique à boucles pour arriver à la quantification de la relativité générale sont similaires à celles de la mécanique quantique ordinaire :

- La métrique n'est plus considérée comme l'objet d'intérêt, mais la dynamique d'autres quantités desquelles découle la métrique est la plus primordiale.
- La formulation hamiltonienne de la mécanique classique pour la relativité générale est construite.
- Les crochets de Poisson sont transformés par principe de correspondance en commutateurs.

3. En physique théorique, la rétro-action ou backreaction en anglais (l'action en retour d'un effet sur sa propre origine) est souvent nécessaire pour calculer le comportement auto-cohérent d'une particule ou d'un objet dans un champ externe.

Cette thèse de doctorat est constituée de quatre chapitres consacrés à l'étude bibliographique et deux contributions, en plus d'une introduction générale et d'une conclusion

Dans le premier chapitre, on procède au traitement du formalisme lagrangien de la relativité générale ainsi que les axiomes de la mécanique quantique, cela est essentiel pour la quantification canonique de la relativité générale exposée au deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre on donne une formulation complète, dans laquelle l'espace-temps à quatre-dimensions est scindé en un espace tridimensionnel des coordonnées spatiales et un autre espace unidimensionnel relatif au temps. Cette formulation révèle que la métrique tridimensionnelle et son moment conjugué sont les variables dynamiques de la théorie. Cependant, en raison de l'indépendance d'une trame de fond, on rencontre des difficultés lorsqu'on quantifie naïvement de cette manière la relativité générale. En particulier, la relativité générale étant une théorie totalement contrainte, on constate qu'aucune évolution ne peut être générée par la quantification canonique. La tétrade et la connexion de spin du nouveau formalisme de relativité générale lui donne une forme plus proche de celle des théories de jauge (comme la théorie de Yang-Mills), mais sans l'usage d'une métrique, sont ensuite utilisées pour mettre en œuvre de nouvelles variables appelées variables d'Ashtekar comprenant la connexion Ashtekar-Barbero, qui est une connexion $SU(2)$ et sa quantité conjuguée, la densité de triade. On trouve que l'action construite en fonction des nouvelles variables donne lieu à une nouvelle symétrie de jauge $SU(2)$. Avec les nouvelles variables permettant une théorie indépendante d'une trame de fond, leur procédure de quantification. En utilisant la notion d'holonomies, donc de boucles de Wilson, un espace de Hilbert comprenant des états de réseau de spin est conçu de manière à préserver l'indépendance d'une trame de fond.

Dans le troisième chapitre, on introduit les subtilités du programme de la quantification canonique non-perturbative de la gravitation connue sous le nom de la LQG, qui ne présente pas les divergences connues pour les méthodes perturbatives et qui conduit à une quantification de l'espace donc de la gravitation. Ce programme reconstruit la théorie de la relativité générale dans le cadre d'une théorie de jauge $SU(2)$ en termes de densité de triade et de connexion d'Ashtekar, et cela a été réalisé en faisant recours à la procédure de la quantification de Dirac pour les systèmes contraints, et cela revient à construire un espace cinématique de Hilbert à partir duquel l'espace physique peut être extrait en imposant les trois contraintes, qui sont la contrainte de Gauss, la contrainte Hamiltonienne et la contrainte de l'invariance du difféomorphisme. Après on introduit le concept d'opérateurs géométriques tels que les opérateurs d'aire et de volume agissant sur les états du réseau de spin, donnent les aires et les volumes physi-

quement observables. Le résultat clé est que les aires et les volumes induits sont discrétisés, suggérant que l'espace lui-même est quantique à l'échelle de Planck. Ainsi que le paramètre de Barbero-Immirzi devient ultérieurement une quantité clé dans la théorie quantique, en particulier il intervient dans les valeurs des états propres d'opérateurs géométriques tels que l'aire ou le volume [6, 13, 14].

Dans le dernier chapitre, on aborde l'application de la gravité quantique à boucles aux trous noirs ainsi que la mécanique statistique non-extensive, ou plus précisément l'application des deux théories au calcul des entropies et des grandeurs thermodynamiques des trous noirs. L'une des conséquences directes de l'application de la gravité quantique à boucles aux trous noirs est le mécanisme de l'existence des horizons d'événements, qui sont interprétés comme des aires induites par les bords et les confins des états du réseau de spin qui traversent ces surfaces, ce qui est décrit mathématiquement par les valeurs propres de l'opérateur d'aire. En termes d'entropie, la LQG permet d'introduire une correction logarithmique de l'image semi-classique de l'entropie d'un horizon décrite par la formule de Bekenstein-Hawking. Il est révélé que pour obtenir une image cohérente des calculs d'entropie, le paramètre de Barbero-Immirzi doit prendre une valeur spécifique contrairement au cas classique.

Les deux dernières contributions sont mes deux articles, le premier est relatif à la spectroscopie des radiations émises par le trou noir dans le cadre de la théorie de la LQG ainsi que la mécanique statistique extensive découlant du caractère Boltzmannien de l'entropie. Concernant le deuxième article, il est consacré à l'application de la mécanique statistique non-extensive de Tsallis conjointement avec la gravitation quantique à boucle pour calculer l'entropie du trou noir et la relier avec ses caractéristiques géométriques dans le cadre d'une géométrie quantique de l'espace.

1

RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET MÉCANIQUE QUANTIQUE

1.1 Formulations Lagrangiennes de la Relativité Générale

Les équations du champ d'Einstein sont la généralisation relativiste de la loi de la gravitation universel de Newton. Elles sont basées sur l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle, c'est le principe d'équivalence d'Einstein. La théorie conçoit la gravitation comme une courbure de l'espace-temps, et que la matière (énergie) déforme cet espace-temps. Il est en fait courbé par la présence des masses, voir la figure (1.1). On peut montrer que les équations d'Einstein sont invariantes par tout changement de coordonnées (ou difféomorphisme), qu'on note par exemple $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$, dans ces nouvelles coordonnées, on obtient une autre métrique $g'_{\mu\nu}$ donc un autre $R'_{\mu\nu}$ (mais la même courbure scalaire R), ces grandeurs vérifient une équation de la même forme que les équations d'Einstein, la théorie est donc dite généralement covariante, ou invariante par difféomorphisme¹. Dans cette section, on va donc traiter l'action de Hilbert-Einstein qui, lorsqu'on impose le principe du moindre action pour déduire les équations de champ d'Einstein devient minimale.

1.1.1 Formulation d'Einstein-Hilbert

La métrique, tenseur symétrique en ses deux indices $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, joue un rôle fondamental dans la description de l'espace-temps : c'est elle qui permet d'introduire la notion de longueur

1. Ainsi, si deux métriques sont reliées l'une à l'autre par un changement de coordonnée, alors elles décrivent le même espace temps et sont équivalentes (et réciproquement).

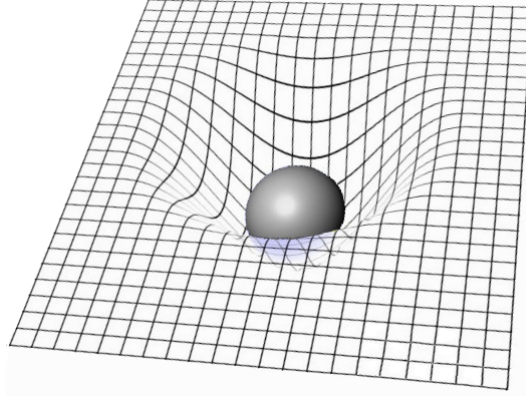


Figure 1.1 – Exemple de la déformation d'un espace plat par la présence d'un objet massif. L'analogie courante est de comparer cette situation à un drap sur lequel on pose une bille : il se courbe alors sous l'effet de son poids.

sur une trajectoire $\mathbf{x}(s)$ (représentée par ses coordonnées $x^\mu(s)$, et paramétrée par s) :

$$L = \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds}} ds, \quad (1.1)$$

la notion d'aire d'une surface (ici paramétrée par deux variables s_1 et s_2) :

$$A = \int_S \sqrt{\det_{\alpha\beta} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu(s_1, s_2)}{\partial s^\alpha} \frac{\partial x^\nu(s_1, s_2)}{\partial s^\beta} \right]} ds_1 ds_2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.2)$$

ou encore la notion de volume d'une région R de l'espace :

$$V = \int_R \sqrt{\det[g_{ab}]} d^3x, \quad (1.3)$$

où g_{ab} est la restriction de la métrique $g_{\mu\nu}$ aux trois coordonnées nécessaires pour décrire le volume. Toutes ces propriétés découlent du fait que $g_{\mu\nu}$ définit en réalité le produit scalaire entre deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} (représentés par leurs coordonnées x^μ et y^ν) :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \equiv x_\mu y^\mu. \quad (1.4)$$

On dit alors qu'elle sert à monter ou descendre les indices des vecteurs (mais également de tout tenseur). On a également le tenseur $g^{\mu\nu}$ qui est défini comme l'inverse de $g_{\mu\nu}$.

Nous cherchons dans ce chapitre les équations du champ de gravitation indépendamment des sources qui engendrent ce champ. Autrement dit, il s'agit de trouver les équations du champ à l'extérieur des masses qui l'engendre : on parle alors du cas extérieur.

Nous déduirons ces équations d'un principe de moindre action. Nous noterons S_g l'action du champ de gravitation. Puisque notre objectif est d'obtenir les équations du champ, nous effectuerons la variation par rapport aux potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ [15]. Par ailleurs, pour déterminer S_g il doit être un invariant intégral formé à partir d'un scalaire², qui peuvent prendre la forme suivante :

$$S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2\chi} \int_M \Lambda_g \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.7)$$

où $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ la constante gravitationnelle d'Einstein est la constante de couplage, G la constante de gravitation de Newton³, c la vitesse de la lumière et g est le déterminant de la métrique.

L'intégrale est étendue à tout l'espace et entre deux valeurs de la composante temporelle x^0 . Λ_g désigne la densité lagrangienne du champ de gravitation. Elle est construite avec les potentiels $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées.

Par analogie avec les équations newtoniennes de la gravitation, il est naturel de chercher les équations du champ sous forme d'équations différentielles du second ordre par rapport aux potentiels⁴. Comme les équations du champ sont obtenues par variation de l'action, Λ_g ne doit contenir que les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premières $\partial_\rho g_{\mu\nu}$.

2. Considérons le cas particulier d'une densité scalaire $\Lambda\sqrt{-g}$ qui permet d'avoir la forme suivante :

$$\int_M \Lambda\sqrt{-g} d^4x = \int_M \Lambda'\sqrt{-g'} d^4x', \quad (1.5)$$

soit $g' = gJ^2$ où $J = \left\| \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) \right\|$ désigne le jacobien de la transformation faisant passer des x^μ aux x'^μ , il peut être relié simplement au déterminant g du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$.

Pour montrer la relation précédente, en utilisant la transformation de JACOBI : $dx'^4 = J dx^4$, et le fait que la valeur d'un scalaire est indépendante du système de coordonnées $\Lambda = \Lambda'$, il vient

$$\int_M \Lambda\sqrt{-g} d^4x = \int_M \Lambda \frac{\sqrt{-g'}}{J} d^4x = \int_M \Lambda \frac{\sqrt{-g'}}{J} J d^4x' = \int_M \Lambda' \sqrt{-g'} d^4x'. \quad (1.6)$$

Lorsque l'intégrale $\int_M \Lambda\sqrt{-g} d^4x$ mesure la quantité d'une substance qui remplit le domaine d'intégration, Λ s'identifie à la densité de cette substance, d'où le nom de densité donné à Λ .

3. $G = 6,673 \cdot 10^{-11} : m^3 : kg^{-1} : s^{-2}$ dans les unités standards.

4. Rappelons qu'en théorie newtonienne, le potentiel de gravitation vérifie l'équation de Poisson : $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ (où Δ désigne le laplacien). C'est une équation différentielle du second ordre en ϕ . De même, les équations de l'électromagnétisme (équation de Maxwell) sont des équations différentielles du second ordre par rapport aux potentiels.

Toutefois aucun scalaire Λ_g n'est formé à partir des $g_{\mu\nu}$ et des $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ⁵. Par contre, il existe un scalaire qui contient les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$, mais il ne les contient que linéairement, c'est la courbure scalaire R de Riemann. C'est d'ailleurs le seul invariant de cette espèce.

En utilisant l'expression de la courbure Riemannienne R , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho + g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho\right).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Modifions les deux premiers termes du dernier membre de (1.8) en utilisant les égalités suivantes (dérivation d'un produit) :

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}), \quad (1.9)$$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho = \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\rho) - \Gamma_{\mu\rho}^\rho\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}). \quad (1.10)$$

Intégrons l'égalité (1.8) et compte tenu des égalités (1.9) and (1.10) on trouve

$$\begin{aligned}\int_M R\sqrt{-g}d^4x &= \int_M \left[\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - (\Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma)\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &\quad + \int_M \left[\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\rho) \right] d^4x, \\ &= \int_M \Lambda_g\sqrt{-g}d^4x + \int_M \partial_\rho(\sqrt{-g}A^\rho)d^4x.\end{aligned}\quad (1.11)$$

La dernière égalité définit Λ_g et A^μ . L'expression de A^μ est obtenue après un changement d'indices muets $(\nu, \rho) \rightarrow (\rho, \nu)$:

$$A^\rho = g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\nu. \quad (1.12)$$

L'intégrale contenant A^μ disparaît lors de la variation, en effet le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire :

$$\int_M \partial_\rho(\sqrt{-g}A^\rho)d^4x = \int_{\partial M} \sqrt{-g}A^\rho dS_\rho. \quad (1.13)$$

Nous pouvons réécrire (1.11) en tenant compte de (1.13) on écrit :

5. Les quantités $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ sont appelées symboles de Christoffel

$$\int_M R \sqrt{-g} d^4x = \int_M \Lambda_g \sqrt{-g} d^4x + \int_M \sqrt{-g} A^\mu dS_\mu. \quad (1.14)$$

Maintenant, il nous reste à trouver l'expression de Λ_g et A^μ ;

$$\Lambda_g \sqrt{-g} = \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - (\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Pour cela nous allons transformer les deux premiers termes du second membre de (1.15) :

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= \partial_\nu (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \partial_\nu (g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\nu (g_{\rho\sigma}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \partial_\nu (g^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

ou par dérivation de $g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma}$, on obtient $\partial_\nu g^{\mu\nu} = -g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma}$ donc

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= \partial_\nu (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \partial_\nu (g^{\mu\nu}) \\ &= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\nu (g_{\rho\sigma}) g^{\mu\nu} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma} \right) \\ &= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \partial_\sigma (g_{\nu\rho}) - \frac{1}{2} g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \partial_\rho g_{\nu\sigma} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\sigma (g_{\nu\rho}) - g^{\mu\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \\ &= -\sqrt{-g} g^{\nu\rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu. \end{aligned} \quad (1.16)$$

D'après le théorème de Ricci⁶ et d'après :

$$\partial_\rho (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \partial_\rho g = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (1.18)$$

On a :

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \partial_\rho (\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \partial_\rho g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - g^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^\mu - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^\nu). \quad (1.19)$$

Compte tenu de (1.16) et (1.19), il vient :

6. Prenons la dérivée covariante des composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique,

$$\begin{aligned} D_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \\ &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho,\nu} - \Gamma_{\nu\rho,\mu} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

donc la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle, ce résultat est connu sous le nom du **théorème de Ricci**

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \partial_{\rho} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \\
&= \sqrt{-g} \left(-g^{\nu\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} + g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} + g^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} \right) \\
&= \sqrt{-g} \left(2g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} - g^{\nu\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right), \tag{1.20}
\end{aligned}$$

de sorte que finalement on trouve :

$$\begin{aligned}
\Lambda_g &= \left(2g^{\sigma\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} - g^{\nu\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right) - \left(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right) g^{\mu\nu} \\
&= g^{\mu\nu} \left[2 \left(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right) - \left(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right) \right], \tag{1.21}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\Lambda_g = \left(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \right) g^{\mu\nu}. \tag{1.22}$$

En effectuant la variation de chaque membre de l'égalité (1.14), on obtient

$$\delta \int_M R \sqrt{-g} d^4x = \delta \int_M \Lambda_g \sqrt{-g} d^4x. \tag{1.23}$$

En effet, la variation du champ $\delta \int_{\partial M} \sqrt{-g} A^{\rho} dS_{\rho} = 0$ étant nulle sur la frontière d'intégration, donc la deuxième intégration du membre de droite de la relation (1.14) disparaît lors de l'application du principe de moindre action.

Pour établir les équations du champ de gravitation, nous devons procéder à la variation de l'action par rapport aux potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$. Or d'après ce qui vient d'être dit :

$$S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M R \sqrt{-g} d^4x, \tag{1.24}$$

où R peut être exprimée à l'aide du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, donc :

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M \delta(R \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2\chi} \int_M \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) d^4x, \tag{1.25}$$

soit :

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M \left[\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \right] d^4x. \tag{1.26}$$

Évaluons successivement chaque intégrale du second membre donc :

$$\begin{aligned}
\delta S_g &= \frac{1}{2\chi} \int_M \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) R + \sqrt{-g} \delta (g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) \right] d^4x \\
&= \frac{1}{2\chi} \int_M \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2\chi} \int_M \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^4x. \quad (1.27)
\end{aligned}$$

Le tenseur de Ricci étant basé uniquement sur les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, donc on peut calculer sa variance :

$$\begin{aligned}
\delta (R_{\mu\nu}) &= \delta \left(\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) \\
&= \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\sigma\rho}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right) - \delta \left(\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \delta \left(\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right).
\end{aligned}$$

puisque $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ est la différence de deux symboles de Christoffel, il s'agit d'un tenseur, avec lequel nous pouvons calculer la dérivée variable.

$$\begin{aligned}
D_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) &= \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\sigma\rho}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta \left(\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \delta \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \\
D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) &= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \delta \left(\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\nu\rho}^\sigma,
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'identité de Palatini :

$$\begin{aligned}
D_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) &= \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\sigma\rho}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta \left(\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \delta \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \\
&\quad - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \delta \left(\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \delta \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \\
&= \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \delta \left(\Gamma_{\sigma\rho}^\rho \right) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \delta \left(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right) \\
&\quad - \delta \left(\Gamma_{\nu\sigma}^\rho \right) \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \delta \left(\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) \\
&= \delta R_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Donc nous pouvons maintenant écrire en remplaçant $\delta R_{\mu\nu}$ par son expression

$$\begin{aligned}
\int_M \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^4x &= \int_M \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [D_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho)] d^4x \\
&\stackrel{7}{=} \int_M \sqrt{-g} [D_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - D_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho)] d^4x \\
&= \int_M \sqrt{-g} D_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - D_\rho (g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) d^4x \\
&= \int_M \sqrt{-g} D_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) d^4x
\end{aligned}$$

Quand on considère l'expression entre parenthèses, on remarque que les indices μ et ν s'annulent, de sorte qu'on se retrouve avec un tenseur rang 1, donc un vecteur

$$B^\rho = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu$$

De sorte qu'il nous reste l'expression intégrale suivante :

$$\int_M \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^4x = \int_M \sqrt{-g} D_\rho B^\rho d^4x$$

qui peut être convertie en une intégrale de surface par le théorème de Green-Ostrogradski. Donc :

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M G_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2\chi} \int_{\partial M} \sqrt{-g} B^\rho dS_\rho$$

Avec $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, la dernière intégrale du second membre est nulle puisqu'elle est calculée sur l'hypersurface délimitant le volume d'intégration, or conformément au principe de moindre action, les variations du champ sont prises nulles sur la frontière d'intégration. Comme on le sait par le principe de moindre action, la variation d'action nécessite alors $\delta S_g = 0$, donc

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \int_M \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (1.28)$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit finalement les équations du champ de gravitation :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (1.29)$$

Ce sont les équations d'Einstein de la relativité générale dans le cas extérieur dans le vide.

Les $R_{\mu\nu}$ et R contiennent les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premières et secondes, la résolution de l'équation d'Einstein permet donc de déterminer les $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire les potentiels de gravitation ou la métrique de l'espace temps.

Remarquons que le tenseur $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ est symétrique. Il n'y a donc que dix équations distinctes parmi les 16 composantes. Par ailleurs les dix équations restantes ne sont pas indépendantes car elles satisfont de plus à quatre identités exprimant la nullité du tenseur

7. On utilise le théorème de Ricci : $D_\rho g^{\mu\nu} = 0$.

d'Einstein, à savoir : $D_\nu G^\nu_\mu = 0$, donc Les équations d'Einstein (1.29) forment six équations indépendantes qui déterminent les six composantes indépendantes de $g_{\mu\nu}$.

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés aux équations du champ dans le vide. Si nous considérons maintenant un espace-temps qui n'est pas vide mais contient de la matière c'est à dire dans les cas intérieur, on suppose que l'action totale de la théorie soit donnée par la somme de l'action de la gravitation S_G et l'action pour la matière-énergie S_{ME} . Cette nouvelle action pourrait être écrite comme ce suit :

$$\delta(S_G + S_{ME}) = 0$$

Nous allons d'abord déterminer le nouveau terme δS_{ME} en écrivant S_{ME} sous la forme :

$$S_{ME} = \int_M \Lambda_{ME} \sqrt{-g} d^4x$$

Le terme sera relié au tenseur impulsion-énergie, il conduira à la présence d'un second membre dans les équations d'Einstein qui feront intervenir ce tenseur. Maintenant nous effectuons le calcul de δS_{ME} :

$$\delta S_{ME} = \delta \int_M \Lambda_{ME} (g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x,$$

Il vient :

$$\delta \int_M \Lambda_{ME} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{c} \int_M \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right] d^4x \quad (1.30)$$

Intégrons par partie le deuxième terme du second membre, ce qui revient à utiliser l'égalité :

$$\partial_\lambda \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] = \partial_\lambda \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu})$$

Alors l'équation (1.30) devient

$$\delta S_{ME} = \int_M \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x + \partial_\lambda \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x \quad (1.31)$$

Compte tenu du théorème de Green-Ostrogradski, la deuxième intégrale peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_M \partial_\lambda \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x &= \int_M \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x \\ &= \int_{\partial M} \sqrt{-g} \frac{\partial \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} dS_\lambda = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

La dernière égalité vient de ce que les variations $\delta g^{\mu\nu}$ s'annulent aux frontières d'intégrations. On définit donc le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ par la relation suivante :

$$\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda_{ME}}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) \quad (1.33)$$

Compte tenu de (1.32) et (1.33), l'égalité (1.31) devient,

$$\delta S_{ME} = \int_M \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (1.34)$$

Finalement, la condition $\delta(S_G + S_{ME}) = 0$ s'écrit, compte tenu de la relation (1.28) et de la relation (1.34) comme suit :

$$-\frac{1}{2\chi} \int_M [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \chi T_{\mu\nu}] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0$$

Cette égalité doit être valable pour des variations arbitraires $\delta g^{\mu\nu}$, on en déduit alors :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.35)$$

La relativité générale, mise au point en grande partie par Einstein au début du siècle dernier [6], permet de décrire l'influence de la matière sur l'espace-temps et réciproquement (voir la figure (1.1)). Ce sont les équations d'Einstein de la relativité générale dans le cas intérieur⁸.

8. Bien entendu, lorsque l'on tient compte du terme cosmologique, ces équations deviennent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Cependant, cette action d'Einstein-Hilbert n'est pas la seule action possible, et il existe d'autres formulations possibles qui donnent les mêmes résultats, comme l'action de Plebanski et l'action de Palatini, nous le mentionnons ici principalement pour l'élaboration de nos conventions, ainsi que pour permettre une comparaison avec la formalisme que nous allons proposer dans la partie suivante.

1.1.2 Formulation par tétrade

Cette partie décrit le formalisme tétrade de la relativité générale.

1. Pourquoi les tétrades? Parce que la physique est plus claire dans un cadre localement inertiel que dans un cadre de coordonnées.

2. L'objet primitif dans le formalisme tétrade est le vierbein (quatre-pattes) e^{α}_{μ} , à la place de la métrique dans le formalisme de coordonnées.

3. Écrire de manière appropriée une métrique ds^2 encode non seulement les coefficients métriques $g_{\mu\nu}$, mais également un vierbein complet par l'intermédiaire de e^{α}_{μ} et e^{β}_{ν} .

4. Dans le formalisme tétrade, la dérivée dirigée ∂_{α} est l'analogue de la dérivée partielle des coordonnées $\partial/\partial x^{\mu}$ du formalisme des coordonnées. Les dérivées dirigées ∂_{α} ne commutent pas, alors que les dérivées des coordonnées $\partial/\partial x^{\mu}$ commutent.

Pour déduire les effets de la gravitation sur les systèmes physiques, nous avons jusqu'ici suivi le principe de covariance : écrire les équations relativistes restreintes appropriées qui décrivent le système physique en l'absence de la gravitation, ensuite remplacer $\eta_{\alpha\beta}$ par $g_{\alpha\beta}$ et toutes les dérivées par des dérivées covariantes. Les équations résultantes seront généralement covariantes et vraies en présence des champs gravitationnels. Cependant, cette méthode ne fonctionne réellement que pour les objets qui se comportent comme des vecteurs ou des tenseurs se transformant comme des représentations du groupe de Lorentz $SO(3,1)$, et non pas pour les champs spinoriels. Nous verrons que le formalisme de tétrade est utile pour incorporer les champs spinoriels, ce formalisme est essentiellement différent du problème de la détermination des effets gravitationnels sur les systèmes physiques. En tant que formalisme plutôt qu'une théorie, il ne fournit pas de prédictions différentes, mais permet d'exprimer différemment les équations pertinentes. En relativité générale, les méthodes à base de coordonnées fournissent une procédure simple pour calculer de nombreuses quantités telles que, par exemple, D_{α} et $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$. Il est parfois avantageux d'utiliser une base orthonormée dans les calculs des tenseurs. Rappelons-nous qu'une base de coordonnées $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ n'est orthonormée que dans le cas trivial d'espace-temps plat. Les tétrades sont des vecteurs de base qui transforment la métrique en

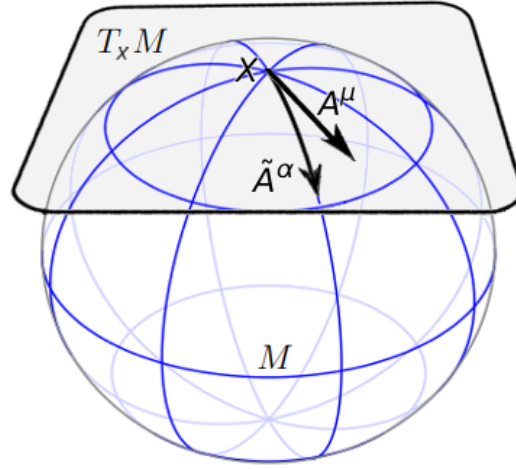


Figure 1.2 – Schéma représentant le plan tangent $T_x M$ à une sphère M en un point X . Un vecteur $A^\mu(x)$ dans le référentiel Lorentzien est transporté sur un vecteur $\tilde{A}^\alpha(x)$ de la sphère grâce à la tétrade.

une structure de Minkowski. Leur intérêt devient marquant si nous nous arrêtons un peu sur l'interprétation de l'équation ci-dessus relative au tenseur métrique (1.36). En raison du principe d'équivalence d'Einstein⁹, à chaque point X , nous pouvons faire correspondre un ensemble de coordonnées ξ_X^α localement inertielles en X . En effet, nous avons vu que la surface d'une sphère est localement plate (voir Figure (1.2) pour une illustration sur la sphère). C'est en réalité le cas de tout espace-temps¹⁰. Notons que nous pouvons créer un système de coordonnées inertielles qui est localement inertiel partout, seulement si l'espace-temps est plat, la tétrade est définie localement, et non globalement. En chaque point, elle permet de transformer tout objet exprimé dans le référentiel plat local vers l'espace-temps réel qui est courbe. Comme indiqué dans [16] la métrique générale du système de coordonnées non inertielles est donnée par :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \left. \frac{\partial \xi_X^\alpha}{\partial x^\mu} \right|_{x=X} \left. \frac{\partial \xi_X^\beta}{\partial x^\nu} \right|_{x=X} \eta_{\alpha\beta} \\ &= e^\alpha{}_\mu(X) e^\beta{}_\nu(X) \eta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.36)$$

9. En effet, rendre la métrique plate en un point x revient à trouver un *référentiel inertiel* en ce point, ce qui est toujours possible.

10. Le terme d'espace tangent est en réalité déjà utilisé en géométrie différentielle pour *définir* tout vecteur ou tenseur. En effet, dans ce formalisme, on dit que l'espace-temps est une *variété*, qui est une structure bien moins forte que celle de l'espace vectoriel. On introduit alors un espace tangent en chaque point, dans lequel on définit nos vecteurs et tenseurs. Ainsi, de ce point de vue, tout vecteur "de l'espace-temps" fait aussi partie d'un espace tangent. La seule différence entre ces deux espaces tangents est leur métrique, plate pour l'un, et potentiellement courbe pour l'autre.

où $e^\alpha{}_\mu(X) := \left. \frac{\partial \xi_X^\alpha}{\partial x^\mu} \right|_{x=X}$. Si nous voulons changer nos coordonnées non inertielles de x^μ à x'^μ les dérivées partielles $e^\alpha{}_\mu$ se transforment conformément à la règle :

$$e^\alpha{}_\mu \rightarrow e'^\alpha{}_\mu = \frac{\partial \xi_X^\nu}{\partial x'^\mu} e^\alpha{}_\nu = \Lambda^\nu{}_\alpha e^\alpha{}_\nu. \quad (1.37)$$

avec $\Lambda \in \text{SO}(3,1)$, on a alors :

$$\begin{aligned} e'^\alpha{}_\mu(\mathbf{x}) e'^\beta{}_\nu(\mathbf{x}) \eta_{\alpha\beta} &= e^\gamma{}_\mu(\mathbf{x}) e^\delta{}_\nu(\mathbf{x}) \Lambda^\alpha{}_\gamma \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\delta = e^\gamma{}_\mu(\mathbf{x}) e^\delta{}_\nu(\mathbf{x}) \eta_{\gamma\delta} \\ &= g_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.38)$$

et cela montre que les deux tétrades $e^\alpha{}_\mu$ et $e'^\alpha{}_\mu$ décrivent la même métrique, et sont donc équivalentes. Le groupe de Lorentz peut alors être vu comme groupe de jauge de la relativité générale : on a, en chaque point, une certaine liberté au niveau du choix du référentiel inertiel.

On peut penser à $e^\alpha{}_\mu$ comme formant quatre champs de vecteurs covariants, plutôt qu'un seul tenseur. Cet ensemble de quatre vecteurs est connu sous le nom de tétrade ou vierbein. Maintenant, étant donné que pour tout champ de vecteur contravariant $A^\mu(\mathbf{x})$, nous pouvons utiliser la tétrade pour référencer ses composantes en \mathbf{x} vers le système de coordonnées ξ_X^α localement inertiel en \mathbf{x} (voir figure (1.2)) :

$$\tilde{A}^\alpha(\mathbf{x}) = e^\alpha{}_\mu(X) A^\mu(\mathbf{x})$$

Nous avons contracté sur un vecteur contravariant $A^\mu(\mathbf{x})$ avec quatre vecteurs covariants $e^\alpha{}_\mu(X)$, ce qui consiste à remplacer le vecteur unique $A^\mu(\mathbf{x})$ par les quatre scalaires $\tilde{A}^\alpha(\mathbf{x})$. Nous pouvons faire le même choix pour les champs de vecteurs covariants et les champs de tenseurs généraux comme suit :

$$\tilde{A}_\alpha \equiv e_\alpha{}^\mu A_\mu, \quad (1.39)$$

$$\tilde{T}^\alpha{}_\beta \equiv e^\alpha{}_\mu e_\beta{}^\nu T^\mu{}_\nu, \quad (1.40)$$

où $e_\beta{}^\nu$ est la tétrade $e^\alpha{}_\mu$ avec l'indice- α abaissé avec le tenseur de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ et l'indice- μ augmenté avec le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ comme ce suit

$$e_\beta{}^\nu = \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} e^\alpha{}_\mu \quad (1.41)$$

En utilisant la définition de $e_\beta{}^\nu$ et l'équation (1.36), on obtient facilement

$$e_{\beta}^{\mu} e^{\beta}_{\nu} = \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} e^{\alpha}_{\nu} e^{\beta}_{\nu} = g_{\nu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (1.42)$$

et de façon analogue

$$e^{\alpha}_{\mu} e^{\beta\mu} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (1.43)$$

En utilisant la définition de e^{α}_{μ} et e^{β}_{ν} , les composantes scalaires du tenseur métrique sont alors :

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{\mu}_{\alpha} e^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.44)$$

Notons que nous aurions pu aussi commencer à définir la tétrade à partir de l'équation (1.44). Nous allons maintenant montrer comment transformer n'importe quel champ de tenseurs en un ensemble de scalaires. Comme mentionné au début de ce chapitre, le formalisme tétrade sera utile pour incorporer des champs de spineurs, comme le champ spinoriel décrivant l'électron $1/2$ de Dirac.

Le principe d'équivalence exige que la relativité restreinte s'applique aux cadres localement inertiels et qu'elle ne fasse aucune différence avec le cadre localement inertiel choisi. Ainsi, lorsque nous passons d'un cadre inertiel local d'un point à un autre au même point, les champs se transforment par rapport à une transformation de Lorentz $\Lambda^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{x})$ comme suit

$$\tilde{A}^{\alpha}(\mathbf{x}) = \Lambda^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{x}) \tilde{A}^{\beta}(\mathbf{x}) \quad (1.45)$$

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \Lambda^{\gamma}_{\alpha}(\mathbf{x}) \Lambda^{\delta}_{\beta}(\mathbf{x}) \tilde{T}_{\gamma\delta}(\mathbf{x}), \quad (1.46)$$

où

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}_{\alpha}(\mathbf{x}) \Lambda^{\delta}_{\beta}(\mathbf{x}) \eta_{\gamma\delta}. \quad (1.47)$$

Le tenseur $\eta_{\alpha\beta}$ satisfait la transformation de Lorentz. Notons que la transformation de Lorentz dépend de la position et n'est donc pas une constante. La tétrade change selon la même règle que \tilde{A}^{α} . Nous allons maintenant donner l'équivalent du formalisme présenté dans la section précédente, mais exprimé dans ce nouvel espace, nous définissons la connexion de spin (ou connexion Lorentzienne) $\omega^a_{\mu b}$ à partir de la connexion de Levi-Civita

$$\omega^a_{\mu b} = e^a_{\nu} \nabla_{\mu} e_b^{\nu}, \quad (1.48)$$

où la dérivée covariante $\nabla_{\mu} e_b^{\nu}$ est donnée par, voir [16]

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} e_b^{\nu} &= \nabla_{\partial/\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \xi_b \right) \\ &= \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \xi_b + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \xi_b \right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} e_b^{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} e_b^{\nu} \\
&= \partial_{\mu} e_b^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} e_b^{\sigma},
\end{aligned} \tag{1.50}$$

et donc l'équation (1.48) devient

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu b}^a &= e^a_{\nu} \nabla_{\mu} e_b^{\nu} \\
&= e^a_{\nu} (\partial_{\mu} e_b^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} e_b^{\sigma}) \\
&= -e_b^{\nu} \partial_{\mu} e^a_{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} e^a_{\nu} e_b^{\sigma} \\
&= -e_b^{\sigma} (\partial_{\mu} e^a_{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} e^a_{\nu}),
\end{aligned} \tag{1.51}$$

où nous avons utilisé l'identité $e^a_{\nu} e_b^{\nu} = \delta^a_b$ pour calculer

$$e^a_{\nu} \partial_{\mu} e_b^{\nu} = \partial_{\mu} (e^a_{\nu} e_b^{\nu}) - e_b^{\nu} \partial_{\mu} e^a_{\nu}.$$

Notons également que \mathbf{a} , \mathbf{b} ne sont pas des indices de tenseur, ils ne se transforment pas correctement sous les transformations de Lorentz. Il s'ensuit également que

$$\nabla_{\mu} e_b^{\nu} = \omega_{\mu b}^c e_c^{\nu}.$$

Cette relation peut être vérifiée à travers la définition de 1-forme $\omega_{\mu b}^c$ qui peut s'écrire :

$$e^a_{\nu} \nabla_{\mu} e_b^{\nu} = e^a_{\nu} \omega_{\mu b}^c e_c^{\nu} = \delta^a_c \omega_{\mu b}^c = \omega_{\mu b}^a$$

Notons enfin que les indices μ , ν sont élever ou abaisser avec $g_{\mu\nu}$ et es indices internes α , β (ou \mathbf{a} , \mathbf{b}) qu'on peut élever et rabaisser par la métrique Lorentzienne $\eta_{\alpha\beta}$.

À partir de cette connexion, on peut alors définir la 2-forme de courbure associée à ω , appelé tenseur de courbure équivalent du tenseur de Riemann :

$$F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^{ab} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{ab} + \omega_{\mu}^{ac} \eta_{cd} \omega_{\nu}^{db} - \omega_{\mu}^{bc} \eta_{cd} \omega_{\nu}^{da}, \tag{1.52}$$

La 2-forme de courbure est invariante si la connexion subit une transformation de jauge

$$\omega_{\mu\beta}^{\alpha} \rightarrow \omega_{\mu\beta'}^{\alpha'} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \omega_{\mu\beta}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} + \Lambda_{\beta'}^{\gamma} \partial_{\mu} \Lambda_{\gamma}^{\alpha'}$$

En utilisant la solution $\omega(\mathbf{e})$ de l'axiome du tétrade (1.48), nous pouvons ré-exprimer cette dernière équation en fonction du tenseur de Riemann :

$$F_{\mu\nu}^{ab} \stackrel{11}{=} e^{a\rho} e^{b\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.53)$$

où $R_{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{e})$ est le tenseur de Riemann construit à partir de la métrique définie par la tétrade \mathbf{e}_μ^a . Cette relation est connue sous le nom d'équation de seconde structure de Cartan. Il montre que la relativité générale est une théorie de jauge dont le groupe de jauge local est le groupe de Lorentz et que le tenseur de Riemann n'est autre que la force du champ de la connexion de spin.

Le déterminant g de $g_{\mu\nu}$ est lié au déterminant de la tétrade \mathbf{e} par la relation simple

$$g \equiv \det[g_{\mu\nu}] \stackrel{12}{=} -\det[e_\mu^a]^2 \equiv -e^2. \quad (1.54)$$

Pour en conclure, l'action d'Einstein-Hilbert (que l'on appelle, ainsi formulée, l'action de Palatini voir [17]) peut être réécrite dans ce formalisme. Cette action d'Einstein-Hilbert [18]

11. Deuxième équation de structure de Cartan en partant de la définition de F dans (1.52) et en insérant (1.51), on a

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{ab} = & \partial_\mu e_\rho^a \partial_\nu e^{\rho b} + \partial_\mu e_\rho^a \Gamma_{\sigma\nu}^\rho e^{\sigma b} + e_\rho^a \partial_\mu (\Gamma_{\sigma\nu}^\rho) e^{\sigma b} + e_\rho^a \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \partial_\mu e^{\sigma b} + e_\rho^a \partial_\mu e_c^\rho e_c^\sigma \partial_\nu e^{\sigma b} + \\ & + e_\rho^a \Gamma_{\delta\mu}^\rho e_c^\delta e_c^\sigma \partial_\nu e^{\sigma b} + e_\rho^a \partial_\mu e_c^\rho e_c^\sigma \Gamma_{\delta\nu}^\sigma e^{\delta b} + e_\rho^a \Gamma_{\delta\mu}^\rho e_c^\delta e_c^\sigma \Gamma_{\eta\nu}^\sigma e^{\eta b} - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite $e_\rho^a e_c^\rho = \delta_c^a$ et $e_\rho^a \partial_\mu e_c^\rho = -\partial_\mu (e_\rho^a) e_c^\rho$ pour réécrire cette expression en tant que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{ab} = & e_\rho^a e^{\sigma b} \partial_\mu (\Gamma_{\sigma\nu}^\rho) + e_\rho^a e^{\sigma b} \Gamma_{\delta\mu}^\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\delta + \partial_\mu e_\rho^a \partial_\nu e^{\rho b} - \partial_\mu e_\rho^a \partial_\nu e^{\rho b} + \\ & + \partial_\mu e_\rho^a \Gamma_{\sigma\nu}^\rho e^{\sigma b} - \partial_\mu e_\rho^a \Gamma_{\sigma\nu}^\rho e^{\sigma b} + e_\rho^a \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \partial_\mu e^{\sigma b} + e_\rho^a \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \partial_\nu e^{\sigma b} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ = & 2e_\rho^a e^{b\sigma} (\partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \Gamma_{\delta(\mu}^\rho \Gamma_{\sigma\nu)}^\delta) = e^{a\rho} e^{\sigma b} R_{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{e}). \end{aligned}$$

12. Cette expression peut être facilement dérivée en vertu la formule de Cayley pour le déterminant d'une matrice,

$$g = \det g_{\mu\nu} = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta}. \quad (1.55)$$

Si nous exprimant $g_{\mu\nu}$ en termes de tétrades, nous obtenons

$$\begin{aligned} g = \det(e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}) &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} e_\mu^a e_\alpha^b \eta_{ab} e_\nu^c e_\beta^d \eta_{cd} e_\rho^m e_\gamma^n \eta_{mn} e_\sigma^o e_\delta^p \eta_{op} = \\ &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^a e_\nu^c e_\rho^m e_\sigma^o \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} e_\alpha^b e_\beta^d e_\gamma^n e_\delta^p \eta_{ab} \eta_{cd} \eta_{mn} \eta_{op} = \\ &= \frac{1}{4!} e^2 \epsilon^{acmo} \epsilon^{bdnp} \eta_{ab} \eta_{cd} \eta_{mn} \eta_{op} = -e^2 \end{aligned}$$

n'est cependant pas la seule action possible, il existe d'autres formulations possibles donnant les mêmes résultats, comme l'action de Plebanski. Réécrivons les actions en termes de tétrades, en utilisant explicitement (1.53) et (1.54)

$$\begin{aligned}
S_{EH}(g_{\mu\nu}(e)) &= \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2\chi} \int d^4x e e_a^\mu e^{\nu a} R_{\mu\rho\nu\sigma} e_b^\rho e^{\sigma b} \\
&= \frac{1}{2\chi} \int d^4x e e_a^\mu e_b^\rho F_{\mu\rho}^{ab}(\omega(e)) \\
&= \frac{1}{2\chi} \int d^4x \frac{1}{4} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta} e_a^c e_b^d F_{\mu\rho}^{ab}(\omega(e)) \\
&= \frac{1}{4\chi} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge F^{cd}(\omega(e))
\end{aligned} \tag{1.56}$$

L'action d'Einstein-Hilbert peut être réécrite en fonction de la tétrade de la manière suivante :

$$S(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}) = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \int e^a \wedge e^b \wedge F^{cd}(\omega). \tag{1.57}$$

En plus de l'invariance sous difféomorphisme, cette reformulation de la théorie possède une symétrie de jauge supplémentaire sous les transformations de Lorentz locales. Un fait qui joue un rôle crucial dans ce qui suit est que nous pouvons lever la connexion pour qu'elle soit une variable indépendante et considérer la nouvelle action.

$$S(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}) = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \int e^a \wedge e^b \wedge F^{cd}(\omega). \tag{1.58}$$

Bien que cela dépend des champs supplémentaires, cette action donne remarquablement les mêmes équations de mouvement que celle d'Einstein-Hilbert (1.56). Cela est dû au fait que les équations des champs supplémentaires provenant de la variation de l'action par rapport à ω n'ajoutent rien de nouveau : elles imposent simplement la forme (1.48) de la connexion de spin et la relativité générale est ainsi retrouvée.

Nous aurons également besoin des expressions de l'aire d'une surface S , nous partons de la définition standard de l'aire en termes de métrique :

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{\det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right)} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.59)$$

En utilisant la notation $\partial_1 x^a = \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1}$

$$\begin{aligned} \det\left(g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^\beta}\right) &= g_{ab} g_{cd} [\partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d - \partial_1 x^a \partial_2 x^b \partial_1 x^c \partial_2 x^d] \\ &= g_{ab} g_{cd} 2 \partial_1 x^a \partial_1 x^{[b} \partial_2 x^{c]} \partial_2 x^d \\ &= 2 g_{a[b} g_{c]d} \partial_1 x^a \partial_1 x^b \partial_2 x^c \partial_2 x^d \\ &= g g^{ef} n_e n_f \end{aligned} \quad (1.60)$$

Où nous avons reconnu que :

$$g_{a[b} g_{c]d} = \frac{1}{2} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf} g g^{ef} \quad (1.61)$$

Avec $n_e = \epsilon_{eab} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2}$ le vecteur normal à la surface. En utilisant la définition du tétrade, nous avons :

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{e^2 e_i^e e^f i_n e n_f} \quad (1.62)$$

ainsi que le volume d'une région R , qui s'exprime simplement :

$$V = \int_R \det[e_a^i] d^3 x. \quad (1.63)$$

où, comme pour l'expression avec la métrique, e_a^i est la restriction de la tétrade aux coordonnées nécessaires pour décrire le volume considéré qu'on appelle aussi triade ou drierbein, et qui sera ultérieurement étudiée plus en détail.

Nous arrivons enfin à une nouvelle présentation de la relativité générale et du formalisme que nous allons utiliser. Dans les sections qui vont suivre, maintenant, nous allons exposer brièvement les principes fondamentaux de la mécanique quantique ainsi que la méthode de quantification canonique.

1.2 Mécanique Quantique

1.2.1 Axiomes de la mécanique quantique

La mécanique quantique [19–22] est une théorie axiomatique car elle repose sur peu de principes, ou axiomes. Il n’y a pas de consensus sur le nombre d’axiomes nécessaires pour décrire le formalisme de la mécanique quantique, nous allons exposer ici les six axiomes de cette théorie si remarquable et qui n’as été jamais mise en défaut depuis son avènement. En nous inspirant de leur énoncé dans [19], les cinq premiers axiomes constituent la base mathématique de la mécanique quantique et le cinquième fournit un lien entre les mathématiques introduites par les quatre premiers et les résultats d’un processus de mesure.

Axiomes : la mécanique quantique

En règle générale, l’énoncé de chaque axiome sera suivi d’un commentaire, de sorte que la signification des termes contenus dans les axiomes soit donnée au bon moment, à savoir le moment où ils sont introduits.

➔ **Premier axiome :** Description d’un système physique

A chaque instant, l’état d’un système physique est représenté par un vecteur état, que l’on note généralement Ket $|\psi(t)\rangle$, et qui appartient à un espace des états. Noté \mathcal{H} , c’est un espace de Hilbert, muni d’un produit scalaire hermitien : $\langle \psi(t) | \varphi(t') \rangle = \langle \varphi(t') | \psi(t) \rangle^*$.

Cet axiome est déjà radical car il implique que la superposition de deux états est à nouveau un état du système. Si $|\psi_1(t)\rangle$ et $|\psi_2(t)\rangle$ sont des états possibles d’un système, il en est de même pour leur combinaison linéaire $|\psi(t)\rangle = \alpha_1 |\psi_1(t)\rangle + \alpha_2 |\psi_2(t)\rangle$.

➔ **Deuxième axiome :** Description mathématique d’une grandeur physique

Toute grandeur physique mesurable A est représentée par un opérateur linéaire self-adjoint \hat{A} agissant dans l’espace des états \mathcal{H} . On dit que \hat{A} est une observable quantique pour que l’opérateur \hat{A} soit attribuer a une grandeur physique il faut qu’il soit hermitien, ses vecteurs propres qui sont les $|\psi_i\rangle$ doivent formé une base orthonormé de l’espace des états \mathcal{H} . Chaque attribut observable d’un système physique est décrit par un opérateur est une application linéaire qui agit sur les Kets $|\psi_i(t)\rangle$ décrivant le système. Toute grandeur physique mesurable A est représentée par un opérateur

self-adjoint \hat{A} agissant dans l'espace des états dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . On dit \hat{A} est l'observable quantique. Formellement, $\hat{A} : |\psi_i\rangle \rightarrow |\psi'_i\rangle = \hat{A} |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$. La linéarité se traduit par la définition :

$$\hat{A} |\alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\hat{A} |\varphi\rangle + \beta\hat{A} |\psi\rangle.$$

➔ **Troisième axiome :** Mesure des grandeurs physique

Le seul résultat possible de la mesure de la grandeur physique A ne peut donner que l'une des valeurs propres de l'opérateur \hat{A} correspondant. Puisque nous ne mesurons que des nombres réels, il est nécessaire que les valeurs propres des opérateurs correspondant aux observables soient réelles. L'hermiticité des opérateurs est liée à ce fait

$$\hat{A} |\psi_{a_i}\rangle = a_i |\psi_{a_i}\rangle$$

Les états propres d'un opérateur hermitien ont les propriétés suivantes.

- Ils sont orthogonaux

$$\langle \psi_{a_i} | \psi_{a_j} \rangle \equiv (\psi_{a_i}, \psi_{a_j}) = \int d\mathbf{x} \psi_{a_i}^*(\mathbf{x}) \psi_{a_j}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}.$$

- Ils couvrent l'espace des états, ils forment donc une base de \mathcal{H} . Cela signifie qu'un état arbitraire peut être étendu en tant que somme des états propres d'un opérateur hermitien. Pour cette raison, nous disons que l'ensemble des états est «complet».

➔ **Quatrième axiome :** Principe de décomposition spectrale

Lorsqu'une mesure d'une observable \hat{A} est effectuée sur un état générique $|\psi\rangle$, la probabilité d'obtenir une valeur propre a_n est donnée par le carré du produit intérieur de $|\psi\rangle$ avec l'état propre $|a_n\rangle$, $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$.

Le nombre complexe, $\langle a_n | \psi \rangle$, est appelé «amplitude de probabilité » de mesurer la valeur a_n sur un système dans l'état $|\psi(\mathbf{t})\rangle$. Tout d'abord, tout état peut être étendu en tant que superposition d'états propres de \hat{A} ,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$$

Ensuite, nous utilisons l'orthonormalité des états propres \hat{A} pour trouver une expression pour les coefficients de décomposition c_n ,

$$\langle a_k | \psi \rangle = \sum_n c_n \langle a_k | a_n \rangle = \sum_n c_n \delta_{kn} = c_k$$

Ainsi, la composante de $|\psi\rangle$ le long de la "direction" du n ième état propre de \hat{A} est donnée par $\langle a_n | \psi \rangle$. L'opération de mesure donne le résultat a_n avec une probabilité proportionnelle au carré de cette composante, $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$.

La probabilité d'obtenir un résultat est l'unité. Pour les états normalisés à l'unité :

$$|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle a_m | a_n \rangle.$$

Utiliser $|\langle \psi | \psi \rangle| = 1$ et $\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$, on obtient $\sum_n |c_n|^2 = 1$

Selon les règles habituelles de probabilité, on peut calculer la «valeur attendue» de l'observable \hat{A} . Si la probabilité d'observer a_n est $|c_n|^2$ alors la valeur attendue (notée $\langle \hat{A} \rangle$) est

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n |c_n|^2.$$

Si la valeur propre a_n est dégénérée, alors elle correspond à plusieurs vecteurs propres $|a_n(t), r\rangle$, l'état se décompose comme $|\psi(t)\rangle = \sum_{n,r} c_{n,r} |a_n(t), r\rangle$ et la probabilité de mesurer a_n est donnée par $\sum_r |c_{n,r}|^2$.

➔ **Cinquième axiome :** Le concept de réduction du paquet d'onde

La mesure perturbe le système physique, si l'on effectue une mesure sur un système dont l'état est $|\psi(t)\rangle$ et qu'on obtient la valeur a_n , alors le système n'est plus dans l'état $|\psi(t)\rangle$ mais il se trouve dans l'état propre $|a_{n,r}(t)\rangle$ l'un des vecteurs propres associés à la valeur mesurée. On dit que la mesure détruit les interférences quantiques c'est le phénomène de réduction du paquet d'ondes. C'est l'un des axiomes les plus controversés de la mécanique quantique et le plus difficile à interpréter. Il est motivé par l'expérience de mesures répétées. Si un échantillon expérimental est préparé dans un état $|\psi\rangle$, il est alors observé qu'une mesure de \hat{A} peut produire divers résultats a_n avec des probabilités $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$. Des systèmes préparés de manière identique peuvent produire différents résultats expérimentaux.

➔ **Sixième axiome :** Évolution d'un système physique

L'évolution dans le temps d'un système quantique préserve la normalisation du ket associé. La dynamique de l'évolution de l'état d'un système quantique est décrite par $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$, pour un opérateur unitaire \hat{U} . L'évolution dans le temps de l'état quantique d'un système est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.64)$$

où l'opérateur \hat{H} est l'Hamiltonien du système, opérateur associé à l'énergie totale du système exprimée en fonction des coordonnées généralisé \mathbf{q} et leurs moments conjugués \mathbf{p} , et \hbar est la constante de Planck réduite^a. Une formulation alternative consiste à transférer la dépendance par rapport au temps aux observables plutôt qu'aux vecteurs état. L'équivalent de l'équation de Schrödinger est alors :

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t), \quad (1.65)$$

que l'on appelle équation de Heisenberg.

a. $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ : m}^2 \text{ : kg : s}^{-1}$ dans les unités standards.

Ces quelques axiomes permettent de mettre en œuvre une théorie dotée d'un grand pouvoir prédictive et qui a accumulé de plus en plus d'arguments expérimentaux en sa faveur durant toutes ces quatre-vingt-quatorze années depuis sa création. Le caractère fondamental de la mécanique quantique c'est sa conception probabiliste de la réalité et de la nature malgré les objections sérieuses de la part de grands noms de la physique comme L. De Broglie, J. L. Destouches, A. Einstein et ses fidèles disciples comme D. Bohm et J. Bell (Onde pilote, double solution, variables cachées et quantification fonctionnelle) [19, 20, 22].

1.2.2 Opérateurs de la mécanique quantique

le résultat d'une mesure est en général aléatoire, et donc impossible à prédire, mais les probabilités sont en revanche totalement déterminées. Ce fait a été perçu par beaucoup comme une faiblesse de la mécanique quantique, et le signe qu'il devait y avoir une autre théorie, plus fondamentale, qui permettrait de se passer de l'aléatoire. Rien ne permet pour l'instant de l'affirmer. L'autre concept important que nous a apporté la mécanique quantique est la notion d'observables incompatibles. Le second axiome indique en effet que toute grandeur physique est représentée par un opérateur. Or, rien ne dit que tous les opérateurs commutent entre eux, et ce n'est d'ailleurs pas le cas en général. Le rôle des observables compatibles et non compatibles en mécanique quantique peut être clarifié en introduisant le concept mathématique d'un commutateur de deux opérateurs.

Le commutateur de deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} est défini par :

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

C'est un concept utile dans les mathématiques des opérateurs car, comme nous allons le montrer, l'ordre dans lequel deux opérateurs agissent sur une fonction est important. En physique quantique sa valeur peut être utilisée pour déterminer si les observables sont compatibles ou non. Nous montrerons que deux observables A et B , décrits par les opérateurs \hat{A} et \hat{B} , sont incompatibles si

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

Cette déclaration générale est mieux comprise en réexaminant les états quantiques d'une particule dans une dimension et en trois dimensions.

Nous pouvons déterminer le commutateur des opérateurs de position \hat{x} , et de leurs moments conjugués¹³ les opérateurs impulsion \hat{p} pour une particule dans un espace unidimensionnelle en considérant

$$[\hat{x}, \hat{p}] \psi(x, t) = (\hat{x} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x}) \psi(x, t)$$

où $\psi(x, t)$ est une fonction d'onde quelconque de la particule. Ceci est non nul parce que l'ordre de \hat{x} et \hat{p} est important. Plus précisément, nous avons

$$\hat{x} \cdot \hat{p} \psi(x, t) = x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t)$$

et

$$\hat{p} \psi(x, t) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \psi(x, t) = -i\hbar \psi(x, t) + x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t),$$

pour que

$$[\hat{x}, \hat{p}] \psi(x, t) = (\hat{x} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x}) \psi(x, t) = i\hbar \psi(x, t)$$

Comme cela est vrai pour toute fonction d'onde $\psi(x, t)$, nous concluons que l'opération définie par $(\hat{x} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{x})$ est toujours une multiplication par le nombre $i\hbar$; en bref, nous concluons que le commutateur de \hat{x} et \hat{p} est

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{1.66}$$

Cette relation est si importante en mécanique quantique que l'on appelle relation de commutation canonique.

De plus, le degré de non-compatibilité de la position et de la quantité de mouvement, exprimé par le principe d'incertitude de Heisenberg, peut être obtenu à l'aide de la relation de commutation canonique (1.66). Pour bien comprendre cette dérivation, il faut connaître les propriétés des opérateurs hermitiens et une inégalité appelée inégalité de Schwartz.

13. Conjugué au sens de la mécanique analytique.

Les étapes clés de la dérivation du principe d'incertitude de Heisenberg sont les suivantes : Le carré de l'écart quadratique moyen, qui mesure la dispersion des mesures autour de la valeur moyenne, de la position et de l'impulsion d'une particule à fonction d'onde normalisée $\psi(\mathbf{x}, t)$ est donné par

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\widehat{\Delta x})^2 \psi dx \quad \text{et} \quad (\Delta p)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\widehat{\Delta p})^2 \psi dx,$$

où les opérations des dispersions quadratiques Δx et Δp sont les écarts des mesures pour un état $\psi(\mathbf{x}, t)$ quelconque, définis par :

$$\widehat{\Delta x} \equiv \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle \quad \text{et} \quad \widehat{\Delta p} \equiv \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle.$$

En utilisant la relation de commutation canonique (1.66), on peut facilement montrer que ces opérations des dispersions quadratiques sur la position et l'impulsion vérifient la relation de commutation

$$[\widehat{\Delta x}, \widehat{\Delta p}] = i\hbar \tag{1.67}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le résultat générale :

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* [\widehat{\Delta x}, \widehat{\Delta p}] \psi dx \right|^2,$$

Ainsi la relation précédente peut être simplifiée en utilisant la relation de commutation (1.67) et la condition de normalisation de la fonction d'onde ψ , nous avons donc :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ainsi, le principe d'incertitude de Heisenberg peut être dérivé en supposant que les observables de position et de moment sont décrites par des opérateurs qui obéissent à la relation de commutation canonique (1.66). Enfin, les développements en mécanique quantique montrent que certaines quantités que nous considérons comme continues en mécanique classique sont en fait des quantités discrètes, qui ne peuvent prendre qu'un ensemble discret de valeurs appelées quanta.

Nous allons maintenant voir l'une des méthodes possibles pour passer du formalisme "classique" à la formulation quantique qui lui est associée.

1.2.3 Quantification canonique

les équations de mouvement de la mécanique quantique, considérées d'un point de vue particulier, ressemblent à la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. Cette similitude a conduit à la seconde quantification pour deviner la description quantique des systèmes avec des formulations hamiltoniennes classiques. La seconde quantification est connu sous le nom de «quantification canonique» car il utilise la forme «canonique», c'est-à-dire hamiltonienne, forme de la mécanique classique. Bien que ce soit très utile et assez puissant, il est important de se rappeler qu'il ne donne qu'une première hypothèse quant à la formulation quantique. L'expérience est le seul moyen de comprendre la description complète de la mécanique quantique d'un système.

Il existe une analogie frappante entre les équations de mouvement pour les opérateurs dans l'image de Heisenberg et les équations classiques du mouvement de Hamilton sous forme de crochets de Poisson. Tout d'abord, résumons les équations quantiques du mouvement. Considérons un système à N degrés de liberté. Celles-ci pourraient être les coordonnées de $N/3$ particules en trois dimensions ou de N particules en une dimension par exemple. Généralement, nous étiquetons les coordonnées $\{\mathbf{x}_i\}$ et les moments $\{\mathbf{p}_i\}$, où $i = 1, 2, \dots, N$. On note l'hamiltonien $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, où on relance aux indices sur les \mathbf{x} et les \mathbf{p} s'il n'y a pas de confusion. De la mécanique ondulatoire où $\mathbf{p}_i = -i\hbar\partial/\partial\mathbf{x}_i$, aussi :

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0, [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0 \text{ et } [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.68)$$

D'après l'équation d'Ehrenfest (pour un opérateur général), $A_{Heis}(\mathbf{t})$, dans l'image de Heisenberg

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t} = [A, H] \quad (1.69)$$

(où nous supprimons l'indice *Heis* sur l'opérateur), nous pouvons obtenir des équations de mouvement pour $\{\mathbf{x}_i\}$ et $\{\mathbf{p}_i\}$,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = -\frac{i}{\hbar}[\mathbf{x}_i, H] \text{ et } \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{i}{\hbar}[\mathbf{p}_i, H]. \quad (1.70)$$

Dans le cas particulier où $H = \sum_{k=1}^N (p_k^2/2m) + V(\mathbf{x})$, il est facile de vérifier que (1.70)

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m} \text{ et } \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (1.71)$$

Les équations (1.71) ressemblent fort sur le plan formel aux équations de Hamilton. Lorsque les deux lignes sont combinées, nous obtenons la deuxième loi de Newton, $m\ddot{\mathbf{x}}_i = -\partial V/\partial \mathbf{x}_i$. Bien sûr, nous devons nous rappeler que le contenu de ces équations est très différent de la mécanique quantique par rapport à celui de la mécanique classique : les éléments de matrice d'opérateurs entre états sont observables, et les états ne peuvent pas avoir de valeurs nettes de \mathbf{x} et \mathbf{p} . Néanmoins (1.71) sont identiques aux équations de Hamilton et leur analogie à des conséquences utiles. En fait, c'est la forme de (1.69) et (1.70) qui se connecte le plus utilement à la mécanique classique.

Passons maintenant à la formulation des crochets de Poisson des équations de Hamilton pour la mécanique classique. Nous avons un ensemble de N coordonnées canoniques $\{\mathbf{x}_i\}$ et leur moment conjugué $\{\mathbf{p}_i\}$. Supposons que A et B sont deux variables dynamiques quelconques, c'est-à-dire qu'elles sont des caractéristiques du système dépendant des \mathbf{x} et des \mathbf{p} . Des exemples de variables dynamiques incluent le moment cinétique, $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$, ou l'énergie cinétique, $\sum_k \mathbf{p}_k^2/2m$. Ensuite, le crochet de Poisson de A et B est défini par,

$$\{A, B\} \equiv \sum \left\{ \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}_i} \right\}. \quad (1.72)$$

Les crochets de Poisson sont introduits dans la mécanique classique à cause de la forme remarquablement simple que prennent les équations de Hamilton quand elles sont exprimées en termes d'eux,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \{\mathbf{x}_i, H\} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = \{\mathbf{p}_i, H\}, \quad (1.73)$$

comme on peut facilement le vérifier en utilisant la définition du crochet de Poisson sur les variables dynamiques \mathbf{x}_i , \mathbf{p}_i et H . L'évolution temporelle d'une variable dynamique arbitraire peut également être écrite simplement en termes de Crochets de Poisson. Pour simplifier, nous considérons des variables dynamiques qui ne dépendent pas explicitement du temps.

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}_i} \dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}_j} \dot{\mathbf{p}}_j = \{A, H\} \quad (1.74)$$

où la deuxième ligne découle de la première en remplaçant $\dot{\mathbf{x}}_i$ et $\dot{\mathbf{p}}_j$ par les équations (1.73).

Enfin, pour compléter l'analogie, notons que les crochets de Poisson des \mathbf{x}_i et des \mathbf{p}_i eux-mêmes sont remarquablement simples,

$$\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\} = 0, \quad \{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j\} = \delta_{ij} \quad (1.75)$$

parce que $\partial x_i / \partial p_j = 0$, $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$, etc.

Nous pouvons maintenant prendre de recul et comparer la formulation de Poisson de la mécanique classique avec les équations de mouvement de la mécanique quantique. Comparer (1.68) à (1.75), (1.69) à (1.74) et (1.70) à (1.73). Il semble qu'une théorie hamiltonienne classique puisse être transcrite en mécanique quantique par la simple règle,

$$\{A, B\} \implies -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (1.76)$$

où les opérateurs quantiques \hat{A} et \hat{B} sont les mêmes fonctions des opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_i que A et B sont de x_i et p_i . Cette identification est possible parce que les crochets de Poisson et les commutateurs obéissent aux propriétés algébriques

$$\begin{aligned} [A, A] &= 0, & [A, B] &= -[B, A], & [A, c] &= 0, \\ [A + B, C] &= [A, C] + [B, C], & [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C], \\ 0 &= [A, [B, C]] + [B, [A, C]] + [C, [A, B]], \end{aligned}$$

le facteur $-i/\hbar$ étant nécessaire dans (1.76), car, alors que les crochets de Poisson de deux fonctions réelles sont réels, le commutateur de deux opérateurs hermitiens est anti-hermitien. Cette règle remarquable nous indique comment deviner la théorie quantique correspondant à un système dynamique classique donné. La procédure est appelée «quantification canonique» car elle découle de la description canonique hamiltonienne de la dynamique classique. En fait, il existe des limitations importantes de la méthode de quantification canonique qui seront discutées dans une sous-section ultérieure. Cependant, d'abord, résumons et apprécions l'élégance des étapes simples nécessaires pour déterminer l'équivalent quantique d'un système hamiltonien classique :

- Définir la dynamique hamiltonienne classique en termes de coordonnées canoniques $\{x_i\}$ et de moments $\{p_i\}$, avec un hamiltonien H .
- Écrire les équations de mouvement sous forme d'un crochet de Poisson.
- Réinterpréter les variables dynamiques classiques en tant qu'opérateurs quantiques dans un espace d'états de Hilbert. Les propriétés de commutation des opérateurs quantiques sont déterminées par la règle (1.76).

Bien sûr, nous ne pouvons pas oublier la différence entre la mécanique quantique et la mécanique classique : Bien que les équations fondamentales de mouvement puissent être mises en correspondance par la procédure de quantification canonique, l'interprétation différente des

variables classiques et quantiques conduit à des images totalement différentes des phénomènes et conceptions de mouvement radicalement différentes. Nous allons essayer d'appliquer ce programme de quantification à la relativité générale.

1.2.4 La formulation de Yang-Mills

Toutes les interactions sauf la gravité sont décrites par les théories de jauge de Yang-Mills, dont la propriété de base est l'invariance sous l'action d'un groupe de Lie interne. Cette invariance est un point clé pour la formulation quantique (par exemple, elle est cruciale pour la renormalisation), et elle implique que les modèles de Yang-Mills remplissent les conditions d'une théorie prédictive des champs quantiques. Une formulation de type Yang-Mills pour la gravité devrait simplifier la question de la quantification, puisqu'on aurait à disposition les outils développés pour d'autres interactions. Dans cette section, nous passerons en revue la formulation de la théorie de jauge de Yang-Mills. Les théories de jauge sont un outil mathématique qui décrit les interactions par l'invariance de l'action $S(\phi, \partial_\mu \phi)$ pour le champ $\phi(x)\phi_r(x)$ sous des groupes de transformations de Lie dont nous notons les éléments $U(\epsilon)$ [23, 24]. L'invariance de l'action s'exprime par

$$0 = \delta S = \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x = \int \delta \mathcal{L} d^4x, \quad (1.77)$$

ce qui implique,

$$\delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \delta \partial_\mu \phi_r, \quad (1.78)$$

Il est donc crucial de connaître les expressions de $\delta \phi_r$ et $\delta \partial_\mu \phi_r$. Considérons l'action de l'opérateur $U(\epsilon)$ sur ϕ ¹⁴

$$\phi \rightarrow \phi' = U(\epsilon)\phi, \quad U(\epsilon) = e^{ig\epsilon^a \tau_a} \simeq I + i\epsilon^a \tau_a, \quad (1.79)$$

qui induit sur chaque composant la transformation

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta \phi_r(x), \quad (1.80)$$

$$\delta \phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x) = \epsilon^a (\delta \phi_r)_a = i\epsilon^a \tau_a^{rs} \phi_s, \quad (1.81)$$

14. Dans cette section, les indices a, b, c, ... désignent les indices internes du groupe de jauge, tandis que dans ce qui suit nous les utiliserons pour les indices spatiaux de la base de Lorentz locale.

où ε^a sont un ensemble de paramètres infinitésimaux, et τ_a a les générateurs, qui obéissent à la règle de commutation

$$[\tau_a, \tau_b] = iC_{ab}^c \tau_c. \quad (1.82)$$

Les constantes de structure évanouissantes C_{ab}^c définissent les groupes abéliens, tandis que les groupes non abéliens ont des constantes de structure non évanouissantes. Si les paramètres ε^a sont constants, la transformation est dite globale, et $\partial_\mu \delta \phi_r = \delta \partial_\mu \phi_r$. De cette façon, après substitution de l'équation d'Euler-Lagrange dans (1.78), le courant conservé j_μ , $\partial_\mu j^\mu = 0$, est trouvé

$$j_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} (\delta \phi_r)_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \tau_a^{rs} \phi_s, \quad (1.83)$$

qui permet de définir les charges conservées Q_a selon le théorème de Noether

$$Q_a = \int j_a^0 d^3 \mathbf{x} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r} \tau_a^{rs} \phi_s d^3 \mathbf{x}. \quad (1.84)$$

Si les paramètres ε^a ne sont pas constants, $\varepsilon^a = \varepsilon^a(\mathbf{x})$, la transformation est dite locale, c'est-à-dire une transformation de jauge, et $\partial_\mu \delta \phi_r \neq \delta \partial_\mu \phi_r$. Pour restaurer l'invariance de la densité lagrangienne, il est donc nécessaire de définir une nouvelle dérivée, la dérivée covariante de jauge D_μ , qui commute avec l'opération de variation. En fait, le dérivé ordinaire

$$d\phi = \phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^\mu, \quad (1.85)$$

est mal défini sous une transformation locale (1.79) car les champs en deux points différents \mathbf{x} et $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ se transforment selon des lois différentes. L'opérateur de transport $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, lorsqu'il est appliqué à un champ,

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y}) \rightarrow T'(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi'(\mathbf{y}) = U(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y}), \quad (1.86)$$

génère un objet avec les mêmes propriétés de transformation que le champ lui-même, de sorte que

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow T'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U(\mathbf{x})T(\mathbf{x}, \mathbf{y})U^{-1}(\mathbf{y}). \quad (1.87)$$

L'opérateur de transport étant un élément du groupe de transformation, il peut être exprimé en fonction des générateurs, et, pour des transformations infinitésimales, on a

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) = I + id\mathbf{x}^\mu A_\mu^a(\mathbf{x})\tau_a, \quad (1.88)$$

où les connexions A_μ^a , qui sont les champs de jauge, dans la combinaison $dx^\mu A_\mu^a$, jouent le rôle de $\varepsilon^a(\mathbf{x})$. La dérivée covariante D_μ ,

$$D_\mu \phi(\mathbf{x}) = (\partial_\mu + iA_\mu^a \tau_a) \phi(\mathbf{x}), \quad (1.89)$$

comme $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se transforme en (1.87) sous une transformation locale (1.79). La loi de transformation pour les champs de jauge peut être obtenue à partir des définitions (1.89), (1.86) et (1.88), et lit

$$A_\mu(\mathbf{x}) = A_\mu^a(\mathbf{x}) \tau_a \rightarrow A'_\mu(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}) U^{-1}(\mathbf{x}) - iU(\mathbf{x}) \partial_\mu U^{-1}(\mathbf{x}), \quad (1.90)$$

et, pour ε^a infinitésimal

$$A_\mu^a(\mathbf{x}) \rightarrow A'^a_\mu(\mathbf{x}) = A_\mu^a + \delta A_\mu^a = A_\mu^a + C_{bc}^a A_\mu^b \varepsilon^c - \partial_\mu \varepsilon^a. \quad (1.91)$$

Les propriétés de l'opérateur de transport le long d'une boucle fermée permettent de vérifier que la densité lagrangienne des champs de jauge¹⁵,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.92)$$

où l'intensité du champ est donnée par

$$G_{\mu\nu}^a(\mathbf{x}) = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.93)$$

est invariant sous la transformation (1.90). Le même résultat peut être obtenu en définissant une dérivée covariante qui commute avec l'opération de variation via l'introduction de champs de compensation, les champs de jauge, c'est-à-dire

$$\delta D_\mu \phi = i\varepsilon^a(\mathbf{x}) \tau_a D_\mu \phi. \quad (1.94)$$

La loi de transformation (1.91) découle du calcul direct, tandis que l'expression pour $G_{a\mu\nu}$ est donnée par le commutateur des dérivées covariantes,

$$[D_\nu, D_\mu] \phi = iG_{\mu\nu}^a \tau_a \phi. \quad (1.95)$$

En appliquant l'identité Jacobi à (1.95), il est facile de vérifier que $G_{\mu\nu}^a$ obéit à l'identité Bianchi,

$$D_\rho G_{\mu\nu}^a + D_\nu G_{\rho\mu}^a + D_\mu G_{\nu\rho}^a. \quad (1.96)$$

15. Les indices internes sont élevés et abaissés par la métrique interne euclidienne δ_{ab} .

2

QUANTIFICATION CANONIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Dans le chapitre précédent, les équations gravitationnelles de mouvement ont été dérivées du Lagrangien d'Einstein-Hilbert d'une manière totalement covariante, et la forme hamiltonienne du lagrangien a été mise en évidence. L'invariance du difféomorphisme est un principe directeur de la relativité générale d'Einstein. Cela signifie que lors de la transformation de coordonnées à des points spatio-temporels individuels, sa physique est inchangée. Par conséquent, le difféomorphisme est une transformation locale, c'est-à-dire une transformation de jauge locale [25]. En raison de l'invariance de jauge, les degrés de liberté réels du graviton sont réduits à 2 sur 3+1 dimensions. Dans ce qui suit, pour extraire les degrés de liberté de jauge, nous introduisons la formulation hamiltonienne de la relativité générale [26]. Cette formulation fournit des informations supplémentaires sur les équations d'Einstein 3 + 1. En effet, ce dernier utilise le formalisme 3 + 1, car toute approche hamiltonienne fait appel à la notion d'état physique à un certain moment, ce qui se traduit en relativité générale par l'état sur une hypersurface Σ_t . La formulation hamiltonienne de la relativité générale a été développée initialement en 1959 par Richard Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner, que nous appelons variables ADM [26–28] et par Regge et Teitelboim dans les années soixante-dix [29]. Nous insistons sur l'approche ADM, qui nous permet de choisir une direction temporelle spécifique sans briser l'invariance du difféomorphisme. Cette idée révèle notamment que la relativité générale est un système totalement contraint : son hamiltonien est nul et seules les contraintes contiennent sa dynamique. On parlera ainsi de la relativité générale en terme de formalisme canonique (hamiltonien) [30, 31], et non plus covariant (lagrangien). Ce chapitre commence par une présentation du formalisme ADM, nous résumons brièvement la formulation hamiltonienne de la relativité

générale. L'hamiltonien est une combinaison linéaire de contraintes ; Ces contraintes définissent la dynamique de la relativité générale. Afin de quantifier la théorie, nous effectuons un changement de variables approprié : Nous présentons les variables Ashtekar-Barbero. Nous exprimons les contraintes dans ces nouvelles variables et nous écrivons leur algèbre. Et nous introduisant le concept d'holonomie qui jouera un rôle majeur dans la théorie quantique.

2.1 Formalisme ADM

Pour conduire l'analyse canonique de la relativité générale, La première étape on suppose que l'espace-temps globalement hyperbolique à 4 dimensions \mathcal{M} a la topologie $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_t$. On choisit $t(\mathbf{x})$ une fonction de temps qui à tout point de \mathcal{M} associe une hypersurface de genre espace Σ_t est définie par $t(\mathbf{x}) = cte$. On note n^μ le champ de vecteurs unitaires normaux aux surfaces Σ_t . On se fixe également un champ de vecteur t^μ , qui fixe le flot du temps. La deuxième étape consiste à définir un espace de configuration des champs q sur Σ_t et Les moments conjugués Π . La dernière étape consiste à définir un hamiltonien $H(h, \Pi)$ sous la forme :

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}(h, \Pi) \quad (2.1)$$

où \mathcal{H} est la densité hamiltonienne ; Les équations de Hamilton $\dot{q} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi}$ et $\dot{\Pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta h}$ sont équivalentes aux équations du champ de la théorie lagrangienne. Compte tenu de la formulation lagrangienne, il existe une méthode standard pour obtenir l'Hamiltonien qui définit

$$\mathcal{H}[h, \Pi] = \Pi \dot{h} - \mathcal{L} \quad \text{où} \quad \Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{h}}. \quad (2.2)$$

2.1.1 Géométrie des hypersurfaces

Revenons maintenant à la relativité générale. Considérons un espace-temps globalement hyperbolique $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$; paramétré par une fonction de temps global $t(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Prenons n^μ le champ vectoriel unitaire normal à Σ_t , avec $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = s$. Où s est la signature de la métrique [6] : pour $s = -1$ (Lorentzien), on a la signature $(-, +, +, +)$ et pour $s = 1$ (Euclidien), on a la signature $(+, +, +, +)$. Dans la suite, nous nous intéresserons principalement à $s = -1$ c.à d dans au cas Lorentzien. On peut ainsi définir la métrique spatiale $h_{\mu\nu}$ sur Σ_t , par

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad \text{ou} \quad h^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu. \quad (2.3)$$

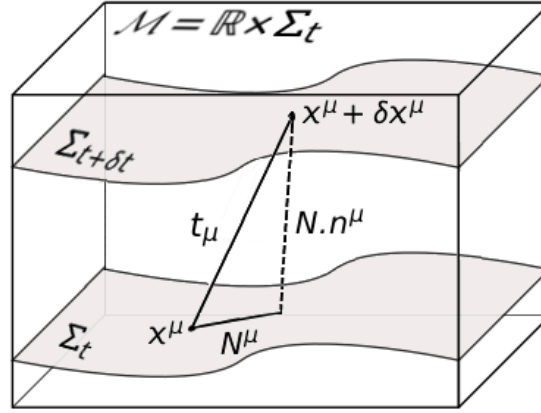


Figure 2.1 – Coordonnées (x^μ) sur les hypersurfaces Σ_t : chaque ligne $(x^\mu = ct\mathbf{e})$ coupe la foliation (Σ_t et $\Sigma_{t+\delta t}$). Fonction Lapse (Lapse Function) N et vecteur Déplacement (Shift Vector) N^μ représentent la décomposition normale et tangentielle du vecteur temps t_μ .

La métrique $h_{\mu\nu}$ est un objet spatiale tridimensionnel, puisqu'il agit comme un projecteur sur Σ_t , où $h_{\mu\nu}n^\mu = 0$, $h_{\mu\nu}h^{\nu\rho} = h_\mu^\rho$. Prenons t^μ un champ vectoriel sur \mathcal{M} satisfaisant $t^\mu\nabla_\mu t = \mathbf{1}$; ainsi, nous pouvons décomposer t^μ en deux composantes [32], normale et tangente à Σ_t :

$$t^\mu(\mathbf{x}) = N^\mu(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x})n^\mu(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

et puisque $\nabla_\mu t$ et N^μ sont respectivement orthogonaux et tangents à Σ_t , nous avons $t^\mu\nabla_\mu t = \underbrace{N^\mu\nabla_\mu t}_{=0} + Nn^\mu\nabla_\mu t = \mathbf{1}$ c-à-d $n^\mu(N\nabla_\mu t) = \mathbf{1}$ et on a $n^\mu n_\mu = -\mathbf{1}$, par conséquent, nous pouvons écrire

$$n_\mu = -N\nabla_\mu t. \quad (2.5)$$

Les composantes du vecteur normal peuvent être déterminées à partir d'une forme $n_\mu dx^\mu = -Ndt$ donc

$$n^\mu(\mathbf{x}) = g^{\mu\nu}n_\nu = (1/N, -N^a/N) \quad (2.6)$$

de sorte que $N^\mu(\mathbf{x}) = (0, N^a)$ et $t^\mu(\mathbf{x}) = (1, 0, 0, 0)$. Avec $N = -t^a.n_a$ s'appelle Fonction Lapse, et exprime la vitesse à laquelle le temps s'écoule le long de l'unité normale d'une 3-surface, $N^a = h_{ab}t^b$ est appelé vecteur Déplacement et représente le décalage spatial mesuré par un observateur statique qui porte les coordonnées de la surface Σ_t et se déplace vers la surface $\Sigma_{t+\delta t}$. En termes de Lapse et Shift, nous avons :

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu &= g_{00} = g_{\mu\nu}(N^\mu + N.n^\mu)(N^\nu + N.n^\nu) \\
 &= N^2(g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu) + g_{ab}N^aN^b + g_{\mu\nu}Nn^\mu N^\nu + g_{\mu\nu}N^\mu Nn^\nu \\
 &= -N^2 + g_{ab}N^aN^b + (g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu})Nn^\mu N^\nu = -N^2 + g_{ab}N^aN^b \\
 &= -N^2 + N_a N^a
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

et de la même manière :

$$g_{\mu\nu}t^\mu n^\nu = \frac{1}{N}(g_{00} - g_{0b}N^b) = -N + \frac{1}{N}g_{b0}N^b - \frac{1}{N}g_{ba}N^aN^b \tag{2.8}$$

$$\implies g_{0b} = g_{ab}N^a = N_b. \tag{2.9}$$

Ensuite, nous pouvons réécrire la métrique comme ce suit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + 2g_{a0}dtdx^a + g_{ab}dx^a dx^b \tag{2.10}$$

$$= -(N^2 - N_a N^a)dt^2 + 2N_a dtdx^a + h_{ab}dx^a dx^b, \tag{2.11}$$

où $\mathbf{a} = \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}$ sont des indices spatiaux et sont contractés avec le tenseur métrique tridimensionnel g_{ab} . Cette métrique n'est pas en général la partie spatiale de $h_{\mu\nu}$ qui est connue sous le nom de métrique intrinsèque. Cependant, puisqu'il abaisse et augmente les indices de la même manière que $g_{\mu\nu}$ le long de toute feuille de la foliation, $h_{\mu\nu}$ peut être utilisé avec les fonctions Lapse et Shift pour remplacer les variables $g_{\mu\nu}$. Étant donné deux tranches spatiales dans la foliation, et afin de parler de la dépendance temporelle des champs de tenseurs, nous devons montrer comment ces champs relatifs à ces tranches se transforment. Pour se faire, nous devons d'abord associer de manière unique un point d'une tranche à un point de l'autre tranche, puis en évaluant les champs des points associés, nous pouvons afficher leurs modifications lors du passage d'une tranche à la suivante.

Définition : La dérivé de Lie et la dérivée temporelle

Les fonctions, les champs tensoriels et leurs formes peuvent être différenciés par rapport à un champ vectoriel. Si T est un champ tensoriel et ξ un champ vectoriel, alors la dérivée de Lie de T par rapport à ξ est notée $\mathcal{L}_\xi T$. En notation de coordonnées locales, pour un champ tensoriel T de type (p, q) , la dérivée de Lie le long de ξ est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \xi^\rho \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} - T^{\rho \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \nabla_\rho \xi^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \rho}_{\nu_1 \dots \nu_q} \nabla_\rho \xi^{\mu_p} \\
 &\quad + T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\rho \nu_2 \dots \nu_q} \nabla_{\nu_1} \xi^\rho + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \rho} \nabla_{\nu_q} \xi^\rho.
 \end{aligned}$$

Une dérivée temporelle d'un champ tensoriel est définie comme la dérivée de Lie le long du champ de vecteurs évolution temporelle t^a :

$$\dot{T}^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} := (h^{a_1}_{c_1} \dots h^{a_n}_{c_n} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_m}^{d_m}) \mathcal{L}_t T^{c_1 \dots c_n}_{d_1 \dots d_m}, \quad (2.12)$$

étant donné un champ de vecteurs d'évolution temporelle, nous complétons l'interprétation des champs de tensoriels sur un espace-temps feuilleté comme des champs tensoriels dépendant du temps sur l'espace

Les rapports géométriques entre ces quantités sont exprimées sur la figure 2.1. La métrique se réécrit en termes de ces variables, la forme covariante :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_b \\ N_c & h_{ab} \end{pmatrix} \quad \text{et contravariante} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_b}{N^2} \\ \frac{N_c}{N^2} & h_{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Ici, h^{ab} est l'inverse des trois-métriques (c'est-à-dire obéissant à $h^{ab} h_{bc} = \delta_c^a$), et que la partie spatiale de $g^{\mu\nu}$ n'est pas identique à h^{ab} mais contient un terme supplémentaire impliquant le vecteur déplacement (Shift vector). Les différentes hypersurfaces Σ_t peuvent être identifiées par un difféomorphisme généré par les courbes intégrales de t^μ . L'espace-temps globalement hyperbolique (\mathcal{M}, g) peut donc être interprété comme l'évolution du temps d'une métrique riemannienne sur une variété fixe Σ_t . Ceci suggère l'utilisation de la Métrique h_{ab} à trois dimensions comme variable dynamique valable pour le formalisme canonique. L'espace-temps ne devient autre chose qu'une « trajectoire d'espaces ».

2.1.2 Géométrie intrinsèque et extrinsèque

L'interprétation de $h_{\mu\nu}$ est qu'il s'agit de la métrique spatiale sur l'hypersurface Σ_t , elle équivaut à $g_{\mu\nu}$ sur tous les vecteurs tangents à l'hypersurface mais dégénérés sur des vecteurs perpendiculaires, proportionnels à n_μ . Comme Σ_t est spatiale, cela signifie que $h_{\mu\nu}$ est une métrique riemannienne pour tous les vecteurs de l'hypersurface. La courbure extrinsèque peut être interprétée comme la courbure de Σ_t en \mathcal{M} , il s'agit de la projection sur Σ_t du gradient du vecteur normal unitaire n . Nous soulignons que la notion de courbure extrinsèque ne doit pas être confondue avec la courbure intrinsèque d'une variété riemannienne ou lorentzienne, cette dernière est mesurée par le tenseur de Riemann et ne dépend pas de l'enfoncement d'une hypersurface dans un espace ambiant. Quelques exemples simples dans [32–34] illustrent ce

point, par exemple. Un cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ incorporé dans \mathbb{R}^3 a une courbure intrinsèque nulle, un cylindre est plat, mais une courbure extrinsèque non nulle par contraste, une sphère \mathbb{S}^2 dans \mathbb{R}^3 a une courbure intrinsèque et extrinsèque non nulle. La courbure extrinsèque est étroitement liée à la dérivée temporelle de la métrique spatiale, comme nous pouvons le montrer par la suite. La métrique spatiale h_{ab} est elle-même une quantité intrinsèque et, en tant que métrique, elle permet de définir un opérateur de dérivée covariante unique D_a on Σ_t .

Définition : La dérivée covariante D

L'hypersurface Σ_t peut être vue comme une variété ayant une métrique riemannienne h_{ab} . Il existe donc une connexion unique compatible avec la métrique (spatiale), sans torsion, que nous notons D_a . Elle peut être définie par sa relation avec la connexion de Lévi-Civita (i.e. La dérivée covariante ∇_a de l'espace-temps \mathcal{M})

$$D_c T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} := h^{a_1}_{\mu_1} \dots h^{a_p}_{\mu_n} h^{\nu_1}_{b_1} \dots h^{\nu_q}_{b_m} h^\sigma_c \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}. \quad (2.14)$$

Cela découle du fait que D_a est linéaire, sans torsion et satisfait par définition à la formule de Leibniz. De plus, elle est compatible avec la métrique spatiale puisque :

$$D_c h_{ab} := h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_f h_{de} = h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_f (g_{de} + n_d n_e) = 0, \quad (2.15)$$

où la dernière ligne suit puisque ∇_a est compatible avec la métrique et par le théorème de Leibniz nous aurons une contraction de la forme $h_b^e n_e = 0$ dans le second terme.

Définition : La courbure intrinsèque

Le tenseur de Riemann associé à cette connexion D_a représente ce qu'on peut appeler la courbure intrinsèque de (Σ_t, h_{ab}) . Nous le noterons par ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$, qui mesure la non-commutativité des deux dérivées covariantes D_a successives, exprimées par l'identité de Ricci [35], mais à trois dimensions :

$${}^{(3)}R^c_{\mu ab} V^\mu = D_a D_b V^c - D_b D_a V^c, \quad (2.16)$$

où V^a est un champ de vecteurs générique tangent à Σ_t , c'est-à-dire, $V_a n^a = 0$. À partir de cette courbure intrinsèque riemannienne, nous pouvons obtenir le tenseur de Ricci intrinsèque ${}^{(3)}R_{ab}$ et le scalaire ${}^{(3)}R$ par les contractions habituelles [15].

Contrairement à la géométrie intrinsèque mentionnée ci-dessus, on peut envisager un autre type de «courbure» concernant les hypersurfaces, à savoir celle liée à la «flexion» de Σ_t dans son voisinage, qui implique en général un champ de vecteurs normal n^a changeant le long de Σ_t . Cette notion est reprise dans la définition du tenseur de courbure extrinsèque [36]. La courbure extrinsèque montre comment l'hypersurface spatiale est incurvée par rapport à l'espace-temps, et comment ainsi sa métrique y évolue.

Définition : La courbure extrinsèque

Soit tout vecteur normal n^a à la surface Σ_t , le tenseur de courbure extrinsèque est un tenseur spatial sur Σ_t par définition de D_a (voir par exemple [37]) :

$$K_{ab} := D_a n_b = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d. \quad (2.17)$$

mais il n'est pas défini intrinsèquement car nous nous référons à n^a et donc à l'intégration de Σ_t dans l'espace-temps \mathcal{M} . Aussi, K_{ab} mesure à quel point la surface Σ_t est courbée dans sa position dans la variété \mathcal{M} , car elle indique à quel point un vecteur tangent à Σ_t ne sera pas tangent si nous le traduisons un peu en parallèle en utilisant la connexion de Levi-Civita ∇ sur \mathcal{M} .

Son interprétation géométrique peut être déduite de la Figure (2.2). Considérons les vecteurs normaux à deux points différents P et Q d'une hypersurface. Soit le vecteur à P résultant du transport parallèle n^μ le long d'une géodésique de Q à P . La différence entre n^μ et \tilde{n}^μ est une mesure de la courbure d'intégration de Σ_t dans \mathcal{M} en P . On reconnaît donc que le champ de tenseur (2.18) peut être utilisé pour décrire cette courbure d'encastrement, puisqu'il disparaît pour $n^\mu = \tilde{n}^\mu$. Plusieurs propriétés de K_{ab} illustrent le sens de ce tenseur et joueront un rôle ultérieurement :

Propriétés de La courbure extrinsèque

❶ De la définition (2.17) nous écrivons :

$$\begin{aligned} K_{ab} &= h_a^c h_b^d \nabla_c n_d = (g_b^d + n_b n^d) h_a^c \nabla_c n_d \\ &= g_b^d h_a^c \nabla_c n_d + n_b n^d h_a^c \nabla_c n_d \\ &= h_a^c \nabla_c n_b + n_b h_a^c n^d \nabla_c n_d, \end{aligned} \quad (2.18)$$

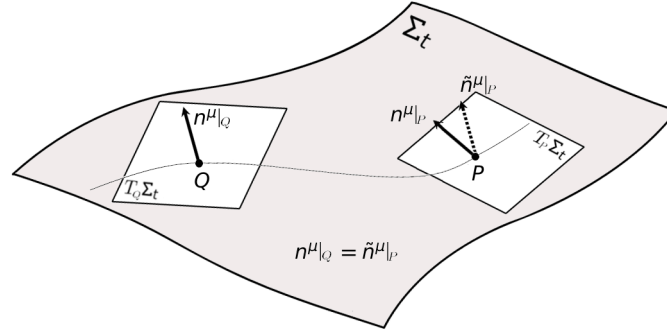


Figure 2.2 – L'interprétation géométrique de la courbure extrinsèque.

Nous pouvons supprimer une métrique spatiale de la définition générale de D_a qui serait contractée sur l'indice b, on a $n^d \nabla_c n_d = \frac{1}{2}(n^d \nabla_c n_d + n_d \nabla_c n^d) = \frac{1}{2} \nabla_c (n_d n^d) = 0$ (n^a est normalisé). Ici, nous pouvons constater que, contrairement à la non-commutativité de h_{ab} avec D_c , la métrique espace-temps et sa dérivée covariante sont toujours commutatives

$$\begin{aligned} K_{ab} &= h_a^c \nabla_c n_b = (g_a^c + n_a n^c) \nabla_c n_b = g_a^c \nabla_c n_b + n_a n^c \nabla_c n_b \\ &= \nabla_a n_b + n_a D_b \ln N, \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec $(n^c \nabla_c n_b = D_b \ln N)^1$

- ② Le tenseur de courbure extrinsèque est symétrique :

$$K_{ab} = K_{ba} \quad (2.20)$$

Ceci implique également que toutes les projections spatiales de $\nabla_a n_b$ sont symétriques :

$$\nabla_a n_b - \nabla_b n_a = 0. \quad (2.21)$$

- ③ De la propriété symétrique de K_{ab} nous avons $K_{ab} = \frac{1}{2}(K_{ab} + K_{ba})$; en utilisant cela avec (2.18) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} 2K_{ab} &= h_a^c \nabla_c n_b + h_b^c \nabla_c n_a = (g_a^c + n_a n^c) \nabla_c n_b + (g_b^c + n_b n^c) \nabla_c n_a \\ &= n^c \nabla_c (n_a n_b) + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a \\ &= n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c =: \mathcal{L}_n h_{ab} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ainsi, la courbure extrinsèque K_{ab} de Σ_t est simplement donnée par la dérivée de Lie du tenseur de projection h_{ab} pour une hypersurface le long du champ de vecteurs normal \mathbf{n} :

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{ab}, \quad (2.23)$$

Par conséquent, K_{ab} peut être interprétée comme la vitesse associée à h_{ab} . Sa trace,

$$K \equiv K_a^a = h^{ab} K_{ab} \quad (2.24)$$

peut être interprétée comme l'extension d'une congruence géodésique orthogonale à Σ_t .

④ de la dernière identité dans l'équation (2.22) nous écrivons :

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2} [n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c] \\ &= \frac{1}{2N} [N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a (N n^c) + h_{ac} \nabla_b (N n^c)] \\ &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_{\mathbf{t}} - \mathbf{N}) h_{cd} \\ &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_{\mathbf{t}} h_{cd} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{cd}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

Où $\mathcal{L}_{\mathbf{t}} h_{cd}$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{cd}$ sont respectivement les dérivées de Lie de la métrique spatiale par rapport à la direction du temps t^μ et du vecteur de déplacement \mathbf{N}^μ , en utilisant la définition (2.12) nous avons $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_{\mathbf{t}} h_{cd}$, donc, l'équation (2.25) prend alors la forme :

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{ab}), \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_{(a} N_{b)}), \quad (2.27)$$

1. Comme déjà noté dans la section 2.1.1, le vecteur $n^c \nabla_c n_a$ peut être exprimé en termes de gradient spatial de la fonction Lapse. En effet, au moyen de l'équation (2.5), nous avons

$$\begin{aligned} n^c \nabla_c n_a &= n^c \nabla_c (N \nabla_a t) = n^c \nabla_c N \nabla_a t + N n^c \nabla_c \nabla_a t = n^c \nabla_c N \nabla_a t + N n^c \nabla_a \nabla_c t \\ &= N^{-1} n_a n^c \nabla_c N + N n^c \nabla_a (N^{-1} n_c) = N^{-1} n_a n^c \nabla_c N + N^{-1} (\nabla_a N) n^c n_c + n^c \nabla_a n_c \\ &= N^{-1} (\nabla_a N + n_a n^c \nabla_c N) = N^{-1} h_a^c \nabla_c N = N^{-1} D_a N = D_a \ln N, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nous avons utilisé le caractère sans torsion de la connexion ∇_a pour écrire $\nabla_c \nabla_a t = \nabla_a \nabla_c t$, ainsi que la deuxième expression de (2.3) du projecteur orthogonal sur Σ_t , et que $n^c n_c = -1$, $n^c \nabla_a n_c = 0$.

L'identité supposée découle alors de la dernière étape en notant que $\mathcal{L}_N h_{ab}$, avec le vecteur déplacement spatial N^a , peut être calculée de manière purement spatiale et égal à $D_{(a} N_{b)} = D_a N_b + D_b N_a$, puisque D_a est compatible avec h_{ab} . Notons que, selon nos définitions, \dot{h}_{ab} n'est pas un objet de géométrie intrinsèque ou extrinsèque, car sa définition nécessite non seulement la connaissance de n^a ou de la foliation Σ_t , mais également du choix d'un champ de vecteurs d'évolution temporelle t^a . La dépendance sur les propriétés de t^a non donnée uniquement par n^a s'annule dans la combinaison avec N et N^a du côté droit de (2.27). Les courbures intrinsèque et extrinsèque (2.16) et (2.17) décrivent ensemble la courbure espace-temps, de manière analogue à la séparation de la métrique espace-temps g_{ab} en h_{ab} et n_a voir (2.3). On peut montrer que les symétries du tenseur de Riemann ${}^{(4)}R^a{}_{bcd}$ réduit le nombre de composantes indépendantes de n^4 , où n est la dimension de l'espace-temps, jusqu'à $n^2(n^2 - 1)/2$. Pour un espace-temps à 4 dimensions, le nombre de tenseurs espace-temps est de 20 et le tenseur spatial est formé de 6 composantes. Quant au tenseur de Ricci ${}^{(3)}R_{ab}$, puisqu'il est symétrique, on pourrait s'attendre à ce qu'il en ait $n(n+1)/2$ composantes indépendantes. En trois dimensions, le tenseur de Ricci comporte 6 composantes indépendantes, soit autant que le tenseur de Riemann. Dans l'espace-temps à quatre dimensions, il comporte 10 composantes indépendantes. En conséquence, en utilisant la symétrie de la courbure extrinsèque, il ne fournit que 6 composantes de plus que le tenseur spatial de Riemann, qui est constitué de 12 composantes au lieu de 20 composantes indépendantes. Ces composantes que nous avons introduits jusqu'à présent constituent toutes les composantes de courbure nécessaires à une décomposition canonique.

2.1.3 Relations de Gauss-Codazzi

Nous dérivons ici les équations qui constitueront la base du formalisme 3 + 1 pour la relativité générale. Ce sont des décompositions du tenseur d'espace-temps de Riemann, ${}^{(4)}R_{abcd}$, en termes de quantités relatives à l'hypersurface Σ_t de type spatial, à savoir le tenseur de Riemann associé à la métrique induite h_{ab} , et le tenseur de courbure extrinsèque K_{ab} de Σ_t .

Proposition : L'équation de Gauss

En utilisant la relation entre les courbures spatiales, l'espace-temps et la courbure extrinsèque, on peut démontrer l'équation de Gauss qui relie la courbure intrinsèque et la seconde forme fondamentale :

$$h^\mu{}_a h^\nu{}_b h^c{}_\sigma h^\rho{}_d {}^{(4)}R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = {}^{(3)}R^c{}_{dab} + K^c{}_a K_{db} - K^c{}_b K_{ad}, \quad (2.29)$$

Démonstration : Nous allons calculer les composantes ${}^{(4)}R_{efg}^h$ en fonction de K_{ab} et de ${}^{(3)}R_{abc}^d$. Pour se faire, nous utilisons la formule (2.14) qui relie la dérivée D_a à la dérivée ∇_a , pour écrire :

$$D_a D_b V^c = D_a (D_b V^c) = h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \nabla_\mu (D_\nu V^\rho). \quad (2.30)$$

En utilisant de nouveau la formule (2.14) pour exprimer $D_\nu V^\sigma$:

$$D_a D_b V^c = h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \nabla_\mu (h^\sigma_\nu h^\rho_d \nabla_\sigma V^d). \quad (2.31)$$

Développons cette formule en utilisant le deuxième terme de l'équation (2.3) pour écrire

$$\nabla_\mu h^\sigma_\nu = \nabla_\mu (\delta^\sigma_\nu + n^\sigma n_\nu) = \nabla_\mu n^\sigma n_\nu + n^\sigma \nabla_\mu n_\nu. \quad (2.32)$$

Puisque $h^\nu_b n_\nu = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_a D_b V^c &= h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \left(n^\sigma \nabla_\mu n_\nu h^\rho_d \nabla_\sigma V^d + h^\sigma_\nu \nabla_\mu n^\rho \overbrace{n_d \nabla_\sigma V^d}^{=-V^d \nabla_\sigma n_d} + h^\sigma_\nu h^\rho_d \nabla_\mu \nabla_\sigma V^d \right) \\ &= h^\mu_a h^\nu_b h^c_d \nabla_\mu n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma V^d - h^\mu_a h^\sigma_b h^c_\rho V^d \nabla_\mu n^\rho \nabla_\sigma n_d + h^\mu_a h^\sigma_b h^c_d \nabla_\mu \nabla_\sigma V^d \\ &= K_{ab} h^c_d n^\sigma \nabla_\sigma V^d - K_a^c K_{bd} V^d + h^\mu_a h^\sigma_b h^c_d \nabla_\mu \nabla_\sigma V^d \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nous avons utilisé l'idempotence de l'opérateur de projection h_{ab} , c'est-à-dire $h^c_\rho h^\rho_d = h^c_d$ pour obtenir la deuxième ligne et $h^\mu_a h^\nu_b \nabla_\mu n_\nu = K_{ab}$ pour obtenir la troisième. Lorsque nous permutons les indices a et b et que nous soustrayons l'équation (2.33) pour former $D_a D_b V^c - D_b D_a V^c$, le premier terme disparaît puisque K_{ab} est symétrique dans (a, b) . Il reste

$$D_a D_b V^c - D_b D_a V^c = (K_{ad} K_b^c - K_{bd} K_a^c) V^d + h^\mu_a h^\sigma_b h^c_d (\nabla_\mu \nabla_\sigma V^d - \nabla_\sigma \nabla_\mu V^d). \quad (2.34)$$

Maintenant, l'identité de Ricci pour la connexion a pour forme :

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma V^d - \nabla_\sigma \nabla_\mu V^d = {}^{(4)}R^d_{\rho\mu\sigma} V^\rho. \quad (2.35)$$

Donc

$$D_a D_b V^c - D_b D_a V^c = (K_{ad} K_b^c - K_{bd} K_a^c) V^d + h^\mu_a h^\sigma_b h^c_d {}^{(4)}R^d_{\rho\mu\sigma} V^\rho. \quad (2.36)$$

En substituant cette relation au côté gauche de l'équation (2.16) et en effectuant un changement des indices muets en changeant σ en ν et d en σ , et puisque $V^\rho = h^\rho_d V^d$, nous avons :

$$h^\mu_a h^\nu_b h^c_\sigma h^\rho_d {}^{(4)}R^\sigma_{\rho\mu\nu} V^d = {}^{(3)}R^c_{dab} V^d + (K^c_a K_{db} - K^c_b K_{ad}) V^d. \quad (2.37)$$

Dans cette identité, V^μ peut être remplacé par n'importe quel vecteur de l'espace tangent $T(M)$ sans changer les résultats, donc nous déduisons explicitement la relation de Gauss (2.29). Si nous contractons la relation de Gauss sur les indices c et a et si nous utilisons

$$h^\mu_a h^a_\rho = h^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho + n^\mu n_\rho, \quad (2.38)$$

nous obtenons une expression faisant apparaître respectivement les tenseurs de Ricci ${}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ et ${}^{(3)}R^c_{dab}$ associés à $g_{\mu\nu}$ et h_{ab} :

$$h^\mu_a h^\nu_b {}^{(4)}R_{\mu\nu} + h_{a\mu} n^\nu h^\rho_b n^\sigma {}^{(4)}R^\mu_{\nu\rho\sigma} = {}^{(3)}R_{ab} + K K_{ab} - K_{a\mu} K^\mu_b. \quad (2.39)$$

Cette équation s'appelle naturellement la relation de Gauss contractée. Prenons sa trace par rapport à h_{ab} , en tenant compte du fait que $K^\sigma_\sigma = K^c_c = K$, $K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = K_{ab} K^{ab}$ et

$$\begin{aligned} h^{ab} h_{a\mu} n^\nu h^\rho_b n^\sigma {}^{(4)}R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= h^\rho_\mu n^\nu n^\sigma {}^{(4)}R^\mu_{\nu\rho\sigma} \\ &= \underbrace{{}^{(4)}R^\mu_{\nu\sigma}}_{= {}^{(4)}R_{\nu\sigma}} n^\nu n^\sigma + \underbrace{{}^{(4)}R^\mu_{\nu\rho\sigma} n^\rho n_\mu n^\nu n^\sigma}_{=0} \\ &= {}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu. \end{aligned} \quad (2.40)$$

et aussi

$$h^{ab} h^\mu_a h^\nu_b {}^{(4)}R_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} + n^\mu n_\nu) {}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}R + {}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad (2.41)$$

Donc nous obtenons :

$${}^{(4)}R + 2 {}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab} K^{ab}. \quad (2.42)$$

Cette équation s'appelle la relation scalaire de Gauss [32]. Elle relie la courbure intrinsèque de Σ_t , représentée par le scalaire de Ricci R , à sa courbure extrinsèque, représentée par $K^2 - K_{ab} K^{ab}$. En fait, la version originale du théorème de Gauss s'appliquait aux surfaces bidimensionnelles intégrées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Comme la courbure de ce dernier est nulle, le côté gauche de l'équation (2.42) disparaît à l'identique dans ce cas. De plus, la métrique g_{ab} de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est riemannienne et non lorentzienne.

Proposition : L'identité de Codazzi

Un calcul similaire donne la relation de Codazzi,

$$h^c_\rho h^\mu_a h^\nu_b {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} n^\sigma = D_a K^c_b - D_b K^c_a. \quad (2.43)$$

également appelé relation Codazzi-Mainardi dans la littérature mathématique [38].

Démonstration : Appliquons à présent l'identité de Ricci (2.35) au vecteur normal n^a (ou plus précisément à toute extension de n^a autour de Σ_t :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) n^c = {}^{(4)}R^c_{\mu ab} n^\mu. \quad (2.44)$$

Si nous projetons cette relation sur Σ_t , nous obtenons

$$h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} n^\sigma = h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho (\nabla_\mu \nabla_\nu n^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu n^\rho). \quad (2.45)$$

Maintenant, à partir de l'équation (2.19),

$$\begin{aligned} h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \nabla_\mu (\nabla_\nu n^\rho) &= h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \nabla_\mu (K^\rho_\nu - n_\nu D^\rho \ln N) \\ &= h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho (\nabla_\mu K^\rho_\nu - n_\nu \nabla_\mu (D^\rho \ln N) - (D^\rho \ln N) \nabla_\mu n_\nu) \\ &= h^\mu_a h^\nu_b h^c_\rho \nabla_\mu K^\rho_\nu - h^\mu_a h^c_\rho \overbrace{(h^\nu_b n_\nu)}^{=0} \nabla_\mu (D^\rho \ln N) \\ &\quad - h^\mu_a h^\nu_b \nabla_\mu n_\nu (D^c \ln N) \\ &= D_a K^c_b - K_{ab} D^c \ln N, \end{aligned} \quad (2.46)$$

où nous avons utilisé l'équation (2.14), ainsi que $h^c_\rho D^\rho \ln N = D^c \ln N$, et $h^\mu_a h^\nu_b \nabla_\mu n_\nu = K_{ab}$ pour obtenir la dernière ligne. Après permutation des indices a et b et de la soustraction de l'équation (2.46), en tenant compte de la symétrie de K_{ab} , on trouve la relation de Codazzi (2.43). En contractant la relation de Codazzi (2.43) sur les indices a et c , on obtient

$$h^\mu_\rho n^\sigma h^\nu_b {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} = D_a K^a_b - D_b K, \quad (2.47)$$

avec $h^\mu_\rho n^\sigma h^\nu_\beta {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} = (\delta^\mu_\rho + n^\mu n_\rho) n^\sigma h^\nu_b {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} = n^\sigma h^\nu_b {}^{(4)}R_{\sigma\nu} + h^\nu_b {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} n_\rho n^\sigma n^\mu$.
Maintenant, de l'anti-symétrie du tenseur de Riemann par rapport à ses deux premiers indices,

le dernier terme disparaît, de sorte qu'il en reste un.

$$h^\mu_\alpha n^\nu ({}^4)R_{\mu\nu} = D_\mu K^\mu_\alpha - D_\alpha K. \quad (2.48)$$

Nous appellerons cette équation ; la relation contractée de Codazzi.

2.1.4 Décomposition 3 + 1 du tenseur de Riemann

A la sous-section (2.1.3), nous avons formé la partie entièrement projetée du tenseur espace-temps de Riemann, donnant l'équation de Gauss, ainsi que la partie projetée trois fois sur Σ_t et une fois le long du \mathbf{n} normal, donnant l'équation de Codazzi. Ces deux décompositions ne concernent que des champs tangents à Σ_t et leurs dérivées dans des directions parallèles à Σ_t , à savoir $h_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ et $D_\sigma K_{\mu\nu}$. C'est pourquoi ils pourraient avoir un sens pour une seule hypersurface. Dans la présente section, nous formons la projection du tenseur espace-temps de Riemann deux fois sur Σ_t et deux fois le long de n_μ . Comme nous le verrons, il s'agit d'une dérivée de $K_{\mu\nu}$ dans la direction normale à l'hypersurface, ce qui n'a de sens que pour une foliation Σ_t .

Proposition : L'équation de Mainardi

Introduisons l'équation de Mainardi :

$$h_{a\mu} h^\nu_b ({}^4)R^\mu_{\rho\nu\sigma} n^\rho n^\sigma = \mathcal{L}_n K_{ab} - \frac{1}{N} D_a D_b N - K_{a\mu} K^\mu_b \quad (2.49)$$

où \mathcal{L}_n est la dérivée de Lie le long de l'unité normale n^α .

Démonstration : Quant à l'équation de Codazzi, le point de départ du calcul est l'identité de Ricci appliquée au vecteur \mathbf{n} , c'est-à-dire l'équation (2.43). Mais au lieu de le projeter totalement sur Σ_t , projetons-le seulement deux fois sur Σ_t et une fois sur \mathbf{n} :

$$h_{a\mu} n^\sigma h^\nu_b (\nabla_\nu \nabla_\sigma n^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\nu n^\mu) = h_{a\mu} h^\nu_b ({}^4)R^\mu_{\rho\nu\sigma} n^\sigma n^\rho. \quad (2.50)$$

En substituant l'équation (2.19) à $\nabla_\nu n^\mu$, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} h_{a\mu} n^\rho h^\nu_b n^\sigma ({}^4)R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= h_{a\mu} n^\sigma h^\nu_b \left[\nabla_\nu (K^\mu_\sigma - D^\mu \ln N n_\sigma) - \nabla_\sigma (K^\mu_\nu - D^\mu \ln N n_\nu) \right] \\ &= h_{a\mu} n^\sigma h^\nu_b \left[\nabla_\nu K^\mu_\sigma - \nabla_\nu n_\sigma D^\mu \ln N - n_\sigma \nabla_\nu D^\mu \ln N \right. \\ &\quad \left. - \nabla_\sigma K^\mu_\nu + \nabla_\sigma n_\nu D^\mu \ln N + n_\nu \nabla_\sigma D^\mu \ln N \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
&= h_{a\mu} h_b^\nu \left[-K^\mu_\sigma \nabla_\nu n^\sigma + \nabla_\nu D^\mu \ln N - n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu_\nu + D_\nu \ln N D^\mu \ln N \right] \\
&= -K_{a\sigma} K_b^\sigma + D_b D_a \ln N - h^\mu_a h_b^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} + D_a \ln N D_b \ln N \\
&= -K_{a\sigma} K_b^\sigma + \frac{1}{N} D_b D_a N - h^\mu_a h_b^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Notons que nous avons utilisé $K^\mu_\sigma n^\sigma = 0$, $n^\sigma \nabla_\nu n_\sigma = 0$, $n_\sigma n^\sigma = -1$, $n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu = D_\nu \ln N$ et $h^\nu_b n_\nu = 0$ pour obtenir la troisième égalité. Montrons maintenant que le terme $h^\mu_a h_b^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}$ est lié à $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab}$. En effet, à partir de l'expression (2.1.1) de la dérivée de Lie :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = n^\mu \nabla_\mu K_{ab} + K_{\mu b} \nabla_a n^\mu + K_{a\mu} \nabla_b n^\mu. \tag{2.53}$$

La substitution de l'équation (2.19) pour $\nabla_a n^\mu$ et $\nabla_b n^\mu$, effectuons un changement des indices muets en changeant a en μ (μ en ρ) et b en ν , il vient alors :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{\mu\nu} = n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} + 2K_{\mu\rho} K^\rho_\nu - K_{\mu\rho} n_\nu D^\rho \ln N - K_{\nu\rho} n_\mu D^\rho \ln N. \tag{2.54}$$

Projetons cette équation sur Σ_t , c'est-à-dire l'application de l'opérateur h_{ab} . En utilisant la propriété $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = h^\mu_a h_b^\nu \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{\mu\nu}$, qui découle du fait que $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab}$ est tangente à Σ_t puisque K_{ab} est tangente elle aussi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
h^\mu_a h_b^\nu \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{\mu\nu} &= h^\mu_a h_b^\nu n^\rho \nabla_\rho K_{\mu\nu} + 2K_{a\rho} K^\rho_b \\
&\quad - \underbrace{(h_b^\nu n_\nu)}_{=0} K_{a\rho} D^\rho \ln N - \underbrace{(h_a^\mu n_\mu)}_{=0} K_{b\rho} D^\rho \ln N,
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = h^\mu_a h_b^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} + 2K_{a\mu} K^\mu_b. \tag{2.55}$$

L'extraction de $h^\mu_a h_b^\nu n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu}$ de cette relation et en vertu de l'équation (2.52) donne comme résultat :

$$h_{a\mu} h_b^\nu {}^{(4)}R^\mu_{\rho\nu\sigma} n^\rho n^\sigma = -\mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} + \frac{1}{N} D_a D_b N + K_{a\mu} K^\mu_b. \tag{2.56}$$

Notons que nous avons écrit $D_b D_a N = D_a D_b N$ (D_a n'a pas de torsion). L'équation (2.56) est la relation désirée. On l'appelle parfois l'équation de Ricci (à ne pas confondre avec l'identité de Ricci (2.35)). Avec l'équation de Gauss (2.29) et l'équation de Codazzi (2.43), elle complète la décomposition 3 + 1 du tenseur de l'espace-temps de Riemann. Il convient de noter que le côté gauche de l'équation de Ricci (2.56) est un terme qui apparaît dans l'équation de Gauss

contractée (2.39). Par conséquent, en combinant les deux équations, nous obtenons une formule qui ne contient plus le tenseur de l'espace-temps de Riemann, mais uniquement le tenseur de l'espace-temps de Ricci :

$$h^\mu_a h^\nu_b {}^{(4)}R_{\mu\nu} = \mathcal{L}_n K_{ab} - \frac{1}{N} D_a D_b N + {}^{(3)}R_{ab} + K K_{ab} - 2K_{a\mu} K^\mu_b \quad (2.57)$$

2.1.5 Expression de la courbure scalaire de l'espace-temps

Proposition : L'équation de Gauss-Ricci

Il est important de mentionner un cas particulier de l'équation de Ricci qui sera directement utilisée ci-dessous :

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 + K_{ab} K^{ab} + 2\mathcal{L}_n K - \frac{2}{N} D_a D^a N. \quad (2.58)$$

avec ${}^{(3)}R$ est le scalaire de Ricci à 3-dimensions.

Démonstration : Prenons la trace de l'équation (2.57) par rapport à la métrique $h^{\mu\nu}$. Cela revient à traiter cette équation avec h^{ab} . Dans la partie gauche, nous avons $h^{ab} h^\mu_a h^\nu_b = h^{\mu\nu}$ et dans la partie droite, et puisque tous les tenseurs impliqués sont spatiaux, nous avons donc :

$$h^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = h^{ab} \mathcal{L}_n K_{ab} - \frac{1}{N} D_a D^a N + {}^{(3)}R + K^2 - 2K_{ab} K^{ab}. \quad (2.59)$$

Maintenant $h^{\mu\nu} {}^4R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) {}^4R_{\mu\nu} = {}^4R + {}^4R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$ et

$$h^{ab} \mathcal{L}_n K_{ab} = \mathcal{L}_n \underbrace{(h^{ab} K_{ab})}_{=K} - K_{ab} \mathcal{L}_n h^{ab}, \quad (2.60)$$

avec $\mathcal{L}_n h^{ab}$ est déterminée à partir de la définition même de la 3-métrique inverse :

$$h_{dc} h^{cb} = \delta^b_d \Rightarrow h^{cb} \mathcal{L}_n h_{dc} + h_{dc} \mathcal{L}_n h^{cb} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^{ad} h^{cb} \mathcal{L}_n h_{dc} + \underbrace{h^{ad} h_{dc}}_{=\delta^a_c} \mathcal{L}_n h^{cb} &= 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_n h^{ab} = -h^{ad} h^{cb} \mathcal{L}_n h_{dc} &\Rightarrow \mathcal{L}_n h^{ab} = -2h^{ad} h^{cb} K_{dc} \\ \Rightarrow \mathcal{L}_n h^{ab} = -2K^{ab}, & \end{aligned} \quad (2.61)$$

où nous avons utilisé l'équation ((2.23)). L'introduction de l'équation ((2.61)) dans l'équation ((2.60)) donne :

$$h^{ab} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{ab} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K + 2K_{ab} K^{ab}. \quad (2.62)$$

Par conséquent, l'équation ((2.59)) devient :

$${}^{(4)}R + {}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^{(3)}R + K^2 + \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K - \frac{1}{N} D_\alpha D^\alpha N. \quad (2.63)$$

Il est nécessaire de combiner cette équation et la relation scalaire de Gauss (2.42) pour éliminer le terme contenant le tenseur de Ricci ${}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$ et pour obtenir une équation Gauss-Ricci (2.58) qui ne contient que la courbure scalaire de l'espace-temps ${}^{(4)}R$. Il convient de noter que chaque terme de l'équation de Gauss-Ricci est covariant. Jusqu'à une divergence $(1/N)D_\alpha D^\alpha N$, on peut ainsi décomposer le scalaire de Ricci en un terme «cinétique» quadratique à courbure extrinsèque, et un terme potentiel ${}^{(3)}R$ qui ne dépend que de la métrique spatiale et de ses dérivées spatiales. La courbure extrinsèque, illustrée par (2.27), se comporte comme une vitesse de la métrique spatiale et est donc candidate à son moment conjugué. Elle apparaît en effet dans l'action d'Einstein–Hilbert en raison des relations de Gauss-Ricci. Dans la section suivante, nous traitons le formalisme hamiltonien de la relativité générale en termes de variables canoniques.

2.1.6 Forme 3 + 1 de l'action de Hilbert

Considérons l'action standard de Hilbert pour la relativité générale (voir par exemple [15, 16, 28, 34, 35]) :

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} {}^{(4)}R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.64)$$

où \mathcal{V} fait partie de \mathcal{M} et est délimité par deux hypersurfaces² Σ_{t_i} et Σ_{t_f} ($t_i < t_f$) de la foliation $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\mathcal{V} := \bigcup_{t=t_i}^{t_f} \Sigma_t, \quad (2.65)$$

et grâce à la décomposition 3 + 1 de ${}^{(4)}R$ fournie par l'équation (2.58) et à la relation $\sqrt{-\det g} = N\sqrt{\det h}$, nous pouvons écrire

2. les hypersurfaces Σ_t ne se croisent pas : $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$ pour $t \neq t'$, et les Σ_t sont de type spatial et que la foliation couvre \mathcal{M} c-à-d $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$.

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} [N({}^{(3)}R + K^2 + K_{ab}K^{ab}) + 2N\mathcal{L}_n K - 2D_a D^a N] \sqrt{h} d^4x. \quad (2.66)$$

de tel manière que nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n K &= n^\mu \nabla_\mu K = \nabla_\mu (Kn^\mu) - \underbrace{K \nabla_\mu n^\mu}_{=K} \\ &= \nabla_\mu (Kn^\mu) - K^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Par conséquent, l'équation (2.66) devient

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} [N({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2) + 2N\nabla_\mu (Kn^\mu) - 2D_a D^a N] \sqrt{\det h} d^4x. \quad (2.68)$$

Mais

$$\int_{\mathcal{V}} N\nabla_\mu (Kn^\mu) \sqrt{\det h} d^4x = \int_{\mathcal{V}} \nabla_\mu (Kn^\mu) \sqrt{-\det g} d^4x = \int_{\mathcal{V}} \frac{d}{dx^\mu} (\sqrt{-\det g} Kn^\mu) d^4x$$

est l'intégrale d'une pure divergence et nous pouvons ignorer ce terme dans l'action. En conséquence, ce dernier devient

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \int_{\Sigma_t} [N({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2) - 2D_a D^a N] \sqrt{\det h} d^3x \right\} dt, \quad (2.69)$$

où nous avons utilisé (2.65) pour scinder l'intégrale à quatre dimensions en une intégrale temporelle et une intégrale à trois dimensions. Encore une fois, nous avons un terme de divergence :

$$\int_{\Sigma_t} D_a D^a N \sqrt{\det h} d^3x = \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dx^a} (\sqrt{\det h} D^a N) d^3x, \quad (2.70)$$

que nous pouvons ignorer. Par conséquent, de l'écriture 3 + 1 de l'action de Hilbert nous pouvons réécrire cette équation de façon beaucoup plus simple :

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \int_{\Sigma_t} N({}^{(3)}R + K_{aa}K^{aa} - K^2) \sqrt{\det h} d^3x \right\} dt. \quad (2.71)$$

2.2 Analyse hamiltonienne dans le formalisme ADM

Dans le cas d'un espace-temps à 4 dimensions, l'équation d'Einstein est en réalité 10 équations différentes, puisqu'il existe 10 composantes indépendantes dans le tenseur d'Einstein. Nous réécrivons ces équations en termes de métrique sur la tranche Σ_t , ou 3-métrique h_{ab} , et

de la «courbure extrinsèque» K_{ab} de la tranche Σ_t , qui décrit la courbure de façon de dégager la couverture des foliations Σ_t de la variété \mathcal{M} . Notons que la courbure extrinsèque peut également être considérée comme représentant de la dérivée temporelle de la 3-métrie. Nous pouvons considérer (h_{ab}, K_{ab}) comme des données de Cauchy pour la métrie, tout comme nous pensons que le potentiel vecteur sur l'espace et le champ électrique sont des données de Cauchy pour l'électromagnétisme ou le champ de Yang-Mills. Nous verrons que parmi les 10 équations d'Einstein, 4 sont des équations de contraintes que les données de Cauchy doivent satisfaire, tandis que 6 sont des équations évolutives indiquant comment la 3-métrie évolue dans le temps. C'est ce qu'on appelle la formulation de Arnowitt-Deser-Misner (ou ADM), de l'équation d'Einstein.

2.2.1 Contraintes

L'action (2.71) doit être considérée comme une fonctionnelle des variables de «configuration» $q = (h_{ab}, N, N^a)$ et de leurs dérivées temporelles³ $\dot{q} = (\dot{h}_{ab}, \dot{N}, \dot{N}^a) : S = S[q, \dot{q}]$. En particulier, K_{ab} dans l'équation (2.71) est fonction de \dot{h}_{ab} , h_{ab} , N et N^a et donné par (2.27). À partir de l'équation (2.71), nous constatant que la densité lagrangienne à champ gravitationnel est :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{N\sqrt{\det h}}{2\kappa} ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2). \quad (2.72)$$

Notons que ce lagrangien ne dépend pas des dérivées temporelles de N et N^a : Cela montre que la fonction Lapse et le vecteur déplacement ne sont pas des variables dynamiques. Par conséquent, la seule variable dynamique est h_{ab} . À partir des équations (2.72) et (2.27), la dynamique canoniquement conjuguée à h_{ab} est :

$$\Pi^{ab}(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial K_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (K^{ab} - Kh^{ab}). \quad (2.73)$$

Nous concluons que le Lapse N et le déplacement N_a sont des champs non dynamiques. Dans la terminologie de Dirac, \dot{N} et \dot{N}_a sont les principales vitesses inexprimables qui rendent singulier le lagrangien de la relativité générale [39]. Nous verrons que l'invariance de difféomorphisme de la théorie génère ce comportement singulier. Selon le formalisme canonique de Dirac [21] aux systèmes hamiltoniens sous contraintes, nous avons supposés introduire quatre champs

3. Nous utilisons la même notation que celle définie par l'équation (2.13)

multiplicateurs de Lagrange $\lambda(t, \mathbf{x})$, $\lambda_a(t, \mathbf{x})$ pour les contraintes primaires et effectuer la transformation de Legendre comme d'habitude par rapport aux vitesses restantes pouvant être résolues.

Définition : Les contraintes primaires

Les moments conjugués aux Lapses N et aux déplacements N_a sont respectivement donnés par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, t) := \Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \dot{N}} = 0 \quad (2.74)$$

$$\mathcal{C}_a(\mathbf{x}, t) := \Pi_a(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \dot{N}^a} = 0. \quad (2.75)$$

les relations présentent quatre contraintes primaires ou principales^a.

a. utilisation (2.26) et le fait que R ne contient pas de dérivées temporelle.

Le seul vrai champ dynamique est la métrique intrinsèque h_{ab} de l'hypersurface de Cauchy Σ_t . En utilisant cela nous pouvons écrire :

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + D_{(a}N_{b)} \quad (2.76)$$

$$\dot{h}_{ab}\Pi^{ab} = \Pi^{ab}D_{(a}N_{b)} + \frac{N}{\kappa}\sqrt{\det(h)}[K^{ab}K_{ab} - K^2] \quad (2.77)$$

$$\Pi_{ab}\Pi^{ab} = \frac{\det(h)}{4\kappa^2}(K^{ab}K_{ab} + K^2)$$

$$\Pi^2 = (\Pi^c_c)^2 = \frac{\det(h)}{\kappa^2}K^2. \quad (2.78)$$

et par l'intermédiaire de ces équations (2.76-2.78) nous obtenons la forme canonique de l'action (2.71)

$$\begin{aligned} S_G &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3\mathbf{x} \left\{ \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a - [\dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \lambda\mathcal{C} + \lambda^a\mathcal{C}_a \right. \\ &\quad \left. - \frac{N\sqrt{\det h}}{2\kappa}({}^{(3)}R + K_{aa}K^{aa} - K^2)] \right\} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3\mathbf{x} \left\{ \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{N}\Pi + \dot{N}^a\Pi_a - \left[\frac{\sqrt{\det(h)}}{\kappa}(K^{ab} - \kappa^2 h^{ab})D_a N_b \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \mathcal{C} + \lambda^a \mathcal{C}_a + \frac{N\sqrt{\det h}}{2\kappa} (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R) \Big\} \\
& = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left\{ \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{N}\Pi_a + \dot{N}^a\Pi_a - [2\Pi^{ab}D_a N_b + \lambda \mathcal{C} + \lambda^a \mathcal{C}_a \right. \\
& \quad \left. + \frac{2N\kappa}{\sqrt{\det h}} (\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^2) - \frac{N\sqrt{\det h}}{2\kappa} {}^{(3)}R] \right\}. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

où nous avons défini respectivement ce qu'on appelle les contraintes difféomorphique et Hamiltonienne

Définition : Les contraintes secondaires

Les contraintes principales ou primaires (2.74,2.75) impliquent les quatre équations des contraintes secondaires (En introduisant le crochet de Poisson dans ces relations) :

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \{\Pi, H_G\} =: -\mathcal{S}^G(h, \Pi), \tag{2.80}$$

$$0 = \frac{\partial \Pi_a}{\partial t} = \{\Pi_a, H_G\} =: -\mathcal{V}_a^G(h, \Pi), \tag{2.81}$$

Les contraintes \mathcal{V}_a^G et \mathcal{S}^G sont appelées respectivement Contraintes du difféomorphisme spatial (ou contrainte vectorielle) et Contrainte Hamiltonienne (ou contrainte scalaire).

En vertu des crochets de Poisson nous obtenons :

$$\mathcal{S}^G(h, \Pi) = \frac{2\kappa}{\sqrt{\det(h)}} \left(h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd} \right) \Pi^{ab}\Pi^{cd} - \frac{\sqrt{\det(h)}}{2\kappa} {}^{(3)}R = 0, \tag{2.82}$$

$$\mathcal{V}_a^G(h, \Pi) = -2\sqrt{\det(h)}D^b \left(\frac{\Pi_{ab}}{\sqrt{\det(h)}} \right) = -2h_{ac}D_b \Pi^{bc} = 0, \tag{2.83}$$

En effectuant une intégration par parties, en utilisant $2 \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\det(h)} D_a (\Pi^{ab} N_b / \sqrt{\det(h)})$ comme terme frontière pour tout champ de vecteurs N^a . En outre, ce terme limite est ignoré pour le moment, mais jouera un rôle important ultérieurement. Donc nous pouvons transformer l'action (2.79) en la forme plus compacte suivante :

$$S_G = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left\{ \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{N}\Pi_a + \dot{N}^a\Pi_a - [N\mathcal{S}^G + N^a\mathcal{V}_a^G + \lambda \mathcal{C} + \lambda^a \mathcal{C}_a] \right\} \tag{2.84}$$

Les variables choisies dans cette formulation sont appelées variables ADM [28], elles sont tangentes à la surface Σ_t , de sorte que nous pouvons utiliser de manière équivalente les véritables quantités tridimensionnelles h_{ab} , Π^{ab} , N^a , N avec $a, b = 1, 2, 3$. L'expression entre crochets de l'action (2.84) représente en réalité l'expression de la fonction Hamiltonienne, que nous désignerons par H_G qui est une combinaison linéaire de contraintes (multiplicateurs de temps) :

$$H_G = \int_{\Sigma_t} d^3x \left(NS^G + N^a \mathcal{V}_a^G + \lambda \mathcal{C} + \lambda^a \mathcal{C}_a \right) \quad (2.85)$$

Le fait que l'hamiltonien implique des termes proportionnels au Laps relatif au temps et au déplacement spatial ne devrait pas être surprenant, car son rôle est de générer l'évolution temporelle, et en relativité générale, nous devons spécifier le Lapse et le déplacement pour connaître le sens de l'évolution temporelle. Cependant, si nous exprimons les quantités S^G et V_a^G en termes de courbure extrinsèque en utilisant la formule qui découle des équations de Gauss-Codazzi, nous trouvons que :

$$S^G = -2\sqrt{\det(h)}G_{ab}n^an^b \quad \text{et} \quad V_a^G = -2\sqrt{\det(h)}G_{cb}n^bh_a^c \quad (2.86)$$

où G_{ab} est le tenseur d'Einstein, équivalent à une combinaison linéaire des contraintes. Cela implique que la densité hamiltonienne pour la relativité générale [6, 40] doit disparaître par l'équation d'Einstein dans le vide : $H_G = 0$. En d'autres termes, les contraintes $S^G = V_a^G \approx 0$ sont précisément les 4-équations d'Einstein qui sont des contraintes sur les données initiales. Par conséquent, il n'y a pas d'hamiltonien approprié qui ne serait pas trivial sur la surface de la contrainte. Ceci est en accord avec le fait qu'il n'y a pas de temps absolu en relativité générale, puisqu'un hamiltonien non-disparaissant générerait une évolution temporelle dans un paramètre de temps externe. Au lieu de cela, la dynamique est déterminée par les contraintes, de sorte que l'évolution en tant que débit de jauge peut être paramétrée de manière arbitraire. De cette façon, nous voyons l'invariance de reparamétrage des coordonnées dans une théorie généralement covariante. Étant donné que dans le formalisme canonique ci-après, l'espace de configuration de la relativité générale est $\mathcal{C}(\Sigma)$, il est donc naturel de s'attendre à ce que l'espace de phase Γ soit l'espace de tous les couples $(h_{ab}, N, N^a; \Pi_{ab}, \Pi_N, \Pi_a)$, ou Fibré cotangente $\mathcal{TC}(\Sigma)$. Cependant, tous les points de cet espace de phase ne représentent pas des états autorisés. Les équations d'Einstein qui sont des contraintes doivent être satisfaites, et cette restriction

sélectionne un sous-espace de l'espace de phase appelé espace de phase physique :

$$\Gamma_{phys} = \{S^G \approx 0; V_a^G \approx 0\} \subset T^*\mathcal{C}(\Sigma) \quad (2.87)$$

L'hamiltonien (2.85) disparaît dans ce sous-espace. Dans la section (2.2.2), nous verrons que ces contraintes sont de première classe et génèrent ainsi des transformations de jauge qui ne changent pas les informations physiques dans les solutions. La contrainte hamiltonienne le fait pour le temps et la contrainte du difféomorphisme pour les coordonnées spatiales. Une fois ces contraintes satisfaites, nous nous assurons que la formulation est covariante pour l'espace-temps même si nous avons démarré la formulation canonique avec découpage de l'espace-temps déterminé par toute fonction temporelle t . Nous en déduisons que l'hamiltonien est une combinaison linéaire de contraintes (de première classe), c'est-à-dire qu'elles disparaissent de manière identique sur les solutions des équations de mouvement. Il s'agit d'une propriété caractéristique des systèmes généralement covariants.

2.2.2 Structure symplectique

La structure symplectique définie sur l'espace de phase (h_{ab}, Π^{ab}) est canonique et donne les crochets de Poisson canoniques pour deux fonctions génériques $A(\mathbf{y})$ et $B(\mathbf{z})$:

$$\{A(\mathbf{y}), B(\mathbf{z})\} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{\delta A(\mathbf{y})}{\delta h_{ab}(\mathbf{x})} \frac{\delta B(\mathbf{z})}{\delta \Pi^{ab}(\mathbf{x})} - \frac{\delta B(\mathbf{z})}{\delta h_{ab}(\mathbf{x})} \frac{\delta A(\mathbf{y})}{\delta \Pi^{ab}(\mathbf{x})} \right]. \quad (2.88)$$

En particulier :

$$\{\Pi^{ab}(t, \mathbf{x}), h_{cd}(t, \mathbf{y})\} = 2\kappa \delta_{(c}^a \delta_{d)}^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.89)$$

$$\{\Pi^{ab}(t, \mathbf{x}), \Pi^{cd}(t, \mathbf{y})\} = \{h_{ab}(t, \mathbf{x}), h_{cd}(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (2.90)$$

Qui est le résultat canonique pour les variables dynamiques. Les crochets de Poisson des contraintes disparaissent sur la surface de contrainte :

$$\begin{aligned} \{V_a(\mathbf{x}), V_b(\mathbf{y})\}|_{C^\mu=0} &= \{V_a(\mathbf{x}), S(\mathbf{y})\}|_{C^\mu=0} \\ &= \{S(\mathbf{x}), S(\mathbf{y})\}|_{C^\mu=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ces contraintes sont appelées contraintes de première classe et leurs versions délimitées, sont respectivement les générateurs infinitésimaux des difféomorphismes de l'espace et du temps.

$$V(N^a) = \int_{\Sigma} d^3x V_a(x) N^a(x); \quad S(N) = \int_{\Sigma} d^3x S(x) N(x) \quad (2.92)$$

Il suffit de le faire sur les variables de l'espace de phase ce qui est clairement visible sur les parenthèses

$$\{h_{ab}(y), V(N^a)\} = \int d^3x N^a \frac{\delta V_a(x)}{\delta \Pi^{ab}(y)} = 2\nabla_{(a} N_{b)} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{ab} \quad (2.93)$$

en fait de la définition des dérivées de Lie

$$\mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{ab} = (\nabla_a N^c) h_{cb} + (\nabla_b N^c) h_{ac} - \underbrace{N^c \nabla_c h_{ab}}_{=0} = 2\nabla_{(a} N_{b)} \quad (2.94)$$

Notons que la dérivée fonctionnelle est facile à calculer avec une intégration partielle. Le dernier terme disparaît pour la compatibilité métrique et dans la dérivée de Lie, nous pouvons remplacer ∂ par ∇ .

$$\begin{aligned} \{\Pi^{ab}, V(N^a)\} &= \int -N^a \frac{\delta V_a(x)}{\delta h_{ab}(y)} \\ &= -2\Pi^{ca} \nabla_c N^b + \sqrt{h} \nabla_c \left(\frac{N^c}{\sqrt{h}} \Pi^{ab} \right) \\ &= -2\Pi^{ca} \nabla_c N^b \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} + \sqrt{q} (\nabla_c N^c) \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} + \sqrt{h} N^c \nabla_c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \\ &= \sqrt{q} \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} + \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} (\nabla_k N^k) \sqrt{h} \\ &= \sqrt{h} \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} + \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \sqrt{h} \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \Pi^{ab} \end{aligned} \quad (2.95)$$

La situation est quelque peu plus subtile pour la contrainte hamiltonienne. Nous avons maintenant

$$\{h_{ab}, S(N)\} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} h_{ab}; \quad \{\Pi^{ab}, S(N)\} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \Pi^{ab} \quad (2.96)$$

La forme canonique de la gravitation permet d'en compter les degrés de liberté. On dispose de 2×6 donc de 12 degrés liberté de l'espace de phase qui sont réduits par 4 contraintes (2.83) et (2.82) et 4 symétries de jauge. Il reste donc 4 degrés liberté d'espace de phase, soit 2 degrés de liberté physiques. Nous constatons donc que la relativité générale possède deux degrés de liberté physiques locaux, qui se manifestent par l'existence des ondes gravitationnelles.

L'étude canonique de la gravitation nous révèle qu'elle est un système totalement contraint, son hamiltonien est nul sur la surface des contraintes qui sont associées aux difféomorphismes, qui représentent les symétries de jauge de la gravitation.

2.3 Vers les variables : Formalisme de la triade

La première étape consiste à introduire des triades (ou dreibeine). Ils joueront le rôle des moments conjugués. En chaque point d'une hypersurface spatiale, il est possible de définir un repère par un champ de vecteurs tridimensionnel, les triades $\mathbf{e}_i^a(\mathbf{x})\partial_a$, dont leurs covecteurs, appelés cotriades $\mathbf{e}_a^i(\mathbf{x})d\mathbf{x}^a$, qui définissent une base orthonormée à chaque point spatial. Ici, $a = 1, 2, 3$ est l'indice d'espace habituel (en référence à l'espace tangent $T_{\mathbf{x}}(\Sigma)$ à \mathbf{x}) et $i = 1, 2, 3$ sont des indices internes sur les vecteurs. La position des indices internes est arbitraire. Nous avons la condition d'orthonormalisation suivante

$$h_{ab}e_i^a e_j^b = \delta_{ij}, \quad (2.97)$$

Ce qui permet d'exprimer la métrique spatiale de la manière suivante

$$h^{ab} = e_i^a e_j^b \delta^{ij} \equiv e_i^a e^{bi}. \quad (2.98)$$

Ceci introduit une symétrie $SO(3)$ (ou $SU(2)$) dans le formalisme, puisque la métrique est invariante sous les rotations locales de la triade. Associée à $\mathbf{e}_i^a(\mathbf{x})$ elle représente un repère orthonormé dans l'espace cotangent $T_{\mathbf{x}}^*(\Sigma)$, désigné par $\mathbf{e}_a^i(\mathbf{x})$ (base de 1-forme). Elle vérifie les deux relation suivante

$$e_i^a e_a^j = \delta_{i'}^j, \quad e_i^a e_b^i = \delta_b^a \quad (2.99)$$

Le formalisme tridimensionnel utilisant des triades peut être obtenu à partir du formalisme espace-temps correspondant en utilisant la jauge du temps $\mathbf{e}_a^0 = -n_a$ pour les formes uniques [41]. La variable d'intérêt n'est pas la triade elle-même, mais sa version densifiée (car elles sont multipliées par un facteur qui est le Jacobien des transformations de coordonnées), introduite dans nos équations comme une combinaison de champs de cotriade gravitationnels. Cette combinaison portera le nom du champ électrique d'Ashtekar (suite à une certaine analogie avec l'électromagnétisme de Maxwell et la théorie de Yang-Mills) et constituera un premier jeu de nouvelles variables.

$$\begin{aligned}
 E_i^a & : = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k \\
 & = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \epsilon^{dbc} e_b^j e_c^k \delta_l^d \delta_d^a = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \epsilon^{dbc} e_d^j e_b^k e_c^l e_i^a = \det(e_i^a) e_i^a \\
 & = \sqrt{\det h} e_i^a
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

En utilisant cette définition, la métrique contravariante h^{ab} peut être liée à la densité de triade par l'équation qui suit :

$$h^{ab} \det h = E_i^a E_j^b \delta^{ij}. \tag{2.101}$$

Nous définissons le déterminant du champs électrique d'Ashtekar par l'expression suivante

$$\det(E_i^a) = \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} E_i^a E_j^b E_k^c. \tag{2.102}$$

Nous introduisons ainsi une 1-forme K_a^i qui constitue une représentation dans $Su(2)$ qui permet de définir dans cette formulation la courbure extrinsèque comme étant :

$$K_a^i := \frac{1}{\sqrt{\det(E_i^a)}} K_{ab} E_j^b \delta^{ij}, \tag{2.103}$$

Par les propriétés de symétrie de la seconde forme fondamentale, K_{ab} est un champ de tensorielle symétrique. En conséquence, vu la relation précédente, le champ K_a^i doit satisfaire la condition du contrainte suivante :

$$G_{ab} := K_{[a}^i e_{b]}^i = 0 \tag{2.104}$$

Où les crochets $[a b]$ désignent l'opération antisymétrique du tenseur $K_a^i e_b^i$ vis-à-vis des indices a et b . Nous pouvons écrire la contrainte du vecteur et de scalaire en vertu (2.82) et (2.83) en fonction des nouvelles variables conjuguées E_i^a et K_a^i . Cependant, ces variables sont redondantes ; En fait, nous utilisons les neuf E_i^a pour décrire les six composantes indépendantes de h^{ab} . Ceci est également clair d'un point de vue géométrique : on peut choisir différentes triades e_a^i invariante par les rotations locales du groupe $SO(3)$ agissant sur l'indice interne i sans changer la métrique :

$$R_k^i(x) R_l^j(x) e_a^k e_b^l \delta_{ij} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}. \tag{2.105}$$

Par conséquent, si nous voulons formuler la relativité générale en fonction de ces variables redondantes, nous devons imposer une contrainte supplémentaire qui rend la redondance ma-

nifeste, et suite à ces nouvelles variables, nous pouvons donner une formulation équivalente de la condition (2.104) et à l'aide du terme (2.100), donc la contrainte manquante est :

$$E_{a[i}K_{j]}^a = 0 \implies G_i = \epsilon_{ijk}E^{aj}K_a^k = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.106)$$

Qui a la structure d'un moment cinétique, en terminologie mathématique les opérateurs des moments cinétiques sont les générateurs du groupe $SO(3)$ ainsi que les matrices de Pauli σ qui sont les générateurs du groupe $SU(2)$. Les relations ci-dessus sont appelées contraintes de Gauss. Leur présence garantit également la symétrie de K_{ab} ⁴. Considérons maintenant les fonctions suivantes sur l'espace de phase étendu

$$\begin{aligned} h_{ab} &:= \left| \det(E_l^c) \right| E_a^j E_b^j, \\ \Pi^{ab} &:= \left| \det(E_l^c) \right|^{-1} E_a^d E_k^j K_{[d}^j \delta_{c]}^b E_j^c \end{aligned}$$

où E_a^k est l'inverse de E_k^a . Il est facile de voir que lorsque $G_i = 0$, les fonctions (2.107) réduisent précisément les coordonnées ADM. Insertion (2.107) dans (2.83) et (2.82), nous pouvons également écrire le difféomorphisme et la contrainte hamiltonienne comme des fonctions sur l'espace de phase étendu que l'on peut vérifier, pour être explicitement donnés par [6]

$$\begin{aligned} V_a(E, K) &:= -\tilde{\nabla}_b [K_a^j E_j^b - \delta_a^b K_c^j E_j^c] = 0, \\ S(E, K) &:= \frac{\kappa_a^{[l} \kappa_b^{j]} E_j^a E_l^b}{4\sqrt{|\det(E_m^c)|}} - \sqrt{|\det(E_m^c)|} {}^{(3)}R(E, K) = 0, \end{aligned}$$

Par conséquent, nous devons inclure cette contrainte supplémentaire à (2.84) si nous voulons utiliser les nouvelles variables de triade. Avec tout cela, l'action de la relativité générale devient

$$S_{RG} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left[\dot{K}_a^i E_i^a - N^b V_b(E_j^c, K_c^j) - N \cdot S(E_j^c, K_c^j) - \mathcal{N}^j G_j(E_j^c, K_c^j) \right], \quad (2.107)$$

où \mathcal{N}^j est un nouveau multiplicateur de Lagrange. L'espace de phase étendu de coordonnées (E_i^a, K_a^i) est ainsi équipé d'une structure symplectique de crochets de Poisson

$$\begin{aligned} \{E_i^a(x), K_b^j(y)\} &= \kappa \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y), \\ \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} &= \{K_a^i(x), K_b^j(y)\} = 0. \end{aligned} \quad (2.108)$$

4. cela peut être vu en insérant (2.103) dans (2.106), en multipliant par ϵ^{ilm} et en contractant

Vu d'une autre manière, nous pouvons considérer que l'espace de phase étendu, coordonné par les variables (E_i^a, K_a^i) , est tel que l'hypersurface définie par la contrainte (2.106) n'est autre que l'espace de phase du formalisme *ADM*.

2.4 Nouvelles variables canoniques d'Ashtekar-Barbero

Dans cette section, nous introduisons des différentes variables introduites par Ashtekar (1986) suite aux travaux antérieurs de Sen (1982). Ces nouvelles variables présenteront leur pouvoir principal dans la théorie quantique de la gravitation, étant donné qu'elles sont analogues aux variables Yang-Mills (à l'aide de connexions). Une introduction plus détaillée à ces variables se trouve dans les travaux d'Ashtekar (1988,1991) [42] et de Thiemann (2001) [5]. Lorsque l'on désire quantifier la théorie sous sa forme canonique en choisissant comme structure symplectique h_{ab} et K_{ab} , on se rend compte que l'espace des métriques spatiales ainsi que celui des courbures extrinsèques sont très mal connus sur le plan mathématiquement, et procéder à une quantification comme l'avaient fait Wheeler et De Witt devient fort compliqué que dans le cas métrique. Mais heureusement, la formulation Hamiltonienne de la Relativité Générale selon les variables introduites par Ashtekar [43–45] amène une compréhension claire et bien définie de l'espace des variables d'Ashtekar, et donc la possibilité d'obtenir une quantification bien définie, nous allons donner un bref compte rendu des développements à propos. La densité de triade (2.100) se transforme dans la représentation vectorielle du $SO(3)$ dans la redéfinition de triade (2.98). Par conséquent, son moment conjugué K_a^i (voir l'équation (2.103)). Il existe une connexion naturelle de $so(3)$ qui définit la notion de dérivée covariante compatible avec la triade. Cette connexion est la connexion de spin Γ_a^i et elle se caractérise par la solution des équations de structure de Cartan

$$\partial_{[a} e_{b]}^i + \epsilon_{jk}^i \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k = 0 \quad (2.109)$$

La solution à l'équation précédente peut être écrite explicitement en termes des composantes de la triade :

$$\begin{aligned} \Gamma_a^i &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_k^b \left(\partial_{[a} e_{b]}^j + e_j^c e_a^l \partial_b e_c^l \right), \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E_k^b \left(\partial_{[b} E_{a]}^j + E_j^c E_a^l \partial_b E_c^l + \frac{1}{2 \det(E)} \left[2E_a^j \partial_b \det(E) - E_b^j \partial_a \det(E) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

On peut obtenir une fonction explicite de la densité de triade $\Gamma_a^i(E_j^b)$ inversée (2.100) d'où :

$$e_a^i = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_j^b E_k^c}{\sqrt{|\det(E)|}}, e_i^a = \frac{1}{2} \frac{\text{sgn}(\det(E)) E_i^a}{\sqrt{|\det(E)|}} \quad (2.111)$$

En particulier, l'algèbre des contraintes est de seconde classe. Cependant, il existe un choix particulier de variables qui simplifie l'analyse, permettant de mettre en œuvre une partie de la contrainte et de ramener les éléments restants à la première classe. Ce sont les fameuses variables d'Ashtekar, que nous introduisons maintenant⁵. et donc la possibilité d'obtenir une quantification bien définie. Ces variables sont formulées en terme des triades e_a^i dans une forme dite "densité" (i.e. qu'elles sont multipliées par un facteur qui est le Jacobien des transformations de coordonnées). La connexion de spin est une connexion $\mathfrak{so}(3)$ qui se transforme de manière standard non homogène par des transformations $\mathfrak{SO}(3)$ locales. Les variables d'Ashtekar-Barbero sont définies par l'introduction d'une nouvelle connexion A_a^i donnée par

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i \quad (2.112)$$

où γ est un nombre réel non décalé appelé le paramètre d'Immirzi⁶ il jouera un rôle clé dans la forme quantifiée de la gravitation [13, 40, 47, 48], pour le cas spécial $\gamma = i$ (qui est celui introduit par Ashtekar) le $\mathfrak{SU}(2)$ correspond au sous-groupe dual du groupe de Lorentz. Notons que ce cas conduit également à une simplification de la contrainte hamiltonienne (2.107). Par contre, les variables sont maintenant complexes et pour retrouver la relativité générale, il faut imposer des conditions de réalité. Celles-ci sont particulièrement difficiles à traiter au niveau quantique et, pour cette raison, la plupart des développements théorique en matière de quantification de la gravitation se sont focalisés sur un γ réel. C'est ce que nous adoptons également dans ce travail. La nouvelle variable est également une connexion $\mathfrak{so}(3)$ car l'ajout d'une quantité qui se transforme en vecteur vers une connexion donne une nouvelle connexion. Où nous voyons immédiatement l'intérêt des variables d'Ashtekar : Elles sont simplement conjuguées l'une de l'autre⁷, plus précisément, les crochets Poisson des nouvelles variables sont :

5. Sur l'analyse générale avec les contraintes de seconde classe, voir [40].

6. Le paramètre Immirzi devient également pertinent au niveau classique si des sources de torsion sont présentes [46, 47].

7. On pourra noter une forte analogie avec l'électromagnétisme, où le champ électrique E^a et le potentiel vecteur A_a sont canoniquement conjugués l'un de l'autre. C'est pourquoi on trouve parfois dans la littérature du vocabulaire emprunté à la théorie de Maxwell, en particulier le terme de champ électrique pour la densité de triade.

$$\begin{aligned} \{E_i^a(x), A_b^j(y)\} &= \kappa \gamma \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y), \\ \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} &= \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Toutes les équations précédentes découle trivialement de (2.108) sauf pour lesquelles il faut plus de calculs. Ce fait non trivial est remarquable, car cela signifie que la transformation ci-dessous est une transformation canonique.

$$(E_i^a, \Gamma_a^i) \rightarrow \left(\frac{1}{\gamma} E_i^a, A_a^i \right) \quad (2.114)$$

Les nouvelles variables mettent la relativité générale classique dans une forme d'une théorie de jauge $SU(2)$ [25], similaire aux théories de Yang-Mills. En effet, A_a^i et E_i^a sont les composants d'une connexion et d'un champ électrique respectivement. Cela résulte de leurs propriétés de transformation sous les transformations locales de la jauge $SU(2)$. L'écriture

$$\begin{aligned} A_a &= A_a^i \tau_i \in su(2) \\ E^a &= E_i^a \tau^i \in su(2) \end{aligned} \quad (2.115)$$

où τ^i sont des générateurs de $SU(2)$, on peut écrire les règles de transformation de la manière suivante :

$$A'_a = g A_a g^{-1} + g \partial_a g^{-1}, \quad E'^a = g E^a g^{-1}, \quad (2.116)$$

Ce sont les règles de transformation standard pour les connexions et les champs électriques des théories de Yang-Mills. Nous pouvons pousser l'analogie encore plus loin dans les contraintes. Ceci est effectué dans la section suivante.

2.5 Algèbre de contrainte et transformations de Jauge

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la Relativité Générale peut être formulée en termes de connexion réelle $A_a^i(x)$ agissons dans $su(2)$ et E_i^a est un champ réel appelé champ électrique, tous deux définis sur une variété différentielle tridimensionnelle Σ_t . Sur les solutions physiques, la connexion A_a^i est donnée par (2.112). La théorie est définie par le système hamiltonien constitué par trois contraintes (2.106) et (2.107).

Définition : Les contraintes dans les nouvelles variable

En ce qui concerne les nouvelles variables, l'ensemble des contraintes :

➔ **La contrainte de Gauss**

$$G_i(E_k^c, A_c^k) = D_a E_i^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jkl} A_a^k E^{al} = 0 \quad (2.117)$$

qui impose l'invariance du système sous une transformation locale de jauge du groupe $SU(2)$.

➔ **La contrainte de difféomorphisme**

$$V_a(E_k^c, A_c^k) = \frac{1}{\gamma} F_{ab}^j E_j^b - \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} K_a^i G_i = 0, \quad (2.118)$$

comme son nom l'indique, elle impose l'invariance du système par difféomorphisme. De façon intuitive, ces deux premières contraintes décrivent la géométrie de la variété Σ à 3-dimensions.

➔ **La contrainte Hamiltonienne** ou "l'équation d'évolution" du système

$$S(E_k^c, A_c^k) = \left[F_{ab}^j - (\gamma^2 + 1) \epsilon_{jmn} K_a^m K_b^n \right] \frac{\epsilon_{jkl} E_k^a E_l^b}{\det E} + \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} G^i \partial_a \frac{E_i^a}{\det E} \quad (2.119)$$

où $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k$ est la courbure de connexion d'Ashtekar définie comme en Théorie Quantique des Champs, $D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}^k A_a^j E_k^a$ est la divergence covariante de la densité de triade.

Simplement, il n'y ait aucune dynamique dans la théorie, cette équation décrit l'agencement des variétés tridimensionnelles résultant des deux premières contraintes. Il est donc possible de la concevoir comme une équation décrivant la dynamique de la variété Σ , mais le caractère covariant de la théorie n'implique en aucun cas que cette dynamique se déroule suivant une variable spécifiquement temporelle. Il est donc préférable de la considérer comme une condition d'ajustement des variétés, ce qui justifie son appellation de contrainte. Signalons que, de ce fait, le caractère covariant de la théorie, bien que présent, n'est guère explicite. Nous avons sept ($7=3+3+1$) contraintes (G_i, V_a, S) pour les $18=3 \times 3 + 3 \times 3$ variables d'espace de phase (A_a^i, E_j^b) . En plus d'imposition des conditions parmi les variables canoniques, les contraintes de première classe génèrent les 7 fonctions de transformations de jauge (infinitésimales), à partir de l'espace de phase en 18 degrés de liberté de la relativité générale, nous obtenons $11=18-7$ champs nécessaires pour coordonner la surface de contrainte sur laquelle reposent les sept conditions ci-dessus. Sur cette surface de contrainte 11 degrés de liberté, la contrainte ci-dessus génère 7 paramètres de transformations de jauge. L'espace de réduction de la phase est à quatre dimensions ($11-7=2 \times 2$), et par conséquent, le nombre résultant de degrés physiques de liberté

est deux, comme prévu. La contrainte (2.117) coïncide avec la loi standard de Gauss de la théorie de Yang-Mills (par exemple $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ dans l'électromagnétisme). En fait, si on ignore (2.118) et (2.119), les variables d'espace de phase (A_α^i, E_j^b) associées à la loi de Gauss (2.117) caractérisant l'espace de phase physique d'une théorie non abélienne $SU(2)$ de Yang-Mills. Le champ de jauge est donné par la connexion A_α^i et son moment conjugué est le champ électrique E_j^b . La théorie de Yang-Mills est une théorie définie sur une géométrie spatio-temporelle. La dynamique dans une telle théorie est décrite par un hamiltonien non disparaissant - la densité hamiltonienne de la théorie Yang-Mills étant $\mathcal{H} = E_\alpha^i E_i^\alpha + B_\alpha^i B_i^\alpha$. La relativité générale est une théorie généralement covariante et le temps de coordination ne joue aucun rôle physique. L'hamiltonien est une combinaison linéaire de contraintes. La dynamique est codée dans les équations de contraintes suivant (2.117), (2.118) et (2.119). Dans ce sens, nous pouvons considérer la relativité générale dans les nouvelles variables comme un fond indépendant de $SU(2)$ de la théorie de Yang-Mills. Nous verrons dans la suite que la similitude étroite entre ces théories permettra la mise en œuvre de techniques très naturelles dans le contexte de la théorie Yang-Mills. Ces variables se révèlent être conjuguées. En fait, nous pouvons réécrire l'action (2.107) en fonction des nouvelles variables comme [6, 40]

$$S_{RG}(A, E, N, N^a) = \frac{1}{2K} \int_{\mathcal{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left[\dot{A}_\alpha^i E_i^\alpha - N^b V_b(E_k^c, A_c^k) - N \cdot S(E_k^c, A_c^k) - N^j G_j(E_k^c, A_c^k) \right]. \quad (2.120)$$

L'action résultante est similaire à (2.84), avec (A, E) comme variables conjuguées canoniquement, par opposition à (h, Π) . Les déchéances et les décalages sont toujours des multiplicateurs de Lagrange, et nous nous référons toujours à $S(A, E)$ et $V_\alpha(A, E)$ en tant que contraintes hamiltoniennes et de difféomorphisme spatial. L'algèbre est toujours de première classe. La nouvelle formulation en termes de tétrades a introduit la contrainte supplémentaire (2.117). Tout comme les contraintes V^μ génèrent des difféomorphismes, la contrainte de Gauss génère des transformations de jauge. Il est en fait facile de vérifier que E_j^b et A_α^i se transforment respectivement en vecteur $SU(2)$ et en connexion $su(2)$ sous cette transformation. Nous ne devrions pas être surpris de l'apparition de cette contrainte supplémentaire. Lorsque nous utilisons le formalisme tétrade, nous introduisons une nouvelle symétrie dans la théorie, l'invariance sous la transformation de jauge locale. La contrainte de Gauss est là pour imposer cette invariance au niveau canonique. D'une autre part, il est peut-être plus surprenant que, bien que l'invariance de jauge locale de l'action covariante soit le groupe de Lorentz complet, la trans-

formation de Legendre (2.120) ne soit invariante que sous $SU(2)$. L'origine de cette énigme réside précisément dans le changement de variables (2.100, 2.112). La connexion d'Ashtekar-Barbero est une connexion $su(2)$, mais pas une connexion de Lorentz [49]. Elle devrait alors être considérée comme une variable auxiliaire, utile pour reconstruire l'algèbre sous une forme de première classe. Maintenant, analysons la structure des transformations de jauge générées par les contraintes (2.117), (2.118) et (2.119). Du paragraphe précédent, il ne faut pas être surprenant que la loi de Gauss (2.117) génère des transformations $SU(2)$ locales comme dans le cas de la théorie Yang-Mills. Explicitement, si nous définissons la version étendue de cette contrainte sous la forme :

$$G(\Lambda) = \int_{\Sigma} dx^3 \mathcal{N}^j G_j(A_b^k, E_k^b) = \int_{\Sigma} dx^3 \mathcal{N}^j D_a E_j^a, \quad (2.121)$$

on reconnaît alors l'équation de structure de l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$ (et aussi $SO(3)$, vu qu'ils ont la même algèbre de Lie). Mais pourquoi ne retrouve-t-on pas groupe de Lorentz $SO(3, 1)$? En réalité, la connexion d'Ashtekar-Barbero n'est pas une connexion sur le groupe de Lorentz⁸ : elle n'est qu'une variable auxiliaire, dont la seule utilité est de résoudre partiellement les contraintes de façon à ce qu'elles deviennent de première classe. Il n'y a pas à priori d'argument physique qui permette d'interpréter ce résultat. à travers les crochets de Poisson, E_i^a se transforme en vecteur $SU(2)$, tandis que A_a^i en tant que connexion $su(2)$, un calcul direct nous donne le résultat attendu :

$$\begin{aligned} \delta_G E_i^a &= \{G(\Lambda), E_i^a(y)\} = \left\{ \int d^3x \mathcal{N}^j(x) G_j(x), E_i^a(y) \right\} \\ &= \int d^3x \mathcal{N}^j(x) \{ \partial_b E_j^b + \epsilon_{mjn} A_b^m E^{bn}, E_i^a(y) \} \\ &= \kappa \gamma \epsilon_{mjn}^j \mathcal{N}^j(y) E^{bn}(y) \delta_b^a \delta_i^m \\ &= \kappa \gamma \epsilon_{ijn} \mathcal{N}^j(y) E^{an}(y), \end{aligned} \quad (2.122)$$

Aussi

8. Dans le cas particulier où $\gamma = i$, on peut en fait identifier ce groupe $SU(2)$ comme étant le sous-groupe auto-dual du groupe de Lorentz, et c'est en ces termes qu'Ashtekar a introduit initialement ses variables [7, 8, 43, 45]. Ce choix simplifie d'ailleurs grandement les expressions des contraintes, mais les variables deviennent alors complexes, ce qui pose quelques soucis supplémentaires pour la quantification. Par la suite, on considérera γ réel et strictement positif.

$$\begin{aligned}
 \delta_G A_\alpha^i &= \{G(\Lambda), A_\alpha^i\} = \left\{ \int d^3x \mathcal{N}(x) G_j(x), A_\alpha^i(y) \right\} \\
 &= \int d^3x \mathcal{N}(x) \{ \partial_b E_j^b + \epsilon_{mjn} A_b^m E^{bn}, A_\alpha^i(y) \} \\
 &= \gamma \partial_\alpha \Lambda^i(y) + \gamma \epsilon_{mji} \mathcal{N}(y) A_\alpha^m(y) \\
 &= \gamma D_\alpha \Lambda^i(y).
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

La contrainte vectorielle (2.118) génère des difféomorphismes tridimensionnels de Σ . Ceci est clair à partir de l'action de la contrainte

$$V(N^\alpha) = \int_\Sigma d^3x N^\alpha V_\alpha(A_b^k, E_k^b) = \int_\Sigma d^3x N^\alpha E_k^b F_{ba}^k, \tag{2.124}$$

Sur les variables canoniques on a [6]

$$\delta_V A_\alpha^i = \{A_\alpha^i, V(N^\alpha)\} = \mathcal{L}_N A_\alpha^i = N^b F_{ab}^i \quad \text{et} \quad \delta_V E_i^a = \{E_i^a, V(N^\alpha)\} = \mathcal{L}_N E_i^a, \tag{2.125}$$

Où \mathcal{L}_N désigne la dérivée de Lie dans la direction de N^α . L'exponentielle de ces transformations infinitésimales conduit à l'action de difféomorphismes finis sur Σ . Enfin, la contrainte scalaire (2.119) génère les translations des coordonnées dans le temps (modulo des difféomorphismes spatiales et des transformations de Jauge $SU(2)$). L'hamiltonien total $H[\alpha, N^\alpha, N]$ de la relativité générale peut être écrit sous la forme :

$$H[\Lambda, N^\alpha, N] = G(\Lambda) + V(N^\alpha) + S(N), \tag{2.126}$$

où

$$S(N) = \int_\Sigma d^3x N \cdot S(A_b^k, E_k^b). \tag{2.127}$$

Et comme mentionné précédemment, l'hamiltonienne totale est exclusivement une combinaison linéaire de contraintes. Les équations hamiltoniennes de mouvement sont :

$$\dot{A}_\alpha^i = \{A_\alpha^i, H[\Lambda, N^\alpha, N]\} = \{A_\alpha^i, G(\Lambda)\} + \{A_\alpha^i, V(N^\alpha)\} + \{A_\alpha^i, S(N)\}, \tag{2.128}$$

$$\dot{E}_\alpha^i = \{E_\alpha^i, H[\Lambda, N^\alpha, N]\} = \{E_\alpha^i, G(\Lambda)\} + \{E_\alpha^i, V(N^\alpha)\} + \{E_\alpha^i, S(N)\}. \tag{2.129}$$

Les équations précédentes définissent l'action de $S(N)$ jusqu'à l'infinitésimal de $SU(2)$ et les transformations du difféomorphisme données par les deux derniers termes et les valeurs de Λ et N^α respectivement. Dans l'évolution de la relativité générale, l'évolution du temps n'a pas

de sens physique. Il est analogue à une transformation de jauge $U(\mathbf{1})$ dans QED . L'algèbre de contrainte est :

$$\begin{aligned}
\{G(\Lambda), D_\alpha E_i^a(\mathbf{y})\} &= \{G(\Lambda), \partial_\alpha E_i^a(\mathbf{y}) + \epsilon_{jik} A_\alpha^j E^{ak}(\mathbf{y})\} = \epsilon_{ijn} \partial_\alpha (\Lambda^j(\mathbf{y}) E^{an}(\mathbf{y})) \\
&- \epsilon_{jik} A_\alpha^j(\mathbf{y}) \epsilon_{kln} \Lambda^\ell(\mathbf{y}) E^{an}(\mathbf{y}) + \epsilon_{jik} E^{ak} (\partial_\alpha \Lambda^j(\mathbf{y}) + \epsilon_{mlj} \Lambda^\ell(\mathbf{y}) A_\alpha^m(\mathbf{y})) \\
&= \epsilon_{ijn} \Lambda^j(\mathbf{y}) \partial_\alpha E^{an}(\mathbf{y}) + (\epsilon_{ijk} \epsilon_{lnk} - \epsilon_{ink} \epsilon_{ljk}) \Lambda^\ell(\mathbf{y}) E^{an}(\mathbf{y}) A_\alpha^j(\mathbf{y}) \\
&= \epsilon_{ilk} \Lambda^\ell(\mathbf{y}) \partial_\alpha E^{ak}(\mathbf{y}) + \epsilon_{ilk} \Lambda^\ell(\mathbf{y}) \epsilon_{jkn} E^{an}(\mathbf{y}) A_\alpha^j(\mathbf{y}) \\
&= \epsilon_{ilk} \Lambda^\ell(\mathbf{y}) G_k(\mathbf{y}). \tag{2.130}
\end{aligned}$$

Enfin, en compensant aussi le deuxième terme dans le crochet ci-dessus, nous obtenons :

$$\{G(\Lambda_1), G(\Lambda_2)\} = G([\Lambda_1, \Lambda_2]), \tag{2.131}$$

que nous les reconnaissons comme les équations de structure de la algèbre $su(2)$, de même nous déduisons que :

$$\{G(\Lambda), V(N^a)\} = G(\mathcal{L}_{N^a} \Lambda), \tag{2.132}$$

$$\{G(\Lambda), S(N)\} = 0, \tag{2.133}$$

$$\{V(N^a), V(M^b)\} = V([N^a, M^b]^c), \tag{2.134}$$

$$\{S(N), V(N^a)\} = -S(\mathcal{L}_{N^a} N), \tag{2.135}$$

$$\{S(N), S(M)\} = V(f^a) + \text{termes proportionnels de la loi de Gauss} \tag{2.136}$$

Où $[N, M]^c = N^b \partial_b M^c - M^b \partial_b N^c$ et $f^a = h^{ab} (N \partial_b M - M \partial_b N)$.

Les contraintes suivant $G(\alpha) = 0$, $V(N^a) = 0$, $S(N) = 0$, Sont complètement équivalentes aux équations d'Einstein dans le vide. Dans la théorie de Maxwell, nous avons appris que le potentiel vectoriel est défini jusqu'à l'ajout d'un gradient d'une fonction. Nous avons également appris qu'une telle invariance, appelée invariance de jauge, était générée dans le cadre canonique par la loi de Gauss. Quelle est l'invariance analogue dans la théorie de Yang-Mills? Nous pouvons répondre à la question en considérant le crochet de Poisson de la loi de Gauss avec un potentiel vectoriel. Nous voyons donc que la notion de transformation de jauge est plus compliquée que dans la théorie de Maxwell. Une autre différence apparaît si l'on considère le crochet de Poisson de la loi de Gauss avec le champ tensoriel. Contrairement au cas de Maxwell, le crochet de Poisson est non nul, le champ tensoriel se transforme sous les transformations de jauge dans les théories de Yang-Mills. Cela signifie notamment que les champs électriques et

les champs magnétiques ne sont pas des quantités observables dans les théories de Yang-Mills, car ils dépendent de la jauge. Nous devons rechercher d'autres quantités invariantes dans les transformations de jauge pour construire des observables physiques pour la théorie. Un exemple d'une telle quantité s'appelle l'holonomie qui a un rôle majeur dans la quantification de la relativité générale.

2.6 Holonomies

Dans la section précédente, nous avons présenté une reformulation de la relativité générale, qui fournit une structure d'espace de phase similaire à celle des théories de jauge de Yang-Mills. Une telle reformulation peut être obtenue à partir de la géométrie dynamique par une transformation canonique en espace de phase. Le théorème de Stone-von Neumann assure qu'une transformation canonique fournit une description quantique équivalente unitaire par rapport à la description d'origine. Par conséquent, la quantification canonique de l'espace de phase du champ gravitationnel avec les coordonnées A_i^a et E_a^i , au lieu de h_{ij} et Π^{ij} , ne devrait pas fournir une nouvelle perspective réelle du problème de la gravitation quantique. La gravitation quantique à boucles repose sur un outil technique supplémentaire : la quantification de l'algèbre de flux d'holonomie. Le choix des holonomies et des flux comme coordonnées d'espace de phase a un impact profond au niveau quantique. En utilisant la construction GNS⁹, il est possible de définir ce qu'on appelle l'espace de Hilbert cinématique, dans lequel les éléments de l'algèbre de flux d'holonomie sont associés à des opérateurs "liés". Dans cet espace, nous pouvons vérifier a posteriori comment les opérateurs d'holonomie violent l'une des hypothèses du théorème de Stone-von Neumann, à savoir la continuité faible. La description de l'espace de Hilbert cinématique peut être commodément donnée en termes d'états de réseau de spin, qui constituent une base, et les deux contraintes cinématiques, celle de vecteur et celle de Gauss, peuvent être résolues. Les opérateurs géométriques ont des spectres discrets, tels que l'espace quantique est doté de géométrie discrète comme prévu. La définition des espaces de Hilbert cinématiques place la gravitation quantique à boucles plus proche d'un modèle complet de gravitation quantique que la formulation de Wheeler-DeWitt[53, 54, 54]. Cependant, la théorie finale n'a pas encore été réalisée. Bien que la contrainte scalaire puisse être correctement définie dans l'espace de Hilbert invariant par jauge, une expression analytique ne peut néanmoins pas être donnée. Ce fait empêche la solution de la dynamique pour la géométrie quantique. D'autres problèmes concernent

9. Nommés d'après les mathématiciens Gel'fand, Naimark et Segal [50–52]

l'algèbre des contraintes «off-shell»¹⁰, la définition du produit scalaire, la construction d'états semi-classiques et la signification physique du paramètre d'Immirzi.

2.6.1 Raison de l'utilisation des holonomies

Cette section traite le concept d'holonomies suivant [55]. Les holonomies sont importantes car toutes les observables qui ne sont que des fonctions de connexion peuvent être exprimées dans une base d'holonomies. Une holonomie H_α est le transport parallèle le long d'une courbe fermée α avec un point de base. L'holonomie contient les mêmes informations que la courbure : connaître toutes les holonomies de la connexion à 2-formes A_α^i définit la connexion uniquement [56]. L'holonomie pour toute courbe fermée implique la connexion en tout point d'une transformation de jauge. Deux courbes fermées sont équivalentes si l'une peut se déformer continuellement. Toutes les boucles équivalentes forment une classe d'équivalence. Les classes d'équivalence des courbes fermées forment une structure de groupe et les holonomies peuvent être considérées comme une carte (Atlas dans le jargon topologique) de ce groupe sur un groupe de Lie \mathbf{G} . Techniquement, les classes d'équivalence des courbes fermées sont appelées boucles et le groupe est également appelé un groupe de boucles. Les fonctions des éléments du groupe de boucles sont appelées fonctions d'onde et constituent la représentation de la boucle. L'explication détaillée de tout cela va être présentée dans ce qui va suivre. La première indication technique selon laquelle une bonne quantification de la gravitation devrait être basée sur autre chose que la procédure de quantification canonique standard provient du fait que les relations de commutation canoniques ne peuvent pas être mises en œuvre pour des topologies d'espace de phase non triviales. En ignorant certains aspects techniques (qui peuvent être trouvés dans [57], nous préférons plutôt donner un exemple [58] qui imite certaines caractéristiques de l'espace de phase du champ gravitationnel (en particulier l'exigence selon laquelle la métrique spatiale est positive). Considérons un système avec une coordonnée positive q , $q > 0$ et de moment conjugué p . Après la quantification, les états sont définis dans l'espace Hilbert comme des fonctions intégrables du carré sommable sur q , avec support sur l'axe réel positif. En imposant les relations de commutation canoniques, q et p sont promus à des opérateurs hermitiens pour lesquels la relation de commutation suivante est vérifiée $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, ce qui implique que \hat{p} soit le générateur de la q -translation, avec

10. Les configurations d'un système physique qui ne satisfont pas les équations classiques du mouvement sont appelées off-shell.

$$\phi(q + \epsilon) = H_\epsilon \phi(q) = \exp(i\epsilon p) \phi(q). \quad (2.137)$$

Cependant, dans ce schéma, H_ϵ n'est plus un opérateur unitaire, puisque le produit scalaire n'est pas invariant dans les conversions, c'est-à-dire.

$$\int_0^\infty (H_\epsilon \phi_1(q))^\dagger H_\epsilon \phi_2(q) dq = \int_0^\infty \phi_1^\dagger(q + \epsilon) \phi_2(q + \epsilon) dq \neq \int_0^\infty \phi_1^\dagger(q) \phi_2(q) dq. \quad (2.138)$$

Cette fonctionnalité indique que la relation de commutation canonique doit être remplacée. En particulier, une quantification basée sur la relation de commutation suivante $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{q}$, construite sur de bonnes bases. Une analyse analogue, mais beaucoup plus compliquée, réalisée par Isham [59] conduit à des conclusions similaires concernant l'utilisation de relations de commutation canoniques pour la quantification de la relativité générale. Un point clé de cette analyse est l'hypothèse selon laquelle les variables de configuration appartiennent à un espace vectoriel. On s'inspirant de ce résultat, Rovelli et Smolin [60] ont introduit l'idée de quantifier l'algèbre de flux d'holonomie au lieu de relations de commutation canoniques. Cependant, aucun lien direct entre leurs travaux et l'analyse d'Isham n'a été établi, principalement en raison du fait que l'espace des holonomies n'est pas un espace vectoriel. L'utilisation d'holonomies s'est également répandue parmi les approches de Gravité Quantique qui ne sont pas directement liées aux gravitation quantique à boucles. Par exemple, les holonomies ont été utilisées comme variables de base pour quantifier les défauts topologiques de la gravitation tridimensionnelle [61–63] sur lesquels la théorie des cordes cosmique de Borislav et Kibble est basé, dans lesquels aucun degré de liberté local n'est présent. Ces modèles dans trois dimensions espace-temps prédisent une cinématique de particules déformée et pourraient supporter certains scénarios avec des géométries non-commutatives (A.Connes). Ils peuvent également fournir des indications sur le cas à quatre dimensions [64] via la formulation de Mac-Dowell et Mansouri [65]. Nous montrerons comment les états du réseau de spin surviennent lors de la quantification à boucles du champ gravitationnel. Nous définirons l'espace de Hilbert en appliquant la construction de GNS à l'algèbre d'holonomie et nous obtiendrons des états de réseau de spin comme éléments de base. Le concept d'holonomie joue un rôle majeur dans la quantification de la relativité générale. C'est un élément de groupe donnant le transport parallèle de vecteurs le long des courbes. Les connexions sont des objets à intégrer sur des courbes. Considérons une connexion A_α définie sur un Fibré vectoriel avec une variété de base Σ_t et le groupe de structure G (le groupe de jauge par exemple $SU(2)$) et une courbe α sur une variété Σ_t . Une courbe est décrite par

une fonction α à partir d'un ensemble fermé de la droite réelle (que l'on peut prendre comme $[0, 1]$) prenant des valeurs sur la variété spatiale Σ_t comme suit

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow \Sigma_t, \quad s \longrightarrow \{\alpha^l(s)\}. \quad (2.139)$$

L'intégration est généralement effectuée sur des chemins, qui sont des classes d'équivalence de courbes orientées analytiquement par morceaux sous des paramétrisations¹¹. Une boucle est un chemin fermé, tandis qu'un graphique est un ensemble de chemins. Un graphique peut également être vu comme un ensemble d'arêtes, c'est-à-dire de chemins analytiques, et de sommets, qui sont les points séparant différentes arêtes. Il est possible de montrer que l'espace des boucles avec un point commun peut être doté d'une structure de groupe (de telle sorte que tout l'espace des boucles puisse être vu comme un groupoïde (un ensemble muni d'une loi interne))[6, 66]. L'holonomie, vue comme un élément du groupe \mathbf{G} , définit une notion de transport parallèle, en permettant de transporter un objet vivant dans une fibre au-dessus de $\alpha(0)$ jusqu'à la fibre au-dessus de $\alpha(1)$ par l'action de $H_\alpha[A; 0, s]$. Par conséquent, on introduit le transport parallèle de $A_\alpha = A_\alpha^i \tau_i$ le long d'une courbe $\alpha^\alpha(s)$ est l'élément de \mathbf{G} défini par

$$H_\alpha[A; 0, s](s) \in SU(2), \quad H_\alpha[A; 0, 0] = \mathbb{1}, \quad (2.140)$$

$$\frac{d}{ds} H_\alpha[A; 0, s] + A_\alpha(\alpha(s)) \dot{\alpha}^\alpha(s) H_\alpha[A; 0, s] = 0, \quad (2.141)$$

Où $\dot{\alpha}^\alpha(s) \equiv d\alpha^\alpha/ds$ (vecteur tangent à la courbe). La solution de cette équation est

$$\begin{aligned} H_\alpha[A; s_i, s_f] &= \mathcal{P} \exp \int_{s_i}^{s_f} \dot{\alpha}^\alpha(s) A_\alpha^i(\alpha(s)) \tau_i ds, \\ &= \mathcal{P} \exp \int_{s_i}^{s_f} ds A(\alpha(s)) \end{aligned} \quad (2.142)$$

où $A(\alpha(s)) = \dot{\alpha}^\alpha(s) A_\alpha^i(\alpha(s)) \tau_i$ et τ_i est une base de l'algèbre de Lie du groupe \mathbf{G} et \mathcal{P} désigne l'ordre du chemin qui est nécessaire car les A sont des matrices (comme dans les théories de Yang-Mills). On a par exemple pour $s = \mathbf{1}$, l'holonomie de la connexion A selon α est définie comme

11. Deux courbes $\alpha(s), \alpha'(s')$ sont identifiées s'il existe une fonction inversible $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\alpha'(f(s)) = \alpha(s)$.

$$\begin{aligned}
 H_\alpha[A] &= H_\alpha[A; 0, 1] \equiv \mathcal{P} \exp \int_\alpha A = \\
 &\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 A(\alpha(s_1)) ds_1 \int_0^{s_1} A(\alpha(s_2)) ds_2 \\
 &\dots \times \int_0^{s_{n-1}} A(\alpha(s_n)) ds_n
 \end{aligned} \tag{2.143}$$

Nous notons que A_α^i peut être reconstruite de manière unique si toutes les holonomies sont connues.

2.6.2 Boucles de Wilson

Le cadre dans lequel les boucles de Wilson ont été introduites pour la première fois est la formulation intégrale de la chromodynamique quantique (QCD) sur un réseau [67, 68], où ils fournissent des outils pour étudier le confinement des quarks. La principale caractéristique de cette approche est que le potentiel entre deux quarks statiques peut être obtenu à partir de la valeur d'attente des boucles de Wilson reliant ces deux particules [69–71]. Il en résulte qu'un potentiel linéaire est obtenu, ce qui produit le confinement. En outre, les états quantiques peuvent être étiquetés par des boucles fermées et ouvertes, avec des quarks aux points de fin. De tels états représentent des lignes de flux non-abéliens et ils se révèlent être des états propres de l'hamiltonien dans la forte limite de couplage [69, 70]. Giles [56] a souligné comment, à partir des boucles Wilson d'une connexion de jauge sur l'espace-temps complet (plat), les connexions peuvent être entièrement reconstruites, jusqu'à une transformation de jauge. Par conséquent, la connaissance de $H_\alpha[A]$ sur toute boucle α donne toutes les informations invariables de la jauge sur une théorie de Yang-Mills dans un espace-temps plat. Une formulation en termes de variables de boucle a été utilisée pour la quantification des théories des jauges sur le réseau, car aucune simplification substantielle ne se produit en passant de l'espace des connexions à l'espace en boucles dans un espace-temps continu. Après leur introduction, on a reconnu comment les boucles de Wilson et leurs généralisations peuvent être utiles pour une quantification indépendante du fond par la définition des holonomies sur les états de vertex, c'est-à-dire sur les classes d'équivalence de boucles sous des difféomorphismes. Les holonomies sont des éléments du groupe $SU(2)$, tout comme les transformations de jauge $A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$. La caractéristique intéressante de $H_\alpha[A]$ est leur comportement sous les transformations de jauge $g \in SU(2)$ qui n'est pas encore invariable, il se transforme comme

$$H_\alpha[A] \longrightarrow H'_\alpha[A'] = g(f)H_\alpha[A]g^{-1}(i). \quad (2.144)$$

Où i et f sont les points initial et final de α , respectivement. Par exemple, l'invariance de la jauge est obtenue après avoir effectué la trace de $H_\alpha[A]$ le long d'une boucle α , en arrivant à la boucle de Wilson $W_\alpha(A)$ connue [56], par exemple, à partir des théories de jauge sur réseau

$$\mathcal{I}_{[\alpha]}[A] = -\text{Tr}(H_\alpha[A]) = -W_\alpha(A) \quad (2.145)$$

et cela peut être vu à partir de :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[\alpha]}[A'] &= -\text{Tr}(H_\alpha[A']) = -\text{Tr}(g(f)H_\alpha[A]g^{-1}(i)) \\ &= -\text{Tr}(g^{-1}(i)g(f)H_\alpha[A]) = -\text{Tr}(H_\alpha[A]) = \mathcal{I}_{[\alpha]}[A], \end{aligned} \quad (2.146)$$

Où la propriété cyclique de la trace et la coïncidence du point initial et final de α ont été utilisées.

La trace de l'holonomie de la connexion, qui est étiquetée par des boucles sur la variété à 3-dimensions, jouent un rôle important dans la théorie quantique, ce que nous obtenons par l'insertion du champ E (en n points distincts) dans la trace de l'holonomie. Plus précisément, étant donné une boucle α en Σ_t et les points $s_1, s_2, \dots, s_n \in \alpha$ nous définissons l'invariance de jauge qui est obtenue après avoir effectué la Trace. Alors nous retrouvons la boucle de Wilson bien connue, par exemple, des théories de jauge sur un réseau, donc on a :

$$\mathcal{I}_{[\alpha]}[A] = -\text{tr}(H_\alpha[A]) = -W_\alpha(A), \quad (2.147)$$

$$\mathcal{I}_{[\alpha]}^a[A](s) = -\text{tr}(H_\alpha[A, s, s]E^a(s)), \quad (2.148)$$

$$\mathcal{I}_{[\alpha]}^{a_1 a_2}[A](s_1, s_2) = -\text{tr}(H_\alpha[A, s_1, s_2]E^{a_2}(s_2)H_\alpha[A, s_2, s_1]E^{a_1}(s_1)), \quad (2.149)$$

...

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[\alpha]}^{a_1 \dots a_N}[A](s_1, \dots, s_N) &= -\text{tr}(H_\alpha[A, s_1, s_N]E^{a_N}(s_N)H_\alpha[A, s_N, s_{N-1}]E^{a_{N-1}}(s_{N-1}) \\ &\quad \dots H_\alpha[A, s_2, s_1]E^{a_1}(s_1)). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Les observables de boucle, introduites dans les théories de Yang Mills, définissent des coordonnées de l'espace de phase et suivent une algèbre fermée de Poisson, appelée algèbre de boucle. Cette algèbre possède une propriété géométrique remarquable, par exemple, le crochet de Poisson entre $\mathcal{I}_{[\alpha]}[A]$ et $\mathcal{I}_{[\beta]}^a[A](s)$ n'est pas nul, seulement si β et α ont une intersection en un point P , si c'est le cas, le résultat est proportionnel à l'holonomie des boucles de Wilson obtenues en joignant α et β à leur intersection. Plus précisément

$$\{\mathcal{I}_{[\alpha]}[A], \mathcal{I}_{[\beta]}[A]\} = 0, \quad (2.151)$$

$$\{\mathcal{I}_{[\alpha]}[A], \mathcal{I}_{[\beta]}^{\alpha}[A](s)\} = \kappa \Delta^{\alpha}[\alpha, s] (\mathcal{I}_{[\alpha\#\beta]}[A] - \mathcal{I}_{[\alpha\#\beta^{-1}]}[A]) \quad (2.152)$$

Où

$$\Delta^{\alpha}[\alpha, s] = \int_0^1 \dot{\alpha}^{\alpha}(s) \delta^3(\alpha(s), s) ds \quad (2.153)$$

avec β^{-1} désigne la boucle β avec la direction inversée. Le côté droit de (2.152) n'est évident que si α et β sont sécantes au point P ; l'intersection de $\alpha\#\beta$ est alors défini comme commençant à partir de P , en passant par la boucle α , puis par β et se terminant par P . Le paramètre $E_i[\mathcal{S}]$ (non invariant de jauge par $SU(2)$) a un intérêt particulier car elle fait apparaître la constante \hbar caractérisant l'algèbre quantique et qui joue un rôle important dans certains aspects de la théorie, est obtenu en intégrant le champ E_i^{α} sur une surface \mathcal{S} bidimensionnelle

$$E_i[\mathcal{S}] = -i\hbar\kappa\gamma \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma n_{\alpha} E_i^{\alpha}, \quad (2.154)$$

où \mathcal{S} désigne une surface bidimensionnelle dans Σ . La variable (2.154) décrit le flux de E_i^{α} à travers la surface bidimensionnelle; c'est la variable conjuguée à l'holonomie $H_{\alpha}[A]$. Notons que le flux de l'holonomie est de nature distributive, car il a respectivement un support sur les sous-variétés unidimensionnelles et bidimensionnelles. Les variables des holonomies et flux sont des versions régularisées des variables d'Ashtekar introduite à l'origine [45]. L'algèbre résultante est connue sous le nom d'algèbre des holonomies-flux, fournissant la version la plus régulière de l'algèbre de Poisson (aucune fonction delta n'apparaît). Ses crochets de Poisson sont :

$$\{H_{\alpha}[A], E_i(\mathcal{S})\} = \sum_{p \in \alpha \cap \mathcal{S}} H_{\alpha_p}^{-}[A] \tau_i H_{\alpha_p}^{+}[A] \quad (2.155)$$

où $H_{\alpha_p}^{\pm}[A]$ sont les holonomies situées le long des deux moitiés du chemin α coupées par le point p où il coupe la surface \mathcal{S} . En l'absence d'intersection entre α et \mathcal{S} , les crochets disparaissent. De plus, l'algèbre de Poisson des holonomies-flux est très bien définie et il est possible de regarder quelles sont les représentations possibles de cette algèbre sur l'espace de Hilbert, qu'il est facile de construire pour une représentation pour laquelle les états sont des fonctions des connexions si nous considérons les holonomies comme des opérateurs de création avec un vide défini. En résumé, dans cette section nous avons pris les deux étapes clés nécessaires pour préparer la relativité générale à la quantification à boucles. La première étape consistait à reformuler la

théorie en termes du champ tétrade et d'une connexion indépendante $SU(2)$, la connexion d'Ashtekar-Barbero (2.112). La deuxième étape consistait à régulariser l'algèbre de Poisson résultante en utilisant des chemins et des surfaces, au lieu de tout l'espace (voir ce qui était fait dans la formulation d'ADM). L'algèbre résultante de $H_\alpha[A]$ et $E_i(S)$ est appelée algèbre d'holonomie-flux (qui intègrent les champs sans brisure de symétries). L'algèbre de Poisson des holonomies-flux est alors bien connue et une représentation sur un espace de Hilbert peut être recherchée. C'est la démarche de base de la gravitation quantique à boucles.

3

GRAVITÉ QUANTIQUE À BOUCLES : Cinématique

Dans ce chapitre, nous permettrons de nous préparer à la quantification canonique non-perturbative de la gravitation, connue sous le nom la gravitation quantique à boucles¹, basé sur la formulation de la relativité générale comme théorie de jauge $SU(2)$ en termes de densité de triade et de connexion d'Ashtekar et fondée sur la procédure de la quantification de Dirac pour les systèmes contraints. Nous allons aborder la construction d'un espace cinématique de Hilbert à partir duquel l'espace physique peut être extrait en imposant les trois contraintes [75] :

- La contrainte de Gauss $\mathbf{G}_i = 0$;
- La contrainte de différentielle spatiale $V_a = 0$
- La contrainte hamiltonienne $\mathbf{S} = 0$.

Ces dernières définissent complètement le contenu dynamique de la théorie et leurs équivalents d'opérateurs quantiques agissent comme projecteurs sur l'espace physique.

3.1 Méthode de quantification de Dirac

L'inclusion de la dynamique toute entière dans les contraintes est au cœur de la théorie. Elle est fortement exploitée par l'approche de quantification proposée par Dirac [21], qui repose sur une définition des états physiques dynamiques comme ceux annulés par les contraintes. Je ne présenterai ici que les résultats de cette approche qui seront utiles pour la suite. Une analyse détaillée peut être trouvée dans [76].

1. Au cours des quinze dernières années, le programme de quantification a été exploré de deux manières différentes mais équivalentes : La représentation en boucles [60, 72] et la représentation en connexions [73, 74].

Proposition : quantification de Dirac

La procédure peut être divisée en trois étapes :

- ❶ Trouver une représentation des variables d'espace de phase de la théorie en tant qu'opérateurs dans un espace de Hilbert 'cinématique' \mathcal{H}_{kin} , vérifiant les relations de commutations standards :

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]; \quad (3.1)$$

- ❷ Renforcer les contraintes aux opérateurs \hat{H}^μ dans \mathcal{H}_{kin} ;
- ❸ Distinguer l'espace des solutions des contraintes \mathcal{H}_{phys} ,

$$\hat{H}^\mu \psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{phys}. \quad (3.2)$$

Ces étapes doivent ensuite être complétées par une détermination explicite du produit scalaire dans \mathcal{H}_{phys} et une interprétation physique des observables quantiques. La procédure de Dirac est plus générale et elle peut être étendue à tout système entièrement contraint.

Essayons maintenant de l'appliquer à la formulation ADM de la relativité générale et cherchons ensuite un espace de fonctionnelles portant une représentation de l'algèbre de Poisson quantique :

$$\begin{aligned} [\hat{h}_{ab}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{cd}(\mathbf{y})] &= i\hbar \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ [\hat{h}_{ab}(\mathbf{x}), \hat{h}_{cd}(\mathbf{y})] &= 0, \\ [\hat{\pi}^{ab}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{cd}(\mathbf{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Formellement, nous pouvons procéder par analogie avec des cas plus connus, tels que la théorie des champs scalaires, et considérer une représentation de Schrödinger $\hat{h}_{ab}(\mathbf{x}) = h_{ab}(\mathbf{x})$, $\hat{\pi}^{ab}(\mathbf{x}) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ab}(\mathbf{x})}$, agissant sur les fonctions d'onde $\psi[h_{ab}(\mathbf{x})]$ de la 3-métrie. Cette procédure, qui fonctionne bien pour le champ scalaire [77], rencontre un certain nombre de difficultés lorsqu'elle est appliquée au champ gravitationnel. Par exemple, pour définir l'espace (cinématique) de Hilbert, nous avons besoin d'un produit scalaire, qui peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\int dg \overline{\psi[g]} \psi'[g] \equiv \langle \psi | \psi' \rangle. \quad (3.4)$$

Cependant, il n'existe pas de mesure de Lebesgue sur l'espace des métriques que nous pouvons utiliser pour définir g . Sans cela, nous ne pouvons même pas vérifier que $\hat{q}_{ab}(\mathbf{x})$ et $\hat{\pi}^{ab}(\mathbf{x})$ sont hermitiens, ni que $\hat{q}_{ab}(\mathbf{x})$ a un spectre défini positif, afin qu'il soit une métrique spatiale.

Ignorons ces problèmes, et essayons de procéder de manière formelle en supposant qu'il existe un \mathcal{H}_{kin} bien défini, Ensuite, renforcer des contraintes pour les opérateurs (2.80 et 2.81), et à la caractérisation de leur espace des solutions. La procédure de quantification doit alors passer par les étapes suivantes :

$$\mathcal{H}_{kin} \xrightarrow{\hat{V}^a = 0} \mathcal{H}_{Diff} \xrightarrow{\hat{S} = 0} \mathcal{H}_{phys}. \quad (3.5)$$

Considérons d'abord la contrainte vectorielle. Dans la représentation de Schrödinger définie ci-dessus, la version barbouillée donne

$$\hat{H}(N_a)\psi[h_{ab}] = 2i\hbar \int_{\Sigma} d^3x \nabla_b N_a \frac{\delta\psi}{\delta h_{ab}} = 0, \quad (3.6)$$

Après une intégration par parties nous avons $\psi[h_{ab} + 2\nabla_{(a}N_{b)}] \equiv \psi[h_{ab}]$, et de cela nous constatons que la solution de la contrainte vectorielle soit fonctionnelle des invariants métriques sous difféomorphisme. Sur le niveau quantique, cela représente l'action correcte des contraintes classiques. Cependant, l'espace des solutions \mathcal{H}_{Diff} est encore mal défini, car il hérite de la cinématique le manque de théorie des mesures ou d'autres moyens de contrôle. Pour la contrainte hamiltonienne, nous pouvons écrire

$$\hat{H}\psi[h_{ab}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2} G^{abcd} : \frac{1}{\sqrt{\det\hat{g}}} \frac{\delta^2}{\delta h_{ab}(x)\delta h_{cd}(x)} : -\sqrt{\det\hat{g}}R(\hat{g}) \right] \psi[h_{ab}], \quad (3.7)$$

où les deux points : signifient qu'il faut prescrire un ordre aux opérateurs. La situation est plus compliquée pour la contrainte hamiltonienne, puisqu'elle nécessite la définition de produits d'opérateurs au même point, objets remarquablement très singuliers. L'expression formelle (3.7) est connue sous le nom d'équation de Wheeler-DeWitt [53, 54, 78]. Même si nous parvenons à donner une prescription de commande appropriée et à régulariser l'opérateur différentiel, le problème de l'équation est que nous n'avons aucune caractérisation des solutions, pas même formellement comme pour les contraintes difféomorphisme ci-dessus. Et bien sûr, encore aucune idée sur la connaissance de l'espace physique de Hilbert et du produit scalaire (voir cependant les modèles de minisuperespaces [79]). La gravitation quantique à boucle est une approche du problème qui améliore considérablement la situation et donne un certain nombre de réponses à ces questions en suspens. La clé de la gravitation quantique à boucles et de cette amélioration est étonnamment simple : Au lieu de changer la théorie gravitationnelle ou le paradigme de la quantification, nous utilisons simplement des variables différentes pour décrire la gravité. Après tout, nous sommes conscients du fait que tous les choix de variables fondamentales

ne fonctionnent pas également lors de la quantification d'une théorie classique. Considérons par exemple l'oscillateur harmonique, classiquement, la description la plus élégante du système concerne les variables d'angle d'action, qui paramètrent l'espace des phases comme suit : $\{\phi, J\} = \mathbf{1}$ au lieu de $\{q, p\} = \mathbf{1}$. Cependant, il est plus pratique de quantifier le système en utilisant les variables (q, p) que les variables à angle d'action, qui nécessitent une attention particulière dans la construction de l'algèbre des opérateurs et dans la gestion de l'unité.

Introduisant maintenant les variables qui nous permettent de reformuler la relativité générale d'une manière plus commode à la procédure de quantification de Dirac.

Proposition : méthode de quantification de la relativité générale

Nous suivons cette procédure pour quantifier la relativité générale en tant que système hamiltonien contraint. Les principales étapes formelles sont [9] :

- ❶ La définition de l'espace cinématique de Hilbert de la relativité générale, nous choisis de la connexion qui est considérée comme une variable de configuration. L'espace cinématique de Hilbert, \mathcal{H}_{kin} , se compose de fonctionnelles appropriées de la connexion $\psi[A]$ qui sont intégrables en carré sommable par rapport à une mesure gaussienne appropriée δA , définissant un produit scalaire qui fait passer de l'espace cinématique à un espace de représentation de Hilbert. Sur cet espace, la représentation de l'algèbre de Poisson est définie comme une représentation de Schrödinger :

$$\hat{A}_a^i \psi[A] = A_a^i \psi[A] \quad (3.8)$$

$$\hat{E}_i^a \psi[A] = -i\hbar\kappa\gamma \frac{\delta}{\delta A_a^i} \psi[A] \quad (3.9)$$

Avec la connexion agissant par multiplication et la variable de flux en tant que dérivée ; Ils satisfont les relations de commutation canoniques ci-dessous :

$$[\hat{A}_a^i(x), \hat{E}_j^b(y)] = i\hbar\gamma\delta_a^b\delta_j^i\delta^{(3)}(x-y) \quad (3.10)$$

- ❷ Ensuite, nous voulons que les contraintes soient des opérateurs agissant dans cet espace, c'est à dire que les contraintes de Gauss et de difféomorphisme spatial ont une action naturelle sur les états de \mathcal{H}_{kin} . Il existe plutôt une certaine ambiguïté dans la définition de la contrainte hamiltonienne, principalement en raison de sa structure hautement non linéaire.

⊛ La troisième étape consiste la définition de l'espace physique de Hilbert, \mathcal{H}_{phys} , comme l'espace annihilant tous les opérateurs de contraintes :

$$\mathcal{H}_{kin} \xrightarrow{\hat{G}\psi=0} \mathcal{H}_{kin}^G \xrightarrow{\hat{V}_\alpha\psi=0} \mathcal{H}_{diff} \xrightarrow{\hat{S}\psi=0} \mathcal{H}_{phys} \quad (3.11)$$

$$\psi[A] \in \mathcal{H}_{phys} \iff \hat{G}\psi = \hat{V}_\alpha\psi = \hat{S}\psi = 0 \quad (3.12)$$

3.2 Réseaux de spin

Le problème avec le programme de quantification adapté à la Relativité Générale hamiltonienne est que nous n'avons pas de métrique de fond disponible pour définir la mesure d'intégration δA , car maintenant la métrique est une quantité entièrement dynamique. Nous devons définir une mesure sur l'espace des fonctions de la connexion $\psi[A]$ sans compter sur une métrique de fond fixe. Dans ce but, une notion clé est celle des fonctions cylindriques [6, 13]. En gros, ce sont des fonctions d'un champ qui ne dépendent que d'un sous-ensemble des composantes du champ. Dans le cas présent, nous considérons les fonctionnels de la connexion A qui dépendent uniquement de ses holonomies $H_{\alpha_l}[A]$ le long d'un ensemble fini de chemin $\{\alpha_l\}$.

Maintenant, nous définissons un graphe incorporé $\Gamma \subset \Sigma$ d'une collection de chemins orientés α_l dans l'hypersurface Σ (nous appellerons ces liens les chemins du graphe) réunis au plus à leurs extrémités, c'est-à-dire ne se traversant jamais. En a L le nombre total de liens, une fonction cylindrique est un couple (Γ, f) d'un graphe et une fonction lisse $f : [SU(2)]^L \rightarrow \mathbb{C}$ définie comme

$$\psi_{(\Gamma, f)}[A] \equiv \langle A | \psi_{(\Gamma, f)} \rangle = f(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]) \in Cyl_\Gamma \quad (3.13)$$

où $\alpha_l; l = 1, \dots, L$ sont les liens du graphe Γ .

Pour faire de cet espace de fonctions un véritable espace de Hilbert, il ne manque plus qu'un produit scalaire. C'est là qu'apparaît tout l'intérêt de l'holonomie : celle-ci étant un élément de $SU(2)$, et sur un groupe compact, il existe une mesure unique, invariante et normalisée, appelée mesure de Haar² avec $d\mu(H)$. A l'aide de L copies de la mesure de Haar, nous pouvons choisir dans les fonctions cylindriques Cyl_Γ , définies sur un même graphe Γ , le produit scalaire de deux fonctions :

2. La mesure de Haar du groupe $SU(2)$ est définie par les propriétés suivantes :

$$\int_{SU(2)} dg = 1, \text{ et } dg = d(ag) = d(ga) = dg^{-1} \forall a \in SU(2). \quad (3.14)$$

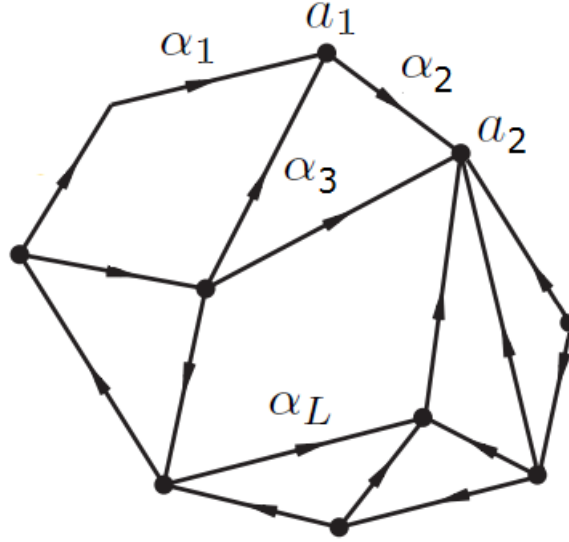


Figure 3.1 – Un graphe $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ est une collection fini de L courbes orientés par morceaux α_l , $l = 1, \dots, L$, plongés dans la 3-variété Σ . Les courbes α_l formant le graphe Γ sont appelés liens ou arête, et leurs points de rencontre sont appelés les nœuds a_n , $n = 1, \dots, N$ ou vertex du graphe.

$$\langle \psi_{(\Gamma, f)} | \psi_{(\Gamma, g)} \rangle \equiv \int_{[SU(2)]^L} \left[\prod_{l=1}^L d\mu_H(H_{\alpha_l}) \right] \overline{f(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A])} g(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]). \quad (3.15)$$

où \langle, \rangle est le produit intérieur cinématique, cela transforme Cyl_{Γ} comme un espace de Hilbert \mathcal{H}_{Γ} associé à un graphe donné Γ . Par conséquent, l'espace complet de Hilbert peut être défini comme la somme directe des espaces de Hilbert sur tous les graphes possibles (au sein d'une même feuille d'espace-temps Σ) :

$$\mathcal{H}_{kin} = \bigoplus_{\Gamma \in \Sigma} \mathcal{H}_{\Gamma} = \mathcal{L}_2 [(SU(2))^L, d\mu_{Haar}]. \quad (3.16)$$

Le produit scalaire sur \mathcal{H}_{kin} est facilement induit de (3.15) de la manière suivante : si ψ et ψ' partagent le même graphe, alors (3.15) s'applique immédiatement. Si elles ont des graphes différents, disons Γ_1 et Γ_2 , nous considérons un autre graphe $\Gamma_3 \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, nous étendons f_1 et f_2 trivialement sur Γ_3 et le produit scalaire comme (3.15) sur Γ_3 :

$$\langle \psi_{(\Gamma_1, f_1)} | \psi_{(\Gamma_2, f_2)} \rangle \equiv \langle \psi_{(\Gamma_3, f_1)} | \psi_{(\Gamma_3, f_2)} \rangle. \quad (3.17)$$

Une fois que nous avons un espace de Hilbert \mathcal{H}_Γ associé à un graphe Γ , nous pouvons chercher une représentation de l'algèbre holonomie-flux sur lui. Nous allons ensuite avoir besoin d'une base orthonormée complète sur cet espace. C'est le théorème de Peter-Weyl, généralisation de la transformée de Fourier³, qui va nous la fournir.

Ce théorème nous dit en effet que toute fonction $f(\mathbf{g})$, où \mathbf{g} appartient à un groupe compact \mathbf{G} , peut être décomposée sur les représentations irréductibles unitaires du groupe \mathbf{G} . Dans notre cas, ces représentations sont les matrices de Wigner (avec $\mathbf{G} \equiv SU(2)$)

$$D_{m,n}^j(H_{\alpha_l}[A]) \equiv \langle A | \Gamma, j, m, n \rangle_{\alpha_l} \quad (3.18)$$

Où $D_{m,n}^j(H_{\alpha_l})$ matrice de Wigner est la matrice représentant l'holonomie H_{α_l} dans la représentation irréductible "spin - j" associée au lien α_l , et $|\Gamma, j, m, n\rangle_{\alpha_l}$ est un état de lien α_l associé au Γ .

Soit une fonction $f \in \mathcal{L}_2[SU(2)]$. La formule de Peter-Weyl permet d'exprimer f comme une somme sur les représentations irréductibles unitaires de $SU(2)$, donc chaque fonction peut être étendue comme ce suit :

$$f(\mathbf{g}) = \sum_j \sum_{m,n=-j}^j \tilde{f}_j^{mn} D_{m,n}^j(\mathbf{g}) \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (3.19)$$

avec

$$\tilde{f}_j^{mn} = \sum_{m=-j}^j \int_G dg \overline{D_{m,n}^j(\mathbf{g})} f(\mathbf{g}) = \langle D_{m,n}^j(\mathbf{g}) | f(\mathbf{g}) \rangle \quad (3.20)$$

Et les \tilde{f}_j^{mn} sont l'équivalents des composantes de Fourier de la fonction f . Selon la théorie de Peter-Weyl, elles forment une base orthogonales de l'espace $\mathcal{L}_2[SU(2)]$ par rapport au produit scalaire défini par la mesure de Haar, spécifiquement :

$$\int dg \overline{D_{m',n'}^{j'}(\mathbf{g})} D_{m,n}^j(\mathbf{g}) = \frac{1}{2j+1} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (3.21)$$

Une telle expansion s'applique immédiatement à \mathcal{H}_Γ . Pour commencer, cet espace peut être considéré comme le produit tensoriel des L espaces de Hilbert associés à chacun des liens α_l qui forment le graphe Γ , si nous considérons les liens comme des graphes triviaux d'eux-mêmes. Appelons ces espaces $\mathcal{H}_{\alpha_l} = \mathcal{L}_2[SU(2)]$ avec $l = 1, \dots, L$. Une fonction appartenant à \mathcal{H}_{α_l}

3. Le lien avec le cas du groupe $U(1)$ est direct : pour $f \in \mathcal{L}^2[U(1)]$, nous avons $f(\theta) = \sum_n f_n \exp(in\theta)$, où $\exp(in\theta)$ représentation unitaire irréductible du groupe $U(1)$ et $f_n = (2\pi)^{-1} \int d\theta \exp(in\theta) f(\theta)$. La mesure $(2\pi)^{-1} d\theta$ est la mesure de Haar du groupe $U(1)$.

est ensuite développée comme

$$\begin{aligned}\psi_{(\alpha_l, f)}[A] &= \langle A | \alpha_l, f \rangle = \sum_{j_l} \sum_{n_l, m_l = j_l} \tilde{f}_{j_l}^{m_l n_l} \langle A | \Gamma, j_l, m_l, n_l \rangle_{\alpha_l} \\ &= \sum_{j_l} \sum_{n_l, m_l = j_l} \tilde{f}_{j_l}^{m_l n_l} D_{m_l n_l}^{j_l} (H_{\alpha_l}[A]),\end{aligned}\quad (3.22)$$

Une généralisation de cette formule aux espaces $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{L}_2[SU(2)^L]$ donne la décomposition d'une fonction cylindrique $\psi_{(\Gamma, f)}[A] = f(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A])$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi_{(\Gamma, f)}[A] &= \langle A | \psi_{(\Gamma, f)} \rangle = \langle A | \bigotimes_{l=1}^L |\psi_{(\alpha_l, f)}\rangle \\ &= \sum_{\{j_l, m_l, n_l\}_l} \tilde{f}_{j_1 \dots j_L}^{m_1 n_1 \dots m_L n_L} D_{m_1 n_1}^{j_1} (H_{\alpha_1}[A]) \dots D_{m_L n_L}^{j_L} (H_{\alpha_L}[A]),\end{aligned}\quad (3.23)$$

Ainsi, toute fonction cylindrique peut se décomposer comme :

$$\begin{aligned}|\psi_{(\Gamma, f)}\rangle &= \sum_{\{j_l, m_l, n_l\}_l} \tilde{f}_{\{j_l\}}^{\{m_l, n_l\}} \bigotimes_{l=1}^L |\Gamma, j_l, m_l, n_l\rangle_{\alpha_l} \\ &= \sum_{\{j_l, m_l, n_l\}_l} \tilde{f}_{\{j_l\}}^{\{m_l, n_l\}} |\Gamma, \{j_l, m_l, n_l\}\rangle,\end{aligned}\quad (3.24)$$

où les $|\Gamma, \{j_l, m_l, n_l\}\rangle$ forment une base de \mathcal{H}_{kin} , la notation $\{j_l, m_l, n_l\}_l$ signifie que la somme est faite en variant séparément j_l, m_l, n_l pour chaque lien l , et les coefficients $\tilde{f}_{j_1 \dots j_L}^{m_1 n_1 \dots m_L n_L}$ d'expansion sont simplement donnée par le produit intérieur cinématique de la fonction cylindrique avec le produit tensoriel de représentations irréductibles, à savoir (3.15)

$$\tilde{f}_{j_1 \dots j_L}^{m_1 n_1 \dots m_L n_L} = \left\langle \prod_{l=1}^L D_{m_l n_l}^{j_l} (H_{\alpha_l}[A]) \middle| \psi_{(\Gamma, f)} \right\rangle, \quad (3.25)$$

On peut visualiser ces états de base comme étant une coloration du graphe Γ : à chaque lien du graphe on associe une représentation irréductible spin j_l de $SU(2)$ et deux nombres quantiques $-j_l \leq m_l, n_l \leq j_l$, voir la figure (3.2). Il faut de plus préciser sur le graphe l'orientation des liens que l'on choisit (qui est en réalité le sens de parcours choisi pour les holonomies : si on permute l'orientation d'un lien, cela revient à changer l'holonomie correspondante en son inverse). Enfin, notons qu'il est techniquement possible de prendre un des j_l égal à zéro : l'holonomie correspondante sera alors simplement égale à 1 (c'est la représentation triviale). Tout se passe alors

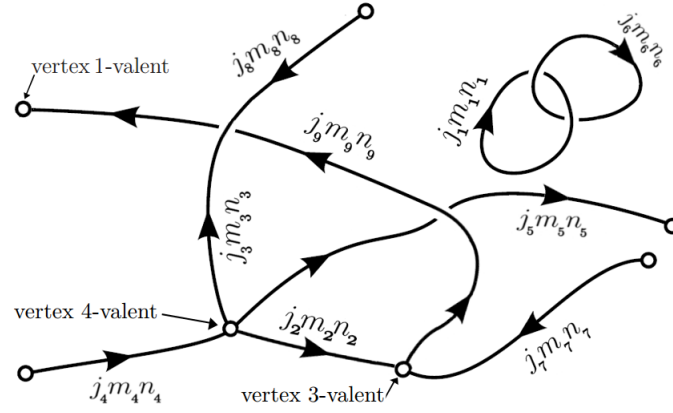


Figure 3.2 – Exemple d'un graphe Γ avec des lien coloré par des spins j_l et les nombres quantiques m_l et n_l .

comme si le lien associé à ce spin n'était pas présent, et donc que l'on a un autre graphe. Dans ce qui suit, nous considérerons toujours $j_l > 0$. Revenons à $\mathcal{H}_{\alpha_l} = \mathcal{L}_2[SU(2)]$, l'espace défini sur un seul lien, dans la représentation de l'holonomie, ses éléments de base sont les matrices Wigner $D_{m_l n_l}^{j_l}$. Les dernières rotation des vecteurs dans une représentation spin j_l donne une autre rotation de la même représentation. En d'autres termes, ce sont des cartes de l'espace \mathcal{H}_{j_l} de Hilbert de la représentation de spin j_l à elle-même. De telles cartes peuvent être considérées comme des éléments de $\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}$, où les deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_{j_l} appartiennent aux deux extrémités du lien, et donc $\mathcal{H}_{\alpha_l} = \mathcal{L}_2[SU(2)]$ peut être décomposée dans la somme directe des sous-espaces de dimension finie à une représentation fixe j_l :

$$\mathcal{H}_{\alpha_l} = \mathcal{L}_2[SU(2)] = \bigoplus_{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}). \quad (3.26)$$

Comme \mathcal{H}_{Γ} est constitué de L copies, nous avons :

$$\mathcal{H}_{\Gamma} = \mathcal{L}_2[SU(2)^L] = \bigotimes_{l=1}^L \bigoplus_{j_l} (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}) = \bigoplus_{\{j_l\}_l} \bigotimes_{l=1}^L (\mathcal{H}_{j_l} \otimes \mathcal{H}_{j_l}) \quad (3.27)$$

où $\{j_l\}_l$ signifie que la somme est effectuer en variant séparément la représentation dans les extrémités de chaque lien l . Dans cet espace, nous pouvons déclencher l'action de l'algèbre de flux holonomie (2.155) en favorisant l'holonomie à un opérateur agissant par multiplication, le flux à l'opérateur agissant à travers la dérivée et leurs crochets de Poisson aux relations de commutation (multiplié par $i\hbar$) :

$$\hat{H}_\beta[A]H_\alpha[A] = H_\beta[A]H_\alpha[A], \quad (3.28)$$

$$\hat{E}_i[\mathcal{S}]H_\alpha[A] = -8\pi i\gamma\ell_p^2 \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma n^b \frac{\delta H_\alpha[A]}{\delta A_i^b} = \pm 8\pi i\gamma\ell_p^2 H_{\alpha_1}[A]\tau_i H_{\alpha_2}[A], \quad (3.29)$$

$$\{\hat{H}_\alpha[A], \hat{E}_i(\mathcal{S})\} = \sum_{\rho \in \alpha \cap \mathcal{S}} \hat{H}_{\alpha_\rho}^- [A]\tau_i \hat{H}_{\alpha_\rho}^+ [A]. \quad (3.30)$$

Si l'intersection entre la surface \mathcal{S} et le lien α_l n'est pas vide, le flux divise l'holonomie dans les deux moitiés coupées par la surface et insère un générateur $SU(2)$ entre les deux. Le signe est défini par l'orientation relative entre \mathcal{S} et α_l . Si la surface ne coupe pas le lien, l'action du flux disparaît, ainsi que le commutateur.

L'action de cette algèbre s'étend à un élément de base générique $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$ (il suffit de remplacer $H_{\alpha_l}[A]$ par la matrice de Wigner) et, à partir de la définition en \mathcal{H}_Γ , elle est étendue par linéarité sur l'ensemble de \mathcal{H}_{kin} .

Avec la définition des opérateurs algébriques, nous avons rempli la définition de l'espace cinématique de Hilbert de gravitation quantique à boucles. La physique, d'autre part, est définie en imposant les contraintes.

Les solutions de la contrainte de Gauss $\hat{G}\psi = 0$ sont des états qui évoluent dans ce que nous avons désigné \mathcal{H}_{kin}^G et sont définis comme les éléments invariants de $SU(2)$ de l'espace cinématique de Hilbert. Se sont les réseaux de spin⁴, car ils sont des états avec des spins affectés aux liens, et éventuellement des vertex, d'un graphe.

Afin de caractériser ces solutions, nous rappelons comment la symétrie de jauge agit par l'action \triangleright sur l'holonomie $H_{\alpha_l}[A]$, et si on considère une transformation de jauge paramétrée par un élément de groupe $g(\mathbf{x}) \in SU(2)$ en tout point $\mathbf{x} \in \Sigma$, donc on a :

$$g \triangleright H_{\alpha_l}[A] = H_{\alpha_l}[{}^g A] = g_{s(\alpha_l)} H_{\alpha_l}[A] g_{t(\alpha_l)}^{-1} \quad (3.31)$$

Où $s(\alpha_l) = \alpha_l(0)$ et $t(\alpha_l) = \alpha_l(1)$ sont les extrémités de la courbe α_l , c'est-à-dire le point initial et le point final. Si l'on considère un graphe orienté et fermé $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ avec L liens reliant N points, que nous appelons vertex, la symétrie continue de la jauge $SU(2)$ est limitée à une symétrie discrète de $SU(2)$ aux vertex. Ainsi, le groupe de jauge de la théorie est $[SU(2)]^N$. Les états invariables de la jauge sont ceux qui satisfont

4. La notion du réseau de spin vient d'une idée de Roger Penrose [80] qui consistait à appliquer la théorie des graphes à la quantification discrète de la géométrie. Elle fut progressivement introduite en Gravité Quantique, notamment dans [81].

$$g \triangleright \psi_{(\Gamma, f)}[A] = f\left(g_{s(\alpha_1)} H_{\alpha_1}[A] g_{t(\alpha_1)}^{-1}, \dots, g_{s(\alpha_L)} H_{\alpha_L}[A] g_{t(\alpha_L)}^{-1}\right) \quad (3.32)$$

Par conséquent, pour que $\psi_{(\Gamma, f)}[A]$ soit invariant par une transformation de jauge, il faut tenir compte que la fonction f définie sur $SU(2)^L$ soit invariante par l'action de $SU(2)^N$

$$f\left(g_{s(\alpha_1)} H_{\alpha_1}[A] g_{t(\alpha_1)}^{-1}, \dots, g_{s(\alpha_L)} H_{\alpha_L}[A] g_{t(\alpha_L)}^{-1}\right) = f(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]) \quad (3.33)$$

Donc l'action d'une transformation de jauge sur une fonction cylindrique basée sur Γ est

$$\psi_{(\Gamma, f)}[A] = f(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]) \quad (3.34)$$

Les fonctions cylindriques ayant cette propriété (i.e. sont invariantes sous l'action de $SU(2)$) elles forment un sous-espace propre \mathcal{K}_Γ de \mathcal{H}_Γ des solutions de la contrainte de Gauss G_i , avec

$$\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{L}_2 \left[SU(2)^L / [SU(2)]^N \right], \quad (3.35)$$

de sorte que $\mathcal{H}_{kin}^G = \bigoplus_{\Gamma \subset \Sigma} \mathcal{K}_\Gamma$.

Dans la base de la matrice de Wigner, une transformation g_a sur le vertex a agit sur les éléments de groupe des liens qui se rencontrent au vertex. Étant les matrices de représentation des matrices de Wigner, la transformation de jauge agit sur leurs indices. Par conséquent, pour que l'état soit invariant, le coefficient $\tilde{f}_{m_1 n_1 \dots m_L n_L}^{j_1 \dots j_L}$ doit être un tenseur invariant lorsqu'il est soumis à une transformation de groupe sur les indices liés à ce vertex.

Proposition : l'entrelaceurs (Anglais : intertwiners)

Maintenant, pour rendre les fonctions d'état invariantes sous l'action de $SU(2)$, c'est-à-dire pour satisfaire la relation (3.33), il est nécessaire d'imposer l'invariance sous le groupe $SU(2)$ à chaque vertex. Cela se fait en connectant chaque vertex a avec un tenseur I^a

$$I^a : \Pi_{\alpha_{in}} V^j \otimes \Pi_{\alpha_{out}} V^j \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3.36)$$

Ces tenseurs sont appelés entrelaceurs invariant sous l'action de $SU(2)$, et V^j est l'espace associée à la représentation de spin- j . Avec α_{in} sont les liens entrants vers le vertex a et α_{out} sont les liens sortants du vertex a .

La donnée des entrelaceurs I^{α} pour tous les vertex α de Γ permet de contracter les éléments des matrices $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$ au niveau des vertex à l'aide des I^{α} . Pour retrouver une base d'entrelaceurs aux vertex n -valent, on va déplier simplement le vertex dans un graphe à n -liens externes contenant uniquement des vertex trivalents (virtuels) : les entrelaceurs de vertex trivalent sont donnés par Clebsh-Gordan et nous étiquetons les liens virtuels avec des spins internes pour un vertex. On obtient alors une base de \mathcal{H}_{Γ} par des fonctions étiquetées par des spins j_l sur chaque lien et des entrelaceurs I^{α} à chaque vertex : c'est la base des réseaux de spin.

Définition : un réseau de spin et son États

A partir de ces données, on définit alors un réseau de spin de $S = (\Gamma, \{j_{\alpha_l}\}, \{I^{\alpha_n}\})$, avec α_l un lien et α_n un vertex de Γ est la donnée d'un graphe orienté Γ pour représenter un j_{α} irréductible de $SU(2)$ pour chaque lien de Γ et pour l'entrelaceurs I^{α_n} pour chaque vertex.

Un état de réseau de spin $\Psi_S(A)$ est une fonction cylindrique $f_S(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A])$ associée au réseau de spin S du graphe Γ

$$\langle A | S \rangle = \Psi_S(A) \quad (3.37)$$

Les matrices des holonomies définies sur chaque lien α_l sont contractées par les tenseurs I^{α} en chaque vertex α de Γ donnant :

$$\Psi_S(A) = \bigotimes_{\text{liens } i \in \Gamma} D^{j_i}(H_{\alpha_i}[A]) \bigotimes_{\text{vertex } \alpha \in \Gamma} I^{\alpha}. \quad (3.38)$$

En utilisant le théorème de Pete-Weyl, nous pouvons démontrer que deux états de réseau de spin distincts sont orthonormés dans le produit scalaire. les états des réseaux de spin forment une base orthonormée complète (non-dénombrable) de \mathcal{H}^{inv}

Comme le groupe de jauge est constitué d'une transformation localisée aux vertex, il est comode de réorganiser \mathcal{H}_{Γ} en regroupant les espaces de Hilbert au même nœud, qui se transforment ensemble sous une transformation de jauge. Pour chaque vertex $\alpha = 1, \dots, N$ nous étiquetons avec $\mathbf{v}(\alpha) = 1, \dots, V(\alpha)$ chacun des liens $V(\alpha)$ sortant de α (α est appelé nœud V -valent).

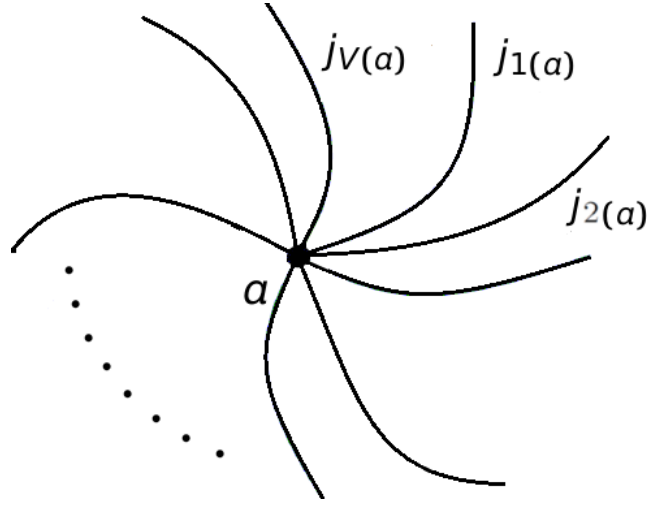


Figure 3.3 – L'espace sur chaque vertex $\mathcal{H}_{j_1(a)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_{V(a)}}$

On obtient :

$$\mathcal{H}_\Gamma = \bigoplus_{\{j_{V(a)}\}_{V(a)}} \bigotimes_{\alpha=1}^N (\mathcal{H}_{j_1(a)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_{V(a)}}) \quad (3.39)$$

Où $\mathcal{H}_{j_{V(a)}}$ est l'espace Hilbert de représentation de spin j à l'extrémité du lien $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ qui croise les autres liens dans un vertex \mathbf{a} , et, comme d'habitude, la somme est effectuée en variant séparément chaque $j_{V(a)}$. Ensuite, nous voulons les états invariants de jauge, ils évolueront dans le sous espace propre (voir la figure (3.3)) :

$$\mathcal{K}_\Gamma = \bigoplus_{\{j_{V(a)}\}_{V(a)}} \bigotimes_{\alpha=1}^N \text{Inv}_{SU(2)} (\mathcal{H}_{j_1(a)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_{V(a)}}). \quad (3.40)$$

Étant donné un état ψ dans l'espace sur chaque vertex $(\mathcal{H}_{j_1(a)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_{V(a)}})$, la projection sur le sous-espace invariable de la jauge est obtenue par la procédure de calcul de la moyenne du groupe. Compte tenu d'une fonction arbitraire $f \in \text{Cyl}_\Gamma$, la fonction

$$f_0(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]) \equiv \int_{[SU(2)]^L} \left[\prod_n d\mu(g_n) \right] f(g_{s(\alpha_1)} H_{\alpha_1}[A] g_{t(\alpha_1)}^{-1}, \dots, g_{s(\alpha_L)} H_{\alpha_L}[A] g_{t(\alpha_L)}^{-1}) \quad (3.41)$$

Au début et à la fin de chaque holonomie on introduit des éléments \mathbf{g} du groupe de jauge $SU(2)$. Il y a intersection des différentes holonomies en un point lorsque celles-ci partagent le

même élément g du groupe $SU(2)$. Cela revient donc à introduire un élément g de $SU(2)$ pour chaque vertex du graphe⁵ représentant le réseau de spin de Penrose. la fonction f peut se décomposer comme ce suit :

$$f_0(H_{\alpha_1}[A], \dots, H_{\alpha_L}[A]) \equiv \int_{[SU(2)]^L} \left[\prod_n d\mu(g_n) \right] \sum_{\{j_l, m_l, n_l\}_l} \tilde{f}_{j_1 \dots j_L}^{m_1 n_1 \dots m_L n_L} \times \prod_{l=1}^L D_{m_l, n_l}^{j_l}(g_{s(\alpha_l)} H_{\alpha_l}[A] g_{t(\alpha_l)}^{-1}), \quad (3.43)$$

Nous utilisons alors la loi du groupe $D_{m,n}^j(gh) = D_{m,m'}^j(g) D_{m',n}^j(h)$, ainsi que la propriété des matrices de Wigner :

$$D_{m,n}^j(g^{-1}) = D_{m,n}^j(g)^{-1} = \overline{D_{m,n}^j(g)} = (-1)^{n-m} D_{-n,-m}^j(g), \quad (3.44)$$

Pour arriver enfin à des matrices satisfaisant la fonction (3.23).

$$D_{m_l, n_l}^{j_l}(g_{s(\alpha_l)} H_{\alpha_l}[A] g_{t(\alpha_l)}^{-1}) = (-1)^{n_l - n'_l} D_{m_l, m'_l}^{j_l}(g_{\alpha(\alpha_l)}) D_{m'_l, n'_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A]) D_{-n_l, -n'_l}^{j_l}(g_{t(\alpha_l)}). \quad (3.45)$$

Sans entrer dans les détails, nous pouvons regrouper ensemble les matrices associées à un même élément g de $SU(2)$ pour avoir, en chaque vertex \mathbf{a} un projecteur :

$$\mathcal{P}^{\{j_{v(\mathbf{a})}\}}_{\{m_l, n_l\}} \equiv \int d\mu(g) \prod_{v(\mathbf{a})=1}^{V(\mathbf{a})} D_{m_l, n_l}^{j_{v(\mathbf{a})}}(g), \quad (3.46)$$

C'est-à-dire brancher la transformation $SU(2)$ dans les représentations de chacun des liens entrant dans le vertex et en faisant la moyenne sur les éléments possibles du groupe de jauge.

Rendre un état invariant de jauge revient donc simplement à introduire un tel projecteur en chaque vertex du graphe (à un facteur $(-1)^{\sum_l n_l - n'_l}$ près). En revenant à la notation plus concise des vecteurs en *bra* et *ket*, un état invariant de jauge est de la forme :

5. On remarque que l'holonomie sur une *boucle* est invariante de jauge. L'exemple le plus simple de fonction cylindrique invariante de jauge est donc une *boucle de Wilson*, qui définie comme la trace de la matrice de Wigner associée à une telle holonomie :

$$W^j(H(A)) = \text{Tr}(D_{m,n}^j(H(A))) \quad (3.42)$$

La gravitation quantique à boucles tire son nom de tels objets : Elle a initialement été formulée en ne faisant intervenir que ces boucles de Wilson, puis elle a été généralisée sur des graphes plus complexes.

$$\left| \psi_{(\Gamma, f)}^0 \right\rangle = \sum_{\{j_l, m_l, n_l, m'_l, n'_l\}_l} \tilde{f}_{\{j_l\}}^{\{m_l, n_l\}} (-1)^{\sum_l n_l - n'_l} \left[\prod_a \mathcal{P}_a^{\{j_{v(a)}\}}_{\{m_l, n_l\}} \right] |\Gamma, \{j_l, m_l, n_l\}\rangle, \quad (3.47)$$

Focalisons-nous sur les cas $V = 3$, qui est le nombre minimal de liens dont nous avons besoin pour que le sous-espace invariable existe.

Étudions ces être plus en détail en regardant quelques cas particuliers. Commençons par un vertex de uni-valence (la valence d'un vertex est le nombre de lien qui y sont connectés).

Nous avons :

$$\mathcal{P}_{m,n}^j = \int d\mu(g) D_{m,n}^j(g) = \frac{1}{2j+1} \delta^{j,0} \delta_{m,0} \delta_{n,0} = 0, \quad (3.48)$$

Car on a supposé $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$: Ce projecteur est identiquement nul. Les graphes invariants de jauge ne contiennent donc pas de vertex monovalent (ou s'ils en contiennent, ceux-ci n'ont aucune influence sur les résultats). Passons nous au cas de bi-valence. Le projecteur est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m_1, m_2, n_1, n_2}^{j_1, j_2} &= \int d\mu(g) D_{m_1, n_1}^{j_1}(g) D_{m_2, n_2}^{j_2}(g) \\ &= \frac{1}{2j+1} (-1)^{m_2 - n_2} \delta^{j_1, j_2} \delta_{m_1, -m_2} \delta_{n_1, -n_2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Celui-ci revient à supprimer le vertex et à introduire un nouveau lien, union des deux premiers. Là encore, l'invariance de jauge simplifie le graphe en combinant les holonomies qui se coupent sur des vertex bivalents. Les choses intéressantes commencent réellement avec les vertex de tri-valence. En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m_1, m_2, n_1, n_2}^{j_1, j_2} &= \int d\mu(g) D_{m_1, n_1}^{j_1}(g) D_{m_2, n_2}^{j_2}(g) D_{m_3, n_3}^{j_3}(g) \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \\ &= \iota^{m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Où les coefficients

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \iota^{abc} \quad (3.51)$$

Les grandeurs ι^{abc} sont les symboles $3j$ de la théorie quantique du moment cinétique qui ont été introduits par E.Wigner [20, 22, 82]. Dans la décomposition du produit tensoriel des deux représentations irréductibles du groupe $SU(2)$, ils apparaissent les coefficients de Clebsch-

Gordan [83] à quelques facteurs et signe près. Lorsque les trois moments cinétiques j ne vérifient pas les inégalités triangulaires ($|j_1 - j_2| < j_3 < j_1 + j_2$), le projecteur relatif à cette décomposition est identiquement nul, aussi si leur somme est demi-entière c'est à dire $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$ le projecteur est également nul. La séparation des parties en m et a est donc possible, le projecteur de la décomposition peut donc s'exprimer sous forme de produits de deux facteurs, le premier $j_1 \dots j_L$ est contractible avec les coefficients $\check{f}_{m_1 n_1 \dots m_L n_L}^{j_1 \dots j_L}$, le deuxième se contracte avec les états du graphe $|\Gamma, f\rangle$, et c'est cette contractibilité qui assure l'invariance de jauge des deux facteurs de projection. Dans le cas d'un vertex de valence égale à trois, nous avons l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}$. En vertu de la théorie quantique de l'addition des moments cinétiques, le produit tensoriel de deux représentations irréductibles est exprimé par une sommation sur les représentations comme se suit :

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j. \quad (3.52)$$

Donc :

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \left(\bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j \right) \otimes \mathcal{H}_{j_3} = \bigoplus_{k=|j-j_3|}^{j+j_3} \mathcal{H}_k. \quad (3.53)$$

L'espace invariant résultant est unidimensionnel, de sorte que nous n'avons pas besoin d'un nombre quantique pour exprimer sa dégénérescence et que tout état de base de \mathcal{K}_Γ sera complètement déterminé en assignant une représentation $j_{\nu(n)}$ à chaque lien. Dans la base du produit triple tensoriel d'origine, jusqu'à la normalisation, un état invariant de jauge sur le vertex est :

$$|i\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3} \iota^{m_1 m_2 m_3} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \otimes |j_3 m_3\rangle \quad (3.54)$$

Où les coefficient

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \iota^{m_1 m_2 m_3} \quad (3.55)$$

Les symboles $3j$ et représentent une forme symétrique généralisée des coefficients Clebsch-Gordan [22, 82, 83]. Nous pouvons utiliser une notation d'index : Les entrelaceurs sont des objets mathématiques à 3 indices $\iota^{n_1 n_2 n_3}$ avec un indice pour chaque représentation, invariant sous l'action diagonale de $SU(2)$:

$$D_{n_1}^{(j_1)m_1} D_{n_2}^{(j_2)m_2} D_{n_3}^{(j_3)m_3} \iota^{n_1 n_2 n_3} = \iota^{m_1 m_2 m_3}. \quad (3.56)$$

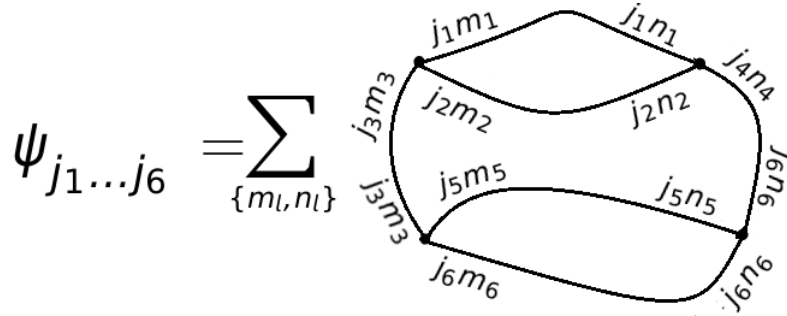


Figure 3.4 – Graphique comportant six liens et quatre vertex à tri-valences, avec l'un des états orthogonaux dans l'espace cinématique associé. Chaque couple $|j_l m_l\rangle \otimes |j_l n_l\rangle$ représente l'élément de la matrice de Wigner $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$, tandis que les triples autour de chaque vertex représentent le $SU(2)$ produits tenseur invariants.

Nous allons utiliser la notation $t_i^{n_1 n_2 n_3}$ avec $i = 1, \dots, k$ pour désigner un ensemble de k de tels tenseurs invariants, orthonormaux, le produit scalaire standard dans $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}$

$$\overline{t_i^{n_1 n_2 n_3}} t_j^{n_1 n_2 n_3} = \delta_{ij}. \quad (3.57)$$

Un état invariant de jauge générique dans \mathcal{K} , où Γ est un graphe constitué de vertex N à tri-valences et de liens L , une combinaison linéaire des états orthogonaux marqués par un spin associé à chaque lien :

$$\psi(A) = \sum_{j_1 \dots j_L} C_{j_1 \dots j_L} \psi_{j_1 \dots j_L}[A] \quad (3.58)$$

d'où (voir la figure (3.5))

$$\begin{aligned} \psi_{j_1 \dots j_L}[A] &= t_1^{m_1 m_2 m_3} \dots t_{N/2}^{m_{L-2} m_{L-1} m_L} t_{N/2+1}^{n_1 n_2 n_3} \dots t_N^{n_{L-2} n_{L-1} n_L} \\ &D_{m_1 n_1}^{j_1}(H_{\alpha_1}[A]) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(H_{\alpha_L}[A]) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Où tous les indices m sont contractés entre les matrices des symboles $3j$ et les matrices de Wigner. La manière dont ces indices sont contractés est dictée par la structure de graphe Γ . Un état invariant de jauge générique dans \mathcal{K}_Γ où Γ est un graphe composé de N vertex tétra-valent et de L liens est une combinaison linéaire :

$$\psi(A) = \sum_{\{j_l, k_n\}_{l,n}} C_{j_1 \dots j_L}^{k_1 \dots k_N} \psi_{j_1 \dots j_L}^{k_1 \dots k_N}[A] \quad (3.60)$$

Des états orthogonaux maintenant étiquetés par un spin j_l attribué à chaque lien l et un nombre k_n associé à chaque vertex (voir la figure (3.4)) :

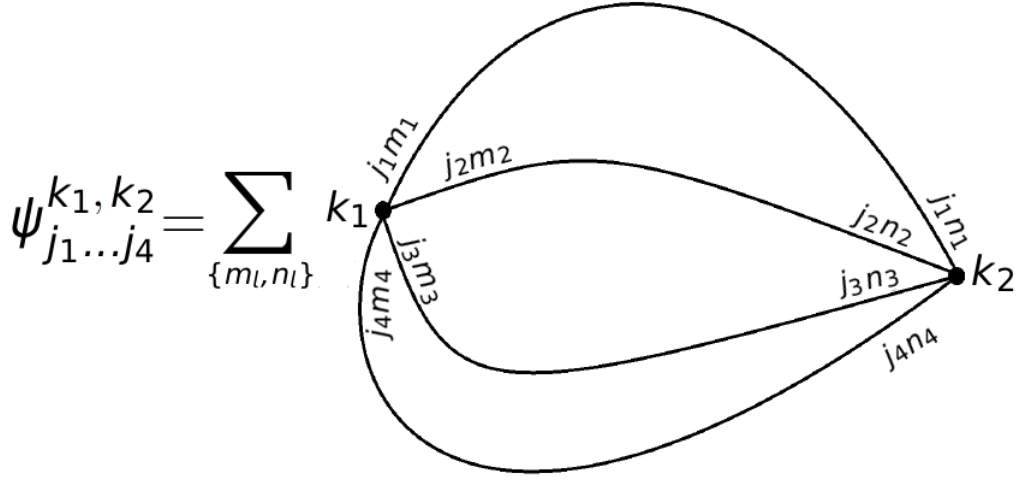


Figure 3.5 – Graphique avec quatre liens et deux vertex à tétra-valents, avec l'un des états orthogonaux dans l'espace cinématique associé. Chaque couple $|j_l m_l\rangle \otimes |j_l m_l\rangle$ représente l'élément de matrice de Wigner $D_{m_l n_l}^{j_l}(H_{\alpha_l}[A])$, tandis que les quartets autour de chaque vertex représentent le $SU(2)$ entrelaceurs invariants, identifiés par le lien virtuel k_n .

$$\psi_{j_1 \dots j_L}^{k_1 \dots k_N}[A] = l_{k_1}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \dots l_{k_{N/2}}^{m_{L-3} m_{L-2} m_{L-1} m_L} l_{k_{N/2+1}}^{n_1 n_2 n_3 n_4} \dots l_{k_N}^{n_{L-3} n_{L-2} n_{L-1} n_L} D_{m_1 n_1}^{j_1}(H_{\alpha_1}[A]) \dots D_{m_L n_L}^{j_L}(H_{\alpha_L}[A]); \quad (3.61)$$

Où à nouveau tous les indices internes m_l et n_l sont contractés en fonction de la structure du graphe. Pour des graphes quadrivalents, penta-valents et en général de valence plus élevée, nous obtenons une somme des êtres mathématiques beaucoup plus compliqués que les symboles $3j$, l'implémentation de l'invariance de jauge est assurée par chaque terme de la somme. La méthode de calcul de la moyenne du groupe opte pour une combinaison particulière de ces termes, mais le choix d'une autre combinaison est libre. Généralement nous aboutissons la séparation entre les indices m_l et n_l qui est une propriété qui découle du fait que \mathcal{P} est un projecteur. Formellement nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{P}_{\{m_l, n_l\}}^{\{j_l\}} \equiv_k l_{a,k}^{\{m_l\}} l_{a,k}^{\{n_l\}}, \quad (3.62)$$

où les $l_{a,k}$ sont ce qu'on appelle des entrelaceurs du vertex a (dans le cas trivalent, il s'agit par exemple d'un symbole $3j$). La fonction cylindrique s'exprime alors comme :

$$|\psi_{(\Gamma, f)}^0\rangle = \sum_{\{j_l, l_{a,k}\}} \tilde{f}_{\{j_l\}}^{\{l_{a,k}\}} |\Gamma, \{j_l, l_{a,k}\}\rangle, \quad (3.63)$$

Les sommes sur m_l et n_l dans sont rangées dans les coefficients \hat{f} , ainsi que les sommes sur m'_l et n'_l dans les kets $|\Gamma, \{j_l, \iota_{\alpha,k}\}\rangle$, avec leurs entrelaceurs respectifs. Les coefficients \hat{f} adéquats sont choisis d'une manière intuitive. Les kets $|\Gamma, \{j_l, \iota_{\alpha,k}\}\rangle$; constituent une base dans l'espace des états de Hilbert, ces vecteurs états sont associés à des fonctions d'onde possédant l'invariance de jauge, la contrainte de Gauss est donc directement implémentée dans ces fonctions d'onde, ce sont les états du réseau de spin. L'état du réseau de spin est complètement déterminé par la donnée d'un graphe Γ , chaque lien de ce dernier est coloré par un spin j , et chaque vertex correspond au choix d'un entrelaceur. Une autre approche plus simple existe et servant à la construction de ces entrelaceurs. Nous allons exposer ici le processus général : On sait déjà que le seul et unique entrelaceur correspondant à un vertex trivalent sont les symboles $3j$. Afin d'obtenir seulement les vertex de valence 3, il convient donc à briser les vertex du graphe pour faire apparaître de nouveaux liens appelés liens virtuels (Voir les exemples illustrés dans la figure (3.6)). Le choix du spin associé à chaque lien virtuel est l'unique facteur déterminant de l'entrelaceur. D'une manière générale, dans le cas d'un vertex de valence n , un entrelaceur est complètement déterminé par la donnée de $n - 3$ spins. Prenons comme exemple l'entrelaceur de spin k pour le vertex de valence 4 qui s'exprime, à une constante près comme se suit :

$$t_k^{m_1, m_2, m_3, m_4} \sim \sum_n \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Cette construction se retrouve naturellement lorsque l'on cherche à calculer explicitement l'intégrale définissant le projecteur \mathcal{P} et en utilisant les propriétés des produits des matrices de Wigner. En résumé, une base de l'espace de Hilbert invariant de jauge sur un graphe \mathcal{H}_Γ^0 est donné par les états de spin de réseau $|\Gamma, \{j_l, k_u\}\rangle$, où l'on attribue un spin j_i à chaque lien et $n - 3$ spins virtuels k_u à chaque vertex n -valents.

3.3 Géométrie Quantique des réseaux de spin

Avec un espace de Hilbert indépendant du fond, l'étape suivante consiste à développer des opérateurs capables d'agir sur l'espace pour fournir des observables physiques. Dans la présente étude, la théorie de la gravitation quantique à boucles met l'accent sur la quantification de la relativité générale qui est une théorie classique qui considère le fond comme une variable dynamique. Il est alors naturel de se demander que serait la version quantique du fond. En faisant une analogie avec la mécanique quantique ordinaire, nous pourrions s'attendre à l'existence

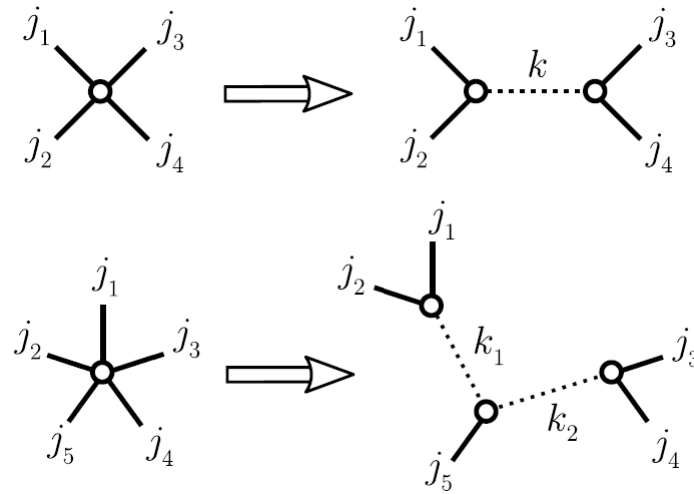


Figure 3.6 – Exemples de liens virtuels pour un vertex tétra-valent et penta-valent. Il existe en général plusieurs valeurs de spins virtuels possibles, qui doivent satisfaire la condition de Clebsh-Gordan en chacun.

d’une sorte d’opérateurs qui fournissent des observables physiques relatifs à la géométrie de manière à refléter la nature quantique du fond. Ces opérateurs existent et sont appelés opérateurs géométriques. Le premier opérateur géométrique est l’opérateur de l’aire, qui traduit par son nom, et qui mesure les quanta de surface. Sur certaine surface \mathbf{S} , d’une variété, l’opérateur de l’aire fournit une valeur de l’aire physique sur cette surface. Dans la partie qui suit, nous discuterons la construction des opérateurs géométriques et nous calculerons leur action sur les états du réseau de spin. La stratégie pour obtenir ces opérateurs consiste à les régulariser en termes d’holonomies et de flux et à calculer leur action dans la limite des holonomies et des flux infiniment petits, où l’expression exacte classique est approchée. Nous allons à nouveau ignorer de nombreux détails techniques et ne considérer que les cas les plus instructifs. Pour un traitement rigoureux, voir [6–8, 72, 84, 85]. Ensuite, nous allons discuter la manière avec laquelle nous pouvons inclure la matière dans cette théorie. La nouvelle image est très similaire à la théorie de jauge sur réseau, avec la torsion supplémentaire que les réseaux eux-mêmes sont maintenant des objets dynamiques décrivant le secteur gravitationnel de la théorie, voir [86–91] pour une comparaison avec les représentations standard de Fock [6].

Au niveau intuitif, les états quantiques de la relativité générale hamiltonienne dans les variables d’Ashtekar-Barbero sont des fonctions d’onde de Schrödinger $\Psi[\mathbf{A}]$ de la variable de configuration classique, comme dans la représentation de Schrödinger de la mécanique quan-

tique ordinaire. L'action classique de Hamilton $S[\mathbf{A}]$ est interprétée comme \hbar fois la phase de $\Psi[\mathbf{A}]$, c'est-à-dire que nous interprétons l'équation classique de Hamilton-Jacobi comme l'approximation eikonale⁶ de l'équation de l'onde quantique. Ceci peut être obtenu en substituant la dérivée de la fonctionnelle de Hamilton (le champ électrique) par des opérateurs dérivés. La quantification des deux premières contraintes nécessite l'invariance de $\Psi[\mathbf{A}]$ par les transformations de jauge $SU(2)$ et les difféomorphismes tridimensionnels. L'imposition de la contrainte scalaire conduit à l'équation de Wheeler-DeWitt [53, 54, 78] qui régit la dynamique quantique de l'espace-temps.

Une caractéristique intéressante de la gravité quantique à boucles est l'interprétation géométrique des états de réseaux de spin. Il est obtenu grâce aux opérateurs géométriques d'aire et de volume représentés sur \mathcal{H}_{inv} .

3.4 Opérateurs d'aire et de volume

Comme dans toute théorie quantique, nous nous intéressons au calcul du spectre d'un opérateur quantique représentant une quantité physique. Il n'est pas surprenant que, dans la gravitation quantique à boucles, ces opérateurs correspondent aux quantités géométriques telles que la surface ou le volume d'une région, mais aussi les angles. Les spectres quantiques de l'opérateur de l'aire et celui du volume ont d'abord été calculés en 1996 par Rovelli et Smolin [72]. Le résultat frappant est que l'on obtient un spectre discret qui interdit la valeur zéro, c'est-à-dire que la surface et le volume sont quantifiés et possèdent une valeur limite et minimale. Cette propriété de la géométrie quantique à l'échelle de Planck est au cœur des différents résultats obtenus dans la thermodynamique du trou noir. L'existence d'un quantum d'aire résout le problème des singularités bien connues de la relativité générale classique. Cela a conduit à la résolution de la singularité à l'écoute de l'espace-temps sphérique symétrique avec une certaine masse au centre (comme le trou noir de Schwarzschild). De plus, cela explique la valeur de l'entropie Bekenstein-Hawking pour le trou noir. C'est donc un résultat crucial que nous discuterons plus tard.

La définition des réseaux de spin comme base de l'espace de Hilbert invariant de jauge construit sur un graphe intégré dans une hypersurface spatiale, est l'un des résultats les plus intéressants de La gravitation quantique à boucles, car cela conduit à la quantification de l'espace. Comme nous le montrons maintenant, à chaque réseau de spin, il est possible d'associer

6. C'est l'approximation de l'optique géométrique, à laquelle est associé le principe variationnel de Fermat.

une notion de géométrie discrète caractérisée par la longueur de Planck comme longueur minimale.

Considérons l'aire classique d'une région donnée de l'espace, alors que l'espace est localement déterminé par les coordonnées $\{\chi^a\}$ avec $a \in \{1, 2\}$, on note les coordonnées de la surface bidimensionnelle S par $\{\sigma^\alpha\}$ avec $\alpha \in \{1, 2\}$. La métrique bidimensionnelle est dénotée $h_{\alpha\beta}$. L'aire de la surface est donnée par :

$$A_S = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det h_{\alpha\beta}} = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det \left(h_{ab} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^\beta} \right)}, \quad (3.65)$$

On peut calculer directement le déterminant qui s'écrit comme ce suit :

$$\begin{aligned} \det \left(h_{ab} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^\beta} \right) &= h_{ab} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^1} h_{cd} \frac{\partial \chi^c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma^2} - h_{ab} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^2} h_{cd} \frac{\partial \chi^c}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma^2} \\ &= 2h_{ab}h_{cd} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma^2} \\ &= 2h_{a[b}h_{cd]} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma^2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

En utilisant maintenant le fait que :

$$\det(h) = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} h_{ab} h_{ce} h_{df} \quad (3.67)$$

et donc

$$\det(h) h^{ab} = \frac{1}{3!} \epsilon^{acd} \epsilon^{bef} h_{ce} h_{df} = \frac{1}{2} \epsilon^{acd} \epsilon^{bef} h_{c[e} h_{df]} \quad (3.68)$$

nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} 2h_{m[p} h_{np]} &= (\delta_p^e \delta_q^f - \delta_q^e \delta_p^f) h_{m[e} h_{nf]} = (\delta_m^c \delta_n^d - \delta_n^c \delta_m^d) (\delta_p^e \delta_q^f - \delta_q^e \delta_p^f) h_{ce} h_{df} \\ &= \epsilon_{amn} \epsilon^{acd} \epsilon_{bpq} \epsilon^{bef} h_{ce} h_{df} = \frac{1}{2} \epsilon_{amn} \epsilon_{bpq} \det(h) h^{ab} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Par conséquent, le déterminant précédent prend la forme :

$$\begin{aligned} \det \left(h_{ab} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^\beta} \right) &= \epsilon_{fac} \epsilon_{ebd} \det(h) h^{fe} \frac{\partial \chi^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \chi^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial \chi^d}{\partial \sigma^2} \\ &= \det(h) h^{fe} n_f n_e \end{aligned} \quad (3.70)$$

Où nous avons introduit le vecteur normal à la surface \mathcal{S} :

$$n_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2}. \quad (3.71)$$

Enfin, nous devons exprimer ce déterminant par rapport au champ électrique E_i^a car, au niveau quantique, il est de préférence avoir une expression pour l'opérateur de l'aire en terme de flux d'opérateurs. Par conséquent, nous utilisons le fait que $E_i^a = \det(\mathbf{e}) e_i^a$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} A(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma \sqrt{\det(h) h^{ab} n_a n_b} = \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma \sqrt{(\det(\mathbf{e}))^2 e_i^a e_j^b \delta^{ij} n_a n_b} \\ &= \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma \sqrt{E_i^a n_a E^{bi} n_b} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Cela signifie que, dans l'approximation dans laquelle la métrique est constante sur \mathcal{S} , c'est-à-dire que \mathcal{S} est suffisamment petite pour être plate par rapport à la courbure locale, classiquement, la quantité que nous allons quantifier est le flux du champ électrique d'Ashtekar E_i^a qui est normal à la surface et qui a pour composantes

$$E_i[\mathcal{S}] = -i\hbar\kappa\gamma \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma n_a E_i^a, \quad (3.73)$$

Rappelons que la variable de flux classique $E_i(\mathcal{S})$ définie dans l'équation (3.73) est un vecteur tridimensionnelle normal à la surface \mathcal{S} dont la longueur est égale à l'aire de \mathcal{S} :

$$A(\mathcal{S}) = \sqrt{E_i(\mathcal{S}) E^i(\mathcal{S})} \quad (3.74)$$

La stratégie de quantification consiste que la version quantique de cette quantité \mathcal{S} soit divisée en N cellules bidimensionnelles \mathcal{S}_k ; $k = 1; \dots; N$ (cette opération s'appelle la triangulation) et la quantité $\sqrt{E_i(\mathcal{S}) E^i(\mathcal{S})}$ est invariante sous $SU(2)$. Justement, cela permet de construire l'aire $A(\mathcal{S})$ d'une surface \mathcal{S} en prenant la limite d'une fine partition de \mathcal{S} en petites surface \mathcal{S}_k

$$A(\mathcal{S}) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(\mathcal{S}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sqrt{E_i(\mathcal{S}_k) E^i(\mathcal{S}_k)} \quad (3.75)$$

Dans cette limite, les cellules \mathcal{S}_k deviennent infinitésimales, ce qui nous permet de considérer la constance de la densité de triade sur chacune d'elles :

$$E_i(\mathcal{S}_k) = -i\hbar\kappa\gamma \int_{\mathcal{S}_k} d^2\sigma n_a E_i^a \approx -i\hbar\kappa\gamma n_a E_i^a \int_{\mathcal{S}_k} d^2\sigma = -i\hbar\kappa\gamma n_a E_i^a S_k \quad (3.76)$$

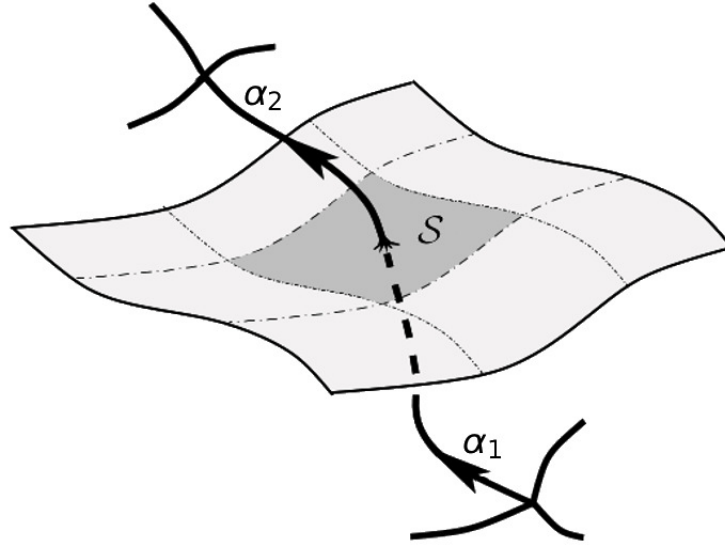


Figure 3.7 – Exemple d'intersection d'un lien α avec une surface S .

Et pour récupérer la formule originale (3.72) nous procédant de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(S) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \sqrt{E_i(S_k) E^i(S_k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N S_k \sqrt{E_i^a n_a E^{bi} n_b} \\
 &= \int_{S_k} d^2 \sigma \sqrt{E_i^a n_a E^{bi} n_b} = A(S)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Au lieu de l'opérateur agissant en (3.9), qui est une distribution évaluée par l'opérateur, il s'avère plus approprié d'envisager une version étalée dans laquelle (3.9) est intégrée sur une variété bidimensionnelle S incorporée dans la variété tridimensionnelle Σ ,

$$\hat{E}_i(S) = -8\pi i \gamma \ell_p^2 \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 n_a(\sigma) \frac{\delta}{\delta A_a^i(\mathbf{x}(\sigma))}, \tag{3.78}$$

Où l'incorporation est donnée par $(\sigma^1, \sigma^2) \equiv \sigma \mapsto \mathbf{x}^a(\sigma^1, \sigma^2)$, est l'élément hypersurface vectoriel habituel. L'opérateur défini dans (3.78) correspond au flux de E_i^a à travers une surface bidimensionnelle. Les variables canoniques de la gravitation quantique à boucles sont donc l'holonomie de ce flux. Ils vérifient la relation de commutation ci-dessous :

$$[\hat{H}_\alpha[A], \hat{E}_i(S)] = 8\pi i \gamma \ell_p^2 \theta(\alpha, S) H_{\alpha_1}[A] \tau_i H_{\alpha_2}[A], \tag{3.79}$$

Où $\theta(\alpha, \mathcal{S}) = \pm 1, 0$ est le "numéro d'intersection" qui dépend de l'orientation de α et \mathcal{S} . Nous supposons ici la présence d'une seule intersection de α avec \mathcal{S} ; voir la figure (3.7) où α_1 fait référence à la partie de α en dessous de \mathcal{S} et à α_2 à la partie située au-dessus de \mathcal{S} . Le numéro d'intersection disparaît si aucune intersection n'a eu lieu. Nous voulons souligner que dans la procédure suivante, la contrainte du difféomorphisme n'est pas encore implémentée.

Nous voulons maintenant calculer l'action de $\hat{E}_i(\mathcal{S})$ sur les états de réseau de spin $\Psi_{\mathcal{S}}[A]$. Pour cela nous avons besoin de son action sur les holonomies $H_{\alpha}[A]$. Ceci a été calculé en détail par Lewandowski, Newman et Rovelli [92] en utilisant l'équation différentielle (2.141) pour l'holonomie. Dans le cas le plus simple d'une intersection de α avec \mathcal{S} (voir la figure 3.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_c^i(\mathbf{x}(\sigma))} H_{\alpha}[A] &= \frac{\delta}{\delta A_c^i} \left(\mathcal{P} \exp \left[\int_{\alpha} \dot{\alpha}^a(s) A_a^i(\alpha(s)) \tau_i ds \right] \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta A_c^i} \left(\mathcal{P} \exp \left[\left(\int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} \right) \dot{\alpha}^a(s) A_a^i(\alpha(s)) \tau_i ds \right] \right) \\ &= \int_{\alpha} \dot{\alpha}^c(s) \delta^{(3)}(\mathbf{x}(\sigma) - \alpha(s)) H_{\alpha_1}[A] \tau_i H_{\alpha_2}[A] ds. \quad (3.80) \end{aligned}$$

Où $H_{\alpha_1}[A]$ et $H_{\alpha_2}[A]$ sont les holonomies le long des deux nouvelles arrêtes définies par le point auquel la triade agit.

Nous pouvons maintenant agir avec l'opérateur $\hat{E}_i(\mathcal{S})$, (3.78), sur $H_{\alpha}[A]$. Cela donne

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(\mathcal{S}) H_{\alpha}[A] &= -8\pi i \gamma \ell_p^2 \int_{\mathcal{S}} d\sigma^1 d\sigma^2 \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_c^i(\mathbf{x}(\sigma))} H_{\alpha}[A] \\ &= -8\pi i \gamma \ell_p^2 \int_{\mathcal{S}} d\sigma^1 d\sigma^2 \int_{\alpha} ds \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \alpha^c}{\partial s} \\ &\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{x}(\sigma) - \alpha(s)) H_{\alpha_1}[A] \tau_i H_{\alpha_2}[A]. \quad (3.81) \end{aligned}$$

La transformation ou changement de coordonnées $(\sigma^1, \sigma^2, s) \mapsto \mathbf{x}^a(x^1, x^2, x^3)$ avec $\alpha \equiv (0, 0, \mathbf{x}^3)$ mène au jacobien :

$$J \equiv \frac{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \alpha^c}{\partial s} \quad (3.82)$$

notons que le côté droit du jacobien est nul pour les courbes situées dans \mathcal{S} . Donc :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{S}} \int_{\alpha} d\sigma^1 d\sigma^2 ds. \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\sigma)}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b(\sigma)}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \alpha^c}{\partial s} \delta^{(3)}(\mathbf{x}(\sigma) - \alpha(s)) \\
&= \int_{\mathcal{S}} \int_{\alpha} J. d\sigma^1 d\sigma^2 ds \delta^{(3)}(\mathbf{x}(\sigma) - \alpha(s)) \\
&= \int dX^1 dX^2 dX^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x}(\sigma) - \alpha(s)) = \pm 1,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Où le signe dépend de l'orientation relative de la courbe et de la surface. L'holonomie (définie sur un bord unidimensionnel) et le flux (défini sur une surface bidimensionnelle) fournissent ensemble les conditions préalables à une intégration sur la fonction delta tridimensionnelle.

Nous obtenons ainsi :

$$\hat{E}_i(\mathcal{S}) H_{\alpha}[A] = \pm 8\pi i \gamma \ell_p^2 H_{\alpha_1}[A] \tau_i H_{\alpha_2}[A]. \tag{3.84}$$

S'il n'y a pas d'intersection $\mathbf{e} \cap \mathcal{S} = \mathbf{0}$ ou α est tangentielle, l'action de cet opérateur sera nulle $\hat{E}_i(\mathcal{S}) H_{\alpha}[A] = 0$. Pour plus d'un point d'intersection, il faut additionner chacun d'eux.

L'action qu'il faut étudier est celle de $\hat{E}^i(\mathcal{S}) \hat{E}_i(\mathcal{S})$ sur l'holonomie d'un chemin α qui traverse \mathcal{S} :

$$\hat{E}_i(\mathcal{S}) \hat{E}^i(\mathcal{S}) H_{\alpha}[A] = (8\pi i \gamma \ell_p^2)^2 H_{\alpha_1}[A] \tau_i \tau^i H_{\alpha_2}[A] = (8\pi \gamma \ell_p^2)^2 (3/4) H_{\alpha}[A]. \tag{3.85}$$

Où on a utilisé $\tau_i = (i/2) \sigma_i$. L'action du carré du flux à travers la cellule \mathcal{S} est donc diagonal sur cette holonomie.

Quelle est alors l'action de $\hat{E}_i(\mathcal{S})$ sur un réseau de spin? Considérons un réseau de spin Γ invariant de jauge qui s'intersecte avec \mathcal{S} en un seul point P . Ensuite, décomposons $\Psi_{\Gamma}[A]$:

$$\Psi_{\Gamma}[A] = D_{mn}^j(H_{\alpha}[A]) \Psi_{\Gamma-\alpha}^{mn}[A], \tag{3.86}$$

Où $D_{mn}^j(H_{\alpha}[A])$ est l'holonomie le long de α dans la représentation irréductible correspondant au spin j et $\Psi_{\Gamma-\alpha}^{mn}[A]$ est la partie restante de (3.23). L'action de $\hat{E}_i(\mathcal{S})$ on D^j est similaire à (3.84), avec $\tau_i \longrightarrow \mathcal{T}_i$ selon la représentation associée à j :

$$\hat{E}_i(\mathcal{S}) \Psi_{\Gamma}[A] = \pm 8\pi i \gamma \ell_p^2 [D^j(H_{\alpha_1}[A]) \mathcal{T}_i D^j(H_{\alpha_2}[A])]_{mn} \times \Psi_{\Gamma-\alpha}^{mn}[A]. \tag{3.87}$$

Cette action n'est pas encore invariante de jauge. Nous pouvons obtenir un opérateur de jauge invariant par élévation au carré, qui est :

$$\hat{E}^2(\mathcal{S}) \equiv \hat{E}^i(\mathcal{S}) \hat{E}_i(\mathcal{S}). \quad (3.88)$$

Afin de calculer l'action de cet opérateur, considérons à nouveau un réseau de spin avec un seul point d'intersection, P . Nous supposons que P appartient à la partie α_1 de la courbe. Par conséquent, l'action de l'opérateur $\hat{E}^2(\mathcal{S})$:

$$\hat{E}^2(\mathcal{S}) \Psi_\Gamma[A] = \pm 8\pi i \gamma \ell_\rho^2 \hat{E}^i(\mathcal{S}) [D^j(H_{\alpha_1}[A]) \mathcal{T}_i D^j(H_{\alpha_2}[A])]_{mn} \times \Psi_{\Gamma-\alpha}^{mn}[A]. \quad (3.89)$$

L'opérateur $\hat{E}_i(\mathcal{S})$ à droite n'agit que sur $D^j(H_{\alpha_1}[A])$ pour donner $D^j(H_{\alpha_1}[A]) \mathcal{T}_i \mathbb{1}$. De plus nous avons pour l'opérateur de Casimir

$$\mathcal{T}_i \mathcal{T}^i = -j(j+1) \mathbb{1} \quad (3.90)$$

Rappelons que nous avons défini $\tau_i = (i/2) \sigma_i$ pour $j = 1/2$ et de même pour $j > 1/2$, Nous obtenons :

$$\hat{E}^2(\mathcal{S}) \Psi_\Gamma[A] = (8\pi \gamma \ell_\rho^2)^2 j(j+1) \Psi_\Gamma[A], \quad (3.91)$$

Où (3.23) a été utilisée. S'il y a plus d'une intersection de Γ avec \mathcal{S} , il faut considérer une partition ρ de \mathcal{S} dans $n(\rho)$ surfaces plus petites \mathcal{S}_n telles que les points d'intersection se situent dans différentes \mathcal{S}_n (pour un Γ donné). Sinon, l'action de $\hat{E}^2(\mathcal{S})$ ne serait pas invariante de jauge (en raison des termes croisés dans $\hat{E}^2(\mathcal{S}) \Psi_\Gamma[A]$).

Nous définissons maintenant l'opérateur de l'aire :

$$\hat{A}(\mathcal{S}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{n(\rho)} \sqrt{\hat{E}_i(\mathcal{S}_n) \hat{E}^i(\mathcal{S}_n)} \quad (3.92)$$

qui est indépendant de ρ . En supposant pour simplifier ici, que \mathcal{S} est un réseau de spins sans nœuds sur Σ , comme sur la figure (3.8), c-à-d un nombre fini d'intersections avec les punctures P_k , nous obtenons de (3.91) (voir par exemple [7, 8, 72]) les valeurs propres de l'opérateur des aires :

$$\hat{A}(\mathcal{S}) \Psi_\Gamma[A] = 8\pi \gamma \ell_\rho^2 \sum_{P_k \in \mathcal{S} \cap \Gamma} \sqrt{j_{P_k}(j_{P_k} + 1)} \Psi_\Gamma[A] = A(\mathcal{S}) \Psi_\Gamma[A]. \quad (3.93)$$

Où k -étiquette les intersections entre le réseau de spin \mathcal{S} et la surface Σ , et P_k est la couleur de l'arête de \mathcal{S} croisant la k -ème intersection. L'opérateur $\hat{A}(\mathcal{S})$ est auto-adjoint en \mathcal{H}_{kin} , diagonale

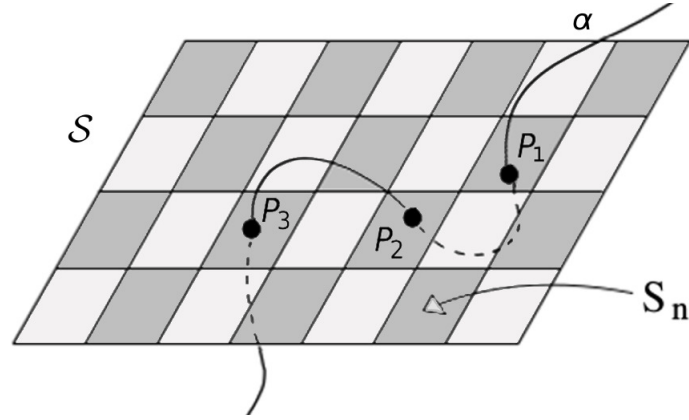


Figure 3.8 – La partition de \mathcal{S} : $P_k \in \mathcal{S} \cap \Gamma$.

sur les états du réseau de spin et réel sur eux. Les états du réseau de spin sont donc des états propres de l'opérateur d'aire. Son spectre est discret car le réseau de spin possède une structure discrète [72]. Cette caractéristique peut être attribuée à la compacité du groupe $SU(2)$ utilisé dans le formalisme. La variété tridimensionnelle Σ est cependant toujours présente. Si un vertex est sur \mathcal{S} , une expression plus compliquée est obtenue (voir [7, 93]) désignant les vertex par $\mathbf{j}_i = (j_i^u, j_i^d, j_i^t)$, $i = 1, \dots, n$, où j_i^u indique la coloration du lien supérieur, j_i^d la coloration du lien inférieur et j_i^t la coloration d'un lien tangentiel à \mathcal{S} , nous obtenons :

$$\hat{A}(\mathcal{S})\Psi_\Gamma[A] = 4\pi\gamma\ell_\rho^2 \sum_{i=1}^n \sqrt{2j_i^u(j_i^u + 1) + 2j_i^d(j_i^d + 1) - j_i^t(j_i^t + 1)}\Psi_\Gamma[A]. \quad (3.94)$$

Pour le cas particulier $j_i^t = 0$ et $j_i^u = j_i^d$, nous obtenons à nouveau le résultat précédent (3.93). Il faut toutefois souligner que les états du réseau de spin pour les sommets à quatre valences (et supérieures) ne sont pas toujours des états propres de \hat{A} si le vertex est à la surface, voir [94].

Une aire est définie par le fait qu'une boucle transporte avec elle une surface dont la valeur de l'aire dépend de son spin. L'aire minimale n'est pas zéro mais $k\ell_\rho^2$ avec $k = 4\pi\gamma\sqrt{3}$, faisant intervenir le paramètre de Barbero-Immirzi.

L'opérateur de volume est plus difficile à approcher et une expression générale n'existe pas encore. Néanmoins, il est toujours possible de calculer son spectre et d'extraire certaines propriétés générales. Dans la littérature, il y a deux propositions, toutes deux n'agissant de manière non triviale que sur les vertex d'un graphe sur lequel nous agissons avec l'opérateur de volume. Ces propositions s'accordent jusqu'à une constante pour les cas de graphes tri-valent

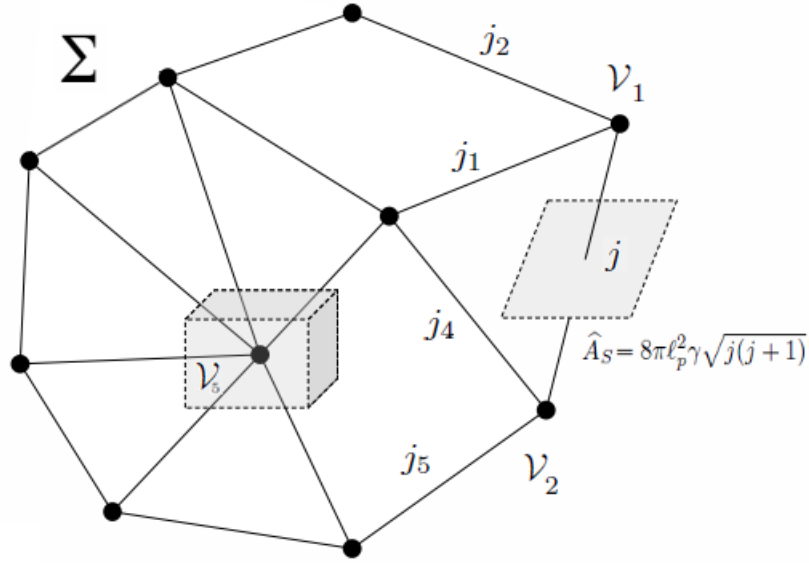


Figure 3.9 – Liens décrivant leurs surfaces frontières, le volume et l’aire étant donnés par les spins portés par les liens.

et des graphes tétra-valent. Nous allons décrire brièvement celle introduit par Rovelli et Smolin [72]. Réécrivons le volume tridimensionnel de la relativité générale habituellement exprimé en variables métriques, en utilisant nos nouvelles variables :

$$V(\Sigma) = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|\det E|}. \quad (3.95)$$

La stratégie est la même que précédemment : nous découpons la région en cellules tridimensionnelles et nous effectuons la décomposition jusqu’à ce que chaque cellule contienne au plus un vertex. L’intégrale peut donc être remplacée par la somme de Riemann sur les cellules. La proposition de Rovelli et Smolin pour l’opérateur de volume d’une région R est donnée par :

$$\hat{V}_{RS}(R) = \int_R d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{abc} E_i^a E_j^b E_k^c \epsilon^{ijk}|} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{n(\rho)} \sqrt{\epsilon_{abc} \hat{E}_i(S_n^a) \hat{E}^i(S_n^b) \hat{E}^i(S_n^c) \epsilon^{ijk}}, \quad (3.96)$$

où ϵ est la taille des cellules et les trois champs E sont les flux à travers les surfaces qui enveloppent chaque vertex, et ils sont ponctués chacun par un lien et ils sont liés à la cellule C_n centrée dans le vertex : $\partial C_n = U_{\alpha} S_n^{\alpha}$. En effet, en raison de la présence de ϵ_{ijk} l’opérateur disparaît si les trois flux ne sont pas différents, ce qui signifie qu’il agit non trivialement seule-

ment au niveau des vertex car sur les liens que nous avons au plus des deux flux associés à la source et la cible. En réalité, l'action de \hat{V} disparaît sur les états invariants de jauge définis sur un vertex à trois valences, et les contributions non triviales proviennent de vertex à la quatre valences ou plus.

Encore, les variables de flux sont proportionnelles aux générateurs $SU(2)$ qui, au niveau quantique, ne commutent pas. Par conséquent, il ressort clairement de l'expression ci-dessus que le spectre de l'opérateur de volume est aussi discret et que son excitation minimale est proportionnelle à l_p^3 .

L'opérateur de volume intervient au niveau des vertex et en donne un sens physique : en chaque vertex, il existe un grain de volume dont la valeur est donnée par le nombre de liens qui le joignent. Nous pouvons ainsi voir l'espace-temps comme un ensemble de grains de volume, reliés par des boucles définissant des surfaces, comme sur la Figure (3.9).

Il est quelque peu surprenant qu'une question importante telle que la discrétisation fondamentale de l'espace émerge déjà au niveau cinématique. On aurait plutôt pensé que c'est un résultat qui découle du traitement de la contrainte hamiltonienne, qui encode les caractéristiques dynamiques de la théorie d'Einstein. La discrétisation semble donc tenir pour des théories plus générales que la relativité générale quantique. Le spectre discret de l'opérateur d'aire est également au cœur de la base statistique de l'entropie des trous noirs, à savoir la détermination de l'entropie des trous noirs grâce à un comptage quantitatif des états microscopiques du champ gravitationnel. Ceci sera discuté au chapitre suivant.

4

QUANTIFICATION DES TROUS NOIRS

Depuis la naissance de la théorie de la gravitation d'Einstein, les trous noirs ont été l'un des principaux sujets qui ont attiré l'attention et qui ont occupé une grande partie du temps de travail de la communauté scientifique. En particulier, le calcul de l'entropie des trous noirs dans le régime semi-classique et, en outre, dans le régime quantique a été un problème très difficile et (dans toute son étendue) non résolu, qui a suscité beaucoup de controverses.

La quantification des trous noirs est l'un des problèmes importants de la physique [95, 96], et aucune solution satisfaisante n'a encore été trouvée. Les trous noirs sont caractérisés par le théorème d'unicité ou de calvitie [97] (no-hair theorem : Pas de champ magnétique, ni de aucune irrégularité de surface, etc.), qui stipule qu'une fois qu'un trou noir atteint une condition stable quelle que soit sa forme, il n'a que trois paramètres physiques indépendantes : la masse M , la charge Q et le moment cinétique J .

4.1 Thermodynamique des trous noirs et rayonnement

Dans cette section, nous allons brièvement esquisser et représenter le comportement thermodynamique des trous noirs et l'effet Hawking. Ces problèmes se posent à un niveau semi-classique - le champ gravitationnel est traité comme un fond classique externe - mais ils sont supposés jouer un rôle clé dans la recherche de la gravitation quantique [98].

Nous examinons le champ gravitationnel produit par un corps à symétrie sphérique (sans rotation et non chargés) dans le vide. La métrique de l'espace-temps pour ce cas, obtenue par Karl Schwarzschild [99, 100], a été la première solution exacte des équations d'Einstein, bien que ses propriétés n'aient pas été entièrement comprises jusqu'à bien plus tard.

Les trous noirs [101] fournissent un exemple par excellence pour cette description mathématique de la nature. Leur existence même et leurs propriétés géométriques simples étaient prédites par la théorie pure d'Einstein, la théorie géométrique de la gravité ou la relativité générale. À l'heure actuelle, leur existence a été confirmée par des observations avec presque certitude. On s'attend à ce que, compte tenu de l'apparition de puissants détecteurs d'ondes gravitationnelles, les observations des trous noirs joueront un rôle clé dans l'astronomie des futurs décennies.

Ma contribution à ce sujet est relative à la thermodynamique des trous noirs et du rayonnement de Hawking [102, 103]. L'accent principal est donc relative aux aspects quantiques, bien que nous préciserons les aspects classiques des trous noirs qui sont une condition préalable nécessaire à la compréhension de leur comportement quantique. Les aspects quantiques des trous noirs fourniront la seule clé vers la compréhension d'une théorie quantique de la gravitation.

Pour la suite, nous avons besoin d'introduire des notions de thermodynamique des trous noirs, et nous avons ainsi pu voir que l'affirmation "rien ne peut sortir d'un trou noir" [104] est en réalité fausse, puisque Hawking a pu mettre en évidence la présence d'un rayonnement qui ressemble à un rayonnement thermique [105].

4.1.1 Lois de la mécanique des trous noirs

C'est un fait étonnant que les trous noirs obéissent à des théorèmes d'unicité [97]. Si un objet s'effondre pour former un trou noir, un état stationnaire sera atteint asymptotiquement. Nous pouvons prouver dans le cadre de la théorie d'Einstein-Maxwell que les trous noirs stationnaires ne sont caractérisés que par trois paramètres : la masse M , le moment cinétique angulaire J et la charge électrique q . En ce sens, les trous noirs sont des objets beaucoup plus simples que les étoiles ordinaires - étant donné ces paramètres, ils se ressemblent tous. Tous les autres degrés de liberté qui auraient peut être initialement présents ont ainsi été émis, par exemple, sous la forme d'un rayonnement électromagnétique ou gravitationnel pendant l'effondrement, ou ont simplement disparu (comme le nombre baryonique). Puisque ces autres degrés de liberté constituent une forme de structure «cheveux» on appelle ce théorème le théorème sans cheveux. Les trois paramètres sont associés aux lois de conservation à l'infini spatial. En principe, nous pouvons donc décider de la nature d'un trou noir éloigné du trou lui-même, sans devoir l'approcher. Dans les situations astrophysiques, les trous noirs chargés électriquement ne jouent pas un rôle important, donc les deux paramètres M et J suffisent. La solution correspondante des équations d'Einstein est appelée la solution de Kerr [106] (Kerr-Newman en présence de

charge). Les trous noirs stationnaires sont dotés d'une symétrie axiale, la symétrie sphérique étant obtenue comme cas particulier pour $J = \mathbf{0}$. Les trous noirs chargés sont intéressants pour des raisons théoriques. Il convient de souligner que les théorèmes d'unicité ne généralisent pas les dimensions supérieures de manière directe.

En présence d'autres champs, les théorèmes d'unicité ne tiennent pas toujours [107]. C'est notamment le cas pour les champs de jauge non abéliens. En plus des charges à l'infini spatial, ces «trous noirs colorés» doivent être caractérisés par des variables supplémentaires, et il est nécessaire de proximer le trou pour les déterminer. La raison physique de l'apparition de telles solutions est le caractère non linéaire de ces champs de jauge. Les champs dans les régions plus proches du trou noir (qui seraient autrement avalés par le trou) sont liés à des champs éloignés du trou (qui seraient autrement rayonnés) pour atteindre une situation d'équilibre. Dans la plupart des exemples, cet équilibre est cependant instable et la solution du trou noir correspondante ne représente pas une solution physique.

En 1971, Stephen Hawking [108] a démontré un théorème important sur les trous noirs stationnaires : Leur aire ne peut jamais diminuer avec le temps. Plus précisément, il a montré que pour un trou noir prévisible satisfaisant $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ pour tout k^a nul, la surface de l'horizon futur des événements ne diminue jamais avec le temps. Un trou noir «prévisible» est celui pour lequel l'hypothèse de la censure cosmique est valable - c'est donc une hypothèse majeure pour la loi de l'aire. La censure cosmique suppose que tous les trous noirs existant dans la nature ont un horizon d'événements, de tel sorte que la singularité ne peut pas être vue par des observateurs lointains (la singularité n'est pas "nue").

La loi de l'aire semble présenter une analogie formelle étroite avec le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie ne peut jamais diminuer avec le temps (pour un système fermé). Cependant, alors que ce principe est liée au comportement statistique, la loi d'aire n'est qu'un théorème de la géométrie différentielle.

Un autre argument en faveur de cette analogie est donné par l'existence d'analogues aux autres lois de la thermodynamique. Le principe Zéro stipule qu'il existe une quantité, la température, qui est constante sur un corps en équilibre thermique.

Existe-t-il une quantité analogue pour un trou noir ? Nous pouvons en effet démontrer que la gravitation de la surface κ est constante sur l'horizon des événements [15]. Pour un trou noir de Kerr-Newman κ et A_H sont données par :

$$\kappa = \frac{(r_+ - r_-)c^2}{2(r_+^2 + a^2)} \tag{4.1}$$

$$A_H = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (4.2)$$

Où q est la charge électrique, J est le moment cinétique, A_H l'aire de l'horizon des événements ; nous définissons

$$r_{\pm} := c^{-2} \left[GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - Gq^2 - G^2 a^2} \right] \quad (4.3)$$

comme étant les emplacements des deux horizons et $a := Jc/MG$.

Dans la limite de Schwarzschild $q \rightarrow 0$ et $a \rightarrow 0$, nous reconnaissons l'expression bien connue de l'accélération gravitationnelle newtonienne.

$$\kappa = \frac{GM}{R_S^2} = \frac{c^4}{4GM'} \quad (4.4)$$

Nous pouvons montrer pour un trou noir statique que κ est la force limite qui doit s'exercer à l'infini pour maintenir en place une masse d'essai unitaire à l'approche de l'horizon. Cela justifie le nom de gravitation de surface.

Tenant maintenant d'établir une relation formelle entre la gravitation de surface et la température, et entre l'aire et l'entropie, la question se pose de savoir si un premier principe de la thermodynamique peut être démontré. Cela peut en fait être atteint et le résultat pour un trou noir de Kerr-Newman se présente sous la forme suivante :

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ + \Phi dq, \quad (4.5)$$

Où A , Ω_H , Φ désignent respectivement la surface de l'horizon des événements, la vitesse angulaire du trou noir et le potentiel électrostatique. Cette relation peut être obtenue par deux méthodes conceptuellement différentes : une version de processus physique dans laquelle un trou noir stationnaire est altéré par des perturbations physiques infinitésimales et une version d'état d'équilibre dans laquelle sont comparées les surfaces des deux solutions des trous noirs stationnaires. Les deux méthodes conduisent au même résultat (4.5).

$$dE = TdS - pdV + \mu dN. \quad (4.6)$$

Les dérivations modernes de (4.5) utilisent à la fois les formulations hamiltoniennes et lagrangiennes de la Relativité Générale. Par exemple, la première loi découle d'une théorie de la

gravitation invariante par difféomorphisme arbitraire dont les équations du champ peuvent être dérivées d'un lagrangien [109].

Qu'en est-il du troisième principe de la thermodynamique ? Une «version de processus physique» a été démontrée par Israël [110], il est impossible d'atteindre $\kappa = 0$ en un nombre fini d'étapes, bien qu'on ne sache pas si cela est vrai dans toutes les circonstances [111]. Cela correspond à la «version de Nernst» du troisième principe.

La «version de Planck» plus forte, qui indique que l'entropie va à zéro (ou une constante dépendant de la matière) si la température approche zéro, ne semble pas tenir. Les analogies ci-dessus sont résumées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 – Analogies entre les principes de la thermodynamique et les lois de la mécanique des trous noirs

Principe	Thermodynamique	Trous noirs
Zéro	La température T d'un corps est la même partout dans à l'équilibre thermique	La gravité de surface κ est constante sur toute la surface du trou noir
Premier	$dE = TdS - pdV + \mu dN$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ + \Phi dq$
Second	$dS \geq 0$	$dS \geq 0$
Troisième	Impossibilité d'obtenir $T = 0$ par un processus physique	Impossibilité d'obtenir $\kappa = 0$ par un processus physique

Quelle est la signification de la température des trous noirs et de l'entropie ? Selon la relativité générale classique, un trou noir ne peut pas rayonner. Bekenstein [112] a franchi une étape importante dans l'interprétation de l'entropie des trous noirs. Il a fait valoir que le deuxième principe de la thermodynamique ne serait valide que si un trou noir possédait une entropie S_{BH} ; sinon, on pourrait réduire l'entropie dans l'univers en jetant simplement une matière possédant une certaine entropie dans un trou noir.

En comparant (4.5) avec (4.6), nous reconnaissons que l'entropie des trous noirs doit être une fonction de la surface, $S_{BH} = f(A)$. Puisque la température doit être positive, il faut exiger que $f(A) > 0$. Le cas le plus simple $f(A) \propto \sqrt{A}$, c'est-à-dire que $S_{BH} \propto M$ violerait le deuxième principe, car si deux trous noirs étaient fusionnés, la masse du trou résultant serait

plus petite que la somme des masses des trous noirs d'origine (due à l'émission d'énergie par les ondes gravitationnelles). Avec certaines hypothèses naturelles, nous pouvons conclure que $S_{BH} \propto A/l_p^2$ (voir Bekenstein [112, 113]). Notons que la constante de Planck est entrée dans la scène par la longueur de Planck. Ceci est dû au fait qu'aucune échelle de longueur fondamentale ne peut être construite à partir de G et c seulement. Une interprétation sensée de la température des trous noirs et de l'entropie ne peut donc pas être obtenue en relativité générale pure - la théorie quantique doit être prise en compte.

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$T_{BH} \propto \frac{\hbar \kappa}{k_{BC}}, S_{BH} \propto \frac{k_{BC}^3}{\hbar G} A, \quad (4.7)$$

La question importante est de savoir comment déterminer le facteur de proportionnalité. Hawking [105] a pu atteindre cet objectif. L'ingrédient clé dans le développement de Hawking est le comportement des champs quantiques sur le fond d'un objet qui s'effondre pour former un trou noir. Semblable à la situation d'un champ électrique externe (effet Schwinger), il n'y a pas de notion de vide définie de manière unique. Cela conduit à la création de particules. La particularité du cas du trou noir est la distribution thermique des particules créées, qui est due à la présence d'un horizon d'événements.

4.1.2 Entropie de Bekenstein-Hawking

Stephen Hawking a développé une théorie remarquable selon laquelle la théorie quantique des champs prédit que le trou noir est chaud [Hawking [105, 114]]. Plus précisément, un champ quantique sur un espace-temps où se forme un trou noir passe de son état de vide à un état stationnaire avec une distribution thermique du rayonnement sortant à la température :

$$T_{BH} = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_{BC}} = \frac{c^3 \hbar}{8\pi k_B G M} \quad (4.8)$$

L'aspect surprenant de ce résultat n'est pas la création de particules : il y a création de particules chaque fois qu'un champ quantique interagit avec un potentiel non stationnaire ; Ce qui est surprenant, c'est la nature thermique du rayonnement sortant. Ce résultat ajoute de la crédibilité à une série d'intuitions physiques antérieures [112] et à des résultats mathématiques précis [115] indiquant que les trous noirs classiques se comportent comme des systèmes thermiques. Ils évoluent rapidement vers un état d'équilibre caractérisé par une quantité (l'aire

d'horizon) qui ne peut pas diminuer dans les processus physiques (classiques), tout comme l'entropie d'un système statistique. Cela n'est pas totalement surprenant non plus : l'entropie mesure la quantité d'informations sur les micro-états qui n'est pas capturée par les variables macroscopiques décrivant un système à plusieurs degrés de liberté. Un trou noir est un système avec un horizon qui filtre les informations, exactement comme le fait la description d'un système par des paramètres macroscopiques. Il est donc raisonnable d'attendre des similitudes entre la physique des observables accessibles de l'extérieur et la mécanique statistique. Dans un contexte stationnaire, il est alors raisonnable d'attendre des propriétés thermiques pour les trous noirs. Ces propriétés thermiques d'un état macroscopique sont capturées en donnant son entropie en fonction de variables macroscopiques. Dans le contexte microcanonique, l'entropie mesure le volume de la région de l'espace de phase microscopique déterminé par ces variables macroscopiques. C'est-à-dire que l'entropie mesure les informations perdues dans le grainage grossier. L'entropie S donnant la température calculée par la théorie quantique des champs de Hawking est donnée par une formule célèbre : L'équation de Bekenstein-Hawking :

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \quad (4.9)$$

Où A est l'aire de l'horizon de trou noir et l'indice BH signifie «Black Hole» ou «Bekenstein-Hawking». C'est une formule très élégante ("je suis noire, mais pourtant je suis belle" P. A. Dirac). Il contient la constante de Boltzman k_B , la vitesse de la lumière c , la constante de Planck réduite \hbar et la constante de gravitation universelle de Newton G ; il s'agit donc d'un régime dans lequel toutes les théories fondamentales sont pertinentes : mécanique statistique, relativité restreinte, mécanique quantique et relativité générale. Le facteur numérique curieux "4" semble un peu étrange au début, mais ce n'est pas le cas si nous nous souvenons que la constante de couplage de la relativité générale n'est pas G mais plutôt $8\pi G$, qui est au dénominateur de l'action d'Einstein-Hilbert et au côté droit des équations d'Einstein. L'origine de ce facteur quatre est donc $4 = 8\pi/2\pi$. En thermodynamique standard, l'expression de l'entropie en fonction des variables macroscopiques peut être déterminé à l'aide de la mécanique statistique. C'est-à-dire qu'il est possible de calculer la valeur de l'entropie, par exemple, nous pouvons calculer le volume de l'espace de phase correspondant à des variables macroscopiques données. Peut-on faire de même pour l'entropie de Bekenstein-Hawking ? Ceci est un défi ouvert pour toute théorie de la gravitation quantique. On fait parfois beaucoup de bruit sur le fait que \hbar entre (4.8) est sur le dénominateur. Mais c'est complètement injustifiable, l'entropie d'un

champ électromagnétique en équilibre dans une cavité de volume $V = L^3$, exprimée en fonction de la quantité macroscopique mécanique considérée, qui est l'énergie E , est

$$S \propto k_B \left(\frac{LE}{c\hbar} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (4.10)$$

qui contient \hbar en bas aussi. La présence de \hbar dépend du fait que cette constante représente le quantum d'action et détermine le degré de quanticité ainsi que la taille de la granularité quantique physique qui confirment le comportement statistique, et cela est vrai à la fois pour l'électromagnétisme et la gravitation. Si nous faisons tendre \hbar vers zéro, l'entropie d'un trou noir et l'entropie d'un corps noir divergent. La raison en est qu'ils ne sont plus liés par la discrétisation quantique. Cela donne la catastrophe ultraviolette envisagée par les théoriciens qui ont essayé d'appliquer la mécanique statistique aux champs classiques, à la fin du XIXe siècle. En fait, puisqu'il n'y a pas de catastrophe ultraviolette constitue l'argument qui a permis à Planck et Einstein de prendre conscience du caractère discret de l'énergie et de la lumière. De la même manière, le fait que l'entropie d'un trou noir soit finie et que \hbar apparaisse au dénominateur de (4.8) montre qu'il existe une granularité similaire dans l'espace-temps quantique, empêchant ainsi une catastrophe ultraviolette gravitationnelle. Poussons encore plus loin l'analogie, dans ses ultimes retranchements, à partir de l'équation (4.10), nous pouvons estimé la taille d'une cellule dans l'espace des phases : Elle est donnée lorsque S/k_B est l'unité de l'ordre, c'est-à-dire par $LE/c \sim \hbar$, mais L est aussi la longueur d'onde, donc une cellule est caractérisée par $E = h\nu$ où ν est la fréquence. En d'autres termes, nous pouvons lire (ou effectivement, c'est ce qu'a fait Einstein) la taille de l'échelle à partir de l'expression de l'entropie. De la même manière, l'unicité des quanta de la gravitation peut être lue à partir de l'entropie de Bekestein-Hawking en l'assimilant à un nombre d'unité d'ordre, ce qui donne à partir de l'équation (4.9) une quantification de la surface : $A = \hbar G/c^3$ en accord avec les résultats de la gravitation quantique à boucles. Dans le cas de l'électromagnétisme, nous pouvons calculer l'entropie directement à partir de la théorie quantique du champ électromagnétique. Peut-on faire la même chose pour la gravitation ?

Pour le cas particulier d'un trou noir de Schwarzschild, et d'après $A = 4\pi R_S^2$ on a

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 \pi R_S^2}{\hbar G} = 1.07 \times 10^{77} k_B \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2. \quad (4.11)$$

Nous pouvons facilement estimer que S_{BH} est beaucoup plus grand que l'entropie de l'étoile qui s'est effondrée pour former le trou noir. L'entropie du soleil, par exemple, vaut $S \approx 10^{57} k_B$, tandis que l'entropie d'un trou noir de masse solaire vaut environ $10^{77} k_B$, 20 ordres de grandeur plus grands.

Pouvons-nous donner une interprétation physique de cet énorme écart ? Dans la discussion ci-dessus, les lois de la mécanique des trous noirs ont été traitées comme des lois thermodynamiques phénoménologiques [116, 117]. La question centrale ouverte est donc la suivante : pouvons-nous déduire S_{BH} de considérations statistiques quantiques ? Cela signifierait que S_{BH} pourrait être calculée à partir d'une formule de type Gibbs selon laquelle :

$$S_{BH} \stackrel{?}{=} -k_B \text{tr}(\rho \ln \rho) \equiv S_{SM}, \quad (4.12)$$

Où ρ désigne une matrice de densité appropriée ; S_{BH} correspondrait alors au nombre de micro-états quantiques cohérents avec le macro-état du trou noir. Selon le théorème "sans cheveux", le macro-état n'est caractérisé que par la masse, le moment cinétique et la charge.

Certaines questions importantes sont :

- S_{BH} correspond-il à des états cachés derrière l'horizon ?
- Ou S_{BH} correspond-il au nombre d'états initiaux possibles à partir desquels le trou noir aurait pu se former [118] ?
 - Quels sont les degrés de liberté microscopiques ?
 - Où sont-ils situés (s'ils existent) ?
 - Que se passe-t-il avec S_{BH} après l'évaporation du trou noir [114, 119, 120] ?

Les tentatives pour calculer S_{BH} par comptage d'états sont souvent effectuées dans la limite de la "une boucle" (one-loop) de la théorie quantique des champs dans l'espace-temps courbe, c'est la limite où la gravité est classique mais les champs non gravitationnelles sont entièrement quantiques. L'équation (4.8) a été dérivée dans cette limite. Elle peut déjà être calculée à partir de l'approximation dite diagrammes de Feynman à trois niveaux de la théorie, où seuls les degrés de liberté gravitationnels sont pris en compte. Habituellement, une approximation du point celle pour une intégrale de chemin euclidienne est en cours d'exécution. De telles dérivations sont toutefois équivalentes aux dérivations de la thermodynamique classique [109].

L'émergence de la nature thermique des rayonnements des trous noirs a conduit à la discussion du problème de perte d'informations [121, 122]. Si le trou noir s'évaporait complètement et ne laissait que le rayonnement thermique [120], nous serions en contradiction avec les principes établis de la théorie quantique : Tout état initial (en particulier un état pur) évoluerait en un

état mixte. En théorie quantique ordinaire, cela est interdit par l'évolution unitaire du système global. Une théorie de la gravitation quantique devrait donner une réponse précise à la question de savoir si l'unitarité (vis-à-vis d'un observateur extérieur) est préservée ou non.

Dans la partie qui suit, nous traiterons des tentatives de description des trous noirs et de leur évolution dans le cadre de la gravité quantique.

4.1.3 Discrétisation d'entropie du trou noir de Schwarzschild

Les résultats de la dernière sous-section indiquent que les trous noirs sont vraiment des objets quantiques. En fait, comme Bekenstein [123] l'a souligné en particulier, ils pourraient jouer le même rôle dans le développement de la gravitation quantique que les atomes avaient joué dans la mécanique quantique. À la lumière de cette analogie possible, on peut se demander si les trous noirs possèdent un spectre discret d'états semblables aux atomes [124]. Des arguments en faveur de cette idée ont été exposés par Bekenstein [123, 125] a remarqué que la théorie classique permet de traiter la zone d'horizon d'un trou noir (non extrême) comme un invariant adiabatique mécanique. Ceci est confirmé par des expériences de pensée (en allemand : Gedankenexperiment) dans lesquelles on tire dans le trou des particules chargées (dans le cas de Reissner-Nordstrom) ou des ondes scalaires (dans le cas de Kerr) avec les énergies appropriées. D'après l'expérience de la mécanique quantique, on pourrait s'attendre à ce que l'entité quantique correspondante possède un spectre discret.

La possibilité la plus simple est certainement d'avoir un espacement constant entre les valeurs propres, c'est-à-dire que $A_n \propto n$ pour n entier naturel. Dans le cas de Schwarzschild, cela impliquerait pour les valeurs de masse $M_n \propto \sqrt{n}$. Ceci peut être déduit provisoirement, par exemple, à partir de la fonction d'onde 'Euclidienne' : Par l'imposition d'une règle de quantification similaire à celle de Bohr-Sommerfeld, nous trouverions,

$$2\pi\hbar n = \frac{c^3 A_n}{4G}. \quad (4.13)$$

Un argument différent pour fixer le facteur dans le spectre d'aire comme dans (Mukhanov [126]; Bekenstein et Mukhanov [127]). Nous supposons la condition de quantification avec une constante indéterminée α :

$$A_n = \alpha l_p^2 n, n \in \mathbb{N}, \quad (4.14)$$

Le niveau d'énergie n sera dégénéré avec la multiplicité $g(n)$, alors nous nous attendrions à ce que l'identification

$$S = \frac{A}{4l_p^2} + \text{Constant} = \ln g(n). \quad (4.15)$$

exige $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ (c'est-à-dire en supposant que l'entropie de l'état fondamental disparaît), ceci conduit avec (4.14) à

$$g(n) = e^{\alpha(n-1)/4}. \quad (4.16)$$

Comme il doit s'agir d'un entier, nous avons alors les possibilités :

$$\alpha = 4 \ln k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Et donc $g(n) = k^{n-1}$. Notons que le spectre serait alors légèrement différent de (4.13). Pour des raisons liées à la théorie de l'information (à partir de bit, voir Wheeler [128]), on préférerait la valeur $k = 2$, conduisant à $A_n = (4 \ln(2))l_p^2 n$.

Dans le cas de Schwarzschild,

$$A = 4\pi R_s^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \quad (4.18)$$

l'espace énergétique entre deux niveaux successives est obtenu à partir de la relation ci-dessous :

$$\Delta A = \frac{32\pi G^2 M \Delta M}{c^4} = (4 \ln k) l_p^2 \quad (4.19)$$

Donc

$$\Delta E = \Delta M c^2 = \hbar \tilde{\omega}_k = \frac{c^3 \hbar \ln k}{8\pi G M} \quad (4.20)$$

avec la pulsation fondamentale (Insérer l'équation (4.8) dans l'équation (4.20)) :

$$\tilde{\omega}_k = \frac{c^3 \ln k}{8\pi G M} = (\ln k) \frac{k_B T_{BH}}{\hbar}. \quad (4.21)$$

Le spectre d'émission des trous noirs [108] serait alors concentré à des multiples de cette fréquence fondamentale, contrairement au spectre thermique continu du rayonnement de Hawking [105]. En fait, nous obtiendrions une déviation du spectre de Hawking même pour les grands trous noirs, c'est-à-dire les trous noirs de masses $M \gg m_p$. Une autre conséquence serait que les quanta avec $\omega < \tilde{\omega}_k$ ne pourraient pas être absorbés par le trou noir. Notez que $\tilde{\omega}_k$ est de même ordre que la fréquence correspondant au maximum du spectre de Planck.

4.2 Trou noir et réseau de spins

4.2.1 Dérivation de l'entropie de Bekenstein-Hawking

Nous trouvons un spectre discret pour l'horizon des trous noirs dans le contexte de la gravitation quantique à boucles [118, 129–131]. Ceci est bien sûr une conséquence de la quantification de l'aire. Cependant, ce spectre n'est pas équidistant et ne risque donc pas d'être en conflit avec le rayonnement de Hawking [105].

Les états possibles sont obtenus en considérant tous les ensembles de spins $\{j_i\}$ (voir la figure (4.1)), qui donnent l'aire A de l'horizon et pour chacun la dimension de $\otimes_i H_{j_i}$. Il n'est pas difficile de voir que le nombre d'états possibles est dominé par le cas $j_i = 1/2$. Dans ce cas, l'aire d'un arête unique est

$$A_0 = 4\pi\gamma \frac{\hbar G}{c^3} \sqrt{3}. \quad (4.22)$$

Il existe donc

$$n = \frac{A}{A_0} = \frac{Ac^3}{4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}}. \quad (4.23)$$

intersections, et la dimension de $\mathcal{H}_{1/2}$ est 2; de sorte que le nombre d'états du trou noir est

$$N = 2^n = 2^{\frac{Ac^3}{4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}}}. \quad (4.24)$$

et l'entropie est

$$S_{BH} = k_B \ln N = \frac{c^3 k_B \ln(2)}{4\pi\gamma\hbar G\sqrt{3}} A. \quad (4.25)$$

Il s'agit de l'entropie de Bekenstein-Hawking, et nous obtenons (4.9), si le paramètre Immirzi est fixé à la valeur

$$\gamma = \frac{\ln(2)}{\pi\sqrt{3}}. \quad (4.26)$$

4.2.2 Fréquences des modes de sonnerie

Existe-t-il un moyen de comprendre la valeur numérique particulière (4.26)? Le quantum minimal d'aire responsable de la thermodynamique des trous noirs est celui dont le spin $j = 1/2$,

qui, en utilisant (4.26), est

$$A_{1/2} = 8\pi\gamma \frac{\hbar G}{c^3} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = 4 \ln(2) \hbar G / c^3. \quad (4.27)$$

En raison de (4.18), un changement d'un tel quantum de surface implique un changement d'énergie

$$\Delta E = \Delta M c^2 = \frac{c^3 A_{1/2}}{32\pi G M} = \frac{\hbar \ln(2)}{8\pi G M} \quad (4.28)$$

Si nous utilisons la relation de Bohr $\Delta E = \hbar \tilde{\omega}$ pour l'interpréter comme un quantum émis par un oscillateur à fréquence angulaire $\tilde{\omega}$, alors la théorie de la gravité quantique indique que dans le système il devrait y avoir quelque chose oscillant avec une fréquence appropriée

$$\tilde{\omega}_{1/2} = \frac{\ln(2)}{8\pi M} \quad (4.29)$$

Pour autant que je sache, cette fréquence ne joue aucun rôle dans la théorie classique. Cependant, supposons que pour une raison quelconque, le quantum minimal de l'aire responsable de la thermodynamique du trou noir n'était pas dû à $j = 1/2$ spins, comme ci-dessus, mais à $j = 1$ spins. Le calcul ci-dessus serait alors légèrement différent. L'aire minimale est

$$A_1 = 8\pi\gamma \frac{\hbar G}{c^3} \sqrt{1(1+1)} = 8\pi\hbar G \gamma \sqrt{2} / c^3. \quad (4.30)$$

et comme la représentation du spin $\mathbf{1}$ a une dimension 3, l'entropie est

$$S = \ln(3^{A/A_1}) = \frac{c^3 \ln 3}{8\pi\hbar G \gamma \sqrt{2}} A. \quad (4.31)$$

qui est d'accord avec l'entropie de Bekenstein-Hawking si

$$\gamma = \frac{\ln 3}{2\pi\sqrt{2}}. \quad (4.32)$$

et qui fixe le quantum minimal pertinent de l'aire à

$$A_1 = 4 \ln 3 \hbar G / c^3. \quad (4.33)$$

En utilisant (4.18) et la relation de Bohr, nous obtenons la fréquence propre

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\ln 3}{8\pi M} \quad (4.34)$$

Maintenant, très remarquablement, il y a quelque chose qui oscille précisément avec cette fréquence dans un trou noir classique de Schwarzschild! En fait, la fréquence (4.34) est précisément la fréquence du mode de sonnerie le plus amorti du trou noir de Schwarzschild! Le calcul de cette fréquence à partir des équations d'Einstein est compliqué. Il a d'abord été calculé numériquement, peut-être deviné (4.34) sur la base de la valeur numérique, et que récemment dérivé analytiquement. Remarquablement, la théorie quantique de la gravité semble connaître assez directement cette fréquence, cachée dans la non-linéarité des équations d'Einstein. Ce fait semble soutenir l'idée que les modes de sonnerie du trou noir sont à l'origine de sa thermodynamique. En revanche, on ne sait pas pourquoi il ne faut pas considérer le spin 1/2. Plusieurs possibilités ont été suggérées, notamment des règles de sélection dynamique et un spectre de zones équidistantes. Dans l'ensemble, cette observation intrigante soulève plus de questions que de fournir des réponses pleinement satisfaisantes.

Jusqu'à présent, le seul argument pouvant être utilisé pour fixer ce paramètre provient de l'entropie du trou noir. Étant donné un horizon de trou noir, on peut penser que l'aire de l'horizon est la conséquence d'un grand nombre de réseaux de spin qui perforent la surface. L'entropie d'un trou noir de l'aire A donnée est déterminée par le logarithme de la dimension de l'espace de Hilbert de la théorie des limites. On peut montrer que la contribution statistiquement la plus importante vient des configurations dans lesquelles le spin le plus bas possible domine. Notons ce spin par j_{min} . La dimension de la limite de l'espace de Hilbert (de l'horizon) [132] correspondante est donc :

$$\Omega = \prod_{i=1}^n (2j_i + 1). \quad (4.35)$$

Le spectre dans ce cas est donné par (3.93). En indiquant le spin minimal par j_{min} , la valeur de l'aire correspondante est :

$$A_0 = 8\pi\gamma l_p^2 \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}. \quad (4.36)$$

Il a été suggéré que la contribution dominante à l'entropie provient des contributions j_{min} (voir ci-dessous). D'après O.Dreyer [133], nous considérons le nombre de liens avec spin j_{min} ,

$$N = \frac{A}{A_0} = \frac{A}{8\pi\gamma l_p^2 \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}} \quad (4.37)$$

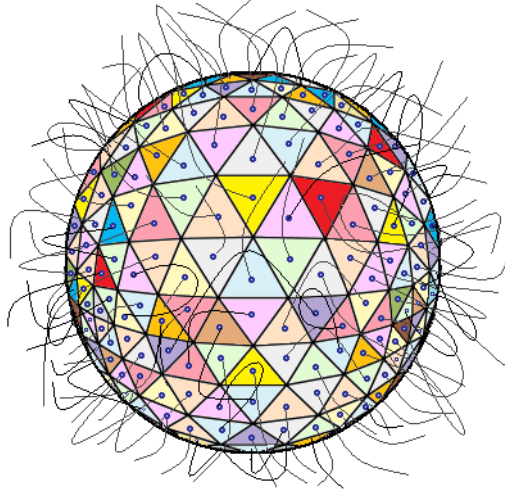


Figure 4.1 – L’horizon d’un trou noir, traversé par les liens du réseau de spin qui détermine sa géométrie bidimensionnel.

Le nombre de micro-états est alors

$$N_{\text{Micro-Etat}} = (2j_{\text{min}} + 1)^N. \quad (4.38)$$

Ceci est identique au résultat souhaité de l’entropie de Bekenstein-Hawking, c’est-à-dire égal à $\exp(A/4l_p^2)$, si seulement le paramètre de Barbero-Immirzi a la valeur particulière spéciale :

$$\gamma = \frac{\ln(2j_{\text{min}} + 1)}{2\pi\sqrt{j_{\text{min}}(j_{\text{min}} + 1)}}. \quad (4.39)$$

Quelle sera la valeur de j_{min} ? Si le groupe sous-jacent est $SU(2)$, comme nous le supposons généralement, nous avons $j_{\text{min}} = 1/2$ et donc $\gamma = \ln(2)/\pi\sqrt{3}$. Ce résultat a également été trouvé dans un calcul de Ashtekar et J. Lewandowski [8] où il a été supposé que les degrés de liberté sont donnés par une théorie de Chern-Simons à l’horizon. En prenant à la place $SO(3)$ comme groupe sous-jacent, nous avons $j_{\text{min}} = 1$ et donc $\gamma = \ln 3/\pi\sqrt{2}$.

Selon le principe de correspondance de Bohr, une fréquence oscillatoire d’un système classique devrait être égale à une fréquence de transition du système quantique correspondant. Le candidat le plus naturel pour une transition du trou noir quantique tel que décrit ci-dessus est l’apparition ou la disparition d’une puncture de spin j_{min} . L’aire du trou noir changerait alors d’une quantité donnée par l’équation (4.36)

$$\Delta A = A_0 = 8\pi\gamma l_p^2 \sqrt{j_{\text{min}}(j_{\text{min}} + 1)}, \quad (4.40)$$

qui est égal à $4(\ln(2))l_p^2$ dans le cas du groupe $SU(2)$ et à $4(\ln 3)l_p^2$ dans le cas du groupe $SO(3)$. Dans le cas $SU(2)$, le résultat pour ΔA correspond à celui recommandé par Bekenstein et Mukhanov [127], bien que le spectre n'est pas équidistant (ce qui explique pourquoi ici, il n'y a pas de conflit avec le spectre du rayonnement de Hawking pour une grande masse).

La situation n'est cependant pas si simple. Comme l'ont démontré Domagala et Lewandowski [134], des spins plus importants que le spin minimal ne sont pas négligeables et doivent donc être pris en compte lors du calcul de l'entropie. Par conséquent, l'entropie a été sous-estimée dans les précédents articles menant au résultat (4.39). Si nous exigeons à nouveau que le résultat soit dans l'ordre le plus élevé, égal à l'entropie de Bekenstein-Hawking, l'équation qui fixe le paramètre de Barbero-Immirzi est la suivante [13] :

$$2 \sum_{p=1}^{\infty} \exp\left(-2\pi\gamma\sqrt{\frac{p(p+2)}{4}}\right) = 1, \quad (4.41)$$

qui ne peut être résolu que numériquement, on trouve en valeur numérique voir [135],

$$\gamma = 0.23753295796592\dots \quad (4.42)$$

En prenant également en compte l'ordre suivant dans le calcul, nous arrivons à la valeur suivante pour l'entropie :

$$S = \frac{A}{4l_p^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A}{l_p^2}\right) + \mathcal{O}(1). \quad (4.43)$$

Le terme de correction logarithmique est en fait indépendant de γ . Des termes de correction de cette forme (principalement avec des coefficients $-1/2$ ou $-3/2$) ont également été trouvés par autres approches ; voir [136]. Si nous prenons néanmoins la valeur $k = 3$ dans (4.20), nous trouverons un déplacement dans la masse donné par :

$$\Delta M = \frac{\hbar c \ln(3)}{8\pi GM}, \quad (4.44)$$

correspondant à la fréquence fondamentale

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{c^3 \ln 3}{8\pi GM} \equiv \frac{\ln(3) k_B T_{BH}}{\hbar} \approx 8.85 \frac{M_{\odot}}{M} \text{ kHz}. \quad (4.45)$$

O.Dreyer [133] a souligné que $\tilde{\omega}_3$ coïncide avec la partie réelle de la fréquence asymptotique pour les modes quasi-normaux du trou noir. Ces modes sont des oscillations caractéristiques du

trou noir avant qu'il ne se stabilise à son état stationnaire ; voir [137] par exemple. Comme le spéculait Hod dans [124] sur la base d'argument numériques et démontrait par Motl voir [138].

Le dernier mot de toute théorie physique doit être prononcé par l'expérience (observation). Hormis la possible détermination des constantes de basse énergie et leur dépendance à l'espace et au temps, quels pourraient être les principaux tests de gravité quantique ?

- Discrétion de l'espace et du temps :

Tant dans la théorie des cordes que dans la gravité quantique à boucles, il y a des allusions à une structure discrète de espace-temps. Cela peut être vu à travers l'observation d'effets violant l'invariance locale de Lorentz [139], par exemple, dans la relation de dispersion des ondes électromagnétiques provenant des explosions de rayons gamma. Il a même été suggéré que des fluctuations espace-temps pouvaient être observées en interférométrie atomique [140]. Cependant, il existe de sérieuses contraintes d'observation [141].

- Évaporation des trous noirs :

Un test clé serait la phase d'évaporation finale d'un trou noir. Pour cela, il faudrait observer des trous noirs primordiaux. Comme nous en avons discuté là-bas, ce sont des trous noirs qui ne sont pas le résultat final d'un effondrement stellaire, mais qui peuvent résulter de fortes perturbations de densité dans le premier univers. Dans le contexte de l'inflation, leur masse initiale peut être aussi petite. Les trous noirs primordiaux d'une masse initiale d'environ $5.10^{14}g$ s'évaporeront à l'âge actuel de l'univers. Malheureusement, aucun objet de ce type n'a encore été observé.

- Cosmologie :

Des aspects quantiques du champ gravitationnel peuvent être observés dans le spectre d'anisotropie du fond micro-ondes cosmique. Premièrement, de futures expériences pourraient être en mesure de voir la contribution des gravitons générés dans le premier univers. La production de gravitons par l'évolution cosmologique serait un effet de la gravité quantique linéaire. Deuxièmement, les termes de correction quantique gravitationnelle de l'équation Wheeler-DeWitt [53, 54, 78] ou sa généralisation dans la cosmologie quantique à boucles peuvent laisser leur impact sur le spectre d'anisotropie. Troisièmement, une discrétion dans les perturbations inflationnistes pourrait se manifester dans le spectre [142].

Certaines de ces caractéristiques sont également discutées en détail dans [143]. Bien sûr, il peut y avoir d'autres possibilités qui ne sont pas encore connues et qui pourraient offrir de grandes surprises. Il est, par exemple, imaginable qu'une théorie fondamentale de la gravité quantique soit intrinsèquement non linéaire [144]. Cela contraste avec la plupart des théories de la gravité

quantique actuellement étudiées. La gravité quantique est étudiée depuis la fin des années 1920. Il ne fait aucun doute que beaucoup de progrès ont été accomplis depuis lors. L'objectif final n'est pas encore atteint. La conviction exprimée ici est qu'une théorie cohérente et expérimentalement réussie de la gravité quantique sera disponible à l'avenir. Cependant, il peut s'écouler un certain temps avant que ce délai ne soit atteint.

Le spectre du rayonnement du Trou Noir dans la théorie de la gravitation quantique à boucles

Nous proposons une autre perspective de l'entropie des trous noirs, fondée sur la gravitation quantique à boucles, qui est une théorie visant la quantification de la gravitation via la quantification de l'espace ainsi que l'ajustation du caractère relativiste général des singularités de l'espace dû à l'énergie et la masse énormes concentrées en ces dernières, et leur caractère quantique dû aux dimensions de ces singularités qui peuvent atteindre l'échelle de Planck. Une telle théorie permet l'accès à la réconciliation des résultats semi-classiques de Hawking avec le traitement mécanique statistique extensive de la gravitation quantique à boucles explorant ainsi toutes les valeurs du paramètre de Barbero-Immirzi (γ) en rapport avec la spectroscopie de ces singularités notamment les trous noirs. En particulier, en se basant sur la surface moyenne des punctures qui désignent les surfaces élémentaires de l'espace, nous avons pu calculer l'entropie correspondante, nous avons aussi identifié le paramètre de Barbero-Immirzi facteur déterminant de la thermodynamique et la géométrie des trous noir à l'échelle quantique, et enfin nous avons déduit le spectre de rayonnement en fonction des punctures possibles.

On Black Hole Radiation Spectrum in Loop Quantum Gravity

K. Mejrhit*, R. Ahl Laamara, and S.-E. Ennadifi

LHEP-MS, Mohamed V University, Faculty of Science, Rabat, Morocco;
Center Of Physics and Mathematics, CPM, Rabat, Morocco

Received June 20, 2016

Abstract—We propose an alternative analysis of black hole entropy from loop quantum gravity (LQG) to reconcile Hawking’s semiclassical results with the statistical mechanics treatment of LQG for all values of the Barbero-Immirzi (BI) parameter. In particular, using the average area of the punctures, we have calculated the corresponding entropy, identified the BI parameter and derived the radiation spectrum in terms of the possible punctures.

DOI: 10.1134/S0202289317010108

1. INTRODUCTION

The idea that unification of quantum theory with gravity is essentially thermodynamic has been on the table since the discovery of the laws of black hole thermodynamics and Bekenstein’s discovery of black hole entropy. The discoveries of the Unruh temperature and Hawking radiation strengthened the reason for hoping for a deep relationship between gravity, quantum physics and thermodynamics [1].

A black hole horizon in equilibrium can be effectively described by the local notion of an isolated horizon where statistical mechanical properties can be studied. As follows from the results that emerge from the basic LQG treatment, the quantum area and the volume operators have discrete spectra and highlight the black hole’s entropy.

The use of the result of the entropy of black holes and the Bekenstein-Hawking result [2] was a unique way to resolve the ambiguity of the free parameter (a dimensionless constant that labels various inequivalent kinematic quantizations of LQG) that bother both results. This ambiguity can be fixed by putting an independent argument which will make the calculation of the black hole a real prediction of the theory. There has long been an association of the area of the horizon of a black hole with an entropy, and this was not initially understood according to the Boltzmann definition of entropy as a measure of the number of quantum states of a black hole because of the absence

of a proper quantum theory of gravity. A first step was, however, considering gravity to be a statistical system, since its prediction by Bekenstein [3].

The problem of computing the black hole entropy in the framework of LQG has a long history [4, 5]. A common viewpoint in different treatments is that to find an agreement of the computation of the black hole entropy in the LQG with Hawking’s semiclassical results one should fix the BI parameter γ [6].

In this paper we expose a new way to calculate the black hole entropy from LQG reconciling Hawking’s semiclassical results and the statistical mechanics treatment of LQG. More precisely, we calculate the black hole entropy based on the average puncture area A_{moy} instead of the $A_{1/2}$ puncture of spin 1/2. Then, with comparison to the known Bekenstein-Hawking entropy, we determine the BI parameter $\gamma(q)$ and the radiation spectrum $\omega_n(q)$ in terms of the number of possible punctures q with different spins.

2. A STATISTICAL VIEW

2.1. Quantum Theory

A basis for the Hilbert space of canonical gravity is given by spin networks [7]. These are graphs whose edges are labeled by representations of the gauge group of the theory. In the case of gravity this group is taken to be $SU(2)$, and the representations are thus labeled by positive half-integers $j_k = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. If a surface is intersected by an edge of such a spin network carrying the label j_k , the surface acquires the area A of the horizon,

$$A = 8\pi \frac{\hbar G}{c^3} \gamma \sum_{k=1}^N \sqrt{j_k(j_k + 1)}, \quad (1)$$

*E-mail: karim.mejrhit@gmail.com

¹Lorentz contraction and time dilation conditions are also used to formulate iterative algebraic equations for the motion-dependent potentials of metric gravity. But considerations of the motion-dependent potentials are not a needed part of this paper’s considerations.

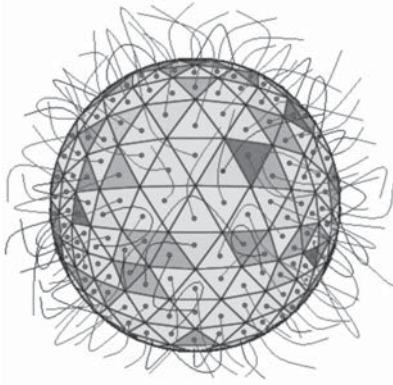


Fig. 1. Spin network states puncturing a 2-dimensional horizon.

where γ is the so-called Barbero-Immirzi parameter.

A gateway for the calculation of black hole entropy is provided by LQG where the statistical mechanical properties of quantum isolated horizons are studied. In particular, they are defined in terms of quantum states that are built up by associating spin variables with punctures on the horizon. More precisely, a particular eigenvalue (1) of the area operator.

We will consider a horizon composed of N punctures that are placed on q different surfaces of quantum area A_k with spin j_k ($q = j_{\max}$), and we get n_k , the number of punctures of color c_k that are in the spin j_k . This is shown in Fig. 1.

In this picture, we have the following relations for the total area and the number of punctures of the horizon:

$$A = \sum_{k=1}^q n_k A_k, \quad (2)$$

$$N = \sum_{k=1}^q n_k. \quad (3)$$

So in the area equation (2) the sum over punctures can be replaced by a sum over spins j_k as

$$A = 8\pi \frac{\hbar G}{c^3} \gamma \sum_{k=1}^q n_k \sqrt{j_k(j_k + 1)}, \quad (4)$$

with

$$A_k = 8\pi \frac{\hbar G}{c^3} \gamma \sqrt{j_k(j_k + 1)}. \quad (5)$$

Now, the area of the horizon (4) can be written as

$$A = 8\pi \frac{\hbar G}{c^3} \gamma N \left[\sum_{k=1}^q P_k \sqrt{j_k(j_k + 1)} \right], \quad (6)$$

where $P_k = n_k/N$ is the normalized ($\sum_{k=1}^q P_k = 1$) probability that the system is in the spin j_k .

The total number of quantum states for these configurations is obtained by counting all possible states of punctures (which are considered distinguishable) consistent with a given horizon area as a result of a large number of spin network edges puncturing the surface. Each puncture of an edge with spin j_k increases the dimension by a factor of $g_k = 2j_k + 1$. Therefore, if there is a large number N of edges with spins j_k ($k = 1, \dots, q$), the total number of quantum states [8] is given by,

$$W(n_1, \dots, n_q) = \left(\sum_{i=1}^q n_i \right)! \prod_{k=1}^q \frac{(2j_k + 1)^{n_k}}{n_k!}, \quad (7)$$

where the sum is over all nonnegative n_k consistent with the given value of A . The logarithm of the total number of quantum states (7) gives the entropy of a black hole.

2.2. Entropy and Discrete Probability

As mentioned above, the entropy of a black hole reads,

$$S = k_B \ln \left[\left(\sum_{i=1}^q n_i \right)! \prod_{k=1}^q \frac{(2j_k + 1)^{n_k}}{n_k!} \right]. \quad (8)$$

For large N , there is a remarkably accurate approximation to the factorials that appear in the expression for the entropy (8). Using Stirling's approximation, we can write the entropy as

$$S = k_B N \ln(N) + k_B \sum_{k=1}^q n_k [\ln(2j_k + 1) - \ln n_k], \quad (9)$$

which, in turn, in terms of a discrete probability distribution P_k becomes

$$S = k_B N \sum_{k=1}^q [P_k \ln(k + 1) - P_k \ln P_k], \quad (10)$$

where N can be calculated from the area A of the black hole and from the amount of average area A_{moy} contributed by every puncture. The puncture with average area of a single link is

$$A_{\text{moy}} = \frac{A}{N} = 4\pi \frac{\hbar G}{c^3} \gamma \sum_{k=1}^q P_k \sqrt{k(k + 2)}. \quad (11)$$

The entropy is based on the key results of LQG and equilibrium statistical mechanics of a grand canonical ensemble [9]. So according to (10), the expression for the entropy will be

$$S = \frac{k_B c^3}{4\pi \hbar G \gamma} \frac{\sum_{k=1}^q [P_k \ln(k + 1) - P_k \ln P_k]}{\sum_{k=1}^q P_k \sqrt{k(k + 2)}} A. \quad (12)$$

As one can see, the entropy grows linearly with the area A , but there is also a freedom in the proportionality factor since it includes the free BI parameter γ . Therefore LQG counting reproduces the Bekenstein–Hawking law,

$$S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A, \quad (13)$$

with the appropriate value of this parameter,

$$\gamma = \frac{\sum_{k=1}^q [P_k \ln(k+1) - P_k \ln P_k]}{\pi \sum_{k=1}^q P_k \sqrt{k(k+2)}}. \quad (14)$$

Within this framework, the entropy computation can be regarded as a way of fixing the value of the BI parameter in the theory. Hence, substituting to (11), we can prove that

$$A_{\text{moy}} = \frac{4\hbar G}{c^3} \sum_{k=1}^q [P_k \ln(k+1) - P_k \ln P_k]. \quad (15)$$

Since in an isolated horizon the entropy of the black hole is maximum, the black hole appears to be in a stable condition which makes all microscopic configuration states equiprobable. All microstates have then equal probability. i.e., $P_1 = \dots = P_k = \dots = P_q$, and then $qP_k = 1$. Thus according to (10), the black hole entropy reads

$$S = k_B N [\ln [(q+1)!] + q \ln q],$$

according to (14), the BI parameter is

$$\gamma = \frac{\ln [(q+1)!] + q \ln q}{\pi \sum_{k=1}^q \sqrt{k(k+2)}}, \quad (16)$$

and according to (15), the average area A_{moy} is

$$A_{\text{moy}} = \frac{4\hbar G}{c^3} [\ln [(q+1)!] + q \ln q]. \quad (17)$$

If the surface (17) with an edge of a spin network carrying the label j_{moy} , it acquires the area:

$$A_{\text{moy}} = \frac{8\pi\hbar G}{c^3} \gamma \sqrt{j_{\text{moy}}(j_{\text{moy}} + 1)}. \quad (18)$$

On the other hand, according to (17) and (18), we get

$$j_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left[\sum_{k=1}^q \sqrt{k(k+2)} \right]^2} - 1 \right)$$

This is shown in Fig. 2.

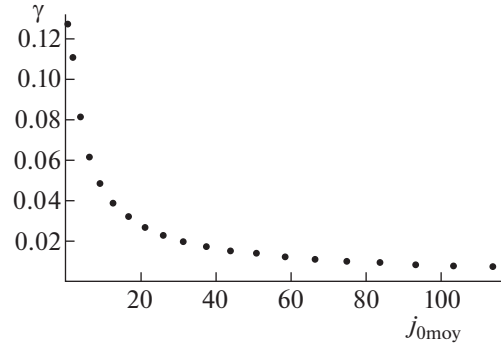


Fig. 2. Values of the BI parameter γ as a function of j_{moy} . The plot shows an exponential decay of the BI parameter with the spin.

3. RADIATION SPECTRUM OF A QUANTIZED BLACK HOLE

Hawking derived the spectrum of a black hole thermal emission using quantum field theory in curved space-time. Many attempts have been made to relate the gravitational dynamics with the Hawking temperature, the thermal nature of the Hawking radiation may be affected by quantum properties of gravity. Only a theory of quantum gravitational field can explain how quantum gravity affects the black hole emission. In LQG the area can take quantized values. Therefore, when a black hole makes a quantum leap from one quantized value of its mass (energy) to a lower quantized value, there is an emission which happens just like the Bohr model of the atom. A consequence is emission quantized frequencies that correspond to differences between energy levels. Thus, quantum gravity implies a discrete spectrum of emission of black hole radiation [10, 11].

This does not contradict the continuous thermal spectrum result predicted by Hawking. The spectral lines are so dense in the range of frequencies of interest that they seem to be a continuous spectrum. We assume that the area is quantized to different elementary area A_{moy} . Namely, the area can take the values

$$A = N A_{\text{moy}}.$$

A natural candidate for a quantum transition is thus the appearance or disappearance of a puncture of spin j_{moy} (17). Since the area of the black hole surface is connected with the black hole mass,

$$A = 4\pi R_S^2 = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4},$$

where R_S is the Schwarzschild radius of a black hole of mass M , the discrete mass (area) spectrum implies

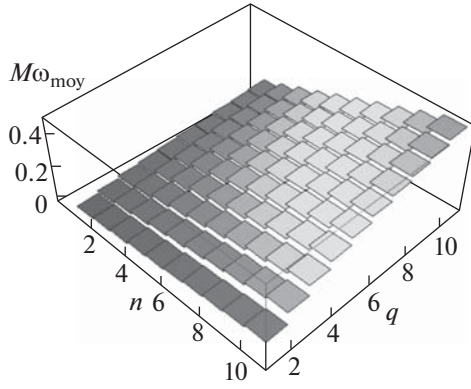


Fig. 3. Variation of $M\omega_{\text{moy}}$ with n and q with increasing frequency from red (left) to blue (right).

a discrete line emission from a quantum black hole given by

$$\Delta M = \frac{\hbar c}{8\pi GM} \frac{\ln[(q+1)!] + q \ln q}{q} \Delta N.$$

Consider a transmission process in which energy emitted is much smaller than the mass M of the black hole, the spacing between the energy levels is

$$\Delta E = \Delta M c^2 = \frac{\hbar c}{8\pi GM} \frac{\ln[(q+1)!] + q \ln q}{q} \Delta N.$$

So the quantum transition has a natural candidate which is the appearance or disappearance of a puncture A_{moy} of spin j_{moy} . i.e.,

$$\Delta A = A_f - A_i = (N_f - N_i) A_{\text{moy}} = n A_{\text{moy}},$$

where n is a positive integer. The energy spacing (17) reads

$$\Delta E = n \cdot \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \frac{\ln[(q+1)!] + q \ln q}{q}.$$

From the quantum-mechanical relation $\Delta E = nE(j_{\text{moy}})$, where $E(j_{\text{moy}})$ is the energy contribution from a single average puncture carrying a spin j_{moy} , we conclude that the energy is emitted at frequencies $\tilde{\omega}$ that are a multiple of the fundamental emission frequency ω_{moy} corresponding to the spin j_{moy} . The radiation emitted by the black hole is then

$$\hbar \tilde{\omega} = n \cdot \hbar \omega_{\text{moy}},$$

with

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{E(j_{\text{moy}})}{\hbar} = \frac{c^3}{8\pi GM} \frac{\ln[(q+1)!] + q \ln q}{q}.$$

We plot the corresponding spectrum of black hole radiation in Fig. 3, where the squared surface of the black hole radiation frequency is discrete.

4. DISCUSSION

In this work we have discussed the problems of entropy of a black hole and its relationship with thermodynamics using the theory of LQG. We have found

that the entropy of a black hole $S = k_B \ln(W)$, where W is the number of quantum states with spin j_k , according to statistical mechanics, can be written in the form

$$S = k_B N [\ln[(q+1)!] + q \ln q],$$

and the BI parameter as

$$\gamma = [\ln[(q+1)!] + q \ln q] / \pi \sum_{k=1}^q \sqrt{k(k+2)},$$

with N and a the number of punctures and the number of possible punctures with different spins, respectively. This has given the famous Hawking-Bekenstein formula of entropy. We have noticed that when q is large, the value of γ becomes small.

We have considered the average value that can take the puncture of the event horizon A_{moy} , and quantum fluctuations on the event horizon causing the radiation emission with the energy value are proportional to the number of A_{moy} , i.e., $\Delta E \propto n A_{\text{moy}}$. The frequency of this radiation is $\tilde{\omega} = n \omega_{\text{moy}}$, where ω_{moy} is the average frequency that can be emitted by the black hole. When q is very large, the spectral distribution becomes almost continuous in accordance with Hawking's results.

ACKNOWLEDGMENTS

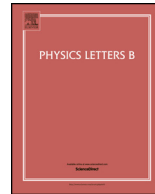
The authors would like to thank URAC09/CNRST for support.

REFERENCES

1. S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
2. J. D. Bekenstein and V. F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **360**, 7 (1995); gr-qc/9505012.
3. J. D. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cim.* **11**, 467 (1974).
4. C. Rovelli, *Living Rev. Relativity* **1** (1998).
5. C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **442**, 593 (1995); gr-qc/9411005.
6. G. Immirzi, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **57**, 65 (1997); gr-qc/9701052.
7. C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996); gr-qc/9603063.
8. A. Ghosh and P. Mitra, *Phys. Lett. B* **616**, 114 (2004); gr-qc/0411035.
9. Olaf Dreyer, gr-qc/0211076.
10. L. Smolin, *J. Math. Phys.* **36**, 6417 (1995); gr-qc/9505028.
11. M. Barreira, M. Carfora, and C. Rovelli, gr-qc/9603064.

Thermodynamique, stabilité et la transition de Hawking–Page des trous noir dans la cadre de la mécanique statistique non-extensible en géométrie quantique

Dans ce travail, la théorie de Tsallis de la mécanique statistique non extensive décrite par le paramètre $q > 0$ est appliquée en gravitation quantique à boucles pour calculer l'entropie du trou noir [145]. Cette entropie est dérivée en termes de l'équation de Bekenstein-Hawking pour une aire d'horizon donnée, de masse M et de valeurs positives réelles arbitraires du paramètre de Barbero-Immirzi (γ). Dans ce cadre, il est démontré que le trou noir a une température minimale à M_{min} qui repose sur le paramètre q et que la chaleur spécifique du système est positive avec $M > M_{min}$. Cela signifie que le trou noir massif est thermodynamiquement stable aux radiations, contrairement au résultat standard dans lequel toutes les solutions semblent instables. Ce résultat est très similaire à celui annoncé par un trou noir dans l'espace Anti-de Sitter (AdS), où il est également démontré qu'une transition de phase de trou noir de Hawking-Page se produit à une température critique qui dépend du paramètre q de la formule de Tsallis.



Thermodynamics, stability and Hawking–Page transition of black holes from non-extensive statistical mechanics in quantum geometry

K. Mejrhit, S-E. Ennadifi

LHEP-MS, Department of Physics, Faculty of Science, Mohamed V University, Rabat, Morocco

ARTICLE INFO

Article history:

Received 1 March 2019

Accepted 27 March 2019

Available online 20 May 2019

Editor: N. Lambert

ABSTRACT

In this letter, the Tsallis theory of non-extensive statistical mechanics described by the parameter $q > 0$ is applied in loop quantum gravity to calculate the black hole entropy, following ref. [11]. The black hole entropy is derived in terms of the Bekenstein-Hawking law for a given horizon area of mass M and arbitrary real positive values of the Immirzi parameter (γ). In this framework, it is shown that the black hole has a minimum temperature at M_{min} which relies on the q -parameter, and the specific heat of system is positive with $M > M_{min}$; this means that the large black hole is thermodynamically stable against radiation, in contrast to the standard result where all solutions appear to be unstable. This result is very similar to the ones announced from a black hole in Anti-de Sitter (AdS) space, where it is also proved that a Hawking-Page black hole phase transition results at a critical temperature which relies on the q parameter of the Tsallis formula.

© 2019 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

Loop quantum gravity (LQG) [1] presents quantum operators with discrete spectra for both area and volume. It is a canonical quantification of the classical field. As being its Hilbert space, its formalism uses spin networks. In spite of the fact that these results are very important, they show difficulties in term of the existence, in principle, of the Immirzi parameter, which is a free dimensionless quantity [7]. This parameter can be calculated in LQG by counting the number of microstates. In LQG , the quantum geometry of a cross-section of a black hole (BH) horizon is characterized by a topological 2 -sphere with defects, generally named punctures, supporting spin quantum numbers with spin-lattice edges describing the global quantum geometry [1,11]. One sort of calculating the Immirzi parameter, by figuring out the problem pointed out above, can be by considering the Bekenstein-Hawking entropy law ($BHEL$). The general adopted view is that $BHEL$ has its origin in the entropy of Boltzmann-Gibbs (BG). In this work however, we will develop on the ideas that were conceived in [11]. In principle, if the derivation of the laws of BH mechanics is correct, then, the $BHEL$ ought carry for all real positive values of γ . This has been accomplished, albeit with some approximations, by the introduction of Tsallis entropy within the context of LQG in ref. [11].

Therefore, in what follows, at first we make a review of ref. [11]. Then, we discuss our original results. We emphasize that our discussion is valid for $q > 0$, which goes beyond the discussion of ref. [11], where, only $q > 1$ was allowed for the Barbero-Immirzi parameter, and hence, the area spectrum to be positive definite.

As explained in reference [11], the first purpose of the introduction of a novel definition of entropy is: comprehending the Hilbert space and the microstates by probing the quantum field dynamic on the horizon. Concerning the Schwarzschild BH : the equations of the fields on the horizon may be derived from a Chern-Simons (CS) coupled to an external source action S_{CS} . Such an external source coupling refers to the horizon-external bulk coupling. These sources represent quantum geometric excitations on the horizon. The Hilbert space related to the BH horizon coupled to these points. Within this field theory view an estimation of a complete counting of the horizon microstates from the Hilbert space of CS theory by Kaul and Majumdar can be obtained [8].

The second purpose is the intervention of statistical mechanics where the calculation BH entropy in LQG is based on the formula of Shannon entropy

$$S = -k_B \sum_{k=1}^{\Omega} p_k \ln p_k \quad (1)$$

where k and p_k are respectively the microstate and its probability, and Ω is the total microstates number of the considered system. Then assuming that all the possible microstates may occur, say, with equal probability, that is $p_k = 1/\Omega$ for all k in eq. (1) to come

E-mail address: karim.mejrhit@gmail.com (K. Mejrhit).

to the simple formula $S = k_B \ln \Omega$. As though the valuation of this is now familiar from the Hilbert space knowledge, the remaining is just a mathematical operation that drives to $S = k_B \lambda_0 A / \gamma \ell_p^2$.

At the moment, we can make, without difficulty, the remark that in second purpose, the calculation of the entropy from the horizon microstates according to eq. (1) natively considers that the microstates are unbiased. This is feasible solely if these states were entirely unaffected by any external fields interaction. On the other side, in first purpose, we can see that the horizon microstates are characterized by a quantum CS theory coupled to point-like sources from bulk quantum geometry. There is an interaction, gravitational coupling, between the horizon and the bulk. Therefrom, it looks relatively reasonable to consider some different statistical mechanics or sort of an entropy formula more generalized than eq. (1) to take into consideration the coupling effect between the horizon and the bulk as a prejudice in the microstates. Now, we can ask how should the microstates be biased; we come to two answers to physical views:

- The bias has to be such that the entropy calculation from LQG drives to the BHEL, this could be obtained from the statistical mechanical viewpoint.
- In the field theory, the bias has to increase with the coupling strength between the horizon microstates and the bulk geometry.

In the field theoretic the coupling term $1/s = 4\pi\gamma/A$ is the coupling constant that manifests in front of the bulk geometry source fields being coupled to the CS theory on the horizon [1, 8]. The field equations on the BH horizon is presented by

$$F_{ab}^I = \frac{1}{s} \cdot \Sigma_{ab}^I = \frac{4\pi\gamma}{A} \cdot \Sigma_{ab}^I \quad (2)$$

where F_{ab}^I indicates the horizon CS gauge fields curvature and Σ_{ab}^I refers to the soldering form pull-back built from the bulk tetrads.

It is worth mentioning that in certain references the definition of s may be dissimilar by some numerical constants, relying on the redefinition of the fields. The equation of CS theory coupled to an external source is defined by Eq. (2) where the strength of the coupling being controlled by $4\pi\gamma/A$. Therefrom, it is apparent that for a BH with a given area the strength with which the horizon field theory is sourced and affected by the bulk fields is controlled by the parameter γ . The microstates estimate is afforded by the horizon Hilbert space, leaded by this CS theory quantization coupled to the bulk source fields.

In this letter we show that these two points of view, quite naturally, complement each other if a generalization of the Shannon entropy (from now on to be named as q -entropy) is introduced to integrate the effect of a bias in the microstates. We use it to calculate the BH entropy and necessitate it to yield the BHEL. As a result, we get from the BH microstates in LQG the BHEL, and this for arbitrary real positive values of the parameter γ . Though, the parameter γ should have, at the end, a fixed value that must be set by experimental means. When we are qualified to do thus, the parameter q will be a function of A which is physically well substantiated and this is due to the following reason: the coupling between the horizon and the bulk has a strength dependent on A like $s \equiv 2j_{\max}$. Seen that q states for the effect of the bias generated in the horizon microstates because of this coupling, it has to be also dependent on A .

Here, we examine the problem of the Bekenstein-Hawking entropy of a Schwarzschild BH by taking into account the seeming formal logarithm approach of the Tsallis see e.g. [17,18] (considered below). In the present view, the proofing of a stability change

and the Hawking-Page [6] phase transition of BHs in the Tsallis model is the most significant outcome (e.g. there is an interesting similarity between the corresponding temperature function and that of a standard BH in AdS space in thermodynamics). In the two situations, the temperature has a minimum and the considered heat capacity-mass relation is very identical to the one of a BH in AdS space. We showed that the corresponding critical temperature depends only on the q -parameter of the Tsallis formula (if γ is constant), such as it related exclusive on the curvature parameter in AdS space. There are many interesting connections of this phenomenon with other theoretical physics open problems, say, the matter cosmic nucleation into BHs in the early Universe, or because of the resemblance with the Boltzmann-AdS problem [6], also, in string theory and related phenomena, it can be linked to the AdS/CFT correspondence. The question of possible phase transitions is also discussed here.

2. Quantum theory in LQG

In the framework of LQG, we deal with the properties of the statistical mechanical in the quantum isolated horizon [5]. A basis is given by spin networks for the Hilbert space of canonical gravity. These are graphs whose edges are assorted by representations of the gauge group of the theory. This group is $SU(2)$ in the case of gravity, and the corresponding representations are therefore labeled by j_k , possessing values in the set $\{1/2, 1, 3/2, \dots, s/2\}$, corresponding to the spin related to the k th puncture and s ($s = 2j_{\max}$) is the maximum number of spins. A surface acquires the quantum area A_{qu} of the horizon if it has an intersection by an edge of such a spin network carrying the label j_k [15,16]

$$A_{qu} = 8\pi\gamma\ell_p^2 \sum_{l=1}^N \sqrt{j_l(j_l + 1)}, \quad (3)$$

where, $\ell_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ is the Planck length and γ is the dimensionless BI-parameter. A path for the determination of the BH entropy is furnished by LQG were the statistical mechanical properties of quantum isolated horizons are investigated in [5]. Especially, they are specified by means of quantum states that are constructed by the association of spin variables with punctures on the horizon. More accurately, a special eigenvalue of the area operator. We will deal with a horizon made up of N punctures that are situated on s different surfaces of quantum area a_k with spin j_k , we obtain n_k number of punctures in the spin j_k . That is in the area Eq. (3) the sum over the spins j can substitute the sum over the punctures like

$$A_{qu} = 8\pi\gamma\ell_p^2 \sum_{j=1/2}^{s/2} n_j \sqrt{j(j+1)}. \quad (4)$$

The BH horizon associated Hilbert space is that of a quantized $SU(2)$ CS theory coupled to the punctures $\mathcal{H}^s = \bigoplus_{\{\mathcal{P}\}} \text{Inv} \left(\bigotimes_{l=1}^N \mathcal{H}_{j_l} \right)$ with level $s \equiv 2j_{\max}$ [1,8], where $\{\mathcal{P}\} \equiv N; \frac{1}{2} \leq j_l \leq \frac{s}{2}; \forall l \in [1, N]$ such as $A_{qu} = A \pm \mathcal{O}(\ell_p^2)$ and 'Inv' account for the gauge invariance on the horizon. At this stage, for a known set of N punctures with spins j_1, \dots, j_N the microstates number is determined by [10,12]

$$\Omega(j_1, \dots, j_N) = \frac{2}{s+2} \sum_{a=1}^{s+1} \sin^2 \frac{a\pi}{s+2} \prod_{l=1}^N \frac{\sin \frac{a\pi(2j_l+1)}{s+2}}{\sin \frac{a\pi}{s+2}}. \quad (5)$$

For the calculations we shall use the expression (5). To obtain the total number of conformal blocks, this expression must be summed over all possible spin values at each puncture.

$$\begin{aligned}\Omega(N, s) &= \sum_{j_1, \dots, j_N} \Omega(j_1, \dots, j_N), \\ &= \frac{2}{s+2} \sum_{a=1}^{s+1} \sin^2 \frac{a\pi}{s+2} \left[\sum_{j=1/2}^{s/2} \frac{\sin \frac{(2j+1)a\pi}{s+2}}{\sin \frac{a\pi}{s+2}} \right]^N.\end{aligned}\quad (6)$$

Using Multinomial Expansion [10], the above expression can be recast into the following form

$$\begin{aligned}\Omega(N, s) &= \frac{N!}{\prod_{j=1/2}^{s/2} n_j!} \sum_{\{n_j\}} \left[\frac{2}{s+2} \sum_{a=1}^{s+1} \sin^2 \frac{a\pi}{s+2} \times \right. \\ &\quad \left. \prod_{j=1/2}^{s/2} \left\{ \frac{\sin \frac{(2j+1)a\pi}{s+2}}{\sin \frac{a\pi}{s+2}} \right\}^{n_j} \right].\end{aligned}\quad (7)$$

In the of large number of punctures N and large s (which is preserved for $A \gg \mathcal{O}(\ell_p^2)$), the number of physical microstates corresponding to a macrostate depicted by a spin configuration $\{n_j\}$ is roughly offered by

$$\Omega(N, s) \simeq N! \prod_{j=1/2}^{s/2} \frac{(2j+1)^{n_j}}{n_j!}, \quad (8)$$

where for any configuration $\{n_j\}$ the number $N = \sum_{j=1/2}^{s/2} n_j$ is the total number of the associated punctures. Here the configuration $\{n_j\}$ states for a set of punctures in which n_j number of punctures take spin j , whilst j goes from $1/2$ to $s/2$.

3. Nonextensive entropy

Primarily, the incorporate, at the level of statistical mechanical, of the effect of a bias in the probabilities of the microstates of the underlying quantum mechanical system was the idea behind the introduction of the notion of q -entropy [17]. The q parameter is designated by entropic index. Broadly, we have $0 < p_i < 1$, and thus $p_i^q > p_i$ for $q < 1$ and $p_i^q < p_i$ for $q > 1$. This means that for $q < 1$ the rare events whose probabilities are close to zero are relatively reinforced, and for $q > 1$ the frequent events whose probabilities are close to unity are relatively reinforced. Influenced by this fact, Tsallis postulated the q -entropy in the following form

$$S_q = \frac{(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q)}{(q-1)},$$

where p_i is the probability to exist within a microstate of systems, W is the total number of configurations i.e., microstates, and q parameter is the Tsallis parameter as known in the present literature. It is a real parameter measuring the degree of nonextensivity. In Tsallis statistics, the definition of entropy takes the standard properties of positivity, equiprobability, concavity and irreversibility. This passageway has been successfully employed in many different physical system. For example, we can indicate the anomalous diffusion of Levy-type [19], gravitational systems and a pure-electron plasma turbulence. It is noticeable to assure that the formalism of Tsallis thermostistical has the BG statistics like a specific situation in the $q \rightarrow 1$ limit where the standard additivity of entropy can be regained.

In the case where all the states have equal probability, say in the microcanonical ensemble, Tsallis' entropy reduces to

$$S_q = k_B \ln_q \Omega, \quad (9)$$

where the q -logarithm \ln_q is defined on \mathbb{R}^{+*} and the q -exponential defined by the relations

$$\ln_q(x) \equiv \int_1^x t^{-q} dt = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \quad (10)$$

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (11)$$

such as $[z]_+ = z$ if $z \geq 0$, and $[z]_+ = 0$ otherwise. We assure that for $\forall z \in \mathbb{R}$ we have $\ln_q[\exp_q(z)] = \exp_q[\ln_q(z)] = z$, where in the $q \rightarrow 1$ limit the usual Boltzmann entropy formula $S_q = k_B \ln \Omega$ is regained. For a spin sequence (j_1, \dots, j_N) the corresponding q -entropy can be determined by inserting eq. (8) in eq. (9). Indeed, the resulting expression is

$$S_q = k_B \ln_q [\Omega(N, s)]. \quad (12)$$

For large N , there is a noticeably careful approximation to the factorials that manifest in the entropy expression. By the use of Stirling's approximation, the entropy can be written as

$$S_q = \frac{k_B}{1-q} \left[\prod_{j=1/2}^{s/2} \left(\frac{2j+1}{n_j/N} \right)^{(1-q)n_j} - 1 \right]. \quad (13)$$

Therefore S_q is subadditive for $q \in \mathbb{R} - \{1\}$.

4. Bekenstein-Hawking and Tsallis entropy for black hole

In BH thermodynamics, the minimal quantum of area that is responsible is the one with spin $1/2$. In this view, it is not hard to realize that the number of possible states is taken over by the case $j_l = 1/2 \forall l \in [1, s]$. Physically, this is a useful approximation seen that we are interested in the scenario $N \rightarrow \infty$ which permits the application of statistical mechanics to the system. We are considering the quantum states with $A_{qu} = A \pm \mathcal{O}(\ell_p^2)$ and $A \gg \mathcal{O}(\ell_p^2)$ for large BHs, $j_l = 1/2 \forall l \in [1, s]$ fulfills all the conditions most strongly as it gives $A_{qu} \simeq A \propto N$ [11]. Thence, the q -entropy of a BH can be derived by putting $n_{1/2} = N; n_{2/2} = \dots = n_{s/2} = 0$ in eq. (13) and it drives to

$$\begin{aligned}S_q &= k_B \ln_q \left[\left(\frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{n_{1/2}/N} \right)^{n_{1/2}} \times \dots \times \left(\frac{2(\frac{s}{2}) + 1}{n_{s/2}/N} \right)^{n_{s/2}} \right] \\ &= k_B \frac{2^{(1-q)N} - 1}{1-q},\end{aligned}\quad (14)$$

which is the result that was reported in ref. [11].

At this stage, for $j_l = 1/2 \forall l \in [1, s]$, the area appears to be

$$\begin{aligned}&= 8\pi\gamma\ell_p^2 \left[n_{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} + \dots + n_{s/2} \sqrt{\frac{s}{2} \left(\frac{s}{2} + 1 \right)} \right] \\ A &= 4\pi\gamma\ell_p^2 N\sqrt{3}.\end{aligned}\quad (15)$$

So, the BH entropy can be written in terms of its area from eq. (14) and (15) like

$$S_q = \frac{k_B}{1-q} \left[\exp \left((1-q) \Lambda(\gamma) \frac{A}{4\ell_p^2} \right) - 1 \right] \quad (16)$$

where $\Lambda(\gamma) = \ln 2/\gamma\pi\sqrt{3}$. In the $q \rightarrow 1$ limit, the standard Bekenstein-Hawking entropy is reproduced by both the Tsallis formulas and $\gamma = \ln 2/\pi\sqrt{3}$ as

$$S_{BH} = k_B \frac{A}{4\ell_p^2}.$$

The simplest case of a Schwarzschild, the BH mass is associated to the Horizon area via the relation

$$A = 4\pi R_S^2 = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4} = 16\pi \ell_p^2 m^2 \tag{17}$$

where the mass m is $m = M/M_P$ and $M_P = \sqrt{\hbar c/G}$ is the Planck mass. The result in eq. (16) could be used to obtain the Tsallis-BH entropy as

$$S_q = \frac{k_B}{1-q} \left[\exp \left(4\pi (1-q) \Lambda (\gamma) m^2 \right) - 1 \right], \tag{18}$$

and considering this result in eq. (14) along with $S_{BH} = 4\pi k_B m$ (i.e. the entropy of Bekenstein-Hawking), the parameter γ can be derived in terms of m, q as

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}} \frac{4\pi (1-q) m^2}{\ln [1 + 4\pi (1-q) m^2]}. \tag{19}$$

From Eq. (19) it can be observed that in the $q \rightarrow 1$ limit the BI-parameter $\gamma = \ln 2 / \pi \sqrt{3}$ can be recovered, which is in agreement with the famous C. Rovelli formula [14]. The BI-parameter shown in the Figures with $\gamma \simeq 0.274$ [4,13], will be fixed in the next sections.

5. Thermodynamic stability of black holes

According to the Tsallis model, we examined the thermodynamical properties of a Schwarzschild BH, and if (18) was valid, the standard thermodynamical relation

$$\beta = \frac{1}{k_B} \frac{\partial S_q}{\partial E} = \frac{1}{k_B M_P c^2} \frac{\partial S_q}{\partial m} \tag{20}$$

would lead to the existence of inverse temperature of a BH as

$$\beta = \frac{8\pi \Lambda (\gamma) m}{k_B T_P} \exp \left[4\pi (1-q) \Lambda (\gamma) m^2 \right] \tag{21}$$

where T_P is the Planck temperature such as $T_P = M_P c^2 / k$. It goes after that the BH radiates with a thermal spectrum of Tsallis radiation temperature T_H as though

$$T_H = T_P \frac{\exp [4\pi (q-1) \Lambda (\gamma) m^2]}{8\pi \Lambda (\gamma) m}. \tag{22}$$

For a reason of comparison, on Fig. 1, and with s being constant, the temperature functions is plotted versus the BH mass for the Schwarzschild-Tsallis and the standard Schwarzschild-Boltzmann cases. At $q > 1$, it can be shown that the temperature functions minimum is obtained when this equation is accomplished

$$\partial_m T_H |_{m=m_{\min}} = 0$$

Here, the minimum value of the temperature T_H whose the expression is

$$T_H^{\min} = T_P \sqrt{\frac{(q-1)e}{8\pi \Lambda (\gamma)}} \tag{23}$$

is at

$$m_{\min} = [8\pi (q-1) \Lambda (\gamma)]^{-1/2}. \tag{24}$$

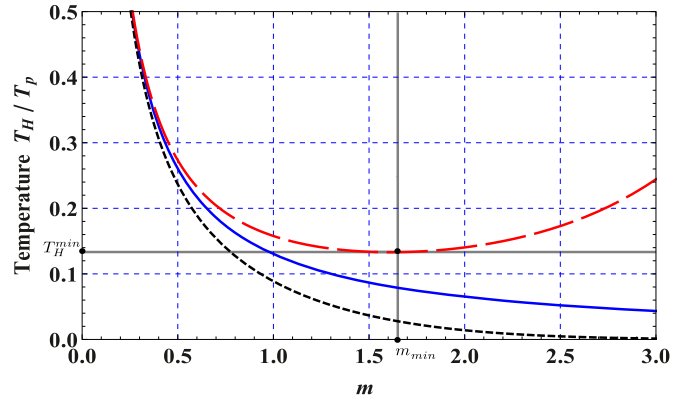


Fig. 1. Schwarzschild BH temperature as a function of mass in the asymptotically flat case with Boltzmann (blue-continuous, $q = 1$) and Tsallis (red-dashed $q > 1$ and black-dotted $q < 1$) entropies.

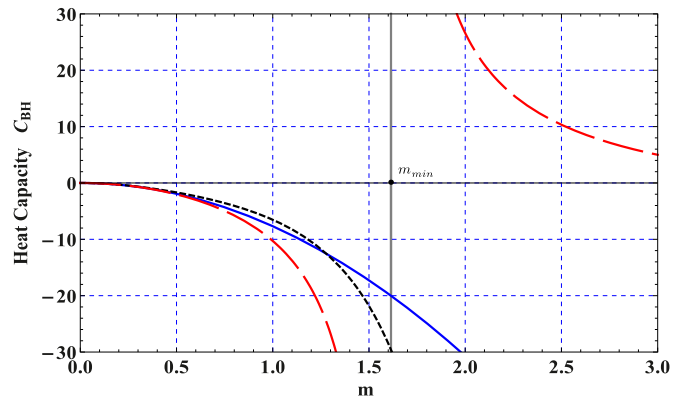


Fig. 2. Schwarzschild BH heat capacity as a function of its mass parameter in the standard with Boltzmann (blue-continuous, $q = 1$) and Tsallis (red-dashed, $q > 1$ and black-dotted, $q < 1$) entropies.

From where

$$T_H = (q-1) T_P \frac{\exp [m^2 / 2m_{\min}^2]}{m / m_{\min}^2}. \tag{25}$$

So, it can be seen in (Fig. 1) that contrary to the asymptotically case at ($q \rightarrow 1$), the Schwarzschild-Tsallis ($q > 1$) BH temperature not any more decreases monotonically with its mass. It reaches a minimum at $m = m_{\min}$; $T = T_H^{\min}$. For $T_H < T_H^{\min}$, BHs cannot exist and the space is filled with pure radiation. We can see that in LQG the m_{\min} of stable state of Tsallis BH is linked to the q -parameter and $\gamma - BI$ parameter.

The thermal stability of the Tsallis BH may be examined by fixing the sign of its heat capacity C_{BH} . The C_{BH} of the Tsallis BH associated with the horizon is specified as

$$C_{BH} = T_H \frac{\partial S_{TS}}{\partial T_H} = \frac{m^2 / m_{\min}^2 \exp [-m^2 / 2m_{\min}^2]}{(q-1) (m^2 / m_{\min}^2 - 1)} \tag{26}$$

From Fig. 2, when $0 < m < m_{\min}$ and $q > 1$ or ($m > 0$ and $q \leq 1$), the specific heat of system is negative, while $m > m_{\min}$ and $q > 1$, it is positive. In this case $q > 1$, the temperature has the minimum at $T_H = T_H^{\min}$. As is described in Fig. 1, the temperature is positive $T_H > T_H^{\min} > 0$ for every m . According to the viewpoint of Davies [3,9], the phase transitions occurs there at the divergences points m_{\min} of heat capacity are of second order.

To investigation the global thermodynamical stability of the BHs with Tsallis entropy in LQG, we needness to consider Gibbs

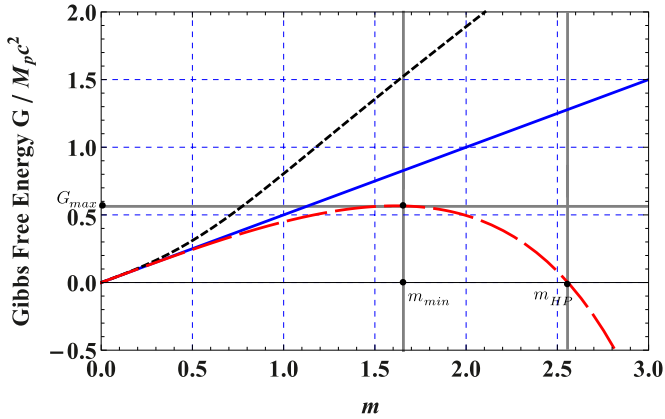


Fig. 3. Schwarzschild BH free energy as a function of mass parameter in the Tsallis model in the standard with Boltzmann (blue-continuous, $q = 1$) and Tsallis (red-dashed $q > 1$ and black-dotted, $q < 1$) entropies.

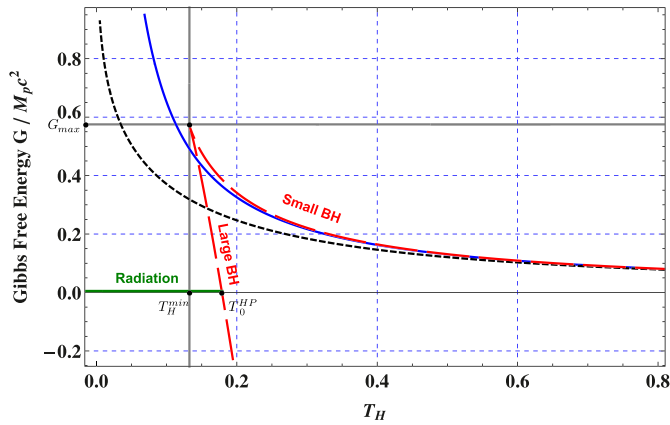


Fig. 4. Schwarzschild BH free energy as a function of the temperature in the Tsallis model in the standard with Boltzmann (blue-continuous, $q = 1$) and Tsallis (red-dashed $q > 1$ and black-dotted $q < 1$) entropies.

free energy G_{BH} (i.e. G_{BH} is equivalent with the Helmholtz one for asymptotically flat BHs at zero pressure). G_{BH} can be defined as

$$G_{BH} = E - T_H \times S_q$$

$$= M_p c^2 \frac{[m^2/m_{min}^2 + (1 - \exp[m^2/2m_{min}^2])]}{m/m_{min}^2} \quad (27)$$

As is described in Fig. 3, we show the Gibbs free energy arrives at the maximum value when $m = m_{min}$ at the divergent point of C_{BH} . Now, the right hand side at the critical point m_{min} , the G_{BH} decreasing monotonically with the mass m . Thus, we know that, the larger the BH is the more thermodynamically stable. Therefore, to ensure a positive heat capacity $C_{BH} \geq 0$ and physically significant thermodynamic quantities, there must be $q > 1$ and $m > m_{min}$ and $C_{BH} < 0$ for the smaller BH with $m < m_{min}$; these are thermodynamically unstable and cannot be in a thermal equilibrium with a thermal bath of radiation. In Fig. 4 shows that for $T_H^{min} < T_H < T_0^{HP}$. We observe that Gibbs free energy G_{BH} of this black hole is positive. This also confirms the results of [6] for the Schwarzschild AdS black hole. In general, large BHs with $T_H > T_0^{HP} \simeq 1.344T_q^{min}$ with $G_{BH}(T_0^{HP}) = 0$ (that is to say $m > m_{HP} \simeq 1.585m_{min}$ with $G_{BH}(m_{HP}) = 0$), has $G_{BH} < 0$ and the corresponding black holes represent the globally thermodynamically preferred state [2]. Furthermore, at $T_H = T_0^{HP}$, the intersection point of the bottom branch and $G = 0$ indicates the well known the phase transition between thermal radiation and large

BHs, this is completely analogous to the Hawking-Page phase transition of Schwarzschild BHs in AdS space. This phase transition can be interpreted as confinement-deconfinement phase transition by checking the different configurations of a quark and antiquark in AdS/QCD.

6. Conclusion

In this letter, we considered the Bekenstein-Hawking entropy of Schwarzschild BH event horizons as a nonextensive Tsallis entropy (if we assume that this idea is true), and by considering their equation of state based on the Tsallis non-extensive entropy using the LQG theory. From this study, we concluded that the non-extensive thermodynamics should be comparable with the extensive thermodynamics at values of $q \leq 1$, but with $q > 1$, one obtains a temperature minimum T_H^{min} at a given mass M_{min} . The BHs with smaller mass $M_0 < M_{min}$ has negative specific heat are unstable in the Schwarzschild-Tsallis model while for large masses $M_0 > M_{min}$ of BHs has positive specific heat become stable in the Schwarzschild-Tsallis model. In this current approach, the best substantial result is the affirmation of a stability change and the Hawking-Page transition of Schwarzschild BHs in the Tsallis model. These results are analogous to the ones obtained by Hawking and Page in AdS space within the standard BG entropy approach, because the whole curve $T_H(m)$ is of the same form as the result from a BH in the space AdS [2,6]. Therefore, there is a correspondence between the q -parameter nonextensive of the Schwarzschild-Tsallis model and the curvature parameter in the AdS space. Therefore, because of its similarity with the AdS problem, our present results have some relation to the correspondence of AdS/CFT and related phenomena point of view as well.

References

- [1] J. Baez, A. Ashtekar, K. Krasnov, Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy, *Adv. Theor. Math. Phys.* 4 (2000) 1–94.
- [2] V.G. Czinner, H. Iguchi, Renyi entropy and the thermodynamic stability of black holes, *Phys. Lett. B* 752 (2016) 306–310.
- [3] P.C.W. Davies, Thermodynamic theory of black holes, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 353 (1977) 499–521.
- [4] A. Ghosh, P. Mitra, An improved estimate of black hole entropy in the quantum geometry approach, *Phys. Lett. B* 616 (2005) 114.
- [5] A. Ghosh, A. Perez, Black hole entropy and isolated horizons thermodynamics, *Phys. Rev. Lett.* 107 (24) (2011).
- [6] S.W. Hawking, D.N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space, *Commun. Math. Phys.* 87 (1983) 577.
- [7] G. Immirzi, Quantum gravity and Regge calculus, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* 57 (1997) 65–72.
- [8] R.K. Kaul, P. Majumdar, Quantum black hole entropy, *Phys. Lett. B* 439 (1998) 267–270.
- [9] Meng-Sen Maa, Ren Zhao, Stability of black holes based on horizon thermodynamics, *Phys. Lett. B* 278 (2015) 751.
- [10] A. Majhi, Conformal blocks on a 2-sphere with indistinguishable punctures and implications on black hole entropy, *Phys. Lett. B* 762 (2016) 243–246.
- [11] A. Majhi, Non-extensive statistical mechanics and black hole entropy from quantum, *Phys. Lett. B* 775 (2017) 32–36.
- [12] A. Majhi, P. Majumdar, ‘Quantum hairs’ and entropy of the quantum isolated horizon from Chern–Simons theory, *Class. Quantum Gravity* 31 (2014) 195003.
- [13] K.A. Meissner, Black hole entropy in loop quantum gravity, *Class. Quantum Gravity* 21 (2004) 5245–5252.
- [14] C. Rovelli, Loop quantum gravity, *Living Rev. Relativ.* (2008).
- [15] C. Rovelli, L. Smolin, Discreteness of area and volume in quantum gravity, *Nucl. Phys. B* 442 (1995) 593–622.
- [16] L. Smolin, Linking topological quantum field theory and nonperturbative quantum gravity, *J. Math. Phys.* 36 (1995) 6417–6455.
- [17] C. Tsallis, Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world, *J. Stat. Phys.* 52 (1988) 479.
- [18] C. Tsallis, L.J.L. Cirto, Black hole thermodynamical entropy, *Eur. Phys. J. C* 73 (2013) 2487.
- [19] D.H. Zanette, P.A. Alemany, Thermodynamics of anomalous diffusion, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 366.

Conclusion générale

Nous sommes maintenant enfin en mesure de clore avec ce travail, dans lequel nous avons décrit comment la gravitation quantique à boucles, aboutit à une équation aux différences discrètes régissant des états physiques et comment de tels concepts et de tels artifices techniques peuvent nous ramener à des corrections non perturbatives des équations de mouvement prédites par la relativité générale classique. Un acteur fondamental dans ces prédictions est la discrétisation de l'espace dans la théorie qui joue un rôle tout aussi cruciale dans la théorie complète de la gravitation quantique à boucles.

Nous avons présenté dans cette thèse l'origine et la structure fondamentale du formalisme mathématique de la théorie Quantique à Boucles qui cible la mise en œuvre d'une forme quantifiée de gravitation à partir des considérations purement géométriques et topologiques. Nous avons donné un aperçu des principaux résultats, des préoccupations et des problèmes actuels de cette théorie. L'espace de Hilbert de difféomorphisme a été introduit afin de résoudre les contraintes de Gauss de difféomorphisme. Plusieurs opérateurs relatifs à cet espace ont été construits et beaucoup de propriétés ont été étudiées. Le premier de ces opérateurs est l'opérateur d'aire [7] qui a été le plus simple à étudier jusqu'à présent, et c'est aussi celui qui a fourni le premier résultat important de la Gravitation Quantique à Boucles. Le spectre de cet opérateur est discret à l'échelle de Planck. En conséquence, il existe en Gravitation Quantique à Boucles une limite inférieure de l'aire, en dessous de laquelle aucune valeur d'aire n'est permise, c'est donc la quantification de l'espace.

Le second résultat important de la Gravité Quantique à Boucles est la déduction de la formule de Bekenstein-Hawking de l'entropie d'un trou noir [146]. Signalons néanmoins que la solution donnée par la Gravitation Quantique à Boucles fournit un facteur dépendant du paramètre de Barbero-Immirzi γ , et que ce facteur ne correspond à celui donné par Hawking que pour la valeur $\frac{\ln 3}{\pi\sqrt{3}}$. Les discussions à propos de la valeur du paramètre γ ont constitué le fil conducteur de ce travail.

Cette thèse a représenté pour moi une contribution modeste aux études indiquant que l'entropie des trous noirs et d'autres grandeurs statistiques thermodynamiques peuvent être calculées de manière cohérente dans le cadre de la théorie de la gravitation quantique à boucles et que les résultats obtenus sont en bon accord avec l'analyse semi-classique de Hawking pour toutes les valeurs du paramètre de γ .

Nous avons considéré l'entropie de Bekenstein-Hawking des horizons des trous noirs de Schwarzschild comme une entropie de Tsallis non-extensive toujours dans le cadre de la gra-

vitiation quantique à boucles. Enfin, nous avons démontré que le paramètre \mathbf{q} est un facteur déterminant qui explique le fait que le trou noir à masse minimale possède donc une température minimale. Aussi sa chaleur spécifique est toujours positive pour une masse supérieure à la valeur minimale et cela implique une stabilité thermodynamique aux rayonnements pour les trous noir massifs, ce qui contredit le résultat standard qui prétend une instabilité dans toutes les solutions. cette constatation est très similaire à celle annoncée pour un trou noir dans l'espace Anti-de Sitter (AdS), où une transition de phase Hawking-Page du trou noir se produit a une température critique reposant sur le paramètre \mathbf{q} de la formule de Tsallis.

Bibliographie

- [1] J. Pereira. Lorentz connections and gravitation. *AIP Conf Proc.*, 1483 :239, 2012.
- [2] R. Gambini and J. Pullin. *A First Course in Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press New York., 2011.
- [3] K. Noui and A. Perez. Three dimensional loop quantum gravity : Physical scalar product and spin foam models. *Class Quant Grav.*, 1739 :22, 2005.
- [4] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] T. Thiemann. Introduction to modern canonical quantum general relativity. *arXiv :gr-qc/0110034*, pages 2025–2064, 2001.
- [6] T. Thiemann. *Modern canonical quantum general relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge, UK., 2007.
- [7] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Quantum theory of geometry i : Area operators. *Class Quant Grav.*, 14 :55–82, 1997.
- [8] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Quantum theory of geometry ii : Area operators. *Adv Theor Math Phys.*, 1 :388–429, 1998.
- [9] A. Perez. Introduction to loop quantum gravity and spin foams. *gr-qc/0409061*, 2004.
- [10] C. Rovelli. *Loop quantum gravity*. Phys. World, 2003.
- [11] P. Don and S. Speziale. Introductory lectures to loop quantum gravity. *arXiv :grqc/1007.0402.*, page 18, 2010.
- [12] J. Donoghue. Introduction to the effective field theory description of gravity. *arXiv :gr-qc/9512024.*, page 7, 1995.
- [13] G. Immirzi. Quantum gravity and regge calculus. *Nucl Phys Proc Suppl.*, 65 :57, 1997.
- [14] T. Thiemann. Gauge field theory coherent states (gcs) : I. general properties. *Class. Quant.Grav.*, 18 :2025–2064, 2001.
- [15] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press Chicago and London, 1984.
- [16] P. Jetzer. *General Relativity*. Physik-Institut der Universitat Zurich., 2016.
- [17] D. Louapre. Modèles de mousses de spin pour la gravité quantique en 3 dimensions. École Normale Supérieure de Lyon. Laboratoire de Physique, Équipe Théorie, juin 2004.
- [18] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie des champs Vol.2*. Éditions Mir., 1982.

-
- [19] Claude Aslangul. Mécanique quantique : Tome 1, Fondements et premières applications. De Boeck, 2007.
- [20] F. Laloe et C.Tannoudji B. Diu. Mécanique Quantique. Hermann., 1997.
- [21] P. A. M. Dirac. Lectures on Quantum Mechanics. Academic Press, New York., 1965.
- [22] A. Messiah. Mécanique Quantique. Dunod., 1959.
- [23] I. Gelfand and M.Naimark. Unitary Representations of Classical Groups. Akademie Verlag., 1957.
- [24] M. Naimark and A.Stern. Theory of Group Representations. Springer-Verlag., 2006.
- [25] S. Weinstein. Gravity and gauge theory. Phil-Sci Archive., page 5, 1998.
- [26] N. Kiriushcheva and S.V. Kuzmin. Diffeomorphism invariance in the hamiltonian formulation of general relativity. arXiv :gr-qc/0808.2623v1., page 4, 2008.
- [27] S. Deser R. Arnowitt and C. Misner. Canonical variables for general relativity. Phys. Rev., 117 :1595, 1960.
- [28] S. Deser R. Arnowitt and C. Misner. The dynamics of general relativity. Wiley New York., 2160 :24, 1962.
- [29] T. Regge and C. Teitelboim. Role of surface integrals in the hamiltonian formulation of general relativity. Ann. Phys. (N.Y.), 88 :286, 1974.
- [30] Soren Holst. Barbero's hamiltonian derived from a generalized hilbert- palatini action. Phys. Rev. D, 53 :5966–5969, 1996.
- [31] Nuno Barros e Sa. Hamiltonian analysis of general relativity with the immirzi parameter. Int. J. Mod. Phys. D, 10 :261–272, 2001.
- [32] E.ourgoulhon. 3+1 Formalism in General Relativity : Bases of Numerical Relativity. Springer ; 1st edition., 2012.
- [33] M. Bojowald. Canonical Gravity and Applications Cosmology, Black Holes and Quantum Gravity. Cambridge University Press., 2011.
- [34] E.ourgoulhon. 3+1 Formalism in General Relativity. 846, Springer., 2007.
- [35] N. Deruelle. General Relativity : a Primer. lectures at Institut Henri Poincaré, Paris., 2006.
- [36] E. Poisson. A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge University Press., 2004.
- [37] K.S. Thorne C.W. Misner and J.A. Wheeler. Gravitation. Freeman, New York., 1973.

- [38] M. Berger. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer, Berlin., 2003.
- [39] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*, 2nd edn. Clarendon Press, Oxford., 1991.
- [40] N. Barros e Sa. Hamiltonian analysis of general relativity with the immirzi parameter. *Int J Mod Phys D.*, 261 :10, 2001.
- [41] J. Schwinger. Energy and momentum density in field theory. *Phys. Rev.*, 130 :800, 1963.
- [42] C. Beetle A. Ashtekar and S. Fairhurst. Isolated horizons : A generalization of black hole mechanics. *Class Quant Grav.*, L1 :16, 1998.
- [43] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :2244–2247, 1986.
- [44] A. Ashtekar. New hamiltonian formulation of general relativity. *Phys. Rev. D.*, 36 :1587–1602, 1987.
- [45] J. Barbero. Real ashtekar variables for lorentizan signature space-times. *Phys Rev D.*, 51 :5507–5510, 1995.
- [46] D. Minic L. Freidel and T. Takeuchi. Quantum gravity, torsion, parity violation and all that. *Phys. Rev. D.*, 72 :104002, 2005.
- [47] A. Perez and C. Rovelli. Physical effects of the immirzi parameter. *Phys Rev D.*, 73 :044013, 2006.
- [48] C. Rovelli and T. Thiemann. The immirzi parameter in quantum general relativity. *Phys Rev D.*, 1009 :57, 1998.
- [49] J. Samuel. Is barbero’s hamiltonian formulation a gauge theory of lorentzian gravity? *Class. Quant. Grav.*, 17 :141, 2000.
- [50] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics V1*, second edition. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [51] R. Haag. *Local quantum physics : Fields, particles, algebras*. Springer Verlag., 1992.
- [52] R.V. Kadison and J.R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operators algebras*, Vol. I II. Academic Press, Orlando., 1986.
- [53] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review.*, 160 :1113, 1967.
- [54] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Physical Review.*, 162 :1195, 1967.
- [55] R. Gambini and J. Pullin. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. Cambridge, UK : Univ. Pr., 1996.

-
- [56] R. Giles. Reconstruction of gauge potentials from wilson loops. *Phys Rev D.*, 24 :2160, 1981.
- [57] C. Isham. Topological and global aspects of quantum theory. B. DeWitt R. Stora, eds, 'Relativity, Groups and Topology II', North-Holland, Amsterdam., 360 :1062–1290, 1983.
- [58] C. Isham and A. Kakas. A group theoretical approach to the canonical quantization of gravity : Construction of the canonical group. *Class.Quant.Grav.*, 1 :621, 1984.
- [59] C. Isham and A. Kakas. A group theoretical approach to the canonical quantization of gravity : Unitary representations of the canonical group. *Class.Quant.Grav.*, 1 :633, 1984.
- [60] C. Rovelli and L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nucl. Phys. B.*, 331 :80–152, 1990.
- [61] V. Fock and A. Rosly. Poisson structure on moduli of flat connections on riemann surfaces and r matrix. *Am.Math.Soc.Transl.*, 191 :67–86, 1999.
- [62] C. Meusburger and B. Schroers. Poisson structure and symmetry in the chern-simons formulation of (2+1)-dimensional gravity. *Class.Quant.Grav.*, 20 :2193–2234, 2003.
- [63] C. Meusburger and B. Schroers. Generalised chern-simons actions for 3d gravity and kappa-poincare symmetry. *Nucl.Phys.B.*, 806 :462–488, 2009.
- [64] J. K. Glikman and A. Starodubtsev. Effective particle kinematics from quantum gravity. *Phys.Rev. D.*, 78 :084039, 2008.
- [65] S. MacDowell and F. Mansouri. Unified geometric theory of gravity and supergravity. *Phys.Rev.Lett.*, 38 :739, 1977.
- [66] H. Brandt. About a generalization of the group concept. *Mathematische Annalen.*, 96 :360–366, 1927.
- [67] D. Callaway and A. Rahman. Microcanonical ensemble formulation of lattice gauge theory. *Physical Review Letters.*, 49 :613–616, 1982.
- [68] A. Bazavov et al. Nonperturbative qcd simulations with 2+1 flavors of improved staggered quarks. *Reviews of Modern Physics.*, 82 :1349–141, 2010.
- [69] J. Kogut and L. Susskind. Hamiltonian formulation of wilson's lattice gauge theories. *Phys. Rev. D.*, 11 :395–408, 1974.
- [70] H. Rothe. Lattice gauge theories : An introduction. *World Scientific Lecture Notes in Physics.*, 43 :1–381, 1992.
- [71] K. G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D.*, 10 :2445–2459, 1974.
- [72] C. Rovelli and L. Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys. B.*, 442 :593–662, 1995.

- [73] A. Ashtekar, J. Mourao J. Lewandowski, D. Marolf, and T. Thiemann. Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. *J. Math. Phys.*, 36 :6456–93, 1995.
- [74] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Projective techniques and functional integration for gauge theories. *J. Math. Phys.*, 36 :2170–2191, 1995.
- [75] D. Lillo. Bouncing black holes in loop quantum gravity. *Alma Mater Studiorum · University of Bologna*, septembre 2014.
- [76] H. J. Matschull. Dirac’s canonical quantization programme. *arXiv :quant-ph/9606031*, 1996.
- [77] B. Hatfield. *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*. Perseus Publishin., 1998.
- [78] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity iii : Applications of the covariant theory. *Physical Review.*, 162 :1239, 1967.
- [79] S. W. Hawking J. B. Hartle and T. Hertog. The classical universes of the noboundary quantum state. *Phys. Rev. D.*, 77 :123537, 2008.
- [80] R. Penrose. Angular momentum : An approach to combinatorial space-time, dans *Quantum Theory and Beyond*. Cambridge University Press., 1971.
- [81] C. Rovelli and L. Smolin. Spin networks and quantum gravity. *Phys.Rev.D.*, 52 :5743–5759, 1995.
- [82] E. P. Wigner. *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press., 1959.
- [83] J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson Edition., 1985.
- [84] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits. *Journal of Geometry and Physics.*, 17 :191–230, 1995.
- [85] L. Smolin. Recent developments in non-perturbative quantum gravity. in *Proceedings of the XXIIth GIFT International Seminar on Theoretical Physics*, World Scientific., 55 :3–84, 1992.
- [86] C. Rovelli A. Ashtekar and L. Smolin. Gravitons and loops. *Physical Review D.*, 44 :1740–1755, 1991.
- [87] J. Lewandowski A. Ashtekar and H. Sahlmann. Polymer and fock representations for a scalar field. *Classical and Quantum Gravity.*, 20 :11–21, 2003.
- [88] T. Thiemann. Kinematical hilbert spaces for fermionic and higgs quantum field theories. *Classical and Quantum Gravity.*, 15 :1487–1512, 1998.

- [89] T. Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd) v : Quantum gravity as the natural regulator of matter quantum field theories. *Classical and Quantum Gravity*, 15 :1281–1314, 2005.
- [90] M. Varadarajan. Photons from quantized electric flux representations. *Physical Review D.*, 64 :104003, 2001.
- [91] M. Varadarajan. Gravitons from a loop representation of linearized gravity. *Physical Review D.*, 66 :024017, 2002.
- [92] E. T. Newman J. Lewandowski and C. Rovelli. Variations of the parallel propagator and holonomy operator and the gauss law constraint. *J. Math. Phys.*, 34 :4646–54, 1993.
- [93] L. Lehner S. Frittelli and C. Rovelli. The complete spectrum of the area from recoupling theory in loop quantum gravity. *Class. Quantum Grav.*, 2921–32 :13, 1996.
- [94] K. Peeters H. Nicolai and M. Zamaklar. Loop quantum gravity : an outside view. *Class Quant Grav.*, 22 :193–R247, 2005.
- [95] G. 't Hooft. On the quantum structure of a black hole. *Nucl. Phys. B.*, 256 :727–745, 1985.
- [96] Lalla Btissam Drissi. Contributions à l'étude des Branes, Trous Noirs Attracteurs et Testes de la Conjecture OSV. Thèse, Université Mohammed V-Rabat Faculté des sciences, 4 Avenue Ibn Batouta BP 1014 RP, RABAT E-mail : decanat@fsr.ac, Rabat, 2006.
- [97] M. Heusler. Black hole uniqueness theorems. Cambridge University Press, Cambridge., 1996.
- [98] C. Kiefer. Quantum Gravity. Oxford University Press., 2007.
- [99] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften.*, 313 :189–196, 1916.
- [100] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to einstein's theory. *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften.*, 42 :424–434, 1916.
- [101] S. Chandrasekhar. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford University Press., 1983.
- [102] K Mejrhit, R Ahl-Laamara, and E Ennadifi, S. On black hole radiation spectrum in loop quantum gravity. *Gravitation and Cosmology*, 23 :41–44, 2017.
- [103] K. Mejrhit and S.E. Ennadifi. Thermodynamics, stability and hawking–page transition of black holes from non-extensive statistical mechanics in quantum geometry. *Physics Letters B*, 794C :45–49, 2019.

- [104] W. Israel. Thermo-field dynamics of black holes. *Phys. Lett. A.*, 57A :107, 1976.
- [105] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Comm Math Phys.*, 199 :43, 1975.
- [106] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11 :237–238, 1963.
- [107] H. Quevedo D. Núñez and D. Sudarsky. Black hole hair : a review. in *black holes : theory and observation. Lecture Notes in Physics.* Springer, Berlin., 514 :187–98, 1998.
- [108] S. W. Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Comm Math Phys.*, 1344 :26, 1971.
- [109] R. M. Wald. The thermodynamics of black holes. *Living Rev. Rel.*, 4 :6, 2001.
- [110] W. Israel. Third law of black-hole dynamics : A formulation and proof. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :397, 1986.
- [111] C. J. Farrugia and P. Hajicek. The third law of black hole mechanics : A counterexample. *Comm. Math. Phys.*, 68 :291–300, 1979.
- [112] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D.*, 7 :2333–2346, 1973.
- [113] J. D. Bekenstein. Limitations on quantum information from black hole physics. *Acta Phys.Polon.B.*, 32 :3555, 2001.
- [114] J. Earman G. Belot and L. Ruetsche. Black hole explosions? *Nature.*, 248 :30–31, 1974.
- [115] B. Carter J. M. Bardeen and S. W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun.Math.Phys.*, 31 :161–170, 1973.
- [116] A. Ghosh and A. Perez. Black hole entropy and isolated horizons thermodynamics. *arXiv :gr-qc/1107.1320v3.*, 5245 :1, 2011.
- [117] S. W. Hawking. Black holes in general relativity. *Comm Math Phys.*, 152 :25, 1972.
- [118] I. Agullo et al. Detailed black hole state counting in loop quantum gravity. *Phys Rev D.*, 084029 :82, 2010.
- [119] J. D. Bekenstein. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D.*, 9 :3292, 1974.
- [120] W. G. Unruh. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev. D.*, 14 :870–892, 1976.
- [121] J. Earman G. Belot and L. Ruetsche. Information loss paradox : The anatomy of a controversy. *The British Journal for the Philosophy of Science.*, 50 :189–229, 1999.
- [122] S. W. Hawking. Loss of Information in Black Holes, in *The Geometric Universe.* Oxford University Press., 1998.

-
- [123] J. D. Bekenstein. Quantum black holes as atoms. In Proc. 8th Marcel Grossmann Meet, World Scientific, Singapore., 1999.
- [124] S. Hod. Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. Phys. Rev. Lett., 81 :34293–6, 1998.
- [125] J. D. Bekenstein. The quantum mass spectrum of the kerr black hole. Comm. Math. Phys, 11 :467–70, 1974.
- [126] V. F. Mukhanov. Are black holes quantized? Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters., 44 :63–66, 1986.
- [127] J. D. Bekenstein and V. F. Mukhanov. Spectroscopy of the quantum black hole. Phys.Lett. B., 360 :7–12, 1995.
- [128] J. A. Wheeler. Information, physics, quantum : the search for links. In Complexity, entropy, and the physics of information. Addison-Wesley, Redwood City., 1990.
- [129] A. Corichi. Black holes and entropy in loop quantum gravity : An overview. arXiv :gr-qc/0901.1302v1., 5245 :7, 2009.
- [130] K. Meissner. Black hole entropy in loop quantum gravity. Class Quant Grav., 5245 :21, 2004.
- [131] C. Rovelli. Black hole entropy from loop quantum gravity. Phys. Rev. Lett., 77 :3288–3291, 1996.
- [132] I. Booth. Black hole boundaries. Can J Phys., 1073 :83, 2005.
- [133] O. Dreyer. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. Phys. Rev. Lett., 90 :081301, 2003.
- [134] J. Lewandowski M. Domagala. Black-hole entropy from quantum geometry. Classical Quantum Gravity., 5233–5243 :21, 2004.
- [135] K. A. Meissner. Black-hole entropy in loop quantum gravity. Class. Quantum Grav., 21 :5245–51, 2004.
- [136] D. N. Page. Hawking radiation and black hole thermodynamics. New J. Phys., 7 :203, 2005.
- [137] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt. Quasinormal modes of stars and black holes. Living Rev. Relativity., 2 :2, 1999.
- [138] L. Motl. An analytical computation of asymptotic schwarzschild quasinormal frequencies. Adv. Theor. Math. Phys., 6 :1135–62, 2003.
- [139] G. Amelino-Camelia. Quantum-gravity phenomenology : status and prospects. Mod. Phys. Lett. A., 17 :899–922, 2002.

- [140] I. Percival and W. Strunz. Detection of space-time fluctuations by a model matter interferometer. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 453 :431–46, 1997.
- [141] K. Y. Chung A. Peters and S. Chu. High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia.*, 38 :25–61, 2001.
- [142] C. J. Hogan. Holographic discreteness of inflationary perturbations. *Phys. Rev. D.*, 66 :023521, 2002.
- [143] D. Kimberly and J Magueijo. Phenomenological quantum gravity. *AIP Conf.Proc.*, 782 :241–263, 2005.
- [144] R. Penrose. On gravity’s role in quantum state reduction. *Gen. Rel.Grav.*, 28 :581–600, 1996.
- [145] A. Majhi. Non-extensive statistical mechanics and black hole entropy from quantum. *Physics Letters B.*, 775 :32–36, 2017.
- [146] A. Corichi A. Ashtekar, J. Baez and K. Krasnov. Quantum geometry and black hole entropy. *Phys.Rev.Lett.*, 80 :904–907, 1998.

Résumé

Cette thèse fournit une brève introduction à la gravitation quantique à boucles (GQB). Il est formulé sur la base d'un formalisme hamiltonien de relativité générale (RG) avec une quantification non perturbative et indépendante du background. Dans ce cadre, il est montré que l'espace-temps est discret à l'échelle de Planck et conduit à l'application de la GQB aux calculs des valeurs d'entropie des trous noirs (TNs). La présente thèse inclut des contributions à l'étude des résultats indiquant que l'entropie des TNs et d'autres grandeurs statistiques thermodynamiques peuvent être calculées de manière cohérente en GQB et que les résultats sont en accord avec l'analyse semi-classique de Hawking. Ensuite, nous avons considéré l'entropie de Bekenstein-Hawking des horizons de TNs de Schwarzschild comme une entropie de Tsallis non-extensive dans le cadre de la GQB. Enfin, nous avons montré que le TN a une température minimale à M_{\min} qui repose sur le paramètre q et que la chaleur spécifique du système est positive avec $M > M_{\min}$. Ce résultat est très similaire à celui annoncé par un TN dans l'espace Anti-de Sitter, où il est également prouvé qu'une transition de phase Hawking-Page se produit à une température critique.

Mots-clés : Relativité générale, Trous noirs, Gravité quantique à boucles, Réseaux de spins, Paramètre de Barbero-Immirzi, Entropie Bekenstein-Hawking, Non-extensive.

Abstract

This thesis provides a brief introduction to Loop Quantum gravity (LQG). It is formulated on the basis of a Hamiltonian formalism of general relativity (GR) with a non-perturbative and background independent quantization. In this context, it is shown that space-time is discrete at Planck scales and leads to the application of LQG to calculations of the entropy values of black holes (BHs). The present thesis includes contributions to the study of the results indicating that the entropy of BHs and other thermodynamic statistical quantities can be computed in a coherent way in LQG and that the results are in agreement with the semi-classical analysis by Hawking. Next, we considered the Bekenstein-Hawking entropy of Schwarzschild LQG horizons as a non-extensive Tsallis entropy in the framework of LQG. Finally, we have shown that the BH has a minimum temperature at M_{\min} which is based on the parameter q and that the specific heat of the system is positive with $M > M_{\min}$. This result is very similar to that predicted by a BH in Anti-de Sitter space, where there is also evidence that a Hawking-Page phase transition occurs at a critical temperature.

Keywords : General Relativity, Black Holes, Loop Quantum Gravity, Spin networks, Barbero-Immirzi parameter, Bekenstein-Hawking entropy, Non-extensive.