

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Physique des Hautes Energies- Modélisation et Simulation

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le 11/09/2021 par :

Abdallah SLAOUI

Les relations intrinsèques des théories des ressources quantiques et leurs rôles dans la métrologie quantique

JURY

Mohamed BENNAI	PES, Université Hassan II de Casablanca, Faculté des Sciences Ben M'Sik.	Président
EL Hassan SAIDI	PES, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Rapporteur/Examineur
Lalla Btissam DRISSI	PH, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Rapporteur/Examineur
Mostafa MANSOUR	PH, Université Hassan II de Casablanca, Faculté des Sciences Aïn Chock.	Rapporteur/Examineur
Mostafa NASSIK	PES, Université Ibn Zohr d'Agadir, Faculté des Sciences.	Examineur
Abderrahim EL ALLATI	PH, Université Abdelmalek Essaâdi de Tétouan, Faculté des Sciences et Techniques d'Al-Hoceima.	Examineur
Mohammed EL FALAKI	PH, Université Chouaïb Doukkali d'El Jadida, Faculté des Sciences.	Examineur
Rachid AHL LAAMARA	PH, Université Mohammed V de Rabat, Faculté des Sciences.	Codirecteur de thèse
Mohammed DAOUD	PES, Université Ibn Tofail de Kénitra, Faculté des Sciences.	Directeur de thèse

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du Laboratoire de Physique des Hautes Energies-Modélisation et Simulation de l'université Mohammed V-Rabat, Faculté des Sciences, sous la direction et l'encadrement de Monsieur **Mohammed DAOUD**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences de Kénitra, et le co-encadrement de Monsieur **Rachid AHL LAAMARA**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat.

La rédaction de cette thèse et la réalisation de ce programme de doctorat n'auraient pas été possibles sans les opportunités, les conseils et l'aide que m'ont offerts plusieurs autres personnes impliquées dans ce travail. D'abord et avant tout, j'ai beaucoup de chance et je suis profondément reconnaissant à mon parrain scientifique et mon directeur de thèse, Monsieur **Mohammed DAOUD**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences Ibn Tofail de Kénitra, pour tous ses encouragements, son soutien continu et ses conseils qui m'ont permis de terminer ma thèse avec succès. Je peux dire que c'est lui qui m'a formé à la rédaction d'articles de recherche. Je lui suis très reconnaissant pour ses enseignements, qui m'ont permis d'apprendre à étudier des problèmes de recherche et à noter des idées. Il m'a laissé prendre le temps de réfléchir aux idées et aux problèmes sur lesquels la thèse se développe. Il m'a donné la liberté de les poursuivre à mon propre niveau et m'a fourni les commentaires, les directives et l'aide nécessaires. Je le remercie vivement de m'avoir inspiré de nouveaux travaux, d'avoir organisé des discussions enthousiastes, de maintenir l'esprit de groupe et, surtout, de m'avoir toujours apporté son soutien total par tous les moyens possibles. C'était une grande opportunité de travailler sous sa direction et ses connaissances profondes ainsi que sa patience inégalée ont été inestimables dans ma croissance en tant que chercheur.

Je voudrais également exprimer mes remerciements à mon co-encadrant et mon conseiller pédagogique, Monsieur **Rachid AHL LAAMARA**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences de Rabat, pour ses conseils et ses encouragements tout au long de ce travail, pour sa disponibilité et pour m'avoir fait bénéficier de ses compétences, merci également pour les efforts qu'il n'a cessé de déployer pour la réussite de plusieurs activités de notre laboratoire. Aussi, je le remercie chaleureusement pour m'avoir donné l'opportunité d'enseigner le cours de théorie de l'information quantique pour les étudiants du Master Physique Mathématique.

Je tiens à remercier Monsieur **Mohamed BENNAI**, Professeur de l'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences Ben M'Sik de Casablanca, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Veuillez recevoir Monsieur l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

J'exprime mes profonds remerciements au Monsieur **El Hassan SAIDI**, Professeur de l'enseignement supérieur et directeur du Laboratoire de Physique des Hautes Energies-Modélisation et Simulation de département de physique de la Faculté des Sciences, Université Mohammed V de Rabat, où les travaux de cette thèse ont été préparés. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et pour la confiance qu'il m'a accordée depuis mes premiers pas jusqu'à la rédaction de ce manuscrit, ainsi pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Ses encouragements continus, qui m'ont donné la force et le courage de réaliser cette thèse, ainsi que d'avoir accepté de juger ce travail. Je le remercie également pour son enseignement durant les années du Master de Physique Mathématique avec une très

grande compétence.

Je remercie vivement Madame **Lalla Btissam DRISSI**, Professeur Habilitée à la Faculté des Sciences de Rabat, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma soutenance en tant que rapporteur ainsi pour son enseignement de bonne qualité durant notre formation dans le Master Physique Mathématique. Je la remercie pour ses conseils avisés.

Mes remerciements chaleureuses s'adressent à Monsieur **Mostafa MANSOUR**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences Ain Chock de Casablanca, pour avoir accepté de rapporter mon travail de recherche et de faire partie du jury de thèse. Veuillez accepter, Professeur, l'expression de ma plus profonde gratitude.

Par la même occasion, je suis également reconnaissant à Monsieur **Mostafa NASSIK**, Professeur d'enseignement supérieur à la Faculté des Sciences Ibn Zohr d'Agadir pour avoir accepté d'être examinateur de ma thèse.

Mes remerciements chaleureuses s'adressent à Monsieur **Mohammed EL FALAKI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences d'El Jadida, pour avoir accepté d'être membres du jury en tant que examinateur et pour avoir évalué ce travail.

Un grand merci à Monsieur **Abderrahim EL ALLATI**, Professeur Habilité à la Faculté des Sciences et Techniques d'Al Hoceima d'avoir accepté d'être examinateur.

Je suis profondément reconnaissant à tous les membres du jury qui ont bien voulu me faire l'honneur d'assister à ma soutenance afin de juger la qualité de ce travail. Je leur suis redevable pour leurs précieux commentaires.

Je suis redevable à Monsieur **Muzzamal SHAUKAT**, Professeur assistant à l'Instituto Superior Técnico (IST), l'Université de Lisbonne, Portugal. Shaukat a suivi de près mes activités de recherche depuis mes premiers jours de doctorat et une grande partie de mon travail est influencée par ses précieuses remarques. Il m'a également prodigué des conseils utiles pour ma carrière. Merci Shaukat !

J'ai la chance d'avoir rencontré Monsieur **Ahmed SALAH**, professeur à l'Autorité de l'énergie atomique du Caire, Égypte. Salah m'a fait découvrir la théorie nouvellement développée de l'optique quantique, m'a aidé avec sa littérature et a généreusement partagé ses idées. Certaines de ces idées se sont matérialisées par des résultats concrets.

Au cours de mes recherches de thèse, j'ai bénéficié de visites prolongées à "*l'Institut Henri Poincaré*" et au "*Collège de France*" à Paris, au "*Centre International de Rencontres Mathématiques*" à Marseille, en France, au "*Centre International Abdus Salam de Physique Théorique*" à Trieste, en Italie, et à "*l'Institut des Sciences Mathématiques de Madrid*", en Espagne. Je voudrais remercier de nombreuses personnes qui m'ont accueilli dans ces établissements, et grâce à ces opportunités, cette période a été la plus stimulante et la plus productive de mon doctorat. Et en parlant de gens, je ne peux pas être assez reconnaissant envers tous ceux qui ont partagé une partie du voyage dans tous ces groupes et les régions environnantes. Il y a beaucoup de gens avec qui j'ai partagé des discussions, des cafés et des matchs de football, et cela fait beaucoup de noms à retenir !

Bien que mon doctorat se soit déroulé loin de chez moi, ma famille a toujours été là pour moi et m'a encouragée. Je remercie ma mère Amina, mes sœurs et mes frères pour leur amour et leur soutien. J'espère que je les ai rendus fiers.

J'ai eu la chance d'avoir des discussions intéressantes sur le sujet de la thèse avec de nombreux collègues et amis spécialistes de la physique quantique au LPHE-MS, et chacun d'entre eux a contribué d'une manière ou d'une autre à mon travail, parmi lesquels H. El Hadfi, B. Amghar, L. Bakmou et F. Z. Ramadan.

Enfin, je voudrais profiter de cette occasion pour remercier tous mes professeurs, collègues et amis chercheurs qui m'ont apporté l'aide et le soutien tout au long de ma carrière académique. Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Dans cette thèse, nous nous focalisons sur les théories des ressources de l'intrication, des corrélations quantiques de type discordance et de la cohérence quantique, les phénomènes quantiques les plus intrigants exploités jusqu'à présent dans la théorie de l'information quantique. Nous commençons par présenter en détail les outils théoriques de ces ressources quantiques en mettant en évidence les techniques et les problèmes de calcul les plus remarquables. Dans ce sens, nous abordons plusieurs méthodes mathématiques qui permettent de résoudre certains problèmes liés à leurs quantifications, et quelques résultats analytiques pour les systèmes bipartites sont donnés. Nous examinons également les connexions intrinsèques entre ces ressources quantiques en extrayant les liens qui unissent les mesures correspondantes.

En revanche, la révolution de la technologie quantique a suscité un intérêt croissant en faveur de la métrologie quantique, et l'intrication quantique a été employée pour surmonter la limite classique dans plusieurs protocoles d'estimation quantique. Dans le présent document, nous analysons le rôle des corrélations quantiques au-delà de l'intrication en vue d'améliorer la précision d'un paramètre inconnu. Selon nos résultats, les corrélations peuvent être capturées à l'aide de l'information quantique de Fisher, et les corrélations quantiques de type discordance peuvent être exploitées pour garantir la précision des protocoles d'estimation de phase.

Cette thèse comprend également des contributions sur la dynamique de ces ressources quantiques dans différents modèles de systèmes quantiques ouverts. Parmi nos objectifs, est d'étudier les effets de l'environnement sur ces ressources quantiques et d'obtenir des techniques pour les protéger contre les effets de la décohérence intrinsèque.

Mots-clés : Intrication quantique, discordance quantique, cohérence quantique, systèmes quantiques ouverts, décohérence, métrologie quantique, corrélations quantiques, théories des ressources quantiques, incertitude quantique, information de Fisher quantique, théorie de l'estimation quantique

ABSTRACT

In this thesis, we focus on the resource theories of entanglement, discord-like quantum correlations, and quantum coherence, the most intriguing quantum phenomena exploited so far in quantum information theory. We begin by presenting in detail the theoretical tools of these quantum resources, focusing on the most remarkable techniques and computational problems. In this sense, we discuss several mathematical methods that solve some problems related to their quantifications, and some analytical results for bipartite quantum systems are given. We also examine the intrinsic connections between these quantum resources by extracting the links that unite the corresponding measures.

In contrast, the revolution of quantum technology has led to a growing interest in quantum metrology, and quantum entanglement has been employed to overcome the classical limit in several quantum estimation protocols. In this work, we analyze the role of quantum correlations beyond entanglement in improving the accuracy of an unknown parameter. According to our results, correlations can be captured using quantum Fisher information, and quantum discord correlations can be exploited to ensure the accuracy of phase estimation protocols.

This thesis includes also the contributions on the dynamics of these quantum resources in various models of open quantum systems. Among our objectives, is to study the effects of the environment on these quantum resources and to obtain techniques to protect them from the effects of intrinsic decoherence.

Keywords : Quantum entanglement, quantum discord, quantum coherence, open quantum systems, decoherence, quantum metrology, quantum correlations, quantum resource theories, quantum uncertainty, quantum Fisher information, quantum estimation theory.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Résumé de la Thèse	iii
Abstract	iv
Table des figures	viii
Introduction Générale	1
1 Principes de la théorie quantique de l'information	8
1.1 Théorie classique de l'information	9
1.1.1 Mesure de l'information : Entropie de Shannon	9
1.1.2 L'entropie relative	10
1.1.3 L'entropie conjointe et conditionnelle	11
1.1.4 Information mutuelle	12
1.1.5 La capacité du canal classique	13
1.2 Théorie quantique de l'information	13
1.2.1 Opérateur ou matrice densité	14
1.2.1.1 Cas d'un état pur	14
1.2.1.2 Cas d'un état mixte	15
1.2.1.3 Opérateur densité réduit	16
1.2.2 Qubit et sphère de Bloch	16
1.2.3 Mesures quantiques	18
1.2.3.1 Mesures projectives	19
1.2.3.2 Opérateurs de mesure à valeur positive (POVMs)	19
1.2.4 Entropie de von Neumann et l'information quantique	20
1.2.4.1 Entropie quantique conjointe, conditionnelle et relative	21
1.2.4.2 L'information mutuelle quantique	22
1.2.5 Entropie de Rényi	22
1.3 Quantification et caractérisation de l'intrication quantique	23
1.3.1 Critères de séparabilité	24
1.3.1.1 La décomposition de Schmidt	24
1.3.1.2 La purification	25
1.3.1.3 Critère de Peres-Horodecki	26
1.3.2 Quantification de l'intrication quantique	26

1.3.2.1	Entropie d'intrication	27
1.3.2.2	Intrication de formation	28
1.3.2.3	Concurrence et les relations de Wootters	29
1.3.2.4	Entropie relative de l'intrication	30
1.3.2.5	Négativité et Négativité logarithmique	30
1.3.2.6	Notion de tangle	31
2	Les quantificateurs des corrélations quantiques de type discorde	32
2.1	La discorde quantique entropique	33
2.1.1	Définition	33
2.1.2	La discorde quantique pour les états bipartites de forme X	35
2.1.3	Relation de Koashi-Winter	36
2.2	La discorde quantique géométrique	38
2.3	La discorde quantique linéaire	42
2.3.1	Expression analytique de la discorde quantique linéaire pour les états qubit-qubit arbitraire	44
2.3.2	Expression analytique de la discorde quantique linéaire pour les états qubit-qudit arbitraire	48
2.4	Mesure des corrélations quantiques via l'incertitude quantique	49
2.4.1	L'information d'interchange (Skew Information)	49
2.4.2	L'incertitude quantique locale : Définition	52
2.4.3	L'incertitude quantique locale maximale pour les états X séparables à deux qubits	56
2.5	La relation d'incertitude quantique entropique	57
2.6	Distributions des corrélations quantiques dans les systèmes quantiques multipartites	58
2.6.1	Monogamie des corrélations quantiques	58
2.6.2	Loi de conservation entre l'intrication et la discorde quantique	60
2.6.2.1	Pour les systèmes à trois qubits	60
2.6.2.2	Pour les systèmes à quatre particules	61
2.6.2.3	Pour les systèmes à cinq particules	62
2.6.2.4	Pour les systèmes à six particules	63
2.6.2.5	Généralisation de la loi de conservation pour les systèmes multipartites à N -particules	63
3	La dynamique des systèmes quantiques ouverts : La cohérence et decohérence quantique	65
3.1	Dynamique d'un système quantique ouvert	66
3.1.1	Représentation de Kraus	66
3.1.2	Principales propriétés des opérateurs de Kraus	68
3.1.3	Représentation de Kraus pour une condition initiale générale	69
3.1.3.1	Pour les états séparables	69
3.1.3.2	Pour les états initiaux généraux	70
3.2	Equation Maître de Born-Markov	70
3.3	La forme de Lindblad de l'équation Maître Markovienne	72
3.3.1	L'équation générale de Lindblad	72
3.3.2	La spécification du réservoir	75
3.4	Cohérence quantique comme une ressource en théorie de l'information quantique	77
3.4.1	Théorie de ressource de la cohérence quantique	78
3.4.1.1	Les contraintes	78

3.4.1.2	Cohérence bipartite	79
3.4.2	Quantifier la cohérence quantique	80
3.4.2.1	Mesures de la cohérence basées sur la distance	80
3.4.2.1.1	L'entropie relative de la cohérence :	80
3.4.2.1.2	La norme l_1 de la cohérence :	81
3.4.2.1.3	Cohérence basée sur la distance de trace :	83
3.4.2.2	Cohérence géométrique basée sur la fidélité	83
3.4.2.3	Relation entre la cohérence quantique et la discorde quantique	84
3.4.3	Concurrence de la cohérence quantique	85
3.5	Conversion de la cohérence locale en intrication collective	86

4 Théorie de l'estimation des paramètres et sa relation avec les corrélations quantiques 90

4.1	Théorie de l'estimation classique	91
4.1.1	Modèles statistiques classiques	92
4.1.2	L'information de Fisher classique	93
4.1.3	Borne de Cramér-Rao	94
4.1.4	Extension à la métrologie classique multiparamétrique	97
4.2	Théorie de l'estimation quantique	98
4.2.1	Modèles statistiques quantiques	98
4.2.2	Avantage de la stratégie quantique dans la théorie de l'estimation	100
4.2.3	L'information quantique de Fisher	101
4.2.3.1	Définition générale	101
4.2.3.2	Information de Fisher quantique pour les états purs	101
4.2.3.3	Information de Fisher quantique pour les états mixtes	102
4.3	Métrologie quantique multiparamétrique	105
4.3.1	Représentation matricielle de l'information quantique de Fisher	106
4.3.2	Expression analytique de la matrice d'information quantique de Fisher	107
4.3.3	Matrice d'information quantique de Fisher par la méthode de vectorisation	109
4.4	Rôle des corrélations non classiques en métrologie quantique	110

5 Contributions 112

5.1	Contribution 1 : The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence : a comparative study	112
5.1.1	Résumé :	112
5.1.2	Contenu de la publication 1 :	112
5.2	Contribution 2 : Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission	137
5.2.1	Résumé :	137
5.2.2	Contenu de la publication 2 :	137
5.3	Contribution 3 : The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three-qubit X states under decoherence channels	152
5.3.1	Résumé :	152
5.3.2	Contenu de la publication 3 :	152
5.4	Contribution 4 : A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model	182
5.4.1	Résumé :	182
5.4.2	Contenu de la publication 4 :	182
5.5	Contribution 5 : Influence of Stark-shift on quantum coherence and non-classical correlations for two two-level atoms interacting with a single-mode cavity field	190

5.5.1	Résumé :	190
5.5.2	Contenu de la publication 5 :	190
	Conclusion générale et perspectives	205
	Bibliographie	209

TABLE DES FIGURES

1.1	Représentations intuitives des différents types d'entropies	13
1.2	Représentation géométrique d'un qubit sur la sphère de Bloch.	18
1.3	Représentation schématique du processus de mesure	18
2.1	Les corrélations quantiques conduisant à une incertitude quantique locale	52
3.1	Schéma d'interaction entre un système quantique ouvert S et son environnement E dans le cas markovien et non-markovien.	72
3.2	(a) Si l'état d'entrée est incohérent, les opérations incohérentes ne peuvent pas générer l'intrication quantique, et donc l'état de sortie est un état séparable. (b) A l'inverse, tout état cohérent différent de zéro dans l'état d'un système d'entrée peut être converti en intrication par une opération incohérente sur l'état S et un auxiliaire incohérent A	87
4.1	Schéma d'un processus complet de la métrologie quantique, qui contient quatre étapes : (1) préparation de l'état initial ; (2) paramétrisation ; (3) mesure quantique ; (4) l'estimation classique.	100

INTRODUCTION GÉNÉRALE

” *He who loves practice without theory is like the sailor who boards ship without a rudder and compass and never knows where he may cast.*

— **Leonardo da Vinci (1452-1519)**

La beauté de la nature est inexprimable. Il est donc d'un intérêt fondamental de comprendre les phénomènes naturels. Tous les systèmes et processus physiques sont régis par les lois de la nature. La physique quantique, formalisée dans les premières décennies du 20e siècle, est la théorie la plus fondamentale dont nous disposons pour décrire la nature, y compris les particules et les forces élémentaires qui composent l'univers. Elle s'est révélée être une théorie très réussie pour expliquer les phénomènes microscopiques et ses prédictions correspondent aux expériences avec une grande précision. Cette théorie contient des éléments qui sont fondamentalement différents de ceux exigés dans la description de la nature par la physique classique [1]. En effet, dans la physique classique, notamment la mécanique newtonienne et la théorie électromagnétique de Maxwell, les particules se déplacent selon des trajectoires, et leurs vitesses et accélérations peuvent donc être déterminées à partir de leurs positions. Les choses se compliquent toutefois lorsque l'on introduit des objets trop petits, tels que des atomes ou des électrons. Cela a mené à la formulation de la théorie de la mécanique quantique et à la densité de probabilité trouvée à partir de la fonction d'onde permettant de se substituer aux trajectoires des corps pour les systèmes quantiques. Plus important encore, la physique quantique est à l'origine de développements technologiques qui ont contribué à façonner la société actuelle, tels que le transistor, l'énergie nucléaire, le laser, l'imagerie médicale par résonance magnétique et le microscope électronique. En outre, il s'agit d'une discipline essentielle pour comprendre la physique des particules, la théorie quantique des champs, la physique statistique quantique, en passant par la physique des matériaux et d'autres branches de la physique moderne, qui sont à la base de toute l'électronique moderne. De surcroît, la science quantique a dépassé le cadre de la physique pour transformer notre compréhension de l'information et ouvrir la voie à des technologies de l'information nouvelles et révolutionnaires, telles que les ordinateurs quantiques et l'internet quantique. Cependant, les fondements de la physique quantique restent une source de débat scientifique et philosophique.

L'une des caractéristiques les plus marquantes de la physique quantique est l'existence de corrélations quantiques entre différents systèmes quantiques. Dans un monde classique, si un système à l'état pur peut être divisé en deux sous-systèmes, alors la somme des informations des sous-systèmes constitue l'information complète du système global. Ceci n'est plus vrai dans le formalisme quantique. En particulier, il existe des états quantiques constitués de deux ou plusieurs systèmes physiques pour lesquels l'information complète de l'ensemble n'est pas

disponible, même lorsque les sous-systèmes sont complètement aléatoires. Erwin Schrödinger [2] a lancé le terme “intrication quantique” [3] pour décrire cette caractéristique quantique.

Le stockage, la transmission et le traitement de l’information constituent les éléments de base de la théorie de l’information et ces éléments sont basés sur des porteurs physiques. Lorsque ces porteurs physiques sont des systèmes quantiques tels que des atomes ou des photons, ils constituent la base de la théorie quantique de l’information. Grâce à la théorie quantique, de nouvelles possibilités s’offrent aux tâches de traitement de l’information et de communication. Les performances accrues des systèmes quantiques dans ces tâches seraient principalement dues à la superposition et à l’intrication quantiques présentes dans les systèmes quantique. Parmi les applications notables, citons la téléportation quantique [4, 5], cryptographie quantique ou la distribution quantique de clés [6, 7], la correction d’erreurs quantiques [8], la factorisation de grands nombres [9] et la recherche d’une grande base de données sur un ordinateur quantique [10]. Évidemment, la certification des corrélations quantiques est essentielle pour le développement plus rapide des technologies quantiques. Au-delà de cette demande pratique, une compréhension fondamentale des corrélations quantiques, incluant leur caractérisation et leur quantification, joue un rôle clé dans l’exploration de la frontière entre les théories classiques et les caractéristiques uniques de la physique quantique. La question demeure cependant de savoir quels types de corrélations sont véritablement quantiques.

L’intrication est à la base de nombreuses tâches quantiques fondamentales [11, 12], et est souvent considérée comme un synonyme de corrélations quantiques dans les premières études, bien qu’il soit maintenant reconnu que la notion de corrélations quantiques a une portée beaucoup plus large, et que l’intrication est un type particulier, bien que le plus important de corrélations quantiques, c’est-à-dire que l’intrication peut être identifiée comme des corrélations quantiques non locales [13]. L’étude de l’intrication remonte explicitement aux travaux fondamentaux d’Einstein, Podolsky et Rosen [14], et de Schrödinger [15, 16], dès les années 1930. Aujourd’hui, l’intrication est considérée comme une ressource clé de l’information quantique et est souvent liée à la non-localité quantique [17, 18]. Sa théorie peut être grossièrement divisée en trois parties. La première est de type qualitative, c’est-à-dire qu’elle répond à la question “Est-ce que cet état est intriqué ou non?”. La deuxième partie de type comparative pose la question “Cet état est-il plus intriqué que cet autre?”, et enfin de type quantitative, elle pose la question “Quel est le degré d’intrication de cet état?”, et donne ses réponses sous la forme de mesures d’intrication attribuant un chiffre à chaque état. Des problèmes de quantification se posent naturellement lorsque l’intrication est utilisée comme ressource pour des tâches de traitement de l’information quantique. Par exemple, il est bien connu que les états intriqués sont, d’une certaine manière, le carburant des processus de téléportation quantique, et pour chaque étape de la transmission, un système maximalelement intriqué est nécessaire. Le processus fonctionne également avec des états moins que maximalelement intriqués, mais ils deviennent moins efficaces. En ce sens, l’une des interrogations centrales de la théorie de l’information quantique est l’étude de l’intrication dans divers systèmes quantiques et, en particulier, la manière dont elle peut être quantifiée.

En 2002, après avoir étudié la corrélation entre l’appareil et le système lors d’une mesure, Ollivier et Zurek ont réalisé [19] que les états séparables, tels que définis par Werner [13], peuvent encore avoir une certaine corrélation dans le sens où ils peuvent être perturbés par des mesures locales. Cette mesure nouvelle des corrélations quantiques au-delà de l’intrication est appelée “discorde quantique”. Ils ont constaté que l’intrication n’est pas la seule corrélation quantique qui n’a pas de contrepartie classique. D’autres types de corrélations quantiques, comme la discorde quantique, peuvent également être responsables de l’accélération de certains algorithmes quantiques, alors que l’intrication peut disparaître ou être négligeable [20]. Depuis les premiers énoncés de ce concept, de nombreux efforts de recherche ont été consacrés à la compréhension des propriétés mathématiques et des significations physiques de la discorde et

de quantités similaires. Des études complètes sur les propriétés de la discordance sont disponibles dans [21], et les références [22, 23] fournissent des perspectives récentes dans ce domaine.

Curieusement, il est connu que la discordance et l'intrication quantique ne constituent pas des caractéristiques équivalentes. L'intrication se caractérise par le fait qu'une information complète sur les sous-systèmes ne reproduit pas l'information complète du système global. Il n'est pas surprenant que ce ne soit pas la seule caractérisation d'un système quantique. Par exemple, la disparition d'une partie d'un sous-système après la mesure d'une autre est une autre caractéristique propre aux systèmes quantiques et n'a pas d'analogue classique. La quantité qui tente de capturer cette caractéristique unique est la discordance quantique.

L'étude de la discordance quantique présente de nombreux défis et questions ouvertes. Une difficulté majeure avec les quantités de type discordance est qu'elles sont difficiles à calculer ou à analyser. Formellement, la discordance quantique est définie comme étant la différence entre l'information mutuelle quantique (corrélacion totale) et la quantité maximale d'information mutuelle accessible à une mesure quantique (corrélacion classique). Pour quantifier les corrélacions (classiques) localement accessibles, cette quantification implique une optimisation sur toutes les mesures locales possibles. Cette mesure est choisie pour maximiser les corrélacions classiques. En raison de la complexité du processus d'optimisation, le calcul de la discordance quantique et de ses variantes (comme la discordance géométrique) n'est pas une tâche aisée et les résultats analytiques ne sont connus que pour certaines familles restreintes d'états. Pour pallier ce problème, plusieurs autres versions de la discordance ont également été proposées, notamment la discordance quantique linéaire [24], l'incertitude quantique locale [25] et l'information quantique de Fisher locale [219]. La plupart de ces quantificateurs de corrélacion quantique pour les états quantiques purs peuvent coïncider, et peuvent parfois présenter des comportements similaires pour les états mixtes. Cependant, il existe également des différences subtiles pour ces corrélacions quantiques et leurs interprétacions physiques sont également différentes. Tout cela indique que les propriétés des corrélacions quantiques d'un système sont complexes et que leur caractérisation sous différents aspects est nécessaire.

La possibilité pour les systèmes quantiques d'exister dans des "états de superposition" révèle la nature ondulatoire de la matière et constitue une grande différence avec la physique classique. De fait, l'observation d'interférences en optique classique nécessite généralement une cohérence (il existe des versions spatiales et temporelles), ce qui implique que les différentes parties d'une onde ont une relation de phase fixe. Le même principe s'applique aux interférences entre les particules quantiques, bien que la phase soit désormais une propriété intrinsèque de la fonction d'onde, plutôt qu'un champ classique [27, 28]. Dans cette image, si la cohérence quantique existe entre deux points de la fonction d'onde d'une particule, celle-ci peut être comprise comme étant dans une superposition des deux positions simultanément [29]. Voilà pourquoi on dit souvent que les systèmes dans de tels états de superposition possèdent une cohérence quantique. L'application de la cohérence quantique comme ressource pour les protocoles d'information quantique a récemment fait l'objet d'une grande attention car elle relie les questions fondamentales sur la nature physique aux aspects pratiques des technologies quantiques à venir (voir la référence [30] pour une introduction). La construction d'un cadre mathématiquement rigoureux et physiquement significatif pour sa caractérisation et sa quantification a été l'un des principaux objectifs des chercheurs de la communauté quantique, car cela est non seulement essentiel pour les fondations quantiques, mais peut également fournir la base de ses applications potentielles dans une grande variété de sujets prometteurs. Nous nous focalisons dans cette thèse sur les développements récents concernant la caractérisation quantitative de la cohérence, dont l'essence est l'adoption du point de vue de traiter la cohérence quantique comme une ressource physique, tout comme la théorie des ressources de l'intrication.

Dans le cadre général, la mécanique quantique fournit des modèles exacts ou arbitrairement précis pour la description de nombreux systèmes simples, et des extensions numériques avec

des approximations contrôlées rendent l'étude de phénomènes naturels plus complexes faisable et quantitativement satisfaisante. Cependant, lorsque les systèmes physiques concernés ne sont pas en eux-mêmes particulièrement complexes mais qu'ils interagissent avec des degrés de liberté externes échappant à notre contrôle, là où ces interactions ont le moins de chances d'être négligeables, la dynamique globale de ces systèmes est difficile à prendre en compte quantitativement. Ce problème fait l'objet de la théorie des systèmes quantiques ouverts [31, 32], un domaine de recherche actuel riche et en pleine expansion, qui constitue l'un des contextes généraux du travail présenté dans cette thèse. Brièvement, l'interaction entre un système quantique et son environnement peut entraîner la dissipation ou la perte d'informations contenues dans le système au bénéfice de son environnement. Pour obtenir une description complète d'un système quantique, il faut intégrer l'effet de l'environnement à l'hamiltonien du système original. C'est la philosophie qui a présidé à l'étude des systèmes quantiques ouverts. L'une des principales tâches de cette théorie est de résoudre l'équation dite "équation maîtresse" des systèmes quantiques ouverts. En général, la résolution d'une telle équation peut être très compliquée et nécessite de nombreux calculs fastidieux, en particulier dans le cas non-Markovien dans lequel le processus d'évolution présente le comportement des effets de mémoire [33].

Par ailleurs, la décohérence quantique constitue un obstacle majeur à la mise en œuvre des nouvelles propositions de la science et de la technologie de l'information quantique, telles que le calcul quantique [34], la métrologie quantique [35, 36] et la simulation quantique [37]. En raison de son omniprésence dans tous les types de dispositifs physiques, l'étude, la réduction et le contrôle de la décohérence constituent depuis longtemps un sujet brûlant dans ces domaines. Dans cette optique, le comportement dynamique des corrélations et de la cohérence quantique présentes dans un système quantique ouvert composite dépend fortement du bruit produit par le milieu environnant. En conséquence, l'un des aspects les plus importants de l'environnement est de savoir s'il peut être décrit comme sans mémoire (markovien) ou avec mémoire (non markovien). En réalité, la dynamique de l'intrication quantique dans les systèmes quantiques ouverts a été largement étudiée dans la littérature. Néanmoins, peu de travaux ont traité de l'effet de l'environnement sur la cohérence et d'autres quantificateurs des corrélations quantiques de type discord.

Plusieurs quantités d'intérêt dans la théorie de l'information quantique ne correspondent pas à des observables quantiques et ne peuvent pas être évaluées directement par des mesures. Il s'agit par exemple de la pureté d'un état quantique, d'une phase quantique ou de corrélations quantiques. Dans tous ces cas, il faut recourir à la mesure indirecte et déduire la valeur de la quantité d'intérêt à partir de son influence sur une source donnée. La façon canonique de traiter ce problème est d'utiliser les outils de la théorie de l'estimation quantique locale [38, 39]. Les problèmes d'estimation consistent à attribuer des valeurs appropriées à des quantités qui sont inconnues parce qu'elles ne sont pas entièrement accessibles par observation. Compte tenu des informations disponibles, on peut élaborer une stratégie optimale pour extraire des estimateurs appropriés des inconnues. Une procédure d'estimation a pour objectif de trouver la meilleure stratégie pour déduire la valeur d'un paramètre inconnu avec la plus grande précision possible. Ceci est réalisé en effectuant des mesures indirectes sur le système quantique, c'est-à-dire en déduisant la valeur du paramètre en traitant l'ensemble des résultats de mesure d'une autre observable, ou d'un ensemble de variables. Cette théorie donne la limite ultime de la précision avec laquelle les paramètres d'un système physique peuvent être mesurés par une source quantique. Cette limite, appelée limite quantique de Cramér-Rao [40], n'est peut-être pas réalisable en général, soit en raison de limitations pratiques, soit même pas en principe [41]. Cependant, elle donne une indication de la faisabilité d'une certaine conception d'un nouveau détecteur quantique et de la possibilité d'obtenir un meilleur résultat que la technologie actuelle.

La métrologie quantique est un mécanisme qui utilise les ressources distinctives de la mécanique quantique, telle que l'intrication, pour augmenter la précision de l'estimation des pa-

ramètres par des mesures quantiques au-delà de la limite de sa contrepartie classique. Elle est enracinée dans la théorie de l'estimation quantique, initiée par Helstrom [42] et Holevo [43], qui ont proposé la relation d'incertitude basée sur les paramètres. Braunstein et ses collaborateurs [44] ont développé cette théorie du point de vue de la borne de Cramér-Rao [40], qui caractérise la manière dont un paramètre peut être estimé à partir d'une distribution de probabilité, et ont obtenu l'information optimale de Fisher sur différents schémas de mesure quantique pour un état quantique donné en fonction d'un paramètre. Cette information est souvent appelée "l'information quantique de Fisher". En raison de l'importance des mesures de précision dans différents domaines de la physique, l'information quantique de Fisher a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs. Giovannetti et son équipe [45] ont découvert que la mise à l'échelle de l'information de Fisher quantique présente une amélioration de $N^{\frac{1}{2}}$ par rapport à sa contrepartie classique si un état maximalelement intriqué de N -qubits est utilisé. Cette découverte a stimulé l'émergence de la métrologie quantique, qui a été appliquée à différents systèmes quantiques pour améliorer la précision des mesures.

A ce jour, les ressources quantiques sont très importantes dans tous les protocoles de la métrologie quantique. Dans cette thèse, nos préoccupations sont les corrélations quantiques, la cohérence quantique, leurs connexions intrinsèques et leurs rôles en vue d'améliorer la précision des paramètres dans l'estimation quantique. A cette fin, cette thèse est présentée d'une manière similaire à un ouvrage avec de nombreux détails techniques, ce qui pourrait aider les chercheurs à suivre et mieux comprendre les résultats correspondants. En plus de présenter une vue globale des principaux développements des corrélations quantiques et de la cohérence quantique, nous essayons de résumer et reformuler certains calculs éparpillés dans un grand nombre de littérature, en combinaison bien sûr avec nos propres résultats.

Au premier chapitre, nous passons en revue les éléments de base et la terminologie de la théorie de Claude Shannon, de la mécanique quantique et de la théorie de l'information quantique. Nous clarifions la signification de ces termes et fixons les notations et la terminologie adoptées dans le reste de l'ouvrage. Ensuite, nous abordons la théorie des ressources de l'intrication quantique, nous expliquons comment elle peut être quantifiée et nous présentons les expressions analytiques correspondantes.

Dans le deuxième chapitre, l'intérêt est porté aux corrélations quantiques au-delà de l'intrication quantique. Nous vous ferons part de plusieurs mesures du type discord et de ses propriétés, ainsi que des méthodes mathématiques employées dans les calculs analytiques. De plus, nous étudions l'interaction entre les effets quantiques globaux, comme la corrélation quantique, et les effets locaux, en particulier l'incertitude quantique sur les observables uniques.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la description générale des systèmes quantiques ouverts. Nous traitons leur évolution, avec un accent particulier sur les systèmes quantiques markoviens, en utilisant l'équation maîtresse. L'objectif est d'introduire la théorie de la décohérence quantique et la façon dont elle peut expliquer la transition du mode quantique au mode classique. Dans la deuxième partie, nous passons en revue les aspects fondamentaux liés à la théorie des ressources de la cohérence quantique, en particulier la structure des états libres et les opérations libres correspondantes. Nous présentons ensuite une revue détaillée des développements récents de la quantification de la cohérence quantique. De plus, certaines de leurs extensions valables pour les systèmes de dimension finie, par exemple d'autres mesures de cohérence basées sur l'intrication quantique et la discord quantique, seront également examinées.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons les notions de base dont nous avons besoin pour procéder à l'estimation de l'état quantique. Nous abordons également le problème de l'estimation multiparamétrique. Nous donnons la forme explicite de l'information quantique de Fisher (dans le cas de l'estimation à un seul paramètre) et de la matrice d'information quantique de Fisher (dans le cas de l'estimation multiparamétrique). Le rôle des corrélations quantiques, contenues dans les états quantiques, en métrologie quantique a également été examiné. Nos

résultats suggèrent que la corrélation quantique peut être exploitée pour garantir la précision des protocoles d'estimation de phase.

Le cinquième chapitre présente nos contributions dans le domaine. Nous terminons ce manuscrit de thèse par une conclusion générale évoquant les idées principales développées tout au long du document. Certaines de nos perspectives sont également mentionnées.

Liste des contributions de l'auteur

Contributions et Publications :

La plupart des informations présentées ici ont été rapportées sous diverses formes dans ces articles :

- ☛ The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence : A comparative study, **A. Slaoui**, M. Daoud and R. Ahl Laamara, Quantum Information Processing, **17** (2018) 178 ; arXiv : 1904.04382.
- ☛ Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission, **A. Slaoui**, M. I. Shaukat, M. Daoud and R. Ahl Laamara, The European Physical Journal Plus, **133** (2018) 413 ; arXiv : 1902.02224.
- ☛ Phonon-mediated quantum discord in dark solitons, M. I. Shaukat, **A. Slaoui**, H. Terças and M. Daoud, The European Physical Journal Plus, **135** (2020) 357 ; arXiv : 1903.06627.
- ☛ Quantum Fisher information matrix in Heisenberg XY model, L. Bakmou, **A. Slaoui**, M. Daoud and R. Ahl Laamara. Quantum Information Processing, **18** (2019) 163 ; arXiv : 1904.07507.
- ☛ A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model, **A. Slaoui**, L. Bakmou, M. Daoud and R. Ahl Laamara. Physics Letters A, **383** (2019) 2241-2247 ; arXiv :1904.12132.
- ☛ The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three qubit X states under decoherence channels, **A. Slaoui**, M. Daoud and R. Ahl Laamara, Quantum Information Processing, **18** (2019) 250 ; arXiv : 1907.00696.
- ☛ Quantum discord based on linear entropy and thermal negativity of qutrit-qubit mixed spin chain under the influence of external magnetic field, F. B. Abdallah, **A. Slaoui** and M. Daoud. Quantum Information Processing, **19** (2020) 252.
- ☛ Influence of Stark-shift on quantum coherence and non-classical correlations for two two-level atoms with a single-mode cavity field, **A. Slaoui**, A. Salah and M. Daoud, Physica A : statistical mechanics and its applications, **558** (2020) 124946 ; arXiv : 2003.11338.

Communications orales :

- ➔ Évolution des corrélations quantiques et processus de décohérence pour les systèmes bipartites, Journées Nationales des Doctorants et des Jeunes Chercheurs 2017. l'ENSET-Rabat.
- ➔ La dynamique des corrélations quantiques mesurée par l'incertitude quantique locale et la discordie géométrique pour les systèmes bipartites, La Quatrième Ecole sur la Théorie de l'Information et la Cryptographie Quantiques, Juin (2017). Faculté des Sciences de Rabat.
- ➔ Les comportements dynamiques de l'incertitude quantique locale pour les états X tripartites sous les canaux de décohérence, RNDJC-2018. Faculté des Sciences de Rabat.
- ➔ Expression analytique de l'incertitude quantique locale pour les systèmes tripartites et leur dynamique sous les canaux de décohérence, RNJCP9-2018. Université Hassan II de Casablanca, Maroc.

- ➡ La dynamique des corrélations quantiques pour les systèmes tripartites sous les canaux de décohérence, 1CNPFA-2019. Faculté Polydisciplinaire Beni Mellal, Maroc.
- ➡ Local quantum Fisher information vs local quantum uncertainty, RNICQ-2019. FS, Université Ibn Tofail. Kenitra, Maroc.
- ➡ Characterizing nonclassical correlations via quantum Fisher information. Sciences de l'Information Quantique : Fondements et applications. RNIQ-2021 (événement virtuel).

Communications par affiche :

- ☛ Comparison of quantum discord and local quantum uncertainty, and their dynamics under decoherence, Conference on Quantum Information Theory, December (2017), Institut Henri Poincare, Paris, France.
- ☛ The various measurements of quantum correlations and their dynamics in open systems, October (2017), Rencontre des Jeunes Physiciens, Collège de France, Paris, France.
- ☛ Quantifiers of nonclassical correlations by quantum uncertainty ; Local quantum Fisher information vs local quantum uncertainty, Centre International de Rencontres Mathématiques. Janvier (2020), Luminy, Marseille. France.

CHAPITRE 1

PRINCIPES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DE L'INFORMATION

La théorie de l'information classique a été fondée par Claude Shannon peu après la seconde guerre mondiale et suppose que l'information est codée dans des systèmes physiques évoluant selon les lois de la physique classique [46, 47]. Comme fondement de sa théorie, Shannon a développé un modèle de communication abstrait très simple dans le contexte de l'envoi d'informations sur un canal tel qu'un fil téléphonique. Ce modèle fournit un moyen de quantifier l'information et applicable dans de nombreuses situations et pour tous les types de communication et de traitement de l'information. Il nous permet également de tirer des limites sur la complexité ou les coûts des tâches telles que le stockage d'informations ou l'envoi des données sur des canaux bruyants.

Avec l'idée que l'information est associée à une représentation physique, et que le stockage, le traitement et la transmission d'informations sont tous régis par des lois physiques, une grande attention a été consacrée à l'étude de nombreux phénomènes des systèmes physiques d'un point de vue théorique dans le but d'exploiter leurs propriétés physiques dans le codage de l'information [48]. D'autre part, les lois de la mécanique classique peuvent être obtenues à partir des lois de la mécanique quantique en faisant des choix particuliers pour un processus quantique et pour l'état d'un système quantique. Cela signifie que la théorie classique émerge de la théorie quantique comme une approximation. Dans ce sens, il semble plus convenable de poser une question sur la façon dont ces lois de la physique quantique peuvent être utilisées pour quantifier, communiquer et partager de l'information dans les structures de la matière à l'échelle microscopique à partir de son état qui est représenté par un ensemble de grandeurs physiques [49].

La théorie de l'information quantique a été développée pour explorer la nature de l'information dans le monde quantique et à révéler de nouvelles capacités de traitement de l'information [50]. Cette nouvelle théorie revêt une importance capitale pour améliorer la sécurité et pour transmettre des informations de manière fiable en préservant l'information et des corrélations allant au-delà de ce qui est possible dans les modèles traditionnels, tout en ajoutant l'ingrédient magique de la mécanique quantique, notamment le principe de superposition et l'intrication quantique.

Avant d'étudier les nouveaux aspects que la mécanique quantique ajoute à la théorie de l'information, il est utile de connaître quelques bases de la théorie de l'information classique pour étudier comment elle doit être modifiée dans des situations où les effets quantiques sont importants. Pour cette raison, nous commençons dans ce chapitre par présenter les bases de la théorie de l'information classique. En particulier, nous allons discuter comment l'informa-

tion peuvent être quantifiée et comment nous pouvons comparer les informations dans deux ensembles de données. Nous présentons les différents types de mesures informationnelles telles que l'entropie de Shannon, l'entropie relative, l'information mutuelle, l'entropie conjointe et conditionnelle. Cela fournit les bases pour la deuxième partie de ce chapitre, où nous étudions la théorie quantique de l'information, dans laquelle l'information est représentée par des états quantiques et laissée évoluer selon les lois de la mécanique quantique. Dans cette partie, nous nous intéressons, successivement, aux quelques formalismes de la mécanique quantique ainsi qu'au formalisme mathématique des différentes mesures de l'intrication quantique en tant que type spécial de corrélations quantiques. Nous commencerons par définir l'opérateur densité, l'entropie de von Neumann et le bit quantique. Ensuite, nous allons introduire quelques critères de séparabilité permettant de distinguer les états quantiques intriqués et non intriqués. Dans le même esprit, nous introduisons quelques mesures de l'intrication quantique pour les systèmes quantique bipartites et nous donnons l'expression analytique de chaque mesure discutée.

1.1 Théorie classique de l'information

Les systèmes de communication sont constitués d'une source d'information, d'un émetteur ou d'un encodeur, d'un canal bruyant et d'un récepteur (décodeur). Dans ce schéma, le contenu de l'information d'un événement ne joue aucun rôle dans la théorie de l'information mais l'incertitude associée à son occurrence [51, 52]. Par exemple, dans le cas simple d'un appareil téléphonique, ce qui est transmis n'est pas ce qui est dit sur le téléphone, mais plutôt un signal analogique qui enregistre les ondes sonores émises par le locuteur, puis ce signal analogique est envoyé numériquement après un codage. Il est intéressant de souligner que l'unité de mesure fondamentale en théorie de l'information de tous les supports d'information, textes, signaux téléphoniques, ondes radio et tous les modes de communication peuvent être codés en "bit", un objet qui représente une distinction entre deux possibilités soit la valeur "0" soit "1" et qui est représenté physiquement (par exemple par un interrupteur) et une séquence de bits nous permet de transmettre un message [53].

Selon Shannon, le concept d'information est décrit quantitativement dans un cadre probabiliste et que l'information est quantifiée en termes d'incertitude. Il considère que l'incertitude associée au système physique est la quantité d'informations qu'il transporte. En effet, la probabilité concerne ce que nous savons, les informations que nous avons ou pourrions obtenir sur un événement. Nous pouvons donc dire que les informations dépendent de l'observateur et avec le gain d'informations, il y a une réduction de l'incertitude sur un événement associé. En ce sens, moins l'occurrence d'un résultat de l'événement est favorable (c-à-d, la probabilité de l'événement est faible), plus d'information est apprise sur son occurrence. De façon similaire, plus l'occurrence d'un résultat de l'événement est favorable, moins d'information est apprise sur son occurrence [54]. Cette première section tente de présenter l'étude formelle de la théorie de l'information classique qui a été introduite par Claude Shannon en 1948. Nous allons passer en revue les définitions ainsi que certaines de ses propriétés importantes permettant de jeter la base en vue d'introduire et aborder la théorie de l'information quantique.

1.1.1 Mesure de l'information : Entropie de Shannon

La probabilité et l'information sont liées par la notion d'entropie, qui est introduite par Boltzmann pour décrire les mélanges statistiques en thermodynamique statistique [55, 56]. Dans ce cas, l'entropie est une mesure du désordre qui exprime l'incertitude ou le caractère aléatoire du système, et donc de l'information manquante sur un système donné. A partir de cette définition et de considérations axiomatiques sur l'information, Shannon a identifié une autre forme d'entropie statistique pour la source de l'information et a démontré le sens de sa

formule comme une mesure d'information. Ce concept est connu sous le nom de l'entropie de Shannon, et il peut être identifiée comme l'information portée par un état donné.

Considérons un événement, qui est une source d'information, décrit par une variable aléatoire X de taille finie. Supposons que cette source d'information choisit au hasard n symboles $X \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et chaque symbole x_i correspond à un résultat de l'événement avec la probabilité $p(x_i)$. D'après notre discussion précédente, la fonction $\zeta(x)$ qui mesure la quantité d'information fournie par un événement x doit être nécessairement décroissante avec sa probabilité $p(x)$, c-à-d, $\zeta(x) = f(1/p(x))$ où f est une fonction croissante. Aussi, la fonction f est nulle pour un événement qui n'apporte aucune information (c-à-d, $p(x) = 1$ et $f(1) = 0$). De plus, pour une source d'informations qui produit deux symboles indépendants x_1 et x_2 avec la probabilité $p(x_1, x_2)$ (dans ce cas, $p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2)$), la quantité d'information des deux symboles x_1 et x_2 est égale à la somme de leurs quantités d'information individuelles, c-à-d,

$$\zeta(x_1, x_2) = f\left(\frac{1}{p(x_1, x_2)}\right) = f\left(\frac{1}{p(x_1)p(x_2)}\right) = f\left(\frac{1}{p(x_1)}\right) + f\left(\frac{1}{p(x_2)}\right) = \zeta(x_1) + \zeta(x_2). \quad (1.1)$$

D'après les axiomes ci-dessus, Nous pouvons conclure que la fonction f est une fonction logarithmique. Conformément à ce choix, la base du logarithme ici égale à 2 car elle détermine l'unité d'information (bit classique). Dans cette direction, le contenu d'information émanant de la source d'information s'appelle son entropie de Shannon [46]. Elle est définie par

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{x_i} p(x_i) \zeta(x_i) = - \sum_{x_i} p(x_i) \log_2(p(x_i)), \quad (1.2)$$

avec la convention que $0 \log_2 0 \equiv 0$. Notez que l'entropie d'une variable aléatoire X est une quantité positive et ne dépend pas de ses valeurs, c'est-à-dire les éléments de l'alphabet x_i , mais dépend uniquement des probabilités $p(x_i)$ que ces valeurs prennent. Dans le cas d'un ensemble de variables aléatoires, l'entropie de Shannon (1.2) de chaque variable peut être utilisée pour spécifier d'autres mesures qui contiennent des informations sur ses relations avec d'autres variables. Ce sera l'objet des sous-sections suivantes.

1.1.2 L'entropie relative

Considérons deux variables aléatoires classiques X et Y donnant les résultats $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ avec des probabilités $\{p_x\}$ et $\{p_y\}$, respectivement. L'entropie relative, également connue sous le nom de divergence de Kullback Leibler, est l'incertitude relative à la distribution de probabilité p_x par rapport à celle de p_y . Autrement dit, il s'agit d'une mesure de la similarité entre deux variables aléatoires et de la proximité des probabilités associées. L'entropie relative donnée par $\mathcal{H}(X||Y)$ est définie comme suit

$$\mathcal{H}(X||Y) = - \sum_{x,y} p_x \log_2\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = - \sum_{x,y} p_x \log_2(p_y) - \mathcal{H}(X). \quad (1.3)$$

Notez que l'entropie relative est toujours positive, $\mathcal{H}(X||Y) \geq 0$, avec condition d'égalité est déduite si seulement si $p_x = p_y$ pour toutes les valeurs de x et de y , c'est-à-dire pour des distributions identiques. Pour prouver cette propriété, nous devons utiliser l'égalité mathématique suivante; $\log_2(x) \ln 2 = \ln(x) \leq x - 1$ pour tout x positif et avec égalité si seulement si $x = 1$.

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X\|Y) &= -\sum_{x,y} p_x \log_2 \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \\
&\geq \frac{1}{\ln 2} \sum_{x,y} p_x \left(1 - \frac{p_y}{p_x} \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \sum_{x,y} (p_x - p_y) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_x p_x}_{=1} - \underbrace{\sum_y p_y}_{=1} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Cette propriété de l'entropie relative explique pourquoi elle est considérée comme une mesure de distance entre deux distributions en théorie de l'information.

1.1.3 L'entropie conjointe et conditionnelle

Pensons aux mêmes couples des variables aléatoires (X, Y) . La mesure d'information conjointe de X et Y est simplement l'entropie de la distribution conjointe de X et Y , qui est équivalente à l'information combinée de ces deux variables aléatoires. En d'autres termes, c'est l'incertitude qui reste sur Y une fois que nous connaissons la valeur de X . Elle est définie comme suit

$$\mathcal{H}(X, Y) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x, y), \tag{1.5}$$

où $p(x, y)$ est la probabilité conjointe. Notez que l'entropie conjointe est symétrique, c-à-d $\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(Y, X)$. En outre, si X et Y sont indépendants, et grâce à la propriété additive de l'entropie de Shannon, l'entropie conjointe peut s'écrire sous la forme d'une somme des entropies de Shannon de chaque variable

$$\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y). \tag{1.6}$$

De façon analogue, on peut définir une entropie conditionnelle de ces deux variables comme le degré d'incertitude de la réalisation d'une variable aléatoire X si la valeur d'une autre variable aléatoire Y est connue. C'est une mesure de la moyenne du manque d'information sur la valeur X si l'on connaît parfaitement les informations de la seconde variable aléatoire Y . Elle est définie par

$$\mathcal{H}(X/Y) = -\sum_{x,y} p(x/y) \log_2 p(x/y), \tag{1.7}$$

où la probabilité conditionnelle est donnée par la loi de Bayer

$$p(x/y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(y/x) p(x)}{p(y)}. \tag{1.8}$$

Une propriété particulière de l'entropie conjointe est qu'elle est inférieure ou égale aux entropies singulières, c-à-d $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X)$. Cela signifie que la connaissance de l'information d'une variable supplémentaire Y ne peut pas augmenter l'entropie de la variable X . Pour prouver cette égalité, nous devons utiliser l'inégalité de Jensen; pour toute fonction concave f , les valeurs t_1, \dots, t_n et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_i \lambda_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$), il s'ensuit que $\sum_i \lambda_i f(t_i) \leq f(\sum_i \lambda_i t_i)$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X/Y) &= - \sum_{x,y} \frac{p(x,y)}{p(y)} \log_2 \frac{p(x,y)}{p(y)} \\
&= \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 \frac{p(y)}{p(x,y)} \\
&= \sum_{x,y} p(x) \frac{p(x,y)}{p(x)} \log_2 \frac{p(y)}{p(x,y)} \\
&= \sum_x p(x) \sum_y \frac{p(x,y)}{p(x)} \log_2 \frac{p(y)}{p(x,y)} \\
&\leq \sum_x p(x) \log_2 \sum_y \frac{p(x,y)}{p(x)} \frac{p(y)}{p(x,y)} \\
&= \sum_x p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} = \mathcal{H}(X). \tag{1.9}
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.8), nous pouvons également prouver que l'entropie conditionnelle est liée à l'entropie conjointe par cette équation

$$\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y/X) = \mathcal{H}(Y) + \mathcal{H}(X/Y). \tag{1.10}$$

Dans la sous-section suivante, nous montrons comment ces définitions se rapportent au concept d'information mutuelle, qui est le concept fondamental qui nous traitons tout au long de cette thèse.

1.1.4 Information mutuelle

Pour deux variables discrètes X et Y dont la distribution de probabilité conjointe est $p(x, y)$, l'information mutuelle mesure la quantité d'informations communes entre elles. Elle est principalement utilisée pour quantifier les corrélations totales entre ces deux variables aléatoires. Elle est définie comme un cas particulier de l'entropie relative, car elle permet de distinguer entre une distribution de probabilité conjointe $p(x, y)$ et le produit des distributions de probabilité de chaque variable $p(x)p(y)$. Par conséquent, l'application de la formule (1.3) nous permet d'obtenir plus facilement l'information mutuelle comme suit

$$\mathcal{I}(X : Y) = \mathcal{H}(p(x, y) \| p(x)p(y)) = \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right). \tag{1.11}$$

L'équation ci-dessus (1.11) peut également être exprimée en termes d'entropie conjointe et d'entropie conditionnelle comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(X : Y) &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 p(x) + \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 p(x/y) \\
&= \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X/Y) \\
&= \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y/X) \\
&= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y). \tag{1.12}
\end{aligned}$$

A partir de l'équation (1.12), l'information mutuelle peut être considérée comme la réduction de l'incertitude sur une variable aléatoire étant donné la connaissance d'une autre. Une information

mutuelle élevée entre deux variables aléatoires indique une forte réduction de l'incertitude, une faible information mutuelle indique une petite réduction et une information mutuelle nulle signifie que les variables sont indépendantes.

Comme le montre la Fig.(1.1), nous pouvons représenter toutes les différentes quantités citées précédemment sous la forme d'un diagramme appelé diagramme de Venn. Ce diagramme illustre les relations entre l'information mutuelle $\mathcal{I}(X : Y)$, l'entropie conjointe $\mathcal{H}(X, Y)$, l'entropie conditionnelle $\mathcal{H}(X/Y)$ et les entropies de Shannon $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}(Y)$ des variables aléatoires X et Y .

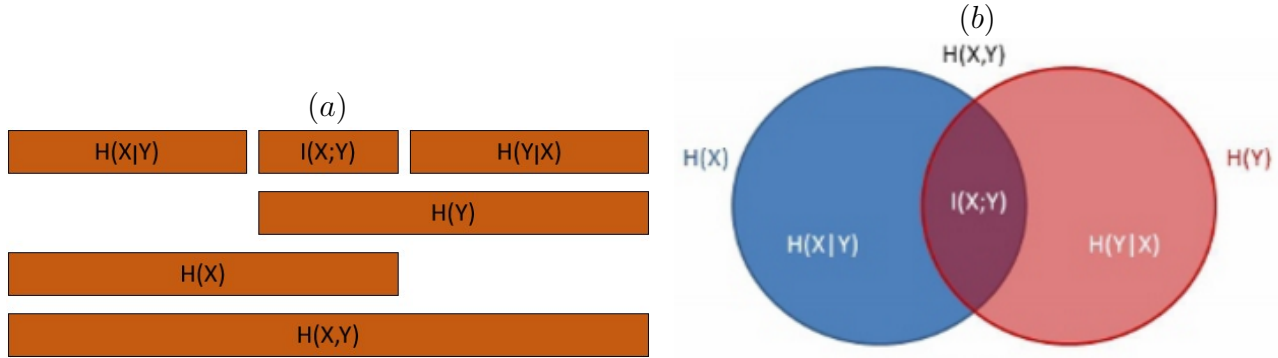


FIGURE 1.1 – (a) Une représentation intuitive des différents types d'entropies (b) Une représentation traditionnelle à l'aide du diagramme de Venn.

1.1.5 La capacité du canal classique

L'un des objectifs de la théorie de l'information est de connaître les limites supérieures et inférieures de la capacité des canaux bruyants. Physiquement, un canal classique peut être décrit comme le transfert d'un système classique de l'émetteur au récepteur. Si le transfert est intact et non perturbé, le canal est sans bruit. Contrairement, si le système classique interagit en cours de route avec un autre système, un canal classique bruyant se produit [57]. Supposons qu'un émetteur, Alice, souhaite transmettre des informations classiques à un récepteur, Bob, en utilisant un canal de communication classique avec un alphabet d'entrée associé X . Alice représentera les messages possibles en préparant le canal dans divers états classiques. Bob récupérera les informations en soumettant le canal à une mesure avec un alphabet de sortie associé Y . Par conséquent, le canal de communication possède une information mutuelle $\mathcal{I}(X : Y)$ entre le signal d'entrée X et la sortie reçue Y . Il est intéressant de souligner que l'information mutuelle est une fonction concave de la distribution $p(x)$ lorsque la distribution conditionnelle $p(x/y)$ est fixée (voir l'équation (1.12)). Cette concavité implique qu'il existe une distribution $p(x)$ qui maximise l'information mutuelle. Alors, la capacité de Bob à récupérer le message d'Alice sans erreur est l'information mutuelle maximale entre l'entrée X et la sortie Y du canal et nous la désignons comme

$$\mathcal{C} = \max_{p(x)} \mathcal{I}(X : Y) = \max_{p(x)} [\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X/Y)], \quad (1.13)$$

où la maximisation porte sur toutes les distributions de probabilités d'entrée $p(x)$ de X .

1.2 Théorie quantique de l'information

La physique fournit un moyen de comprendre le monde sur la base des lois fondamentales, et les phénomènes éventuellement exposés dans le monde sont conformes à ces lois fondamentales des théories en physique. Au niveau microscopique, les lois qui régissent les interactions physiques sont décrits par la mécanique quantique. D'un autre côté, la théorie quantique est

une théorie probabiliste, et il était donc inévitable qu'une théorie de l'information quantique soit développée pour unifier la mécanique quantique et la théorie de l'information. Dans cette nouvelle théorie, les informations quantiques sont codées comme une caractéristique des systèmes quantiques (par exemple, la polarisation des photons ou le spin des particules) et qui sont associées à un état quantique décrit par l'opérateur densité agissant sur un espace de Hilbert [58, 59]. Comme nous l'avons dit, les principaux outils mathématiques utilisés par l'information quantique appartiennent à la mécanique quantique. À cet égard, cette partie passe en revue les concepts de base de la mécanique quantique ainsi que le processus de mesure pour présenter les états et les opérateurs des systèmes quantiques. Ensuite, nous allons présenter quelques mesures qui nous permettent de quantifier le degré de l'intrication dans un état quantique.

1.2.1 Opérateur ou matrice densité

En mécanique quantique, un espace de Hilbert \mathcal{H} (espace des états) est associé à chaque système. C'est un espace vectoriel à n dimension munie d'une base orthonormée $\{|\mathcal{U}_i\rangle, i = 0, \dots, n-1\}$. Un élément quelconque de l'espace \mathcal{H} est appelé vecteur-Ket et nous le désignons comme $|\psi\rangle$ et sa dimension dépend du système considéré. Son vecteur dual est noté $\langle\psi|$. N'importe quel état représenté par le vecteur $|\psi\rangle$ dans l'espace \mathcal{H} peut être développé dans une base orthonormée comme une combinaison linéaire

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} v_i |\mathcal{U}_i\rangle, \quad (1.14)$$

que les physiciens quantiques appellent souvent une superposition et les amplitudes de probabilité v_i sont des coefficients complexes. La probabilité de trouver le système dans l'état $|\mathcal{U}_i\rangle$ n'est autre que $|v_i|^2$ avec $\sum_{i=0}^{n-1} |v_i|^2 = 1$. Maintenant, si nous avons deux systèmes quantiques avec les espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , respectivement, l'espace de Hilbert associé au système quantique combiné est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Il est important de noter que ces deux espaces de Hilbert pourraient représenter des systèmes physiques entièrement différents, par exemple, le premier pourrait être l'espace de spins d'électrons, tandis que le second pourrait être l'espace de polarisations de photons.

L'opérateur densité ou la matrice densité est l'outil qui permet de décrire tous les états quantiques possibles d'un système physique donné en une seule matrice à un instant donné. Il nous permet également de réduire les calculs en théorie de l'information quantique. Dans ce qui suit, nous discuterons la forme de cette matrice densité dans des états quantiques purs et mixtes et de leurs propriétés correspondantes.

1.2.1.1 Cas d'un état pur

Un état quantique général est représenté par un opérateur densité ρ qui est un opérateur hermitien positif avec trace unitaire. C'est-à-dire qu'il doit remplir les trois conditions

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad \rho = \rho^\dagger, \quad \langle\mathcal{U}_i|\rho|\mathcal{U}_i\rangle \geq 0, \quad (1.15)$$

pour tous les vecteurs $\mathcal{U}_i \in \mathcal{H}$. L'état d'un système quantique est dit pur s'il n'a qu'une seule valeur propre non nulle. Il se caractérise par un maximum de connaissances et leur matrice densité correspond au projecteur sur l'état $|\psi\rangle$. Il s'écrit comme $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ et leurs éléments valent $\rho_{ij} = \langle\mathcal{U}_i|\rho|\mathcal{U}_j\rangle$. Dans ce cas, les connaissances sur la préparation du système ne manquent pas et la préparation génère avec certitude l'état souhaité. En utilisant les principes de la mécanique quantique, nous pouvons obtenir les propriétés importantes suivantes :

1. Si on effectue une mesure de la quantité physique A qui correspondant à l'observable \hat{A} , la probabilité d'obtenir la valeur propre v_i est

$$P(v_i) = |\langle \mathcal{U}_i | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | P_i | \psi \rangle, \quad (1.16)$$

où \hat{P}_i représente le projecteur $|\mathcal{U}_i\rangle \langle \mathcal{U}_i|$. La valeur moyenne d'un opérateur \hat{A} est exprimée en fonction de la matrice densité comme

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i,j} v_i^* v_j A_{ij} = \sum_{i,j} \rho_{ij} \langle \mathcal{U}_i | \hat{A} | \mathcal{U}_j \rangle = \sum_i \langle \mathcal{U}_i | \rho \hat{A} | \mathcal{U}_i \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \rho). \quad (1.17)$$

D'après les équations (1.16) et (1.17), nous pouvons écrire donc $P(v_i) = \text{Tr}(P_i \rho)$. De plus, il est facile de vérifier que

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mathcal{U}_i | \psi \rangle \langle \psi | \mathcal{U}_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^* v_i = \sum_{i=0}^{n-1} |v_i|^2 = 1. \quad (1.18)$$

2. Supposons que le résultat de la mesure donne la valeur v_i , et l'état du système après la mesure est $|\psi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}}$. On peut vérifier facilement que l'opérateur densité associé à la mesure v_i est donné par

$$\rho_{v_i} = \frac{P_i |\psi\rangle \langle \psi | P_i}{\langle \psi | P_i | \psi \rangle} = \frac{P_i \rho P_i}{P(v_i)}. \quad (1.19)$$

3. la matrice densité ρ est un opérateur de projection, Alors, nous avons $\rho^2 = \rho$ et $\text{Tr}(\rho^2) = 1$.
4. Si le hamiltonien qui décrit le système est noté par $\hat{H}(t)$, l'évolution temporelle de l'état $|\psi\rangle$ est

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = -i \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.20)$$

où $U(t)$ et $\hat{H}(t)$ sont liés par $U(t) = \exp\left[-i \int \hat{H}(t) t dt\right]$. L'évolution temporelle de ce système décrit par l'équation de Schrödinger peut s'écrire en fonction de l'opérateur densité comme

$$\dot{\rho}(t) + i[\hat{H}(t), \rho(t)] = 0, \quad (1.21)$$

où $[\cdot, \cdot]$ représente le commutateur des deux opérateurs.

1.2.1.2 Cas d'un état mixte

Nous considérons maintenant le résultat de la mesure d'un état quantique mixte. Supposons que nous avons un mélange des états quantiques purs $|\psi_i\rangle$ avec une probabilité p_i , et chaque $|\psi_i\rangle$ peut être représenté par un vecteur dans l'espace \mathcal{H} comme (1.14). La matrice densité d'un état mixte est définie comme un mélange statistique d'un ensemble d'états purs, et après la mesure, le système quantique susceptible de prendre un état pur parmi n états possibles. Par conséquent, la matrice densité qui décrit le système global est donnée par

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.22)$$

où p_i est la probabilité que le système se trouve dans l'état normalisé $|\psi_i\rangle$ et la somme est prise sur tous les états accessibles au système. La probabilité p_i satisfait évidemment

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad p_i^2 \leq 1. \quad (1.23)$$

Pour un état pur, il n'y a qu'un seul p_i qui est égal à l'unité et tous les autres sont nuls. Les propriétés de l'état pur sont aussi valables dans le cas de mélange statistique sauf que $\rho^2 = \rho$. Alors, l'opérateur densité n'est pas un projecteur ($\rho^2 \neq \rho$) et il est aussi facile de vérifier que $\text{Tr}(\rho^2) < 1$.

1.2.1.3 Opérateur densité réduit

Parfois, on ne s'intéresse qu'à l'un des sous-systèmes d'un système quantique composite. Cette situation est décrite à l'aide du concept de l'opérateur densité réduite. Considérons un système quantique AB formé de deux sous-systèmes A et B dans les bases $\{|k\rangle, k = 0, \dots, d_A - 1\} \in \mathcal{H}_A$ et $\{|m\rangle, m = 0, \dots, d_B - 1\} \in \mathcal{H}_B$, respectivement. Si le système total est décrit par l'opérateur densité ρ_{AB} , alors le sous-système A est décrit par l'opérateur densité réduite ρ_A . Il est défini par

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_{m=0}^{d_B-1} \langle m | \rho_{AB} | m \rangle, \quad (1.24)$$

où Tr_B est appelé trace partielle sur le sous-système B . De même pour le sous-système B , nous avons

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \sum_{k=0}^{d_A-1} \langle k | \rho_{AB} | k \rangle. \quad (1.25)$$

Les matrices densité réduite satisfont aux propriétés d'une matrice densité. Pour voir cela, considérons par exemple le cas dans lequel ρ_{AB} est une matrice densité de l'état pur

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|. \quad (1.26)$$

Évidemment, si $\{|k\rangle_A\}$ et $\{|m\rangle_B\}$ sont des vecteurs de base orthonormés de \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B , alors $\{|k_A\rangle \otimes |m_B\rangle\}$ est une base orthonormée pour $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ et l'état $|\psi_{AB}\rangle$ devient

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{k,m} \alpha_{km} |k_A\rangle \otimes |m_B\rangle, \quad (1.27)$$

et la matrice densité réduite ρ_A est écrite sous la forme suivante

$$\rho_A = \sum_{k,k',m} \alpha_{km} \alpha_{k'm}^* |k_A\rangle \langle k'_A|. \quad (1.28)$$

En utilisant l'expression ci-dessus (1.28), il est facile de voir que ρ_A satisfait les propriétés d'une matrice densité :

- (i) $\rho_A = \rho_A^\dagger$;
- (ii) $\rho_A \geq 0$, c'est-à-dire pour tout $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A$, nous avons $\langle \phi | \rho_A | \phi \rangle \geq 0$;
- (iii) $\text{Tr} \rho_A = 1$.

De plus, en utilisant la relation générale de l'évolution temporelle de l'opérateur densité (1.21), nous obtenons

$$\frac{\partial \rho_A(t)}{\partial t} = -i[\hat{H}(t), \rho_A(t)], \quad \frac{\partial \rho_B(t)}{\partial t} = -i[\hat{H}(t), \rho_B(t)]. \quad (1.29)$$

1.2.2 Qubit et sphère de Bloch

Dans les ordinateurs ordinaires, les informations sont stockées et traitées sous forme de bits, et donc, théoriquement, le bit est la plus petite unité qui transporte ou transmet des informations. Le terme bit fait référence aux nombres dans le système de chiffres binaires, qui est l'unité de base de la quantité d'informations dans les ordinateurs et les communications numériques. Cette unité ne peut contenir qu'une seule des deux valeurs et est donc physiquement appliquée dans une machine à deux états. Ces deux conditions sont représentées par "0" ou "1". Il peut également être représenté comme "vrai" ou "faux", "oui" ou "non" ou toute autre caractéristique avec deux valeurs.

Par analogie avec le bit classique, un bit quantique ou un qubit [60] est la plus petite unité fondamentale de stockage d'information quantique. Contrairement au système classique où un bit devrait être dans un état ou dans l'autre, la mécanique quantique permet au qubit d'être dans une superposition des deux états simultanément. Cela signifie que les qubits peuvent exister dans plusieurs états à la fois, ce qui permet un calcul très rapide et la possibilité d'effectuer une multitude de calculs en même temps. Plusieurs systèmes quantiques peuvent stocker dans un qubit, nous citons ici par exemple un spin de l'électron dans l'expérience de Stern et Gerlach, dans lequel la séparation en deux faisceaux de l'atome d'argent révèle qu'il existe deux états possibles de spin et les deux niveaux peuvent être pris comme spin up et spin down [61]. Un autre exemple concerne la polarisation d'un photon unique dans lequel les deux états peuvent être considérés comme étant la polarisation verticale et la polarisation horizontale.

Autrement dit, un qubit est l'état d'un système quantique à deux niveaux $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ évoluant dans un espace de Hilbert à deux dimensions. N'importe lequel de ces états s'écrit mathématiquement sous la forme

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.30)$$

où α et β sont des nombres complexes qui satisfont la condition de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ doivent être orthogonaux. Le qubit aura donc deux états jusqu'à ce que nous le mesurons. Une fois que nous avons implémenté une mesure sur le qubit, nous obtiendrons directement l'une des deux possibilités ; soit l'état $|0\rangle$ avec probabilité $|\alpha|^2$, soit l'état $|1\rangle$ avec probabilité $|\beta|^2$.

Puisque les facteurs de phase globaux des états quantiques en mécanique quantique n'affectent pas l'état physique, et seule la différence de phase entre α et β est importante, nous pouvons prendre la représentation pour que le coefficient de l'état $|0\rangle$ soit réel et non négatif. Donc, à partir de la condition de normalisation, un qubit (1.30) peut être réécrit en fonction de deux angles (θ, φ) comme

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \exp^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (1.31)$$

avec les paramètres $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$ exprimant l'amplitude relative et la phase relative des états de base, respectivement. Un état de ce type peut représenter géométriquement en tant qu'un point sur une sphère unitaire appelée la sphère de Bloch, où θ représente l'angle azimutal et φ représente l'angle polaire (voir Fig.(1.2)). Sa surface représente tous les états purs et son intérieur représente tous les états mixtes, et les états mixtes au maximum sont au centre de cette sphère. Il est également intéressant de noter que plusieurs opérations sur des qubits uniques qui sont couramment utilisés dans le traitement de l'information quantique peuvent être parfaitement décrites dans l'image de la sphère Bloch.

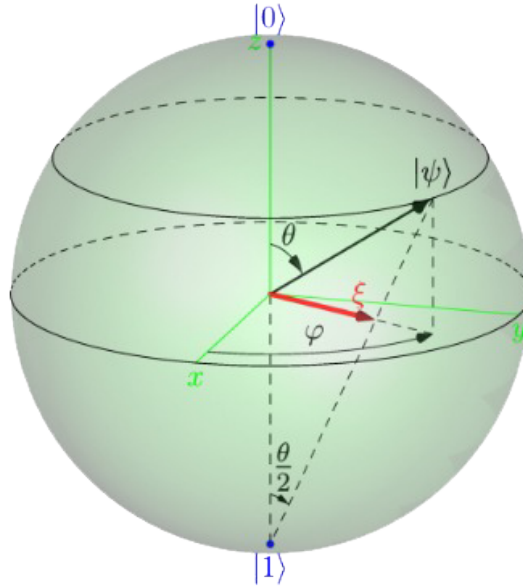


FIGURE 1.2 – Représentation géométrique d'un qubit sur la sphère de Bloch.

1.2.3 Mesures quantiques

L'un des problèmes les plus difficiles et controversés en mécanique quantique est le problème de la mesure et les opinions varient considérablement quant à son importance. Certaines personnes considèrent qu'en réalité il n'y a pas de problème du tout, tandis qu'à l'autre bout, d'autres paradoxes considèrent que le problème de la mesure est l'un des grands puzzles qui n'ont pas été résolus par la mécanique quantique. Le problème est que la mécanique quantique ne fournit que les possibilités de différents résultats possibles dans une expérience et elle ne fournit aucun mécanisme par lequel le résultat réel, qui est observé à la fin, se produit. Généralement, la mesure quantique est essentiellement ce que la Fig.(1.3) représente ; une opération sur un qubit, de sorte que l'état quantique est dans une superposition des vecteurs de base, pour obtenir un bit classique [62, 63]. Selon la théorie quantique, chaque grandeur physiquement mesurable qui est associée à une observable (c-à-d un opérateur hermitien) est caractérisée par un ensemble d'opérateurs $\{M_k\}_{k=1}^N$ satisfaisant la contrainte $\sum_{k=1}^N M_k^\dagger M_k = \mathbb{1}$. Ces opérateurs agissant sur l'espace d'état du système et l'état $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ après la mesure devient

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi_k\rangle \equiv \frac{M_k |\psi\rangle}{\sqrt{p_k}}, \quad (1.32)$$

avec la probabilité

$$p_k = \langle \psi | M_k^\dagger M_k | \psi \rangle = \|M_k |\psi\rangle\|^2 \geq 0. \quad (1.33)$$

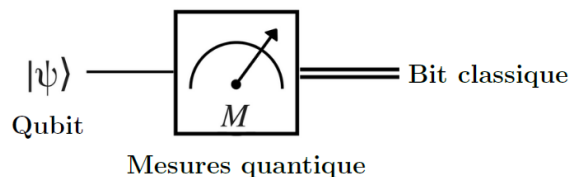


FIGURE 1.3 – Représentation schématique du processus de mesure

1.2.3.1 Mesures projectives

Les mesures projectives sont un cas particulier des mesures généralisées, dans lesquelles les opérateurs de mesure $\{M_k\}_{k=1}^N$ sont des opérateurs hermitiens appelés projecteurs. Le nombre de ces opérateurs est égal à la dimension de l'espace de Hilbert et ils sont reproductibles dans le sens que si nous effectuons une mesure projective une fois et obtenons le résultat v_k , la répétition de la mesure donne à nouveau le résultat v_k et ne change pas l'état. Par conséquent, $M_k = P_k$ où $P_k P_l = \delta_{kl} P_k$ et $P_k^2 = P_k$ avec P_k représente un opérateur projecteur et δ_{kl} est le symbole de Kronecker. En utilisant cela, la probabilité d'observer le résultat avec l'indice k lors de la mesure d'un système quantique dans l'état $|\psi\rangle$ est

$$p_k = \langle \psi | M_k^\dagger M_k | \psi \rangle = \langle \psi | P_k | \psi \rangle, \quad (1.34)$$

et l'état immédiatement après la mesure $|\psi_k\rangle$ est

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi_k\rangle \equiv \frac{P_k |\psi\rangle}{\sqrt{p_k}}. \quad (1.35)$$

Si nous appliquons à nouveau l'opérateur P_k , cette fois à l'état $|\psi_k\rangle$, il n'y a pas de changement d'état. En effet, l'état après avoir appliqué P_k pour la deuxième fois est

$$|\psi_k\rangle \mapsto |\psi'_k\rangle \equiv \frac{P_k |\psi_k\rangle}{\sqrt{p'_k}}, \quad (1.36)$$

où $p'_k = \langle \psi_k | P_k | \psi_k \rangle$. Nous pouvons maintenant dériver l'expression de p'_k comme

$$p'_k = \left[\langle \psi | \frac{P_k^\dagger}{\sqrt{p_k}} \right] P_k \left[\frac{P_k}{\sqrt{p_k}} | \psi \rangle \right] = \frac{\langle \psi | P_k | \psi \rangle}{p_k}. \quad (1.37)$$

Alors,

$$\sqrt{p'_k p_k} = \sqrt{\langle \psi | P_k | \psi \rangle} = \sqrt{p_k}. \quad (1.38)$$

Finalement, nous voyons que l'état n'a pas été affecté par la deuxième mesure

$$|\psi'_k\rangle = \frac{P_k}{\sqrt{p'_k}} \frac{P_k | \psi \rangle}{\sqrt{p_k}} = \frac{P_k | \psi \rangle}{\sqrt{p_k}} = |\psi_k\rangle. \quad (1.39)$$

Par conséquent, on peut dire que le résultat observé à la suite d'une mesure projective est déterministe.

1.2.3.2 Opérateurs de mesure à valeur positive (POVMs)

En général, nous détruisons un système quantique au cours du processus de mesure, ce qui signifie que les mesures projectives sont restrictives et ne sont pas toujours possibles. Aussi, la répétabilité d'une mesure projective est violée dans les cas où le système n'est mesuré qu'une seule fois. Cependant, il est possible d'envisager une notion de mesure plus généralisée en relâchant la contrainte d'orthogonalité. Cela conduit au concept d'opérateurs de mesure à valeur positive (POVM : Positive Operator-Valued Measure). Les opérateurs POVM ne sont pas nécessairement orthogonaux ou commutatifs et permettent la possibilité de résultats de mesure associés à des états non orthogonaux. Contrairement aux mesures projectives, le nombre d'éléments dans les mesures POVMs peut être supérieur à la dimension de l'espace de Hilbert. De plus, ils jouent un rôle important dans de nombreux domaines de la science de l'information quantique [64, 65].

Considérons une mesure généralisée avec des opérateurs de mesure $\{M_k\}$, les éléments d'une mesure POVM sont définis via

$$E_k = M_k^\dagger M_k, \quad (1.40)$$

et la condition de normalisation devient $\sum_k E_k = \mathbb{1}$. Il est clair que, $E_k^\dagger = M_k^\dagger (M_k^\dagger)^\dagger = E_k$, alors les éléments POVM sont hermitiens. Il est également facile de montrer que les E_k sont des opérateurs positifs, c'est-à-dire que $\langle \psi | E_k | \psi \rangle \geq 0$ est vrai pour tous $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. De plus, la probabilité du résultat k est simplement $p_k = \langle \psi | E_k | \psi \rangle$. En utilisant la décomposition polaire d'un opérateur, où pour tout opérateur A on peut toujours trouver une transformation unitaire U et un opérateur positif Q de sorte que $A = UQ$ avec $Q = \sqrt{A^\dagger A}$. Dans le cas le plus simple, où l'opérateur A est inversible et $U = A Q^{-1}$, les opérateurs M_k deviennent

$$M_k = U_k \sqrt{E_k}, \quad (1.41)$$

avec les U_k sont des transformations unitaires arbitraires. Par conséquent, nous pouvons maintenant écrire l'état après la mesure comme

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi_k\rangle \equiv \frac{U_k \sqrt{E_k} |\psi\rangle}{\sqrt{p_k}}. \quad (1.42)$$

1.2.4 Entropie de von Neumann et l'information quantique

Par analogie avec l'entropie de Shannon, John von Neumann a introduit une définition de l'entropie via l'opérateur densité de la mécanique quantique ρ . Ici, nous donnerons une brève introduction à cette entropie et à sa version relative. Une explication plus approfondie est donnée dans le livre de Nielsen et Chuang [66]. L'entropie de von Neumann d'un état quantique ρ est définie par la formule

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (1.43)$$

Dans les calculs analytiques, cette entropie est calculée en diagonalisant la matrice ρ comme

$$\rho = \mathcal{W} \Lambda \mathcal{W}^{-1}, \quad (1.44)$$

avec

$$\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (1.45)$$

où les vecteurs w_i sont des vecteurs propres de ρ et chacun avec une valeur propre λ_i . La matrice Λ contient les valeurs propres dans la diagonale et sinon les zéros. Le logarithme de ρ peut alors être calculé comme

$$\log_2 \rho = \mathcal{W} \log_2(\Lambda) \mathcal{W}^{-1}. \quad (1.46)$$

L'utilisation des équations (1.43), (1.44) et (1.46), et de la caractéristique cyclique de la trace $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, conduit à un calcul de l'entropie de von Neumann comme

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i = \mathcal{H}(\lambda_i), \quad (1.47)$$

qui est la formule pratique utilisée pour calculer l'entropie de von Neumann d'une matrice densité de dimension arbitraire où $\mathcal{H}(\lambda_i)$ est l'entropie de Shannon. L'entropie de von Neumann est donc équivalente à l'entropie de Shannon de la distribution de probabilité associée à la diagonalisation de ρ . Si $|\psi\rangle$ est un état pur, alors sa matrice densité ρ n'a qu'une seule valeur propre égale à 1, sa trace est égale à 1 (alors $\log_2 \rho \equiv 0$), et son entropie de von Neumann est nulle. D'autre part, si l'on prépare le système dans un état mixte maximal $1/N$, c'est-à-dire un état mixte où tous les N états purs correspondants ont les mêmes probabilités, alors l'état mixte représente l'incertitude maximale avec l'entropie de von Neumann $\log_2 N$ en accord avec l'entropie de Shannon. De plus, l'entropie de von Neumann satisfait les propriétés suivantes :

- Comme pour l'entropie de Shannon, l'entropie de von Neumann est toujours positive et nous avons $0 \leq S(\rho) \leq \log_2 N$.
- L'entropie de von Neumann est sous-additive : $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$. L'égalité a lieu si $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.
- Pour un état pur ρ_{AB} , nous avons $S(\rho_A) = S(\rho_B)$.
- Soit p_i une distribution de probabilité et ρ_i une famille d'états appartenant à des sous-espaces orthogonaux, alors nous pouvons obtenir

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \mathcal{H}(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i). \quad (1.48)$$

- $S(\rho_{AB})$ est une fonction concave, c'est-à-dire si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$S\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i S(\rho_i). \quad (1.49)$$

- $S(\rho)$ est invariante sous une transformation unitaire U : $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger)$.

1.2.4.1 Entropie quantique conjointe, conditionnelle et relative

Comme dans la théorie de l'information classique, il est extrêmement utile de définir une version quantique de l'entropie conjointe, conditionnelle et relative. Considérons un système quantique à deux parties dont l'état total est donné par l'opérateur densité ρ_{AB} et on note par les opérateurs ρ_A et ρ_B les matrices densité réduites. L'entropie conjointe de von Neumann des sous-systèmes A et B est définie comme l'entropie de von Neumann de l'état du système total :

$$S(A, B) = S(\rho_{AB}). \quad (1.50)$$

Ainsi, l'entropie conditionnelle de von Neumann du système A conditionnée par le système B est définie comme

$$S(\rho_A/\rho_B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \quad (1.51)$$

Pour deux matrices densité ρ et σ , l'entropie relative quantique de ρ par rapport à σ est définie par

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho \log_2 \rho) - \text{Tr}(\rho \log_2 \sigma). \quad (1.52)$$

Cette entropie (1.52) est calculée en obtenant d'abord les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices ρ et σ . Nous désignons les valeurs propres de ρ et σ comme λ_i et μ_j respectivement, et leurs vecteurs propres correspondants comme w_i et u_j . Si la base des vecteurs propres de ρ est une base orthonormée, la matrice inverse \mathcal{W}^{-1} dans l'équation (1.46) peuvent être remplacés par la matrice de transposition \mathcal{W}^T , alors le deuxième terme de l'équation (1.52) peut être calculé comme

$$\text{Tr}(\rho \log_2 \sigma) = \sum_i w_i^T (\rho \log_2 \sigma) w_i = \sum_i \lambda_i w_i^T \log_2 \sigma w_i. \quad (1.53)$$

De même, nous avons

$$\log_2 \sigma = \sum_j \log_2(\mu_j) u_j u_j^T. \quad (1.54)$$

Par conséquent, la formule finale de l'entropie relative (1.52) devient

$$S(\rho||\sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[\log_2 \lambda_i - \sum_{j=1}^n (w_i^T u_j)^2 \log_2 \mu_j \right]. \quad (1.55)$$

1.2.4.2 L'information mutuelle quantique

L'information mutuelle quantique est une généralisation au cas quantique du concept d'information mutuelle rencontrée en théorie classique de l'information. Elle porte sur l'interprétation des corrélations totales entre deux sous-systèmes A et B d'un système quantique bipartite AB . Elle est considérée comme un cas particulier de l'entropie relative entre l'état ρ_{AB} et l'état $\rho_A \otimes \rho_B$. En utilisant l'équation (1.52) et la relation $\log_2(\rho_A \otimes \rho_B) = \log_2 \rho_A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes \log_2 \rho_B$, nous trouvons l'extension quantique de l'information mutuelle (1.11) comme

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\rho_{AB}) &= S(\rho_{AB} \parallel \rho_A \otimes \rho_B) \\ &= \text{Tr}[\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}] - \text{Tr}[\rho_{AB} \log_2(\rho_A \otimes \rho_B)] \\ &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Notez que l'information mutuelle quantique est non négative en raison de la sous-additivité de l'entropie de von Neumann, et nulle uniquement pour un état de produit $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. Elle peut également être écrite en fonction de l'entropie conditionnelle quantique en faisant une généralisation directe de l'équation (1.12). Nous trouvons

$$\mathcal{I}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}/\rho_B). \quad (1.57)$$

Malgré que l'entropie de Shannon et l'entropie de von Neumann présentent des similitudes, elles ont de nombreuses propriétés nettement différentes. Cependant, en raison de la relation intime entre ces entropies et les propriétés opérationnelles des informations, ces propriétés nous renseignent sur la nature de l'information.

1.2.5 Entropie de Rényi

L'une des lignes de recherche les plus fructueuses en théorie de l'information quantique consiste à généraliser les entropies quantiques au-delà de celles qui sont données par des combinaisons linéaires d'entropie de von Neumann. L'idée générale est de chercher une généralisation de l'entropie de von Neumann et à réécrire toutes les définitions susmentionnées en termes de nouvelles entropies. Cela peut être utile dans les applications de l'information quantique d'un point de vue théorique. Dans ce sens, plusieurs grandeurs entropiques ont été introduites et étudiées. En particulier, les entropies de Rényi- α sont une famille intéressante d'entropies additives qui ont trouvé des applications spéciales dans l'étude des capacités des canaux [67] ainsi que pour les quantifications des corrélations dans les systèmes quantiques [68, 69]. Considérant une variable aléatoire X avec une distribution de probabilité p_x , où $p_x \geq 0$ et $\sum_x p_x = 1$, son entropie de Rényi d'ordre α est définie comme

$$\mathcal{H}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_x p_x^\alpha, \quad (1.58)$$

où $0 < \alpha < \infty$ et lorsque le paramètre α s'approche de 1, l'entropie de Rényi est réduite à l'entropie de Shannon. En effet

$$\mathcal{H}_1(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{H}_\alpha(X) \equiv - \sum_x p_x \log_2 p_x = \mathcal{H}(X). \quad (1.59)$$

La version quantique de l'entropie de Rényi est définie comme

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 [\text{Tr}(\rho^\alpha)], \quad (1.60)$$

et pour $\alpha = 1$, l'entropie de Rényi quantique est égale à l'entropie de von Neumann

$$S_1(\rho) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) = S(\rho). \quad (1.61)$$

1.3 Quantification et caractérisation de l'intrication quantique

L'intrication quantique, comme un type spécial de corrélations quantiques, est une ressource précieuse pour effectuer et de façon plus performante plusieurs tâches de traitement de l'information quantique et a fait l'objet d'études intensives au cours des dernières décennies. Elle décrit les corrélations entre les systèmes quantiques qui n'ont pas d'analogues classiques [2, 3]. En effet, les corrélations quantiques jouent un rôle crucial dans la plupart des applications de la théorie de l'information quantique, car elles sont à l'origine de plusieurs processus qui ne seraient pas possibles dans un contexte purement classique [70, 71, 86]. En conséquence, l'étude de l'intrication et en particulier comment elle peut être quantifiée est un sujet central dans ce champ en plein essor.

La description quantitative de l'intrication a commencé avec les fameuses inégalités de John Bell en 1964. Pendant plusieurs années, l'intrication était considérée comme synonyme de la violation de ces inégalités. Les prochaines étapes, du point de vue théorique, était le travail de Werner sur la caractérisation mathématique précise de l'intrication dans les états quantiques mixtes où il a décrit des états mixtes qui ne violent aucune inégalité de Bell [13]. Depuis lors, un effort théorique remarquable a été consacré à la compréhension des corrélations quantiques. Cependant, il peut sembler surprenant qu'à ce jour il n'existe pas de théorie quantitative globale de l'intrication. En effet, la théorie de l'intrication pour l'état mixte est plus compliquée et moins bien comprise que celle de l'intrication pour l'état pur. Pire encore, il existe une variété de classifications et de mesures d'intrication basées sur différents concepts et méthodes sans liens clairs les uns avec les autres.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la dernière moitié de ce chapitre est consacrée à rappeler certains des résultats de base de la théorie de l'intrication et ses différents critères de détection. Dans ce but, cette partie est une introduction à nos connaissances actuelles sur la façon de décider si un état donné est séparable ou intriqué, et comment quantifier l'intrication avec des mesures appropriées. Mais d'abord, nous avons besoin d'une définition mathématique de l'intrication versus la séparabilité. Considérons un système quantique bipartite AB qui est composé de deux sous-systèmes A et B . Un état quantique pur $|\psi_{AB}\rangle$ est appelé séparable s'il peut s'écrire comme

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle, \quad (1.62)$$

où $|\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ et $|\chi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$. Dans ce cas, les matrices densités réduites des deux sous-systèmes sont des états purs, alors

$$\rho_A = |\phi_A\rangle \langle \phi_A|, \quad \rho_B = |\chi_B\rangle \langle \chi_B|. \quad (1.63)$$

D'un autre côté, si $|\psi_{AB}\rangle$ ne peut pas être exprimé comme un produit tensoriel des états de deux sous-systèmes (1.62), on dit que les sous-systèmes A et B sont dans un état intriqué et $|\psi_{AB}\rangle$ est dit être un état pur intriqué. Dans ce cas, les opérateurs densité réduite ρ_A et ρ_B correspondent à des états mixtes. A titre d'exemple, $|\psi\rangle = |00\rangle$ est un état pur séparable, et les états de Bell,

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad \text{et} \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \quad (1.64)$$

sont une classe spéciale d'états purs intriqués et qui sont maximalelement intriqués.

Un état mixte est dit séparable, s'il peut être préparé par les deux parties de manière classique, et leur matrice densité ne peut contenir que des corrélations classiques. Mathématiquement, un état mixte est dit séparable s'il peut être écrit comme

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \otimes |\chi_i\rangle \langle \chi_i|, \quad (1.65)$$

sinon, ρ_{AB} est un état intriqué. Dans le cadre de la généralisation de l'équation (1.65) pour un état multipartite, un état N -partite agissant sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{d_1} \otimes \mathcal{H}^{d_2} \dots \otimes \mathcal{H}^{d_N}$ est séparable s'il peut être écrit comme une somme convexe de produits tensoriels d'états des sous-systèmes

$$\rho_N = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)} \dots \otimes \rho_i^{(N)} = \sum_i p_i \otimes_{j=1}^N \rho_i^{(j)}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1.66)$$

et l'état ρ_N est dit k -séparable si nous pouvons l'écrire comme

$$\rho_N = \sum_i p_i \rho_i^{(a_1)} \otimes \rho_i^{(a_2)} \dots \otimes \rho_i^{(a_k)}, \quad (1.67)$$

avec a_l (où $l = 1, 2, \dots, k$) sont les sous-ensembles disjoints de l'ensemble globale $\{1, 2, \dots, N\}$ et $\rho^{(a_l)}$ agit sur l'espace du produit tensoriel constitué par les sous-espaces de \mathcal{H} marqués par les membres de a_l .

1.3.1 Critères de séparabilité

Comme le montre l'équation (1.62), la définition de l'intrication d'un état bipartite ne fournit aucun critère constructif pour décider si un état donné à une représentation du produit tensoriel ou non. Par conséquent, la connaissance des états intriqués et non intriqués est une question fondamentale de la théorie de l'intrication quantique, et seulement dans quelques cas, cette question a une réponse simple. Dans le cas des états purs bipartites, la décomposition de Schmidt est une méthode efficace pour détecter l'intrication quantique. Cependant, pour les états mixtes bipartites, trouver une décomposition comme dans l'équation (1.62) ou prouver qu'il n'en existe pas est une tâche difficile. Ces dernières années, des efforts considérables ont été déployés pour analyser la séparabilité des états mixtes. Ceci a conduit à l'identification de plusieurs critères de séparabilité opérationnelle, mais la situation est moins simple et ces critères ne sont efficaces que pour les basses dimensions.

1.3.1.1 La décomposition de Schmidt

La décomposition de Schmidt est l'un des outils les plus importants pour analyser les états purs bipartites en théorie de l'information quantique [73, 74]. Il montre qu'il est possible de décomposer tout état pur bipartite en superposition d'états orthonormés. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert défini comme un produit tensoriel de deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . Un état pur $|\psi_{AB}\rangle$ du système bipartite composite AB s'écrit comme $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} \chi_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$, où $|i\rangle_A$ et $|j\rangle_B$ sont respectivement des bases en \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . Selon le théorème de Schmidt, il existe des bases $|u_i\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ et $|v_i\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ dans lesquelles, pour chaque état pur $|\psi_{AB}\rangle$, peut être exprimé comme

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{\tilde{\chi}_i} |u_i\rangle_A \otimes |v_i\rangle_B, \quad (1.68)$$

où $n \leq \min\{\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_B)\}$ est appelé le nombre de Schmidt et $\tilde{\chi}_i$ sont des nombres réels non négatifs, appelés coefficients de Schmidt, qui satisfont $\sum_{i=1}^n \tilde{\chi}_i = 1$. En outre, les coefficients de Schmidt $\tilde{\chi}_i$ correspondent aux valeurs propres de l'une des matrices densités réduites

$$\rho_A = \text{Tr}_B [\rho_{AB}] = \sum_{i=1}^n \tilde{\chi}_i |u_i\rangle_A \langle u_i|, \quad \text{ou} \quad \rho_B = \text{Tr}_A [\rho_{AB}] = \sum_{i=1}^n \tilde{\chi}_i |v_i\rangle_B \langle v_i|. \quad (1.69)$$

L'état $|\psi_{AB}\rangle$ est séparable si et seulement si n'y a qu'un seul coefficient de Schmidt non nul, c'est-à-dire le nombre de Schmidt $n = 1$. S'il existe plusieurs coefficients de Schmidt non nuls,

l'état est intriqué. De plus, si tous les coefficients de Schmidt sont non nuls et égaux, l'état est dit maximalement intriqué.

A titre d'exemple trivial du théorème de décomposition de Schmidt, considérons le vecteur $|\psi_{AB}\rangle = |11\rangle$ dans un espace de Hilbert à 4-dimensions, dans ce cas, pour chacun espace de Hilbert \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B , la base de Schmidt est la base de calcul, alors

$$|u_1\rangle_A = |0\rangle_A, \quad |u_2\rangle_A = |1\rangle_A, \quad |v_1\rangle_B = |0\rangle_B, \quad |v_2\rangle_B = |1\rangle_B, \quad (1.70)$$

et les coefficients de Schmidt sont $\tilde{\chi}_1 = 0$ et $\tilde{\chi}_2 = 1$. Par conséquent, l'état $|\psi_{AB}\rangle$ est séparable.

Comme exemple un peu moins trivial, considérons l'état suivant sur le même espace à 4-dimensions que dans l'exemple précédent

$$\begin{aligned} |\psi_{AB}\rangle &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B + |1\rangle_B) \right]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Dans cet exemple, la base de calcul n'est pas une base de Schmidt, nous choisissons donc les bases de Schmidt pour être

$$|u_1\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A + |1\rangle_A), \quad |u_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A - |1\rangle_A), \quad (1.72)$$

$$|v_1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B + |1\rangle_B), \quad |v_2\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_B - |1\rangle_B), \quad (1.73)$$

et les coefficients de Schmidt sont $\tilde{\chi}_1 = 1$ et $\tilde{\chi}_2 = 0$.

1.3.1.2 La purification

Généralement, un état quantique mixte peut être compris soit comme un mélange statistique d'états quantiques purs, soit comme faisant partie d'un état pur de dimensions supérieures. Alors, il est possible d'introduire un autre système sur un état mixte, que nous appelons un système de référence E, de telle manière que l'état total soit un état pur. Cette technique est appelée la purification. En d'autre terme, une purification d'un état quantique mixte est un état pur dans un espace de Hilbert de dimension supérieure, dont la matrice densité réduite est identique à l'état d'origine.

Supposons une matrice densité mixte donnée par ρ_{AB} . La première étape pour purifier le système AB consiste à diagonaliser la matrice, en calculant les valeurs propres et les vecteurs propres. Supposons que nous obtenions comme valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ et comme vecteurs propres $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$. Pour calculer l'état pur $|\psi_{ABE}\rangle$, où $\rho_{ABE} = |\psi_{ABE}\rangle \langle \psi_{ABE}|$ et $\rho_{AB} = \text{Tr}_E [\rho_{ABE}]$, nous définissons un ensemble de vecteurs comme une base de Schmidt. Nous devons définir ces vecteurs comme

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

En adaptant cette notation, l'état pur $|\psi_{ABE}\rangle$ est donc donné par

$$|\psi_{ABE}\rangle = \sqrt{\lambda_1} |\phi_1\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\lambda_2} |\phi_2\rangle \otimes |2\rangle + \sqrt{\lambda_3} |\phi_3\rangle \otimes |3\rangle + \sqrt{\lambda_4} |\phi_4\rangle \otimes |4\rangle, \quad (1.75)$$

Il est facile de vérifier que $\rho_{AB} = \text{Tr}_E [\rho_{ABE}]$. Il est également important de noter que le rang du système définit la dimension du système de référence qui le purifie. En effet, par exemple, si

nous n'avons que deux valeurs propres non nulles, nous n'aurons besoin que de deux bases et ce sera la dimension du système de référence. Une autre observation importante est que l'état de référence est défini sauf s'il s'agit d'une opération unitaire et nous pouvons définir les bases par n'importe quel ensemble d'états orthonormaux.

1.3.1.3 Critère de Peres-Horodecki

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la décomposition de Schmidt est un indicateur nécessaire pour décider si un état pur donné est intriqué ou non, mais il s'avère qu'il est beaucoup plus difficile de définir la séparabilité pour les états mixtes. Par conséquent, nous devons passer à d'autres façons d'évaluer les états mixtes. Dans ce sens, l'étude des critères de séparabilité dans les états mixtes a attiré beaucoup d'attention et plusieurs critères ont été formulés. Commençons par l'un des critères les plus anciens et pourtant les plus importants pour la détection de l'intrication appelé le critère de la transposition partielle positive (PPT) ou le critère de Peres-Horodecki.

Le critère de la transposition partielle positive établit une condition nécessaire à la séparabilité dans le cas d'un état bipartite général. Il a été proposé pour la première fois dans le cadre de la théorie de l'intrication par Peres [75]. Il implique un calcul algébrique simple sans aucune optimisation. Soit ρ_{AB} un état quantique mixte d'un système bipartite, décrit par l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, alors un élément de la matrice d'un opérateur ρ_{AB} est donnée par

$$\rho_{m\mu, n\nu} = \langle m | \langle \mu | \rho | n \rangle | \nu \rangle = \langle m\mu | \rho | n\nu \rangle, \quad (1.76)$$

où les indices $\{m, \mu\}$ décrivent le premier sous-système A et les indices $\{n, \nu\}$ décrivent le second sous système B . La transposition partielle de la matrice densité ρ_{AB} par rapport au premier sous-système A est obtenue en effectuant la transposition par rapport aux degrés de liberté de sous-système B , et vice versa. Ensuite, nous obtenons

$$\rho_{m\mu, n\nu}^{T_A} = \rho_{n\nu, m\mu} \quad \text{ou} \quad \rho_{m\mu, n\nu}^{T_B} = \rho_{m\nu, n\mu}. \quad (1.77)$$

Si un état bipartite ρ_{AB} est séparable, sa transposition partielle ρ^{T_A} est une matrice densité semi-définie positive, c-à-d $\rho^{T_A} \geq 0$. S'il y a au moins une seule valeur propre négative, l'état ρ_{AB} est intriqué.

1.3.2 Quantification de l'intrication quantique

Dans les protocoles de l'information quantique, les états intriqués sont utilisés pour implémenter de nombreux processus et ils sont consommés pendant l'exécution du protocole quantique. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir des mesures qui nous disent si l'intrication contenue dans les systèmes quantiques est suffisante pour effectuer une certaine tâche. La quantification de l'intrication dans un état général s'avère être une tâche très difficile. En fait, il est clair qu'elle est plus complexe que le problème de la séparabilité. De plus, en raison des effets de décohérence inévitables, les applications réalistes doivent traiter des systèmes quantiques dans des états mixtes, et exactement dans cette situation, la question de la quantité d'intrication disponible est intéressante.

Une mesure d'intrication est une fonction mathématique qui rend-compte des caractéristiques cruciales associées à l'intrication et qui convertit tout état quantique ρ en un nombre positif $E(\rho)$ avec les propriétés axiomatiques suivantes [76, 77] :

1. Premièrement, une exigence naturelle est que la mesure d'intrication $E(\rho)$ s'annule si ρ est séparable.

2. Deuxièmement, une mesure d'intrication devrait être invariante en cas de changement local de la base. Cela signifie qu'il devrait être invariante sous les transformations unitaires locales.

$$E(\rho) = E\left(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger\right). \quad (1.78)$$

3. Pour toute mesure d'intrication $E(\rho)$, il est nécessaire que $0 \leq E(\rho) \leq 1$ avec $E(\rho) = 0$ si et seulement si l'état est séparable, et $E(\rho) = 1$ si ρ est l'opérateur densité d'un état maximalement intriqué.
4. Comme l'intrication ne peut pas être créée par des opérations locales et de communications classiques (LOCC), c'est à dire pour toute opération de la forme $A \otimes B$, il est raisonnable d'exiger que $E(\rho)$ n'augmente pas sous de telles transformations. Autrement dit, si Λ_{LOCC} est une application positive qui peut être implémentée par LOCC, alors

$$\rho \mapsto \Lambda_{\text{LOCC}}(\rho) = \frac{A \otimes B \rho A^\dagger \otimes B^\dagger}{\text{Tr}[A \otimes B \rho A^\dagger \otimes B^\dagger]}. \quad (1.79)$$

Et

$$E[\Lambda_{\text{LOCC}}(\rho)] \leq E(\rho). \quad (1.80)$$

En d'autres termes, si l'état quantique ρ peut être transformé en un autre état $\Lambda_{\text{LOCC}}(\rho)$ via LOCC, alors ρ est au moins aussi intriqué que $\Lambda_{\text{LOCC}}(\rho)$. Il est très intéressant de souligner que les opérations locales sont des opérations qui peuvent être décrites par des opérateurs appartenant à l'espace de Hilbert d'un seul sous-système. Si l'un des sous-systèmes peut décider de faire une mesure arbitraire de son espace, alors les opérations locales ne peuvent pas augmenter l'intrication de l'état. De plus, Alice et Bob ne peuvent pas utiliser les communications classiques pour construire un ensemble d'opérations locales de sorte qu'ils se retrouvent, en moyenne, avec une intrication plus élevée qu'au début.

5. Une autre propriété qui est satisfaite par la plupart des mesures d'intrication est la convexité. Autrement dit, il faut que l'intrication diminue sous le mélange de deux ou plusieurs états ;

$$E\left(\sum_k p_k \rho_k\right) \leq \sum_k p_k E(\rho_k), \quad (1.81)$$

6. D'autres questions se posent si plus de deux exemplaires d'un état sont disponibles. Par exemple, si Alice et Bob partagent n copies du même état ρ , il peut être raisonnable d'exiger une additivité, c'est-à-dire

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \quad (1.82)$$

Encore plus fort, on peut exiger une additivité complète. Cela signifie que si Alice et Bob partagent deux états différents ρ_1 et ρ_2 , alors

$$E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2). \quad (1.83)$$

Toute mesure d'intrication $E(\rho)$ vérifiant les exigences ci-dessus est appelée une intrication monotone. Aussi, une bonne mesure devrait satisfaire au moins les trois premières conditions.

1.3.2.1 Entropie d'intrication

Pour un état pur bipartite ρ_{AB} , l'entropie d'intrication est une mesure de l'intrication conceptuellement très importante, qui est unique et qui a une signification opérationnelle [78].

Elle est définie comme l'entropie de von Neumann de la matrice densité réduite de l'un des sous-systèmes ρ_A et ρ_B . Elle est donnée par

$$E(\rho_{AB}) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B), \quad (1.84)$$

où $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$. Pour illustrer la façon dont l'entropie de l'intrication est calculée, nous considérons l'état de Bell $|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})$, la matrice densité qui décrit cet état est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= |\phi^+\rangle_{AB} \langle \phi^+| \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle_A \langle 0| \otimes |0\rangle_B \langle 0| + |0\rangle_A \langle 1| \otimes |0\rangle_B \langle 1| + |1\rangle_A \langle 0| \otimes |1\rangle_B \langle 0| + |1\rangle_A \langle 1| \otimes |1\rangle_B \langle 1|). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Alors, l'opérateur densité réduite du sous-système A est

$$\rho_A = \frac{1}{2} [|0\rangle_A \langle 0| + |1\rangle_A \langle 1|] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

On remarque que ρ_A est une matrice diagonale. De ce fait, les entrées diagonales représentent les valeurs propres. En utilisant (1.84), nous trouvons l'entropie d'intrication du système AB comme

$$E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1. \quad (1.87)$$

D'après cet exemple, il est clair que l'entropie d'intrication prend sa valeur maximale pour les états intriqués au maximum et elle est égale à zéro pour les états séparables. Aussi, on peut facilement prouver que l'intrication du sous-système B prend toujours la même valeur que celle du sous-système A . De plus, pour un état pur maximalement intriqué $|\psi\rangle$, l'entropie d'intrication prend la valeur

$$E(|\psi\rangle) = \log_2 d, \quad (1.88)$$

où d est la dimension de la matrice densité réduite.

1.3.2.2 Intrication de formation

Pour le cas d'un système préparé dans l'état mixte, une mesure qui répond aux exigences d'intrication ci-dessus est l'intrication de formation E_f . Elle est définie comme l'intrication minimale que l'on obtient sur toutes les décompositions d'états purs d'un état mixte bipartite [79]. Elle s'écrit

$$E_f(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle), \quad (1.89)$$

où la minimisation porte sur toutes les décompositions spectrales purs possibles de l'état mixte ρ . Il convient de noter que l'intrication de formation a une interprétation simple, car elle caractérise la décomposition de l'état qui fournit les entropies locales minimales. De manière équivalente, vue que l'intrication des états purs bipartites est mieux quantifiée via leurs entropies locales (1.84), l'intrication de formation est caractérisée par la décomposition générale de l'état qui fournit l'intrication à l'état pur minimale. D'un point de vue analytique, il est très difficile de mesurer ou de calculer cette mesure. En effet, il est extrêmement difficile d'obtenir toutes les décompositions possibles d'un état quantique multipartite dans le cas général. La solution analytique a été proposée dans un article de Wootters [80] qui a déterminé une formule simple permettant de calculer cette entropie de formation, dans le cadre d'une nouvelle mesure

d'intrication que nous discutons dans ce qui suit. Il a défini l'intrication de formation pour tout état à deux qubits par la formule suivante

$$E_f(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - |\mathcal{C}(\rho)|^2}}{2}\right), \quad (1.90)$$

où $h(x)$ est la fonction de l'entropie binaire définie comme $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ et $\mathcal{C}(\rho)$ est la concurrence de l'état ρ que nous allons définir dans la sous section suivante.

1.3.2.3 Concurrence et les relations de Wootters

Nous allons maintenant discuter la mesure de la concurrence et passer en revue certaines de ses propriétés. Nous adoptons l'approche historique et discutons d'abord la concurrence de deux qubits, puis discutons brièvement de ses généralisations à d'autres états bipartites. Pour un état pur $|\psi\rangle$ d'un système à deux qubits, la concurrence $\mathcal{C}(|\psi\rangle)$ est définie par

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right| = \left| \langle \psi | (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle \right|, \quad (1.91)$$

où $|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle$, et $|\tilde{\psi}\rangle$ est appelé l'état "spin-flip" de l'état $|\psi\rangle$, σ_y désigne la matrice de Pauli et $|\psi^*\rangle$ est le conjugué complexe de $|\psi\rangle$. De plus, il existe des classes d'états pour lesquelles la concurrence prend une forme très simple. Le cas le plus simple est celui d'un état pur à deux qubits qui peut toujours s'écrire comme

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle, \quad (1.92)$$

avec α, β, γ et δ sont des nombres complexes qui vérifient la condition de normalisation suivante

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (1.93)$$

Ainsi, l'expression explicite de la concurrence d'un état pur à deux qubits est donnée par

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \geq 0. \quad (1.94)$$

Cela signifie que l'état $|\psi\rangle$ est séparable si $\alpha\delta = \beta\gamma$. D'autre part, la concurrence peut également être généralisée à des systèmes bipartites de dimensions supérieures. Dans ce sens, nous notons que la concurrence pour un état pur peut être écrit comme suit

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_A^2))}, \quad (1.95)$$

où ρ_A est l'une des matrices densité réduite que l'on peut définir pour un état pur bipartite. L'extension de la concurrence aux états mixtes est définie comme la concurrence moyenne d'un ensemble d'états purs représentant ρ , obtenue en faisant une minimisation sur toutes les décompositions à l'état pur

$$\mathcal{C}(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i \mathcal{C}(|\psi_i\rangle), \quad (1.96)$$

où $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ et $|\psi_i\rangle$ sont les états purs normalisée d'un système bipartite. Cette généralisation a d'abord été proposée par Rungta et al.[81] à travers la généralisation de l'opérateur "spin-flip" à des dimensions supérieures. Ils ont également montré que cette fonction remplit la condition de convexité et d'invariance sous les transformations unitaires et donc sa minimisation sur toutes les décompositions à l'état pur donne une mesure appropriée de l'intrication. Il a été montré dans la référence [80] que la quantité ci-dessus peut être calculée à partir de

$$\mathcal{C}(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (1.97)$$

où les λ_j sont les valeurs propres, dans l'ordre décroissant, de la matrice suivante

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (1.98)$$

À titre d'exemple, considérons une famille d'états X à deux qubits, qui est écrite dans une base de produits orthonormés $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ avec des éléments de la matrice densité non nulle uniquement le long de la diagonale et de l'anti-diagonale. Ils sont appelés les états X en raison de son apparence semblable à la lettre X et prennent la forme suivante

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (1.99)$$

En utilisant la formule (1.97), nous pouvons facilement trouver la concurrence de la matrice densité ρ_X comme

$$\mathcal{C}(\rho_X) = 2 \max\{0, \mathcal{C}_1(\rho_X), \mathcal{C}_2(\rho_X)\}, \quad (1.100)$$

avec

$$\mathcal{C}_1(\rho_X) = |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2(\rho_X) = |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}. \quad (1.101)$$

La formule de la concurrence simple, donnée ci-dessus, explique pourquoi ces états à deux qubits ont été largement utilisés pour étudier la dynamique de l'intrication dans de nombreux scénarios.

1.3.2.4 Entropie relative de l'intrication

Une autre idée pour quantifier l'intrication consiste à mesurer la distance qui sépare un état ρ (intriqué) de l'ensemble des états séparables S . Il a été trouvé que parmi toutes les fonctions de distance possibles, l'entropie relative est physiquement la plus raisonnable [76]. Par conséquent, nous définissons l'entropie relative de l'intrication comme

$$E_r(\rho) = \min_{\sigma \in S} S(\rho \|\sigma) = \min_{\sigma \in S} \text{Tr}(\rho \log_2 \rho - \rho \log_2 \sigma), \quad (1.102)$$

où la minimisation est reprise sur tous les états séparables et l'équation (1.102) donne la distance entre l'état ρ et l'état séparable le plus proche.

1.3.2.5 Négativité et Négativité logarithmique

Les expressions analytiques de la plupart des mesures discutées ci-dessus ont des formules compactes uniquement pour le système quantique qubit-qubit, et en général, il n'est pas facile de les calculer pour un état quantique mixte arbitraire. En outre, chacune de ces mesures révèle un aspect spécifique de l'intrication quantique. D'autre part, la négativité est une mesure particulièrement utile et facilement calculable pour tous les états mixtes d'un système bipartite arbitraire. Elle a été introduite par Vidal et Werner [82] comme étant la version quantitative du critère PPT. Elle est définie comme la somme des valeurs absolues des valeurs propres négatives de la matrice densité partiellement transposée. Par conséquent, la négativité est définie comme

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_i |\vartheta_i|, \quad (1.103)$$

où les $\{\vartheta_i\}$ sont les valeurs propres négatives de l'opérateur densité partiellement transposé ρ^{TA} et T_A désigne la transposition partielle par rapport au sous-système A . La négativité \mathcal{N} est également liée à la norme trace de ρ^{TA} via

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\rho^{TA}\|_1 - 1}{2}, \quad (1.104)$$

où la norme trace est définie par $\|\rho^{T_A}\|_1 = \text{Tr} \left(\sqrt{\rho^{T_A} \rho^{T_A \dagger}} \right)$. Pour les systèmes quantiques tripartites avec la matrice densité ρ_{ABC} , la négativité (1.103) devient

$$\mathcal{N}^{(3)}(\rho_{ABC}) := \sqrt[3]{\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_A})\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_B})\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_C})}, \quad (1.105)$$

où $\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_A})$ représente la négativité bipartite entre le qubit A et le sous-système B et C . $\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_A}) = \sum_i |\lambda_i(\rho_{ABC}^{T_A})| - 1$ et les $\lambda_i(\rho_{ABC}^{T_A})$ sont les valeurs propres de $\rho_{ABC}^{T_A}$. Des définitions similaires valent pour $\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_B})$ et $\mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_C})$. Pour les systèmes quantiques tripartites invariants sous la symétrie de permutations, c'est-à-dire le changement de qubits, $\mathcal{N}(\rho_{ABC})$ se réduit à la négativité bipartite de toute bipartition du système. Cela écrit comme

$$\mathcal{N}^{(3)}(\rho_{ABC}) = \mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_A}) = \mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_B}) = \mathcal{N}(\rho_{ABC}^{T_C}). \quad (1.106)$$

Notez que la négativité est une intrication monotone sous l'action des opérations locales et de communications classiques. Ainsi, elle peut être considérée comme une bonne mesure pour quantifier le degré d'intrication dans les systèmes composites. Il existe une autre intrication monotone qui est basée sur la définition de la négativité appelée la négativité logarithmique et qui est également plus facile à calculer analytiquement. Elle est définie par

$$\xi_N(\rho) = \log_2 \|\rho^{T_A}\|_1 = \log_2 [2\mathcal{N}(\rho) + 1]. \quad (1.107)$$

La fonction (1.107) a la caractéristique intéressante d'être additive, mais elle n'est pas convexe.

1.3.2.6 Notion de tangle

Le tangle est une autre mesure de l'intrication dans les systèmes tripartites, qui n'est ni une généralisation directe ni une combinaison directe de mesures bipartites [83]. Il quantifie le degré d'intrication entre les trois sous-systèmes qui ne peuvent pas être décrits et quantifiés par l'intrication bipartite. De plus, lorsque l'un des sous-systèmes (disons A) est intriqué avec les deux autres sous-systèmes combinés (BC dans ce cas), l'intrication peut être comprise comme une intrication bipartite entre deux parties $A|BC$ et elle est mesurée comme telle par l'une des mesures bien connues de l'intrication bipartite. Dans ce cas, le tangle τ_g des systèmes à trois qubits est exprimé comme

$$\tau_g = \max_{\{i,j,k\}=\{A,B,C\}} \{\mathcal{C}_{i|jk}^2 - \mathcal{C}_{i|j}^2 - \mathcal{C}_{i|k}^2\}, \quad (1.108)$$

où $\mathcal{C}_{i|jk}$ est la concurrence bipartite entre les deux sous-systèmes i et jk , donnée par

$$\mathcal{C}_{i|jk} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_i^2))}, \quad (1.109)$$

et $\mathcal{C}_{i|j}$ est la concurrence entre les paires des qubits i et j , qui a été déterminée à l'aide de l'équation (1.97).

CHAPITRE 2

LES QUANTIFICATEURS DES CORRÉLATIONS QUANTIQUES DE TYPE DISCORDE

Dans le premier chapitre, nous avons souligné que le rôle central dans le succès de l'information quantique est dû à l'exploitation de l'intrication, c'est-à-dire à des corrélations particulières décrites par des lois quantiques et qui ne peuvent être décrites dans une image classique. Cela est motivé par le fait que l'intrication peut être utilisée comme une ressource utile pour l'étude fondamentale en mécanique quantique et pour des applications dans la téléportation quantique [84, 4], le calcul quantique [85], la distribution des clés quantiques [86] et beaucoup plus. Cependant, selon diverses études [87, 88], il a été prouvé expérimentalement qu'il existe des états quantiques séparables qui sont très utiles dans la technologie quantique pratique et que l'intrication quantique n'est pas la forme la plus générale de corrélations quantiques. Par exemple, l'augmentation de la vitesse d'exécution de certains protocoles quantiques avec des états séparables [89, 90], la non-localité quantique sans l'intrication quantique [91, 92] et l'efficacité du calcul quantique [93]. En ce sens, des efforts théoriques considérables ont été consacrés au cours des dernières années pour caractériser et quantifier les corrélations quantiques au-delà de l'intrication dans les systèmes quantiques multipartites.

Ici, nous suivons le chemin historique qui a conduit à définir une classe de corrélations quantiques plus générale que l'intrication. Historiquement, la discorde quantique entropique, introduite pour la première fois par Ollivier et Zurek [19] puis proposée par Henderson et Vedral [94], est le quantificateur de corrélations quantiques largement utilisé et plusieurs travaux ont été consacrés à cette classe de mesures. Ce type de mesure peut rendre compte efficacement de toutes les corrélations quantiques existant dans les systèmes quantiques. Il est défini comme la différence entre l'information mutuelle quantique et les corrélations classiques mesurées à l'aide d'une mesure projective effectuée sur l'un des sous-systèmes. Malheureusement, en raison d'une procédure d'optimisation des corrélations classiques sur toutes les mesures projectives locales, la discorde quantique n'a été calculée explicitement que pour les cas particuliers des systèmes à deux qubits, et une solution analytique n'existe pas encore.

Ces difficultés ont incité Dakić et ses collaborateurs [95] à proposer une formulation alternative de la discorde quantique appelée "la discorde quantique géométrique", qui mesure les corrélations quantiques d'un état en utilisant la norme minimale de Hilbert-Schmidt (ou la norme 2 de Schatten) entre un état donné et les états classiques les plus proches. D'un point de vue analytique, le calcul de cette mesure géométrique nécessite un processus de minimisation plus simple que la discorde quantique entropique, mais plus récemment, il a été démontré [96]

que la discordance quantique géométrique peut augmenter sous les opérations quantiques locales agissant sur le sous-système non mesuré. Cela est dû à la distance de Hilbert-Schmidt, qui ne satisfait pas la propriété de contractivité sous les applications préservant les traces. Par conséquent, la discordance géométrique basée sur la norme de Hilbert-Schmidt n'est pas une bonne mesure des corrélations quantiques. Plusieurs variantes géométriques ont été introduites dans la littérature, mais la norme trace (la norme de Bures ou la norme 1 de Schatten) s'est avérée être la seule norme de Schatten que l'on peut utiliser pour faire une mesure géométrique des corrélations quantiques [97]. De nouvelles mesures liées à l'incertitude quantique ont été proposées pour surmonter ces difficultés et problèmes, telles que l'incertitude quantique locale [25], l'information de Fisher quantique locale [219] et le pouvoir interférométrique quantique [98].

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la discordance quantique et sa variante géométrique ; ses définitions et ses propriétés importantes qui sont nécessaires pour discuter des résultats introduits dans les chapitres ultérieurs. De plus, à l'aide d'un exemple, nous montrons comment calculer analytiquement ces mesures dans les systèmes quantiques bipartites. Dans la deuxième partie, nous allons introduire le concept de l'incertitude quantique locale comme un autre indicateur de la discordance quantique dans les systèmes bipartites. Nous adoptons l'information d'interchange (Skew) pour mesurer l'incertitude quantique des observables locales, et nous dérivons analytiquement l'expression de l'incertitude quantique locale pour les états à deux qubits et son extension aux états à plusieurs qubits. Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, nous discutons la notion de monogamie pour savoir comment les corrélations quantiques peuvent être partagées entre de nombreux sous-systèmes.

2.1 La discordance quantique entropique

2.1.1 Définition

Comme nous l'avons mentionné précédemment, des recherches récentes révèlent qu'il existe des corrélations autres que l'intrication, et la discordance quantique quantifie les corrélations totales non classiques dans un état quantique. La discordance quantique pourrait également être non nulle pour certains états mixtes séparables. Cela signifie que la séparabilité ne signifie pas l'absence des corrélations quantiques. En général, la définition de l'intrication contient une interprétation opérationnelle indiquant que les états séparables peuvent être préparés par des opérations locales et de la communication classique entre les sous-systèmes, contrairement aux états intriqués. Cependant, il a été démontré que ce n'est pas le cas pour la discordance quantique car les communications classiques peuvent donner lieu à des corrélations quantiques. Cela peut être compris en considérant que les états réduits des sous-systèmes peuvent être physiquement mélangés, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, toutes les informations qui s'y rapportent ne peuvent pas être récupérées localement. Ce phénomène n'a pas d'analogue classique, ce qui explique la quantité des corrélations dans l'état séparable avec la discordance non nulle. Au-delà de son importance en tant que quantificateur des corrélations purement quantique, la discordance quantique est devenue de plus en plus importante dans plusieurs domaines ainsi que dans les applications en science de l'information quantique. En physique de la matière condensée, les corrélations quantiques dans les états séparables caractérisent, même à température finie, une transition de phase quantique [100]. Concernant les systèmes biologiques, il a été suggéré que les corrélations quantiques de type discordance pourraient jouer un rôle important dans la photosynthèse [101]. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, il a été démontré que l'effet Unruh détruit le comportement des corrélations quantiques [102]. En outre, il a été suggéré que la discordance quantique, plutôt que l'intrication, est responsable de l'efficacité d'un ordinateur quantique, ce qui est confirmé à la fois théoriquement [99] et expérimentalement [93]. Werlang et ses collègues ont démontré que la discordance quantique est plus robuste

que l'intrication dans les mêmes conditions de l'environnement markovien pour les systèmes quantiques ouverts [103]. De plus, Streltsov et Zurek ont montré que les résultats de mesure ne peuvent pas être parfaitement communiqués par des canaux classiques si l'appareil de mesure est dans un état non classique (un état qui ne contient que des corrélations quantiques). Cela signifie que la perte d'informations se produit même lorsque l'appareil de mesure n'est pas intriqué avec le système, et que la quantité de ces informations perdues s'avère être exactement la discorde quantique [104]. Selon la réf [19], la discorde quantique est définie comme la différence entre deux expressions classiquement équivalentes de l'information mutuelle ; c'est-à-dire l'information mutuelle quantique d'origine (1.56) et l'information mutuelle quantique induite par la mesure locale. Donc, pour un système composite bipartite ρ_{AB} , nous avons

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) := \mathcal{I}(\rho_{AB}) - \mathcal{J}_B(\rho_{AB}), \quad (2.1)$$

où les corrélations totales sont quantifiées par l'information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, et la quantité $\mathcal{J}_B(\rho_{AB})$ est définie comme une mesure des corrélations classiques

$$\mathcal{J}_B(\rho_{AB}) = \max_{\pi_B^j} \left(S(\rho_B) - \sum_j p_{B,j} S(\rho_{B,j}) \right), \quad (2.2)$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des opérateurs de mesure à valeur positive π_B^j sur le sous-système B qui satisfont $\sum_j \pi_B^{j\dagger} \pi_B^j = \mathbb{1}$, $S(\rho)$ est l'entropie de von Neumann et $S(\rho_{B,j})$ est l'entropie conditionnelle,

$$p_{B,j} = \text{Tr}_{AB} \left[(I \otimes \pi_B^j) \rho_{AB} (I \otimes \pi_B^{j\dagger}) \right] \quad \text{et} \quad \rho_{B,j} = \frac{\text{Tr}_A \left[(I \otimes \pi_B^j) \rho_{AB} (I \otimes \pi_B^{j\dagger}) \right]}{p_{B,j}}, \quad (2.3)$$

sont la probabilité et l'état conditionnel du sous-système B associés au résultat j . Il convient de noter que la discorde quantique est mesurée par de fortes mesures qui conduisent à la perte de sa cohérence, mais elle révèle plus de corrélations quantiques que l'intrication. De plus, l'idée principale du calcul de la discorde quantique est de quantifier la quantité d'informations qui ne sont pas accessibles par une mesure locale, en extrayant certaines informations sur le sous-système A en mesurant l'état du sous-système B sans perturber l'état A . Semblable à l'intrication, la discorde quantique satisfait les propriétés suivantes

- Pr₁** : La discorde quantique est toujours définie positive $\mathcal{Q}(\rho_{AB}) \geq 0$. Ceci est le résultat direct de la concavité de l'entropie conditionnelle.
- Pr₂** : La discorde quantique est inférieure ou égale à l'entropie de von Neumann du sous-système non mesuré (dans notre cas le sous-système A), alors $\mathcal{Q}(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A)$.
- Pr₃** : la discorde quantique $\mathcal{Q}(\rho_{AB})$ s'annulent si et seulement si l'état ρ_{AB} est classiquement corrélé (ρ_A et ρ_B sont composés d'états orthogonaux), c'est-à-dire

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j} p_{ij} |i\rangle \langle i| \otimes |j\rangle \langle j|. \quad (2.4)$$

- Pr₄** : La discorde quantique n'est pas symétrique car l'entropie conditionnelle n'est pas symétrique. Cela signifie que nous ne trouvons pas la même valeur de la discorde quantique si nous changeons le sous-système mesuré B par le sous-système A . Donc $\mathcal{Q}_A(\rho_{AB}) \neq \mathcal{Q}_B(\rho_{AB})$.

- Pr₅** : Pour tous les états bipartites purs, la discorde quantique se réduit à l'entropie d'intrication

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B). \quad (2.5)$$

Pr₆ : La discordance quantique est invariante sous les transformations unitaires locales. Nous avons donc

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = \mathcal{Q}\left((U_A \otimes U_B) \rho_{AB} (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)\right). \quad (2.6)$$

La principale difficulté lors du calcul de la discordance quantique, pour plusieurs systèmes quantiques bipartites, réside dans la minimisation de l'entropie conditionnelle. Cela explique pourquoi il n'existe pas de méthode simple pour calculer explicitement la discordance quantique pour des états mixtes arbitraires. Par la suite, nous discuterons certains résultats liés aux expressions analytiques de la discordance quantique obtenues pour certaines formes spéciales des états de type qubit-qubit.

2.1.2 La discordance quantique pour les états bipartites de forme X

Ici, nous expliquons brièvement comment calculer analytiquement la discordance quantique pour les états X à deux qubits en utilisant la méthode proposée par Wang dans la réf [105]. Tout d'abord, la matrice densité (1.99) possède les valeurs propres suivantes

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\rho_{11} + \rho_{44} \pm \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2} \right],$$

et

$$\eta_{3,4} = \frac{1}{2} \left[\rho_{22} + \rho_{33} \pm \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2} \right].$$

Dans ce cas, l'entropie de von Neumann des matrices réduites ρ_A et ρ_B est donnée par

$$S(\rho_A) = -(\rho_{11} + \rho_{22}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{22}) - (\rho_{33} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{33} + \rho_{44}), \quad (2.7)$$

et

$$S(\rho_B) = -(\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) - (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{22} + \rho_{44}). \quad (2.8)$$

Pour minimiser les corrélations classiques (2.2), nous prenons un ensemble complet de mesures projectives sur le sous-système B qui sont représentées par les opérateurs $\{\pi_B^j = |B_j\rangle\langle B_j|\}$ ($j = 1, 2$) avec

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \\ |B_2\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle - e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$. La probabilité $p_{B,j}$ correspondant au résultat j et les deux valeurs propres de $\rho_{B,j}$ après la mesure locale sont données par

$$p_{B,j} = \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^j \cos\theta (1 - 2\rho_{11} - 2\rho_{33}) \right] \quad (2.10)$$

et

$$\eta_{\pm}(\rho_{B,j}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{v_j}}{p_{B,j}} \right), \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{1}{4} \left[1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}) + (-1)^j \cos\theta (1 - 2\rho_{11} - 2\rho_{44}) \right]^2 \\ &\quad + \sin^2\theta \left[|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2 - 2|\rho_{14}||\rho_{23}|\sin(2\varphi + \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Alors, l'entropie de $\rho_{B,j}$ peut être écrite en termes de valeurs propres comme suit

$$S(\rho_{B,j}) = h(\eta_+(\rho_{B,j})), \quad (2.13)$$

où $h(x)$ est l'entropie binaire de Shannon. Ainsi, l'entropie conditionnelle est

$$S(\rho_{A|B}) = \sum_{j=1}^2 p_{B,j} S(\rho_{B,j}) = p_{B,1} S(\rho_{B,1}) + p_{B,2} S(\rho_{B,2}). \quad (2.14)$$

En définissant des dérivées partielles de cette entropie conditionnelle par rapport à θ et φ égales à zéro. Après un calcul simple, il est facile de montrer que l'entropie conditionnelle est minimale lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, $p_{B,1} = p_{B,2}$ et $S(\rho_{B,1}) = S(\rho_{B,2})$. Par conséquent, la valeur minimale de l'entropie conditionnelle est

$$\zeta_1 = h\left(\frac{1 + \sqrt{(1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}))^2 + 4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2}}{2}\right). \quad (2.15)$$

La deuxième valeur extrémale est obtenue lorsque $\theta = 0$ pour toute valeur arbitraire de φ et la deuxième valeur minimale de l'entropie conditionnelle est

$$\zeta_2 = -\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} - h(\rho_{11} + \rho_{33}). \quad (2.16)$$

Alors, l'expression explicite de corrélation classique dans l'état (1.99) prend la forme suivante

$$\mathcal{J}_B(\rho_{AB}) = \max(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2), \quad (2.17)$$

avec

$$\mathcal{J}_i = h(\rho_{11} + \rho_{22}) - \zeta_i. \quad (2.18)$$

Enfin, l'expression analytique de la discorde quantique peut être déterminée à partir de l'équation (2.1) comme

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = \min(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2), \quad (2.19)$$

avec

$$\mathcal{Q}_i = h(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^4 \eta_i \log_2 \eta_i + \zeta_i. \quad (2.20)$$

2.1.3 Relation de Koashi-Winter

Considérons un système bipartite $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ et sa purification $|\psi\rangle_{ABE} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$. La dimension de l'espace global est $\dim(\mathcal{H}_{ABE}) = \dim(\mathcal{H}_A) \cdot \dim(\mathcal{H}_B) \cdot \text{Rang}(\rho_{AB})$. Il est important de souligner que le système de purification E (l'environnement) est constitué par l'univers moins les sous-systèmes A et B , puisque, dans ce cas, ρ_{ABE} est une matrice densité pur. Cette purification créant des corrélations quantiques entre le système AB et le système de purification E et la distribution des corrélations d'une purification tripartite est régie par la relation de Koashi-Winter [106]. Cette relation est introduite par Koashi et Winter pour comprendre la distribution de l'intrication entre les deux sous-systèmes. Ils ont montré l'existence d'une relation monogame importante entre l'intrication de formation $E_f(\rho)$ (1.89) et la corrélation classique $\mathcal{J}(\rho)$ (2.2). Elle est donnée par

$$E_f(\rho_{AB}) + \mathcal{J}_B(\rho_{BE}) = S(\rho_B), \quad (2.21)$$

où $E_f(\rho_{AB})$ est l'intrication de formation entre les sous-systèmes A et B , $\mathcal{J}_B(\rho_{BE})$ représente les corrélations classiques entre les sous-systèmes B et E . L'équation (2.21) est valide si nous

effectuons la mesure locale sur le sous-système B . De même, si nous effectuons une mesure sur le sous-système A , nous avons

$$E_f(\rho_{AB}) + \mathcal{J}_A(\rho_{AE}) = S(\rho_A). \quad (2.22)$$

Notez que l'entropie de von Neumann $S(\rho_A)$ mesure la quantité de corrélation (classique et/ou quantique) entre le sous-système A avec le monde extérieur. Si nous divisons le monde extérieur en deux parties, le sous-système B et le système de purification E , alors la quantité de corrélation quantique entre A et B , plus la quantité de corrélation classique entre A et la partie de purification E , doit être égale à $S(\rho_A)$. Grâce au changement symétrique des qubits, c'est-à-dire que le sous-système A devient B , B devient E et E devient A , les équations (2.21) et (2.22), respectivement, deviennent comme suit

$$E_f(\rho_{EA}) + \mathcal{J}_A(\rho_{AB}) = S(\rho_A), \quad (2.23)$$

et

$$E_f(\rho_{BE}) + \mathcal{J}_B(\rho_{BA}) = S(\rho_B). \quad (2.24)$$

On remplace l'expression de corrélation classique en fonction de l'intrication de formation dans l'équation (2.1), la discordance quantique devient alors

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}) - E_f(\rho_{BE}). \quad (2.25)$$

En utilisant l'équation (2.24), nous pouvons trouver une autre expression explicite de la discordance quantique pour les systèmes qubit-qubit de type X et de rang-2. Pour ce type d'état, la matrice densité (1.99) peut également être écrite dans la base de calcul $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$ sous la forme suivante :

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{14} & 0 & 0 \\ \rho_{41} & \rho_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{22} & \rho_{23} \\ 0 & 0 & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} = \rho_{X_1} + \rho_{X_2}, \quad (2.26)$$

avec les matrices ρ_{X_1} et ρ_{X_2} sont données par

$$\rho_{X_1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{14} \\ \rho_{41} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \rho_{X_2} = \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Dans cette écriture, les valeurs propres (2.1.2) et (2.1.2) deviennent

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{X_1}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{X_1})\right)^2 - \det(\rho_{X_1})}, \quad (2.28)$$

et

$$\eta_{3,4} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{X_2}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\text{Tr}(\rho_{X_2})\right)^2 - \det(\rho_{X_2})}, \quad (2.29)$$

où

$$\det(\rho_{X_1}) = \rho_{11}\rho_{44} - \rho_{14}\rho_{41}, \quad \text{et} \quad \det(\rho_{X_2}) = \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{23}\rho_{32}. \quad (2.30)$$

Il est claire que pour ρ_X soit de rang 2, il suffit que $\det(\rho_{X_1}) = 0$ et $\det(\rho_{X_2}) = 0$. Par conséquent, les valeurs propres non nulles de la matrice densité ρ_X sont

$$\eta_1 = \rho_{11} + \rho_{44} \quad \text{et} \quad \eta_3 = \rho_{22} + \rho_{33}. \quad (2.31)$$

Par la décomposition spectrale de la matrice densité ρ_X , nous trouvons

$$\rho_X = \eta_1 |\psi_1\rangle_{AB} \langle\psi_1| + \eta_3 |\psi_2\rangle_{AB} \langle\psi_2|, \quad (2.32)$$

où les vecteurs propres $|\psi_1\rangle_{AB}$ et $|\psi_2\rangle_{AB}$ propres sont donnés par

$$|\psi_1\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{|\rho_{41}|^2 + |\rho_{44}|^2}} (\rho_{41} |00\rangle + \rho_{44} |11\rangle), \quad (2.33)$$

$$|\psi_2\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{|\rho_{23}|^2 + |\rho_{33}|^2}} (\rho_{23} |00\rangle + \rho_{33} |11\rangle). \quad (2.34)$$

En utilisant la méthode de purification (voir le premier chapitre), l'état pur $|\psi\rangle_{ABE}$ est donné par

$$|\psi\rangle_{ABE} = \sqrt{\eta_1} |\psi_1\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\eta_3} |\psi_2\rangle_{AB} \otimes |1\rangle_E. \quad (2.35)$$

Pour appliquer la relation Kaochi-Winter dans ce cas, nous devons calculer l'intrication de formation de l'état ρ_{BE} , Après un calcul simple, nous avons

$$E_f(\rho_{BE}) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - |\mathcal{C}(\rho_{BE})|^2}}{2}\right), \quad (2.36)$$

avec

$$|\mathcal{C}(\rho_{BE})|^2 = \frac{4(\rho_{11} + \rho_{44})(\rho_{22} + \rho_{33})(\rho_{41}\rho_{23} - \rho_{33}\rho_{44})}{(|\rho_{41}|^2 + |\rho_{44}|^2)(|\rho_{23}|^2 + |\rho_{33}|^2)}. \quad (2.37)$$

Enfin, nous constatons que l'expression explicite de la discorde quantique s'écrit comme suit

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = h(\rho_{11} + \rho_{22}) - h(\rho_{11} + \rho_{44}) - h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4(\rho_{11} + \rho_{44})(\rho_{22} + \rho_{33})(\rho_{41}\rho_{23} - \rho_{33}\rho_{44})}{(|\rho_{41}|^2 + |\rho_{44}|^2)(|\rho_{23}|^2 + |\rho_{33}|^2)}}\right). \quad (2.38)$$

2.2 La discorde quantique géométrique

Comme l'évaluation de la discorde quantique entropique implique une procédure d'optimisation, les résultats analytiques ne sont connus que pour quelques familles d'états à deux qubits. Pour surmonter ce problème, le fait que la discorde quantique entropique s'annule pour les états classiquement corrélés a été utilisé pour définir une version géométrique de la discorde. Ceci en analogie complète avec les mesures géométriques de l'intrication qui sont définies en termes de distances par rapport à l'ensemble des états séparables. Dans cette direction, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une discorde quantique non nulle a été obtenue et une méthode géométrique de quantification de la discorde quantique a été proposée [95]. Pour commencer, nous énumérons quelques notations que nous avons utilisées. Nous notons ρ l'opérateur densité d'un système bipartite AB et $\Omega_0 = \sum_k p_k \Pi_k^A \otimes \rho_k^B$ est l'ensemble des états de discorde nulle, avec Π_k^A est le projecteur orthogonal dans l'espace de Hilbert H_A , et ρ_k^B est un opérateur densité arbitraire dans l'espace de Hilbert H_B , $0 \leq p_k \leq 1$ et $\sum_k p_k = 1$. De plus, $\|Z\|_p = \left[\text{Tr}(Z^\dagger Z)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}$ est la norme p de Schatten, qui se réduit à la norme de Hilbert Schmidt pour $p = 2$ et à la norme de trace pour $p = 1$.

La discorde quantique géométrique quantifie la quantité de corrélation quantique présente dans un état quantique à l'aide de la distance de Schatten entre l'état considéré ρ et son plus proche état classiquement corrélé χ ,

$$\mathcal{Q}_{g_p}(\rho_{AB}) = \min_{\chi \in \Omega_0} (\|\rho - \chi\|_p)^p, \quad (2.39)$$

De nombreuses mesures géométriques via différentes normes de Schatten ont été proposées. Nous citons ici deux mesures de la discorde quantique géométrique la plus utilisées. Ils sont définis respectivement par la norme de Hilbert-Schmidt et par la norme de trace.

Nous commençons par la détermination analytique de la discordance quantique géométrique basée sur la distance de Hilbert-Schmidt. Elle est définie par [95]

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho_{AB}) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|_2^2, \quad (2.40)$$

où le minimum est effectué sur tous les états classiques possibles χ , et $\|\rho - \chi\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\rho - \chi)^2}$ est la norme de Hilbert-Schmidt. Le calcul de cette mesure nécessite un processus de minimisation plus simple. Nous montrerons ici comment évaluer cette quantité pour un état arbitraire à deux qubits. En effet, un état général à deux qubits peut être écrit dans la représentation de Bloch avec un triple $\{\vec{x}, \vec{y}, T\}$ comme

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 y_i \mathbb{1} \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right), \quad (2.41)$$

où $x_i = \text{tr}(\rho(\sigma_i \otimes \mathbb{1}))$, $y_i = \text{tr}(\rho(\mathbb{1} \otimes \sigma_i))$ sont les composantes des vecteurs de Bloch locaux, $T_{ij} = \text{tr}(\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j))$ sont les composantes du tenseur de corrélation et σ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) sont les matrices de spin de Pauli. Comme nous l'avons vu précédemment, les états de discordance nulle sont de la forme

$$\chi = \sum_{k=1}^m p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \otimes \rho_k. \quad (2.42)$$

Pour les systèmes à deux qubits, l'état de discordance nulle est de la forme

$$\chi = p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| \otimes \rho_1 + p_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \otimes \rho_2, \quad (2.43)$$

où $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ est une base orthonormée pour un seul qubit. Pour simplifier les calculs, nous introduisons la quantité $t = p_1 - p_2$ et les trois vecteurs $\vec{e} = \langle \psi_1 | \vec{\sigma} | \psi_1 \rangle$ et $\vec{s}_{\pm} = \text{Tr}(p_1 \rho_1 \pm p_2 \rho_2) \vec{\sigma}$. Ainsi, les vecteurs de Bloch locaux du premier et du deuxième qubit sont réduits à $\vec{x} = t\vec{e}$ et $\vec{y} = \vec{s}_+$, respectivement. Il est également facile de démontrer que le tenseur de corrélation devient $T = \vec{e} \cdot \vec{s}_-^t$. Par conséquent, l'état de discordance nulle χ a une représentation de Bloch qui est associée au triple $\{t\vec{e}, \vec{s}_+, \vec{e} \cdot \vec{s}_-^t\}$ où $\|\vec{e}\|^2 = 1$, $\|\vec{s}_{\pm}\|^2 \leq 1$ et $t \in [-1, 1]$. En se basant sur l'expression de la distance de Hilbert-Schmidt entre les états ρ et χ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\rho - \chi\|_2^2 &= \|\rho\|_2^2 - 2\text{Tr}\rho\chi + \|\chi\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + \|\vec{x}\|_2^2 + \|\vec{y}\|_2^2 + \|T\|_2^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 + t\vec{x}\vec{e} + \vec{y}\vec{s}_+ + \vec{e}T\vec{s}_-) \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 + t^2 + \|\vec{s}_+\|_2^2 + \|\vec{s}_-\|_2^2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pour trouver une distance de Hilbert-Schmidt minimale entre l'état considéré ρ et l'état de discordance nulle χ , nous optimisons la distance en fonction des trois paramètres \vec{s}_{\pm} et t . En ce sens, le minimum est obtenu lorsque la dérivée de la distance par rapport à ces paramètres est nulle. Ceci s'écrit alors

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|_2^2}{\partial t} = \frac{1}{2} (t - \vec{x}\vec{e}) = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|_2^2}{\partial \vec{s}_+} = \frac{1}{2} (\vec{s}_+ - \vec{y}) = 0, \quad (2.46)$$

et

$$\frac{\partial \|\rho - \chi\|_2^2}{\partial \vec{s}_-} = \frac{1}{2} (\vec{s}_- - T^t \vec{e}) = 0. \quad (2.47)$$

La solution de ces trois équations ci-dessous donnent $t = \vec{x}\vec{e}$, $\vec{s}_+ = \vec{y}$ et $\vec{s}_- = T^t\vec{e}$. Nous remplaçons ces solutions dans l'équation (2.44) pour obtenu

$$\|\rho - \chi\|_2^2 = \frac{1}{4} [\|\vec{x}\|_2^2 + \|T\|_2^2 - \vec{e}(\vec{x}\vec{x}^t + TT^t)\vec{e}]. \quad (2.48)$$

L'équation (2.48) donne une valeur minimale lorsque \vec{e} est un vecteur propre de la matrice $K = \vec{x}\vec{x}^t + TT^t$ avec la plus grande valeur propre. Par conséquent, l'expression explicite de la discorde quantique géométrique pour une matrice densité générale (2.41) peut être obtenue comme

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho) = \frac{1}{4} (\|x\|_2^2 + \|T\|_2^2 - K_{\max}), \quad (2.49)$$

où K_{\max} est la valeur propre maximale de la matrice K . Pour les matrices densités arbitraires d'un système quantique à deux qubits,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

il est facile de voir que la matrice de corrélation T s'écrit en fonctions des éléments de la matrice densité ρ comme

$$T = \begin{pmatrix} \rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{41} & i(\rho_{14} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41}) & \rho_{13} - \rho_{24} + \rho_{31} - \rho_{42} \\ i(\rho_{14} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{41}) & -\rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41} & i(\rho_{13} - \rho_{24} - \rho_{31} + \rho_{42}) \\ \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{34} - \rho_{43} & i(\rho_{12} - \rho_{21} - \rho_{34} + \rho_{43}) & \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

et $x = \{\rho_{13} + \rho_{24} + \rho_{31} + \rho_{42}, i(\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{31} + \rho_{42}), \rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44}\}$. En utilisant ces résultats, nous trouvons

$$\|x\|_2 + \|T\|_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (2.52)$$

avec λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de la matrice K . Cela conduit à une expression beaucoup plus simple de la discorde quantique géométrique et il devient :

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho) = \frac{1}{4} \min \{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3\}. \quad (2.53)$$

Dans la théorie de l'informations quantique, l'ensemble des états X intervient dans de nombreux contextes. Il inclue des états de Bell purs ainsi que des états mixtes de Werner. Il est simple de calculer l'expression analytique de la discorde quantique géométrique pour des matrice densité de type (1.99). Après une simplification algébrique, nous obtenons

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho_X) = \frac{1}{4} [8(|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2) + 2((\rho_{11} - \rho_{33})^2 + (\rho_{22} - \rho_{44})^2) - \max\{k_1 + k_2 + k_3\}], \quad (2.54)$$

avec

$$k_1 = 4(|\rho_{23}|^2 - |\rho_{14}|^2), \quad k_2 = 4(|\rho_{23}|^2 + |\rho_{14}|^2), \quad k_3 = 2((\rho_{11} - \rho_{33})^2 + (\rho_{22} - \rho_{44})^2). \quad (2.55)$$

La relation de la discorde quantique géométrique (2.53) s'écrit dans ce cas comme

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho) = \frac{1}{4} \min \{k_1 + k_2, k_2 + k_3, k_1 + k_3\}. \quad (2.56)$$

Pour les systèmes bipartites de dimension 2×2 , la discorde quantique géométrique est liée à la discorde quantique entropique (2.1) et à la négativité (1.103) par les inégalités suivantes [107, 108] :

$$2\mathcal{Q}_{g_2}(\rho) \geq \mathcal{Q}^2(\rho), \quad \text{et} \quad 2\mathcal{Q}_{g_2}(\rho) \geq \mathcal{N}^2(\rho). \quad (2.57)$$

Malgré sa simplicité de calcul, il a été souligné récemment que la discorde quantique géométrique basée sur la norme de Hilbert-Schmidt ne peut pas être considérée comme une bonne mesure des corrélations quantiques, car elle peut augmenter sous des opérations locales agissant sur le sous-système non mesuré, et elle est également non contractive sous les applications qui préservant les traces [96]. Ce fait a conduit à une redéfinition et à des études plus approfondies de la discorde quantique géométrique. L'une de ces redéfinitions est la discorde quantique géométrique basée sur la distance de trace, qui utilise la norme-1 de Schatten qui obéit à la propriété de contractivité et qui est invariante sous des transformations unitaires. En utilisant l'équation (2.39) pour $p = 1$, la discorde quantique géométrique, également appelée la discorde quantique de trace, se réduit à [97, 109, 110]

$$\mathcal{Q}_{g_T}(\rho_{AB}) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|_1, \quad (2.58)$$

où $\|Z\|_1 = \text{Tr} \left[\sqrt{Z^\dagger Z} \right]$ désigne la norme de trace (ou norme-1 de Schatten). L'expression de la discorde quantique basée sur la distance trace à été dérivée analytiquement pour les états X arbitraires à deux qubits, et jusqu'à présent, aucun résultat analytique n'a été trouvé pour des états quantiques généraux. D'après les résultats rapportés dans la référence [110], l'expression explicite de la discorde quantique géométrique basée sur la distance trace, pour les états ρ_X de type (1.99), s'écrit sous la forme

$$\mathcal{Q}_{g_T}(\rho_X) = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 \max\{\gamma_3^2, \gamma_2^2 + x_3^2\} - \gamma_2^2 \min\{\gamma_3^2, \gamma_1^2\}}{\max\{\gamma_3^2, \gamma_2^2 + x_3^2\} - \min\{\gamma_3^2, \gamma_1^2 + \gamma_1^2 - \gamma_2^2\}}}, \quad (2.59)$$

avec

$$\gamma_1 = 2(\rho_{32} + \rho_{41}), \quad \gamma_2 = 2(\rho_{32} - \rho_{41}), \quad \gamma_3 = 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}), \quad x_3 = 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1. \quad (2.60)$$

A titre d'exemple de ces différentes formes de discorde quantique : entropique (2.1), géométrique via la norme de Hilbert-Schmidt (2.40) et via la norme de trace (2.58), on considère la famille d'états X qui sont diagonaux dans la base de Bell et qui sont paramétrisés par trois paramètres c_i ($i = 1, 2, 3$). Les matrices densité correspondantes sont de la forme

$$\rho_{BD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_{4 \times 4} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right), \quad (2.61)$$

où $\mathbb{1}_{4 \times 4}$ est la matrice d'identité et $0 \leq c_i \leq 1$. La forme matricielle de ces états est donnée par

$$\rho_{BD} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

qui sont des cas particuliers des états X . L'état χ le plus proche est toujours un état de Bell-diagonale avec un seul paramètre non nul c_k correspondant à $c_k = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$. Alors en utilisant la relation (2.59), la discorde géométrique basée sur la distance trace des états de Bell-diagonaux peut être obtenue explicitement comme

$$\mathcal{Q}_{g_T}(\rho_{BD}) = \text{int}\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}, \quad (2.63)$$

où $\text{int}\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ désigne la valeur intermédiaire parmi les valeurs absolues de c_1 , c_2 et c_3 . Dans ce type d'états, il est également facile de déterminer l'expression analytique de la discordance quantique entropique et de la discordance géométrique de Hilbert-Schmidt à l'aide des résultats obtenus dans les sections précédentes. Un calcul simple conduit à

$$\mathcal{Q}(\rho_{BD}) = \log_2 \left[\frac{4\lambda_{00}^{\lambda_{00}} \lambda_{01}^{\lambda_{01}} \lambda_{10}^{\lambda_{10}} \lambda_{11}^{\lambda_{11}}}{(1-c_+)^{\frac{(1-c_+)}{2}} (1+c_+)^{\frac{(1+c_+)}{2}}} \right], \quad (2.64)$$

avec

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4} \left[1 + (-1)^i c_1 - (-1)^{i+j} c_2 + (-1)^j c_3 \right], \quad (2.65)$$

et

$$\mathcal{Q}_{g_2}(\rho_{BD}) = \frac{1}{4} \left[c_-^2 + \mathcal{Q}_{g_T}^2(\rho_{BD}) \right], \quad (2.66)$$

où $c_+ = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ et $c_- = \min\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ représente respectivement le maximum et le minimum parmi les valeurs absolues des paramètres c_1 , c_2 et c_3 .

2.3 La discordance quantique linéaire

Malgré les nombreux efforts de la communauté scientifique, une expression analytique de la discordance quantique basée sur l'entropie de von Neumann fait encore défaut, même pour les systèmes à deux qubits. Très récemment, il a été montré que la procédure d'optimisation pour obtenir la discordance quantique est possible par l'approximation de l'entropie linéaire. Ceci est fait en remplaçant l'entropie de von Neumann par l'entropie linéaire dans l'expression des corrélations classiques. Cela fournit un bon outil pour trouver l'expression analytique de la discordance quantique des états bipartites de type qudit-qubit [24]. Il a été trouvé que la discordance quantique basée sur l'entropie linéaire a un lien profond avec la discordance d'origine définie par l'entropie de von Neumann dans laquelle l'écart moyen est de l'ordre de 10^{-4} . Dans cette section, nous proposons deux méthodes analytiques fiables pour déterminer les corrélations non-classiques basées sur l'entropie linéaire. La première méthode concerne des états bipartites de type qubit-qubit et la deuxième méthode concerne des états bipartites arbitraires de type qudit-qubit. Tout d'abord, nous rappelons que l'entropie linéaire d'un état ρ est donnée par

$$S_2(\rho) = 2 \left[1 - \text{tr}(\rho^2) \right]. \quad (2.67)$$

Pour un système à d niveaux, un état qudit dans la représentation de Fano-Bloch est donné par $\rho = (\mathbb{1}_d + \vec{r} \cdot \vec{\gamma})/d$, où $\mathbb{1}_d$ désigne la matrice d'identité de dimension $d \times d$, \vec{r} est un vecteur réel de dimension $d^2 - 1$, et $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{d^2-1})^T$ est le vecteur des générateurs de l'algèbre de Lie $SU(d)$. Alors, l'entropie linéaire d'un état qudit devient

$$S_2 \left(\frac{\mathbb{1}_d + \vec{r} \cdot \vec{\gamma}}{d} \right) = \frac{2d^2 - 2d - 4|\vec{r}|^2}{d^2}. \quad (2.68)$$

De même, un état qubit peut être écrit comme $\rho = (\mathbb{1}_2 + \vec{r}_B \cdot \vec{\sigma})/2$, où \vec{r}_B est un vecteur tridimensionnel et $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ désigne les opérateurs de Pauli. En termes d'entropie linéaire (2.67), nous pouvons définir la corrélation classique (2.2) comme suit

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \max_{\pi_{B^j}} \left(S_2(\rho_A) - \sum_j p_{B,j} S_2(\rho_{B,j}) \right), \quad (2.69)$$

Bien que la corrélation classique (2.2) et, par conséquent, la discordance quantique (2.1) soit extrêmement difficile à calculer en termes d'entropie de von Neumann, la corrélation classique

(2.69) exprimée en termes d'entropie linéaire peut être calculée analytiquement. Considérons un système quantique bipartite ρ_{AB} formé de deux sous-système ; le sous-système ρ_A de dimension d et le sous-système ρ_B de dimension 2. Pour trouver l'expression explicite de la corrélation classique en termes d'entropie linéaire, nous écrivons d'abord un état quantique bipartite ρ_{AB} comme [111]

$$\rho_{AB} = \Lambda_\rho \otimes \mathbb{1}_B (|v_{B'B}\rangle \langle v_{B'B}|), \quad (2.70)$$

où $|v_{B'B}\rangle$ est la purification symétrique à deux qubits de l'opérateur de densité réduite B sur un système auxiliaire B' , et Λ_ρ est un canal qudit (une application complètement positive et préservant la trace), qui convertit un état qubit B' en l'état qudit A . Nous notons que la purification symétrique à deux qubits signifie que les deux matrices densités réduites sont égales, c'est-à-dire $v_{B'} = v_B = \rho_B$. L'action d'un canal qudit Λ sur un état qubit ρ peut être écrite comme

$$\Lambda_\rho = \frac{1}{d} \left[\mathbb{1}_d + (\mathbf{L}\vec{r} + \vec{l}) \cdot \vec{\gamma} \right], \quad (2.71)$$

où \mathbf{L} désigne une matrice réelle de dimension $3 \times (d^2 - 1)$ et leur éléments sont définis par $L_{ij} = \frac{1}{d} \text{Tr} [\Lambda(\sigma^i) \cdot \gamma^j]$ (avec $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, \dots, d^2 - 1$), et \vec{l} est un vecteur tridimensionnel. En utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur de densité réduite ρ_B , c-à-d $\rho_B = \sum_{i=0,1} \lambda_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$, il est simple de vérifier que $|v_{B'B}\rangle = \sum_{i=0,1} \sqrt{\lambda_i} |\varphi_i\rangle |\varphi_i\rangle$. Dans cette base de Pauli, les décompositions possibles de ρ_B en états purs sont représentées par tous les ensembles possibles de probabilités $\{p_i\}$ et de vecteurs unitaires $\{r_i\}$ pour lesquels $r_B = \sum_i p_i r_i$. L'action d'un canal qudit Λ sur l'état de sous-système B devient

$$\rho_B = \frac{\mathbb{1}_2 + \vec{r}_B \vec{\sigma}}{2}, \quad \xrightarrow{\Lambda: \text{qubit} \rightarrow \text{qudit}} \quad \Lambda(\rho_B) = \frac{\mathbb{1}_d + (\mathbf{L}\vec{r}_B + \vec{l}) \cdot \vec{\gamma}}{d}, \quad (2.72)$$

et en utilisant (2.68), l'entropie linéaire correspondante s'écrit

$$S_2(\Lambda(\rho_B)) = \frac{1}{d^2} \left(2d^2 - 2d - 4 (\mathbf{L}\vec{r}_B + \vec{l})^T (\mathbf{L}\vec{r}_B + \vec{l}) \right). \quad (2.73)$$

Les entropies linéaires de l'action d'un canal qudit sur les états purs $|\varphi_i\rangle$ ($i = 1, 2$) s'obtiennent à partir de (2.68) et sont

$$S_2(\Lambda(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|)) = \frac{1}{d^2} \left(2d^2 - 2d - 4 (\mathbf{L}\vec{r}_i + \vec{l})^T (\mathbf{L}\vec{r}_i + \vec{l}) \right). \quad (2.74)$$

En utilisant ces résultats, il est simple de voir que la matrice densité réduite de l'état du qudit ρ_A est exactement égale à l'action d'un canal qudit sur la matrice densité réduite ρ_B , cela signifie que $\rho_A = \Lambda(\rho_B)$;

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \left[\sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \Lambda(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|) \otimes (|\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|) \right] \\ &= \langle \varphi_k | \left[\sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \Lambda(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|) \otimes (|\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|) \right] | \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \Lambda(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_j|) \underbrace{\langle \varphi_k | \varphi_i \rangle}_{\delta_{ki}} \underbrace{\langle \varphi_j | \varphi_k \rangle}_{\delta_{jk}} \\ &= \sum_i \lambda_i \Lambda(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|) = \Lambda(\rho_B). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Ainsi, la corrélation classique quantifiée par l'entropie linéaire coïncide avec la capacité linéaire Holevo pour le canal qubit $\chi_2(\rho_B, \Lambda)$ (voir l'équation (4) de la référence [111]). Nous obtenons donc

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \max_{\{p_i, \varphi_i\}} \left[S_2(\Lambda(\rho_B)) - \sum_i p_i S_2(\Lambda(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)) \right], \quad (2.76)$$

où le maximum est pris sur toutes les décompositions spectrales possibles de la matrice densité réduite ρ_B . En remplaçant les entropies linéaires par leurs expressions, on obtient alors

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \frac{4}{d^2} \max_{\{p_i, \varphi_i\}} \left[p_1 \|\mathbf{L}\vec{r}_1 + \vec{l}\|^2 + p_2 \|\mathbf{L}\vec{r}_2 + \vec{l}\|^2 - \|\mathbf{L}\vec{r}_B + \vec{l}\|^2 \right]. \quad (2.77)$$

En substituant $r_i = r_B + X_i$, on peut facilement vérifier que le calcul de $\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB})$ se réduit à déterminer le couple $\{p_i, X_i\}$ sous les conditions $\sum_i p_i X_i = 0$ et $\|r_B + X_i\| = 1$. Dans cette image, l'équation (2.77) devient

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \frac{4}{d^2} \max_{\{p_i, X_i\}} \left[\sum_i p_i X_i^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} X_i \right]. \quad (2.78)$$

Supposons, sans perte de généralité, que la matrice $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ est diagonale avec des éléments diagonaux $\lambda^x \geq \lambda^y \geq \lambda^z$, alors $\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \text{diag}\{\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z\}$ et les contraintes $\|r_B + X_i\| = 1$ conduisent à

$$(X_i^x)^2 = 1 - \|r_B\|^2 - 2r_B^T X_i - (X_i^y)^2 - (X_i^z)^2. \quad (2.79)$$

En remplaçant ceci dans l'équation (2.78), nous obtenons

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \frac{4}{d^2} \left[\lambda^x (1 - \|r_B\|^2) + \max_{\{p_i, X_i\}} \sum_i p_i \left((\lambda^y - \lambda^x) (X_i^y)^2 + (\lambda^z - \lambda^x) (X_i^z)^2 \right) \right]. \quad (2.80)$$

La seconde partie de cette expression est inférieure ou égale à zéro, car $\lambda^x \geq \lambda^y \geq \lambda^z$. Elle est évidemment maximale si l'on choisit $X_i^y = X_i^z = 0$ pour chaque i . Sachant que $S_2(\rho_B) = 1 - \|r_B\|^2$, l'expression analytique de la corrélation classique pour des états quantiques arbitraires de type qudit-qubit se réécrit [24]

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = \frac{4}{d^2} \lambda_{\max}(\mathbf{L}^T \mathbf{L}) S_2(\rho_B), \quad (2.81)$$

où $\lambda_{\max}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})$ représente la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$. Il est clair que le calcul de la corrélation classique en termes de l'entropie linéaire nécessite le calcul des éléments de la matrice $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$. La question qui se pose alors est de savoir comment calculer les éléments de la matrice \mathbf{L} ?

2.3.1 Expression analytique de la discorde quantique linéaire pour les états qubit-qubit arbitraire

Dans cette partie, nous présenterons une méthode efficace pour calculer les éléments de la matrice \mathbf{L} pour des systèmes quantiques arbitraires de type qubit-qubit [112]. Dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, la matrice densité des états à deux qubit (2.50) peut être écrite comme

$$\rho_{AB} = \beta_{00} \otimes |0\rangle\langle 0| + \beta_{01} \otimes |0\rangle\langle 1| + \beta_{10} \otimes |1\rangle\langle 0| + \beta_{11} \otimes |1\rangle\langle 1|, \quad (2.82)$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}, & \beta_{01} &= \begin{pmatrix} \rho_{21} & \rho_{23} \\ \rho_{41} & \rho_{43} \end{pmatrix}, \\ \beta_{10} &= \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{32} & \rho_{34} \end{pmatrix}, & \beta_{11} &= \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{24} \\ \rho_{42} & \rho_{44} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.83)$$

Les états purs de l'état ρ_B peuvent être recréés dans cette base comme $|\varphi_0\rangle = (a_0, a_1)^T$ et $|\varphi_1\rangle = (b_0, b_1)^T$, où les a_i et b_i sont des paramètres réels et T désigne la transposition matricielle usuelle. La purification symétrique à deux qubits de l'opérateur de densité réduite ρ_B sur un système de qubit auxiliaire B' conduit à l'état $|r_{B'B}\rangle$ et nous avons

$$|r_{B'B}\rangle \langle r_{B'B}| = \begin{pmatrix} A\bar{A} & AB & A\bar{B} & AD \\ B\bar{A} & B\bar{B} & B\bar{B} & B\bar{D} \\ B\bar{A} & B\bar{B} & B\bar{B} & B\bar{D} \\ D\bar{A} & D\bar{B} & D\bar{B} & D\bar{D} \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

où

$$\begin{cases} A = \sqrt{\lambda_1}a_0^2 + \sqrt{\lambda_2}b_0^2, \\ B = \sqrt{\lambda_1}a_0a_1 + \sqrt{\lambda_2}b_0b_1, \\ D = \sqrt{\lambda_1}a_1^2 + \sqrt{\lambda_2}b_1^2. \end{cases} \quad (2.85)$$

Par conséquent, les éléments de l'équation (2.82) peuvent être exprimés à l'aide des éléments de l'équation (2.84) comme suit

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= A\bar{A}\Lambda(|0\rangle\langle 0|) + A\bar{B}\Lambda(|0\rangle\langle 1|) + B\bar{A}\Lambda(|1\rangle\langle 0|) + B\bar{B}\Lambda(|1\rangle\langle 1|), \\ \beta_{01} &= B\bar{A}\Lambda(|0\rangle\langle 0|) + B\bar{B}\Lambda(|0\rangle\langle 1|) + D\bar{A}\Lambda(|1\rangle\langle 0|) + D\bar{B}\Lambda(|1\rangle\langle 1|), \\ \beta_{10} &= A\bar{B}\Lambda(|0\rangle\langle 0|) + A\bar{D}\Lambda(|0\rangle\langle 1|) + B\bar{B}\Lambda(|1\rangle\langle 0|) + B\bar{D}\Lambda(|1\rangle\langle 1|), \\ \beta_{11} &= B\bar{B}\Lambda(|0\rangle\langle 0|) + B\bar{D}\Lambda(|0\rangle\langle 1|) + D\bar{B}\Lambda(|1\rangle\langle 0|) + D\bar{D}\Lambda(|1\rangle\langle 1|).\end{aligned}\quad (2.86)$$

Les éléments de la matrice \mathbf{L} peuvent être déterminés en résolvant l'équation (2.86) pour obtenir $\Lambda(|i\rangle\langle j|)$ à partir de laquelle on obtient les éléments $L_{ij} = \text{tr}[\Lambda(\sigma_j)\sigma_i]/2$ en termes des éléments de la matrice densité ρ . A titre d'exemple, on prend le cas de l'état de Bell diagonale (2.61) comme dans les mesures précédentes. Dans ce cas précis, nous trouvons

$$\beta_{00} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+c_3 & 0 \\ 0 & 1-c_3 \end{pmatrix}, \quad \beta_{01} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & c_1+c_2 \\ c_1-c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & c_1-c_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{11} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-c_3 & 0 \\ 0 & 1+c_3 \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

et les quatre solutions de système différentiel (2.86) nous donnent

$$\Lambda(|0\rangle\langle 0|) = 2\beta_{00}, \quad \Lambda(|0\rangle\langle 1|) = 2\beta_{01}, \quad \Lambda(|1\rangle\langle 0|) = 2\beta_{10}, \quad \Lambda(|1\rangle\langle 1|) = 2\beta_{11}. \quad (2.89)$$

Cela signifie que $\mathbf{L}^T\mathbf{L} = 4\text{Diag}\{c_1^2, c_2^2, c_3^2\}$. Nous avons aussi $S_2(\rho_B) = 1$, alors la formule analytique de corrélation classique en termes de l'entropie linéaire pour un état de Bell diagonale (2.61) est

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_{BD}) = \max\{c_1^2, c_2^2, c_3^2\}. \quad (2.90)$$

Comme deuxième exemple, considérons maintenant les états à deux qubits suivants

$$\begin{aligned}\rho_x &= \frac{2-x}{6} |00\rangle\langle 00| + \frac{1+x}{6} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{6} |01\rangle\langle 10| \\ &+ \frac{1}{6} |10\rangle\langle 01| + \frac{1+x}{6} |10\rangle\langle 10| + \frac{2-x}{6} |11\rangle\langle 11|,\end{aligned}\quad (2.91)$$

qui sont paramétrés par le paramètre x où $x \in [0, 2]$. Après un simple calcul, nous avons $S_2(\rho_B) = 1$ et l'action de canal qubit $\Lambda(|i\rangle\langle j|)$ est donné par

$$\Lambda(|0\rangle\langle 0|) = \frac{2-x}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1+x}{3}|1\rangle\langle 1|, \quad (2.92)$$

$$\Lambda(|0\rangle\langle 1|) = \frac{1}{3}|1\rangle\langle 0|, \quad \Lambda(|1\rangle\langle 0|) = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 1|, \quad (2.93)$$

$$\Lambda(|1\rangle\langle 1|) = \frac{1+x}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2-x}{3}|1\rangle\langle 1|. \quad (2.94)$$

Nous obtenons alors

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2x}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Par conséquent, la corrélation classique sous l'entropie linéaire de l'état ρ_x devient

$$\mathcal{J}_{2B}(\rho_x) = \max_{x \in [0, 2]} \left\{ \frac{1}{9}, \frac{(1-2x)^2}{9} \right\}. \quad (2.96)$$

D'autre part, en utilisant ces résultats, il est possible de dériver une autre formule analytique de la discordance quantique basée sur l'entropie de von Neumann pour les états à deux qubits de rang-2 autre que ce que nous discutons dans la section précédente. Pour obtenir cette formule, nous devons étudier les relations entre l'intrication de formation $E_f(\rho)$ (1.89), la concurrence $\mathcal{C}(\rho)$ (1.96), le tangle $\tau_g(\rho)$ (1.108), la corrélation classique basée sur l'entropie linéaire $\mathcal{J}_{2B}(\rho)$ (2.69), et la corrélation classique basée sur l'entropie de von Neumann $\mathcal{J}_B(\rho)$ (2.2). Tout d'abord, le tangle d'un état bipartite qubit-qudit, $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, est défini comme le minimum sur les décompositions spectrales [113]

$$\tau_g(\rho_{AB}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i \left| \langle\psi_i| \tilde{\psi}_i \rangle \right|^2 = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i \mathcal{C}^2(|\psi_i\rangle), \quad (2.97)$$

qui est étroitement liée à la concurrence $\mathcal{C}(|\psi_i\rangle)$. De plus, en raison de la convexité de $\mathcal{C}^2(|\psi_i\rangle) = \left| \langle\psi_i| \tilde{\psi}_i \rangle \right|^2$, la concurrence au carré de l'état ρ_{AB} satisfait l'inégalité $\mathcal{C}^2(\rho_{AB}) \leq \tau_g(\rho_{AB})$. Notez que le tangle n'est pas toujours égal au carré de la concurrence sauf que pour les états à deux qubit [113]. L'intrication de formation $E_f(|\psi\rangle_{AB})$ et la concurrence $\mathcal{C}(|\psi\rangle_{AB})$ d'un état pur $|\psi\rangle_{AB}$ sont définies par $E_f(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_B)$ et $\mathcal{C}(|\psi\rangle_{AB}) = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho_B^2)]}$, respectivement. Il est donc clair que

$$\tau_g(\rho_{AB}) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S_2(\rho_B^i), \quad (2.98)$$

où $\rho_B^i = \text{Tr}_A(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$. Nous aurons également besoin de la relation entre l'intrication de formation et la concurrence, et comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'intrication de formation est liée à la concurrence pour les états mixtes à deux qubit par cette relation

$$E_f(\rho_{AB}) = g(\mathcal{C}^2(\rho_{AB})), \quad \text{avec} \quad g(x) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}\right), \quad (2.99)$$

où $h(x)$ est l'entropie binaire. Considérons maintenant les états quantiques à deux qubits ρ_{AB} de rang-2 et qui ont des décompositions spectrales $\rho_{AB} = \varsigma_0 |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + \varsigma_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, avec ς_j et $|\psi_j\rangle$, $j = 0, 1$, $\sum_j \varsigma_j = 1$, sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice densité ρ_{AB} . En attachant un troisième qubit E , l'état ρ_{AB} est purifié pour être

$|\psi\rangle_{ABE} = \sqrt{\varsigma_0} |\psi_0\rangle |0\rangle + \sqrt{\varsigma_1} |\psi_1\rangle |1\rangle$ de sorte que $\rho_{AB} = \text{Tr}_E(|\psi\rangle_{ABE}\langle\psi|)$. Dans ce cas, nous avons $E_f(\rho_{BE}) = g(\mathcal{C}^2(\rho_{BE}))$ et à partir de la formule de Koashi-Winter, on obtient la discordie quantique basée sur l'entropie de von Neumann donnée par l'équation (2.25). La relation de Koashi-Winter peut également être réécrite en terme de l'entropie linéaire comme [111]

$$\tau_g(\rho_{AE}) + \mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}) = S_2(\rho_A). \quad (2.100)$$

Comme ρ_{AE} est un état à deux qubits, nous avons $\tau_g(\rho_{AE}) = \mathcal{C}^2(\rho_{AE})$. De plus, il est facile de voir que

$$S(\rho_A) = E_f(|\psi\rangle_{ABE}) = g(\mathcal{C}^2(|\psi\rangle_{ABE})) = g(S_2(\rho_A)), \quad (2.101)$$

et

$$E_f(\rho_{AE}) = g(\mathcal{C}^2(\rho_{AE})) = g(S_2(\rho_A) - \mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB})). \quad (2.102)$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation (2.22), on trouve

$$\mathcal{J}_B(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - g(S_2(\rho_A) - \mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB})). \quad (2.103)$$

Par conséquent, la discordie quantique basée sur l'entropie de von Neumann est donnée par

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + g(S_2(\rho_A) - \mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB})). \quad (2.104)$$

Cette dernière expression (2.104) fournit une formule analytique de la discordie quantique en termes d'entropie de von Neumann originale pour les états quantiques arbitraires de rang-2 à deux qubits. Il est très important de souligner ici que, contrairement à l'expression (2.25), cette formule s'applique directement sur l'état de système ρ_{AB} . Nous n'avons donc pas besoin de purifier le système étudié. Prenons par exemple l'état de Horodecki [114], qui est un état de rang-2 et qui s'écrit comme un mélange d'un état de Bell, disons $|\varphi^+\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$, et d'un état de vide $|00\rangle$, c'est-à-dire

$$\rho^H(p) = p |\varphi^+\rangle \langle\varphi^+| + (1-p) |00\rangle \langle 00|, \quad (2.105)$$

où $p \in [0, 1]$. En utilisant la méthode ci-dessus, le canal qubit Λ peut être explicitement calculé et nous obtenons

$$\begin{aligned} \Lambda(|0\rangle\langle 0|) &= \frac{2(1-p)}{2-p} |0\rangle\langle 0| + \frac{p}{2-p} |1\rangle\langle 1|, \\ \Lambda(|1\rangle\langle 0|) &= \sqrt{\frac{p}{2-p}} |1\rangle\langle 0|, \quad \Lambda(|0\rangle\langle 1|) = \sqrt{\frac{p}{2-p}} |0\rangle\langle 1|, \quad \Lambda(|1\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Alors la matrice \mathbf{L} devient

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{2-p}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{p}{2-p}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{2-p} \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Il est simple de vérifier que $S_2(\rho^H(p)_B) = S_2(\rho^H(p)_A) = p(2-p)$ et $S(\rho^H(p)) = h(p)$. Ainsi, la discordie quantique basée sur l'entropie de von Neumann de $\rho^H(p)$ est donnée par

$$\mathcal{Q}(\rho^H(p)) = h\left(\frac{p}{2}\right) - h(p) + g(2p(1-p)). \quad (2.108)$$

2.3.2 Expression analytique de la discordance quantique linéaire pour les états qubit-qudit arbitraire

Nous proposons maintenant une méthode analytique fiable pour évaluer la corrélation classique basée sur l'entropie linéaire pour des états quantiques arbitraires de type qudit-qubit. Cette méthode se concentre principalement sur l'écriture à la fois de la matrice densité ρ et de la matrice \mathbf{L} dans la représentation de Fano-Bloch et sur le calcul de toutes les composantes de ces tenseurs de corrélation totale [115]. Pour ce faire, nous écrivons ρ_{AB} dans la représentation de Fano-Bloch comme

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2d} \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \sum_{\beta=0}^3 R_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \otimes \sigma^\beta, \quad (2.109)$$

où les coefficients $R_{\alpha\beta} = \frac{d}{2} \text{Tr}(\rho_{AB} \gamma^\alpha \otimes \sigma^\beta)$ sont les composantes du tenseur de corrélation total d'un état qudit-qubit ρ_{AB} , avec γ^0 et σ^0 sont les matrices d'identités de dimensions respectives d et 2. De même, l'état $\rho_{B'B}$ peut être écrit comme

$$\rho_{B'B} = |v_{B'B}\rangle \langle v_{B'B}| = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \otimes \sigma^\beta, \quad (2.110)$$

avec $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \text{Tr}(\rho_{B'B} \sigma^\alpha \otimes \sigma^\beta)$. En utilisant l'équation (2.109), l'opérateur densité réduite ρ_B peut être réécrit, en termes de paramètres de Fano-Bloch, comme

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{2d} \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \sum_{\beta=0}^3 R_{\alpha\beta} \text{Tr}_A(\gamma^\alpha) \otimes \sigma^\beta = \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 R_{0\beta} \sigma^\beta. \quad (2.111)$$

En outre, le canal qudit $\Lambda(\sigma^\alpha)$ peut également être reformulé par une fonction très utile qui s'écrit comme

$$\Lambda(\sigma^\alpha) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\delta=0}^{d^2-1} \mathcal{L}_{\alpha\delta} \gamma^\delta, \quad (2.112)$$

avec $\mathcal{L}_{\alpha\delta} = \text{Tr}(\Lambda(\sigma^\alpha) \gamma^\delta)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} (\Lambda \otimes \mathbf{1}) \rho_{B'B} &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \Lambda(\sigma^\alpha) \otimes \sigma^\beta \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \sum_{\delta=0}^{d^2-1} \mathcal{L}_{\alpha\delta} \gamma^\delta \otimes \sigma^\beta \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\delta=0}^{d^2-1} \left(\sum_{\alpha=0}^3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{L}_{\alpha\delta} \right) \gamma^\delta \otimes \sigma^\beta \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\delta=0}^{d^2-1} \left(\sum_{\alpha=0}^3 (\mathcal{R}^T)_{\beta\alpha} \mathcal{L}_{\alpha\delta} \right) \gamma^\delta \otimes \sigma^\beta \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\delta=0}^{d^2-1} (\mathcal{R}^T \mathcal{L})_{\beta\delta} \gamma^\delta \otimes \sigma^\beta. \end{aligned} \quad (2.113)$$

En utilisant la définition (2.70), il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{2d} \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \sum_{\beta=0}^3 R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2d} \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \sum_{\beta=0}^3 (\mathcal{R}^T \mathcal{L})_{\beta\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \sum_{\beta=0}^3 (\mathcal{L}^T \mathcal{R})_{\alpha\beta}. \quad (2.114)$$

Cela mène à l'écriture de la matrice \mathcal{L} comme

$$\mathcal{L} = \frac{2}{d} (\mathcal{R}^T)^{-1} R^T, \quad (2.115)$$

où R , \mathcal{R} et \mathcal{L} sont les matrices dont les éléments sont $R_{\alpha\beta}$, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$, respectivement. Alors, la matrice \mathbf{L} utilisée pour calculer la corrélation classique (2.81) de tous les états qudit-qubit devient

$$\mathbf{L} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{d^2-1} \mathcal{L}_{ij}. \quad (2.116)$$

Ensuite, on peut facilement évaluer analytiquement la discorde quantique basée sur l'entropie linéaire pour tout système bipartite de type qudit-qubit comme

$$\mathcal{Q}_2(\rho_{AB}) = \mathcal{I}(\rho_{AB}) - \mathcal{J}_{2B}(\rho_{AB}). \quad (2.117)$$

2.4 Mesure des corrélations quantiques via l'incertitude quantique

2.4.1 L'information d'interchange (Skew Information)

Les physiciens étudient la nature en effectuant des mesures et en prédisant leurs résultats. Dans un monde classique, les barres d'erreur sont exclusivement dues à des limitations technologiques, alors il est possible de mesurer deux observables quelconques avec une précision arbitraire. Cependant, un tel type de mesure n'est pas toujours possible dans les systèmes quantiques, car la mécanique quantique stipule que deux observables non commutables ne peuvent pas être mesurés conjointement avec une précision arbitraire, même si l'on pouvait accéder à un appareil de mesure sans défaut [116, 117]. En outre, la mesure opérée sur un système quantique est complètement différente que celle d'un système classique, car non seulement le résultat obtenu est probabiliste, mais aussi l'état du système est modifié au cours de ce processus, et l'objectif est de déterminer, de façon plus précise, le résultat de cette mesure. L'idée d'exactitude est directement liée à l'incertitude associée au résultat de cette mesure et la relation d'incertitude donne la nature statistique des erreurs dans ce genre de mesure.

Dans la pratique standard et dans le cadre du formalisme de la mécanique quantique, l'incertitude d'une observable K dans un état quantique ρ est généralement quantifiée par la variance qui est donnée par la relation suivante [118]

$$\text{Var}(\rho, K) := \text{Tr}(\rho K_0^2) = \text{Tr}(\rho K^2) - \text{Tr}(\rho K)^2, \quad (2.118)$$

où Tr désigne la trace et $K_0 = K - \text{Tr}\rho K$. En particulier, pour les états purs $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, la variance se réduit à

$$\text{Var}(|\psi\rangle\langle\psi|, K) = \langle\psi|K^2|\psi\rangle - \langle\psi|K|\psi\rangle^2. \quad (2.119)$$

La quantification de l'incertitude en terme de la variance est bien adaptée lorsque les états sont purs. Mais les choses se compliquent lorsque les états sont mixtes, car l'incertitude inclut l'ignorance classique, due au mélange d'états, et une partie de la nature quantique résultant de la non commutativité entre l'état étudié et l'observable mesurée. Ainsi, la variance peut présenter des contributions d'origines quantiques et classiques. Il existe encore plusieurs méthodes permettant de quantifier l'incertitude, comme par exemple celles basées sur des mesures entropiques et qui sont largement utilisées comme indicateurs d'incertitude en théorie de l'information quantique. Cependant, ce type de mesure reste toujours insuffisant et limité, car ces quantificateurs sont toujours influencés par la mixité de l'état étudié.

Pour un état quantique ρ , une observable est dite certaine quantiquement, si l'erreur de mesure de l'observable est due uniquement à l'ignorance du mélange classique dans l'état ρ . Afin de déterminer la partie quantique de la variance (2.118), Wigner et Yanase ont introduit la notion de l'information d'interchange (Skew Information en anglais) comme [119]

$$I(\rho, K) := I_\rho(K) := \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (i[\sqrt{\rho}, K])^2 \right\}, \quad (2.120)$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur. Il est important de noter que contrairement à la variance, l'information d'interchange de Wigner-Yanase n'est pas affectée par le mélange classique. Elle quantifie le degré de non commutativité entre un état quantique ρ et une observable K qui peut être considérée comme un Hamiltonien ou toute autre quantité conservée. De plus, l'information d'interchange fournit une mesure alternative du contenu d'information de l'état ρ par rapport aux observables non commutatifs avec la quantité conservée K . En d'autres termes, elle représente la quantité d'information stockée dans l'état ρ qui ne sont pas accessibles par la mesure de l'observable K . L'équation (2.120) peut être simplifiée comme

$$\begin{aligned} I(\rho, K) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\sqrt{\rho}K - K\sqrt{\rho})^2 \} \\ &= -\frac{1}{2} \{ \text{Tr}(\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K) - \text{Tr}(K\rho K) - \text{Tr}(\sqrt{\rho}K^2\sqrt{\rho}) + \text{Tr}(K\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}) \} \\ &= \text{Tr}(\rho K^2) - \text{Tr}(\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Cette quantité a été généralisée par Dyson par la formule suivante [120]

$$\begin{aligned} I_{\rho, \alpha}(K) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (i[\rho^\alpha, K]) (i[\rho^{1-\alpha}, K]) \} \\ &= \text{Tr}(\rho K^2) - \text{Tr}(\rho^\alpha K \rho^{1-\alpha} K). \end{aligned} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (2.122)$$

D'un autre côté, tous les états quantiques mixtes peuvent être écrits comme $\rho = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$, où λ_n sont les valeurs propres de la matrice densité ρ , et les vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle\}$ constituent une base orthonormée telle que $\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \mathbb{1}$. On peut facilement montrer que

$$\text{Tr}(\rho K^2) = \sum_{n,m} \lambda_n |\langle \psi_n | K | \psi_m \rangle|^2, \quad (2.123)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme symétrique suivante

$$\text{Tr}(\rho K^2) = \sum_{n,m} \frac{\lambda_n + \lambda_m}{2} |\langle \psi_n | K | \psi_m \rangle|^2. \quad (2.124)$$

Alors le deuxième terme de l'équation (2.121) devient

$$\text{Tr}(K\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}) = \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_n \lambda_m} |\langle \psi_n | K | \psi_m \rangle|^2, \quad (2.125)$$

et l'expression explicite de l'information d'interchange est donnée par

$$I(\rho, K) = \sum_{n,m} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m} \right)^2 |\langle \psi_n | K | \psi_m \rangle|^2. \quad (2.126)$$

L'information d'interchange $I(\rho, K)$ a des propriétés intéressantes [119], nous rappelons ici les plus pertinentes :

- L'information d'interchange est toujours positive, $I(\rho, K) \geq 0$ et se réduit à la variance si l'état ρ est pur ($\rho^2 \equiv \rho$) ;

$$I(|\psi\rangle\langle\psi|, K) = \text{Var}(|\psi\rangle\langle\psi|, K) = \langle\psi|K^2|\psi\rangle - \langle\psi|K|\psi\rangle^2. \quad (2.127)$$

- L'information d'interchange est toujours plus petite que la variance de l'observable K . En effet

$$\begin{aligned} I(\rho, K) &= \text{Tr}(\rho K^2) - \text{Tr}(\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K) \\ &\leq \text{Tr}(\rho K^2) - \text{Tr}(\rho K)^2 \\ &\equiv \text{Var}(\rho, K). \end{aligned} \quad (2.128)$$

- $I(\rho, K)$ est convexe car l'information d'interchange diminue lorsque plusieurs états sont mélangés ;

$$I\left(\sum_i \lambda_i \rho_i, K\right) \leq \sum_i \lambda_i I(\rho_i, K), \quad (2.129)$$

pour tous les états quantiques ρ_i , et les constantes λ_i satisfaisant $\sum_i \lambda_i = 1$ et $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Dans le cas contraire, la variance $\text{Var}(\rho, K)$ est concave dans l'état ρ .

- L'information d'interchange est invariante sous une transformation unitaire U , si et seulement si U et l'observable mesurée K commutent, c-à-d ; $[U, K] = 0$. Dans ce cas, nous avons

$$UKU^{-1} = K, \quad \sqrt{U\rho U^{-1}} = U\sqrt{\rho}U^{-1}, \quad (2.130)$$

et donc

$$\begin{aligned} I(U\rho U^{-1}, K) &= -\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{\left[\sqrt{U\rho U^{-1}}, K\right]^2\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{\left[\sqrt{U\rho U^{-1}}, UKU^{-1}\right]^2\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{U\left[\sqrt{\rho}, K\right]^2U^{-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{[\rho, K]^2\right\} = I(\rho, K). \end{aligned} \quad (2.131)$$

- Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ d'un système composite AB , l'information d'interchange de l'état quantique ρ_{AB} et la matrice de densité réduite ρ_A associé au sous système A satisfait la relation suivante

$$I(\rho_{AB}, K_A \otimes \mathbb{1}_B) \geq I(\rho_A, K_A), \quad (2.132)$$

pour toutes les observables locales K_A agissant sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_A . Ici $\mathbb{1}_B$ est l'opérateur identité dans \mathcal{H}_B .

- Afin d'obtenir une quantité intrinsèque fournissant le contenu informationnel de l'état ρ , Luo a introduit la moyenne [121]

$$\mathcal{Q}_I(\rho) = \sum_{i=0}^{n^2-1} I(\rho, K^i), \quad (2.133)$$

où $\{K^i\}$ est un ensemble des n^2 observables sur un système quantique à n -dimensions. Ainsi, le contenu de l'information globale de l'état bipartite ρ_{AB} en termes d'observables locales d'un système quantique à n -dimensions A est

$$\mathcal{Q}_{IA}(\rho_{AB}) = \sum_{i=0}^{n^2-1} I(\rho_{AB}, K_A^i \otimes \mathbb{1}_B), \quad (2.134)$$

- La différence entre le contenu de l'information de l'état ρ_{AB} et l'état $\rho_A \otimes \rho_B$ par rapport aux observables locales K_A^i , peut être interprétée comme une mesure des corrélations quantiques dans l'état ρ_{AB} . Nous pouvons donc définir une autre mesure des corrélations quantiques en terme de l'information d'interchange comme [121]

$$\mathcal{F}_A(\rho_{AB}) = \mathcal{Q}_{IA}(\rho_{AB}) - \mathcal{Q}_{IA}(\rho_A \otimes \rho_B) \quad (2.135)$$

2.4.2 L'incertitude quantique locale : Définition

En fait, l'incertitude quantique est intrinsèquement liée au concept de corrélation quantique. Par exemple, considérons un état de Bell à deux qubits $|\varphi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, où $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ désigne la base de calcul. Cet état est l'état propre de l'observable global $\sigma_3 \otimes \sigma_3$, il n'y a donc pas d'incertitude sur le résultat de la mesure d'une telle observable ($\text{Var}(|\varphi^+\rangle \langle \varphi^+|, \sigma_3 \otimes \sigma_3) = 0$). Par contre, la mesure des observables de spin locales $\vec{\alpha} \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}$ (où $\vec{\alpha} \neq 0$ est un vecteur réel) est intrinsèquement incertaine pour l'opérateur densité $|\varphi^+\rangle \langle \varphi^+|$, puisqu'un état intriqué ne peut pas être un état propre d'une observable locale [25]. En particulier, la variance $\text{Var}(\rho, K_i)$ pour une observable locale K_i s'annule si et seulement si l'état n'est pas corrélé. Pour les états mixtes, l'information d'interchange $I(\rho, K)$ s'annule si et seulement si l'état ρ n'est pas perturbé par la mesure de l'observable K . Si K est une observable locale, alors les états qui sont invariants par la mesure locale sont les états qui ont une discordance quantique nulle par rapport à ce sous-système local. Par conséquent, l'incertitude quantique sur les observables locales est étroitement liée au concept de la discordance quantique; elle peut alors être utilisée comme un quantificateur des corrélations quantiques de type discordance [25] (voir la Fig.(2.1)).

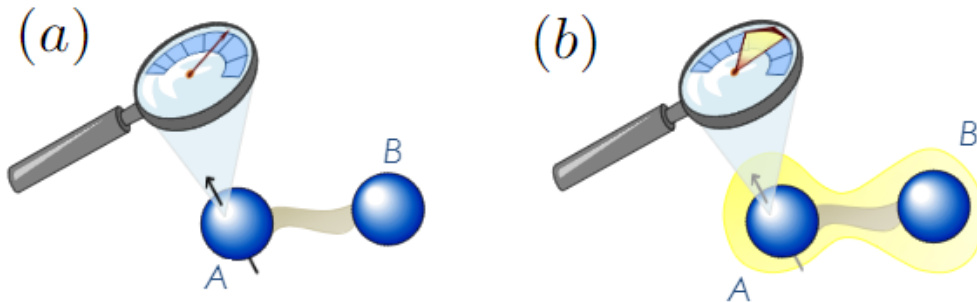


FIGURE 2.1 – Pour l'état (a); Si ρ n'est pas corrélé ou bien ne contient que des corrélations classiques, c'est-à-dire ρ est de la forme $\rho = \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \otimes \rho_{i,B}$ (avec $\{|i\rangle_A\}$ une base orthonormée du sous-système A), il existe au moins une observable locale agissant sur le sous-système A sans aucune incertitude quantique intrinsèque. Pour l'état (b); Si ρ contient des corrélations quantiques non nulles quantifiées par l'intrication ou par la discordance quantique, toute mesure locale sur le sous-système A est affectée par l'incertitude quantique. Cela signifie que les corrélations quantiques conduisent à une incertitude quantique locale.

Très récemment, Girolami et ses collaborateurs ont défini l'incertitude quantique locale comme l'information d'interchange minimale pouvant être obtenue par une seule mesure locale [25]. Plus précisément, pour un état quantique bipartite ρ_{AB} , on considère l'observable locale $K^\Lambda = K_A^\Lambda \otimes \mathbb{1}_B$ telle que K_A^Λ est un opérateur hermitien, agissant sur les états du sous-système A , ayant un spectre non dégénéré Λ . L'incertitude quantique locale par rapport au sous-système A est donnée par

$$\mathcal{U}_A^\Lambda(\rho_{AB}) := \min_{K_A^\Lambda} I(\rho_{AB}, K_A^\Lambda \otimes \mathbb{1}_B), \quad (2.136)$$

où la minimisation porte sur toutes les observables locales qui agissent sur le sous-système A . En effet, nous exigeons que Λ soit non dégénéré, car il correspond aux observables informatives maximales du sous-système A . Ce quantificateur a de fortes raisons d'être considéré comme une mesure fidèle des corrélations quantiques des états quantiques bipartites. En effet, l'incertitude quantique locale est invariante sous les transformations unitaires locales, n'augmente pas sous les opérations locales sur le sous-système B , s'annule si et seulement si l'état quantique est classiquement corrélé [25]. Pour les états purs, l'incertitude quantique locale est une intrication monotone. Il s'en suit que l'incertitude quantique locale satisfait toutes les exigences physiques d'une mesure des corrélations quantiques.

Pour évaluer le minimum dans l'équation (2.136), il existe une exigence importante concernant les observables d'optimisation qui minimise l'information d'interchange, à savoir qu'ils doivent avoir un spectre fixe non dégénérés. En pratique, les observables avec ce spectre agissant sur le sous-système A peuvent être paramétrés par [25]

$$K_A^\Lambda = V_A \Lambda V_A^\dagger, \quad (2.137)$$

où V_A définit la base de mesure qui peut être modifiée arbitrairement sur le groupe unitaire spécial du sous-système A . Si nous limitons notre discussion au cas des systèmes quantiques bipartites de type qubit-qudit où le sous-système A a une dimension 2 et le sous-système B a une dimension d , l'observable qubit à spectre fixe non dégénéré σ_3 peut être paramétrée par $K_A = V_A \sigma_3 V_A^\dagger = \vec{s} \cdot \vec{\sigma}$, où $\|\vec{s}\| = 1$ et σ_i sont les matrices de Pauli, représentant aussi les générateurs de l'algèbre $su(2)$. Ce choix correspond à une incertitude quantique locale normalisée à l'unité pour les états purs maximales intriqués. Dans ce cas, le spectre Λ peut être supprimé dans l'équation (2.136) et l'incertitude quantique locale est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_A(\rho_{AB}) &= \min_{\vec{s}} I(\rho_{AB}, \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_d) \\ &= \min_{\vec{s}} \sum_{ij} s_i s_j [\text{Tr}\{\rho_{AB} \sigma_i \sigma_j - \sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_i \otimes \mathbb{1}_d) \sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_j \otimes \mathbb{1}_d)\}] \\ &= 1 - \max_{ij} \sum_{ij} s_i s_j [\text{Tr}\{\sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_i \otimes \mathbb{1}_d) \sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_j \otimes \mathbb{1}_d)\}] \\ &= 1 - \max[\vec{s}^\dagger \mathcal{W} \vec{s}], \end{aligned} \quad (2.138)$$

où \mathcal{W} est une matrice symétrique de dimension 3×3 dont les éléments sont

$$w_{ij} = \text{Tr}\{\sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_i \otimes \mathbb{1}_B) \sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_j \otimes \mathbb{1}_B)\}, \quad (2.139)$$

avec $i, j = 1, 2, 3$. Pour minimiser l'information d'interchange, il est nécessaire de maximiser la quantité \mathcal{W} sur tous les vecteurs unitaires \vec{s} . La valeur maximale coïncide avec la valeur propre maximale de la matrice \mathcal{W} . Par conséquent, la formule compacte de l'incertitude quantique locale est donnée par

$$\mathcal{U}_A(\rho_{AB}) = 1 - \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \quad (2.140)$$

où les ξ_i sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{W} = (w_{ij})_{3 \times 3}$. Il est donc clair que le calcul de l'incertitude quantique locale requiert le calcul des éléments w_{ij} de la matrice \mathcal{W} . Ainsi, cette mesure a l'avantage d'être simple lorsqu'il s'agit de calculer le maximum sur les paramètres liés aux mesures comme il faut le faire pour calculer la discordance quantique. En outre, l'incertitude quantique locale est réduite à l'intrication monotone pour les états purs. En fait, elle se réduit à l'entropie linéaire du sous-système réduit mesuré (c'est-à-dire la concurrence). Cette coïncidence intéressante ne se produit que pour les systèmes quantiques de dimension $2 \otimes d$. Cependant, pour les systèmes quantiques à plusieurs niveaux (dimension de l'espace de Hilbert grande), il est difficile d'obtenir une forme compacte de l'incertitude quantique locale sans optimisation

complexe. Pour clarifier ce point, nous prenons un état pur $|\psi\rangle = \sum_{mn} C_{mn} |mn\rangle$, les éléments de la matrice \mathcal{W} deviennent

$$w_{ij} = \langle\psi| \sigma_i \otimes \mathbb{1}_d |\psi\rangle \langle\psi| \sigma_j \otimes \mathbb{1}_d |\psi\rangle. \quad (2.141)$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus devient comme suit

$$\langle\psi| \sigma_i \otimes \mathbb{1}_d |\psi\rangle = \sum_{mk} (CC^\dagger)_{km} \langle m| \sigma_i |k\rangle \quad (2.142)$$

La matrice densité réduite du sous-système A peut être réécrite en fonction des coefficients C_{mn} comme

$$\rho_A = \sum_{mkl} C_{ml} C_{lk}^\dagger |m\rangle \langle k| = \sum_{mkl} (CC^\dagger)_{mk} |m\rangle \langle k|. \quad (2.143)$$

Nous obtenons alors

$$\langle m| \rho_A |k\rangle = (CC^\dagger)_{mk}. \quad (2.144)$$

Nous retournons à l'expression (2.142), en s'aidant de l'équation (2.144), on voit aisément qu'elle se réduit à la valeur moyenne de σ_i par rapport à la base du sous-système A . Nous avons donc

$$\langle\psi| \sigma_i \otimes \mathbb{1}_d |\psi\rangle = \sum_k \langle k| \rho_A \sigma_i |k\rangle = \text{Tr}_A(\rho_A \sigma_i) = \langle\sigma_i\rangle_A. \quad (2.145)$$

Cela mène à $w_{ij} = \langle\sigma_i\rangle_A \langle\sigma_j\rangle_A$, et la matrice \mathcal{W} s'écrit sous la forme

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \langle\sigma_1\rangle_A^2 & \langle\sigma_1\rangle_A \langle\sigma_2\rangle_A & \langle\sigma_1\rangle_A \langle\sigma_3\rangle_A \\ \langle\sigma_2\rangle_A \langle\sigma_1\rangle_A & \langle\sigma_2\rangle_A^2 & \langle\sigma_2\rangle_A \langle\sigma_3\rangle_A \\ \langle\sigma_3\rangle_A \langle\sigma_1\rangle_A & \langle\sigma_3\rangle_A \langle\sigma_2\rangle_A & \langle\sigma_3\rangle_A^2 \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

Après la diagonalisation de la matrice \mathcal{W} , on trouve une seule valeur propre non nulle qui s'écrit

$$\xi_{\max} = \langle\sigma_1\rangle_A^2 + \langle\sigma_2\rangle_A^2 + \langle\sigma_3\rangle_A^2, \quad (2.147)$$

et l'incertitude quantique locale des états purs devient

$$\mathcal{U}_A(|\psi\rangle \langle\psi|) = 1 - [\langle\sigma_1\rangle_A^2 + \langle\sigma_2\rangle_A^2 + \langle\sigma_3\rangle_A^2]. \quad (2.148)$$

D'autre part, la représentation de Fano-Bloch de la matrice (2.143) s'écrit $\rho_A = \frac{1}{2} (1 + \vec{r}\vec{\sigma}_i)$, où \vec{r} représente le vecteur de Bloch avec

$$\langle\sigma_i\rangle_A = \text{Tr}(\rho_A \sigma_i) = \frac{1}{2} (\text{Tr}\sigma_i + r_j \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j)) = r_i. \quad (2.149)$$

De même, nous avons

$$\text{Tr}(\rho_A^2) = \frac{1}{2} (1 + r_i^2) = \frac{1}{2} (1 + \xi_{\max}). \quad (2.150)$$

Par conséquent, pour les états purs $\rho_{AB} = |\psi\rangle \langle\psi|$, l'incertitude quantique locale coïncide avec l'entropie linéaire de l'intrication. Nous avons alors

$$\mathcal{U}_A(|\psi\rangle \langle\psi|) = 2 [1 - \text{Tr}(\rho_A^2)] = S_2(\rho_A). \quad (2.151)$$

Il est intéressant de noter que l'expression analytique de l'incertitude quantique locale (2.138) peut être appliquée à des systèmes multi-qubit sans aucune difficulté majeure. En effet, nous pouvons toujours considérer le système multi-qubit (à N qubits) comme un système de

dimension $2 \otimes d$ où $d = 2 \otimes \dots \otimes 2$ peut représenter les $N - 1$ qubits restants sous la forme d'un système quantique avec un espace de Hilbert de dimension d . Comme il existe plusieurs bipartitions pour un système multi-qubit, il est possible que certaines bipartitions soient corrélées quantiquement, d'autres classiquement corrélées et d'autres peuvent être complètement décorrélées avec d'autres qubits. Par conséquent, nous devons définir l'incertitude quantique locale pour chaque bipartition. Pour chaque cas, nous obtenons une matrice symétrique \mathcal{W}_k , donc au total nous obtenons N matrices symétriques. Après avoir calculé toutes ces incertitudes quantiques locales, nous pouvons calculer l'incertitude quantique locale moyenne pour un état multi-qubit donné. Dans ce but, nous considérons une matrice densité arbitraire ρ_N associé à un système décrivant N qubits et nous appliquons des mesures locales sur chaque qubit. Puis, les éléments de la matrice \mathcal{W}_k de chaque bipartition ρ_k (avec $k = 1, 2, \dots, N$) sont données par les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\hat{w}_{ij}^1 &= \text{Tr}\{\sqrt{\rho_N} (\sigma_i \otimes \mathbb{1}_2 \dots \otimes \mathbb{1}_2) \sqrt{\rho_N} (\sigma_j \otimes \mathbb{1}_2 \dots \otimes \mathbb{1}_2)\}, \\
\hat{w}_{ij}^2 &= \text{Tr}\{\sqrt{\rho_N} (\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_i \dots \otimes \mathbb{1}_2) \sqrt{\rho_N} (\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_j \dots \otimes \mathbb{1}_2)\}, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\hat{w}_{ij}^N &= \text{Tr}\{\sqrt{\rho_N} (\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \dots \otimes \sigma_i) \sqrt{\rho_N} (\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \dots \otimes \sigma_j)\}.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Les incertitudes quantiques locales liées à chaque bipartition sont définies comme suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1/23\dots N}(\rho_N) &= 1 - \max\{\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1\}, \\
\mathcal{U}_{2/13\dots N}(\rho_N) &= 1 - \max\{\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2\}, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\mathcal{U}_{N/12\dots N-1}(\rho_N) &= 1 - \max\{\xi_1^N, \xi_2^N, \xi_3^N\},
\end{aligned} \tag{2.153}$$

où ξ_i^k (avec $i = 1, 2, 3$) sont les valeurs propres des matrices symétriques $(\mathcal{W}_k)_{3 \times 3}$ qui peuvent être déterminées facilement. L'incertitude quantique locale, qui nous donne la quantité des corrélations quantiques globales dans l'état ρ_N , peut être considérée comme la valeur moyenne des incertitudes quantiques locales de chaque bipartition

$$\mathcal{U}(\rho_N) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=A}^N \mathcal{U}_{k/N_k} \right) \equiv \frac{1}{N} \left(\sum_{k=A}^N \mathcal{U}_{k/12\dots\bar{k}\dots N} \right), \tag{2.154}$$

où $N_k = 12\dots\bar{k}\dots N$ sont les $(N - 1)$ -qubits restants sauf le qubit k .

Il faut reconnaître que la quantification des corrélations dans des systèmes qudit-qudit $(d_1 \otimes d_2)$ reste un problème ouvert. Dans ce sens, une lueur d'espoir vient de la référence [122], dans laquelle les auteurs soulignent que la forme fermée de l'incertitude quantique locale peut être obtenue pour les états quantiques de dimension $d_1 \otimes d_2$, en utilisant les générateurs de l'algèbre $su(d_1)$ dans l'optimisation en tant que groupe unitaire spécial de degré d_1 . Dans ce cas, l'expression explicite de l'incertitude quantique locale s'écrit

$$\mathcal{U}_A(\rho) = \frac{2}{d_1} - \xi_{\max}(\hat{\mathcal{W}}) \tag{2.155}$$

où $\xi_{\max}(\hat{\mathcal{W}})$ représente la valeur propre maximale de la matrice $\hat{\mathcal{W}}$, qui est une matrice d'ordre $(d_1^2 - 1)(d_2^2 - 1)$, dont les éléments sont donnés par

$$\mathcal{W}_{ij} = \text{Tr}\{\sqrt{\rho} (\lambda_i \otimes \mathbb{1}_{d_2}) \sqrt{\rho} (\lambda_j \otimes \mathbb{1}_{d_2})\} - G_{ij}P, \tag{2.156}$$

avec les λ_i sont les générateurs de $su(d_1)$. Le vecteur ligne G_{ij} et le vecteur colonne P , sont donnés respectivement par

$$G_{ij} = \left(g_{ij1}, \dots, g_{ijk}, \dots, g_{ijd_1^2-1} \right), \quad \text{avec} \quad g_{ijk} = \frac{1}{4} \text{Tr} (\lambda_i \lambda_j \lambda_k + \lambda_j \lambda_i \lambda_k), \quad (2.157)$$

et

$$P = \left(\text{Tr} (\rho \lambda_1 \otimes \mathbb{1}_{d_2}), \dots, \text{Tr} (\rho \lambda_k \otimes \mathbb{1}_{d_2}), \dots, \text{Tr} (\rho \lambda_{d_1^2-1} \otimes \mathbb{1}_{d_2}) \right)^T. \quad (2.158)$$

2.4.3 L'incertitude quantique locale maximale pour les états X séparables à deux qubits

Puisque l'incertitude quantique locale indique une valeur non nulle pour un état séparable, il sera intéressant d'étudier l'incertitude maximale que l'on peut obtenir avec ce type d'état [123]. Cette valeur maximale fournit la limite de précision qui peut être atteinte en utilisant des états séparables en métrologie quantique (nous revenons sur ce sujet dans le chapitre 4). Pour ce faire, nous devons maximiser l'incertitude quantique locale (2.140) sur tous les états séparables (S) comme

$$\max_{\rho \in S} \mathcal{U}_A(\rho_{AB}) = \max_{\rho \in S} (1 - \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}), \quad (2.159)$$

cela signifie qu'il faut trouver l'état séparable parmi plusieurs états d'un ensemble S qui donnera la valeur propre minimale de la matrice \mathcal{W} . On considère ici un état X à deux qubits comme dans l'équation (1.99). Ses éléments satisfont les conditions suivantes :

- La condition de normalisation qui donne $\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} = 1$.
- La matrice densité ρ_X est positive, alors $\rho_{11}\rho_{44} \geq \rho_{14}^2$ et $\rho_{22}\rho_{33} \geq \rho_{23}^2$.
- ρ_X est un opérateur hermitien ($\rho_X = \rho_X^\dagger$), donc $\rho_{14} = \rho_{41}^*$ et $\rho_{23} = \rho_{32}^*$.

L'état ρ_X a quatre valeurs propres réelles que nous notons par $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, et les vecteurs propres correspondants sont notés $\{|\vartheta_1\rangle, |\vartheta_2\rangle, |\vartheta_3\rangle, |\vartheta_4\rangle\}$. Ainsi, la matrice densité ρ_X devient $\rho_X = \sum_{i=1}^4 \lambda_i |\vartheta_i\rangle \langle \vartheta_i|$. Nous pouvons donc facilement écrire la racine carrée de cette matrice comme $\sqrt{\rho_X} = \sum_{i=1}^4 \sqrt{\lambda_i} |\vartheta_i\rangle \langle \vartheta_i|$. Dans la même base de calcul de la matrice ρ_X , un calcul long conduit à

$$\sqrt{\rho_X} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_2 & \Gamma_6 & 0 \\ 0 & \Gamma_6 & \Gamma_3 & 0 \\ \Gamma_5 & 0 & 0 & \Gamma_4 \end{pmatrix}, \quad (2.160)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\sqrt{\lambda_1} \varpi_1^2}{\varpi_1^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_2} \varpi_2^2}{\varpi_2^2 + 1}, & \Gamma_2 &= \frac{\sqrt{\lambda_3} \varpi_3^2}{\varpi_3^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_4} \varpi_4^2}{\varpi_4^2 + 1}, & \Gamma_3 &= \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\varpi_3^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_4}}{\varpi_4^2 + 1} \\ \Gamma_4 &= \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\varpi_1^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\varpi_2^2 + 1}, & \Gamma_5 &= \frac{\sqrt{\lambda_1} \varpi_1}{\varpi_1^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_2} \varpi_2}{\varpi_2^2 + 1}, & \Gamma_6 &= \frac{\sqrt{\lambda_3} \varpi_3}{\varpi_3^2 + 1} + \frac{\sqrt{\lambda_4} \varpi_4}{\varpi_4^2 + 1}, \end{aligned} \quad (2.161)$$

où

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{\rho_{11} - \rho_{44} + \lambda_1 - \lambda_2}{2\rho_{41}}, & \varpi_2 &= \frac{\rho_{11} - \rho_{44} - \lambda_1 + \lambda_2}{2\rho_{41}}, \\ \varpi_3 &= \frac{\rho_{22} - \rho_{33} + \lambda_3 - \lambda_4}{2\rho_{32}}, & \varpi_4 &= \frac{\rho_{22} - \rho_{33} - \lambda_3 + \lambda_4}{2\rho_{32}}. \end{aligned} \quad (2.162)$$

De plus, il est facile de montrer que $\langle \vartheta_i | \vartheta_i \rangle = \varpi_i^2 + 1$, puis la matrice \mathcal{W} est diagonale et ces éléments deviennent

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2(\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_4 + 2\Gamma_5\Gamma_6), \\ \xi_2 &= 2(\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_4 - 2\Gamma_5\Gamma_6), \\ \xi_3 &= \sum_{i=1}^6 \Gamma_i^2 - 3(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2).\end{aligned}\tag{2.163}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte la condition de séparabilité de l'état étudié. En utilisant les deux conditions de séparabilité du critère PPT (1.77), on trouve

$$\rho_{11}\rho_{44} \geq \rho_{23}^2, \quad \text{et} \quad \rho_{22}\rho_{33} \geq \rho_{14}^2.\tag{2.164}$$

Après avoir ajouté ces deux conditions à la contrainte de positivité, nous pouvons écrire le problème d'optimisation de l'incertitude quantique locale dans tous les états X séparables comme une minimisation de $\xi_{\max} = \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ avec ces contraintes :

$$\begin{aligned}\rho_{14} &\leq \min(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}), & \sum_{i=1}^4 \rho_{ii} &= 1, \\ \rho_{23} &\leq \min(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}), & \rho_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j.\end{aligned}\tag{2.165}$$

Nous observons que, pour des états X à deux qubits avec des entrées positives, le produit $\Gamma_5\Gamma_6$ est toujours positif ($\Gamma_5\Gamma_6 \geq 0$). Cela implique que la valeur propre ξ_1 est toujours plus grande que ξ_2 de sorte que $\xi_{\max} = \max\{\xi_1, \xi_3\}$. Par conséquent, pour déterminer l'incertitude quantique locale maximale dans les états X séparables, nous devons envisager les deux situations distinctes suivantes :

(i) Si $\xi_{\max} = \xi_1$ alors l'incertitude quantique locale est donnée par

$$\mathcal{U}_A(\rho_X) = \max\{(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_4)^2 + 2(\Gamma_5 - \Gamma_6)^2\}.\tag{2.166}$$

(ii) Si $\xi_{\max} = \xi_3$ alors l'incertitude quantique locale se réduit à

$$\mathcal{U}_A(\rho_X) = 4 \max(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2).\tag{2.167}$$

2.5 La relation d'incertitude quantique entropique

Le principe d'incertitude, formulé à l'origine par Heisenberg [116], illustre clairement la différence entre la mécanique quantique et classique. Ce principe limite les incertitudes sur les résultats de deux observables incompatibles, telles que la position et l'impulsion, sur une particule. En général, les relations d'incertitude limitent les connaissances potentielles que l'on peut avoir sur les propriétés physiques d'un système. Même avec une description complète de son état, il est impossible de prédire les résultats de toutes les mesures possibles sur la particule. Ce manque de connaissance, ou incertitude, a été quantifié par Heisenberg en utilisant l'écart type des observables de position et d'impulsion (que nous notons ΔX pour une observable X). Plus tard, Robertson et Schrödinger l'ont généralisé à des observables arbitraires P et Q non commutatives [124]. Cette généralisation prend la forme suivante

$$(\Delta P)(\Delta Q) \geq \frac{1}{2} |\langle [P, Q] \rangle|,\tag{2.168}$$

où les écarts types des observables sont quantifiés en termes de valeurs moyennes $(\Delta P) \equiv \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}$, $(\Delta Q) \equiv \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}$ et le commutateur $[P, Q] \equiv PQ - QP$.

En relation avec la théorie de l'information, il existe différentes formulations mathématiques du contenu physique de la relation d'incertitude. Outre la formulation standard en termes de la variance (2.118), il existe une autre formulation en termes d'entropie, appelée la relation d'incertitude entropique. La principale différence entre ces formulations réside dans le fait que la relation d'incertitude entropique ne prend en compte que les probabilités des différents résultats de mesure. Cette relation, initialement proposée par Deutsch [125], a été reformulée en termes d'entropie de Shannon comme suit

$$\mathcal{H}(P) + \mathcal{H}(Q) \geq -2 \log_2 c(P, Q), \quad (2.169)$$

avec $\mathcal{H}(X)$ désigne l'entropie de Shannon, et le terme $c(P, Q) \equiv \max_{i,j} |\langle p_i | q_j \rangle|^2$ quantifie la complémentarité des observables P et Q , où $\{p_i\}$ et $\{q_j\}$ sont respectivement les valeurs propres correspondantes. Pour quantifier l'information de manière quantique, nous étendons cette étude vers le côté quantique et nous remplaçons l'entropie de Shannon par celle de von Neumann. En présence de la mémoire quantique (où l'environnement B), la relation d'incertitude quantique entropique devient [126]

$$S(P|B) + S(Q|B) \geq -2 \log_2 c(P, Q) + S(A|B). \quad (2.170)$$

Cette relation d'incertitude (2.170) fournit une limite sur les incertitudes des résultats de mesure qui dépend de la quantité d'intrication entre la particule mesurée A et la mémoire quantique B . $S(P|B)$, $S(Q|B)$ et $S(A|B)$ représentent les entropies conditionnelles quantiques, avec

$$S(P|B) = S(\rho_{PB}) - S(\rho_B), \quad \text{et} \quad S(Q|B) = S(\rho_{QB}) - S(\rho_B), \quad (2.171)$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{PB} &= \sum_i (|p_i\rangle \langle p_i| \otimes \mathbb{1}) \rho_{AB} (|p_i\rangle \langle p_i| \otimes \mathbb{1}), \\ \rho_{QB} &= \sum_i (|q_i\rangle \langle q_i| \otimes \mathbb{1}) \rho_{AB} (|q_i\rangle \langle q_i| \otimes \mathbb{1}). \end{aligned} \quad (2.172)$$

La relation (2.170) a été reformulée par Pati et ses collègues sous la forme suivante [127]

$$S(P|B) + S(Q|B) \geq -2 \log_2 c(P, Q) + S(A|B) + \max\{0, \mathcal{Q}_A(\rho_{AB}) - \mathcal{J}_A(\rho_{AB})\}, \quad (2.173)$$

où $\mathcal{Q}_A(\rho_{AB})$ et $\mathcal{J}_A(\rho_{AB})$ désignent respectivement la discordance quantique (2.1) et la corrélation classique (2.2) de l'état ρ_{AB} après la mesure des observables P et Q sur le sous-système A . On prend les quantités $U_B^{P,Q}$ et $L_B^{P,Q}$ comme

$$\begin{aligned} U_B^{P,Q} &= S(P|B) + S(Q|B), \\ L_B^{P,Q} &= -2 \log_2 c(P, Q) + S(A|B) + \max\{0, \mathcal{Q}_A(\rho_{AB}) - \mathcal{J}_A(\rho_{AB})\}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

on peut donc définir le gap d'incertitude dans un état quantique ρ_{AB} correspondant au paire d'observables $\{P, Q\}$ comme $\Delta^{P,Q} = U_B^{P,Q} - L_B^{P,Q}$, qui est une grandeur non négative et peut caractériser la différence entre l'incertitude des résultats de mesures de P et Q .

2.6 Distributions des corrélations quantiques dans les systèmes quantiques multipartites

2.6.1 Monogamie des corrélations quantiques

Au cours des dernières décennies, nous avons vu de nombreuses avancées pour la compréhension de l'intrication, et plus généralement, pour le développement de la théorie des corrélations

quantiques. Néanmoins, le cadre avec plus de deux sous-systèmes reste un défi même d'un point de vue conceptuel, sans parler de leurs quantifications. Dans les systèmes multipartites, il est bien connu qu'une particule ne peut pas partager librement l'intrication avec deux ou plusieurs particules. Cette restriction, qui limite la fragilité des corrélations quantiques dans les états quantiques multipartites, est généralement appelée monogamie [83]. La propriété de la monogamie est importante dans de nombreuses tâches d'information quantique comme la cryptographie quantique par exemple. Dans ce contexte, le manque de monogamie est considéré comme un énorme obstacle à la mise en œuvre de la sécurité de l'information repose sur le fait que l'espion n'a pas les compétences pour corrélérer avec les parties de confiance [128]. En outre, la propriété de monogamie quantifie la quantité d'informations qu'un espion pourrait obtenir sur la clé de secrète [129].

La monogamie de l'intrication est l'un des phénomènes de la physique quantique qui la distingue de la physique classique. De plus, il donne lieu à la quantification et à la caractérisation de la distribution de l'intrication entre les sous-systèmes d'un système multipartite. Classiquement, trois bits aléatoires peuvent être corrélés au maximum. Cependant, il n'est pas possible de préparer trois qubits de manière à ce que deux qubits soient intriqués au maximum [83], c'est-à-dire qu'un système quantique intriqué avec l'un des autres sous-systèmes limite son intrication avec les autres. Par exemple, pour un système quantique à trois qubits désignés par A , B et C , si A et B sont dans un état maximalelement intriqué, alors A ne peut pas du tout être intriqué avec C . Ceci indique qu'il doit obéir à une relation de monogamie sur la quantité d'intrication entre les paires AB et AC . La monogamie usuelle d'une mesure de l'intrication quantique E implique que l'intrication $E(\rho_{A|BC})$ entre le sous-système A et l'autre partie BC satisfait l'inégalité suivante

$$E(\rho_{A|BC}) \geq E(\rho_{AB}) + E(\rho_{AC}), \quad (2.175)$$

où $E(\rho_{AB})$ (resp. $E(\rho_{AC})$) représente l'intrication entre les systèmes A et B (resp. C). L'inégalité (2.175) a été prouvée à l'origine pour des états arbitraires à trois qubits, en adoptant la concurrence (1.96) comme mesure de l'intrication. Une question naturelle intéressante à cet égard est de savoir si la monogamie des corrélations est vraie pour des corrélations autres que l'intrication. La réponse à cette question a été abordée pour la discorde quantique dans la référence [130]. Dans l'une de nos contributions, nous montrons également que l'incertitude quantique locale satisfait la relation de monogamie dans des états quantiques à trois qubits [131] (voir la partie des contributions). La monogamie des corrélations quantiques est une propriété satisfaite par certaines mesures d'intrication dans un scénario multipartite (par exemple, la concurrence). Ici, il peut être généralisé pour une mesure des corrélations quantiques \mathcal{Q} plus générale. Soit \mathcal{Q} une mesure des corrélations quantiques arbitraire et $\rho_{AB_1B_2\dots B_{N-1}}$ est un état multipartite partagé entre N parties, la condition de monogamie pour une mesure de corrélation quantique \mathcal{Q} que les corrélations quantiques par paires dans l'état multipartite sont distribuées de telle manière que la relation suivante est satisfaite

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB_1}) + \mathcal{Q}(\rho_{AB_2}) + \dots + \mathcal{Q}(\rho_{AB_{N-1}}) \leq \mathcal{Q}(\rho_{A|B_1B_2\dots B_{N-1}}), \quad (2.176)$$

où ρ_{AB_i} ($i = 1, \dots, N-1$) sont les matrices densité réduites avec $\rho_{AB_1} = \text{Tr}_{B_2\dots B_{N-1}}[\rho_{AB_1B_2\dots B_{N-1}}]$, etc. La violation de l'inégalité ci-dessus implique que la mesure de corrélation quantique \mathcal{Q} est polygame pour l'état correspondant. Par souci de simplicité, nous désignons $\mathcal{Q}(\rho_{AB_i})$ par \mathcal{Q}_{AB_i} , et $\mathcal{Q}(\rho_{A|B_1B_2\dots B_{N-1}})$ par $\mathcal{Q}_{A|B_1B_2\dots B_{N-1}}$. On peut alors définir une quantité de monogamie $\delta_{\mathcal{Q}}$ pour l'état à N -partite $\rho_{AB_1B_2\dots B_{N-1}}$ comme

$$\delta_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_{A|B_1B_2\dots B_{N-1}} - \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{Q}_{AB_i}, \quad (2.177)$$

et la positivité de $\delta_{\mathcal{Q}}$ pour tous les états quantiques implique la monogamie de la mesure \mathcal{Q} . Sinon, \mathcal{Q} est polygame.

2.6.2 Loi de conservation entre l'intrication et la discordance quantique

2.6.2.1 Pour les systèmes à trois qubits

Élucider la façon dont la corrélation quantique est distribuée dans les systèmes multipartites est certainement important pour les technologies de traitement de l'information et de la communication dans des scénarios multi-utilisateurs. À cet effet, une série d'efforts majeurs ont été consacrés par la communauté scientifique pour comprendre la distribution des corrélations quantiques dans les systèmes multipartites. Il est bien connu que, pour un état pur bipartite, la définition de la discordance quantique (2.1) coïncide avec celle de l'intrication de formation (1.89). Mais la question de savoir comment ces deux quantités sont liées pour les états mixtes est toujours restée ouverte. Par une extension du système bipartite mixte à sa version tripartite purifiée, Fanchini et ses collaborateurs [132] ont montré comment l'intrication et la discordance quantique se répartissent dans un système pur tripartite arbitraire. Considérons d'abord un système arbitraire représenté par une matrice densité ρ_{ABC} avec A et B représentant deux sous-systèmes et C représentant le système de purification ou l'environnement, puisque, dans ce cas, ABC est pure. Comme nous l'avons déjà vu, l'intrication de formation et la corrélation classique sont directement liées dans un système tripartite pur par la relation de Koashi-Winter (2.22),

$$E_{AB} + \mathcal{J}_{A|C} = S_A, \quad \text{et} \quad E_{AC} + \mathcal{J}_{A|B} = S_A, \quad (2.178)$$

qui exprime une sorte de monogamie entre ces mesures distinctes, avec $E_{AB} \equiv E_f(\rho_{AB})$ est l'intrication de formation entre les sous-systèmes A et B , $\mathcal{J}_{A|C} \equiv \mathcal{J}_A(\rho_{AC})$ est la corrélation classique entre A et C , $S_A \equiv S(\rho_A)$ est l'entropie de von Neumann du sous-système A . La même chose s'applique à E_{AC} , E_{BC} , $\mathcal{J}_{A|B}$, $\mathcal{J}_{B|C}$, S_B et S_C . En ajoutant aux deux côtés les informations mutuelles ; \mathcal{I}_{AC} entre A et C , et \mathcal{I}_{AB} entre A et B , alors l'équation (2.178) peut facilement être réécrite pour relier l'intrication et la discordance comme

$$E_{AB} = \mathcal{Q}_{A|C} + S_{A|C}, \quad E_{AC} = \mathcal{Q}_{A|B} + S_{A|B}, \quad (2.179)$$

où $S_{A|C} = S_{AC} - S_C$ et $S_{A|B} = S_{AB} - S_B$ sont les entropies conditionnelles. $\mathcal{Q}_{A|C}$ représente la discordance quantique de l'état ρ_{AC} si la mesure est effectuée sur le sous-système A , et $\mathcal{Q}_{A|B}$ désigne la discordance quantique de l'état ρ_{AB} si la mesure est effectuée sur le même sous-système A . On peut alors considérer le sous-système A comme une particule centrale du système tripartite dans lequel il est toujours mesuré. D'autre part, toujours que nous avons un état pur, si nous le divisons en deux parties, alors les entropies de von Neumann correspondantes seront équivalentes. Par exemple, pour un état pur quadripartite $ABCD$, nous trouverons que $S_{AB} \equiv S_{CD}$, $S_{ABC} \equiv S_D$, et $S_A \equiv S_{BCD}$, etc. C'est un résultat bien connu de l'entropie de von Neumann (voir le livre de Nielsen et Chuang [66] pour plus de détails). En utilisant ces résultats, nous constatons que

$$S_{A|B} + S_{A|C} = S_{AB} - S_A + S_{AC} - S_C = 0. \quad (2.180)$$

Ainsi, la somme des intrications E_{AB} et E_{AC} conduit à la loi de conservation suivante

$$E_{AB} + E_{AC} = \mathcal{Q}_{A|B} + \mathcal{Q}_{A|C}. \quad (2.181)$$

Cela signifie que la somme de toutes les intrications bipartites partagés avec un sous-système particulier (ici le sous-système A), mesurées par l'intrication de formation, ne peut pas être augmentée sans augmenter, de la même quantité, la somme de toutes les discordances quantiques partagées avec ce même sous-système.

En outre, si l'on effectue la mesure sur toutes les parties du système tripartite, on peut trouver un autre type de la loi de conservation entre l'intrication de formation et la discordance quantique. Cette loi a une forme cyclique de sorte que nous n'avons pas de particule centrale

comme dans le cas précédent. Pour le trouver, on effectue d'abord les mesures locales sur les sous-systèmes B et C . On trouve ensuite

$$E_{BC} = \mathcal{Q}_{B|A} + S_{B|A}, \quad E_{CA} = \mathcal{Q}_{C|B} + S_{C|B}. \quad (2.182)$$

De la même manière que l'équation (2.180), on voit facilement que

$$S_{A|C} + S_{B|A} + S_{C|B} = S_{AC} - S_C + S_{AB} - S_A + S_{BC} - S_B = 0, \quad (2.183)$$

et la somme des intrications bipartites devient

$$E_{AB} + E_{BC} + E_{CA} = \mathcal{Q}_{B|A} + \mathcal{Q}_{C|B} + \mathcal{Q}_{A|C}. \quad (2.184)$$

La relation ci-dessus (2.184) montre que la somme des communications quantiques nécessaires pour simuler la corrélation présente dans chaque bipartition, quantifiée par l'intrication de formation E , est égale à la somme des informations non accessibles par des mesures locales, quantifiée par la discordance quantique \mathcal{Q} .

2.6.2.2 Pour les systèmes à quatre particules

Nous allons maintenant traiter le cas d'un système quantique pur à quatre particules $ABCD$, cela équivaut à un système tripartite mixte ABC purifié par un système auxiliaire D . Si nous divisons ce système en trois parties, où deux parties ne contiennent qu'un seul sous-système et l'autre partie est composée de deux sous-systèmes, alors les relations de Koashi-Winter deviennent

$$E_{A|BC} = \mathcal{Q}_{A|D} + S_{A|D}, \quad E_{A|CD} = \mathcal{Q}_{A|B} + S_{A|B}. \quad (2.185)$$

Dans ce cas, la somme des entropies conditionnelles $S_{A|D}$ et $S_{A|B}$ ne s'annule pas. En utilisant la forte sous-additivité de l'entropie de von Neumann dans un état pur [133], on obtient

$$S_{A|D} + S_{A|B} = S_{AB} - S_B + S_{BC} - S_{ABC} \geq 0. \quad (2.186)$$

Par conséquent, l'inégalité de la distribution de l'intrication et de la discordance quantique dans les systèmes à quatre particules, si l'on considère le sous-système A comme une particule centrale, est donnée par

$$E_{A|BC} + E_{A|CD} \geq \mathcal{Q}_{A|B} + \mathcal{Q}_{A|D}. \quad (2.187)$$

De même, les relations de Koashi-Winter des intrications bipartites des sous-systèmes B et D avec la particule centrale A sont

$$E_{AB} = \mathcal{Q}_{A|CD} + S_{A|CD}, \quad E_{AD} = \mathcal{Q}_{A|BC} + S_{A|BC}, \quad (2.188)$$

et avec un raisonnement similaire, nous obtenons la relation suivante

$$E_{AB} + E_{AD} \leq \mathcal{Q}_{A|BC} + \mathcal{Q}_{A|CD}. \quad (2.189)$$

En outre, il est possible de trouver d'autres inégalités entre l'intrication de formation et la discordance quantique en calculant toutes les intrications possibles avec la particule centrale A . Pour ce faire, nous devons utiliser les relations fondamentales suivantes

$$E_{A|BC} = \mathcal{Q}_{A|D} + S_{A|D}, \quad E_{A|BD} = \mathcal{Q}_{A|C} + S_{A|C}, \quad E_{A|CD} = \mathcal{Q}_{A|B} + S_{A|B}. \quad (2.190)$$

Dans ce cas, la somme des entropies conditionnelles est positive car elle peut être écrite comme une combinaison de trois fortes inégalités de sous-additivité [133]. Nous avons alors

$$E_{A|BC} + E_{A|CD} + E_{A|DB} \geq \mathcal{Q}_{A|B} + \mathcal{Q}_{A|C} + \mathcal{Q}_{A|D}. \quad (2.191)$$

Maintenant, si nous calculons tous les intrications qubit-qubit avec la particule centrale A , nous avons les inégalités suivantes

$$E_{AB} = \mathcal{Q}_{A|CD} + S_{A|CD}, \quad E_{AC} = \mathcal{Q}_{A|DB} + S_{A|DB}, \quad E_{AD} = \mathcal{Q}_{A|CB} + S_{A|CB}. \quad (2.192)$$

Cela conduit à une nouvelle relation de distribution de l'intrication et de la discorde qui s'écrit

$$E_{AB} + E_{AC} + E_{AD} \leq \mathcal{Q}_{A|CD} + \mathcal{Q}_{A|DB} + \mathcal{Q}_{A|CB}. \quad (2.193)$$

Les inégalités mentionnées ci-dessus expliquent comment l'intrication et la discorde sont distribués lorsque l'une des particules est traitée comme une particule centrale. Ces résultats montrent qu'il est impossible de trouver une loi de conservation entre l'intrication de formation et la discorde quantique avec une particule centrale dans des systèmes à quatre particules. Mais si l'on effectue des mesures locales sur tous les sous-systèmes, cela donne-t-il une loi de conservation de type cyclique? pour répondre à cette question, il faut d'abord trouver les relations de Koashi-Winter liées à toutes les mesures locales. Dans ce cas, on trouve

$$\begin{aligned} E_{B|CD} &= \mathcal{Q}_{B|A} + S_{B|A}, & E_{C|DA} &= \mathcal{Q}_{C|B} + S_{C|B}, \\ E_{D|AB} &= \mathcal{Q}_{D|C} + S_{D|C}, & E_{A|BC} &= \mathcal{Q}_{A|D} + S_{A|D}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Ici, la somme des entropies conditionnelles peut être écrite comme une combinaison de deux fortes inégalités de sous-additivité [133]

$$S_{B|A} + S_{A|D} + S_{C|B} + S_{D|C} = (S_{AB} + S_{BC} - S_B - S_{ABD}) + (S_{BC} + S_{CD} - S_C - S_{BCD}) \geq 0, \quad (2.195)$$

qui est toujours positive, on obtient alors l'inégalité suivante

$$E_{A|BC} + E_{B|CD} + E_{C|DA} + E_{D|AB} \geq \mathcal{Q}_{A|D} + \mathcal{Q}_{D|C} + \mathcal{Q}_{C|B} + \mathcal{Q}_{B|A}. \quad (2.196)$$

Le dernier cas restant est de calculer toutes les intrications bipartites entre les deux sous-systèmes. Cela nous donnera les relations fondamentales suivantes

$$\begin{aligned} E_{CD} &= \mathcal{Q}_{C|AB} + S_{C|AB}, & E_{AB} &= \mathcal{Q}_{A|CD} + S_{A|CD}, \\ E_{DA} &= \mathcal{Q}_{D|BC} + S_{D|BC}, & E_{BC} &= \mathcal{Q}_{B|AD} + S_{B|AD}. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Avec le même raisonnement, la relation cyclique entre l'intrication de formation et la discorde quantique dans les systèmes à quatre particules s'écrit

$$E_{AB} + E_{BC} + E_{CD} + E_{DA} \leq \mathcal{Q}_{A|CD} + \mathcal{Q}_{B|DA} + \mathcal{Q}_{C|AB} + \mathcal{Q}_{D|BC}. \quad (2.198)$$

2.6.2.3 Pour les systèmes à cinq particules

Pour les systèmes quantiques à cinq particules, il faut trouver les égalités de la distribution des corrélations d'une manière très similaire au cas d'un état en trois parties. Dans ce cas, nous pouvons trouver trois lois de conservation à partir de l'équation (2.181). Elles sont donnés par

$$\begin{aligned} E_{A|BC} + E_{A|DE} &= \mathcal{Q}_{A|BC} + \mathcal{Q}_{A|DE}, \\ E_{A|BD} + E_{A|CE} &= \mathcal{Q}_{A|BD} + \mathcal{Q}_{A|CE}, \\ E_{A|BE} + E_{A|CD} &= \mathcal{Q}_{A|BE} + \mathcal{Q}_{A|CD}. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Il est donc clair que la loi de conservation globale, qui contient tous les sous-systèmes d'un système à cinq particules, s'écrit comme suit

$$E_{A|BC} + E_{A|DE} + E_{A|BD} + E_{A|CE} + E_{A|BE} + E_{A|CD} = \mathcal{Q}_{A|DE} + \mathcal{Q}_{A|BC} + \mathcal{Q}_{A|CE} + \mathcal{Q}_{A|BD} + \mathcal{Q}_{A|CD} + \mathcal{Q}_{A|BE}. \quad (2.200)$$

Nous pouvons alors conclure que cette loi de conservation contient toutes les combinaisons d'intrication et de discordance de la particule centrale A avec toutes les autres combinaisons possibles de deux particules. Cela signifie que le cas d'un système à cinq particules est très similaire au cas à trois particules, où la somme des intrications E qu'une particule centrale A partage avec toutes les autres combinaisons possibles de deux particules est égale à la somme de toutes les discordances quantiques \mathcal{Q} entre les mêmes bipartitions. D'un autre côté, il est également très intéressant de voir si l'on peut retrouver la même loi de conservation cyclique (2.184) si les mesures locales s'appliquent à toutes les parties du système. À partir de l'équation fondamentale de Koashi-Winter, nous pouvons écrire les équations suivantes

$$\begin{aligned}
E_{A|BC} &= \mathcal{Q}_{A|ED} + S_{A|ED} = \mathcal{Q}_{A|ED} + S_{BC} - S_{ED} \\
E_{C|DE} &= \mathcal{Q}_{C|BA} + S_{C|BA} = \mathcal{Q}_{C|BA} + S_{DE} - S_{BA} \\
E_{E|AB} &= \mathcal{Q}_{E|DC} + S_{E|DC} = \mathcal{Q}_{E|DC} + S_{AB} - S_{DE} \\
E_{B|CD} &= \mathcal{Q}_{B|AE} + S_{B|AE} = \mathcal{Q}_{B|AE} + S_{CD} - S_{AE} \\
E_{D|AE} &= \mathcal{Q}_{D|CB} + S_{D|CB} = \mathcal{Q}_{D|CB} + S_{EA} - S_{CB}.
\end{aligned} \tag{2.201}$$

De la même façon que dans le cas à trois qubits, les entropies négatives annulent les entropies positives. Donc le cycle se ferme et la loi de conservation devient

$$E_{A|BC} + E_{B|CD} + E_{C|DE} + E_{D|EA} + E_{E|AB} = \mathcal{Q}_{A|DE} + \mathcal{Q}_{B|EA} + \mathcal{Q}_{C|AB} + \mathcal{Q}_{D|BC} + \mathcal{Q}_{E|CD}. \tag{2.202}$$

Ces résultats montrent que l'on peut généraliser la loi de conservation des corrélations quantiques aux systèmes multipartites purs si le nombre de parties N est impair.

2.6.2.4 Pour les systèmes à six particules

Considérons maintenant le cas d'un système quantique pur à six particules ρ_{123456} , qui équivaut également à un système quantique mélange à cinq particules et purifié par un sixième système auxiliaire. La difficulté de trouver la loi de conservation consiste à diviser correctement les parties du système étudié, car il y a plus de façons de le faire en six parties qu'en cinq. Le meilleur choix dans les systèmes à six partis est d'écrire les équations fondamentales comme

$$\begin{aligned}
E_{1|23} &= \mathcal{Q}_{1|654} + S_{1654} - S_{654}, & E_{4|56} &= \mathcal{Q}_{4|321} + S_{4321} - S_{321}, \\
E_{3|456} &= \mathcal{Q}_{3|21} + S_{321} - S_{21}, & E_{6|123} &= \mathcal{Q}_{6|54} + S_{654} - S_{54}, \\
E_{6|12} &= \mathcal{Q}_{6|543} + S_{6543} - S_{543}, & E_{3|45} &= \mathcal{Q}_{3|216} + S_{3216} - S_{216}, \\
E_{2|345} &= \mathcal{Q}_{2|16} + S_{216} - S_{16}, & E_{5|612} &= \mathcal{Q}_{5|43} + S_{543} - S_{43}, \\
E_{5|61} &= \mathcal{Q}_{5|432} + S_{5432} - S_{432}, & E_{2|34} &= \mathcal{Q}_{2|165} + S_{2165} - S_{165}, \\
E_{1|234} &= \mathcal{Q}_{1|65} + S_{165} - S_{65}, & E_{4|561} &= \mathcal{Q}_{4|32} + S_{432} - S_{32}.
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Dans ce cas, la somme des entropies s'annule en raison de la propriété de l'entropie de von Neumann dans les états purs (c-à-d, $S_{321} = S_{654}$, $S_{65} = S_{4321}$, ect). Il en résulte la loi de conservation suivante

$$\begin{aligned}
E_{1|23} + E_{1|234} + E_{2|34} + E_{2|345} + E_{3|45} + E_{3|456} + E_{4|56} + E_{4|561} + E_{5|61} + \\
E_{5|612} + E_{6|12} + E_{6|123} = \mathcal{Q}_{1|654} + \mathcal{Q}_{1|65} + \mathcal{Q}_{2|165} + \mathcal{Q}_{2|16} + \\
\mathcal{Q}_{3|216} + \mathcal{Q}_{3|21} + \mathcal{Q}_{4|321} + \mathcal{Q}_{4|32} + \mathcal{Q}_{5|432} + \mathcal{Q}_{5|43} + \mathcal{Q}_{6|543} + \mathcal{Q}_{6|54}.
\end{aligned} \tag{2.204}$$

2.6.2.5 Généralisation de la loi de conservation pour les systèmes multipartites à N -particules

Pour expliquer comment la discordance et l'intrication quantique sont distribués dans les systèmes multipartites, il est intéressant de généraliser les équations (2.202) et (2.204) aux systèmes

multipartites avec N particules. Pour ce faire, nous devons distinguer deux cas, la première loi de conservation s'applique aux systèmes quantiques multipartites comportant un nombre de parties N paires, et le second au nombre de parties impaires. Dans les états multipartites purs, où N est impair et $n = (N - 2) / 2$, nous pouvons écrire les relations de Koashi-Winter comme

$$\begin{aligned}
E_{1|2,3,\dots,n+1} &= \mathcal{Q}_{1|N,N-1,\dots,n+2} + S_{2,3,\dots,n+1} - S_{N,N-1,\dots,n+2}, \\
E_{n+1|n+2,n+3,\dots,N} &= \mathcal{Q}_{n+1|n,n-1,\dots,1} + S_{n+2,n+3,\dots,N} - S_{n,n-1,\dots,1}, \\
E_{N|1,2,\dots,n} &= \mathcal{Q}_{N|N-1,N-2,\dots,n+1} + S_{1,2,\dots,n} - S_{N-1,N-2,\dots,n+1}, \\
E_{n|n+1,n+2,\dots,N-1} &= \mathcal{Q}_{n|n-1,n-2,\dots,N} + S_{n+1,n+2,\dots,N-1} - S_{n-1,n-2,\dots,N}, \\
E_{N-1|N,1,2,\dots,n-1} &= \mathcal{Q}_{N-1|N-2,N-3,\dots,n} + S_{N,1,2,\dots,n-1} - S_{N-2,N-3,\dots,n}, \\
&\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
E_{n+2|n+3,n+4,\dots,1} &= \mathcal{Q}_{n+2|n+1,n,\dots,2} + S_{n+3,n+4,\dots,1} - S_{n+1,n,\dots,2}.
\end{aligned} \tag{2.205}$$

La somme de toutes les équations ci-dessus conduit à l'annulation de toutes les entropies. Ensuite, la loi de conservation générale entre l'intrication et la discordance, pour les états multipartites purs avec un nombre impair de parties N , est donnée par

$$\begin{aligned}
E_{1|2,3,\dots,n+1} + E_{2|3,4,\dots,n+2} + \dots + E_{N|1,2,\dots,n} &= \mathcal{Q}_{1|N,N-1,\dots,n+2} \\
&\quad + \mathcal{Q}_{2|1,N,N-1,\dots,n+3} + \dots + \mathcal{Q}_{N|N-1,N-2,\dots,n+1}.
\end{aligned} \tag{2.206}$$

Cette loi de conservation généralisée nous donne une relation entre l'intrication de formation et la discordance quantique lorsqu'un seul sous-système est mesuré. Elle montre également quand la somme des informations quantiques nécessaires pour former l'intrication dans les parties bipartites est égale à la somme des informations localement inaccessibles par la mesure.

De la même manière, on peut généraliser l'équation (2.204) aux états multipartites purs avec un nombre de particules N pair. On prend dans ce cas $n = N/2$, alors la loi de conservation entre l'intrication de formation et la discordance entropique est

$$\begin{aligned}
E_{1|23..n} + E_{1|23..n+1} + E_{2|34..n+1} + E_{2|34..n+2} + \dots + E_{N|12..n-1} + E_{N|12..n} &= \mathcal{Q}_{1|N-1,N-2,\dots,n+1} \\
&\quad + \mathcal{Q}_{1|N-1,N-2,\dots,n} + \mathcal{Q}_{2|1,N-1,N-2,\dots,n+2} + \mathcal{Q}_{2|1,N-1,N-2,\dots,n+1} \\
&\quad + \dots + \mathcal{Q}_{N|N-1,N-2,\dots,n} + \mathcal{Q}_{N|N-1,N-2,\dots,n-1}.
\end{aligned} \tag{2.207}$$

Ces lois de conservation et le principe de monogamie régissent la manière dont l'intrication et la discordance quantique sont distribuées dans les systèmes multipartites. Ces égalités relient les contraintes de l'intrication distribuée à la discordance distribuée et vice versa. Cela signifie que les propriétés de ces deux mesures sont profondément liées.

CHAPITRE 3

LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES QUANTIQUES OUVERTS : LA COHÉRENCE ET DECOHÉRENCE QUANTIQUE

Dans la plupart des situations réalistes, un système quantique doit être considéré comme un système quantique ouvert, couplé à un environnement externe qui induit à un mélange d'états du système, à savoir la décohérence [134], et à un échange d'énergie entre le système et l'environnement, c'est-à-dire la dissipation [135]. Les systèmes quantiques réalistes ne sont jamais complètement isolés de leur environnement, et que lorsqu'un système quantique interagit avec son environnement, il se trouve en général rapidement et fortement intriqué avec un grand nombre de degrés de liberté environnementaux. Cette intrication influence considérablement ce que nous pouvons observer localement en mesurant le système, même lorsque d'un point de vue classique, l'influence de l'environnement sur le système (en termes de dissipation, de perturbations, de bruit, etc) est négligeable [136]. Parfois, les effets de ces systèmes ouverts sont faibles, mais ils ne peuvent jamais être ignorés. Cela est particulièrement important dans le domaine du traitement de l'information quantique, où l'existence d'un avantage quantique par rapport au traitement de l'information classique est souvent dérivée d'abord de la perspective idéalisée du système fermé, puis doit être étendue dans le cadre réaliste du système ouvert.

L'objectif principal de la théorie des systèmes quantiques ouverts est d'éviter d'avoir à interagir avec le système complet, comprenant à la fois le système quantique ouvert lui-même et son environnement, en décrivant la dynamique du système ouvert dans son espace de Hilbert réduit. La structure de l'état initial système-environnement est fondamentale pour déterminer l'évolution de la matrice densité réduite du système quantique ouvert $\rho_S(t)$, définie en traçant les degrés de liberté de l'environnement par rapport à la matrice densité du système complet $\rho_T(t)$. D'autre part, tout processus physique qui opère ou transforme l'état d'un système quantique est appelé processus quantique, et il y a toujours un hamiltonien qui donne lieu à un tel processus. En principe, l'évolution d'un système quantique fermé S est toujours donnée par une transformation unitaire et l'hamiltonien n'agit que sur l'état du système ρ_S . Cependant, il est difficile d'isoler un système de son environnement, ce qui conduit à une interaction inévitable avec l'environnement. De plus, leur dynamique peut être classée en deux grandes classes, les processus quantiques Markoviens [137] et les processus quantiques non-Markoviens [33], selon que le processus d'évolution présente un comportement sans mémoire ou qu'il a des effets de mémoire.

En revanche, il est maintenant reconnu que l'origine de l'avantage quantique dans les tâches d'information quantique ne provient pas seulement de la corrélation quantique. En tant qu'autre

concept fondamental de la science de l'information quantique, la cohérence quantique a fait l'objet de nombreuses discussions. En effet, la cohérence quantique découlant du principe de superposition quantique est un aspect fondamental de la physique quantique [66]. Le laser [138] et la superfluidité [139] sont des exemples de cohérence quantique, dont les effets sont évidents à l'échelle macroscopique. Cependant, le cadre de quantification de la cohérence n'a été étudié de façon méthodique que récemment. La première tentative d'aborder la classification de la cohérence quantique comme une ressource physique est donnée par Baumgratz et ses collaborateurs [140] qui ont établi un cadre rigoureux pour la quantification de la cohérence basée sur des mesures de distance dans un espace des états de dimension finie. D'autre part, l'un des principaux objectifs de la théorie de l'information quantique est de trouver des moyens efficaces de préserver la cohérence au sein d'un système quantique. La raison est double ; Premièrement, la cohérence représente une caractéristique fondamentale des états quantiques et est liée à toutes les formes de corrélations quantiques [141]. Deuxièmement, la cohérence elle-même est une ressource précieuse pour de nombreuses nouvelles technologies quantiques, mais l'interaction inévitable des dispositifs quantiques avec l'environnement décohérent souvent les états d'entrée et induit une perte de la cohérence, ce qui affaiblit la supériorité de ces technologies quantiques [66].

La première partie de ce chapitre fournit une description de base des systèmes quantiques ouverts à l'interaction avec leur environnement. Nous commencerons par fournir les axiomes de base nécessaires pour étudier et comprendre les systèmes fermés ainsi que les systèmes ouverts. Dans le fil de notre développement, on s'attèle en particulier sur le cas correspondant à une situation très simple, où un système principal interagit avec un réservoir où l'interaction est décrite par le modèle de Jaynes-Cummings [146]. Dans cette partie, nous dérivons l'équation maîtresse de Born-Markov à partir de l'équation de Liouville-von Neumann. Ensuite, nous dérivons la forme de Lindblad de l'équation maîtresse markovienne qui est un outil important pour le traitement des évolutions non-unitaires. Vers la fin de ce chapitre, nous présentons les outils et le formalisme mathématique de la théorie de la cohérence et ses méthodes de quantification. Puis, nous donnons les liens entre la cohérence quantique et les mesures des corrélations quantiques, et comment on peut quantifier la cohérence en termes d'intrication et de la discordance quantique.

3.1 Dynamique d'un système quantique ouvert

En général, les systèmes physiques sont dynamiques et subissent des processus d'évolution avec le temps. Un processus d'évolution pour un système isolé et fermé est unitaire. Cependant, aucun système quantique ne peut rester isolé de son environnement. Il y a toujours une interaction entre un système et son environnement. L'évolution conjointe du système et de l'environnement est considérée comme une opération unitaire alors que l'évolution locale du système principal peut être non-unitaire. Ce processus non-unitaire provoque un flux d'informations entre le système et l'environnement, qui peut modifier l'entropie du système, et donc modifier la corrélation quantique présente dans le système.

3.1.1 Représentation de Kraus

Une bonne compréhension de la dynamique des systèmes quantiques ouverts est très importante dans de nombreux domaines de la physique, allant de l'optique quantique au traitement de l'information quantique [31]. En général, on peut supposer une interaction entre le système ouvert, désigné par S , et l'environnement, désigné par E . Cet environnement est un système quantique auquel est associé un espace de Hilbert de dimension arbitraire. L'ensemble du système $S + E$ évolue de façon unitaire, décrivant une évolution unitaire conjointe donnée par

$U(t) = e^{-iHt}$. Si l'état total initial est $\rho(0)$, l'équation de Schrödinger conduit à l'état

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t). \quad (3.1)$$

Puisque l'opérateur densité de l'environnement ρ_E est positif et normalisé, alors il présente une décomposition spectrale sur une base orthonormée avec des valeurs propres positives. Donc nous avons

$$\rho_E(0) = \sum_{\nu} \vartheta_{\nu} |\nu\rangle_E \langle \nu|, \quad (3.2)$$

où ϑ_{ν} sont les valeurs propres (c'est-à-dire les probabilités) et $\{|\nu\rangle\}$ sont les vecteurs propres orthonormés correspondants. Il faut mentionner ici que l'état initial du système ouvert S peut varier, mais l'état initial de l'environnement E est considéré comme déterminé par des conditions externes. Dans ce contexte, il est naturel de se demander quelle est l'évolution temporelle du système ouvert S ? Pour répondre à cette question, nous pourrions suivre les arguments présentés dans le livre de Breuer et Petruccione [142] et trouver l'expression explicite de l'opérateur densité $\rho_S(t)$. Premièrement, l'état du système est trouvé en effectuant une trace partielle sur tout le degré de liberté de l'environnement, c'est-à-dire $\rho_S(t) = \text{Tr}_E[\rho(t)]$. On peut effectuer la trace partielle dans la base orthonormée des états propres de l'environnement comme

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}_E [U(t) \rho(0) U^\dagger(t)] \\ &= \sum_{\nu} \langle \nu| U(t) \rho(0) U^\dagger(t) |\nu\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans la plupart des études sur la dynamique des systèmes ouverts, on suppose que l'état de système ouvert et son environnement est factorisé (séparé) à $t = 0$, c'est-à-dire qu'il est complètement découplé et qu'ils sont décrits par l'opérateur densité de la forme

$$\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0). \quad (3.4)$$

En utilisant l'équation (3.3), on obtient alors

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_{\mu} \langle \mu| \left[U(t) \rho_S(0) \otimes \sum_{\nu} \vartheta_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu| U^\dagger(t) \right] |\mu\rangle \\ &= \sum_{\mu\nu} \sqrt{\vartheta_{\nu}} \langle \mu| U(t) |\nu\rangle_E \rho_S(0) \sqrt{\vartheta_{\nu}} \langle \nu| U^\dagger(t) |\mu\rangle_E \\ &= \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}(t) \rho_S(0) K_{\mu\nu}^\dagger(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec les opérateurs $\{K_{\mu\nu}\}$ sont appelés les opérateurs de Kraus et sont donnés par

$$K_{\mu\nu}(t) = \sqrt{\vartheta_{\nu}} \langle \mu| U(t) |\nu\rangle. \quad (3.6)$$

Cette équation (3.6) définissant l'évolution du système en termes d'opérateurs de Kraus. D'autre part, l'état du système doit être normalisé à tout moment, donc cela nécessite

$$\text{Tr}[\rho_S(t)] = \text{Tr} \left[\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}(t) \rho_S(0) K_{\mu\nu}^\dagger(t) \right] = \text{Tr} \left[\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^\dagger(t) K_{\mu\nu}(t) \rho_S(0) \right] = 1. \quad (3.7)$$

Il est facile de vérifier que l'état du système est normalisé si les opérateurs de Kraus satisfont l'identité suivante

$$\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^\dagger(t) K_{\mu\nu}(t) = \mathbf{1}. \quad (3.8)$$

Cette condition peut être vérifiée en utilisant directement la définition des opérateurs de Kraus, donnée par l'équation (3.6). Ceci est obtenu comme

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^\dagger(t) K_{\mu\nu}(t) &= \sum_{\mu\nu} \vartheta_\nu \langle \mu | U(t) | \nu \rangle \langle \nu | U^\dagger(t) | \mu \rangle \\
&= \sum_{\nu} \vartheta_\nu \langle \nu | U^\dagger(t) \left(\sum_{\mu} | \mu \rangle \langle \mu | \right) U(t) | \nu \rangle \\
&= \sum_{\nu} \vartheta_\nu \langle \nu | \nu \rangle = \sum_{\nu} \vartheta_\nu = 1.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Notez que si nous avons $U(t) = U_S(t) \otimes U_E(t)$, les opérateurs de Kraus dans ce cas particulier deviennent

$$K_{\mu\nu}(t) = U_S(t) \sqrt{\vartheta_\nu} \langle \mu | U_E^\dagger(t) | \nu \rangle \equiv \kappa_{\mu\nu} U_S(t), \tag{3.10}$$

avec $\kappa_{\mu\nu} = \sqrt{\vartheta_\nu} \langle \mu | U_E^\dagger(t) | \nu \rangle$, alors la condition de normalisation implique

$$\sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}^\dagger(t) \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}(t) = \sum_{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}^* U_S^\dagger(t) U_S(t) = \mathbf{1}, \tag{3.11}$$

cela signifie que $\sum_{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}^* = 1$. En conséquence, l'état qui décrit l'évolution d'un système S s'écrit comme suit

$$\rho_S(t) = \sum_{\mu\nu} \kappa_{\mu\nu} U_S(t) \rho_S(0) \kappa_{\mu\nu}^* U_S^\dagger(t) = U_S(t) \rho_S(0) U_S^\dagger(t). \tag{3.12}$$

Cette équation (3.12) représente le cas d'une évolution dans un système fermé. Ainsi, la représentation des opérateurs de Kraus (3.5) est plus générale que l'équation de Schrödinger, car elle contient cette dernière comme un cas particulier.

3.1.2 Principales propriétés des opérateurs de Kraus

Comme nous l'avons vu dans l'équation (3.5), l'évolution de l'état d'un système quantique ouvert ρ_S peut être exprimée comme une évolution unitaire du système total composite $\{S+E\}$ et en effectuant une trace partielle sur tout les degrés de liberté de l'environnement E . Cela conduit à la représentation de Kraus suivante

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E [U(t) (\rho_S(0) \otimes \rho_E(0)) U^\dagger(t)] = \sum_{\beta} K_{\beta}(t) \rho_S(0) K_{\beta}^\dagger(t), \tag{3.13}$$

où nous avons combiné les indices $\mu\nu$ précédents en un seul indice $\beta \equiv (\mu\nu)$. À partir de l'équation (3.13), nous pouvons considérer la représentation de Kraus comme une application ou un canal où l'état initial passe à l'état final du système ouvert S . Il est donc logique d'écrire

$$\rho_S(t) = \Pi[\rho_S(0)] \quad \longleftrightarrow \quad \Pi : \rho_S(0) \mapsto \rho_S(t), \tag{3.14}$$

avec $\Pi[Y] \equiv \sum_{\beta} K_{\beta} Y K_{\beta}^\dagger$. Nous pouvons facilement identifier les trois propriétés clés de l'application du Kraus Π comme suit

✱ L'application Π est préserve la trace, c'est-à-dire

$$\text{Tr}[\Pi(\rho)] = \sum_{\beta} \text{Tr}(K_{\beta} \rho K_{\beta}^\dagger) = \sum_{\beta} \text{Tr}(K_{\beta}^\dagger K_{\beta} \rho) = \text{Tr} \left[\underbrace{\sum_{\beta} K_{\beta}^\dagger K_{\beta}}_{\mathbf{1}} \rho \right] = \text{Tr}[\rho]. \tag{3.15}$$

* L'application Π est linéaire. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\Pi [a\rho_a + b\rho_b] &= \sum_{\beta} \text{Tr} \left(K_{\beta} a \rho_a K_{\beta}^{\dagger} \right) + \sum_{\beta} \text{Tr} \left(K_{\beta} b \rho_b K_{\beta}^{\dagger} \right) \\
&= a \sum_{\beta} \text{Tr} \left(K_{\beta} \rho_a K_{\beta}^{\dagger} \right) + b \sum_{\beta} \text{Tr} \left(K_{\beta} \rho_b K_{\beta}^{\dagger} \right) \\
&= a\Pi [\rho_a] + b\Pi [\rho_b].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

* Π est positive. Cela signifie que l'application Π transforme les opérateurs positifs en opérateurs positifs. Supposons que l'opérateur $\Theta > 0$, c'est-à-dire qu'il n'a que des valeurs propres positives et que nous puissions écrire $\Theta = \sum_i \eta_i |i\rangle \langle i|$ avec $\eta_i \geq 0$. Pour prouver que $\Pi [\Theta] > 0$, il suffit de montrer que $\langle \nu | \Pi [\Theta] | \nu \rangle \geq 0$ pour tout $|\nu\rangle \in \mathcal{H}_S$. Pour vérifier cela, nous prenons $|\chi_{\beta}\rangle = K_{\beta}^{\dagger} |\nu\rangle$, donc

$$\langle \nu | \Pi [\Theta] | \nu \rangle = \sum_{\beta} \langle \nu | K_{\beta} \Theta K_{\beta}^{\dagger} | \nu \rangle = \sum_{\beta} \langle \chi_{\beta} | \Theta | \chi_{\beta} \rangle = \sum_{i\beta} \eta_i |\langle \chi_{\beta} | i \rangle|^2 \geq 0. \tag{3.17}$$

Par conséquent $\Pi [\Theta] > 0$, et Π lui-même est une application positive. De plus, nous pouvons dessiner un diagramme commutatif qui montre l'action de cette application dynamique $\Pi (t)$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E & \xrightarrow{\text{Evolution unitaire}} & \rho(t) = U(t) [\rho_S(0) \otimes \rho_E] U^{\dagger}(t) \\
\downarrow \text{Tr}_E & & \downarrow \text{Tr}_E \\
\rho_S(0) & \xrightarrow{\text{Application dynamique}} & \rho_S(t) = \Pi [\rho_S(0)]
\end{array} \tag{3.18}$$

3.1.3 Représentation de Kraus pour une condition initiale générale

3.1.3.1 Pour les états séparables

Dans cette partie, nous considérons le cas où l'état initial est un état séparable et voyons comment écrire l'état final dans la représentation de Kraus. l'état séparable s'écrit

$$\rho(0) = \sum_i p_i \rho_S^i \otimes \rho_E^i, \tag{3.19}$$

où ρ_S^i et ρ_E^i sont respectivement les états du système et de l'environnement et l'état initial du système est $\rho_S(0) = \text{Tr}_E [\rho(0)] = \sum_i p_i \rho_S^i$. La décomposition spectrale de la matrice densité de l'environnement est

$$\rho_E^i = \sum_{\nu_i} \xi_{\nu_i} |\nu_i\rangle \langle \nu_i|. \tag{3.20}$$

Une trace sur les degrés de liberté de l'environnement conduit à

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) &= \sum_{\mu, i, \nu_i} p_i \xi_{\nu_i} \langle \mu | U(t) \rho_S^i \otimes |\nu_i\rangle \langle \nu_i| U^{\dagger}(t) | \mu \rangle \\
&= \sum_{\mu, i, \nu_i} \xi_{\nu_i} \langle \mu | U(t) |\nu_i\rangle p_i \rho_S^i \langle \nu_i | U^{\dagger}(t) | \mu \rangle.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Si l'on suppose que tous les états ρ_E^i commutent, c'est-à-dire qu'ils sont en diagonale sur la même base de sorte que $\nu_i \equiv \nu$, $\xi_{\nu}^i \equiv \xi_{\nu}$ et $\rho_E^i(0) = \sum_{\nu} \xi_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu|$, l'équation (3.21) se réduit à

$$\rho_S(t) = \sum_{\mu\nu} \xi_{\nu} \langle \mu | U(t) | \nu \rangle \sum_i p_i \rho_S^i \langle \nu | U^{\dagger}(t) | \mu \rangle, \tag{3.22}$$

et cela peut être représenté comme une application agissant sur l'état $\rho_S(0) = \sum_i p_i \rho_S^i$, c'est-à-dire que nous revenons à nouveau à l'équation (3.6). Cela n'est vrai que pour le cas où $\rho_E^i = \rho_E$, mais dans le cas général où $\rho_E^i \neq \rho_E$, nous ne pouvons pas écrire l'état d'évolution du système S dans la représentation de Kraus.

3.1.3.2 Pour les états initiaux généraux

En utilisant une base orthonormée générale pour l'espace de Hilbert conjoint \mathcal{H}_{S+E} , nous pouvons toujours écrire l'état bipartite comme

$$\rho(0) = \sum_{ijkl} \xi_{ijkl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|. \quad (3.23)$$

Ensuite, l'état initial du système S correspondant devient

$$\rho_S(0) = \text{Tr}_E[\rho(0)] = \sum_{ijk} \xi_{ijkk} |i\rangle \langle j|. \quad (3.24)$$

Si nous suivons les mêmes étapes que dans la dérivation des opérateurs de Kraus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_{\mu} \langle \mu | U(t) \rho(0) U^\dagger(t) | \mu \rangle \\ &= \sum_{\mu ijkl} \xi_{ijkl} \langle \mu | U(t) | i \rangle \langle j | \otimes | k \rangle \langle l | U^\dagger(t) | \mu \rangle \\ &= \sum_{\mu k} \langle \mu | U(t) | k \rangle \left(\sum_{ij} \xi_{ijkk} | i \rangle \langle j | \right) \langle k | U^\dagger(t) | \mu \rangle \\ &\quad + \sum_{\mu, i, j, k \neq l} \langle \mu | U(t) | k \rangle \left(\sum_{ij} \xi_{ijkl} | i \rangle \langle j | \right) \langle l | U^\dagger(t) | \mu \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le premier terme de l'équation (3.25) comporte des opérateurs de Kraus $\langle \mu | U(t) | k \rangle$. Cependant, le second terme ne peut pas être écrit sous la forme de Kraus, de sorte que nous n'obtenons pas d'application qui transforme l'état $\rho_S(0)$ en état $\rho_S(t)$.

3.2 Equation Maître de Born-Markov

Les systèmes quantiques ouverts sont généralement difficiles à étudier car cette étude implique certaines corrélations entre le système et l'environnement, de sorte que l'état du système S ne peut pas être décrit par une transformation unitaire. Par conséquent, il faut procéder à des séries d'approximations afin de dériver l'équation d'évolution de l'état du système, de la résoudre d'une certaine manière, et donc d'appréhender la dynamique du système étudié.

Considérons une situation physique où un système principal S est couplé à un autre système quantique R , appelé réservoir. Ici, \mathcal{H}_S et \mathcal{H}_R sont, respectivement, les espaces de Hilbert du système principal S et du réservoir R , de sorte que l'état global du système total sera représenté par un vecteur appartenant à l'espace du produit tensoriel $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. L'Hamiltonien du système total est

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S \otimes \hat{\mathbf{1}}_R + \hat{\mathbf{1}}_S \otimes \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (3.26)$$

où \hat{H}_S est l'Hamiltonien du système principal S , \hat{H}_R est celui de l'environnement (réservoir R), \hat{H}_{SR} décrit l'opérateur qui correspond à l'interaction entre le système S et son environnement

R , $\hat{\mathbb{1}}_S$ et $\hat{\mathbb{1}}_R$ sont les opérateurs identités de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_S et de \mathcal{H}_R respectivement. Par souci de simplicité, nous ignorons le symbole du produit tensoriel \otimes et nous écrivons

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}. \quad (3.27)$$

L'état du système total est décrit par la matrice densité ρ_{SR} , puis la matrice densité réduite ρ_S du système principal S est obtenue en prenant la trace partielle sur tous les degrés de liberté du réservoir R . Puisque le système total est supposé être fermé, son évolution est donc décrite par l'équation de Liouville-von Neumann suivante

$$\frac{d}{dt}\rho_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \rho_{SR}(t) \right]. \quad (3.28)$$

Dans la représentation d'interaction, la matrice densité ρ_{SR} et l'Hamiltonien \hat{H}_{SR} deviennent

$$\tilde{\rho}_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t} \rho_{SR}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t}, \quad (3.29)$$

et

$$\hat{H}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t} \hat{H}_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_S + \hat{H}_R)t}. \quad (3.30)$$

Il convient de noter ici que la représentation d'interaction est une façon de traiter les problèmes d'évolution des Hamiltoniens qui dépendent du temps, et qu'elle est plus adéquate à utiliser dans certains cas que la représentation de Schrödinger. En outre, la représentation d'interaction ne modifie pas la physique, c'est-à-dire que la valeur moyenne d'un opérateur arbitraire dans la représentation d'interaction coïncide avec sa valeur moyenne dans la représentation de Schrödinger. Ainsi, l'équation de Liouville-von Neumann pour $\tilde{\rho}_{SR}$ sera

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_I(t), \tilde{\rho}_{SR}(t) \right]. \quad (3.31)$$

Après intégration, nous obtenons

$$\tilde{\rho}_{SR}(t) = \tilde{\rho}_{SR}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\hat{H}_I(t'), \tilde{\rho}_{SR}(t') \right] dt'. \quad (3.32)$$

Nous insérons le résultat (3.32) dans l'équation (3.31), on trouve alors

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_I(t), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \left[\hat{H}_I(t), \int_0^t \left[\hat{H}_I(t'), \tilde{\rho}_{SR}(t') \right] dt' \right]. \quad (3.33)$$

Pour connaître l'évolution du système principal $\tilde{\rho}_S(t)$, nous prenons la trace partielle des degrés de liberté du réservoir comme

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{H}_I(t), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] \right\} - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{H}_I(t), \int_0^t \left[\hat{H}_I(t'), \tilde{\rho}_{SR}(t') \right] dt' \right] \right\}. \quad (3.34)$$

Dans la représentation d'interaction de l'Hamiltonien du système total (3.30), \hat{H}_I dépend de \hat{H}_{SR} , alors l'Hamiltonien \hat{H}_{SR} peut toujours être défini de sorte que le premier terme de l'équation (3.34) sera égal à zéro, c'est-à-dire $\left[\hat{H}_I(t), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] = 0$. Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{H}_I(t), \int_0^t \left[\hat{H}_I(t'), \tilde{\rho}_{SR}(t') \right] dt' \right] \right\}. \quad (3.35)$$

Dans le cas général, il est difficile de résoudre exactement l'équation (3.35), le prototype le plus simple à résoudre est fourni par un processus markovien pour lequel la dynamique est stationnaire dans le temps et tous les effets de mémoire sont ignorés. Ceci signifie que l'environnement

ne se souvient plus de ses interactions passées avec le système en raison de la dispersion des corrélations dans les nombreux degrés de liberté environnementaux. Ce processus est basé sur deux approximations qui restent valables dans plusieurs cas :

Approximation de Born : La première approximation est l'approximation de Born qui suppose que le couplage système-environnement est suffisamment faible pour que l'influence du système considéré sur le réservoir soit absente pendant l'évolution, et donc le système principal S n'aura que peu d'influence sur le réservoir R . Cela signifie que l'état du système total puisse être factorisé pour $t > 0$ comme $\rho(t) \equiv \rho_S(t) \otimes \rho_R(t)$, et l'état du réservoir ρ_R restant constant au cours du temps.

Approximation de Markov : La seconde approximation appelée l'approximation de Markov repose sur le fait que les effets de mémoire du réservoir sont négligeables à long terme. Cela signifie que la dynamique du système principal S à l'instant t ne dépend pas de son état passé $\rho_S(t')$ (avec $t' < t$), de sorte que $\rho_S(t')$ est remplacé dans l'intégrale (3.35) par $\rho_S(t)$ à l'instant présent.

Il s'en suit que l'équation d'évolution dans le cadre de l'approximation de Born-Markov est donnée par

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty Tr_R \left\{ \left[\hat{H}_I(t), \left[\hat{H}_I(t'), \tilde{\rho}_S(t) \tilde{\rho}_R \right] \right] \right\} dt', \quad (3.36)$$

où nous supposons que l'intégration peut être étendue à l'infini sans changer son résultat. L'équation (3.36) est l'équation Maître de Born-Markov [142]. Il s'agit d'une approche familière dans l'étude des systèmes ouverts dans de nombreux contextes, de son développement original dans l'étude de la relaxation des spins dans les champs magnétiques aux applications modernes en imagerie médicale par résonance magnétique, en science des matériaux ou en biophysique [143, 144, 145].

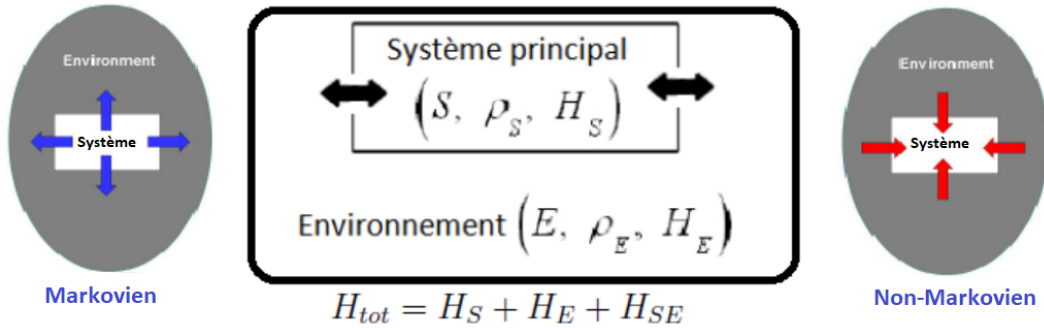


FIGURE 3.1 – Schéma d'interaction entre un système quantique ouvert S et son environnement E dans le cas markovien et non-markovien.

3.3 La forme de Lindblad de l'équation Maître Markovienne

3.3.1 L'équation générale de Lindblad

En réalité, on est loin d'obtenir une équation générale d'évolution non unitaire de la matrice densité $\tilde{\rho}_S(t)$, car on s'attend à des effets de mémoire. En outre, non seulement l'information s'échappe du système vers l'environnement, mais elle passe également de l'environnement au système. Dans de nombreux modèles de décohérence markovienne, l'équation maître markovienne est largement utilisée dans la description de la dynamique de la décohérence. Elle permet un calcul relativement simple de la dynamique réduite tout en fournissant, dans de nombreux

cas d'intérêt pratique, une bonne approximation de la dynamique exacte et des données observées expérimentalement. Dans ce sens, Lindblad [148] a donné une structure mathématique bien définie à l'équation d'évolution principale (3.36). Pour rendre cette équation plus compréhensible, nous présentons ici sa déduction dans le cas spécifique de deux systèmes ; le système principal S et le réservoir R avec une interaction entre eux qui ressemble à celle du modèle de Jaynes Cummings. Nous écrivons d'abord l'hamiltonien de l'interaction système-réservoir sous la forme la plus générale suivante

$$\hat{H}_{SR} = \hbar \left(\hat{S} \hat{R}^\dagger + \hat{S}^\dagger \hat{R} \right), \quad (3.37)$$

où \hat{S} est un opérateur général qui agit uniquement sur le système principal S , et \hat{R} est un opérateur qui agit uniquement sur le réservoir R . Maintenant, nous considérons que \hat{S} commute avec \hat{H}_S , c'est-à-dire $[\hat{S}, \hat{H}_S] = 0$. Cela signifie que l'opérateur \hat{S} n'est pas affecté par la transformation de l'image d'interaction, nous pouvons alors écrire $\hat{S}(t) \equiv \hat{S}$.

Généralement, les systèmes physiques peuvent être représentés soit par un qubit (c-à-d une particule de spin-1/2) si l'espace d'état du système est discret, soit par une particule décrite par des coordonnées continues de l'espace de phase. De même, un large éventail d'environnements peut être modélisé comme une collection d'oscillateurs harmoniques quantiques (un environnement d'oscillateur qui représente un quasi-continuum de modes bosoniques délocalisés) ou par des qubits (un environnement de spin qui représente une collection de modes localisés avec les modes discrets). Considérons ici l'Hamiltonien de réservoir qui est défini par une collection de bosons comme

$$\hat{H}_R = \hbar \sum_k w_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \quad (3.38)$$

où \hat{a}_k^\dagger et \hat{a}_k sont les opérateurs de création et d'annihilation de réservoir, les quantités w_k sont les fréquences caractéristiques de chaque mode k . L'opérateur \hat{R} qui apparaît dans l'équation (3.37) est défini par

$$\hat{R} = \sum_k g_k^* \hat{a}_k, \quad (3.39)$$

où g_k sont des coefficients complexes représentant des constantes de couplage. Ensuite, dans l'image d'interaction, nous avons

$$\tilde{R}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_R t} \hat{R} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_R t}. \quad (3.40)$$

En développant chaque exponentielle et en utilisant les relations de commutation bosonique, l'équation (3.40) conduit à

$$\tilde{R}(t) = \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i w_k t}, \quad \text{et} \quad \tilde{R}^\dagger(t) = \sum_k g_k \hat{a}_k^\dagger e^{i w_k t}. \quad (3.41)$$

Il est intéressant de noter que l'interaction (3.37) avec la définition (3.39) ressemble à celle de Jaynes-Cummings [146], qui représente un seul atome à deux niveaux interagissant avec un seul mode du champ de rayonnement, et dans l'une de nos contributions [147], nous avons utilisé le même modèle pour un système de deux atomes à deux niveaux en présence de modes de champ électromagnétique (voir la partie des contributions). En adaptant ces définitions, le commutateur dans l'équation maîtresse de Born-Markov (3.36) sera évalué analytiquement. Nous commençons d'abord par

$$\left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] = \hbar \left[\hat{S} \tilde{R}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] + \hbar \left[\hat{S}^\dagger \tilde{R}(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right]. \quad (3.42)$$

Le développement de chaque terme de l'équation (3.42) conduit à

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S} \tilde{R}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] &= \hbar \hat{S} \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}(t') \rho_R + \hbar \hat{S} \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}(t') \rho_R \\
&\quad - \hbar \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \tilde{R}^\dagger(t) \rho_R \tilde{R}^\dagger(t') - \hbar \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \tilde{R}^\dagger(t) \rho_R \tilde{R}(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \tilde{R}^\dagger(t) - \hbar \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \tilde{R}(t') \rho_R \tilde{R}^\dagger(t) \\
&\quad + \hbar \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger \rho_R \tilde{R}^\dagger(t') \tilde{R}^\dagger(t) + \hbar \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} \rho_R \tilde{R}(t') \tilde{R}^\dagger(t). \quad (3.43)
\end{aligned}$$

De la même façon, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}^\dagger \tilde{R}(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] &= \hbar \hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \tilde{R}(t) \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R + \hbar \hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \tilde{R}(t) \tilde{R}(t') \rho_R \\
&\quad - \hbar \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \tilde{R}(t) \rho_R \tilde{R}^\dagger(t') - \hbar \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \tilde{R}(t) \rho_R \tilde{R}(t') \\
&\quad - \hbar \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \tilde{R}(t) - \hbar \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \tilde{R}(t') \rho_R \tilde{R}(t) \\
&\quad + \hbar \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger \rho_R \tilde{R}^\dagger(t') \tilde{R}(t) + \hbar \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} \rho_R \tilde{R}(t') \tilde{R}(t). \quad (3.44)
\end{aligned}$$

A l'aide de l'équation (3.41), il est facile de voir que

$$\text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t) \tilde{R}(t') \rho_R \right\} = \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} = 0. \quad (3.45)$$

En substituant ces résultats dans les équations (3.43) et (3.44), et en utilisant les propriétés cycliques de la trace, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{S} \tilde{R}^\dagger(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \left[\hat{S} \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}(t') \rho_R \right\} \\
&\quad + \hbar \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t') \tilde{R}^\dagger(t) \rho_R \right\}, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{S}^\dagger \tilde{R}(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t) \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} \\
&\quad + \hbar \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t') \tilde{R}(t) \rho_R \right\}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Les résultats donnés par ces équations nous permettent de revenir à l'équation (3.42) et de l'écrire comme

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_R \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \rho_R \tilde{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} &= \hbar^2 \left[\hat{S} \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}(t') \rho_R \right\} \\
&\quad + \hbar^2 \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t') \tilde{R}^\dagger(t) \rho_R \right\} \\
&\quad + \hbar^2 \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t) \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} \\
&\quad + \hbar^2 \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t') \tilde{R}(t) \rho_R \right\}. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Pour plus de simplicité, nous allons définir les fonctions suivantes

$$F(t) = \int_0^t \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t) \tilde{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} dt', \quad \text{et} \quad G(t) = \int_0^t \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t') \tilde{R}(t) \rho_R \right\} dt'. \quad (3.49)$$

Nous avons alors

$$F^*(t) = \int_0^t \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}(t') \tilde{R}^\dagger(t) \rho_R \right\} dt', \quad \text{et} \quad G^*(t) = \int_0^t \text{Tr}_R \left\{ \tilde{R}^\dagger(t) \tilde{R}(t') \rho_R \right\} dt', \quad (3.50)$$

où $*$ désigne la conjugaison complexe. Ensuite, en remplaçant l'équation (3.48) dans l'équation d'évolution de Born-Markov (3.36), nous trouvons facilement l'expression suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & - \left[\hat{S} \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G^*(t) - \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] F^*(t) \\ & - \left[\hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] F(t) - \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G(t). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques caractéristiques spécifiques de l'environnement pour examiner ces approximations en détail.

3.3.2 La spécification du réservoir

Premièrement, nous considérons l'état initial du réservoir thermique comme un état de vide

$$\rho_R = (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0|). \quad (3.52)$$

Ensuite, l'évaluation des fonctions $F(t)$ et $G(t)$ définies dans l'équation (3.49) est faite en considérant les définitions de $\tilde{R}(t)$, $\tilde{R}^\dagger(t)$ et ρ_R dans les équations (3.41) et (3.52). Si nous utilisons la base des états du réservoir dénoté par $\{|r\rangle\}$, la trace partielle apparaissant dans les expressions de $F(t)$ et $G(t)$ peut être évaluée comme

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \left\{ \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} &= \sum_r \langle r | \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| |r\rangle) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \sum_r |r\rangle \langle r| \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle) \\ &= (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle), \end{aligned} \quad (3.53)$$

et

$$\text{Tr}_R \left\{ \hat{R}^\dagger(t') \hat{R}(t) \rho_R \right\} = (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \hat{R}^\dagger(t') \hat{R}(t) (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle). \quad (3.54)$$

En substituant les opérateurs $\hat{R}(t)$ et $\hat{R}^\dagger(t)$ par ces expressions, on trouve alors

$$\text{Tr}_R \left\{ \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} = \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(w_k t - w_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle), \quad (3.55)$$

et

$$\text{Tr}_R \left\{ \hat{R}^\dagger(t') \hat{R}(t) \rho_R \right\} = \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(w_k t - w_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle) \equiv 0. \quad (3.56)$$

Cela signifie que la fonction $G(t) \equiv G^*(t) \equiv 0$, et donc les fonctions $F(t)$ et $F^*(t)$ qui apparaîtront uniquement dans l'équation d'évolution de Born-Markov (3.51). Nous rappelons que les opérateurs bosoniques satisfont la relation de commutation

$$\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger = \delta_{k,k'} + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (3.57)$$

Nous pouvons réécrire alors l'équation (3.55) comme

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \left\{ \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} &= \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(w_k t - w_{k'} t')} (\langle 0| \langle 0| \dots \langle 0| \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} (|0\rangle |0\rangle \dots |0\rangle) \\ &+ \sum_{k,k'} g_k^* g_{k'} e^{-i(w_k t - w_{k'} t')} \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Par conséquent, il en résulte que

$$\mathrm{Tr}_R \left\{ \hat{R}(t) \hat{R}^\dagger(t') \rho_R \right\} = \sum_k |g_k|^2 e^{-iw_k(t-t')} \quad \text{et donc} \quad F(t) = \sum_k |g_k|^2 \int_0^t e^{-iw_k(t-t')} dt'. \quad (3.59)$$

Dans l'expression de $F(t)$ donnée par l'équation (3.59), si nous adoptons la définition générale de la densité d'états qui codent toutes les propriétés physiques de l'environnement comme

$$J(w) = \sum_k |g_k|^2 \delta(w - w_k), \quad (3.60)$$

où δ est la distribution de Dirac, alors la somme sur les indices k peut être remplacée par une intégrale sur un continuum de fréquences comme

$$F(t) = \int_0^\infty J(w) dw \int_0^t e^{-iw(t-t')} dt'. \quad (3.61)$$

Pour simplifier, nous introduisons la nouvelle variable $\tau = t - t'$, alors $d\tau = -dt'$ et $\int_0^t dt' = -\int_t^0 d\tau = \int_0^t d\tau$. Cela conduit à

$$F(t) = \int_0^\infty J(w) \int_0^t e^{-iw\tau} d\tau. \quad (3.62)$$

Dans l'approximation de Markov, la limite $t \rightarrow \infty$ est prise dans l'intégrale de temps, nous prenons donc les bornes du deuxième intégrale de l'équation (3.62) entre zéro et l'infini. En outre, nous utiliserons la relation

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-iw\tau} d\tau &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-iw\tau - \eta\tau} d\tau \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta - iw}{\eta^2 + w^2} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\eta^2 + w^2} - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{iw}{\eta^2 + w^2} \\ &= \pi\delta(w) - iP\frac{1}{w}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

avec P représente la partie principale de Cauchy, la fonction $F(t)$ peut s'écrire comme suit

$$F(t) = \pi \int_0^\infty J(w) \delta(w) dw - iP \int_0^\infty \frac{J(w)}{w} dw. \quad (3.64)$$

Il vient alors que la fonction F d'une densité d'états générale s'écrit comme suit

$$F = \frac{\gamma + i\varepsilon}{2}, \quad (3.65)$$

avec

$$\gamma = 2\pi \int_0^\infty J(w) \delta(w) dw, \quad \text{et} \quad \varepsilon = -2P \int_0^\infty \frac{J(w)}{w} dw. \quad (3.66)$$

Par conséquent, l'équation maîtresse de Born-Markov (3.36) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) &= -\frac{\gamma}{2} \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger + \hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right] \\ &\quad + i\frac{\varepsilon}{2} \left[\tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \hat{S} - \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger - \hat{S}^\dagger \hat{S} \tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \hat{S}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Le terme ε dans l'équation (3.67) dépend de l'importance de la relation entre la forme de la densité spectrale du réservoir et sa fréquence. En fait, nous pouvons choisir la forme de densité d'état $J(w)$ pour donner $\varepsilon = 0$, où nous pouvons étendre la limite inférieure d'intégration à $-\infty$. Cette approximation est appliquée dans de nombreux cas pour dériver une équation maîtresse markovienne sous la forme de Lindblad [148] qui décrit l'évolution temporelle du système étendu (par exemple, pour un système représenté par un atome à deux niveaux interagissant avec un environnement bosonique structuré à zéro température, la densité d'état $J(w)$ nous donne $\varepsilon = 0$). Dans ce cas précis, le résultat final est

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \gamma \left[\hat{S}\tilde{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \tilde{\rho}_S(t) \right\} \right]. \quad (3.68)$$

Revenons donc à l'image d'origine via

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} \rho_S(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} \right] \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} \frac{d\rho_S(t)}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} \left[\hat{H}_S, \rho_S(t) \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Avec la même procédure, l'équation (3.68) devient

$$\left[\hat{S}\tilde{\rho}_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \tilde{\rho}_S(t) \right\} \right] = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St} \left[\hat{S}\rho_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \rho_S(t) \right\} \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_St}. \quad (3.70)$$

Il s'ensuit que l'équation d'évolution de Lindblad dans le cadre de l'approximation de Born-Markov est donnée par

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S, \rho_S(t) \right] + \gamma \left[\hat{S}\rho_S(t)\hat{S}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{S}^\dagger\hat{S}, \rho_S(t) \right\} \right]. \quad (3.71)$$

En revanche, l'équation (3.71) est généralement présentée avec plusieurs opérateurs \hat{S} , sous la forme d'une combinaison linéaire d'opérateurs Lindbladiens, souvent désignés par des opérateurs \hat{L} . Les opérateurs \hat{L} sont appelés les opérateurs de Lindblad et, dans le cas général, l'équation de Lindblad prend la forme suivante

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S, \rho_S(t) \right]}_{\text{Partie unitaire}} + \underbrace{\gamma \sum_j \left[\hat{L}_j \rho_S(t) \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j, \rho_S(t) \right\} \right]}_{\text{Partie non unitaire (dissipateur)}}. \quad (3.72)$$

En raison de nos hypothèses simplificatrices, il est important de souligner que toutes ces simplifications limitent la validité de cette dérivation à des cas plus généraux, mais elle fournit une illustration détaillée de la signification physique de chaque terme apparaissant dans l'équation de Lindblad (3.72).

3.4 Cohérence quantique comme une ressource en théorie de l'information quantique

L'une des caractéristiques fondamentales qui séparent la physique quantique de la physique classique est l'idée de la superposition quantique, également connue sous le nom de la cohérence quantique. Habituellement, les caractéristiques de la cohérence et de la décohérence semblent s'opposer l'une à l'autre. Ainsi, divers quantificateurs de la cohérence pourraient être examinés du point de vue de leur diminution au cours de processus de décohérence [149]. Formellement,

un état quantique présente une cohérence quantique lorsqu'il est décrit par une matrice densité qui n'est pas diagonale par rapport à la base orthogonale des bits classiques. Cette partie se concentre sur la compréhension de la cohérence quantique dans le cadre mathématique des théories des ressources. Il s'agit d'une ressource à exploiter et qui permet de distinguer de façon quantitative les états quantiques par rapport aux états classiques. Toutefois, malgré son importance cruciale dans le développement de la science de l'information quantique, ce n'est que très récemment qu'un cadre théorique rigoureux a été établi par Baumgratz et ses collègues [140] pour quantifier la quantité de la cohérence quantique contenue dans les états quantiques. Des idées similaires ont déjà été présentées par Aberg [150], mais sans fournir une formulation complète.

3.4.1 Théorie de ressource de la cohérence quantique

3.4.1.1 Les contraintes

Par analogie avec la théorie de l'intrication quantique qui établit les ensembles des états séparables ("classiques") et des opérations locales et de communication classique (LOCC), la quantification de la cohérence quantique est basée sur les concepts des états incohérents et des opérations incohérentes. Pour un état quantique associé à un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension d , nous fixons la base orthogonale $\{|j\rangle\}_{j=1}^d$ comme une base de référence. Si un état quantique est diagonal lorsqu'il est exprimé sur cette base de référence locale, il est appelé état incohérent et prend la forme

$$\delta = \sum_{j=1}^d \delta_j |j\rangle \langle j|, \quad (3.73)$$

avec $\delta \in \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est l'ensemble des états incohérents. D'autre part, une opération incohérente est une application linéaire complètement positive et préservant les traces qui transforme un état incohérent à un état incohérent et aucune création de cohérence n'a pu être observée. En outre, les opérations incohérentes peuvent être caractérisées par des opérateurs de Kraus $\{K_j\}$ satisfaisant $\sum_{j=1}^d K_j^\dagger K_j \equiv \mathbb{1}$. En fait, Baumgratz a identifié deux classes différentes d'opérations incohérentes :

- Les opérations incohérentes complètement positives et préservant les traces qui agissent comme $\Lambda(\rho) = \sum_j K_j \rho K_j^\dagger$. Ici, tous les K_j sont de même dimension, et doivent obéir à la propriété $K_j \delta K_j^\dagger / p_j \in \mathcal{I}$ pour chaque état incohérent $\delta \in \mathcal{I}$, où $p_j = \text{Tr}(K_j \rho K_j^\dagger)$ désigne la probabilité d'obtenir le résultat j .
- Les opérations incohérentes pour lesquelles les résultats de mesure de sortie sont conservés. Ils exigent également que $K_j \delta K_j^\dagger / p_j \in \mathcal{I}$ soit satisfait pour tous $\delta \in \mathcal{I}$. Mais la dimension de K_j peut être différente.

Baumgratz et al ont établis dans la référence [140] que toute mesure appropriée de la cohérence $C(\rho)$, qui transforme les états quantiques en un nombre réel positif, doit satisfaire les conditions suivantes :

(C1) Non-négativité : $C(\rho) \geq 0$, et $C(\rho) = 0$ si et seulement si $\rho \in \mathcal{I}$.

(C2) Monotonie : $C(\rho)$ n'augmente pas sous l'action d'une opération incohérente, i.e.,

$$C(\Lambda_I(\rho)) \leq C(\rho), \quad (3.74)$$

pour toutes les applications incohérentes Λ_I .

(C3) Convexité dans le mélange des états : $C(\rho)$ est une fonction convexe de l'état ρ , i.e.,

$$\sum_j p_j C(\rho_j) \geq C\left(\sum_j p_j \rho_j\right), \quad (3.75)$$

avec $p_j \geq 1$ et $\sum_j p_j = 1$.

(C4) Forte monotonie : $C(\rho)$ n'augmente pas en moyenne lors d'opérations sélectives incohérentes, c'est-à-dire

$$C(\rho) \geq \sum_j p_j C(\rho_j), \quad (3.76)$$

avec des probabilités $p_j = \text{Tr}(K_j \rho K_j^\dagger)$, les états après la mesure $\rho_j = (K_j \rho K_j^\dagger) / p_j$, et les opérateurs incohérents K_j .

En général, les conditions (C3) et (C4) peuvent être remplacées par une seule condition, à savoir l'exigence d'une additivité de la cohérence pour les états indépendants du sous-espace. Ce cadre alternatif pour quantifier la cohérence quantique a été proposé par Ya et ses collègues dans la référence [151]. Considérons deux états ρ_1 et ρ_2 dans les deux sous-espaces différents, la quantité de la cohérence contenue dans l'état $\rho = p_1 \rho_1 \oplus p_2 \rho_2$ (avec p_1 et p_2 étant des probabilités) ne doit être ni plus ni moins que la cohérence moyenne de l'état ρ_1 et l'état ρ_2 . Par conséquent, une mesure raisonnable de la cohérence devrait satisfaire la condition

$$C(p_1 \rho_1 \oplus p_2 \rho_2) = p_1 C(\rho_1) + p_2 C(\rho_2). \quad (3.77)$$

Il convient de noter que la condition (C4) est plus forte que la condition (C2), car sa combinaison avec (C3) implique automatiquement la condition (C2). En général, une fonction à valeur réelle $C(\rho)$ est appelée mesure de la cohérence si elle satisfait aux quatre conditions ci-dessus. Si seules les conditions (C1), (C2) et (C4) sont satisfaites, la fonction $C(\rho)$ est généralement appelée une cohérence monotone. Cette analyse de Baumgratz et ses collaborateurs a attiré l'attention de nombreux chercheurs, et diverses mesures de la cohérence quantique, qui satisfont aux exigences physiques de non contractivité et de monotonie mentionnées ci-dessus, ont été proposées depuis lors. Toutes ces mesures peuvent être classées en deux catégories ; La première concerne celles basées sur les fonctions d'entropie. La seconde catégorie concerne les mesures géométriques qui quantifient la cohérence comme sa distance par rapport à l'état incohérent le plus proche.

3.4.1.2 Cohérence bipartite

La cohérence quantique est habituellement associée à la capacité d'un état quantique à présenter des phénomènes d'interférence quantique [152]. Les effets de la cohérence sont généralement attribués aux éléments hors diagonale d'une matrice de densité par rapport à une base de référence particulière définie par le scénario physique considéré. Ici, nous étendons le cadre de la théorie de ressource de la cohérence quantique au scénario bipartite. En particulier, pour un système à deux qubits associé à un espace de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, on fixe la base de calcul $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}$ comme base de référence, et on définit les états incohérents comme ceux dont la matrice de densité σ_{AB} est diagonale, c'est-à-dire

$$\sigma_{AB} = \sum_k p_k \delta_k^A \otimes \tau_k^B, \quad (3.78)$$

où p_k sont des probabilités et les états δ_k^A et τ_k^B sont des états incohérents sur le sous-système A et B , respectivement. Cela veut dire que

$$\delta_k^A = \sum_i p'_{ik} |i\rangle_A \langle i|, \quad \tau_k^B = \sum_j p''_{jk} |j\rangle_B \langle j|, \quad (3.79)$$

avec des probabilités p'_{ik} et p''_{jk} . Il convient de noter que les états bipartites incohérents indiqués par l'équation (3.78) sont toujours séparables. Pour un système quantique à deux qubits, les opérations incohérentes bipartites sont de la forme

$$\Lambda_{AB}[\sigma_{AB}] = \sum_l K_l \sigma_{AB} K_l^\dagger, \quad (3.80)$$

avec K_l représentant des opérateurs de Kraus incohérents, tels que $K_l \mathcal{I} K_l^\dagger \in \mathcal{I}$ où \mathcal{I} est maintenant l'ensemble des états incohérents bipartites. En général, il n'est pas possible de créer une cohérence à partir d'un état incohérent à deux qubits en utilisant la porte CNOT. On peut donc considérer qu'il s'agit d'un exemple important de l'opération bipartite incohérente la plus pratique et la plus simple. Ce type d'opération incohérente transforme tout état incohérent pur $|i\rangle \otimes |j\rangle$ en un autre état incohérent pur, et nous pouvons l'écrire comme

$$\Lambda_{\text{CNOT}}(|i\rangle \otimes |j\rangle) = |i\rangle \otimes |\text{mod}(i+j, 2)\rangle. \quad (3.81)$$

3.4.2 Quantifier la cohérence quantique

3.4.2.1 Mesures de la cohérence basées sur la distance

Dans le domaine de la science de l'information quantique, les approches géométriques ont été utilisées pour traiter une énorme classe de problèmes tels que la caractérisation et la quantification de diverses caractéristiques quantiques. De manière analogue à la théorie des ressources de l'intrication pour laquelle les opérations libres sont décrites par les opérateurs LOCC, les états libres correspondent aux états séparables, et l'intrication peut être définie par une distance entre l'état considéré et l'ensemble des états séparables, il est naturel de quantifier la cohérence d'un état en utilisant une mesure de distance car la cohérence est également placée dans un cadre théorique de ressources. Une façon générale de construire des mesures de cohérence consiste à minimiser une fonction de distance sur tous les états incohérents. On peut alors quantifier le degré de la cohérence contenu dans un état ρ en utilisant sa distance minimale par rapport à l'état incohérent le plus proche [140],

$$C_D(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} D(\rho, \delta), \quad (3.82)$$

où $D(\rho, \delta)$ désigne une mesure de distance entre les états quantiques et la minimisation porte sur l'ensemble des états incohérents \mathcal{I} . Selon la définition de l'équation (3.82), la condition (C1) est satisfaite pour la mesure de distance qui donne $D(\rho, \delta) = 0$ si et seulement si $\rho \equiv \delta$, tandis que la condition (C2) peut être satisfaite lorsque D est monotone sous l'action des opérations incohérents, c'est-à-dire $D(\rho, \delta) \geq D(\Lambda(\rho), \Lambda(\delta))$. De plus, la condition (C3) est également satisfaite si D est conjointement convexe, c'est-à-dire $D(\sum_i p_i \rho_i, \sum_i p_i \delta_i) \leq \sum_i p_i D(\rho_i, \delta_i)$. Nous présenterons ici les définitions de certains quantificateurs de cohérence basés sur les distances couramment utilisées dans la littérature.

3.4.2.1.1 L'entropie relative de la cohérence : En fait, l'entropie relative a été adoptée pour quantifier l'intrication et la discordie quantique. Dans cette direction, Baumgratz et ses collaborateurs ont montré qu'elle peut également servir d'outil valable pour quantifier la cohérence quantique. Pour tout état quantique ρ sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} , l'entropie relative de la cohérence est définie comme

$$C_r(\rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}} S(\rho \parallel \delta), \quad (3.83)$$

où $S(\rho \parallel \delta) = \text{Tr}(\rho \log_2 \rho - \rho \log_2 \delta)$ est l'entropie relative. En ce qui concerne les propriétés de l'entropie relative, il est assez facile de vérifier que cette mesure satisfait les conditions des

mesures de cohérence. En particulier, il existe une solution qui permet d'évaluer facilement les expressions analytiques. Prenons un espace de Hilbert \mathcal{H} avec une base fixe $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$, la matrice densité $\rho = \sum_{i,j} \rho_{i,j} |i\rangle \langle j|$ et $\rho_{\text{diag}} = \sum_i \rho_{ii} |i\rangle \langle i|$. En utilisant les propriétés d'entropie relative, il est facile d'obtenir

$$C_r(\rho) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho). \quad (3.84)$$

On remarque que l'état incohérent ρ_{diag} est généré en supprimant tous les éléments hors diagonale et en laissant les éléments diagonaux dans la matrice densité ρ . Cette opération est appelée un canal complètement décohérent et on note alors

$$\rho_{\text{diag}} = \Pi[\rho] = \sum_{i=1}^d \Pi_i \rho \Pi_i, \quad (3.85)$$

où $\Pi_i = |i\rangle \langle i|$ sont des projecteurs unidimensionnels, et $\sum_i \Pi_i = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ avec $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ est opérateur d'identité sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . En outre, certaines propriétés de base ont été données. Par exemple, nous pouvons obtenir

$$C_r(\rho) \leq S(\rho_{\text{diag}}) \leq \log_2 d, \quad (3.86)$$

et $C_r(\rho) = S(\rho_{\text{diag}})$ si et seulement si l'état quantique ρ est un état pur. En particulier, s'il existe des états purs tels que $C_r(\rho) = \log_2 d$, ces états purs sont appelés les états maximale-ment cohérents. Les auteurs de la référence [140] ont défini un état maximale-ment cohérent comme un état qui permet la génération déterministe de tous les autres états quantiques par des opérations incohérentes, qui prend la forme suivante

$$|\psi_d\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle. \quad (3.87)$$

3.4.2.1.2 La norme l_1 de la cohérence : De manière intuitive, la superposition correspond aux éléments non diagonaux de la description de l'opérateur densité d'un état quantique par rapport à la base de référence sélectionnée. En partant de cette considération, Baumgratz et ses collègues ont montré que la norme l_1 peut être considérée comme un quantificateur prometteur de la cohérence quantique dans les systèmes multipartites. Explicitement, la cohérence est définie comme

$$C_{l_1}(\rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_{l_1} = \sum_{i \neq j} |\langle i | \rho | j \rangle|. \quad (3.88)$$

Elle est égale à la somme des valeurs absolues des éléments hors diagonale de la matrice densité ρ , et est favorisée pour sa facilité d'évaluation. Outre la condition de convexité, elle satisfait également l'inégalité $C_{l_1}(p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2) \geq |p_1 C_{l_1}(\rho_1) - p_2 C_{l_1}(\rho_2)|$ [153]. De plus, pour tout état pur bipartite, la norme l_1 de la cohérence est égale au double de sa négativité [82], qui est une mesure de l'intrication quantique. D'autre part, une relation entre la norme l_1 de la cohérence (3.88) et l'entropie relative de la cohérence (3.83) a également été établie pour les états purs $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$. Cette relation est donnée par [154]

$$C_{l_1}(|\psi\rangle) \geq \max \{C_r(|\psi\rangle), 2^{C_r(|\psi\rangle)} - 1\}. \quad (3.89)$$

Il a également été prouvé que [155]

$$C_{l_1}^2(|\psi\rangle) \leq \frac{d(d-1) C_r(|\psi\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (3.90)$$

avec $d = \text{Rang}(|\psi\rangle)$ est le rang de l'état $|\psi\rangle$. Si nous avons $d > 2$, on peut aussi obtenir $C_{l_1}(|\psi\rangle) - C_r(|\psi\rangle) \leq d - 1 - \log_2 d$.

En fait, grâce à la forme paramétrique d'une matrice densité arbitraire, tout état quantique ρ à d dimension peut être décomposé comme [156]

$$\rho = \frac{1}{d} \mathbb{1}_d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d^2-1} x_i \hat{X}_i, \quad (3.91)$$

avec $x_i = \text{Tr}(\rho \hat{X}_i)$ et les $\{\hat{X}_i\}$ sont les générateurs de l'algèbre $su(d)$ (ils coïncident avec les matrices de Pauli lorsque $d = 2$ et avec les matrices de Gell-Mann lorsque $d = 3$). Ensuite, si l'on classe les éléments de ces générateurs \hat{X}_i ($i = 1, \dots, d^2 - 1$) comme

$$\{\hat{X}_i\}_{i=1}^{d^2-1} = \{\hat{U}_{ij}, \hat{V}_{jk}, \hat{W}_l\}, \quad (3.92)$$

où $j, k \in \{1, 2, \dots, d\}$ et $l \in \{1, \dots, d-1\}$, avec

$$\hat{U}_{jk} = |j\rangle \langle k| + |k\rangle \langle j|, \quad \hat{V}_{jk} = -i(|j\rangle \langle k| - |k\rangle \langle j|), \quad (3.93)$$

et

$$\hat{W}_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \sum_{j=1}^l (|j\rangle \langle j-l| + |l+1\rangle \langle l+1|). \quad (3.94)$$

Alors, le vecteur des générateurs \vec{X} peut être étiqueté comme suit

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \left\{ \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{\frac{d(d-1)}{2}}, \hat{X}_{\frac{d(d-1)}{2}+1}, \dots, \hat{X}_{d(d-1)}, \hat{X}_{d(d-1)+1}, \dots, \hat{X}_{d^2-1} \right\} \\ &= \left\{ \hat{U}_{12}, \dots, \hat{U}_{d(d-1)}, \hat{V}_{12}, \dots, \hat{V}_{d(d-1)}, \hat{W}_1, \dots, \hat{W}_{(d-1)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Dans cette représentation (3.91), l'expression explicite de la norme l_1 de la cohérence d'un système à d dimensions, donnée par l'équation (3.88), s'écrit

$$C_{l_1}(\rho) := \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| = \sum_{r=1}^{d(d-1)/2} \sqrt{x_r^2 + x_{r+d(d-1)/2}^2}. \quad (3.96)$$

D'autre part, il est bien connu que le bruit est responsable de l'augmentation du mélange d'un système quantique. Il apparaît donc comme un paramètre intuitif pour comprendre la décohérence. Pour chaque état quantique, l'interaction avec le monde extérieur ou la décohérence affecte sa pureté, et le bruit introduit une mixité dans le système quantique. Cette interaction entraîne une perte d'informations et sa caractérisation est donc une tâche importante dans les protocoles d'information quantique. Une question naturelle qui se pose est de savoir comment les quantités physiques importantes dans la théorie de l'information quantique, telles que la cohérence et l'intrication quantique, peuvent s'opposer à la mixité des systèmes quantiques? Dans ce sens, Singh et ses collaborateurs [157] ont obtenu une relation de complémentarité entre la cohérence quantique qui est quantifiée par la norme l_1 et la mixité qui est quantifié en termes d'entropie linéaire normalisée. Cette relation nous donne les restrictions imposées par la mixité d'un système sur la quantité maximale de la cohérence quantique. Si nous utilisons la mixité basée sur l'entropie linéaire normalisée [158] d'un état arbitraire à d dimension, qui est donnée par

$$M_l(\rho) := \frac{d}{d-1} (1 - \text{Tr}(\rho^2)) = 1 - \frac{d}{2(d-1)} \sum_{i=1}^{d^2-1} x_i^2, \quad (3.97)$$

nous pouvons donc facilement montrer que pour un système quantique général à d dimension, la somme de la cohérence au carré et de la mixité est toujours inférieure ou égale à l'unité [157], à savoir

$$\frac{C_{l_1}^2(\rho)}{(d-1)^2} + M_l(\rho) \leq 1. \quad (3.98)$$

Dans ce sens, lorsque les systèmes quantiques perdent leur cohérence en présence d'un environnement et perdent leur pureté, la relation (3.98) nous donne la cohérence maximale que nous puissions avoir. Ceci est en principe similaire à l'intrication maximale qu'un état mixte peut avoir. C'est physiquement pertinent car cela nous indique la quantité de ressources (la cohérence ou bien l'intrication) que nous pouvons obtenir d'un état mixte pour des applications dans un protocole quantique pertinent.

3.4.2.1.3 Cohérence basée sur la distance de trace : En dehors de la norme l_1 , on peut se demander si la norme générale des distances l_p et de Schatten peut être adoptée pour définir les mesures de la cohérence. En général, cette question n'a pas encore reçu de réponse. L'une des mesures de distance largement utilisées, la distance de trace (c'est-à-dire la norme-1 de Schatten), a été proposée comme un candidat possible pour la mesure de cohérence dans la référence [140]. Elle est définie comme

$$C_{\text{Tr}}(\rho) := \min_{\delta \in \mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_1, \quad (3.99)$$

avec $\|A\|_1 = \text{Tr}\sqrt{A^\dagger A}$ désigne la norme trace de la matrice A . Pour une famille d'états X à plusieurs qubits, il a déjà été prouvé que $C_{\text{Tr}}(\rho)$ est une cohérence monotone, et l'état incohérent optimal correspondant est donné par ρ_{diag} [159]. De plus, pour l'état ρ avec tous ses éléments non diagonaux égaux les uns aux autres, c'est-à-dire $\rho_{ij} = \alpha$ ($\forall i \neq j$), la cohérence basée sur la distance de trace peut être dérivée analytiquement comme

$$C_{\text{Tr}}(\rho_X) = 2(d-1)|\alpha|, \quad (3.100)$$

où d est la dimension de l'état ρ_X et l'état incohérent le plus proche est $\delta = \rho_{X,\text{diag}}$.

3.4.2.2 Cohérence géométrique basée sur la fidélité

De façon analogue à l'intrication géométrique [162] qui est une mesure d'intrication, les auteurs de la référence [172] définissent la cohérence géométrique comme

$$C_g(\rho) = 1 - \sqrt{\max_{\delta \in \mathcal{I}} F(\rho, \delta)}, \quad (3.101)$$

où $F(\rho, \delta) = \|\sqrt{\rho}\sqrt{\delta}\|_1^2$ est la fidélité entre l'état ρ et l'état δ [164]. En outre, il a été démontré que $C_g(\rho)$ remplit les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) pour l'ensemble des états incohérents et des opérations incohérentes. Cela signifie que la cohérence géométrique (3.101) est une cohérence monotone. Si ρ est un état d'un système quantique à un seul qubit, $C_g(\rho)$ a une expression analytique fermée. Tout d'abord, à partir de la représentation sphérique de Bloch d'un état quantique, les états ρ et δ peuvent être exprimés comme

$$\rho = \frac{\mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad \delta = \frac{\mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (3.102)$$

où $\mathbb{1}_{2 \times 2}$ est l'opérateur d'identité, $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ et $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ sont les vecteurs de Bloch et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est un vecteur de matrices de Pauli. Il est donc facile de montrer que la fidélité pour les qubits a la forme explicite suivante

$$F(\rho, \delta) = \frac{1}{2} \left[1 + \vec{r} \cdot \vec{s} + \sqrt{(1 - |r|^2)(1 - |s|^2)} \right]. \quad (3.103)$$

Puisque δ est l'état incohérent, alors le vecteur de Bloch \vec{s} peut être exprimé comme $\vec{s} = (0, 0, s_z)$, alors l'équation (3.103) se réduit à

$$F(\rho, \delta) = \frac{1}{2} \left[1 + r_z s_z + \sqrt{(1 - r_x^2 - r_y^2 - r_z^2)(1 - s_z^2)} \right]. \quad (3.104)$$

Pour maximiser la fidélité $F(\rho, \delta)$, nous devons prendre une dérivée par rapport à s_z , nous avons donc

$$\frac{\partial F(\rho, \delta)}{\partial s_z} = \frac{1}{2} \left[r_z - \sqrt{\frac{1 - r_x^2 - r_y^2 - r_z^2}{1 - s_z^2}} s_z \right]. \quad (3.105)$$

Après quelques opérations algébriques simples, nous pouvons obtenir

$$\max_{\delta \in \mathcal{I}} F(\rho, \delta) = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - r_x^2 - r_y^2} \right]. \quad (3.106)$$

Par conséquent, la formule compacte de la cohérence géométrique (3.101) est donnée par

$$C_g(\rho) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - r_x^2 - r_y^2}}. \quad (3.107)$$

3.4.2.3 Relation entre la cohérence quantique et la discorde quantique

Soit $\{|i\rangle_A\}$ et $\{|j\rangle_B\}$ les bases de référence locales des sous-systèmes A et B , respectivement. Nous utilisons généralement leur produit tensoriel $\{|ij\rangle_{AB}\}$ comme une base de référence du système composite AB . Pour un état quantique ρ_{AB} , sa cohérence totale est $C_r(\rho_{AB})$, tandis que $C_r(\rho_A)$ et $C_r(\rho_B)$ sont appelées les cohérences locales. Chaque fois que l'état ρ_{AB} est un état qui s'écrit sous forme d'un produit, la somme des cohérences locales est égale à la cohérence totale. La cohérence mesurée à partir de l'entropie relative admet la propriété de super-additivité suivante [160]

$$C_r(\rho_{AB}) \geq C_r(\rho_A) + C_r(\rho_B). \quad (3.108)$$

Ainsi, la définition de la cohérence quantique corrélée par rapport à l'entropie relative de la cohérence est définie comme [161]

$$C_r^{cc}(\rho_{AB}) \equiv C_r(\rho_{AB}) - C_r(\rho_A) - C_r(\rho_B). \quad (3.109)$$

Evidemment, la cohérence quantique corrélée est la cohérence totale entre les sous-systèmes. Pour un état ρ_{AB} , quelles que soient les bases de référence des sous-systèmes, sa cohérence quantique corrélée est toujours nulle, si et seulement si l'état ρ_{AB} n'a pas de corrélations. En ce sens, la cohérence quantique corrélée peut être vue comme la mesure de la corrélation quantique comme la discorde quantique. En fait, les mesures locales de von Neumann des sous-systèmes A et B sont désignées par $\Pi_A = \{|i\rangle_A \langle i|\}$ et $\Pi_B = \{|j\rangle_B \langle j|\}$, respectivement. Par un calcul direct, nous obtenons que la consommation de cohérence quantique corrélée pour tout état ρ_{AB} sous la mesure locale Π_B coïncide avec la discorde quantique $\mathcal{Q}_{A|B}(\rho_{AB})$ [165], cela signifie que

$$C_r^{cc}(\rho_{AB}) - C_r^{cc}(\Pi_B(\rho_{AB})) = \mathcal{Q}_{A|B}(\rho_{AB}). \quad (3.110)$$

D'ailleurs, la cohérence quantique corrélée reste inchangée sous sa mesure locale Π_B , c'est-à-dire $C_r^{cc}(\rho_{AB}) = C_r^{cc}(\Pi_B(\rho_{AB}))$, si et seulement s'il existe une décomposition $\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$ telle que p_k sont des probabilités et que tous les états ρ_B^k sont parfaitement discernables par la mesure de von Neumann dans la base de référence du sous-système mesuré $\{|j\rangle_B\}$. En d'autres termes, si la quantité de corrélations quantiques totales dans le système quantique bipartite ρ_{AB} est égale à la quantité de corrélations classiques sous la mesure de von Neumann, la quantité de la cohérence quantique n'est pas affectée par la mesure locale Π_B .

3.4.3 Concurrence de la cohérence quantique

Une nouvelle mesure de la cohérence quantique pour un système quantique de dimension arbitraire, appelée la concurrence de la cohérence, a été proposée par Xianfei et ses collègues [166]. Cette mesure peut être comprise comme l'analogie de la concurrence d'intrication qui est basée essentiellement sur l'utilisation de matrices de Gell-Mann généralisées. En outre, elle satisfait à toutes les exigences imposées par la théorie des mesures de la cohérence, ce qui prouve qu'il s'agit d'une bonne mesure de la cohérence quantique.

Comme nous l'avons déjà vu, les matrices de Gell-Mann généralisées sont les générateurs de l'algèbre $su(d)$ définies comme les trois types de matrices différents ; les matrices symétriques \hat{U}_{jk} et les matrices antisymétriques \hat{V}_{jk} (3.93) pour $\{1 \leq j < k \leq d\}$, et les matrices diagonales \hat{W}_l (3.94) pour $\{1 \leq l \leq d-1\}$. En utilisant la forme paramétrique de la matrice densité de dimension arbitraire (3.91), nous pouvons donner une nouvelle expression de la norme l_1 de la cohérence $C_{l_1}(\rho)$ basée sur des matrices de Gell-Mann symétriques généralisées \hat{U}_{jk} . Cela permet d'obtenir

$$\begin{aligned} C_{l_1}(\rho) &= 2 \sum_{1 \leq j < k \leq d} |\rho_{jk}| \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq d} |\sqrt{\eta_1^{jk}} - \sqrt{\eta_2^{jk}}|, \end{aligned} \quad (3.111)$$

où η_1^{jk} et η_2^{jk} sont les valeurs propres non nulles de la matrice $\rho \hat{U}_{jk} \rho^* \hat{U}_{jk}$, et ρ^* désigne le conjugué complexe dans la base standard. Pour montrer l'équation ci-dessus (3.111), il suffit juste de le prouver que

$$2|\rho_{jk}| = |\sqrt{\eta_1^{jk}} - \sqrt{\eta_2^{jk}}|. \quad (3.112)$$

Après un calcul fastidieux mais simple, on peut facilement montrer que les valeurs propres non nulles de la matrice $\rho \hat{U}_{jk} \rho^* \hat{U}_{jk}$ sont $(|\rho_{jk}| + \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}})^2$ et $(|\rho_{jk}| - \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}})^2$. Par conséquent, les racines carrées des valeurs propres non nulles sont $|\rho_{jk}| + \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}}$ et $|\rho_{jk}| - \sqrt{\rho_{jj}\rho_{kk}}$, ce qui implique l'équation (3.112) comme nécessaire. Par cette écriture, la concurrence de la cohérence, pour un état pur $|\psi\rangle$ de dimension arbitraire, est définie comme suit

$$C_c(|\psi\rangle) := \sum_{1 \leq j < k \leq d} |\langle \psi | \hat{U}_{jk} | \psi^* \rangle| \equiv C_{l_1}(|\psi\rangle \langle \psi|). \quad (3.113)$$

Cela signifie que la concurrence de la cohérence est égale à la norme l_1 de cohérence pour les états purs. En règle générale, si une mesure de la cohérence est définie pour tous les états purs, elle peut être étendue à tous les états mixtes en utilisant les mêmes méthodes de mesures d'intrication. A cet effet, la concurrence de la cohérence d'un état mixte ρ prend la forme

$$C_c(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C_c(|\psi_i\rangle), \quad (3.114)$$

où la minimisation est prise sur toutes les décompositions à l'état pur de $\rho = \sum_{i=1}^d p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $\sum_i p_i = 1$. $C_c(|\psi_i\rangle)$ est la norme l_1 de l'état pur $|\psi_i\rangle$. C'est très similaire à la concurrence d'intrication (1.96). Bien que ce quantificateur de la cohérence soit une mesure de cohérence acceptable parce qu'il est valable pour tous les états purs, il n'est pas facile à calculer en général puisque ce calcul implique des minimisations. Pour les états mixtes de type X , la décomposition optimale à l'état pur a été trouvée, puis l'expression analytique de la concurrence de la cohérence a été donnée [167]. Mais la situation devient beaucoup plus compliquée pour les systèmes généraux à d dimensions.

3.5 Conversion de la cohérence locale en intrication collective

Suite au travail fondamental de Baumgratz [140], des recherches fructueuses ont été menées, dont certaines ont été principalement consacrées à la recherche de nouvelles mesures appropriées de la cohérence quantique [168, 169], ou à l'étude des états à cohérence maximale [170], à la distribution de la cohérence quantique dans les systèmes multipartites [171], et à la relation entre la cohérence et d'autres mesures de corrélation quantique [172, 173, 174]. En ce qui concerne la théorie de la cohérence quantitative, des efforts considérables ont été consacrés à l'élaboration de nombreuses mesures de la cohérence, alors que l'on en sait beaucoup moins sur les relations entre ces mesures, et en particulier sur leur lien avec les autres ressources de la théorie de l'information quantique.

La cohérence quantique et l'intrication quantique sont deux manifestations fondamentales de la théorie quantique qui peuvent chacune être caractérisées dans le cadre d'une théorie des ressources opérationnelles. En fait, il n'est pas nécessaire de chercher très loin pour trouver un lien important entre les opérations incohérentes et l'intrication quantique qui est l'une des ressources les plus importantes du traitement de l'information quantique. Nous considérons par exemple la tâche de la génération d'intrication. Cette procédure est généralement modélisée en rassemblant deux ou plusieurs sous-systèmes quantiques initialement dans un état de produit, c'est-à-dire $\rho \otimes \sigma$, puis en appliquant une opération d'intrication conjointe. Toutefois, si seules des opérations incohérentes ont été utilisées, cela ne sera possible que si l'état ρ ou bien l'état σ possède déjà une cohérence initiale. La raison en est que lorsque l'état $\rho \otimes \sigma$ est un état bipartite incohérent, toute opération incohérente agissant sur les deux systèmes laissera l'état totale incohérent, et donc l'état final n'est pas intriqué. En revanche, si l'état total est $|\pm\rangle|0\rangle$, avec $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle) / \sqrt{2}$, alors une application de la porte CNOT (3.81) donne l'état intriqué $(|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$. Cet exemple révèle que la cohérence, ou du moins les opérations génératrices de la cohérence, est une condition préalable à la production de l'intrication. Sur la base de cette idée, Streltsov et ses collègues ont montré que chaque état cohérent peut être utilisé pour générer une intrication d'une manière similaire à cet exemple [172].

Il est bien connu que l'intrication découle du principe de superposition, qui est également le fondement de la cohérence, ce qui nous pousse à se demander comment une ressource peut émerger quantitativement de l'autre. En général, la cohérence quantique est traitée par l'idée que tous les objets ont des propriétés ondulatoires. Si l'onde d'un objet est divisée en deux parties qui décrivent chacune un état quantique, alors ces deux ondes peuvent interférer de manière cohérente l'une avec l'autre de façon à former un seul état qui est une superposition de ces deux états. Pour le second phénomène qui est l'intrication quantique, les états qui sont en superposition sont les états communs de deux particules intriquées, et non ceux des deux ondes divisées à partir d'une seule particule. À cet égard, le but de cette partie est de fournir une connexion quantitative et opérationnelle claire entre la cohérence et l'intrication. Dans la référence [172], les auteurs ont montré que tous les états quantiques affichant une cohérence dans une base de référence sont des ressources utiles pour la création d'intrication via des opérations incohérentes. Ce résultat nous permet de définir une classe générale de mesure de la cohérence pour un système quantique de dimension arbitraire, en termes de l'intrication bipartite maximale qui peut être généré via des opérations incohérentes appliquées au système S et à un état auxiliaire incohérent A (voir la Fig.(3.2)). Par ailleurs, ces résultats montrent clairement l'équivalence qualitative et quantitative entre la cohérence et l'intrication à un niveau fondamental, et fournissent un schéma opérationnel intuitif permettant d'échanger ces deux ressources non classiques pour des applications appropriées dans les technologies quantiques.

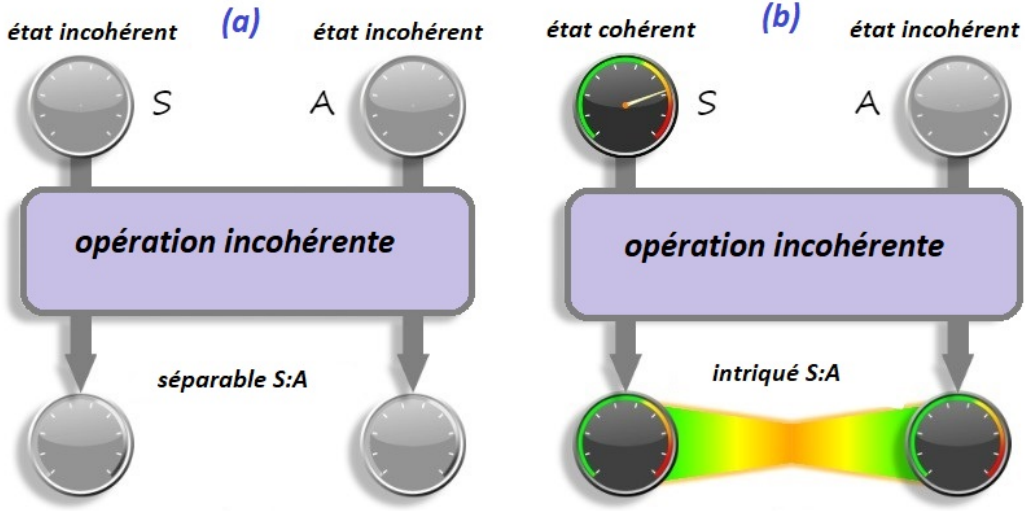


FIGURE 3.2 – (a) Si l'état d'entrée est incohérent, les opérations incohérentes ne peuvent pas générer l'intrication quantique, et donc l'état de sortie est un état séparable. (b) A l'inverse, tout état cohérent différent de zéro dans l'état d'un système d'entrée peut être converti en intrication par une opération incohérente sur l'état S et un auxiliaire incohérent A .

En se basant sur la figure (3.2), nous disons que l'état final composite d'un système S et un système auxiliaire A initialisé dans un état incohérent de référence $|0\rangle\langle 0|^A$ pour toute opération incohérente Λ^{SA} est séparable, c'est-à-dire l'état $\Lambda^{SA}[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A]$ est séparable, si l'état initial ρ^S d'un système S à d dimensions est incohérent. En d'autres termes, l'intrication peut être générée par des opérations incohérentes si l'état initial ρ^S est cohérent. Au contraire, les systèmes S avec des états incohérents ne peuvent pas être utilisés pour la création d'intrication de cette manière, puisque l'état final $\Lambda^{SA}[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A]$ est séparable. Nous pouvons alors conclure que pour toute mesure de l'intrication E , l'intrication maximale générée entre S et un auxiliaire incohérent A par des opérations incohérentes définit une cohérence C_E sur l'état initial de S . Ce phénomène a été démontré en utilisant la porte CNOT à deux qubits (3.81) et en considérant les quantificateurs basés sur la distance entre l'état S et l'état séparable le plus proche pour l'intrication E_D , et la distance entre l'état S et l'état incohérent le plus proche pour la cohérence C_D [172]. Nous avons donc

$$E_D(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} D(\rho, \sigma), \quad C_D(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{I}} D(\rho, \sigma), \quad (3.115)$$

avec \mathcal{S} est l'ensemble des états séparables et \mathcal{I} est l'ensemble des états incohérents. En outre, pour que ces mesures soient valables, nous insistons pour que la distance D soit contractive dans le cadre des opérations quantiques. Cela nous donne

$$D(\Lambda(\rho), \Lambda(\sigma)) \leq D(\rho, \sigma), \quad (3.116)$$

pour toute application Λ complètement positive et préservant des traces. D'autre part, si l'état σ^S est l'état incohérent le plus proche de ρ^S , c'est-à-dire $C_D(\rho^S) = D(\rho^S, \sigma^S)$, alors la contractivité de la distance D implique l'égalité suivante

$$D(\rho^S, \sigma^S) = D(\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A, \sigma^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A). \quad (3.117)$$

Il convient de noter que l'application d'une opération incohérente Λ^{SA} à l'état incohérent $\sigma^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A$ conduit à un autre état incohérent et qui est séparable (voir la figure (3.2)). Nous

trouvons alors

$$\begin{aligned}
C_D(\rho^S) &= D\left(\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A, \sigma^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right) \\
&\geq D\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right], \Lambda^{SA}\left[\sigma^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]\right) \\
&\geq \min_{\delta \in \mathcal{S}} D\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right], \delta\right) = E_D^{S:A}\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]\right). \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour toute mesure de la distance D , la quantité d'intrication E_D générée à partir d'un état ρ^S par une opération incohérente Λ^{SA} est limitée par la quantité de la cohérence C_D , de sorte que

$$E_D^{S:A}\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]\right) \leq C_D(\rho^S). \tag{3.119}$$

Cela nous permet d'unifier les théories des ressources de l'intrication et de la cohérence via leurs comportements combinés. D'autre part, il faut reconnaître que les quantificateurs de l'intrication et de la cohérence sont différentes les unes des autres, cela est lié à la mesure de la distance que nous choisissons, et chaque mesure a des caractéristiques majeures. Les auteurs de la référence [172] soulignent que l'inégalité (3.119) peut être saturée lorsque D est spécifié comme l'entropie relative et si la dimension du système auxiliaire A n'est pas inférieure à celle du système S (c-à-d $d_A \geq d_S$). Dans ce cas, il existe toujours une opération incohérente Λ^{SA} , tel que l'entropie relative de l'intrication E_r (1.102) et l'entropie relative de la cohérence C_r (3.83) satisfont l'égalité suivante

$$E_r^{S:A}\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]\right) = C_r(\rho^S). \tag{3.120}$$

L'équation ci-dessus montre que toute quantité non nulle de l'entropie relative de la cohérence C_r dans un système S peut être convertie en entropie relative d'intrication E_r entre S et un auxiliaire A initialement incohérente, par des opérations incohérentes Λ^{SA} . Dans le cas où la distance D est choisie comme étant l'entropie relative quantique, nous pouvons prouver la borne (3.119) si nous considérons l'opération unitaire incohérente comme

$$U = \sum_{i=0}^{d_S-1} \sum_{j=0}^{d_S-1} |i\rangle\langle i|^S \otimes |\text{mod}(i+j, d_S)\rangle\langle j|^A + \sum_{i=0}^{d_S-1} \sum_{j=d_S}^{d_A-1} |i\rangle\langle i|^S \otimes |j\rangle\langle j|^A, \tag{3.121}$$

avec d_S et d_A sont les dimensions du système S et du système auxiliaire A , respectivement. Notez que pour deux qubits, l'équation (3.121) est équivalent à la porte CNOT (3.81). On peut facilement constater qu'elle fait évoluer l'état $\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A$ vers l'état

$$\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right] = U\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]U^\dagger = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|^S \otimes |i\rangle\langle j|^A, \tag{3.122}$$

où ρ_{ij} sont les éléments matriciels de $\rho^S = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|^S$. Dans la prochaine étape, nous utilisons le fait que pour tout état quantique ς^{SA} , l'entropie relative de l'intrication est bornée comme suit [175]

$$E_r^{S:A}(\varsigma^{SA}) \geq S(\varsigma^S) - S(\varsigma^{SA}), \tag{3.123}$$

avec $S(\varsigma^S)$ représente l'entropie de von Neumann de l'état réduit ς^S . Si on applique cette inégalité à l'état $\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]$, on constate

$$E_r^{S:A}\left(\Lambda^{SA}\left[\rho^S \otimes |0\rangle\langle 0|^A\right]\right) \geq S\left(\sum_i \rho_{ii} |i\rangle\langle i|^S\right) - S(\rho^S). \tag{3.124}$$

Remarquant que le côté droit de cette inégalité est égal à l'entropie relative de la cohérence $C_r(\rho^S)$ (voir l'équation (3.84)). On obtient alors

$$E_r^{S:A} \left(\Lambda^{SA} \left[\rho^S \otimes |0\rangle \langle 0|^A \right] \right) \geq C_r(\rho^S). \quad (3.125)$$

Ce résultat montre que la cohérence et l'intrication peuvent être convertis l'un à l'autre dans ce scénario particulièrement intéressant. Sur la base de ces résultats, l'intrication maximale $E^{S:A}$ générée par rapport à toute intrication monotone donnée via des opérations incohérentes, définit une cohérence monotone C_E comme suit

$$C_E(\rho^S) = \lim_{d_A \rightarrow \infty} \left\{ \max_{\Lambda^{SA}} E^{S:A} \left(\Lambda^{SA} \left[\rho^S \otimes |0\rangle \langle 0|^A \right] \right) \right\}, \quad (3.126)$$

où d_A est la dimension de système auxiliaire, et la maximisation porte sur toutes les opérations incohérentes Λ^{SA} . A ce propos, il est intéressant de souligner que C_E est une cohérence monotone chaque fois que $E^{S:A}$ est une intrication monotone. En particulier, C_E remplit toutes les conditions de la théorie de la cohérence pour l'ensemble des opérations incohérentes Λ^{SA} chaque fois que $E^{S:A}$ remplit les conditions correspondantes dans la théorie de l'intrication. En outre, cette procédure peut induire des mesures de la cohérence, y compris l'entropie relative de la cohérence et la cohérence géométrique, à partir des mesures de l'intrication. Fait intéressant, $C_E = C_r, C_g$ quand $E = E_r, E_g$, respectivement. Cependant, on sait peu de choses sur les mesures qui peuvent être induites de cette manière au-delà de ces exemples, et le lien entre la cohérence et l'intrication est loin d'être clair.

CHAPITRE 4

THÉORIE DE L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES ET SA RELATION AVEC LES CORRÉLATIONS QUANTIQUES

La métrologie quantique, ou la théorie de l'estimation quantique, est d'une importance capitale dans le développement de dispositifs de haute précision dans plusieurs domaines technologiques [38, 39]. Son objectif principal est de réaliser des mesures de haute précision en estimant les paramètres inconnus qui spécifient un système quantique donné, à l'aide d'effets quantiques. En ce sens, elle vise à développer de nouvelles méthodes pour améliorer la limite de précision des paramètres physiques au-delà des méthodes métrologiques classiques. En bref, elle s'intéresse à la plus grande précision possible dans diverses tâches d'estimation des paramètres, et à la recherche des schémas de mesure qui atteignent cette précision. À l'origine, la métrologie était axée sur les mesures effectuées à l'aide de systèmes classiques, tels que les systèmes mécaniques décrits par la physique classique ou les systèmes optiques modélisés par l'optique ondulatoire classique. Nous devons donc nous demander comment pouvons nous déduire les limites de précision de l'estimation des paramètres, ainsi que les méthodes qui peuvent améliorer la précision dans les systèmes quantiques ? Y a-t-il une limite fondamentale ? Dans le schéma classique, les premières réponses sont apparues vers les années 1940 avec les travaux de Rao [176] et Cramer [40], qui ont trouvé indépendamment une limite inférieure à la variance d'un estimateur arbitraire. Ces résultats se sont étendus au cas multiparamétrique par Darmois [177]. Cette limite, généralement appelée la limite de Cramér-Rao, est intimement liée à l'information de Fisher, introduite par Fisher dans les années 1920 [178]. L'information de Fisher joue donc un rôle central dans la théorie de l'estimation. Sa maximisation sur toutes les mesures quantiques possibles définit l'information quantique de Fisher [44, 179] et fournit une limite quantique inférieure à la borne de Cramér-Rao.

En revanche, la théorie de l'estimation quantique est le cadre mathématique permettant d'aborder l'optimisation d'une mesure quantique. Elle s'applique aux situations où il s'agit de prédire la valeur d'un paramètre en effectuant une série répétée de mesures sur des préparations identiques du système, puis en traitant les données pour estimer la valeur du paramètre inconnu [41]. Pour accomplir toutes ces tâches, nous aurions besoin de phénomènes quantiques comme ressources, tels que l'intrication et la cohérence quantique, afin d'améliorer la sensibilité d'un système. En même temps, les systèmes quantiques imposent des restrictions intrinsèques à la sensibilité qui peut être obtenue, par exemple grâce aux relations d'incertitude de Heisenberg, qui stipulent que les variables complémentaires ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision illimitée. Pour déterminer comment les propriétés quantiques améliorent

mais aussi restreignent la sensibilité du système, nous modélisons sa dynamique et nous nous concentrons sur une quantité clé qui est l'information quantique de Fisher.

L'information quantique de Fisher est un concept fondamental en théorie de l'estimation des paramètres quantiques, en raison de son lien important avec la borne de Cramér-Rao quantique. Selon cette borne, une plus grande précision est obtenue pour les petites variances, qui correspondent aux plus grandes valeurs de l'information quantique de Fisher. Ainsi, le but principal de tous les protocoles de la métrologie quantique est d'atteindre la plus petite valeur de la variance. Cependant, des études récentes ont révélé de larges liens entre l'information quantique de Fisher et d'autres aspects de la mécanique quantique, y compris la transition de phase quantique [180], la caractérisation des corrélations quantiques [219], la thermodynamique quantique [181], le contrôle de l'intrication [182] et la limite de vitesse quantique [183]. Ces liens indiquent que c'est plus qu'un concept en métrologie quantique, mais plutôt une quantité fondamentale en mécanique quantique.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les concepts de base de la théorie de l'estimation avant d'aborder l'avantage quantique des schémas de détection. Nous procédons ensuite à la dérivation de l'information de Fisher classique, qui est une mesure d'information pouvant être liée à la variance d'un paramètre. Nous montrons ensuite comment l'information de Fisher classique peut être généralisée pour toutes les mesures possibles à l'information de Fisher quantique. La motivation pour étudier ces quantités devient claire lorsque nous introduisons et dérivons la borne de Cramér-Rao, qui relie l'information de Fisher quantique et classique à la variance d'un paramètre. Cette limite quantique de Cramér-Rao est toujours atteinte à saturation dans le cas où un seul paramètre est estimé, et dans ce cas, les corrélations quantiques nous aident à améliorer la précision et l'efficacité des protocoles de la métrologie quantique [184, 185]. À l'inverse, il est difficile de saturer cette limite dans le cas d'une estimation multiparamétrique, en raison de l'incompatibilité entre les mesures optimales des différents paramètres estimés. L'objet pertinent dans le problème d'estimation multiparamétrique est donné par ce qu'on appelle la matrice d'information quantique de Fisher [44]. À cette fin, dans la deuxième partie de ce chapitre, nous fournissons les techniques complètes sur le calcul de cette matrice, et nous montrons que la stratégie simultanée de plusieurs paramètres est toujours avantageuse et peut fournir une meilleure précision que la stratégie individuelle dans les procédures d'estimation multiparamétrique. La caractérisation des corrélations quantiques en termes d'information quantique de Fisher sera également discutée.

4.1 Théorie de l'estimation classique

La théorie de l'estimation est un concept mathématique important utilisé dans de nombreuses applications de communication et de traitement du signal. Cette théorie est utile pour estimer l'information désirée dans les données reçues elle est donc utilisée dans toute une série d'applications allant du radar au traitement vocal [186]. Dans cette section, nous énumérons les concepts de base des statistiques ainsi que le processus d'estimation. Comme nous l'avons dit, les principaux outils mathématiques utilisés par la métrologie appartiennent à la statistique. De plus, nous nous intéressons particulièrement à la théorie de l'estimation, qui montre comment estimer correctement une quantité à partir d'un échantillon de données. Les données peuvent être de n'importe quel type. Par exemple, l'échantillon de données peut être un ensemble des résultats de tirages au sort, ou même les longueurs d'onde des photons sortant d'un échantillon radioactif. Supposons qu'un processus non déterministe produise un ensemble de données $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, qui est une occurrence particulière (ou réalisation) d'un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées désignées par $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. La fonction de densité de probabilité correspondant à toute variable aléatoire de cet ensemble est $p(x; \theta)$, où $x \in R$ est une réalisation possible d'une variable aléa-

toire et θ est un nombre réel (par exemple, cela pourrait être un paramètre physique, comme la phase dans un interféromètre optique) qui est paramétrisé par $p(x; \theta)$. Ainsi, la probabilité qu'un résultat de mesure de notre ensemble de données se trouve dans l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_f$ est donnée par l'intégrale de $p(x; \theta)$ comme suit : $\int_{x_0}^{x_f} p(x; \theta) dx$.

En général, le problème central de l'estimation des paramètres est le suivant : Pour un ensemble de données x de n résultats d'essais, avec quelle précision pouvons-nous prédire la valeur de θ ? En effet, en physique, le paramètre θ est une propriété physique du système étudié et nous voulons déterminer sa valeur à partir des données expérimentales x_i . Pour cela, un estimateur est utilisé pour transformer les données x en une prédiction de θ . Nous désignerons un tel estimateur par $\hat{\theta}(x)$, qui se trouve être une variable aléatoire puisqu'elle dépend des valeurs prises des variables aléatoires dans X . Nous pouvons maintenant reformuler le problème d'estimation comme suit ; Pour tous ensemble de données x , quelle est la petite valeur de l'erreur de notre estimateur ? Plus précisément, l'erreur minimale est donnée par la variance de cet estimateur $\text{Var}_\theta(\hat{\theta})$. Elle est définie par

$$\begin{aligned} \text{Var}_\theta(\hat{\theta}) &:= \mathbf{E} \left[\left(\hat{\theta}(x) - \theta \right)^2 \right] \\ &= \int p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta) \left(\hat{\theta}(x) - \theta \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int p(x; \theta) \left(\hat{\theta}(x) - \theta \right)^2 dx^n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

elle est utilisée pour quantifier la performance de notre tâche d'estimation, avec \mathbf{E} est une espérance mathématique. Dans l'équation (4.1), nous avons utilisé le fait que $dx^n = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ et $p(x; \theta) = p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta)$.

Il est donc clair que la loi de X sera complètement connue si la fonction de distribution de probabilité $p(x; \theta)$ est connue, cela implique nécessairement la connaissance de la valeur des paramètres inconnus θ . Dans ce contexte, la théorie de l'estimation vise à approcher numériquement la valeur des paramètres inconnus sans connaître la densité de probabilité et la loi de probabilité qui régit notre problème. Dans ce formalisme, nous faisons l'hypothèse implicite que θ est connaissable avec une précision arbitraire à condition d'employer un estimateur approprié $\hat{\theta}(x)$ et d'avoir accès à un ensemble de données x .

4.1.1 Modèles statistiques classiques

Considérons une expérience aléatoire dont les résultats sont décrits par une variable aléatoire X , avec un espace de probabilité $(X, x, p(x))$ et une densité de probabilité $p(x)$. La tâche consiste à reconstruire $p(x)$, que l'on appelle la véritable densité de probabilité, à partir de N points d'échantillonnage indépendants ou observations de X . Il existe de nombreuses façons d'aborder le problème de l'apprentissage de $p(x)$, mais si la forme fonctionnelle de $p(x)$ est déjà connue, ou peut être supposée avec une précision raisonnable, une approche paramétrique est tout à fait naturelle. La densité de probabilité réelle $p(x)$ est supposée appartenir à une famille paramétrique de densités de probabilité $\{p(x; \theta)\}_{\theta \in \Theta}$, où $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace des paramètres.

Un modèle statistique classique S_C est une famille de densités de probabilité sur X paramétrée par n paramètres réels $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ et noté par

$$S_C = \{ \forall x \in X; p(x; \theta), (X, x, p(x)) \mapsto \Theta, \theta \equiv (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) \in \Theta \}, \quad (4.2)$$

où l'application de paramétrisation $(X, x, p(x)) \mapsto \Theta$ est injective et peut être aussi dérivable $n^{ième}$ fois que si nécessaire par rapport aux paramètres estimés, c'est-à-dire que toutes les dérivées possibles $\partial_{\theta^1} \dots \partial_{\theta^n} p(x; \theta)$ existent. Il est très intéressant de souligner que la densité de probabilité

P est toujours positive et normalisée. Nous avons donc deux cas ; Si X est dénombrable, alors $p(x; \theta)$ est décrit dans un espace discret et normalisé tel que

$$\sum_{x \in X} p(x; \theta) = 1, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (4.3)$$

Si X est indénombrable, alors $p(x; \theta)$ est décrite dans un espace continu et normalisé de sorte que

$$\int_x p(x; \theta) dx = 1, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (4.4)$$

Pour simplifier notre discussion, nous utilisons cette dernière notation tout au long de ce chapitre.

4.1.2 L'information de Fisher classique

Les mesures sur les systèmes physiques produisent des résultats probabilistes, et l'estimation des paramètres physiques, décrivant un système ou régissant son évolution, est un problème d'inférence statistique. La source des erreurs statistiques peut être liée aux imperfections de l'expérience ou des mesures de lecture, ou être plus fondamentale, imposée par exemple, par les relations d'incertitude de Heisenberg dans une configuration quantique. Dans le cas classique, une quantité qui est la clé de cette discussion est le Score [187], que nous appelons $\mathcal{L}_\theta(x)$. Le Score est la dérivée partielle du logarithme naturel de la fonction de vraisemblance, et indique donc la sensibilité du système à un changement infinitésimal de la valeur du paramètre θ . Le Score est défini comme

$$\mathcal{L}_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x; \theta), \quad (4.5)$$

qui mesure la sensibilité de la fonction de densité de probabilité $p(x; \theta)$ aux changements du paramètre θ . Cela découle du fait que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x)) &= \int p(x; \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x; \theta) dx \\ &= \int p(x; \theta) \frac{1}{p(x; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x; \theta) dx \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} p(x; \theta) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'information de Fisher classique $\mathcal{F}(\theta)$ dans une seule observation d'une fonction de densité de probabilité $p(x; \theta)$ est la variance du Score $\mathcal{L}_\theta(x)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\theta) &:= \mathcal{F}(p(x; \theta)) := \text{Var}(\mathcal{L}_\theta(x)) \\ &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x; \theta) \right)^2 \right] \\ &= \int p(x; \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x; \theta) \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De manière formelle, l'information de Fisher (4.7) quantifie l'information fournie par un échantillon sur le paramètre θ . En complément, une information de Fisher proche de zéro indique un échantillon avec peu d'information sur la valeur de θ . Nous notons ici une propriété importante et utile de l'information de Fisher classique ; à savoir, la non-négativité et l'additivité pour les

événements non corrélés. Autrement dit, si $p(\mathbf{x}; \theta) = p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta)$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p(\mathbf{x}; \theta)) &= \text{Var} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_1; \theta) + \dots + \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_n; \theta) \right] \\ &= n \text{Var} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x_1; \theta) \right] \\ &= n \mathcal{F}(\theta). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Par conséquent, l'information de Fisher dans un échantillon aléatoire est juste n fois l'information dans une seule observation. Cela devrait avoir un sens intuitif, car cela signifie que plus d'observations produisent plus d'informations.

4.1.3 Borne de Cramér-Rao

La borne de Cramér-Rao fournit une limite sur la façon dont l'estimation peut être effectuée. Elle fixe une limite fondamentale à la variance de l'estimateur $\hat{\theta}$ quelle que soit la façon dont il est construit. Elle est exprimée par la formule suivante [176, 40]

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n \mathcal{F}(\theta)}, \tag{4.9}$$

où n est le nombre d'essais (le nombre d'entrées dans l'ensemble de données \mathbf{x}). Cette borne (4.9) déclare que l'erreur de tout estimateur non biaisé $\hat{\theta}$ de θ est limitée par l'inverse de l'information de Fisher. En d'autres termes, cela indique que la variance d'un estimateur $\hat{\theta}$ est au moins aussi élevée que l'inverse de l'information de Fisher, c'est-à-dire que plus l'information de Fisher est grande, plus on peut s'attendre à une précision d'estimation élevée. Ainsi, l'information de Fisher est la quantité qui produit une limite ultime sur la précision pouvant être atteinte dans un problème d'estimation des paramètres. Un estimateur pour lequel l'égalité est respectée est dit efficace, mais, avec un nombre fini de mesures, il n'y a aucune garantie qu'un tel estimateur existe.

Nous fournissons maintenant une preuve de la limite de Cramér-Rao en suivant une approche similaire à celle de la référence [188]. Afin de la prouver (4.9), nous devons faire l'hypothèse que l'estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ doit être non biaisé. Ce qui signifie qu'en moyenne, l'estimateur $\hat{\theta}$ est égal à la vraie valeur de θ ;

$$\mathbf{E}(\hat{\theta}(\mathbf{x})) \equiv \theta. \tag{4.10}$$

En déplaçant θ vers le côté gauche et en écrivant explicitement la moyenne en termes de la fonction de densité de probabilité $p(\mathbf{x}; \theta)$. L'équation (4.10) devient

$$\int p(\mathbf{x}; \theta) (\mathbf{E}(\hat{\theta}(\mathbf{x})) - \theta) d\mathbf{x}^n = 0. \tag{4.11}$$

En dérivant cette expression par rapport à θ , nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int p(\mathbf{x}; \theta) (\mathbf{E}(\hat{\theta}(\mathbf{x})) - \theta) d\mathbf{x}^n = \int \frac{\partial}{\partial \theta} (p(\mathbf{x}; \theta)) (\mathbf{E}(\hat{\theta}(\mathbf{x})) - \theta) d\mathbf{x}^n - \int p(\mathbf{x}; \theta) d\mathbf{x}^n = 0, \tag{4.12}$$

où nous avons utilisé le fait que l'estimateur ne dépend pas explicitement de θ , donc $\frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta) = -1$. Pour toute fonction de densité de probabilité, nous avons $\int p(\mathbf{x}; \theta) d\mathbf{x}^n = 1$. Par conséquent, l'équation (4.12) nous donne

$$\int \frac{\partial p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta) d\mathbf{x}^n = 1. \tag{4.13}$$

Notons que, $\partial p(\mathbf{x}; \theta) / \partial \theta$ peut être encore écrite de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\prod_{k=1}^n p(x_k; \theta) \right) &= \frac{\partial p(x_1; \theta)}{\partial \theta} \prod_{k \neq 1}^n p(x_k; \theta) + \frac{\partial p(x_2; \theta)}{\partial \theta} \prod_{k \neq 2}^n p(x_k; \theta) + \dots + \frac{\partial p(x_n; \theta)}{\partial \theta} \prod_{k \neq n}^n p(x_k; \theta) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \prod_{k \neq l}^n p(x_k; \theta) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $\prod_{k \neq l}^n p(x_k; \theta)$ désigne la multiplication de tous les termes $p(x_k; \theta)$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ à l'exception du l -ème terme. En écrivant $\prod_{k \neq l}^n p(x_k; \theta) = p(\mathbf{x}; \theta) / p(x_l; \theta)$, on obtient

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{p(x_l; \theta)} \frac{\partial p(x_l; \theta)}{\partial \theta} p(\mathbf{x}; \theta) = p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta}. \quad (4.15)$$

L'équation précédente peut être utilisée pour réexprimer l'équation (4.13) comme suit

$$\begin{aligned} \int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta) d\mathbf{x}^n &= \int \left[\sqrt{p(\mathbf{x}; \theta)} \sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right] \\ &\quad \times \left[\sqrt{p(\mathbf{x}; \theta)} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta) \right] d\mathbf{x}^n = 1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

où nous avons décidé d'écrire la fonction de densité de probabilité $p(\mathbf{x}; \theta)$ comme un produit de ses racines carrées. L'équation (4.16) a donc la forme suivante

$$\int f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^n = 1 \quad (4.17)$$

avec

$$f(\mathbf{x}) \equiv \sqrt{p(\mathbf{x}; \theta)} \sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta}, \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) \equiv \sqrt{p(\mathbf{x}; \theta)} (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta). \quad (4.18)$$

Nous allons maintenant utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz [42] :

$$\left(\int f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^n \right)^2 \leq \int f(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}^n \int g(\mathbf{x}')^2 d\mathbf{x}'^n. \quad (4.19)$$

Nous élevons au carré les deux côtés de l'équation (4.16) et nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$1 \leq \left[\int p(\mathbf{x}; \theta) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n \right] \left[\underbrace{\int p(\mathbf{x}'; \theta) (\hat{\theta}(\mathbf{x}') - \theta)^2 d\mathbf{x}'^n}_{\text{Var}(\hat{\theta})} \right]. \quad (4.20)$$

Notons que le deuxième terme de la dernière équation est simplement la variance de l'estimateur $\hat{\theta}$. Alors

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{\int p(\mathbf{x}; \theta) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n}. \quad (4.21)$$

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que le dénominateur de l'équation (4.21) est égal à $n\mathcal{F}(\theta)$. En développant le terme de sommation dans le dénominateur, nous pouvons l'exprimer comme suit

$$\begin{aligned}
\int p(\mathbf{x}; \theta) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n &= \int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{x}^n \\
&= \int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n \\
&\quad + \int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{k,l=1, k \neq l}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{x}^n.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Le dernier terme de cette équation peut être encore réécrit comme

$$\begin{aligned}
\int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{k,l=1, k \neq l}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{x}^n &= \int dx_1 dx_2 \dots dx_n p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta) \\
&\quad \times \sum_{k,l=1, k \neq l}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

puis de retirer la sommation et d'intégrer certains des termes comme suit

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \neq 1} \left(\int p(x_1; \theta) \frac{\partial \log p(x_1; \theta)}{\partial \theta} dx_1 \right) \left(\int p(x_k; \theta) \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} dx_k \right) \left(\int \prod_{m \neq 1}^n p(x_m; \theta) dx_m \right) + \\
&\sum_{k \neq 2} \left(\int p(x_2; \theta) \frac{\partial \log p(x_2; \theta)}{\partial \theta} dx_2 \right) \left(\int p(x_k; \theta) \frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} dx_k \right) \left(\int \prod_{m \neq 2}^n p(x_m; \theta) dx_m \right) + \dots
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Chacun des termes ci-dessus est un produit des valeurs d'espérance des Scores. Par conséquent, nous pouvons réécrire cette expression comme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \neq 1} \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_1; \theta)}{\partial \theta} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} \right) + \sum_{k \neq 2} \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_2; \theta)}{\partial \theta} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \dots + \sum_{k \neq n} \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_n; \theta)}{\partial \theta} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\partial \log p(x_k; \theta)}{\partial \theta} \right) \\
&= \sum_{k \neq 1} \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_1)) \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_k)) + \sum_{k \neq 2} \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_2)) \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_k)) + \dots + \sum_{k \neq n} \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_n)) \mathbf{E}(\mathcal{L}_\theta(x_k)) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Nous avons démontré précédemment que la valeur d'espérance d'un score est toujours égale à zéro (voir l'équation (4.6)). Par conséquent, l'ensemble de cette expression est égale à zéro et

nous pouvons simplifier l'équation (4.22) comme suit

$$\begin{aligned}
\int p(\mathbf{x}; \theta) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n &= \int p(\mathbf{x}; \theta) \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n \\
&= \sum_{l=1}^n \int dx_1 \dots dx_n p(x_1; \theta) \dots p(x_n; \theta) \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \\
&= \sum_{l=1}^n \left[\int p(x_l; \theta) \left(\frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx_l \right] \underbrace{\left[\int \prod_{k \neq l} p(x_k; \theta) dx_k \right]}_{=1} \\
&= \sum_{l=1}^n \mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Chaque terme de l'équation (4.26) est l'information de Fisher classique pour la variable aléatoire X_l avec la fonction de densité de probabilité $p(x_l; \theta)$. Puisque les variables aléatoires considérées sont indépendantes et distribuées de manière identique, toutes les $p(x_l; \theta)$ sont identiques. Par conséquent, nous avons

$$\int p(\mathbf{x}; \theta) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \log p(x_l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\mathbf{x}^n = \sum_{l=1}^n \mathcal{F}(p(x_l; \theta)) = n\mathcal{F}(\theta). \tag{4.27}$$

Enfin, en combinant l'équation (4.27) avec l'équation (4.21), on obtient la fameuse limite de Cramér-Rao (4.9). Nous allons énumérer ici quelques propriétés de l'information de Fisher classique $\mathcal{F}(\theta)$:

- Par rapport à d'autres mesures d'information, telles que l'entropie de Shannon ou l'information mutuelle, l'information de Fisher classique est dimensionnelle. Nous acquérons des unités parce que les densités de probabilité $p(x_l; \theta)$ sont généralement dimensionnelles et parce que la dérivée ∂_θ a des unités de θ^{-1} . Cela est nécessaire pour relier $\mathcal{F}(\theta)$ à la variance $\text{Var}(\theta)$ à travers l'inégalité de Cramér-Rao (4.9).
- L'information de Fisher classique est une quantité strictement positive. Ceci peut être démontré en considérant une forme plus générale de $\mathcal{F}(\theta)$ qui prend en compte de nombreuses variables $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ (c-à-d le cas de l'estimation multi-paramètres) et en examinant la forme des matrices résultantes, dont on peut montrer qu'elles sont positives.
- L'information de Fisher classique est liée à l'information mutuelle, mais il s'agit de deux quantités fondamentalement différentes. Pour une compréhension intuitive, l'information mutuelle $\mathcal{I}(X : Y)$ (1.11) mesure la corrélation entre les variables aléatoires X et Y , tandis que $\mathcal{F}(\theta)$ s'intéresse à la probabilité qu'un estimateur $\hat{\theta}$ s'approche de près de la "vraie" valeur de θ .

4.1.4 Extension à la métrologie classique multiparamétrique

La mission principale ici est d'estimer un ensemble de paramètres inconnus. Dans ce cas, les différents paramètres que nous souhaitons estimer sont construits dans le vecteur défini dans l'espace des paramètres Θ , appelé le vecteur de paramètre $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = (\theta_1(\mathbf{x}), \dots, \theta_d(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^d$. Alors, la réalisation du vecteur d'estimation est représentée par $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = (\hat{\theta}_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{\theta}_d(\mathbf{x}))^T$.

Pour tout estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ de $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$, l'espérance mathématique est donnée par $\mathbf{E} \left[(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \right]$.

Ensuite, l'erreur quadratique moyenne est égale à la matrice de covariance $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. L'un des résultats centraux de la théorie des probabilités classique, à savoir l'inégalité de Cramér-Rao, imposant une limite inférieure à la matrice de covariance [41]

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \mathbb{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}, \quad (4.28)$$

où $\mathbb{F}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice d'information de Fisher classique avec des éléments

$$\begin{aligned} [\mathbb{F}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in X} \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

qui dépendent de la distribution de probabilité $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ des résultats \mathbf{x} . L'inégalité de Cramér-Rao ne s'applique qu'aux distributions de probabilité qui satisfont la condition de régularité suivante

$$\mathbf{E} \left[\frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right] = 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta. \quad (4.30)$$

Si un tel estimateur localement non biaisé existe, la borne de Cramér-Rao peut toujours être saturée. Cependant, l'identification des conditions de saturation de la borne de Cramér-Rao est un sujet complexe qui implique une variété de détails techniques. En particulier, pour la distribution de probabilité satisfaisant l'équation (4.30), il existe un estimateur local non biaisé $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ saturant la borne de Cramér-Rao si [189]

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbb{F}(\boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}). \quad (4.31)$$

4.2 Théorie de l'estimation quantique

La nature probabiliste universelle de la mécanique quantique nous amène à travailler régulièrement avec des probabilités. De plus, si l'on étudie des domaines liés à des expériences ou à des réalisations physiques, cette nature probabiliste de la mécanique quantique devient encore plus visible. D'autre part, des caractéristiques exotiques telles que l'intrication découlent de la mécanique quantique, qui sont directement liées aux propriétés probabilistes du système quantique. La présente section vise à décrire les systèmes quantiques du point de vue de la métrologie.

4.2.1 Modèles statistiques quantiques

Par analogie avec le cas classique, un modèle statistique quantique S_Q est défini par une famille d'opérateurs densité dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et est paramétré par n paramètres réels $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$, avec Θ est un espace de paramètres estimé. Cela signifie que

$$S_Q = \{ \rho_{\boldsymbol{\theta}} = \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}(\rho) : \boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) \in \Theta \}, \quad (4.32)$$

où l'application de paramétrage $\Lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ est injective (c'est-à-dire qu'il existe un inverse de l'application $\Lambda_{\boldsymbol{\theta}}$), et $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ peut être différencié autant de fois que nécessaire par rapport aux paramètres.

Un modèle statistique quantique se présente typiquement de la manière suivante : Le système S est préparé au temps $t = 0$ dans un état initial $\rho \equiv \rho(t = 0)$, et passe ensuite par un canal quantique $\Lambda_{\boldsymbol{\theta}}$, qui dépend de la vraie valeur de $\boldsymbol{\theta}$ d'un ou plusieurs paramètres. Alors le modèle

associé est défini comme $\rho_\theta := \Lambda_\theta(\rho)$. Un exemple caractéristique est le canal unitaire généré par l'hamiltonien du système, à savoir

$$\rho_\theta = U_t \rho U_t^\dagger, \quad \text{avec} \quad U_t = \exp(-itH_\theta), \quad (4.33)$$

où le paramètre θ est appelé le paramètre hamiltonien. De plus, il est intéressant de distinguer ici les paramètres hamiltoniens de phase (ou de décalage) et les paramètres généraux. Dans le premier cas, le paramètre apparaît linéairement, comme une constante multiplicative globale, c'est-à-dire que nous pouvons écrire comme $H_\theta = \theta K$. Dans le deuxième cas, le paramètre intervient de manière non linéaire, de sorte que les vecteurs propres du Hamiltonien H_θ dépendent en général de θ . Cependant, le codage dynamique n'est pas la seule possibilité. Pour certains modèles, ce codage est statique. Un exemple typique est celui d'un modèle thermique qui décrit l'état d'équilibre d'un système quantique en interaction avec un réservoir thermique, dans lequel

$$\rho_\beta = \frac{\exp(-\beta H)}{Z}, \quad \text{avec} \quad Z = \text{Tr}(\exp(-\beta H)), \quad (4.34)$$

où le paramètre d'intérêt, conventionnellement désigné par β , est l'inverse de la température du réservoir et H est Hamiltonien du système.

Dans ces deux scénarios, n'importe quel modèle statistique quantique $S = \{\rho_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, effectuant une mesure avec des opérateurs $\{\Pi_x\}_{x \in X}$, donne lieu à un modèle statistique classique via la relation $p_\theta(x) = p(x; \theta) = \text{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)$, où l'espace d'échantillon X est supposé être dénombrable. A titre d'exemple, nous prenons un état d'un système quantique à deux niveaux que nous pouvons décomposer sur la base des états propres $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ en fonction de deux angles $\{\theta^1 \equiv \theta, \theta^2 \equiv \varphi\}$ comme suit

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (4.35)$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et évoluant dans un espace de Hilbert à deux dimensions comme le montre la figure (1.2). L'état du qubit est décrit par le vecteur de Bloch \vec{r} comme suit :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 r_i \hat{\sigma}_i, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2}, \quad r_i = \text{Tr}(\hat{\sigma}_i \hat{\rho}), \quad (4.36)$$

où σ_i est l'opérateur de Pauli dans la direction i ($i = x, y, z$). Alors l'état d'un système à deux niveaux est visualisé sur la sphère de Bloch par le vecteur de Bloch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \langle \hat{\sigma}_x \rangle \\ \langle \hat{\sigma}_y \rangle \\ \langle \hat{\sigma}_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Si l'état $\hat{\rho}$ est un état pur, la matrice densité (4.36) se réduit à

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{\theta}{2} & 1 - i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 1 + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 1 - \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Supposons que nous effectuons la mesure de la valeur de projection (PVM) de l'opérateur σ_z sur l'état (4.38), qui est décrit par l'ensemble des opérateurs de projection

$$\hat{\Pi}_+ \equiv \frac{1}{2} (\hat{\mathbb{1}} + \hat{\sigma}_z), \quad \hat{\Pi}_- \equiv \frac{1}{2} (\hat{\mathbb{1}} - \hat{\sigma}_z), \quad (4.39)$$

alors la distribution de probabilité du résultat de cette mesure est calculée comme suit

$$p(+, \theta) \equiv \text{Tr}(\hat{\Pi}_+ \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right), \quad p(-, \theta) \equiv \text{Tr}(\hat{\Pi}_- \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right). \quad (4.40)$$

Par conséquent, le modèle statistique de cette distribution de probabilité est paramétré par

$$x = \{+, -\}, \quad p(\pm, \theta) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (4.41)$$

et l'espace des paramètres Θ devient

$$\Theta = \{ \theta = (\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad n = 2 \}. \quad (4.42)$$

4.2.2 Avantage de la stratégie quantique dans la théorie de l'estimation

Grâce à des propriétés telles que la cohérence et l'intrication quantique, les systèmes quantiques sont extrêmement prometteurs en tant que capteurs quantiques. Plusieurs raisons expliquent pourquoi les systèmes quantiques sont capables de surpasser les dispositifs classiques. Tout d'abord, et c'est sans doute le plus important, la limite de mesure classique peut être dépassée en utilisant des systèmes quantiques. Pour les systèmes classiques, la fluctuation statistique est de l'ordre de $\Delta\theta \propto 1/\sqrt{N}$ en raison du théorème de la limite centrale, où N est le nombre de détecteurs utilisés pour la mesure [45]. Par capteurs, nous voulons dire le nombre de mesures effectuées, ou le nombre de systèmes de capteurs avec lesquels le système source interagit. Il peut s'agir du nombre de photons dans une cavité ou des atomes dans un réseau de capteurs. La fluctuation statistique est parfois écrite explicitement comme $\Delta\theta \propto 1/\sqrt{NM}$, qui est connue sous le nom de la limite quantique standard, c'est le résultat du bruit de projection quantique avec M est le nombre de répétitions de la même mesure [190].

En comparaison, les systèmes quantiques peuvent obtenir une meilleure précision par rapport à $1/\sqrt{N}$. Il a été démontré que le fait d'injecter du vide comprimé dans l'un des ports d'un interféromètre augmentait la précision à environ $1/N^{3/4}$ [35, 191]. En outre, l'ajout de l'intrication dans le schéma, qui a été inclus en injectant des états intriqués dans les ports de l'interféromètre, donne une précision de $1/N$, ce qui est une amélioration du facteur \sqrt{N} [192]. Cette limite est souvent appelée la limite de Heisenberg, et les résultats indiquent qu'il s'agit bien de la véritable limite quantique [193].

Le schéma le plus élémentaire d'une configuration métrologique dans le présent contexte est le suivant. Tout d'abord, un état ρ est préparé, suivi d'une évolution générale représentée par une application Λ_θ dans laquelle le paramètre inconnu θ est imprimé sur l'état. Enfin, l'état sortant est caractérisé par une certaine quantité mesurée $\{\pi_x\}$, qui nous permet de déduire la valeur du paramètre θ . La figure (4.1) illustre les principales étapes de la métrologie quantique.

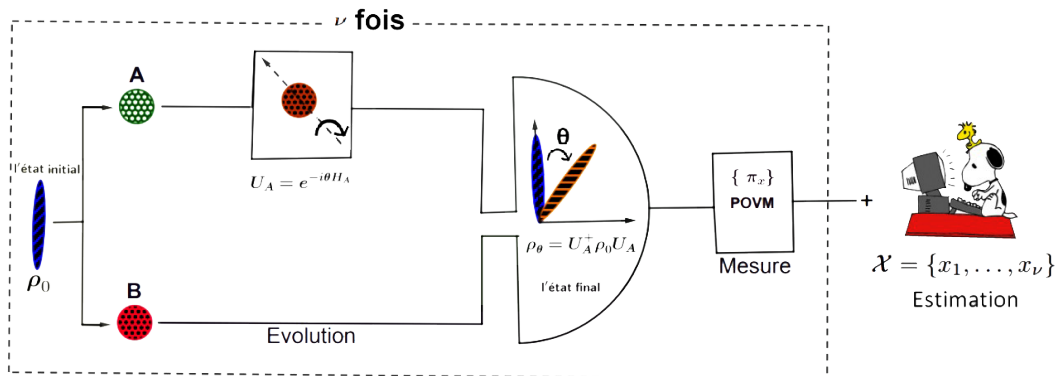


FIGURE 4.1 – Schéma d'un processus complet de la métrologie quantique, qui contient quatre étapes : (1) préparation de l'état initial ; (2) paramétrisation ; (3) mesure quantique ; (4) l'estimation classique.

4.2.3 L'information quantique de Fisher

4.2.3.1 Définition générale

L'information classique de Fisher définit une limite sur la précision asymptotique liée à une stratégie de mesure spécifique. Il est évident que différentes stratégies extraient différentes quantités d'informations. En général, en employant un schéma de mesure particulier qui obtient des informations sur une propriété donnée, on exclut la possibilité de mesurer des observables complémentaires dans la même expérience. Pour un système quantique, la précision est cependant finalement limitée par le codage du paramètre inconnu θ dans l'état ρ_θ du système. La variation de ρ_θ avec des changements infinitésimaux de la valeur de θ définit donc une limite quantique supérieure sur l'information de Fisher classique, $\mathcal{F}(p(x; \theta)) \leq \mathcal{F}_Q(\rho_\theta)$, avec l'information quantique de Fisher $\mathcal{F}_Q(\rho_\theta)$ est donnée par

$$\mathcal{F}_Q(\rho_\theta) = \text{Tr} \left(\hat{L}_\theta^2 \rho_\theta \right), \quad (4.43)$$

où la dérivée logarithmique symétrique \hat{L}_θ est un opérateur auto-adjoint qui se rapporte à la variation de l'état ρ_θ avec des changements infinitésimaux de la valeur du paramètre inconnu θ . Ceci est déterminée en résolvant l'équation de Lyapunov suivante

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left(\hat{L}_\theta \rho_\theta + \rho_\theta \hat{L}_\theta \right). \quad (4.44)$$

Autrement dit, l'information quantique de Fisher (4.43) peut être formellement dérivée en maximisant l'information classique de Fisher (4.7) sur toutes les mesures possibles qui peuvent être faites sur l'état ρ , et qualitativement, est une mesure de la quantité d'informations qu'un état contient sur le paramètre θ . La solution générale pour la dérivée logarithmique symétrique L_θ est

$$\hat{L}_\theta = 2 \int_0^\infty \exp[-\rho_\theta t] \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} \exp[-\rho_\theta t] dt, \quad (4.45)$$

qui n'est pas une équation facile à utiliser. Nous allons dériver ici une forme alternative explicitement en termes de valeurs propres λ_i et de vecteurs propres $|\vartheta_i\rangle$ de la matrice densité ρ_θ . En écrivant ρ_θ dans sa base diagonale ; $\rho_\theta |\vartheta_i\rangle = \lambda_i |\vartheta_i\rangle$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} \right)_{ij} &= \langle \vartheta_i | \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} | \vartheta_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\langle \vartheta_i | \hat{L}_\theta \rho_\theta | \vartheta_j \rangle + \langle \vartheta_i | \rho_\theta \hat{L}_\theta | \vartheta_j \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda_j \left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} + \lambda_i \left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nous résolvons ensuite pour trouver L_θ comme

$$\left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} = \frac{2}{\lambda_i + \lambda_j} \langle \vartheta_i | \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} | \vartheta_j \rangle, \quad (4.47)$$

où le dénominateur comprend uniquement les termes qui satisfont $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$.

4.2.3.2 Information de Fisher quantique pour les états purs

Pour l'instant, nous allons rester sur le scénario beaucoup plus simple dans lequel notre état reste un état pur, de sorte que $\rho_\theta^2 = \rho_\theta = |\psi_\theta\rangle \langle \psi_\theta|$. Alors

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho_\theta^2}{\partial \theta} = \rho_\theta \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} \rho_\theta. \quad (4.48)$$

En comparant cela avec l'équation (4.44), nous obtenons $\hat{L}_\theta = 2\frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta}$. On trouve alors

$$\mathcal{F}_Q(\rho_\theta) = 4\text{Tr} \left[\rho_\theta \left(\frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta} \right)^2 \right] = 4 \left[\langle \hat{\psi}_\theta | \hat{\psi}_\theta \rangle - |\langle \hat{\psi}_\theta | \psi_\theta \rangle|^2 \right], \quad (4.49)$$

où $|\hat{\psi}_\theta\rangle = \partial_\theta |\psi_\theta\rangle$. La dernière expression, combinée à l'hypothèse des transformations unitaires, nous amène à la dernière forme simplifiée de l'information de Fisher quantique. Elles agissent sur les états purs comme

$$\mathcal{U}_\theta |\psi_0\rangle \equiv |\psi_\theta\rangle, \quad (4.50)$$

où $\mathcal{U}_\theta = \exp[-i\theta\hat{H}_\theta]$ et avec \hat{H}_θ est un opérateur hermitien. Pour ces états, l'information de Fisher quantique prend la forme suivante :

$$\mathcal{F}_Q(|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|) \equiv \mathcal{F}_Q(|\psi_0\rangle, \hat{H}_\theta) = 4\text{Var}(\hat{H}_\theta), \quad (4.51)$$

qui est proportionnelle à la variance de l'opérateur hermitien \hat{H}_θ . En outre, une propriété importante de l'information quantique de Fisher est sa convexité. Cette caractéristique implique que $\mathcal{F}_Q(\rho)$ atteint sa valeur maximale sur des états purs et par conséquent, les états quantiques mixtes ne peuvent pas augmenter la sensibilité d'estimation réalisable. On peut donc généraliser la dernière formule comme

$$\mathcal{F}_Q(\rho) \leq 4\text{Var}(\hat{H}_\theta), \quad (4.52)$$

avec égalité pour les états purs.

4.2.3.3 Information de Fisher quantique pour les états mixtes

Dans cette partie, nous fournissons une dérivation de l'information quantique de Fisher pour les états quantiques mixtes. En utilisant la même notation que dans les références [194] et [195], nous réécrivons l'état $\rho_\theta \equiv \rho$ comme $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ pour mieux distinguer les états propres et les vecteurs propres. Dans ce cas, l'information quantique de Fisher peut en général être exprimée sous la forme

$$\mathcal{F}_Q(\rho) = 4 \sum_{i=0}^s \left((\partial_\theta \sqrt{p_i})^2 + p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - p_i |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2 \right) - 8 \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2, \quad (4.53)$$

où l'opérateur hermitien \hat{H}_θ est défini par $\hat{H}_\theta = -i\mathcal{U}_\theta^\dagger \partial_\theta \mathcal{U}_\theta$. Pour dériver cette expression, nous supposons que $|\psi_i\rangle$ est la base propre de l'état évolué avec des valeurs propres p_i . La dérivée logarithmique symétrique (4.47) est alors donnée par

$$\hat{L}_\theta = 2 \sum_{ij} \frac{\langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle}{p_i + p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|. \quad (4.54)$$

Ensuite, en superposant la définition de la dérivée logarithmique symétrique (4.44) avec deux états de la base propre, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle \psi_i | \hat{L}_\theta \rho | \psi_j \rangle + \langle \psi_i | \rho \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle \psi_i | \hat{L}_\theta \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k | \psi_j \rangle + \langle \psi_i | \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k | \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle \psi_i | \hat{L}_\theta p_j | \psi_j \rangle + \langle \psi_i | p_i \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} (p_i + p_j) \left(\hat{L}_\theta \right)_{ij}, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

dans lequel nous avons défini $\left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} = \langle \psi_i | \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle$. Nous pouvons alors écrire l'information quantique de Fisher comme suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_Q(\rho) &= \sum_i \langle \psi_i | \hat{L}_\theta^2 \rho | \psi_i \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle \psi_i | \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{L}_\theta \rho | \psi_i \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle \psi_i | \hat{L}_\theta | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{L}_\theta | \psi_i \rangle p_i \\
&= \sum_{ij} \left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} \left(\hat{L}_\theta \right)_{ji} p_i. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant réécrire la dérivée logarithmique symétrique de la façon suivante

$$\left(\hat{L}_\theta \right)_{ij} = \frac{2 \langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle}{p_i + p_j}. \tag{4.57}$$

Grâce à cette expression, l'information quantique de Fisher peut être écrite comme suit

$$\mathcal{F}_Q(\rho) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \frac{4p_i}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle|^2. \tag{4.58}$$

Maintenant, nous avons introduit les deux indices s et t . L'état ne prend en charge que s , donc tous les indices $p_t = 0$ pour $t \geq s$, car l'opérateur $\partial_\theta \rho$ est hermitien. Ensuite, nous pouvons montrer à partir de la décomposition spectrale de ρ que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle &= \sum_k (\langle \psi_i | \partial_\theta p_k | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi_j \rangle + p_k \langle \psi_i | \partial_\theta \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi_j \rangle + p_i \langle \psi_i | \psi_k \rangle \langle \partial_\theta \psi_k | \psi_j \rangle) \\
&= \partial_\theta p_i \delta_{ij} + p_j \langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle + p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \psi_j \rangle. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le fait que la résolution de l'identité devient nulle lorsqu'elle est différenciée, c'est à dire

$$\partial_\theta \mathbb{1} \equiv \sum_i |\partial_\theta \psi_i\rangle \langle \psi_i | + |\psi_i\rangle \langle \partial_\theta \psi_i | = 0, \tag{4.60}$$

ce qui implique $\langle \partial_\theta \psi_i | \psi_j \rangle = -\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle$. Nous trouvons alors que

$$\langle \psi_i | \partial_\theta \rho | \psi_j \rangle = \partial_\theta p_i \delta_{ij} + (p_j - p_i) \langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle. \tag{4.61}$$

Nous pouvons maintenant insérer ceci dans l'équation ci-dessus pour trouver

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(\rho) &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \frac{4p_i}{(p_i + p_j)^2} |\partial_\theta p_i \delta_{ij} + (p_j - p_i) \langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\theta p_i)^2 + \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \frac{4p_i (p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2.\end{aligned}\quad (4.62)$$

Mais maintenant, nous remarquons que la deuxième somme peut être divisée en deux sommes : une qui court sur le support jusqu'à s et l'autre j le support de $s+1$ à t . Alors

$$\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^t \frac{4p_i (p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 = \sum_{i,j=0}^s \frac{4p_i (p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 + \sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^t 4p_i |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2.\quad (4.63)$$

Il faut noter que tous les $p_{s+1} = 0$, donc la deuxième somme peut s'écrire comme suit

$$\sum_{j=s+1}^t |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \mathbf{1} - \sum_{j=0}^s |\psi_j\rangle \langle \psi_j|.\quad (4.64)$$

En insérant ceci dans l'expression ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^t 4p_i |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^t 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \partial_\theta \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i=0}^s 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \left[\mathbf{1} - \sum_{j=0}^s |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \right] | \partial_\theta \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i=0}^s 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - \sum_{i,j=0}^s 4p_i |\langle \psi_j | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2.\end{aligned}\quad (4.65)$$

En rassemblant tous ces éléments, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(\rho) &= \sum_{i=0}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\theta p_i)^2 + \sum_{i,j=0}^s \frac{4p_i (p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 + \sum_{i=0}^s 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - \sum_{i,j=0}^s 4p_i |\langle \psi_j | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\theta p_i)^2 + \sum_{i=0}^s 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - 8 \sum_{i,j=0}^s \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2.\end{aligned}\quad (4.66)$$

De plus, nous pouvons aussi écrire la première partie de cette expression comme suit

$$\sum_{i=0}^s \frac{1}{p_i} (\partial_\theta p_i)^2 = 4 \sum_{i=0}^s (\partial_\theta \sqrt{p_i})^2.\quad (4.67)$$

Nous remarquons maintenant que la troisième somme de l'équation (4.66) a à la fois des valeurs diagonales et non diagonales. Par conséquent, cette expression peut être encore simplifiée, et l'information quantique de Fisher est finalement exprimée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(\rho) &= 4 \sum_{i=0}^s (\partial_\theta \sqrt{p_i})^2 + \sum_{i=0}^s 4p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - 8 \left(\sum_i \delta_{ij} + \sum_{i \neq j} \right) \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2 \\ &= 4 \sum_{i=0}^s \left((\partial_\theta \sqrt{p_i})^2 + p_i \langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - p_i |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2 \right) - 8 \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2.\end{aligned}\quad (4.68)$$

On remarque maintenant que lorsque les états $|\psi_i\rangle$ évoluent dans le temps, on obtient $|\psi_i(t)\rangle = \mathcal{U}_\theta(t) |\psi_i(0)\rangle$, ce qui implique $\partial_\theta |\psi_i(t)\rangle = \partial_\theta \mathcal{U}_\theta(t) |\psi_i(0)\rangle$. Nous définissons maintenant le générateur $\hat{H}_\theta = -i\mathcal{U}_\theta^\dagger \partial_\theta \mathcal{U}_\theta$, qui simplifiera la manipulation de cette expression. En utilisant la propriété d'identité $\mathcal{U}_\theta^\dagger \mathcal{U}_\theta = \mathbb{1}$, nous voyons que

$$\mathcal{U}_\theta^\dagger \partial_\theta \mathcal{U}_\theta = - \left(\partial_\theta \mathcal{U}_\theta^\dagger \right) \mathcal{U}_\theta, \quad (4.69)$$

où nous avons ajouté les parenthèses pour désigner la dérivée partielle. Avec cette identité, on note que

$$\hat{H}_\theta^2 = -\mathcal{U}_\theta^\dagger (\partial_\theta \mathcal{U}_\theta) \mathcal{U}_\theta^\dagger \partial_\theta \mathcal{U}_\theta = (\partial_\theta \mathcal{U}_\theta)^\dagger \partial_\theta \mathcal{U}_\theta. \quad (4.70)$$

De plus, dans le cas d'un opérateur d'évolution unitaire \mathcal{U}_θ , la contribution classique disparaît ($\partial_\theta \sqrt{p_i} = 0$). Ainsi nous procédons à écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Q(\rho) &= 4 \sum_{i=0}^s p_i \left(\langle \psi_i(0) | \hat{H}_\theta^2 | \psi_i(0) \rangle - \langle \psi_i(0) | \hat{H}_\theta | \psi_i(0) \rangle \right) \\ &\quad - 8 \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i(0) | \hat{H}_\theta | \psi_j(0) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Le tableau suivant résume les propriétés de l'estimation classique et quantique ainsi que la relation entre elles :

Estimation des paramètres	
Dans le cas classique	Dans le cas quantique
Densité de probabilité $p(x; \theta)$	Matrice densité $\rho_\theta = \Lambda_\theta(\rho_0)$
Le Score $\mathcal{L}_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(x; \theta)$	La dérivée logarithmique symétrique \hat{L}_θ
$\frac{\partial p(x; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_\theta p(x; \theta) + p(x; \theta) \mathcal{L}_\theta)$	$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (\hat{L}_\theta \rho_\theta + \rho_\theta \hat{L}_\theta)$
$\text{Var}(\mathcal{L}_\theta) = \sum_x p(x; \theta) \mathcal{L}_\theta^2 = \mathcal{F}(\theta)$	$\text{Var}(\hat{L}_\theta) = \text{Tr}(\rho \hat{L}_\theta^2) = \mathcal{F}_Q(\rho)$
$\bar{\mathcal{L}}_\theta = \sum_x p(x; \theta) \mathcal{L}_\theta = 0$	$\langle \hat{L}_\theta \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{L}_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Tr}(\rho) = 0$

— **Remarque :**

Il existe toujours, pour tout ρ , une mesure optimale telle que $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}_Q(\rho_\theta)$. Cette mesure optimale est donnée par la projection sur les états propres $|l\rangle$ de \hat{L}_θ . Dans ce cas, nous avons $p(l; \theta) = \langle l | \rho_\theta | l \rangle$. Alors

$$\frac{\partial p(l; \theta)}{\partial \theta} = \langle l | \frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} | l \rangle = lp(l; \theta). \quad (4.72)$$

Il est donc facile de vérifier que

$$\mathcal{F}(\theta) = \sum_l \frac{1}{p(l; \theta)} \left(\frac{\partial p(l; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \sum_l l^2 p(l; \theta) = \text{Tr}(\rho_\theta \hat{L}_\theta^2) = \mathcal{F}_Q(\rho_\theta). \quad (4.73)$$

4.3 Métrologie quantique multiparamétrique

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré qu'un seul paramètre à estimer. Mais il existe des tâches pour lesquelles il est important d'estimer plusieurs paramètres [196, 197]. Ces scénarios incluent par exemple l'estimation simultanée de plusieurs phases et l'estimation de plusieurs spins pointant dans des directions différentes ou, en général, de paramètres correspondant à des générateurs unitaires non commutables. La théorie décrite dans les sections précédentes

peut être naturellement généralisée à l'estimation multiparamètres [198, 199]. Pour déterminer la précision dans ce cas, il faut calculer la matrice d'information quantique de Fisher, notée $\mathcal{F}_Q(\boldsymbol{\theta})$, qui décrit les limites de distinction des états quantiques infiniment proches $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ et $\rho_{\boldsymbol{\theta}+d\boldsymbol{\theta}}$ (où $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_\mu, \theta_\nu, \dots, \theta_n\}$). En général, des éléments plus grands de cette matrice prédisent une meilleure capacité de distinction, ce qui conduit à une meilleure précision dans l'estimation du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$.

D'autre part, la façon d'augmenter la matrice d'information quantique de Fisher est une question difficile en métrologie quantique. En fait, l'estimation d'un seul paramètre joue un rôle important à bien des égards, en raison de l'existence d'un état final optimal contenant une quantité maximale de l'information quantique de Fisher [200, 201]. Les problèmes réalistes peuvent généralement impliquer plusieurs paramètres, car il n'existe pas d'état optimal dans lequel la matrice d'information quantique de Fisher est plus grande que les autres états [202]. Ceci est lié au fait que les mesures optimales pour l'estimation de différents paramètres ne sont pas nécessairement commuables. En outre, l'inégalité de Cramér-Rao n'est pas toujours saturable car les mesures de différents paramètres peuvent être incompatibles [203, 204]. Toutes ces restrictions font de l'estimation simultanée de plusieurs paramètres une tâche importante en métrologie quantique. Dans le même contexte, les techniques de calcul de la matrice de l'information quantique de Fisher ont connu un développement rapide dans divers scénarios et modèles. Cependant, il n'existe pas de documents qui résument ces techniques de manière structurée. Par conséquent, cette partie fournit des techniques complètes pour calculer la matrice $\mathcal{F}_Q(\boldsymbol{\theta})$ dans une variété de scénarios.

4.3.1 Représentation matricielle de l'information quantique de Fisher

Commençons par considérer le cas général, c'est-à-dire une famille d'états quantiques $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ qui dépendent d'un ensemble de n paramètres différents $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_\mu\}$, $\mu = 1, \dots, n$. Nous pouvons déduire les opérateurs de la dérivée logarithmique symétrique pour chaque paramètre impliqué comme suit

$$\frac{\partial \rho_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta_\mu} = \frac{1}{2} \left(\hat{L}_{\theta_\mu} \rho_{\boldsymbol{\theta}} + \rho_{\boldsymbol{\theta}} \hat{L}_{\theta_\mu} \right). \quad (4.74)$$

Les éléments de la matrice de l'information quantique de Fisher sont définis comme [41]

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}(\rho_{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\rho_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \hat{L}_{\theta_\mu}, \hat{L}_{\theta_\nu} \right\} \right), \quad (4.75)$$

où $\{, \}$ représente l'anti-commutation et $\hat{L}_{\theta_\mu} \left(\hat{L}_{\theta_\nu} \right)$ est la dérivée logarithmique symétrique pour le paramètre θ_μ (θ_ν), qui est déterminé par l'équation (4.74). On sait bien que $\text{Tr} \left(\rho_{\boldsymbol{\theta}} \hat{L}_{\theta_\mu} \right)$, donc en utilisant l'équation ci-dessus (4.75), $\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}(\rho_{\boldsymbol{\theta}})$ peut aussi être exprimée de la manière suivante

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}(\rho_{\boldsymbol{\theta}}) = \text{Tr} \left(\hat{L}_{\theta_\nu} \partial_{\theta_\mu} \rho_{\boldsymbol{\theta}} \right) = -\text{Tr} \left(\rho_{\boldsymbol{\theta}} \partial_{\theta_\mu} \hat{L}_{\theta_\nu} \right). \quad (4.76)$$

D'après l'équation (4.75), l'entrée diagonale de la matrice $\mathcal{F}(\rho_{\boldsymbol{\theta}})$ est

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\mu}(\rho_{\boldsymbol{\theta}}) = \text{Tr} \left(\rho_{\boldsymbol{\theta}} \hat{L}_{\theta_\mu}^2 \right), \quad (4.77)$$

qui est exactement l'information quantique de Fisher pour le paramètre θ_μ .

Les propriétés de l'information de Fisher quantique ont été bien présentées ci-dessus. De même, la matrice d'information quantique de Fisher possède également quelques propriétés puissantes qui ont été largement appliquées dans la pratique. Nous présentons ici ces propriétés de la façon suivante [205]

- * $\mathcal{F}(\rho_\theta)$ est symétrique réel, c-à-d $\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} = \mathcal{F}_{\theta_\nu\theta_\mu} \in \mathbb{R}^2$.
- * $\mathcal{F}(\rho_\theta)$ est semi-défini positif, c-à-d $\mathcal{F}(\rho_\theta) \geq 0$. Si $\mathcal{F} > 0$, alors $[\mathcal{F}^{-1}]_{\theta_\mu\theta_\mu} = 1/\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\mu}$ pour tout θ_μ .
- * $\mathcal{F}(\rho_\theta) = \mathcal{F}(U\rho_\theta U^\dagger)$ pour une opération unitaire U .
- * \mathcal{F} est monotone sous une carte complètement positive et préservant la trace Λ , à savoir, $\mathcal{F}(\Lambda(\rho)) \leq \mathcal{F}(\rho)$.
- * Convexité : $\mathcal{F}(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) \leq p\mathcal{F}(\rho_1) + (1-p)\mathcal{F}(\rho_2)$ pour $p \in [0, 1]$.

4.3.2 Expression analytique de la matrice d'information quantique de Fisher

Nous examinons ici les techniques de calcul de la matrice d'information quantique de Fisher et quelques résultats analytiques pour des cas spécifiques. La dérivation traditionnelle de cette matrice suppose généralement que le rang de la matrice densité est complet, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice densité ρ sont positives. Plus précisément, si nous écrivons $\rho = \sum_i \lambda_i |\vartheta_i\rangle \langle \vartheta_i|$, où λ_i et $|\vartheta_i\rangle$ sont la valeur propre et l'état propre correspondant, on suppose généralement que $\lambda_i > 0$, pour tout $0 \leq i \leq \dim(\rho) - 1$. Dans cette hypothèse, les éléments de la matrice d'information quantique de Fisher peuvent être écrits comme suit

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} = \sum_{i,j=0}^{d-1} \frac{2\text{Re}(\langle \vartheta_i | \partial_{\theta_\mu} \rho | \vartheta_j \rangle \langle \vartheta_j | \partial_{\theta_\nu} \rho | \vartheta_i \rangle)}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad (4.78)$$

où Re désigne la partie réelle et d est la dimension de la matrice densité. On peut facilement voir que si la matrice densité n'est pas de rang complet, il peut y avoir des termes divergents dans l'équation ci-dessus. Pour l'étendre aux matrices de densité générales, nous pouvons supprimer les termes divergents comme suit

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} = \sum_{i,j=0, \lambda_i+\lambda_j \neq 0}^{d-1} \frac{2\text{Re}(\langle \vartheta_i | \partial_{\theta_\mu} \rho | \vartheta_j \rangle \langle \vartheta_j | \partial_{\theta_\nu} \rho | \vartheta_i \rangle)}{\lambda_i + \lambda_j}. \quad (4.79)$$

En substituant la décomposition spectrale de ρ dans l'équation ci-dessus, on peut la réécrire sous forme de

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{(\partial_{\theta_\mu} \lambda_i)(\partial_{\theta_\nu} \lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{i \neq j, \lambda_i + \lambda_j \neq 0}^{d-1} \frac{2(\lambda_i - \lambda_j)^2}{(\lambda_i + \lambda_j)} \text{Re}(\langle \vartheta_i | \partial_{\theta_\mu} \vartheta_j \rangle \langle \partial_{\theta_\nu} \vartheta_j | \vartheta_i \rangle) \\ &= \sum_i \frac{(\partial_{\theta_\mu} \lambda_i)(\partial_{\theta_\nu} \lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_i 4\lambda_i \text{Re}(\langle \partial_{\theta_\mu} \vartheta_i | \partial_{\theta_\nu} \vartheta_i \rangle) + \sum_{i \neq j} \frac{8\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} (\langle \partial_{\theta_\mu} \vartheta_i | \vartheta_j \rangle \langle \vartheta_j | \partial_{\theta_\nu} \vartheta_i \rangle). \end{aligned} \quad (4.80)$$

En raison de la relation entre la matrice d'information de Fisher quantique et l'information de Fisher classique, on peut facilement obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\mu} = \mathcal{F}_Q(\rho_{\theta_\mu}) &= \sum_i \frac{(\partial_{\theta_\mu} \lambda_i)^2}{\lambda_i} + \sum_i 4\lambda_i (\langle \partial_{\theta_\mu} \vartheta_i | \partial_{\theta_\mu} \vartheta_i \rangle) \\ &\quad - \sum_{i \neq j} \frac{8\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \partial_{\theta_\mu} \vartheta_i | \vartheta_j \rangle|^2. \end{aligned} \quad (4.81)$$

La représentation de Bloch est un autre outil bien utilisé également dans la théorie de l'estimation quantique. Pour une matrice densité à d -dimensions, elle peut être exprimée par

$$\rho = \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \sqrt{\frac{d(d-1)}{2}} \vec{r} \cdot \vec{K} \right), \quad (4.82)$$

où $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m, \dots)^T$ est le vecteur de Bloch et \vec{K} est un vecteur de dimension $(d^2 - 1)$ du générateur de $su(d)$ qui satisfait $\text{Tr}(K_i) = 0$. La relation d'anti-commutation pour eux est $\{K_i, K_j\} = \frac{4}{d} \delta_{ij} \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{d^2-1} v_{ijm} K_m$, et la relation de commutation est $[K_i, K_j] = i \sum_{m=1}^{d^2-1} \epsilon_{ijm} K_m$, où v_{ijm} et ϵ_{ijm} sont les constantes de structure symétriques et antisymétriques. Watanabe et ses collègues [206, 207] ont récemment fourni la formule de la matrice d'information quantique de Fisher pour un vecteur de Bloch général en considérant le vecteur de Bloch lui-même comme des paramètres à estimer. Dans la représentation de Bloch d'une matrice de densité à d -dimensions, la matrice d'information quantique de Fisher peut être exprimée comme suit [208]

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu} = (\partial_{\theta_\nu} \vec{r})^T \left(\frac{d}{2(d-1)} G - \vec{r} \vec{r}^T \right) \partial_{\theta_\mu} \vec{r}, \quad (4.83)$$

où G est une matrice symétrique réelle dont les éléments sont

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho \{K_i, K_j\}) = \frac{2}{d} \delta_{ij} + \sqrt{\frac{d-1}{2d}} \sum_m v_{ijm} r_m. \quad (4.84)$$

Le scénario le plus largement utilisé de ce théorème est celui des systèmes à un seul qubit, dans lequel $\rho = (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ avec $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur des matrices de Pauli. Dans ce cas, la matrice d'information quantique de Fisher se réduit à

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu} = (\partial_{\theta_\mu} \vec{r}) (\partial_{\theta_\nu} \vec{r}) + \frac{(\vec{r} \cdot \partial_{\theta_\mu} \vec{r}) (\vec{r} \cdot \partial_{\theta_\nu} \vec{r})}{1 - |\vec{r}|^2}, \quad (4.85)$$

où $|\vec{r}|$ est la norme de \vec{r} . Pour un état pur à un seul qubit, on trouve $\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu} = (\partial_{\theta_\mu} \vec{r}) (\partial_{\theta_\nu} \vec{r})$.

Pour un état général à deux qubits, le calcul de la matrice d'information quantique de Fisher nécessite la diagonalisation d'une matrice densité 4×4 , ce qui est difficile à résoudre analytiquement. Cependant, certains états spéciaux à deux qubits, tels que l'état X (1.99), peuvent être diagonalisés analytiquement. En effet, l'état ρ_X à deux qubits peut être réécrit sous la forme d'une diagonale de blocs sous la forme $\rho_X = \rho^{(0)} \oplus \rho^{(1)}$, où \oplus représente la somme directe et

$$\rho^{(0)} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{14} \\ \rho_{41} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \rho^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Il faut noter que $\rho^{(0)}$ et $\rho^{(1)}$ ne sont pas des matrices densité car leur trace n'est pas normalisée. La matrice d'information quantique de Fisher pour cet état peut être écrite comme $\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu} = \mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}^{(0)} + \mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}^{(1)}$, où $\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}^{(0)}$ ($\mathcal{F}_{\theta_\mu \theta_\nu}^{(1)}$) est la matrice d'information quantique de Fisher pour $\rho^{(0)}$ ($\rho^{(1)}$) [209]. Les valeurs propres de $\rho^{(i)}$ sont

$$\lambda_{\pm}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\text{Tr} \rho^{(i)} \pm \sqrt{(\text{Tr} \rho^{(i)})^2 - 4 \det \rho^{(i)}} \right), \quad (4.87)$$

et les états propres correspondants sont

$$|\vartheta_{\pm}^{(i)}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}^{(i)} \left(\frac{1}{2 \text{Tr}(\rho^{(i)} \sigma_+)} \left[\text{Tr}(\rho^{(i)} \sigma_+) \pm \sqrt{(\text{Tr} \rho^{(i)})^2 - 4 \det \rho^{(i)}} \right], 1 \right)^T, \quad (4.88)$$

avec $\mathcal{N}_{\pm}^{(i)}$ ($i = 0, 1$) est le coefficient de normalisation. Ici, la forme spécifique de σ_z et σ_+ sont

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Sur la base des informations ci-dessus, $\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu}^{(i)}$ peut être écrit de manière spécifique comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu}^{(i)} &= \sum_{k=\pm} \frac{(\partial_{\theta_\mu}\lambda_k^{(i)}) (\partial_{\theta_\nu}\lambda_k^{(i)})}{\lambda_k^{(i)}} + \lambda_k^{(i)} \mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} \left(\left| \vartheta_k^{(i)} \right\rangle \right) \\ &\quad - \frac{16\det \rho^{(i)}}{\text{Tr}\rho^{(i)}} \text{Re} \left(\left\langle \partial_{\theta_\mu}\vartheta_+^{(i)} \middle| \vartheta_-^{(i)} \right\rangle \left\langle \vartheta_-^{(i)} \middle| \partial_{\theta_\nu}\vartheta_+^{(i)} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

où $\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} \left(\left| \vartheta_k^{(i)} \right\rangle \right)$ est la matrice d'information quantique de Fisher pour l'état $\left| \vartheta_k^{(i)} \right\rangle$.

4.3.3 Matrice d'information quantique de Fisher par la méthode de vectorisation

Très récemment, Šafránek [210] a fourni une autre méthode pour calculer la matrice d'information quantique de Fisher en utilisant la matrice densité dans l'espace de Liouville, qui ne nécessite pas la diagonalisation de la matrice densité ρ est prouvée et aussi bien efficace. Dans cet espace, la matrice densité est un vecteur contenant toutes les éléments de la matrice densité dans l'espace de Hilbert. Dans ce sens, nous considérons une application algébrique qui transforme une matrice en un vecteur colonne pour définir les éléments de la matrice d'information quantique de Fisher sans diagonaliser la matrice densité. Soit $M^{n \times n}$ l'espace des matrices réelles (ou complexes) $n \times n$. Pour toute matrice $A \in M^{n \times n}$, l'opérateur $\text{vec}[A]$ est défini comme suit [211]

$$\text{vec}[A] = (a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, a_{1n}, \dots, a_{nn})^T. \quad (4.91)$$

De plus, en utilisant l'expression $A = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} |k\rangle \langle l|$, l'opérateur vec est réécrit

$$\text{vec}[A] = (\mathbf{1}_{n \times n} \otimes A) \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i. \quad (4.92)$$

où e_i désigne les éléments de la base de calcul de $M^{n \times n}$. Cela signifie que l'opérateur vec crée un vecteur colonne à partir d'une matrice A en superposant les vecteurs colonnes de A les uns au-dessous des autres. En utilisant les propriétés du produit de Kronecker [212], on peut trouver les résultats

$$\begin{aligned} \text{vec}[AB] &= (\mathbf{1}_{n \times n} \otimes A) \text{vec}[B] = (B^T \otimes \mathbf{1}_{n \times n}) \text{vec}[A], \\ \text{Tr}(A^T B) &= \text{vec}[A]^\dagger \text{vec}[B], \\ \text{vec}[AXB] &= (B^\dagger \otimes A) \text{vec}[X], \end{aligned} \quad (4.93)$$

pour toutes les matrices A , B et X . En utilisant les propriétés données par les équations ci-dessus (4.93), il est facile de vérifier que la matrice d'information quantique de Fisher, donnée par l'équation (4.75), peut être exprimée par [210]

$$\mathcal{F}_{\theta_\mu\theta_\nu} = 2\text{vec}[\partial_{\theta_\mu}\rho]^\dagger (\rho \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \rho^*)^{-1} \text{vec}[\partial_{\theta_\nu}\rho], \quad (4.94)$$

où ρ^* est le conjugué de ρ , et l'opérateur de dérivé logarithmique symétrique dans l'espace de Liouville, noté $\text{vec}[\hat{L}_{\theta_\mu}]$, se réduit à

$$\text{vec}[\hat{L}_{\theta_\mu}] = 2(\rho \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \rho^*)^{-1} \text{vec}[\partial_{\theta_\mu}\rho]. \quad (4.95)$$

Cette méthode a l'avantage d'être analytiquement calculable pour un système arbitraire. Il est basé uniquement sur le calcul de l'inverse de la matrice $(\rho \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho^*)$. Dans l'une de nos contributions [213], nous avons utilisé cette méthode pour étudier la comparaison entre les stratégies d'estimation simultanée et individuelle dans un système à deux qubits. Cependant, pour des systèmes plus grands, il peut être nécessaire d'employer des méthodes efficaces telles que la décomposition de Cholesky [214]. Si cette matrice n'est pas inversible, de nouvelles expressions, pour la matrice d'information quantique de Fisher ainsi que pour les dérivés logarithmiques symétriques, sont présentées dans la même référence [210].

4.4 Rôle des corrélations non classiques en métrologie quantique

Des efforts importants ont été déployés récemment pour évaluer la dynamique de l'information quantique de Fisher afin d'établir la validité de l'intrication quantique en métrologie quantique [182, 45]. Il a été démontré que, dans les processus unitaires, l'intrication conduit à une amélioration notable de la précision de l'estimation des paramètres [215, 216]. L'intrication peut même être exploitée comme ressource quantique pour dépasser la limite quantique standard et atteindre la limite de Heisenberg [45]. Ce fait soulève une question importante; une telle augmentation de l'information quantique de Fisher peut-elle être utilisée comme signature de l'intrication quantique? En outre, il est naturel de se demander si les corrélations quantiques au-delà de l'intrication peuvent être liées à la précision dans les protocoles de métrologie quantique. Il serait possible de relier et de quantifier les corrélations quantiques en termes de l'information quantique de Fisher. Récemment, plusieurs études ont été menées dans cette direction [217, 218]. Un résultat important est de trouver une nouvelle mesure des corrélations quantiques en termes de l'information quantique de Fisher [219]. En fait, l'information quantique de Fisher locale a été introduite pour traiter les corrélations quantiques par paire de type discord. Ce quantificateur nous permet de mieux comprendre comment les corrélations quantiques contribuent à établir la précision en métrologie quantique. Il possède les propriétés souhaitables que tout bon quantificateur de corrélation quantique devrait satisfaire. En effet, il est non négatif et disparaît pour les états bipartis à discord nulle (les états classiquement corrélés). Elle est invariante sous toute opération unitaire locale et coïncide avec la discord géométrique pour les états quantiques purs [219].

Considérons d'abord un état quantique bipartite $d_A \times d_B$ agissant sur un espace de Hilbert $H_A \otimes H_B$. Dans le cas où une seule partie, disons la partie A , est conduite avec l'observable fixe $K_A = K_A \otimes \mathbb{1}_B$, cela signifie que $\rho_\theta^{AB} = e^{-i\theta K_A} \rho^{AB} e^{i\theta K_A}$, $\mathcal{F}(\rho^{AB}, K_A)$ est appelée l'information quantique de Fisher locale sur la partie A . Si $\mathcal{F}(\rho^{AB}, K_A) = 0$, cela signifie qu'il n'y a pas de changement dans l'évolution en raison de l'observable K_A et qu'aucune information ne peut être obtenue par une mesure. Sur cette base, l'information quantique de Fisher locale est une mesure permettant de quantifier les corrélations quantiques en termes d'information de Fisher quantique sur la partie A et elle est donnée par [219]

$$\mathcal{Q}_F(\rho^{AB}) = \min_{K_A} \mathcal{F}(\rho^{AB}, K_A). \quad (4.96)$$

Cette nouvelle mesure de type discord est très similaire à l'incertitude quantique locale (2.136) qui quantifie également les corrélations quantiques. Puisque ces deux mesures sont tous basés sur la notion d'incertitude quantique, il est intéressant d'étudier la relation et l'interaction entre elles. C'est la question principale que nous développons dans l'une de nos contributions [220]. Ici, nous donnons la relation entre l'incertitude quantique locale (2.136) et l'information quantique de Fisher locale (4.96) pour les systèmes quantiques de type qubit-qudit. Tout d'abord, pour

ce type d'état, l'information quantique de Fisher locale se réduit à

$$\mathcal{Q}_F(\rho^{AB}) = \min_{K_A} \left[\text{Tr}(\rho K_A^2) - \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | K_A | \psi_j \rangle|^2 \right], \quad (4.97)$$

où nous avons utilisé la décomposition spectrale de ρ , c'est-à-dire $\rho = \sum_i p_i |p_i\rangle \langle p_i|$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$. Ensuite, la forme générale d'un hamiltonien local est $K_A = \vec{\sigma} \vec{r}$, avec $|\vec{r}| = 1$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli usuelles. On peut observer que $\text{Tr}(\rho K_A^2) = 1$ et que le deuxième terme de l'équation (4.97) peut être exprimé comme suit

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | K_A | \psi_j \rangle|^2 &= \sum_{i \neq j} \sum_{l,k=1}^3 \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} \langle \psi_i | \sigma_l \otimes \mathbb{1}_B | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \sigma_k \otimes \mathbb{1}_B | \psi_i \rangle \\ &= \vec{r}^\dagger \cdot M \cdot \vec{r}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

où les éléments de la matrice symétrique M , de dimension 3×3 , sont donnés par

$$M_{lk} = \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} \langle \psi_i | \sigma_l \otimes \mathbb{1}_B | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \sigma_k \otimes \mathbb{1}_B | \psi_i \rangle.$$

De même que dans l'expression de l'incertitude quantique locale, pour minimiser $\mathcal{F}(\rho^{AB}, K_A)$, il est nécessaire de maximiser la quantité $\vec{r}^\dagger \cdot M \cdot \vec{r}$ sur tous les vecteurs unitaires \vec{r} . La valeur maximale coïncide avec la valeur propre maximale de M . Par conséquent, l'expression analytique de l'information quantique de Fisher locale $\mathcal{Q}_F(\rho^{AB})$ est donnée par

$$\mathcal{Q}_F(\rho^{AB}) = 1 - \lambda_{\max}(M), \quad (4.99)$$

où λ_{\max} désigne la valeur propre maximale de la matrice symétrique M définie par (4.99). Il est extrêmement important de souligner ici que cette quantité coïncide avec la discordance géométrique pour tout état quantique pur [219]. Cela signifie qu'elle peut être considérée comme une mesure raisonnable des corrélations quantiques et que nous pouvons quantifier les corrélations quantiques en mesurant uniquement l'information quantique de Fisher des observables locales. De plus, l'information quantique de Fisher locale fournit un outil pour comprendre le rôle des corrélations quantiques au-delà de l'intrication dans l'amélioration de la précision et de l'efficacité des protocoles de métrologie quantique. En fait, l'information de Fisher quantique est associée à l'incertitude quantique locale. Il a été démontré que dans l'évolution unitaire de la matrice densité, l'information de Fisher quantique et l'information d'interchange (2.120) satisfont l'inégalité suivante [220]

$$I(\rho, K) \leq \mathcal{F}(\rho, K) \leq 2I(\rho, K), \quad (4.100)$$

à partir duquel on obtient

$$\mathcal{U}(\rho) \leq \mathcal{Q}_F(\rho) \leq 2\mathcal{U}(\rho). \quad (4.101)$$

D'un autre côté, il est bien connu que l'incertitude quantique locale est majorisée par l'information quantique de Fisher, à savoir

$$\mathcal{U}(\rho) \leq I(\rho, K) \leq \mathcal{F}(\rho, K). \quad (4.102)$$

Par conséquent, selon le théorème de Cramér-Rao (4.9), la précision du paramètre peut être limitée par l'incertitude quantique locale et par l'information quantique de Fisher locale comme suit [220]

$$\text{Var}(\theta)_{\min} \leq \frac{1}{\mathcal{U}(\rho)}, \quad \text{et} \quad \text{Var}(\theta)_{\min} \leq \frac{1}{\mathcal{Q}_F(\rho)}. \quad (4.103)$$

CHAPITRE 5

CONTRIBUTIONS

5.1 Contribution 1 : The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence : a comparative study

Quantum Information Processing, 17 (2018) 1-24.

5.1.1 Résumé :

Une approche analytique pour évaluer l'incertitude quantique locale (2.136) est en général une tâche difficile en raison d'une procédure d'optimisation de l'information d'interchange sur des mesures généralisées locales, qui reste un problème ouvert important même dans le cas le plus simple d'un système à deux qubits. C'est exactement dans ce sens que nous développons notre travail. Le but de cette contribution est de développer une méthode analytique pour évaluer les corrélations quantiques dans des systèmes à deux qubits au moyen du concept d'incertitude quantique locale. Nous avons présenté la forme générale de la matrice W (2.139) pour les états arbitraires de type X . Cette méthode constitue un outil alternatif pour évaluer les expressions analytiques de corrélations quantiques englobées dans des états X à deux qubits.

En outre, nous étudions le comportement dynamique de cette mesure et la comparons à deux quantificateurs bien connus des corrélations quantiques dans les systèmes bipartites, à savoir la discord géométrique basée sur la distance de trace (2.58) et la concurrence (1.96), sous deux modèles de décohérence différents. Nous concentrons davantage sur le comportement et les limites de chaque mesure. Dans le premier modèle, les deux qubits sont couplés individuellement à deux réservoirs bosoniques indépendants, en tenant compte de trois types de réservoirs ; sub-ohmique, ohmique et super-ohmique. Dans le second modèle, nous étudions la dynamique des corrélations dans un système de deux atomes à deux niveaux, interagissant avec un champ de rayonnement quantifié, initialement préparé dans un état séparable.

5.1.2 Contenu de la publication 1 :

The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence: a comparative study

A. Slaoui¹ · M. Daoud² · R. Ahl Laamara^{1,3}

Received: 10 January 2018 / Accepted: 29 May 2018
© Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2018

Abstract We employ the concepts of local quantum uncertainty and geometric quantum discord based on the trace norm to investigate the environmental effects on quantum correlations of two bipartite quantum systems. The first one concerns a two-qubit system coupled with two independent bosonic reservoirs. We show that the trace discord exhibits frozen phenomenon contrarily to local quantum uncertainty. The second scenario deals with a two-level system, initially prepared in a separable state, interacting with a quantized electromagnetic radiation. Our results show that there exists an exchange of quantum correlations between the two-level system and its surrounding which is responsible for the revival phenomenon of non-classical correlations.

Keywords Local quantum uncertainty · Geometric quantum discord · Non-classical correlations · Dynamics of two-qubit system · Frozen and revival quantum correlations

✉ A. Slaoui
abdallahsalaoui1992@gmail.com

M. Daoud
m_daoud@hotmail.com

R. Ahl Laamara
ahllaamara@gmail.com

¹ LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco

² Department of Physics, Faculty of Sciences-Ain Chock, University Hassan II, Casablanca, Morocco

³ Centre of Physics and Mathematics, CPM, CNESTEN, Rabat, Morocco

1 Introduction

Quantum information protocols exploit the quantum features of superposition and entanglement to achieve quantum tasks that are not possible using the classical laws of physics, and quantum information processors offer significant advantages in the communication and processing of information [1]. Quantum teleportation [2,3] and quantum cryptography or quantum key distribution [4] constitute the most promising applications of quantum information science. Characterizing quantum correlations in quantum systems is a challenging issue in this field of research. Several measures of quantum correlations in bipartite and multipartite quantum systems have been introduced in the literature [5–8]. The concurrence and entanglement of formation are two examples of quantitative measures of entanglement [9]. Another indicator of quantum correlations in bipartite quantum systems is the quantum discord based on the von Neumann entropy. This measure was introduced Ollivier and Zurek [10] and by Henderson and Vedral [11] and goes beyond entanglement and provides the proper tool to investigate the quantum correlations in an arbitrary bipartite state even those which are separable. The computability of quantum discord based on von Neumann entropy is in general a very complex task. Indeed, it has been proven that computing entropic quantum discord is NP-complete [12] and only partial results were obtained for some special two-qubit states. To overcome these difficulties, a geometric variant of quantum discord has been proposed in several works by employing Schatten p -norms. The first geometric measure of quantum discord was formulated in [13] by using the Hilbert–Schmidt norm ($p = 2$). Despite its ease of computability [14–17], the geometric discord is not a good quantum correlations indicator. In fact, the geometric discord based on Hilbert–Schmidt distance can increase under local quantum operations on the unmeasured qubit. This drawback is due to the lack of the contractivity property that any quantum correlations quantifier should satisfy (see reference [18]). Now, it is well established that the trace norm (Bures norm with $p = 1$) is the only Schatten p -norm that one can use to deal with the geometric measure of quantum correlations [19,20] (see also [21,22]).

Recently, a new measure called local quantum uncertainty has been introduced to investigate the pairwise quantum correlations of the discord type in multipartite systems. It has all the desirable properties that every good quantum correlations quantifier should satisfy [23]. It is based on the notion of Skew information introduced by Wigner to determine the uncertainty in the measurement of an observable [24]. The local quantum uncertainty presents the advantage of being analytically computable for any qubit–qudit system [23]. It is interesting to stress that this new quantum correlation quantifier is deeply related to quantum Fisher information [25–27] which is usually used in the context of quantum metrology [28].

In this paper, to quantify the degree of quantum correlations, we will use the local quantum uncertainty and the trace quantum discord. In Sect. 2, we give the explicit expression of local quantum uncertainty in a two-qubit X state. We give also the expression of the geometric discord based on the trace norm. In Sect. 3, we will investigate the dynamics of quantum correlations in a two-qubit X state coupled to two independent reservoirs. Section 4 is devoted to the analysis of the creation of quantum correlations in a system of two 2-level atoms, interacting with a quantized

radiation field, initially prepared in a separable state. Concluding remarks close this paper.

2 Quantum correlations quantifiers: local quantum uncertainty and trace distance

2.1 Local quantum uncertainty

The local quantum uncertainty is a reliable quantifier of quantum correlation in bipartite quantum systems. This is essentially due to its easiness of computability and the fact that it enjoys all necessary properties of being a good quantumness measure. It is zero for classically correlated states and invariant under local unitary operations. We notice that for a two-qubit pure state, the local quantum uncertainty reduces to the linear entropy of entanglement [23]. The local quantum uncertainty quantifies the minimal quantum uncertainty in a quantum state due to a measurement of a local observable [23]. For a bipartite quantum state ρ , the local quantum uncertainty is defined as

$$\mathcal{U}(\rho) \equiv \min_{K_1} \mathcal{I}(\rho, K_1 \otimes \mathbb{I}_2), \quad (1)$$

where K_1 is some local observable on the qubit 1, \mathbb{I}_2 is the identity operator acting on the qubit 2 and

$$\mathcal{I}(\rho, K_1 \otimes \mathbb{I}_2) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, K_1 \otimes \mathbb{I}_2]^2) \quad (2)$$

is the skew information which provides an analytical tool to quantify the information content in the state ρ with respect to the observable K_1 . This quantity was introduced by Wigner and Yanase to quantify the uncertainty in mixed states [24]. The statistical idea underlying skew information is the Fisher information which plays a central role in the theory of statistical estimation and quantum metrology [25]. The local quantum uncertainty is defined through a minimization procedure over the ensemble of all Hermitian operators acting on the qubit 1 [23]. For two-qubit systems ($\frac{1}{2}$ -spin particles), the expression of the local quantum uncertainty is given by [23]

$$\mathcal{U}(\rho) = 1 - \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad (3)$$

where λ_1, λ_2 and λ_3 are the eigenvalues of the 3×3 matrix W whose matrix elements are defined by

$$\omega_{ij} \equiv \text{Tr}\{\sqrt{\rho}(\sigma_i \otimes \mathbb{I}_2)\sqrt{\rho}(\sigma_j \otimes \mathbb{I}_2)\}, \quad (4)$$

with $i, j = 1, 2, 3$.

The X states belong to an interesting family of two-qubit states that are used in several problems of quantum information. In the computational basis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, the X states are of the form

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

In the Fano–Bloch representation, the density matrix ρ can be written as follows:

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\beta}, \quad (6)$$

where $T_{\alpha\beta} = \text{Tr} \rho (\sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\beta})$. For states of X type, the nonvanishing matrix elements (4) are given by (see the Appendix 1)

$$w_{11} = \frac{1}{4} \left[4 (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}) (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}) + \frac{(T_{11}^2 - T_{22}^2) + (T_{12}^2 - T_{21}^2) + (T_{03}^2 - T_{30}^2)}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}) (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})} \right], \quad (7)$$

$$w_{22} = \frac{1}{4} \left[4 (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}) (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}) + \frac{(T_{22}^2 - T_{11}^2) + (T_{21}^2 - T_{12}^2) + (T_{30}^2 - T_{03}^2)}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}) (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})} \right], \quad (8)$$

$$w_{33} = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})^2 + (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})^2 \right] + \frac{1}{8} \left[\frac{(T_{30} + T_{03})^2 - (T_{11} - T_{22})^2 - (T_{12} + T_{21})^2}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})^2} \right], \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{8} \left[\frac{(T_{03} - T_{30})^2 - (T_{11} + T_{22})^2 - (T_{12} - T_{21})^2}{(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})^2} \right], \quad (10)$$

$$w_{12} = w_{21} = \frac{1}{2} \frac{T_{11}T_{21} + T_{22}T_{12}}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}) (\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})}, \quad (11)$$

$$w_{13} = w_{31} = w_{23} = w_{32} = 0. \quad (12)$$

where λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are the eigenvalues of the density matrix ρ .

2.2 Trace measure of geometric discord

The trace norm (or 1-norm) was employed as a reliable geometric quantifier of quantum discord [19]. The expressions of trace distance quantum discord have been analytically derived for Bell-diagonal states [19, 29] and for an arbitrary two-qubit X state [22]. The trace distance quantum discord for a two-qubit state ρ is defined by

$$D_T(\rho) = \frac{1}{2} \min_{\chi \in \Omega} \|\rho - \chi\|_1, \tag{13}$$

where the trace distance is defined by $\|\rho - \chi\|_1 = \text{Tr} \sqrt{(\rho - \chi)^\dagger (\rho - \chi)}$. It measures the distance between the state ρ and the classical-quantum state χ belonging to the set Ω of classical-quantum states. A generic state $\chi \in \Omega$ is of the form $\chi = \sum_k p_k \Pi_{k,1} \otimes \rho_{k,2}$ where $\{p_k\}$ is a probability distribution, $\Pi_{k,1}$ are the orthogonal projector associated with the qubit 1 and $\rho_{k,2}$ is density matrix associated with the second qubit. The phase factors $\frac{\rho_{14}}{|\rho_{14}|} = e^{i\theta_{14}}$ and $\frac{\rho_{23}}{|\rho_{23}|} = e^{i\theta_{23}}$ of the off-diagonal elements can be removed using the local unitary transformations

$$|0\rangle_1 \rightarrow \exp\left(\frac{-i}{2}(\theta_{14} + \theta_{23})\right) |0\rangle_1 |0\rangle_2 \rightarrow \exp\left(\frac{-i}{2}(\theta_{14} - \theta_{23})\right) |0\rangle_2.$$

In this way, the anti-diagonal entries of the density matrix become positive and one gets

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & |\rho_{14}| \\ 0 & \rho_{22} & |\rho_{23}| & 0 \\ 0 & |\rho_{23}| & \rho_{33} & 0 \\ |\rho_{14}| & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix},$$

which rewrites in the Fano–Bloch representation as

$$\tilde{\rho} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta,$$

where the nonvanishing matrix elements $R_{\alpha\beta}$ are given by

$$\begin{aligned} R_{11} &= 2(|\rho_{23}| + |\rho_{14}|) & R_{22} &= 2(|\rho_{23}| - |\rho_{14}|) & R_{33} &= 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}) \\ R_{03} &= 2(\rho_{11} + \rho_{33}) - 1 & R_{30} &= 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1. \end{aligned}$$

The trace distance quantum discord is invariant under local transformations, and we have

$$D_T(\rho) = D_T(\tilde{\rho}).$$

The minimization in Eq. (13) has been worked out for a generic two qubit–qubit X state [22]. As result, the trace distance quantum discord in the state ρ Eq. (5) takes the form

$$D_T(\rho) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{11}^2 R_{\max}^2 - R_{22}^2 R_{\min}^2}{R_{\max}^2 - R_{\min}^2 + R_{11}^2 - R_{22}^2}}, \tag{14}$$

where

$$R_{\min}^2 = \min\{R_{11}^2, R_{33}^2\} \quad \text{with} \quad R_{\max}^2 = \max\{R_{33}^2, R_{22}^2 + R_{30}^2\}.$$

The Bell-diagonal states constitute a specific instance of two-qubit X states. In the Fano–Bloch representation, they take the form

$$\rho^{\text{BD}} = \frac{1}{4}[I \otimes I + \vec{c} \cdot (\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma})],$$

with $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ being a three-dimensional vector with elements satisfying $0 \leq |c_i| \leq 1$, and $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ denotes the standard Pauli matrices. The trace distance discord (14) reduces to [19]

$$D_{\text{T}}(\rho^{\text{BD}}) = \text{int}\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}, \quad (15)$$

that is the intermediate value for the absolute values of the correlation factors c_1 , c_2 , and c_3 .

3 Local quantum uncertainty and trace discord of two qubits in independent reservoirs

3.1 The density matrix

We consider a two-qubit system interacting with two independent reservoirs described by ohmic-like spectral densities [30–33]. The whole system is described by the following Hamiltonian

$$H = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{v_j}{2} \sigma_{j,3} + \sum_k w_{j,k} b_{j,k}^\dagger b_{j,k} + \sum_k \sigma_{j,3} (g_{j,k} b_{j,k}^\dagger + g_{j,k}^* b_{j,k}) \right]. \quad (16)$$

The first term of this Hamiltonian describes the two qubit ($j = 1, 2$) with v_j denoting the energy difference between the excited state $|1\rangle_j$ and the ground state $|0\rangle_j$ and $\sigma_{j,3}$ is the third Pauli matrix. The second term describes two independent reservoirs where $b_{j,k}^\dagger$ and $b_{j,k}$ are, respectively, the bosonic creation and the annihilation operators. They satisfy the usual bosonic commutation relations and $w_{j,k}$ denotes the frequency of the k th mode of the reservoir coupled to the qubit j . The last term in (16) expresses the interaction part between the reservoir and the qubit. The coupling strength between the qubit j and the k th mode is denoted by $g_{j,k}$.

To simplify our purpose, we shall assume that the two qubits are initially prepared in the following Bell-diagonal states

$$\rho_S(0) = \frac{1}{4} \left(I \otimes I + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right), \quad (17)$$

where the correlation parameters satisfy the conditions $0 \leq |c_i| \leq 1$. Without loss of generality, we assume that $|c_1| \geq |c_2|$. The density matrix, in the computational basis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, rewrites as

$$\rho_S(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} c_3^+ & 0 & 0 & c_- \\ 0 & c_3^- & c_+ & 0 \\ 0 & c_+ & c_3^- & 0 \\ c_- & 0 & 0 & c_3^+ \end{pmatrix}. \tag{18}$$

where $c_3^+ = 1 + c_3$, $c_3^- = 1 - c_3$, $c_+ = c_1 + c_2$ and $c_- = c_1 - c_2$. The states of the reservoirs in thermal equilibrium at the temperature T are given by

$$\rho_{E_j} = \frac{1}{Z_{E_j}} \exp \left(-\beta \sum_k w_{j,k} b_{j,k}^\dagger b_{j,k} \right), \tag{19}$$

where Z_{E_j} is the partition function of the reservoir j ($j = 1, 2$). Initially, the density matrix of the whole system reads as $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_{E_1} \otimes \rho_{E_2}$, and the evolved state is then given by

$$\rho(t) = \exp(-iHt) \rho(0) \exp(iHt). \tag{20}$$

The density matrix of the two-qubit system is then obtained by tracing out the environment degrees of freedom. This gives

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E \left[\exp(-iHt) \rho(0) \exp(iHt) \right]. \tag{21}$$

The matrix elements of $\rho_S(t)$ are given by

$$\langle ms | \rho_S(t) | nl \rangle = \text{Tr} \left[\pi_1^{mn}(t) \pi_2^{sl}(t) \rho(0) \right], \tag{22}$$

with $\pi_j^{ms}(t) = \exp(iHt) \pi_j^{ms} \exp(-iHt)$ is the Heisenberg operator of qubit j and $\pi_j^{ms} = |s\rangle_j \langle m|$ where s and m take the values 0 and 1.

It is simple to see that for $s = m$, the operators $\pi_j^{mm} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^m \sigma_3)$ commute with the Hamiltonian H and one has $\pi_j^{mm}(t) = \pi_j^{mm}(0)$. For different values of s and m , the operators π_j^{ms} are given by $\pi_j^{ms}(0) = |s\rangle_j \langle m| = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i(-1)^m \sigma_2)$. Therefore to determine the operators $\pi_j^{ms}(t)$ for $s \neq m$, one has to solve the following Heisenberg equations for the bosonic modes

$$i \frac{db_{j,k}(t)}{dt} = w_{j,k} b_{j,k}(t) + g_{j,k} \sigma_{j,3}, \tag{23}$$

and those associated with the two qubits are

$$i \frac{d\pi_j^{ms}(t)}{dt} = (-1)^{m+1} \left[v_j + 2 \sum_k \left(g_{j,k} b_{j,k}^\dagger(t) + g_{j,k}^* b_{j,k}(t) \right) \right] \pi_j^{ms}(t). \tag{24}$$

From the later equations, one gets

$$\pi_j^{01}(t) = (\pi_j^{10}(t))^\dagger = \pi_j^{01} \exp \left\{ i v_j t - 2 \sum_k \left(a_{j,k}(t) b_{j,k}^\dagger - a_{j,k}^*(t) b_{j,k} \right) \right\}, \tag{25}$$

where $a_{j,k}(t) = g_{j,k} (1 - \exp(i w_{j,k} t)) / w_{j,k}$.

In the Fano–Bloch representation, the matrix $\rho_S(t)$ can be expressed as follows

$$\rho_S(t) = \frac{1}{4} \left[I \otimes I + T_{11} \sigma_1 \otimes \sigma_1 + T_{12} \sigma_1 \otimes \sigma_2 + T_{21} \sigma_2 \otimes \sigma_1 + T_{22} \sigma_2 \otimes \sigma_2 + T_{33} \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right]. \tag{26}$$

The nonvanishing correlation parameters $T_{\alpha\beta}$, occurring in (26), are given by:

$$\begin{aligned} T_{11} &= [c_1 \cos(v_1 t) \cos(v_2 t) + c_2 \sin(v_1 t) \sin(v_2 t)] e^{-\gamma(t)} \\ T_{12} &= [c_1 \cos(v_1 t) \sin(v_2 t) - c_2 \sin(v_1 t) \cos(v_2 t)] e^{-\gamma(t)} \\ T_{21} &= [c_1 \sin(v_1 t) \cos(v_2 t) - c_2 \cos(v_1 t) \sin(v_2 t)] e^{-\gamma(t)} \\ T_{22} &= [c_1 \sin(v_1 t) \sin(v_2 t) + c_2 \cos(v_1 t) \cos(v_2 t)] e^{-\gamma(t)} \\ T_{33} &= c_3 \end{aligned} \tag{27}$$

where the time-dependent function $\gamma(t)$ is defined by:

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^2 \sum_k 4 |g_{j,k}|^2 w_{j,k}^{-2} \coth \left(\frac{\beta w_{j,k}}{2} \right) [1 - \cos(w_{j,k} t)]. \tag{28}$$

In the continuum limit, the term $\sum_k 4 |g_{j,k}|^2$ is replaced by $\int dw J_j(w) \delta(w_{j,k} - w)$ and to simplify our purpose we consider the situation where both reservoirs have the same spectral density $J_1(w) = J_2(w) = J(w)$. In this limiting case, $\gamma(t)$ can be expressed as:

$$\gamma(t) = 2 \int_0^\infty dw J(w) w^{-2} \coth \left(\frac{\beta w}{2} \right) [1 - \cos(wt)]. \tag{29}$$

The expression of the spectral density characterizing each reservoir is given by:

$$J(w) = \lambda \Omega^{1-s} w^s e^{-w/\Omega}, \tag{30}$$

with Ω is the cutoff frequency and λ is a dimensionless coupling constant between the system and the environment (the reservoirs). For $s = 1$, the reservoir is of ohmic type, for $0 < s < 1$, the reservoir is sub-ohmic and for $s > 1$, the reservoir is called super-ohmic.

3.2 Dynamics of local quantum uncertainty of two qubits in independent reservoirs

In the computational basis, the density matrix (26) takes the following form

$$\rho_S(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} c_3^+ & 0 & 0 & c_- e^{-i(v_2+v_1)t-\gamma(t)} \\ 0 & c_3^- & c_+ e^{i(v_2-v_1)t-\gamma(t)} & 0 \\ 0 & c_+ e^{-i(v_2-v_1)t-\gamma(t)} & c_3^- & 0 \\ c_- e^{i(v_2+v_1)t-\gamma(t)} & 0 & 0 & c_3^+ \end{pmatrix}. \tag{31}$$

which is of two-qubit X type. It follows that the Local quantum uncertainty and trace discord can be easily evaluated using the results reported hereinabove. To obtain the explicit expression of local quantum uncertainty, one computes first the elements of the matrix W . From (7), one gets

$$w_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)} + \frac{1}{2} \frac{(c_-)^2 e^{-2\gamma(t)} \cos(2v_1 t)}{\sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)}}. \tag{32}$$

Using the expression (8), one obtains

$$w_{22} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{(c_-)^2 e^{-2\gamma(t)} \cos(2v_1 t)}{\sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)}} \right) \tag{33}$$

The Eq. (9) gives

$$w_{33} = \frac{1}{4} \left(2 + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right) - \frac{(c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}{4 \left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)} - \frac{(c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}{4 \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right)} \tag{34}$$

The nonvanishing off-diagonal elements (11) write

$$w_{12} = w_{21} = \frac{c_- c_+ e^{-2\gamma(t)} \cos(v_1 t) \sin(v_1 t)}{\sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right)}}. \tag{35}$$

The eigenvalues of the matrix W are

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(w_{11} + w_{22}) + \sqrt{(w_{11} + w_{22})^2 - 4(w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12})} \right], \tag{36}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(w_{11} + w_{22}) - \sqrt{(w_{11} + w_{22})^2 - 4(w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12})} \right], \tag{37}$$

$$\lambda_3 = w_{33} \tag{38}$$

We have assumed that $|c_2| \leq |c_1|$. Thus, one has $\lambda_2 \leq \lambda_1$ and subsequently the local quantum uncertainty is given in term of

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_3). \tag{39}$$

Therefore, one should consider two cases: $\lambda_1 \leq \lambda_3$ and $\lambda_3 \leq \lambda_1$. Hence, when $\lambda_{\max} = \lambda_1$, the local quantum uncertainty is given by the following expression

$$U_A(\rho_S(t)) = \frac{1}{2} \frac{\left[2 - \sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right)} \right]}{2 \sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right)}} - \frac{c_- c_+ e^{-2\gamma(t)}}{\sqrt{\left(c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right) \left(c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}\right)}}, \tag{40}$$

and when $\lambda_{\max} = \lambda_3$, one gets

$$U_A(\rho_S(t)) = \frac{1}{4} \left[2 - \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} - \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right] + \frac{(c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}}{4 \left[c_3^+ + \sqrt{(c_3^+)^2 - (c_-)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right]} + \frac{(c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}}{4 \left[c_3^- + \sqrt{(c_3^-)^2 - (c_+)^2 e^{-2\gamma(t)}} \right]}. \tag{41}$$

3.3 Dynamics of trace quantum discord of two qubits in independent reservoirs

The nonvanishing matrix correlations, in the Fano–Bloch representation, of the density matrix $\rho_S(t)$ (31) are given by

$$R_{11} = c_1 e^{-\gamma(t)} \quad R_{22} = c_2 e^{-\gamma(t)} \quad R_{33} = c_3$$

The trace quantum discord (14) takes the form

$$D_T(\rho_S(t)) = \frac{e^{-\gamma(t)}}{2} \sqrt{\frac{c_1^2 \max\{c_3^2, c_2^2 e^{-2\gamma(t)}\} - c_2^2 \min\{c_1^2 e^{-2\gamma(t)}, c_3^2\}}{\max\{c_3^2, c_2^2 e^{-2\gamma(t)}\} - \min\{c_1^2 e^{-2\gamma(t)}, c_3^2\} + (c_1^2 - c_2^2) e^{-2\gamma(t)}}}. \tag{42}$$

For $|c_3| \geq |c_2|e^{-\gamma(t)}$ and $|c_3| \geq |c_1|e^{-\gamma(t)}$, the trace distance discord is given by:

$$D_T(\rho_S(t)) = \frac{1}{2}|c_1|e^{-\gamma(t)}. \tag{43}$$

For $|c_3| \geq |c_2|e^{-\gamma(t)}$ and $|c_3| \leq |c_1|e^{-\gamma(t)}$ one gets:

$$D_T(\rho_S(t)) = \frac{1}{2}|c_3|. \tag{44}$$

In this situation, it is remarkable that the quantum correlations are unaffected by the noisy environment and the geometric discord exhibits a freezing behavior. For $|c_3| \leq |c_2|e^{-\gamma(t)}$ and $|c_3| \geq |c_1|e^{-\gamma(t)}$ one has

$$D_T(\rho_S(t)) = 0,$$

reflecting the absence of quantum correlations. For $|c_3| \leq |c_2|e^{-\gamma(t)}$ and $|c_3| \leq |c_1|e^{-\gamma(t)}$, the trace distance discord is simply given by

$$D_T(\rho_S(t)) = \frac{1}{2}|c_2|e^{-\gamma(t)}. \tag{45}$$

We begin by analyzing the behavior of local quantum uncertainty in three particular Bell states coupled to environment of ohmic, sub-ohmic and super-ohmic type. As depicted in the Figs. 1, 2 and 3, the local quantum uncertainty may exhibit a sudden change behavior for the states with $(c_1 = 0.6, c_2 = -0.3, c_3 = 0.4)$ and $(c_1 = -0.5, c_2 = 0, c_3 = 0.3)$. This behavior is not observable for the state with $(c_1 = 0.5, c_2 = -0.3, c_3 = 0.6)$ for which the local quantum uncertainty decays monotonically. This decrease becomes more pronounced when passing from sub-ohmic to super-ohmic regime. This is essentially due to the strong nature of the environment effect in the sub-ohmic regime. It must be noticed also that for the states with $(c_1 = 0.6, c_2 = -0.3, c_3 = 0.4)$ and $(c_1 = -0.5, c_2 = 0, c_3 = 0.3)$, the local quantum uncertainty varies almost linearly before the sudden change point. The

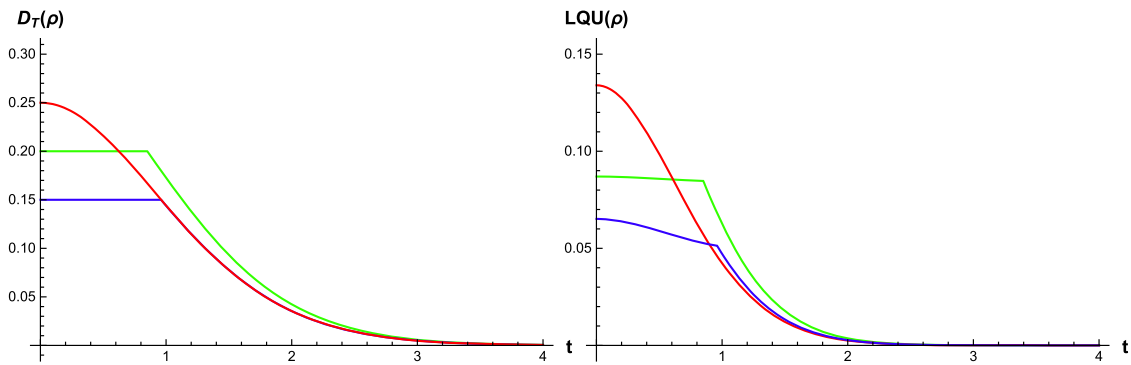


Fig. 1 The local quantum uncertainty and trace distance discord for the sub-ohmic reservoirs with $s = 0.5$, $\lambda = 0.1$, $\Omega\beta = 1$. $c_1 = 0.6$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.4$ (green line). $c_1 = -0.5$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0.3$ (blue line). $c_1 = 0.5$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.6$ (red line) (Color figure online)

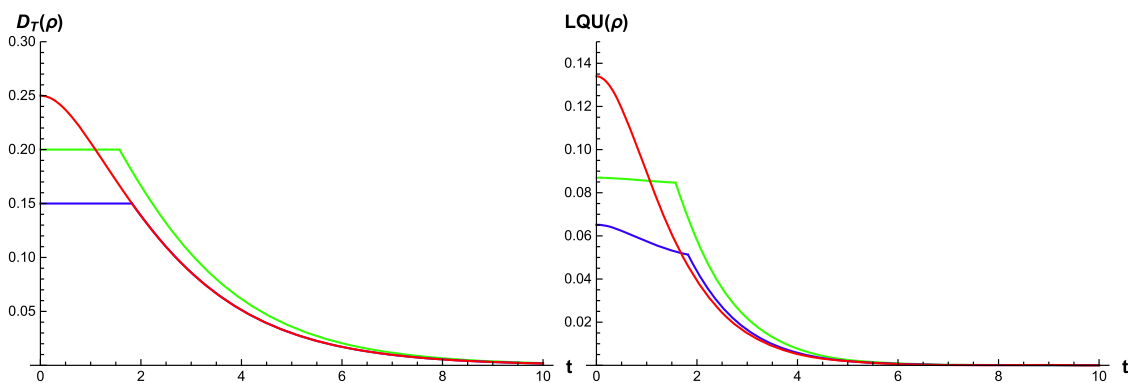


Fig. 2 The local quantum uncertainty and trace distance discord for the ohmic reservoirs with $s = 1$, $\lambda = 0.1$, $\Omega\beta = 1$. $c_1 = 0.6$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.4$ (green line). $c_1 = -0.5$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0.3$ (blue line). $c_1 = 0.5$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.6$ (red line) (Color figure online)

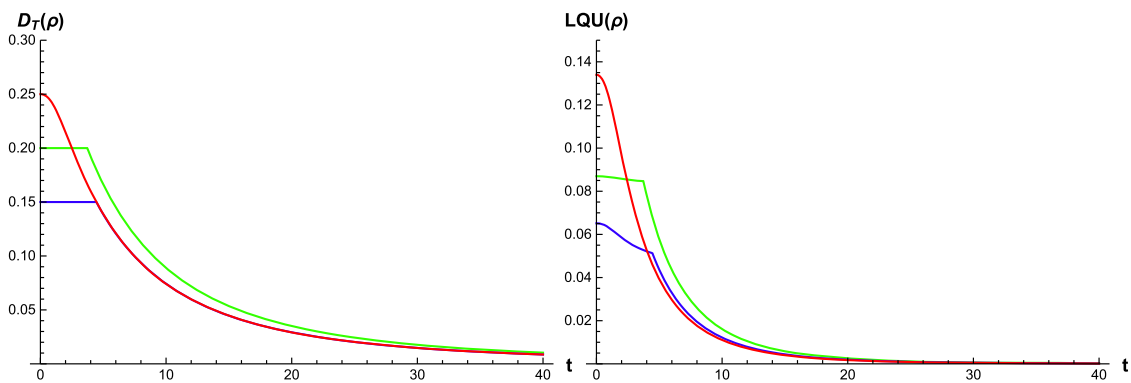


Fig. 3 The local quantum uncertainty and trace distance discord for the super-ohmic with $s = 1.5$, $\lambda = 0.2$, $T = 0$. $c_1 = 0.6$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.4$ (green line). $c_1 = -0.5$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0.3$ (blue line). $c_1 = 0.5$, $c_2 = -0.3$, $c_3 = 0.6$ (red line) (Color figure online)

interval of time, in which this variation is linear, depends on the nature of the system–environment coupling. It is larger in the ohmic regime in comparison with the others regimes. Let us now analyze the behavior of quantum correlations measured by trace norm. We notice first that the local quantum uncertainty and trace discord exhibit similar behavior for the considered states, except the freezing behavior which occurs before the sudden change of trace norm. We obtain a large and controllable freezing

interval for states with $(c_1 = 0.6, c_2 = -0.3, c_3 = 0.4)$ evolving in Markovian environment of super-ohmic type. This interval is reduced by the decoherence effects in the case of ohmic and sub-ohmic regimes. This freezing phenomenon exhibited by trace norm reflects that the quantum correlations in a given quantum state are not affected by the noise generated by its surrounding environment. This is surprising and questionable phenomenon does not occur when one consider local quantum uncertainty as quantifier of quantum discord. Indeed, as we have discussed above, in the interval where the trace discord is constant, the local quantum uncertainty decreases linearly until the point when the sudden change of the behavior happens.

4 Quantum correlations dynamics of two 2-level atoms interacting with an electromagnetic field

In this section, we consider two identical atoms with ground states $|g_i\rangle$ and excited states $|e_i\rangle$ ($i = 1, 2$) which are coupled with a quantized electromagnetic field [34–37]. In the rotating-wave approximation, the Hamiltonian can be written

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 S^z + \sum_{\vec{k}s} \omega_k \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} - i\hbar \sum_{\vec{k}s} [\vec{\mu} \cdot \vec{g}_{\vec{k}s} S^+ \hat{a}_{\vec{k}s} - H.c], \tag{46}$$

where $\hat{a}_{\vec{k}s}$ and $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$ are, respectively, the annihilation and creation operators corresponding to the field mode $\vec{k}s$, which has wave vector \vec{k} , frequency ω_k and the index of polarization s . The coupling factor is given by

$$\vec{g}_{\vec{k}s}(\vec{r}_i) = \left(\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\hbar V}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}$$

where V denotes the quantization volume and e_{ks} is the electric field polarization vector. This factor represents the mode function of the three dimensional field, evaluated at the position \vec{r}_i of the i th atom. The quantity $\vec{\mu}$ is the transition dipole moment and ω_0 is the transition frequency. The operators S^\pm and S^z are the collective spin operators defined by $S^\pm = \sum_i S_i^\pm$ and $S^z = \sum_i S_i^z$ with $S_i^+ = |e_i\rangle\langle g_i|$, $S_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$ and $S_i^z = |e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|$.

To study the dynamics of this system, we shall employ the following master equation [35]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial t} = & -i\omega_0 \sum_{i=1}^2 [S_i^z, \rho] - i\Omega_{12} \sum_{i \neq j}^2 [S_i^+ S_j^-, \rho] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij} (\rho S_i^+ S_j^- + S_i^+ S_j^- \rho - 2S_j^- \rho S_i^+) \end{aligned} \tag{47}$$

where $\Gamma_{ii} \equiv \Gamma$ ($i = 1, 2$) is the spontaneous emission rate induced by the direct coupling of the atom with the radiation field, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ denotes the collective damping and Ω_{12} is the dipole–dipole interaction potential. They are given by [35–37]:

$$\Gamma_{ij} = \frac{3}{2}\Gamma \left\{ \left[1 - (\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \frac{\sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} + \left[1 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \left[\frac{\cos(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^2} - \frac{\sin(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^3} \right] \right\}, \quad (48)$$

and

$$\Omega_{ij} = \frac{3}{4}\Gamma \left\{ - \left[1 - (\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \frac{\cos(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} + \left[1 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \left[\frac{\sin(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^2} + \frac{\cos(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^3} \right] \right\}. \quad (49)$$

where $r_{ij} = |r_j - r_i|$ is the distance between the atoms, and $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. We consider the situation where the two qubits are initially prepared in their excited states $|e_1, e_2\rangle$. Using the master equation (47), the evolved two-qubit state writes in the computational basis as

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} a(\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\tau) & c(\tau) & 0 \\ 0 & c(\tau) & b(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a(\tau) - 2b(\tau) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

where

$$a(\tau) = e^{-2\tau}, \quad (51)$$

$$b(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma)} \left[(1+\gamma^2) (\cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau}) - 2\gamma \sinh(\gamma\tau) \right], \quad (52)$$

$$c(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma)} \left[2\gamma (\cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau}) - (1+\gamma^2) \sinh(\gamma\tau) \right], \quad (53)$$

with $\tau = \Gamma t$ and $\gamma = \Gamma_{12}/\Gamma$.

The density matrix $\rho(\tau)$ rewrites, in Fano–Bloch representation, as

$$\rho(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} \otimes \sigma_{\beta} \quad (54)$$

where the nonvanishing correlation matrix elements are given by

$$T_{11} = T_{22} = 2c(\tau) \quad T_{33} = 1 - 4b(\tau) \quad T_{03} = T_{30} = 2(a(\tau) + b(\tau)) - 1, \quad (55)$$

in term of the time dependent functions $a(\tau)$, $b(\tau)$ and $c(\tau)$ given, respectively, by (51), (52) and (53).

4.1 Dynamics of local quantum uncertainty

To determine the local quantum uncertainty for the density matrix $\rho(\tau)$, one employs the results obtained in Sect. 2. Thus, the elements of the matrix W (4) are given by

$$w_{11} = w_{22} = \left(\sqrt{b(\tau) + c(\tau)} + \sqrt{b(\tau) - c(\tau)} \right) \left(\sqrt{a(\tau)} + \sqrt{1 - a(\tau) - 2b(\tau)} \right), \tag{56}$$

$$w_{33} = 1 - 2b(\tau) + 2\sqrt{b(\tau)^2 - c(\tau)^2}, \tag{57}$$

which can be rewritten also as

$$w_{11} = w_{22} = \frac{e^{-\tau}}{(1 - \gamma^2)} \left[\frac{\sqrt{(1 - \gamma^2) e^{-\tau} + \sqrt{4\gamma \sinh(\gamma\tau) + 2(1 - \gamma^2) \sinh(\tau) - 2(1 + \gamma^2) (\cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau})}}}{(1 + \gamma) \sqrt{e^{-\gamma\tau} - e^{-\tau}} + (1 - \gamma) \sqrt{e^{\gamma\tau} - e^{-\tau}}} \right],$$

$$w_{33} = 1 + \frac{2e^{-\tau}}{(1 - \gamma^2)} \left[2\gamma \sinh(\gamma\tau) - (1 + \gamma^2) (\cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau}) + \sqrt{1 + e^{-2\tau} - 2e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau)} \right].$$

In the situation where the two atoms are very close ($r_{12} \rightarrow 0$), we have $\Gamma_{12} \rightarrow \Gamma$. This means that $\gamma \rightarrow 1$ and $b(\tau) = c(\tau) = e^{-2\tau}\tau$. In this case, the elements of the matrix W are simply given by

$$w_{11} = w_{22} = \sqrt{2b(\tau)a(\tau)} + \sqrt{2b(\tau)(1 - a(\tau) - 2b(\tau))} \tag{58}$$

$$w_{33} = 1 - 2b(\tau) \tag{59}$$

which rewrite as

$$w_{11} = w_{22} = \sqrt{2e^{-2\tau}\tau} \left[\sqrt{e^{-2\tau}} + \sqrt{1 - e^{-2\tau}(1 + 2\tau)} \right] \text{ and}$$

$$w_{33} = 1 - 2e^{-2\tau}\tau.$$

4.2 Dynamics of geometric quantum discord

To determine the analytic expression of the trace distance discord of this system from the Eq. (14), it is necessary to calculate the expressions of T_{\max}^2 and T_{\min}^2 by

comparing T_{33}^2 with $T_{22}^2 + T_{30}^2$ and T_{11}^2 with T_{33}^2 . It is simple to check that the difference $T_{33}^2 - T_{22}^2 - T_{30}^2$ is negative and $T_{\max}^2 = T_{22}^2 + T_{30}^2$. Therefore, to get the trace discord, one has to treat separately the cases $|T_{33}| \geq |T_{11}|$ and $|T_{11}| \geq |T_{33}|$. Using the Eq. (14) and noticing that $T_{11} = T_{22}$ (see Eq. (55)), one verifies that the trace discord, in both cases, writes

$$D_T(\rho(\tau)) = \frac{1}{2}|T_{11}| = |c(\tau)|, \quad (60)$$

where $c(\tau)$ is given by (53).

4.3 Dynamics of concurrence

The two atoms are initially prepared in the separable state $|e_1, e_2\rangle$. Besides the local quantum uncertainty and trace quantum discord, we shall also consider the dynamics of the concurrence. This measure, introduced by Wootters [24,25] is given by

$$C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (61)$$

where $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ are the square roots of the eigenvalues of the matrix $\rho\tilde{\rho}$. The matrix $\tilde{\rho}$ that is obtained by the ‘‘spin-flipped’’ operation from the density matrix ρ as $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$. For the density matrix (50), the corresponding eigenvalues are

$$\{\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \left\{ \sqrt{a(\tau)(1-a(\tau)-2b(\tau))}, |b(\tau) - c(\tau)|, |b(\tau) + c(\tau)| \right\}, \quad (62)$$

and the concurrence (61) writes

$$C(\rho) = \begin{cases} \max\{0, -2b(\tau)\} & \text{if } \lambda_1 = \sqrt{a(\tau)(1-a(\tau)-2b(\tau))}, \\ \max\{0, -2(c(\tau) + \sqrt{a(\tau)(1-a(\tau)-2b(\tau))})\} & \text{if } \lambda_1 = |b(\tau) - c(\tau)|, \\ \max\{0, 2(c(\tau) - \sqrt{a(\tau)(1-a(\tau)-2b(\tau))})\} & \text{if } \lambda_1 = |b(\tau) + c(\tau)|, \end{cases} \quad (63)$$

The dynamics of local quantum uncertainty and trace quantum discord are plotted in the Fig. 4. As depicted in Fig. 4, the behavior of both the local quantum uncertainty and trace discord show a sudden birth of quantum correlations. Recall that the initial two-qubit state is separable and the dipole–dipole interaction between the two atoms leads to the generation of non-classical correlations. The generated quantum correlations survive over a certain interval of time. Then, the amount of quantum correlations decreases showing a degradation of the generated non-classical correlations caused by the environmental effects. It must be noticed that the amount of quantum correlations is more important when the two atoms get close each other. The interaction between the two atoms enhances the quantum correlations between the components of the system. Another important aspect reported in Fig. 4 is the revival of quantum correlations. Indeed, as it can be seen from Fig. 4, local quantum uncertainty and trace

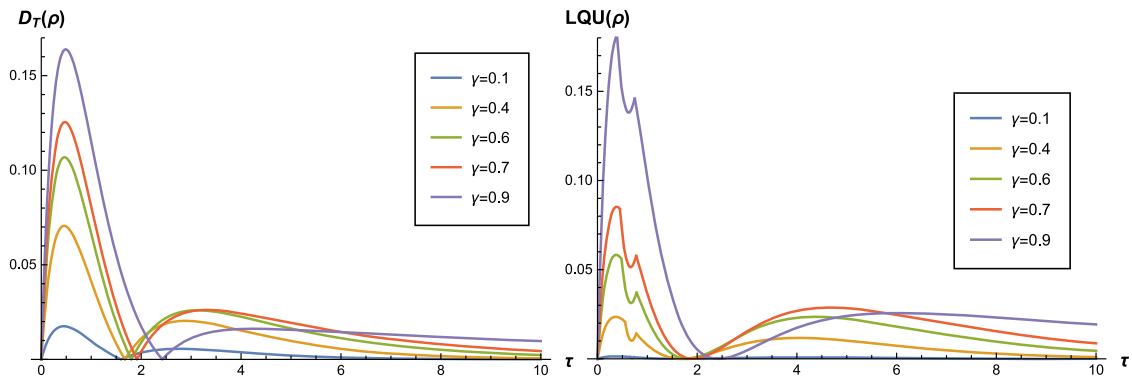


Fig. 4 The trace distance discord $D_T(\rho)$ and local quantum uncertainty versus the parameter τ for the different values of γ

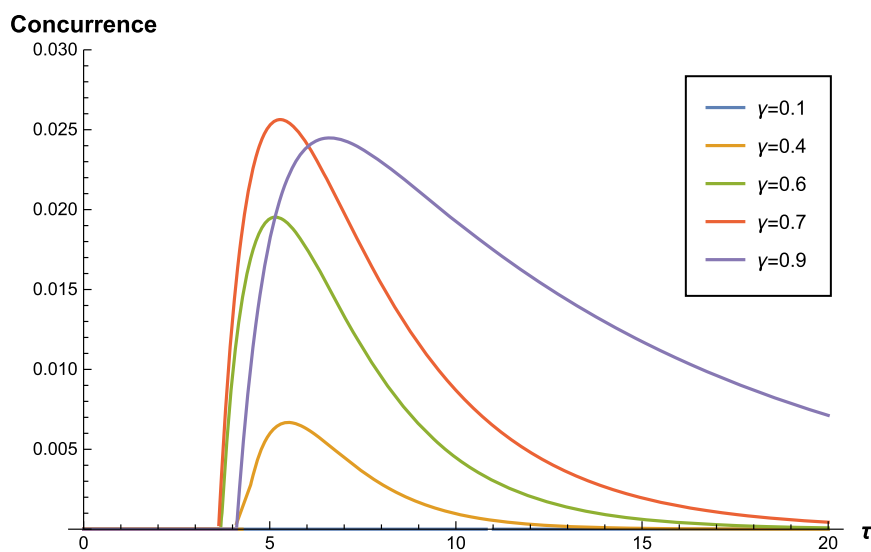


Fig. 5 The variation of the Concurrence for the different values of γ

discord increase, reach a maximum and decrease to vanish after finite time interval. This is followed by a revival of quantum correlations in the system. This revival can be explained by the transfer of correlations from the total system including the environment to the two-qubit system. Comparing the results of Figs. 4 and 5, one notices that the sudden birth of concurrence is delayed in comparison with local quantum uncertainty and trace quantum discord. This corroborates the fact that the concurrence as quantum quantifier cannot capture the total amount of quantum correlations existing in a mixed two-qubit system. It is also important to stress that the concurrence does not exhibit the revival phenomena and cannot capture the quantum correlation revival.

We also considered the comparison between local quantum uncertainty, trace discord and concurrence for different values of γ related to the distance separating the two atoms. The results reported in the Figs. 6, 7, 8, 9, 10 and 11 show that local quantum uncertainty and trace discord behave almost identically. These figures show also that the concurrence is initially zero for a certain period of time. This means that the evolved states stay separable in this interval but contain quantum correlations that are not captured by the concurrence. In particular, we noticed that for $\gamma \rightarrow 1$, the con-

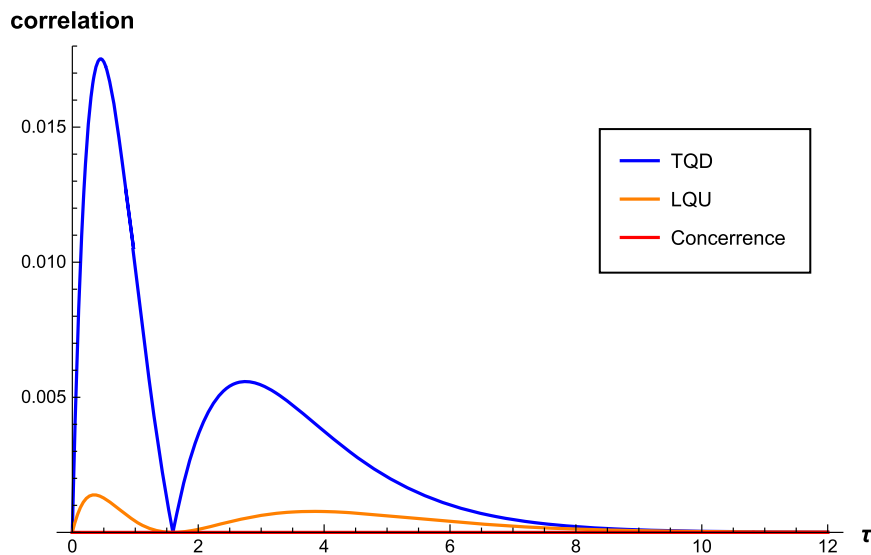


Fig. 6 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma = 0.1$

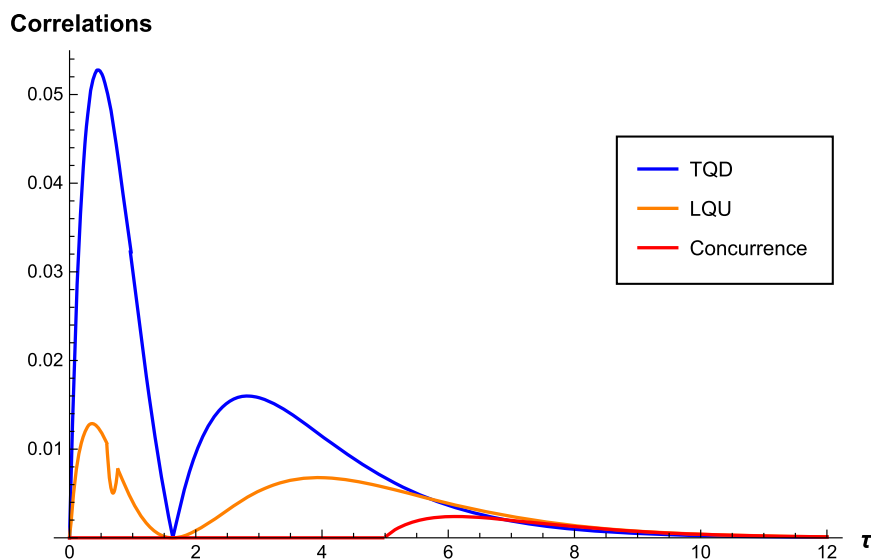


Fig. 7 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma = 0.3$

currence is zero. The system of the two atoms stays separable but contains quantum correlations that are not captured by the concurrence.

5 Concluding remarks

In this work, we considered the dynamics of quantum correlations in two specific bipartite quantum systems. The first is a two-qubit system coupled to two independent bosonic reservoirs. The second concerns a two 2-level atoms interacting with the modes of a quantized radiation field. We used the local quantum uncertainty, trace quantum discord and the concurrence to investigate the main features of the dynamics of the quantum correlations contained in the system submitted to the environmental effects. In this sense, we have derived the analytical expression for local quantum uncertainty quantifying quantum correlations in two-qubit X states coupled to two independent

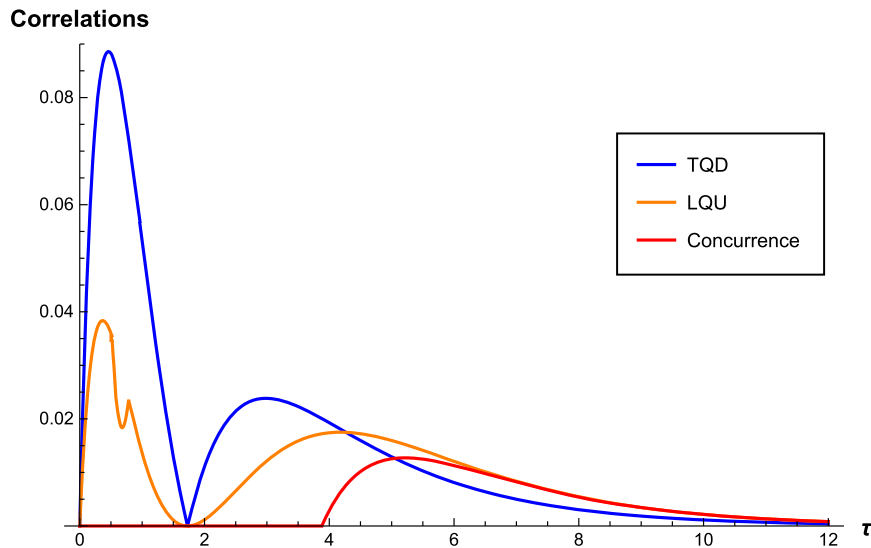


Fig. 8 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma = 0.5$

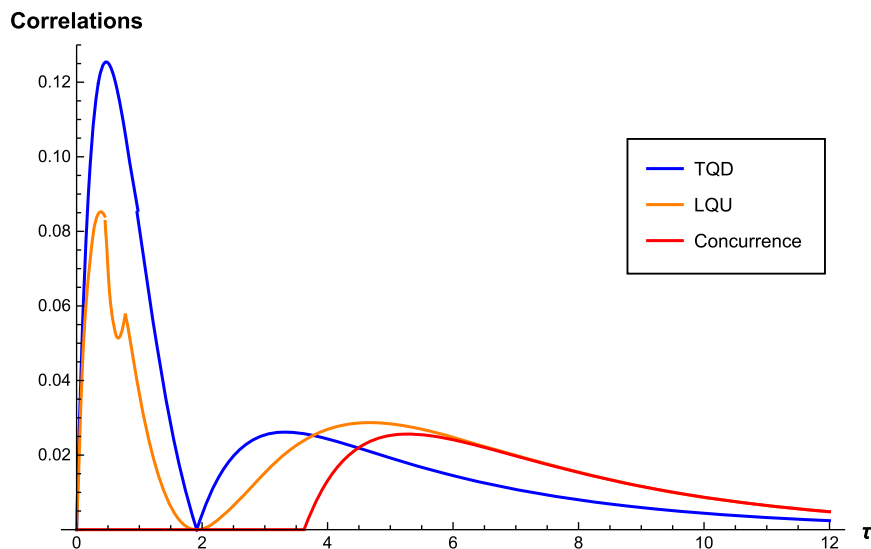


Fig. 9 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma = 0.7$

bosonic reservoirs. In analyzing the dynamics of this quantifier, we considered three types of reservoirs :sub-ohmic, ohmic and super-ohmic. We also compared the local quantum uncertainty and trace quantum discord. In particular, it has been shown that the local quantum uncertainty does not exhibit the freezing phenomenon which is observed when one uses the trace norm as quantifier.

For a two 2-level atoms interacting with the bosonic modes of an electromagnetic field, we analyzed the dynamics of quantum correlations for different configurations by varying the inter-atomic distance. In this case, we have utilized local quantum uncertainty, trace quantum discord and concurrence to analyze the main characteristics of quantum correlations in this system initially prepared in a separable state. We have noticed that the evolved system stays for a certain period of time separable (the concurrence is zero) contrarily to local quantum uncertainty and trace quantum discord which are nonvanishing. This corroborates the fact that local quantum uncertainty and trace discord go beyond the Wootters concurrence and indicates the sudden birth of

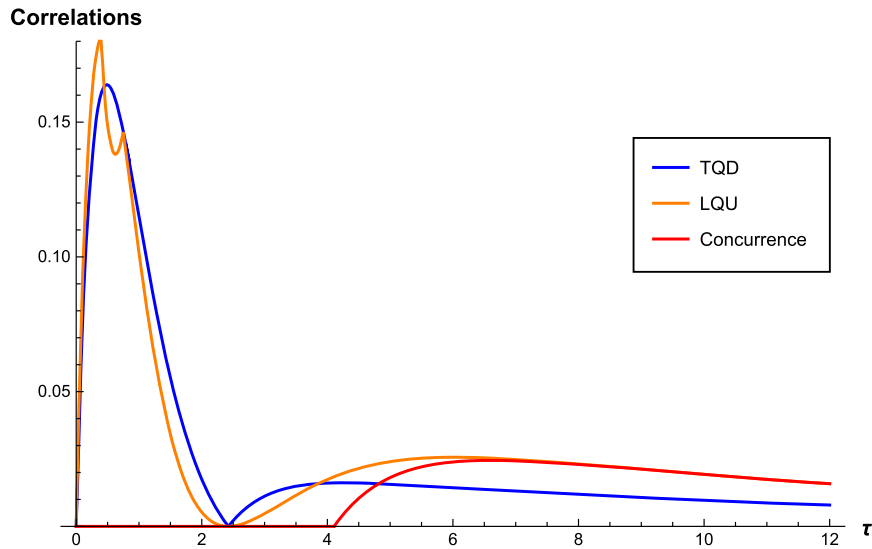


Fig. 10 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma = 0.9$

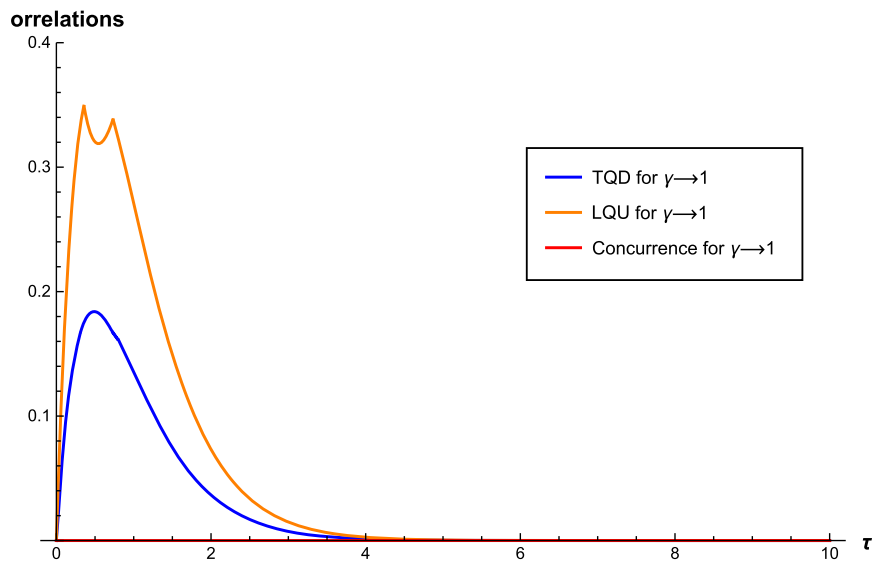


Fig. 11 Local quantum uncertainty, trace distance discord and concurrence for $\gamma \rightarrow 1$

quantum correlations. This is essentially due to the dipole–dipole interaction between the two atoms which creates quantum correlations between the components of the system. A second remarkable feature is the revival phenomenon which reflects the transfer of quantum correlations from the environment to the two-qubit system.

Appendices

Appendix 1

The eigenvalues corresponding to this matrix ρ (5) are given by

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 - 4d_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}\sqrt{t_2^2 - 4d_2} \tag{64}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}\sqrt{t_2^2 - 4d_2}, \lambda_4 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 - 4d_1} \tag{65}$$

where

$$t_1 = \rho_{11} + \rho_{44}, d_1 = \rho_{11}\rho_{44} - \rho_{14}\rho_{41}, t_2 = \rho_{22} + \rho_{33}, d_2 = \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{32}\rho_{23}. \tag{66}$$

The square root of the density matrix ρ can be written in terms of the matrix elements ρ , in the computational basis, as follows:

$$\sqrt{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{11} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{14}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\ 0 & \frac{\rho_{22} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & \frac{\rho_{23}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{32}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & \frac{\rho_{33} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ \frac{\rho_{41}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{44} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

The eigenvalues $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}$ and $\sqrt{\lambda_4}$ of the matrix $\sqrt{\rho}$ can be rewritten as:

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{2}\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \frac{1}{2}\sqrt{t_1 - 2\sqrt{d_1}} \tag{68}$$

$$\sqrt{\lambda_2} = \frac{1}{2}\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} + \frac{1}{2}\sqrt{t_2 - 2\sqrt{d_2}} \tag{69}$$

$$\sqrt{\lambda_3} = \frac{1}{2}\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} - \frac{1}{2}\sqrt{t_2 - 2\sqrt{d_2}} \tag{70}$$

$$\sqrt{\lambda_4} = \frac{1}{2}\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \frac{1}{2}\sqrt{t_1 - 2\sqrt{d_1}} \tag{71}$$

The matrix $\sqrt{\rho}$ is written in the Fano–Bloch representation as:

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{\chi, \delta} \mathcal{R}_{\chi\delta} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta}, \tag{72}$$

where $\chi, \delta = 0, 1, 2, 3$ and the Fano–Bloch parameters are defined by: $\mathcal{R}_{\chi\delta} = \text{Tr}(\sqrt{\rho} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta})$. The vanishing correlation parameters $\mathcal{R}_{\chi\delta}$ are given by:

$$\mathcal{R}_{00} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} \tag{73}$$

$$\mathcal{R}_{03} = \frac{1}{2} \frac{T_{30} + T_{03}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{30} - T_{03}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \tag{74}$$

$$\mathcal{R}_{30} = \frac{1}{2} \frac{T_{30} + T_{03}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{30} - T_{03}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \tag{75}$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{1}{2} \frac{T_{11} + T_{22}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \quad (76)$$

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2} \frac{T_{12} - T_{21}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{12} + T_{21}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \quad (77)$$

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2} \frac{T_{12} - T_{21}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{12} + T_{21}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \quad (78)$$

$$\mathcal{R}_{21} = \frac{1}{2} \frac{T_{12} + T_{21}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{12} - T_{21}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \quad (79)$$

$$\mathcal{R}_{22} = \frac{1}{2} \frac{T_{11} + T_{22}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \quad (80)$$

$$\mathcal{R}_{33} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}. \quad (81)$$

Appendix 2

In this appendix, we give the expressions of the $\gamma(t)$ function for sub-ohmic, ohmic and super-ohmic reservoirs [30].

(i) Sub-ohmic reservoirs

The sub-ohmic regime corresponds to the situation where $0 < s < 1$. In this case, the function $\gamma(t)$ reads as [30]

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \frac{2\lambda\Gamma(s)}{s-1} \left\{ 1 - \left(1 - \Omega^2 t^2\right)^{(1-s)/2} \cos[(s-1) \arctan(\Omega t)] \right\} \\ & + \frac{4\lambda\Gamma(s)}{s-1} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + m\Omega\beta)^{1-s} \\ & \times \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right)^2 \right]^{(1-s)/2} \cos \left[(s-1) \arctan \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

where $\Gamma(s)$ denotes the Gamma function. To study the evolution of the local quantum uncertainty, one should calculate the time derivative of the function $\gamma(t)$. It is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t)}{dt} = & 2\lambda\Gamma(s)\Omega \\ & \left\{ \left(1 - \Omega^2 t^2\right)^{-s/2} \sin[s \arctan(\Omega t)] + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1 + m\Omega\beta)^2 + \Omega^2 t^2 \right]^{-s/2} \sin \left[s \arctan \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right) \right] \right\} \quad (82) \end{aligned}$$

(ii) *Ohmic reservoirs*

For reservoirs of ohmic type ($s = 1$), the low-frequency behavior of the function $J(\omega)$ is linear in terms of ω . The Eq. (29) becomes [30]

$$\gamma(t) = \lambda \left[\ln(1 + \Omega^2 t^2) + 4 \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{\Omega\beta}\right) - 2 \ln \left| \Gamma\left(1 + \frac{1}{\Omega\beta} + i \frac{t}{\beta}\right) \right|^2 \right] \tag{83}$$

The time derivative of the function $\gamma(t)$ is given by

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = 2\lambda\Omega^2 t \left[\frac{1}{1 + \Omega^2 t^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(1 + m\Omega\beta)^2 + \Omega^2 t^2} \right]. \tag{84}$$

(iii) *Super-ohmic reservoirs*

For super-ohmic reservoirs ($s > 1$), the function $\gamma(t)$ reads as [30]

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & 2\lambda\Gamma(s-1) \left\{ 1 - (1 + \Omega^2 t^2)^{1-s/2} \cos[(s-1) \arctan(\Omega t)] \right\} \\ & + 4\lambda\Gamma(s-1) \sum_{m=1}^{\infty} (1 + m\Omega\beta)^{1-s} \\ & \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right)^2 \right]^{(1-s)/2} \cos \left[(s-1) \arctan \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

and the derivative of $\gamma(t)$ with respect to time t is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t)}{dt} = & 2\lambda\Omega\Gamma(s) (1 + \Omega^2 t^2)^{-s/2} \sin[s \arctan(\Omega t)] \\ & + 4\lambda\Omega\Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1 + m\Omega\beta)^2 + \Omega^2 t^2 \right]^{-s/2} \sin \left[s \arctan \left(\frac{\Omega t}{1 + m\Omega\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Due to the complicated expression of $\gamma(t)$ and to simplify our numerical calculations, we have chosen the situation where $1 < s \leq 2$ and the temperature equals zero. In this case case, the function $\gamma(t)$ becomes

$$\gamma(t) = 2\lambda\Gamma(s-1) \left\{ 1 - (1 + \Omega^2 t^2)^{(1-s)/2} \cos[(s-1) \arctan(\Omega t)] \right\}. \tag{85}$$

References

1. Nielsen, M.A., Chuang, I.L.: Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
2. Braunstein, S.L., Kimble, H.J.: Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998)
3. Bouwmeester, D., Pan, J.W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., Zeilinger, A.: Nature **390**, 575 (1997)
4. Bennett, C.H., Brassard, G.: In: The Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York), p. 175 (1984)
5. Vedral, V.: Rev. Mod. Phys. **74**, 197 (2002)
6. Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K.: Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009)
7. Gühne, O., Tóth, G.: Phys. Rep. **474**, 1 (2009)
8. Modi, K., Brodutch, A., Cable, H., Paterek, T., Vedral, V.: Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012)
9. Wootters, W.K.: Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998)
10. Ollivier, H., Zurek, W.H.: Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001)
11. Henderson, L., Vedral, V.: J. Phys. A **34**, 6899 (2001)
12. Huang, Y.: New J. Phys. **16**, 033027 (2014)
13. Dakić, B., Vedral, V., Brukner, Č.: Phys. Rev. Lett. **105**, 190502 (2010)
14. Bellomo, B., Lo Franco, R., Compagno, G.: Phys. Rev. A **86**, 012312 (2012)
15. Bellomo, B., Giorgi, G.L., Galve, F., Lo Franco, R., Compagno, G., Zambrini, R.: Phys. Rev. A **85**, 032104 (2012)
16. Daoud, M., Ahl Laamara, R.: Phys. Lett. A **376**, 2361 (2012)
17. Daoud, M., Ahl Laamara, R.: Int. J. Quantum Inf. **10**, 1250060 (2012)
18. Piani, M.: Phys. Rev. A **86**, 034101 (2012)
19. Paula, F.M., de Oliveira, T.R., Sarandy, M.S.: Phys. Rev. A **87**, 064101 (2013)
20. Paula, F.M., Montealegre, J.D., Saguia, A., de Oliveira, T.R., Sarandy, M.S.: EPL **103**, 50008 (2013)
21. Bromley, T.R., Cianciaruso, M., Lo Franco, R., Adesso, G.: J. Phys. A Math. Theor. **47**, 405302 (2014)
22. Ciccarello, F., Tufarelli, T., Giovannetti, V.: New J. Phys. **16**, 013038 (2014)
23. Girolami, D., Tufarelli, T., Adesso, G.: Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013)
24. Wigner, E.P., Yanasse, M.M.: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **49**, 910 (1963)
25. Luo, S.: Phys. Rev. Lett. **91**, 180403 (2003)
26. Petz, D., Ghinea, C.: In: Rebolledo, R., Orszag, M. (eds.) Quantum Probability and Related Topics. World Scientific, Singapore (2011)
27. Luo, S.: Proc. Am. Math. Soc. **132**, 885 (2003)
28. Girolami, D., Tufarelli, T., Adesso, G.: Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013)
29. Nakano, T., Piani, M., Adesso, G.: Phys. Rev. A **88**, 012117 (2013)
30. Liu, L., Zhang, J., Cheng, S., Tong, D.: J. Phys. Soc. Jpn. **82**, 0640002 (2013)
31. Hao, X.N., Hou, J.C., Li, J.Q.: Quantum Inf. Process. **15**, 2819 (2016)
32. Ferraro, E., Scala, M., Migliore, R., Napoli, A.: Non-Markovian dissipative dynamics of two coupled qubits in independent reservoirs: Comparison between exact solutions and master-equation approaches. Phys. Rev. A **80**, 042112 (2009)
33. Scala, M., Migliore, R., Messina, A.: J. Phys. A Math. Theor. **41**, 435304 (2008)
34. Agarwal, G.: Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and Their Relation to Other Approaches, vol. 70 of Springer Tracts in Modern Physics. Springer, Berlin (1974)
35. Tanaś, R., Ficek, Z.: J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt. **6**, S90 (2004)
36. Ficek, Z., Tanaś, R., Kielich, S.: Phys. A **146**, 452 (1987)
37. Auyuanet, A., Davidovich, L.: Phys. Rev. A **82**, 032112 (2010)

5.2 Contribution 2 : Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission

The European Physical Journal Plus, 133 (2018) 413.

5.2.1 Résumé :

La dynamique des corrélations quantiques au-delà de l'intrication dans les systèmes quantiques ouverts a été largement étudiée dans la littérature, mais peu de ces études se concentrent sur la façon dont le système est corrélé avec son environnement. Ici, nous étudions ce problème dans une situation réaliste, en prenant deux atomes à deux niveaux comme qubits identiques couplés à un environnement Markovien commun en présence de modes de champ électromagnétique. Nous prenons en compte l'interaction dipôle-dipôle, l'amortissement collectif et, plus important encore, la distance interatomique entre eux. Nous étudions comment la distance interatomique influence la façon dont l'un de ces atomes se trouve en corrélation quantique avec l'environnement et, comme nous le montrerons, cette séparation apparaît comme une variable cruciale.

Afin d'étudier l'évolution dynamique des corrélations quantiques, l'équation Maître (3.35) dans les approximations de Born-Markov a été résolue analytiquement, où nous utilisons la représentation de l'état collectif de Dicke, qui suppose que le système à deux atomes se comporte comme un système unique à quatre niveaux. À partir de cette solution analytique, nous avons calculé les quantités pertinentes pour nos objectifs ; la concurrence, la discordance quantique géométrique, et l'incertitude quantique locale pour plusieurs états initiaux. Lorsque les deux atomes sont initialement dans un état intriqué à excitation double ou nulle, les différentes mesures des corrélations quantiques se désintègrent de manière exponentielle en fonction de chaque paramètre d'émission spontanée. Pendant ce temps, l'intrication est générée spontanément avec un comportement oscillatoire, qui dépend à la fois de l'amortissement collectif et de l'interaction qubit-qubit. Contrairement à ce cas, toutes les corrélations montrent une augmentation rapide, suivie d'une décroissance très lente lorsque ces deux atomes sont initialement préparés dans la superposition des états symétrique et antisymétrique maximales intriqués. Ces résultats montrent que l'amortissement collectif et l'interaction dipôle-dipôle jouent un rôle clé dans le renforcement des corrélations non classiques au cours du processus de décohérence intrinsèque.

De plus, nous avons discuté l'évolution de ces corrélations pour des atomes placés très près l'une de l'autre. De manière contre-intuitive, nous avons montré que cette distance critique peut être celle qui minimise la perte de corrélation quantique et que nous pouvons la préserver pour de petites distances.

5.2.2 Contenu de la publication 2 :

Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission

A. Slaoui^{1,a}, M.I. Shaukat^{2,3,b}, M. Daoud^{4,5,c}, and R. Ahl Laamara^{1,6,d}

¹ LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco

² CeFEMA, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

³ University of Engineering and Technology, Lahore (RCET Campus), Pakistan

⁴ Department of Physics, Faculty of Sciences-Ain Chock, University Hassan II, Casablanca, Morocco

⁵ Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Miramare, Trieste, Italy

⁶ Centre of Physics and Mathematics, CPM, CNESTEN, Rabat, Morocco

Received: 13 July 2018 / Revised: 12 August 2018

Published online: 12 October 2018

© Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, 2018

Abstract. We explore the spontaneous generation and decay of quantum correlations between two identical atoms coupled to a common Markovian environment in the presence of electromagnetic field modes. For this purpose, we analyze the dynamics of quantum correlations by employing the concurrence, the trace quantum discord and the local quantum uncertainty, for collective Dicke states. It is shown that the collective damping and dipole-dipole interaction plays a key role in enhancing non-classical correlations during the process of intrinsic decoherence. The quantum correlations can be maintained over a long time but for small distance between the two atoms.

1 Introduction

Quantum information theory (QIT) is an exciting field which lies at the intersection of physics, mathematics and computer science. It deals with storage, transmission and processing of information using quantum-mechanical systems. Entanglement is the key resource of many QIT applications [1–3] like quantum key distribution [4], quantum teleportation [5] and quantum dense coding [6].

In this sense, quantification of quantum correlations in multipartite systems has attracted a lot of interest in the literature. Various quantum correlations quantifiers were introduced. The first one is quantum discord (QD) [7] which has shown to be a fundamental resource in quantum information processing [8]. Despite important effort concerning the comparison of entanglement and QD for several families of quantum states [9–11], scientists, unfortunately, have not yet described with clear evidence the relation between them [12]. Recent studies showed that quantum discord acts as a resource of entanglement distribution [13,14] and a quantitative measure in quantum-state merging [15,16].

One of the major challenges for the physical realization of quantum information and computation protocols is the decoherence which arises due to the quantum system coupling with its surroundings, causing loss of information from the system to its environment. During the 20th century, it was perceived that the spontaneous emission of a multi-atomic system can be altered due to the collective properties of the system, in comparison to the single atom case. Two different spontaneous decay rates (superradiant and subradiant) due to inter-atomic dipole interaction have been recognized by Dicke [17]. Tavis and Cummings [18] studied the interaction between the atoms and the single-mode radiation field inside a cavity, as a particular case of the Dicke model.

Many physical systems were suggested for the implementation of QIT, such as cavity QED [19], ion traps [20] and quantum dots [21]. The time evolution of entanglement for a system of two qubits, or two-level atoms, has been widely studied in recent years [22–27]. The investigation on the collective Dicke states has been carried out to measure

^a e-mail: abdallahsalaoui1992@gmail.com

^b e-mail: muzzamalshaukat@gmail.com

^c e-mail: m_daoud@hotmail.com

^d e-mail: ahllaamara@gmail.com

qubit-qubit entanglement [28, 29]. Very recently, a long distance entanglement was generated by Muzzamal *et al.* [30] by using quantum dark-soliton qubit in quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensates [31]. The double or zero excitation bell states (pure or mixed) have been proposed in ref. [32].

More recently, Streltsov and Zurek [33] showed that if a measurement device is in a non-classical state, the measurement results cannot be communicated perfectly by classical means. In this process, the information lost appears even when the measurement apparatus is not entangled with the system of interest, which turns out to be quantum discord. In addition, the investigation of the nature of the correlations in a quantum state has attracted an impressive amount of attention and efforts [34–39]. A first observation in all obtained results shows that discord is directly associated to the non-trivial properties of the states. In particular, Knill and Laflamma showed that quantum computation in which only one qubit is in a non-maximally mixed state, while the rest are in maximally mixed state, can achieve an exponential improvement in efficiency over classical computers for a limited set of tasks [40].

Another interesting family of states is the family of the two-qubit X -states, which are of interest here. Ali *et al.* [10] used this state to make a closed-form solution for quantum discord. However, it turned out that their algorithm is not universal. Later, Lu *et al.* [41] proved that it is not possible to find a universal set of orthogonal projective measurements for the full family of X -states. Some counterexamples have been given in [41, 42]. Instead, Chen *et al.* [42] confirmed the applicability of the algorithm for several special cases of X -states. Recently, it has been shown that different measures of quantum correlations behave differently in their evolution [11].

The present work is organized as follows: In sect. 2, we discuss the main quantifiers of non-classical correlations, with special attention to the concurrence, the trace quantum discord and the local quantum uncertainty. We obtain an explicit formula of local quantum uncertainty and also give the analytical expression of the geometric discord based on the trace norm in a two-qubit X -state. The theoretical model consisting of two two-level atoms is described in sect. 3, where we also present the Markovian master equation and extract the density matrix elements for the Dicke states to evaluate the quantum correlations quantifiers (concurrence, trace quantum discord and the local quantum uncertainty). Finally, we present the conclusion of the present investigation in sect. 4.

2 Quantifiers of quantum correlations

Entanglement is a useful physical resource of QIT and describes the correlations between quantum systems and is much stronger and richer than any classical correlation. The study of entanglement and, in particular, how it can be quantified are a central topic within QIT. Therefore, the quantitative measures of the entanglement in bipartite and multipartite quantum systems are the entanglement of formation [43, 44], concurrence [45, 46], linear entropy [47], entanglement of distillation [48] and negativity [49, 50]. But, a most widely accepted measure for a two-qubit system is the concurrence defined by Wootters [51],

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\vartheta_1} - \sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_3} - \sqrt{\vartheta_4} \right\}, \quad (1)$$

where ϑ_i 's are the eigenvalues (decreasing order) of the Hermitian matrix $R = \rho \tilde{\rho}$, where the spin flip density matrix $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y)$, with ρ^* and σ_y being the complex conjugate of ρ and the Pauli matrix, respectively.

An alternative approach to investigate the quantum correlation for an arbitrary state has been proposed by Zurek *et al.* [52] and by Vedral *et al.* [53]: it is called “quantum discord” and is defined as the difference between two classically equivalent expressions of the mutual information; that is to say the original quantum mutual information $\mathcal{I}(\rho_{AB}) := S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, and the local-measurement-induced quantum mutual information $\mathcal{C}(\rho_{AB})$:

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = \mathcal{I}(\rho_{AB}) - \max_{\pi_B^j} \left(S(\rho_B) - \sum_j p_{B,j} S(\rho_{B,j}) \right), \quad (2)$$

where $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho)$ is the von Neumann entropy, π_B^j is a set of local projective measurements on the subsystem B , and $\rho_{B,j}$ is the conditional state of system B associated with outcome j .

An analytical approach to evaluate the entropic discord is in general a difficult task due to an optimization procedure for the conditional entropy over all local generalized measurements, even for the simplest case of a two-qubit system. These difficulties led Dakic *et al.* to propose a geometric measure of quantum discord in terms of its minimal Hilbert-Schmidt norm (Schatten p -norms) distance from the set of classical states [54]. Despite its easiness of computability [55–58], this measure is not a good measure of quantum correlations for $p > 1$, since it may increase under local reversible operations on the unmeasured subsystem and, also, it is non-contractible under trace-preserving channels [59]. The Bures norm (trace norm with $p = 1$) is the only Schatten p -norm which is contractible [60–62]. Therefore, the trace-distance quantum discord (TQD) for a two-qubit state ρ is defined by

$$D_T(\rho) = \min_{\chi \in \Omega} \|\rho - \chi\|_1, \quad (3)$$

where $\|\rho - \chi\|_1 = \text{Tr} \sqrt{(\rho - \chi)^\dagger (\rho - \chi)}$, and the classical-quantum state $\chi = \sum_k p_k \Pi_{k,1} \otimes \rho_{k,2}$ belongs to the set Ω of classical-quantum states with $\Pi_{k,1}$ and $\rho_{k,2}$ denoting a set of orthogonal projectors for subsystem 1 and being a general density matrix associated with the second qubit, respectively. The minimization over the whole set of classical states for 1-norm two-qubit X -states has been proposed in ref. [63]. Thus, the X -state density matrix is of form

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

The phase factors $\rho_{14}/|\rho_{14}| = e^{i\theta_{14}}$ and $\rho_{23}/|\rho_{23}| = e^{i\theta_{23}}$ of the off-diagonal elements can be removed using the local unitary transformations acting on the two qubits of the system:

$$|0\rangle_k \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2}(\theta_{14} + (-1)^k \theta_{23})\right) |0\rangle_k, \quad k = 1, 2,$$

with the unchanged rank and positive off-diagonal entries of the density matrix ρ , *i.e.*,

$$\rho \rightarrow \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & |\rho_{14}| \\ 0 & \rho_{22} & |\rho_{23}| & 0 \\ 0 & |\rho_{23}| & \rho_{33} & 0 \\ |\rho_{14}| & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

In the Fano-Bloch representation, eq. (5) can be written as

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \tag{6}$$

where the non-vanishing correlation matrix elements $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \text{tr} \rho (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta)$ are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= 2(|\rho_{23}| + |\rho_{14}|), \\ \mathcal{R}_{22} &= 2(|\rho_{23}| - |\rho_{14}|), \\ \mathcal{R}_{33} &= 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33}), \\ \mathcal{R}_{30} &= 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1, \\ \mathcal{R}_{03} &= 2(\rho_{11} + \rho_{33}) - 1. \end{aligned} \tag{7}$$

According to ref. [63], the trace-distance quantum discord is invariant under local transformations and takes the form

$$D_T(\rho) = \sqrt{\frac{\mathcal{R}_{11}^2 \mathcal{R}_{\max}^2 - \mathcal{R}_{22}^2 \mathcal{R}_{\min}^2}{\mathcal{R}_{\max}^2 - \mathcal{R}_{\min}^2 + \mathcal{R}_{11}^2 - \mathcal{R}_{22}^2}}, \tag{8}$$

where $\mathcal{R}_{\min}^2 = \min\{\mathcal{R}_{11}^2, \mathcal{R}_{33}^2\}$ and $\mathcal{R}_{\max}^2 = \max\{\mathcal{R}_{33}^2, \mathcal{R}_{22}^2 + \mathcal{R}_{30}^2\}$. Very recently, a discord-like measure of quantum correlation (local quantum uncertainty (LQU)) formalized by Girolami *et al.* [64] has been defined as the minimum skew information achievable with a single local measurement [65]. It constitutes an alternative tool to evaluate the analytical expressions of quantum correlations encompassed in any bipartite systems. This measurement satisfies all the known criteria for a discord-like quantifier and also deeply related to quantum Fisher information in the context of quantum metrology [66]. The local quantum uncertainty is given by

$$\mathcal{U}(\rho) \equiv \min_{K_A} \mathcal{I}(\rho, K_A \otimes \mathbb{I}_B), \tag{9}$$

where K_A is some local observable on subsystem A , and $\mathcal{I}(\rho, K_A \otimes \mathbb{I}_B)$ is the skew information of the density operator ρ , *i.e.*,

$$\mathcal{I}(\rho, K_1 \otimes \mathbb{I}_2) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, K_1 \otimes \mathbb{I}_2]^2). \tag{10}$$

For the bipartite $2 \otimes d$ systems, Girolami *et al.* have derived a closed form of LQU [64]:

$$\mathcal{U}(\rho) = 1 - \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \tag{11}$$

where ξ_i 's are the eigenvalues of the 3×3 symmetric matrix W , whose matrix elements are defined by

$$\omega_{ij} \equiv \text{Tr}\{\sqrt{\rho}(\sigma_i \otimes \mathbb{I}_B)\sqrt{\rho}(\sigma_j \otimes \mathbb{I}_B)\}, \quad (12)$$

with $i, j = 1, 2, 3$. For the X -type states, the matrix elements of eq. (12) are given by (see appendix A)

$$\begin{aligned} w_{11} &= \left(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}\right) \left(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}\right) + \frac{(T_{11}^2 - T_{22}^2) + (T_{12}^2 - T_{21}^2) + (T_{03}^2 - T_{30}^2)}{4(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})}, \\ w_{22} &= \left(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}\right) \left(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}\right) + \frac{(T_{22}^2 - T_{11}^2) + (T_{21}^2 - T_{12}^2) + (T_{30}^2 - T_{03}^2)}{4(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})}, \\ w_{33} &= \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}\right)^2 \right] + \frac{(T_{30} + T_{03})^2 - (T_{11} - T_{22})^2 - (T_{12} + T_{21})^2}{8(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})^2} \\ &\quad + \frac{(T_{03} - T_{30})^2 - (T_{11} + T_{22})^2 - (T_{12} - T_{21})^2}{8(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})^2}, \\ w_{12} &= w_{21} = \frac{1}{2} \frac{T_{11}T_{21} + T_{22}T_{12}}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_4})(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3})}, \\ w_{13} &= w_{31} = w_{23} = w_{32} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where $T_{\alpha\beta} = \text{tr}\rho(\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta)$, and λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are the eigenvalues of the density matrix ρ of eq. (4). We have to note, here, that when all the elements of the density matrix ρ are real, these correlation matrix elements $T_{\alpha\beta}$ are coincident with the correlation matrix elements of the density matrix $\hat{\rho}$ occurring in eq. (6). To analyze the system in an entangled or separable states, the local quantum uncertainty might be compared to the concurrence or TQD described by eqs. (1) and (8), respectively.

3 Theoretical model and master equation

In this work, the system under consideration consists of two identical atoms with non-overlapping states, located at positions r_i ($i = 1, 2$) having ground state $|g_i\rangle$ and excited state $|e_i\rangle$. The atoms are connected by dipole transition moments $\vec{\mu}$ and are coupled to all modes of the quantized electromagnetic field [67–70]. In the interaction picture, the Hamiltonian of the system after employing rotating wave approximation can be written as

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 S^z + \sum_{\vec{k}s} \omega_k \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} - i\hbar \sum_{\vec{k}s} [\vec{\mu} \cdot \vec{g}_{\vec{k}s} S^+ \hat{a}_{\vec{k}s} - \text{H.c.}], \quad (14)$$

where $S_i^+ = |e_i\rangle \langle g_i|$ and $S_i^- = |g_i\rangle \langle e_i|$ represents the dipole raising and lowering operators, $S_i^z = |e_i\rangle \langle e_i| - |g_i\rangle \langle g_i|$ is the energy operator of the i -th atom, $\hat{a}_{\vec{k}s}$ and $\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$ are the annihilation and creation operators with wave vector \vec{k} , frequency ω_k and the index of polarization s , respectively. The term $\vec{g}_{\vec{k}s}(\vec{r}_i)$ is the coupling constant given by

$$\vec{g}_{\vec{k}s}(\vec{r}_i) = \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 \hbar V}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i}, \quad (15)$$

where $\vec{e}_{\vec{k}s}$ denotes the electric field polarization vector, V is the quantization volume and \vec{r}_i is the position of the i -th atom.

The master equation describing the evolution of the atomic density operator in the Born-Markov approximations has been derived by Lehmburg [71, 72]. This derivation is a generalisation of the Lindblad master equation to the case of non-identical atoms (in this case, we have different transition frequencies ω_i) interacting with a squeezed vacuum field [73, 74], *i.e.*,

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial t} = -i\omega_0 \sum_{i=1}^2 [S_i^z, \rho] - i\Omega_{12} \sum_{i \neq j} [S_i^+ S_j^-, \rho] - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij} (\rho S_i^+ S_j^- + S_i^+ S_j^- \rho - 2S_j^- \rho S_i^+), \quad (16)$$

where $\Gamma_{ij}(= \Gamma)$ is the damping by spontaneous emission for $i = j$, equal to the Einstein A coefficient for spontaneous emission which is induced by the direct coupling of the atom with the radiation field, while $\Gamma_{ij}(= \gamma\Gamma)$ for $i \neq j$ depicts the collective damping resulting from mutual exchange of photons. The term $\Omega_{ij}(= \Omega)$ represents the interaction between two two-level atoms, defined by

$$\Gamma_{ij} = \frac{3}{2} \Gamma \left[\left[1 - (\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \frac{\sin(\xi_{ij})}{\xi_{ij}} + \left[1 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \left[\frac{\cos(\xi_{ij})}{\xi_{ij}^2} - \frac{\sin(\xi_{ij})}{\xi_{ij}^3} \right] \right], \quad (17)$$

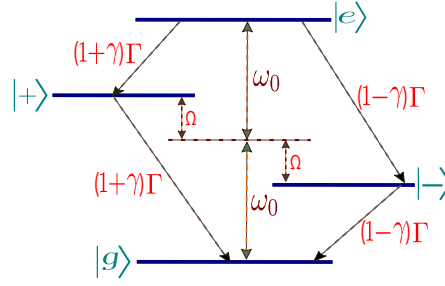


Fig. 1. Energy level diagram for the collective states of two identical atoms, showing the frequency shifts $\pm\hbar\Omega_{12}$ and decay constants $(1 \pm \gamma)\Gamma$.

and

$$\Omega_{ij} = \frac{3}{4}\Gamma \left[- \left[1 - (\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \frac{\cos(\xi_{ij})}{\xi_{ij}} + \left[1 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{ij})^2 \right] \left[\frac{\sin(\xi_{ij})}{\xi_{ij}^2} + \frac{\cos(\xi_{ij})}{\xi_{ij}^3} \right] \right], \quad (18)$$

where $\xi_{ij} = k_0 r_{ij} = 2\pi r_{ij}/\lambda_0$, with λ_0 is the resonant wavelength, and $r_{ij} = |r_j - r_i|$ is the distance between the atoms.

The main concern of the present investigation is to study the evolution of the concurrence, the trace distance quantum discord and the local quantum uncertainty using the density-matrix formalism. To solve eq. (16), we use the collective Dicke state representation, introduced by Dicke [17] where the two-atom system behaves as a single four-level system with states

$$\begin{aligned} |g\rangle &= |g_1, g_2\rangle, \\ |\pm\rangle &= (|e_1, g_2\rangle \pm |g_1, e_2\rangle) / \sqrt{2}, \\ |e\rangle &= |e_1, e_2\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

where the energies corresponding to the respective states are $E_g = -\hbar\omega_0$, $E_+ = \hbar\Omega_{12}$, $E_- = -\hbar\Omega_{12}$ and $E_e = \hbar\omega_0$. Here, the states where $|\pm\rangle$ describes the maximally entangled symmetric and antisymmetric states, as schematically represented in fig. 1. With the use of Dicke or collective bases for arbitrary initial conditions, the elements of the density matrix ρ can be determined by using master equation,

$$\begin{aligned} \rho_{ee}(\tau) &= e^{-2\tau} \rho_{ee}(0), \\ \rho_{++}(\tau) &= e^{-(1+\gamma)\tau} \rho_{++}(0) + \frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)} \left(e^{-(1+\gamma)\tau} - e^{-2\tau} \right) \rho_{ee}(0), \\ \rho_{--}(\tau) &= e^{-(1-\gamma)\tau} \rho_{--}(0) + \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma)} \left(e^{-(1-\gamma)\tau} - e^{-2\tau} \right) \rho_{ee}(0), \\ \rho_{+-}(\tau) &= e^{-(1-2i\eta)\tau} \rho_{+-}(0), \\ \rho_{eg}(\tau) &= e^{-\tau} \rho_{eg}(0), \end{aligned} \quad (20)$$

subject to the probability conservation $\rho_{gg} = 1 - \rho_{ee} - \rho_{++} - \rho_{--}$ with $\rho_{jk} = \rho_{kj}^*$. Here, $\tau = \Gamma t$, $\gamma = \Gamma_{12}/\Gamma$, and $\eta = \Omega_{12}/\Gamma$. To measure the quantum correlations, we need the solutions for the density matrix elements in the standard product basis or into the Bell basis, for which we defined $\{|1\rangle = |e_1, e_2\rangle, |2\rangle = |e_1, g_2\rangle, |3\rangle = |g_1, e_2\rangle, |4\rangle = |g_1, g_2\rangle\}$ with

$$\begin{aligned} \rho_{11}(\tau) &= \rho_{ee}(\tau), & \rho_{14}(\tau) &= \rho_{eg}(\tau), \\ \rho_{22}(\tau) &= (\rho_{++}(\tau) + \rho_{+-}(\tau) + \rho_{-+}(\tau) + \rho_{--}(\tau))/2, \\ \rho_{33}(\tau) &= (\rho_{++}(\tau) - \rho_{+-}(\tau) - \rho_{-+}(\tau) + \rho_{--}(\tau))/2, \\ \rho_{23}(\tau) &= (\rho_{++}(\tau) + \rho_{+-}(\tau) - \rho_{-+}(\tau) - \rho_{--}(\tau))/2. \end{aligned} \quad (21)$$

Hereafter, we discuss the dependence of quantum correlations on different initial states.

3.1 Zero or double excitation

Here, we discuss the decay of quantum correlation between two atoms, depending on the initially maximally entangled state of zero or double excitation,

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, e_2\rangle + |g_1, g_2\rangle). \quad (22)$$

Therefore, the density matrix becomes

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} a(\tau) & 0 & 0 & d(\tau) \\ 0 & b(\tau) & e(\tau) & 0 \\ 0 & e(\tau) & b(\tau) & 0 \\ d(\tau) & 0 & 0 & c(\tau) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

with

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{1}{2}e^{-2\tau}, & b(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{2(1-\gamma^2)}\delta, \\ c(\tau) &= 1 - \frac{e^{-2\tau}}{2} - \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}\delta, & d(\tau) &= \frac{1}{2}e^{-\tau}, \\ e(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{2(1-\gamma^2)}(2\gamma Z - (1+\gamma^2)\sinh(\gamma\tau)), \end{aligned} \quad (24)$$

where $Z = \cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau}$ and $\delta = (1+\gamma^2)Z - 2\gamma\sinh(\gamma\tau)$. We first consider the evaluation of the concurrence given by eq. (1). Depending on the largest eigenvalue, it is easy to verify that the concurrence is obtained as

$$C(\tau) = \begin{cases} \max\{0, C_1(\tau)\} & \text{If } \sqrt{\vartheta_1} = |d(\tau) + \sqrt{a(\tau)c(\tau)}| \\ \max\{0, C_2(\tau)\} & \text{If } \sqrt{\vartheta_1} = |b(\tau) + e(\tau)|, \\ \max\{0, C_3(\tau)\} & \text{If } \sqrt{\vartheta_1} = |b(\tau) - e(\tau)|, \end{cases} \quad (25)$$

with

$$\begin{aligned} C_1(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}((1-\gamma^2) - \delta), \\ C_2(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}(2\gamma Z - (1+\gamma^2)\sinh(\gamma\tau)) - \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1-\gamma^2}}[2(1-\gamma^2) - e^{-\tau}(2\delta + (1-\gamma^2)e^{-\tau})]^{\frac{1}{2}}, \\ C_3(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}((1+\gamma^2)\sinh(\gamma\tau) - 2\gamma Z) - \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1-\gamma^2}}[2(1-\gamma^2) - e^{-\tau}(2\delta + (1-\gamma^2)e^{-\tau})]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Subsequently, we determined the analytic evolution of the quantum discord based on the trace norm and the local quantum uncertainty. The non-vanishing matrix correlations of eq. (23), in the Fano-Bloch representation, are given by

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}((1-\gamma^2) + 2\gamma Z - (1+\gamma^2)\sinh(\gamma\tau)), \\ T_{22} &= \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}(2\gamma Z - (1+\gamma^2)\sinh(\gamma\tau) - (1-\gamma^2)), \\ T_{33} &= 1 - \frac{2e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}\delta, & T_{30} &= e^{-2\tau} - 1 + \frac{e^{-\tau}}{(1-\gamma^2)}\delta, \end{aligned} \quad (27)$$

where $T_{03} = T_{30}$. It is simple to check that the difference $T_{22}^2 + T_{30}^2 - T_{33}^2$ remains always positive and $T_{\max} = T_{22}^2 + T_{30}^2$, irrespective of the parameters (γ and τ) values. Using eq. (8), one has to treat separately the two cases. For $T_{33}^2 \geq T_{11}^2$, the trace distance discord can be simply written as

$$D_T(\tau) = |T_{11}|. \quad (28)$$

For $T_{33}^2 \leq T_{11}^2$, the trace-distance discord is given by

$$D_T(\tau) = \sqrt{\frac{T_{22}^2(T_{11}^2 - T_{33}^2) + T_{11}^2 T_{30}^2}{T_{22}^2 - T_{33}^2 + T_{11}^2}}. \quad (29)$$

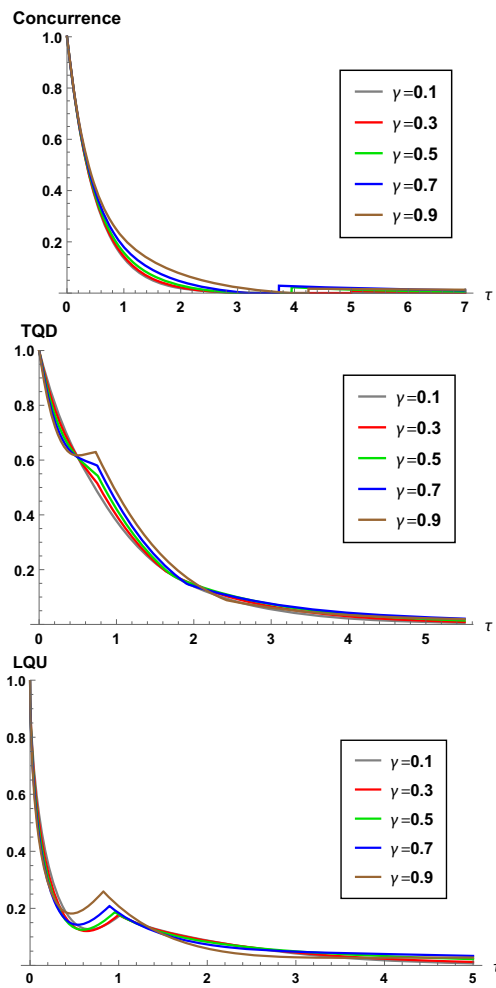


Fig. 2. Behavior of concurrence, trace quantum discord and local quantum uncertainty for two atoms maximally initially entangled *versus* the parameter τ for different values of γ .

To determine the analytic expression of the local quantum uncertainty from eq. (9), it is necessary to calculate the elements given by eq. (12). After some simplifications, we obtain

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= \sqrt{(\beta + X)(\beta + Y)} + \frac{e^{-2\tau} (2\gamma Z - (1 + \gamma^2) \sinh(\gamma\tau))}{(1 - \gamma^2)\sqrt{(\beta + X)(\beta + Y)}}, \\
 w_{22} &= \sqrt{(\beta + X)(\beta + Y)} - \frac{e^{-2\tau} (2\gamma Z - (1 + \gamma^2) \sinh(\gamma\tau))}{(1 - \gamma^2)\sqrt{(\beta + X)(\beta + Y)}}, \\
 w_{33} &= \frac{1}{2}(X + Y) + \frac{(e^{-2\tau} - 1 + \beta)^2 - e^{-2\tau}}{2(\beta + X)} - \frac{e^{-2\tau} (2\gamma Z - (1 + \gamma^2) \sinh(\gamma\tau))^2}{2(1 - \gamma^2)^2 (\beta + Y)}, \tag{30}
 \end{aligned}$$

with $X = 1 + e^{-\tau} \sqrt{1 - e^{-2\tau} - 2\beta}$, $Y = e^{-\tau} \sqrt{1 + e^{-2\tau} - 2e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau)}$ and $\beta = e^{-\tau} \delta / (1 - \gamma^2)$. The dynamical evolution of quantum correlations when both the atoms are, initially, in an entangled state of zero or double excitation, is depicted in fig. 2. It is observed that the different measures of the quantum correlations, decays differently, where the concurrence, initially, goes to zero (sudden death) and then revives over a long time with the dark period $\Delta\tau$, which depends on each spontaneous emission parameter γ ; but the other measures (TQD and LQU) follow the exponential decay of the correlation. Despite the fact that concurrence is a good measure of correlation for the two-level system, it cannot capture all the non-classical correlations in the system with which other measures exponential decay, making this system more worthwhile.

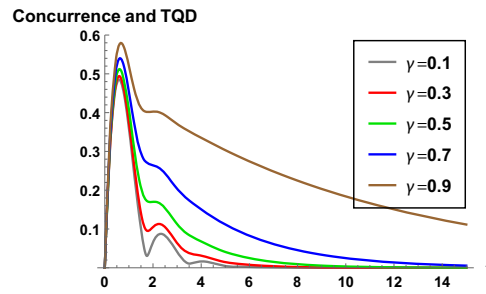


Fig. 3. Evolutions of concurrence and geometric quantum discord for single-atom initial excitation *versus* the parameter τ for different values of γ with $\eta = 0.9$.

3.2 Single-atom excitation

In this subsection, we describe the spontaneous generation of correlation between two atoms by assuming, initially, the separable state of singly excited state, *i.e.*, $|e_1, g_2\rangle$. Thus, the density matrix elements are given by

$$\begin{aligned}\rho_{22}(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{2} (\cosh(\gamma\tau) + \cos(2\eta\tau)), \\ \rho_{33}(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{2} (\cosh(\gamma\tau) - \cos(2\eta\tau)), \\ \rho_{23}(\tau) &= \frac{e^{-\tau}}{2} (i \sin(2\eta\tau) - \sinh(\gamma\tau)), \\ \rho_{44}(\tau) &= 1 - e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau).\end{aligned}\quad (31)$$

The non-vanishing correlation matrix elements are given by

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{11} = \mathcal{R}_{22} &= e^{-\tau} \sqrt{\sin(2\eta\tau)^2 + \sinh(\gamma\tau)^2}, \\ T_{11} = T_{22} &= -e^{-\tau} \sinh(\gamma\tau), \\ \mathcal{R}_{33} = T_{33} &= 1 - 2e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau), \\ \mathcal{R}_{30} = T_{30} &= e^{-\tau} (\cosh(\gamma\tau) + \cos(2\eta\tau)) - 1, \\ \mathcal{R}_{03} = T_{03} &= e^{-\tau} (\cosh(\gamma\tau) - \cos(2\eta\tau)) - 1.\end{aligned}\quad (32)$$

Based on the above formalism, the analytical expression to determine the concurrence and quantum discord is given by

$$C(\tau) = D_T(\tau) = e^{-\tau} \sqrt{\sinh(\gamma\tau)^2 + \sin(2\eta\tau)^2}, \quad (33)$$

whereas the local quantum uncertainty is described by eq. (12) with

$$\begin{aligned}w_{11} &= \frac{e^{-\tau} (\cosh(\gamma\tau) + \cos(2\eta\tau)) (1 - e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau))}{\sqrt{e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau) (1 - e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau))}}, \\ w_{22} &= \frac{e^{-\tau} (\cosh(\gamma\tau) - \cos(2\eta\tau)) (1 - e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau))}{\sqrt{e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau) (1 - e^{-\tau} \cosh(\gamma\tau))}}, \\ w_{33} &= \frac{2 \cosh(\gamma\tau) - e^{-\tau} (1 + 2 \sinh^2(\gamma\tau) - \cos(4\eta\tau))}{2 \cosh(\gamma\tau)}.\end{aligned}\quad (34)$$

Figures 3 and 4 display the spontaneous generation of quantum correlation by assuming, initially, the superposition of maximally entangled symmetric and anti-symmetric state. Contrary to the latter case of initial entanglement, all the correlations depend on both the collective damping and the dipole-dipole interaction term with which, firstly, shows a fast increase, followed by a very slow oscillatory decrease. Moreover, one can clearly observe the oscillatory behavior of correlations, due to the presence of dipole-dipole interaction Ω_{12} .

This dynamics can be easily understood from the time evolution of the two equally populated intermediate states, *i.e.* $\rho_{ss}(0) = \rho_{aa}(0) = 1/2$ (see fig. 5). It is shown that the state $|+\rangle$ decays with an enhanced (superradiant) rate while the state $|-\rangle$ decays with the reduced (subradiant) rate. The concurrence shows an appreciably long lifetime due to the asymmetry between two cascades, eventually reaching the value of the population of anti-symmetric state, *i.e.* $C(t) \simeq \rho_{aa}(t)$.

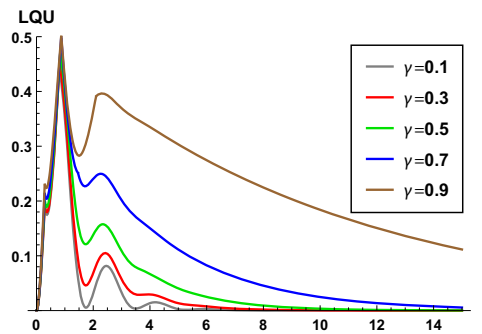


Fig. 4. Evolution of local quantum uncertainty for single-atom initial excitation *versus* the parameter τ for different values of γ with $\eta = 0.9$.

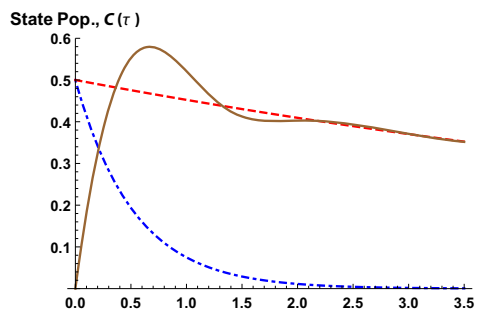


Fig. 5. Population of symmetric state $|+\rangle$ (dot-dashed curve), antisymmetric state $|-\rangle$ (dashed curve) and time evolution of concurrence $C(\tau)$ (solid curve) at $\gamma = 0.9$.

3.3 Maximally entangled symmetric state

As a third example, let us consider the maximally entangled symmetric as the initial atomic state, *i.e.*,

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2\rangle + |g_1, e_2\rangle). \tag{35}$$

In this case, the evolved density matrix takes the form

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\tau) & \alpha(\tau) & 0 \\ 0 & \alpha(\tau) & \alpha(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\tau) \end{pmatrix}, \tag{36}$$

with the obtained concurrence and quantum discord

$$C(\tau) = D_T(\tau) = e^{-(1+\gamma)\tau}. \tag{37}$$

On the other hand, to obtain the explicit expression of LQU, we compute first the elements given by eq. (12),

$$w_{11} = w_{22} = \sqrt{e^{-(1+\gamma)\tau} w_{33}}, \tag{38}$$

where $w_{33} = 1 - e^{-(1+\gamma)\tau}$ and to get it, one has to treat the cases, separately, *i.e.*, $w_{11} \geq w_{33}$ or $w_{33} \geq w_{11}$ with which

$$\mathcal{U}(\rho(\tau)) = 1 - \max\{w_{11}, w_{33}\}. \tag{39}$$

The decay of non-classical correlations for the maximally entangled symmetric state is shown in figs. 6 and 7. It is observed that the different measures (concurrence, TQD and LQU) of the correlations have similar evolution behavior and decays rapidly with the enhancement of the spontaneous emission parameter γ .

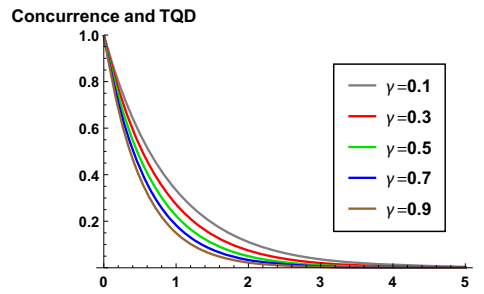


Fig. 6. Evolutions of concurrence and geometric quantum discord versus the parameter τ for different values of γ .

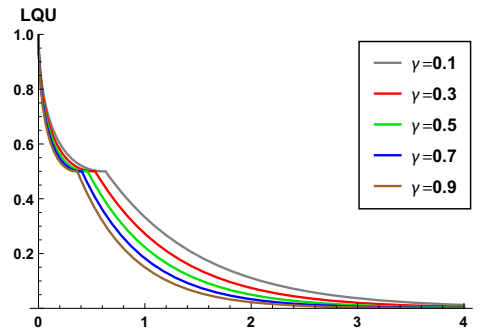


Fig. 7. Evolution of local quantum uncertainty versus the parameter τ for different values of γ .

3.4 The case of two very close atoms ($r_{12} \rightarrow 0$)

Here, we will study the behaviour of the concurrence, the trace distance quantum discord and the local quantum uncertainty in the situation when the distance between the two atoms tends to zero, *i.e.*, $r_{12} \rightarrow 0$. Therefore, the collective damping $\Gamma_{12} \rightarrow \Gamma$ and $\Omega_{12} \rightarrow [3\Gamma/4\xi_{12}^3][1 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_{12})^2]$. In this limit, we shall discuss three cases. We start with the first case with two atoms in the maximally entangled Bell state for which the concurrence is given by

$$C(\tau) = \max \{0, C_1(\tau), C_2(\tau)\}, \tag{40}$$

where

$$\begin{aligned} C_1(\tau) &= (1 - \tau)e^{-2\tau}, \\ C_2(\tau) &= e^{-\tau} \left(\tau e^{-\tau} - \sqrt{2 - (1 + 2\tau)e^{-2\tau}} \right). \end{aligned} \tag{41}$$

Likewise, the trace-distance quantum discord and the explicit expression of matrix W are given by

$$D_T(\tau) = e^{-\tau} (1 + \tau e^{-\tau}), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{\tau e^{-\tau} A + \tau e^{-2\tau} (1 + \sqrt{B})}{\sqrt{\tau (1 + \tau e^{-2\tau}) + \tau e^{-\tau} \sqrt{B}}}, \\ w_{22} &= \frac{\tau e^{-\tau} A + \tau e^{-2\tau} (\sqrt{B} - 1)}{\sqrt{\tau (1 + \tau e^{-2\tau}) + \tau e^{-\tau} \sqrt{B}}}, \\ w_{33} &= \frac{1}{2} \left(A + e^{-\tau} \sqrt{B} \right) + \frac{((1 + \tau)e^{-2\tau} - 1)^2 - e^{-2\tau}}{2(1 - \tau e^{-2\tau} + e^{-\tau} \sqrt{B})}, \end{aligned} \tag{43}$$

where $A = (1 - \tau e^{-2\tau})$ and $B = 1 - (1 + 2\tau)e^{-2\tau}$. The second case corresponds to the separable state of singly excited state for which the concurrence and TQD takes the form

$$C(\tau) = D_T(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{(e^{-2\tau} - 1)^2 + e^{-2\tau} \sin(2\eta\tau)^2}. \tag{44}$$

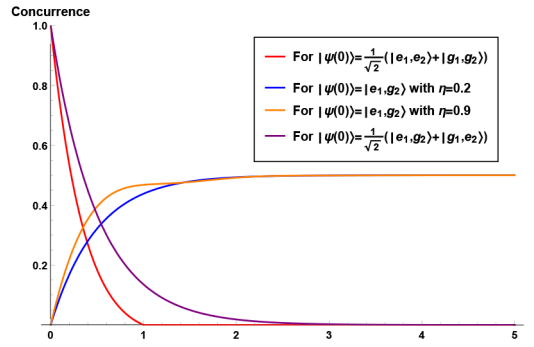


Fig. 8. Evolutions of concurrence for the different cases versus the parameter τ with $\gamma \rightarrow 1$.

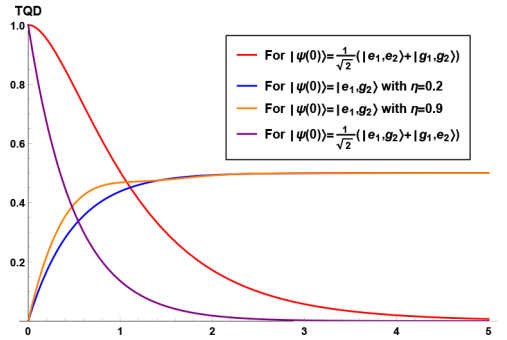


Fig. 9. Evolutions of the trace quantum discord for the different cases versus the parameter τ with $\gamma \rightarrow 1$.

For local quantum uncertainty, the elements of the matrix W are reduced to

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= \frac{(1 - e^{-2\tau})(e^{-\tau} \cos(2\eta\tau) - 2e^{-2\tau} + 2)}{4\sqrt{1 - e^{-4\tau}}}, \\
 w_{22} &= \frac{(e^{-2\tau} - 1)(e^{-\tau} \cos(2\eta\tau) + 2e^{-2\tau} - 2)}{4\sqrt{1 - e^{-4\tau}}}, \\
 w_{33} &= \frac{e^{-2\tau}(2 \cos(4\eta\tau) - e^{-2\tau} + 2) + 1}{2(e^{-2\tau} + 1)}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Similarly, for the third case, in which the initial atomic state is the maximally entangled symmetric state, the concurrence and TQD takes the form

$$C(\tau) = D_T(\tau) = e^{-2\tau}, \tag{46}$$

and the elements of eq. (12) are reduced to

$$w_{11} = w_{22} = e^{-\tau} \sqrt{w_{33}}, \tag{47}$$

where $w_{33} = 1 - e^{-2\tau}$. To get more insight on the effect of dipole-dipole interaction and collective damping, let assume that the two atoms are approaching one another, *i.e.*, $r_{12} \rightarrow 0$. We investigate the evolution of quantum correlations in figs. 8–10. Indeed, we observe a sudden change in quantum correlations that depend on the inter-atomic distance and initial excitations. Our result shows that the quantum correlations can be maintained over a longer time but for small distances between the two atoms.

4 Conclusion

To conclude, we have investigated the dynamics of non-classical correlations in two two-level atoms interacting with a quantized electromagnetic field (assumed to be in the vacuum state). The peculiar behavior of quantum correlations are examined for different initial Dicke states. It depends on the collective damping and qubit-qubit interaction. When the two atoms are initially in an entangled state of double or zero excitation, the evolution of different measures behave differently and decays exponentially. Meanwhile, the entanglement is generated, spontaneously with oscillatory

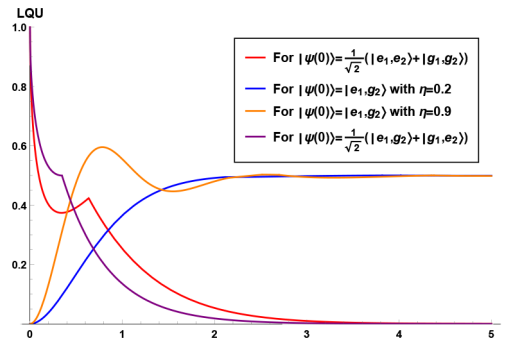


Fig. 10. Evolutions of the local quantum uncertainty for the different cases *versus* the parameter τ with $\gamma \rightarrow 1$.

behavior, by assuming initially the superposition of intermediate states for which all the correlations display their dependence on both collective damping and qubit-qubit interaction. We also have discussed the evolution of these correlations for the atoms placed very close, *i.e.*, $r_{12} \rightarrow 0$. In this case, all measures shows the long time non-classical correlations which behave identically. Therefore, the present investigation suggests that local quantum uncertainty and trace quantum discord are good measures of the quantum correlation.

MIS acknowledges the support from the DP-PMI programme and Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), namely through the scholarship number SFRH/PD/BD/113650/2015.

Appendix A. LQU for states of X type

In this appendix, we present a simple method to calculate the local quantum uncertainty for X-type states. First, the eigenvalues corresponding to eq. (4) are

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 - 4d_1}, & \lambda_2 &= \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}\sqrt{t_2^2 - 4d_2}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}\sqrt{t_2^2 - 4d_2}, & \lambda_4 &= \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 - 4d_1}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

where

$$\begin{cases} t_1 = \rho_{11} + \rho_{44} \\ d_1 = \rho_{11}\rho_{44} - \rho_{14}\rho_{41} \\ t_2 = \rho_{22} + \rho_{33} \\ d_2 = \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{32}\rho_{23} \end{cases} . \tag{A.2}$$

The square root of eq. (4), in terms of the computational basis, can be written as follows:

$$\sqrt{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{11} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{14}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\ 0 & \frac{\rho_{22} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & \frac{\rho_{23}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{32}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & \frac{\rho_{33} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ \frac{\rho_{41}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{44} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

with the eigenvalues

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{t_1 - 2\sqrt{d_1}}, \\
 \sqrt{\lambda_2} &= \frac{1}{2} \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} + \frac{1}{2} \sqrt{t_2 - 2\sqrt{d_2}}, \\
 \sqrt{\lambda_3} &= \frac{1}{2} \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} - \frac{1}{2} \sqrt{t_2 - 2\sqrt{d_2}}, \\
 \sqrt{\lambda_4} &= \frac{1}{2} \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{t_1 - 2\sqrt{d_1}}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

The density matrix operator $\sqrt{\rho}$ of eq. (A.3) can be described in Fano-Bloch representation as

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{\chi, \delta} R_{\chi\delta} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta}, \tag{A.5}$$

where the parameters of the correlation matrix $R_{\chi\delta} = \text{tr}(\sqrt{\rho} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta})$ with $\chi, \delta = 0, 1, 2, 3$ are

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} \\
 R_{03} &= \frac{1}{2} \frac{T_{30} + T_{03}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{30} - T_{03}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \\
 R_{30} &= \frac{1}{2} \frac{T_{30} + T_{03}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{30} - T_{03}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \\
 R_{11} &= \frac{1}{2} \frac{T_{11} + T_{22}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\
 R_{12} &= \frac{1}{2} \frac{T_{12} - T_{21}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{1}{2} \frac{T_{12} + T_{21}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\
 R_{21} &= \frac{1}{2} \frac{T_{12} + T_{21}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{12} - T_{21}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} \\
 R_{22} &= \frac{1}{2} \frac{T_{11} + T_{22}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} - \frac{1}{2} \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\
 R_{33} &= \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Reposting the expression of $\sqrt{\rho}$ (A.3) in eq. (12), one gets, after some algebra, the matrix elements w_{ij} given by eq. (13).

References

1. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
2. J.S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
3. S. Hill, W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
4. A.K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
5. C.H. Bennett, S.J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
6. C.H. Bennett, G. Brassard, C. Cepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
7. H. Olliver, W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
8. K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
9. S. Luo, Phys. Rev. A **77**, 042303 (2008).
10. M. Ali, A.R.P. Rau, G. Alber, Phys. Rev. A **81**, 042105 (2010).
11. R. Tana, Phys. Scr. T **153**, 014059 (2013).
12. L.C. Cleri, J. Maziero, R.M. Serra, Int. J. Quantum Inf. **09**, 1837 (2011).
13. T.K. Chuan, J. Maillard, K. Modi, T. Paterek, M. Paternostro, M. Piani, Phys. Rev. Lett. **109**, 070501 (2012).
14. A. Streltsov, H. Kampermann, D. Bru, Phys. Rev. Lett. **108**, 250501 (2012).
15. V. Madhok, A. Datta, Phys. Rev. A **83**, 032323 (2011).
16. D. Cavalcanti, L. Aolita, S. Boixo, K. Modi, M. Piani, A. Winter, Phys. Rev. A **83**, 0323248 (2011).

17. R.H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
18. M. Tavis, F.W. Cummings, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
19. Mikhail Lukin, Michael Fleischhauer, Atac Imamolu, *Quantum Information Processing Based on Cavity QED with Mesoscopic Systems* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2001) p. 193.
20. A.M. Steane, Appl. Phys. B **64**, 623 (1997).
21. Peter Michler, *Quantum Dots for Quantum Information Technologies* (Springer, International Publishing, 2017).
22. D. Braun, Phys. Rev. Lett. **89**, 277901 (2002).
23. T. Yu, J.H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).
24. Z. Ficek, R. Tanas, Phys. Rev. A **74**, 024304 (2006).
25. M.I. Shaukat, A. Shaheen, A.H. Toor, J. Mod. Opt. **60**, 21 (2013).
26. Z. Ficek, R. Tanas, Phys. Rev. A **77**, 054301 (2008).
27. F. Verstraete, M.M. Wolf, I. Cirac, Nat. Phys. **5**, 633 (2009).
28. M.I. Shaukat, E.V. Castro, H. Terças, arXiv:1801.08894 (2018).
29. Y. He, M. Jiang, Opt. Commun. **382**, 580 (2017).
30. M.I. Shaukat, E.V. Castro, H. Terças, arXiv:1801.08169 (2018).
31. M.I. Shaukat, E.V. Castro, H. Terças, Phys. Rev. A **95**, 053618 (2017).
32. K. Almutairi, R. Tana, Z. Ficek, Phys. Rev. A **84**, 013831 (2011).
33. A. Streltsov, W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **111**, 040401 (2013).
34. B. Wang, Z.Y. Xu, Z.Q. Chen, M. Feng, Phys. Rev. A **81**, 014101 (2010).
35. J. Maziero, L.C. Cleri, R.M. Serra, V. Vedral, Phys. Rev. A **80**, 044102 (2009).
36. B. Bellomo, G.L. Giorgi, F. Galve, R. Lo Franco, G. Compagno, R. Zambrini, Phys. Rev. A **85**, 032104 (2012).
37. J.P.G. Pinto, G. Karpat, F.F. Fanchini, Phys. Rev. A **88**, 034304 (2013).
38. B. Aaronson, R. Lo Franco, G. Adesso, Phys. Rev. A **88**, 012120 (2013).
39. M.-L. Hu, D.-P. Tian, Ann. Phys. (N.Y.) **343**, 132 (2014).
40. E. Knill, R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **81**, 5672 (1998).
41. X.M. Lu, J. Ma, Z. Xi, X. Wang, Phys. Rev. A **83**, 012327 (2011).
42. Q. Chen, C. Zhang, S. Yu, X.X. Yi, C.H. Oh, Phys. Rev. A **84**, 042313 (2011).
43. C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).
44. S. Popescu, D. Rohrlich, Phys. Rev. A **56**, R3319 (1997).
45. W.K. Wootters, Quantum Inf. Comput. **1**, 27 (2001).
46. T. Yu, J.H. Eberly, Science **323**, 598 (2009).
47. S. Bose, V. Vedral, Phys. Rev. A **61**, 040101 (2000).
48. C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. Smolin, W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996).
49. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
50. G. Vidal, R.F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
51. W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
52. H. Ollivier, W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
53. L. Henderson, V. Vedral, J. Phys. A **34**, 6899 (2001).
54. B. Dakić, V. Vedral, Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **105**, 190502 (2010).
55. B. Bellomo, R. Lo Franco, G. Compagno, Phys. Rev. A **86**, 012312 (2012).
56. B. Bellomo, G.L. Giorgi, F. Galve, R. Lo Franco, G. Compagno, R. Zambrini, Phys. Rev. A **85**, 032104 (2012).
57. M. Daoud, R. Ahl Laamara, Phys. Lett. A **376**, 2361 (2012).
58. M. Daoud, R. Ahl Laamara, Int. J. Quantum Inf. **10**, 1250060 (2012).
59. M. Piani, Phys. Rev. A **86**, 034101 (2012).
60. F.M. Paula, T.R. de Oliveira, M.S. Sarandy, Phys. Rev. A **87**, 064101 (2013).
61. F.M. Paula, J.D. Montealegre, A. Saguia, T.R. de Oliveira, M.S. Sarandy, EPL **103**, 50008 (2013).
62. T.R. Bromley, M. Cianciaruso, R. Lo Franco, G. Adesso, J. Phys. A **47**, 405302 (2014).
63. F. Ciccarello, T. Tufarelli, V. Giovannetti, New J. Phys. **16**, 013038 (2014).
64. D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013).
65. E.P. Wigner, M.M. Yanasse, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **49**, 910 (1963).
66. S. Luo, Phys. Rev. Lett. **91**, 180403 (2003).
67. G. Agarwal, *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to Other Approaches*, in *Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. **70** (Springer-Verlag, Berlin, 1974).
68. A. Slaoui, M. Daoud, R.A. Laamara, Quantum Inf. Process. **17**, 178 (2018).
69. Z. Ficek, R. Tanaś, S. Kielich, Physica A **146**, 452 (1987).
70. A. Auyuanet, L. Davidovich, Phys. Rev. A **82**, 032112 (2010).
71. R.H. Lehmberg, Phys. Rev. A **2**, 883 (1970).
72. R.H. Lehmberg, Phys. Rev. A **2**, 889 (1970).
73. A.A. Belavkin, B.Y. Zeldovich, A.M. Perelomov, V.S. Popov, Sov. Phys. JETP **56**, 264 (1969).
74. G.S. Agarwal, Phys. Rev. A **2**, 2038 (1970).

5.3 Contribution 3 : The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three-qubit X states under decoherence channels

Quantum Information Processing, 18 (2019) 250.

5.3.1 Résumé :

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'incertitude quantique locale a des applications intéressantes et significatives dans le traitement de l'information quantique. Jusqu'à présent, cette mesure des corrélations quantiques de type discordance n'a été calculée explicitement que pour un ensemble assez limité d'états quantiques à deux qubits, et les expressions pour des états quantiques plus généraux ne sont pas connues. Dans cette contribution, nous avons traité le problème de calcul de l'incertitude quantique locale pour les états X tripartites, qui ont été d'intérêt dans divers contextes du domaine. A titre d'illustration, nous avons considéré les états à trois qubits de type GHZ et de type Bell. Nous avons calculé la discordance quantique entropique (2.1), la négativité tripartite (1.103) et l'incertitude quantique locale (2.136) de ces états et nous avons comparé le comportement de chaque mesure. En outre, nous avons discuté la propriété de monogamie de l'incertitude quantique locale dans ces états.

Suite à ce résultat, nous avons traité les effets de la décohérence sur les corrélations quantiques générées par les canaux d'amortissement de phase, de dépolarisation et d'inversion de phase. Nous avons montré que la décohérence influence fortement les corrélations de ces états initiaux pour les canaux de déphasage et de dépolarisation. De plus, pour les canaux d'inversion de phase, nous remarquons une résistance de l'incertitude quantique locale, ce qui permet une comparaison directe de la fidélité de ces corrélations dans les systèmes quantiques ouverts.

5.3.2 Contenu de la publication 3 :



The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three-qubit X states under decoherence channels

A. Slaoui¹ · M. Daoud^{2,3} · R. Ahl Laamara^{1,4}

Received: 14 January 2019 / Accepted: 24 June 2019
© Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2019

Abstract

We derive the analytical expression of local quantum uncertainty for three-qubit X states. We give also the expressions of quantum discord and the negativity. A comparison of these three quantum correlations quantifiers is discussed in the special cases of mixed GHZ states and Bell-type states. We find that local quantum uncertainty gives the same amount of non-classical correlations as are measured by entropic quantum discord and goes beyond negativity. We also discuss the dynamics of non-classical correlations under the effect of phase damping, depolarizing and phase reversal channels. We find the local quantum uncertainty shows more robustness and exhibits, under phase reversal effect, revival and frozen phenomena. The monogamy property of local quantum uncertainty is also discussed. It is shown that it is monogamous for three-qubit states.

Keywords Local quantum uncertainty · Non-classical correlations and discord · Tripartite negativity · Decoherence · The quantum channels

✉ A. Slaoui
abdallahsalaoui1992@gmail.com

M. Daoud
m_daoud@hotmail.com

R. Ahl Laamara
ahllaamara@gmail.com

¹ LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco

² Department of Physics, Faculty of Sciences, University Ibn Tofail, Kenitra, Morocco

³ Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Miramare, Trieste, Italy

⁴ Centre of Physics and Mathematics, CPM, CNESTEN, Rabat, Morocco

1 Introduction

The characterization and quantification of quantum correlations in composite quantum systems is one of the most challenging topics in quantum information theory [1,2]. The interest in this field is motivated by the fact that entanglement can be used as useful resource for fundamental study in quantum mechanics and for applications in quantum teleportation [3,4], dense coding [5,6] and quantum key distribution [7,8]. The entanglement expresses the non local character of quantum mechanics theory [9,10]. To quantify the amount of entanglement, various measures have been proposed. The most familiar ones are the concurrence [11,12], entanglement of formation [13,14], linear entropy [15], entanglement of distillation [16] and the negativity [17,18]. Some results have shown that quantum correlations can not only be limited to entanglement, especially in mixed states, since separable quantum states can also have non-classical correlations. This yielded many works dedicated to introduce quantum correlation quantifiers beyond entanglement. In 2001, Ollivier and Zurek and independently Henderson and Vedral introduced the concept of entropic quantum discord as a quantifier of quantum correlations in bipartite quantum systems [19,20]. It is defined as the difference between the quantum mutual information and the classical correlations existing in a bipartite system [21,22]. For pure bipartite states, the quantum discord coincides with entanglement of formation. The entropic quantum discord of any 2-qubit rank-two state can be calculated exactly. Unfortunately, the situation becomes more complicated for states with rank large than two. To overcome this problem, a geometric variant of quantum discord was introduced to provide an alternative way to deal with non-classical correlations in bipartite systems [23,24]. This geometric measure is defined as Hilbert–Schmidt distance between the considered state ρ and its closest classical state χ . It must be emphasized that the geometric measure of quantum discord by using the Hilbert–Schmidt norm can exhibit less robustness than entanglement in two-qubit systems under special dissipative effects. This unexpected result was reported in [25]. Furthermore, now it is well established that geometric discord based on Hilbert–Schmidt [26,27] is not a faithful measure of quantum correlations [28]. In fact, this quantifier can increase under local quantum operations acting on the unmeasured qubit. Other geometric quantifiers have been introduced such as trace distance discord [29] and trace norm measurement-induced nonlocality [30] to get analytical expressions of quantum discord. A geometric interpretation of one-norm geometric quantum discord for a class of two-qubit X-states is studied in [31]. Also, the dynamics of entanglement and trace norm measurement-induced nonlocality between two mutually independent atoms interacting with a thermal bath of scalar particles has been investigated in [32].

Recently, the local quantum uncertainty was introduced by Girolami et al. [33] (see also the references quoted in [34]) as another quantifier of quantum correlation. This measure is easy to compute analytically for a generic quantum state. It is based on the notion of skew information, introduced by Wigner and Yanase [35]. The skew information was originally used to describe the information content of mixed states. It plays a fundamental role in quantifying the uncertainty measurements of observables [36]. It is also related to the concept of Fisher information which is useful in quantum metrology [37–39]. Another important feature of the skew information is related to the

distinguishability of quantum states [40]. Moreover, we can use the skew information as a quantifier of quantum coherence [41–43].

The aim of this paper is to develop an analytical method to evaluate quantum correlations in three-qubit systems by means of the concept of local quantum uncertainty. The paper is structured as follows. In Sect. 2, we analyze the quantum correlations in three-qubit X states by employing the concept of local quantum uncertainty. We provide an analytical expression for this quantum correlations quantifier. The obtained results are compared with the tripartite negativity and entropic quantum discord for some special three-qubit X states. Section 3 is devoted to the dynamics of local quantum uncertainty under decoherence effects and its robustness in some special situations is discussed. In fact, we shall consider the study of the decoherence effects induced by dephasing, depolarizing and phase reversal environments. These different decoherence scenarios are described by employing the Kraus formalism [44,45]. In Sect. 4, we discuss the monogamy properties of local quantum uncertainty. This is essential to understand the distribution of quantum correlation between the three-qubit family and the whole quantum system. Concluding remarks are given in the last section.

2 The analytical expression of local quantum uncertainty for three-qubit X states

2.1 Definition

Classically, it is possible to measure any two observables with arbitrary precision. However, for quantum systems, the uncertainty relation imposes a fundamental limit on the precision with which certain pairs of physical properties of a particle can be measured. There are several ways to quantify this uncertainty. In quantum mechanics, the uncertainty of an observable H , in a quantum state, is usually quantified by the variance $V(\rho, H) := \text{tr} \rho H^2 - (\text{tr} \rho H)^2$. However, this relation may exhibits, especially in mixed states, contributions of quantum and classical nature. To deal only with the quantum part of the variance, Wigner and Yanase introduced the notion of skew information. They have shown that the quantum uncertainty relation can be also described in terms of skew information as [35]

$$I(\rho, H) := -\frac{1}{2} \text{tr} [\sqrt{\rho}, H]^2. \quad (1)$$

This quantity gives the uncertainty of the observable H in the state ρ . It reduces to the variance $V(\rho, H)$ when ρ is a pure state. The skew information is nonnegative and vanishes if and only if the density matrix and the observable commute. It is convex. In fact, it does not increase under classical mixing and satisfies the inequality $I(\sum_i \lambda_i \rho_i, H) \leq \sum_i \lambda_i I(\rho_i, H)$ for all quantum states ρ_i and positive constants λ_i satisfying $\sum_i \lambda_i = 1$. Based on the concept of skew information, the local quantum uncertainty was introduced recently as a new kind of quantum correlations quantifiers [33]. For a qubit-qudit system, the local quantum uncertainty is defined as the minimum

skew information achievable by a single local measurement. For a qubit A and a qudit B , it writes as [33,46]

$$\mathcal{U}(\rho_{AB}) = 1 - \lambda_{\max}(W_{AB}), \quad (2)$$

where $\lambda_{\max}(W_{AB})$ denotes the maximum eigenvalue of the 3×3 symmetric matrix W_{AB} whose elements are given by

$$w_{ij} = \text{tr} \left\{ \sqrt{\rho_{AB}} (\sigma_i \otimes \mathbb{1}_d) \sqrt{\rho_{AB}} (\sigma_j \otimes \mathbb{1}_d) \right\}, \quad (3)$$

where σ_i ($i = 1, 2, 3$) denote the usual Pauli matrices. Several works were devoted to this type of quantum correlations measure and its dynamics under noisy effects. These works were essentially motivated with the aim to understand how to reduce the decoherence effects and to provide an adequate scheme to protect the quantum correlations for a given decoherence scenario. In this sense, an interesting protocol proposed in [47] to protect measurement-induced nonlocality and local quantum uncertainty in a two-qubit system passing through an amplitude damping channel. For pure bipartite states $\rho = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$, the local quantum uncertainty reduces to the linear entropy of entanglement [48]

$$\mathcal{U}(|\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|) = 2 \left(1 - \text{tr}(\rho_A^2) \right). \quad (4)$$

2.2 Derivation of local quantum uncertainty in three-qubit X states

Two qubit states, with nonzero density matrix elements only along the diagonal and anti-diagonal, are called X states because of their visual form resembling the letter X . The extension to multi-qubit states was discussed in [49]. In this paper we shall mainly focus on three-qubit states whose density matrices are X -shaped. Thus, we consider the family of X states having the following form

$$\rho_{123} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{18} \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{27} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & \rho_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & \rho_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{54} & \rho_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{63} & 0 & 0 & \rho_{66} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{77} & 0 \\ \rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

in the computational basis $\{|000\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |110\rangle, |001\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |111\rangle\}$. The density matrix ρ_{123} can be rewritten as

$$\rho_{123} = \sum_{i,j=0,1} \rho^{ij} \otimes |i\rangle \langle j|, \quad (6)$$

where the density matrices ρ^{ij} are defined by

$$\rho^{ii} = \begin{pmatrix} \rho_{1+4i\ 1+4i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2+4i\ 2+4i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3+4i\ 3+4i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4+4i\ 4+4i} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$\rho^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_{1+4i\ 4+4j} \\ 0 & 0 & \rho_{2+4i\ 3+4j} & 0 \\ 0 & \rho_{3+4i\ 2+4j} & 0 & 0 \\ \rho_{4+4i\ 1+4j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \neq j. \quad (8)$$

In the Fano–Bloch representation, the three-qubit state (5) writes also as

$$\rho_{123} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_\gamma, \quad (9)$$

where α, β and γ take the values 0, 1, 2 and 3 and the correlation matrix elements $R_{\alpha\beta\gamma}$ are given by

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \text{tr} (\rho_{123} (\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_\gamma)). \quad (10)$$

For states of type (5), the nonzero correlation matrix elements $R_{\alpha\beta\gamma}$ are those with the triplet $(\alpha\beta\gamma)$ belonging to the following set

$$\{(000), (003), (030), (033), (300), (303), (330), (333), (111), (112), (121), (122), (211), (212), (221), (222)\}.$$

The Fano–Bloch representations of the states ρ^{ii} ($i = 1, 2$) [Eq. (7)] and ρ^{ij} ($i = 1, j = 0$ or $i = 0, j = 1$) [Eq. (8)] are

$$\rho^{ii} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{ii} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta, \quad (11)$$

with $R_{\alpha\beta}^{ii} = \text{tr} (\rho^{ii} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta)$. The nonzero correlation tensor components are given by

$$\begin{aligned} R_{00}^{ii} &= \rho_{1+4i\ 1+4i} + \rho_{2+4i\ 2+4i} + \rho_{3+4i\ 3+4i} + \rho_{4+4i\ 4+4i} \\ R_{30}^{ii} &= \rho_{1+4i\ 1+4i} + \rho_{2+4i\ 2+4i} - \rho_{3+4i\ 3+4i} - \rho_{4+4i\ 4+4i} \\ R_{03}^{ii} &= \rho_{1+4i\ 1+4i} - \rho_{2+4i\ 2+4i} + \rho_{3+4i\ 3+4i} - \rho_{4+4i\ 4+4i} \\ R_{33}^{ii} &= \rho_{1+4i\ 1+4i} - \rho_{2+4i\ 2+4i} - \rho_{3+4i\ 3+4i} + \rho_{4+4i\ 4+4i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Thus, we have

$$\rho^{ii} = \frac{1}{4} \left[R_{00}^{ii} \sigma_0 \otimes \sigma_0 + R_{30}^{ii} \sigma_3 \otimes \sigma_0 + R_{03}^{ii} \sigma_0 \otimes \sigma_3 + R_{33}^{ii} \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right].$$

For the anti-diagonal matrix ρ^{ij} ($i \neq j$), we get

$$\rho^{ij} = \frac{1}{4} \left[R_{11}^{ij} \sigma_1 \otimes \sigma_1 + R_{12}^{ij} \sigma_1 \otimes \sigma_2 + R_{21}^{ij} \sigma_2 \otimes \sigma_1 + R_{22}^{ij} \sigma_2 \otimes \sigma_2 \right], \quad (13)$$

with

$$R_{11}^{ij} = \rho_{1+4i4+4j} + \rho_{4+4i1+4j} + \rho_{2+4i3+4j} + \rho_{3+4i2+4j}, \quad (14)$$

$$R_{12}^{ij} = i (\rho_{1+4i4+4j} - \rho_{4+4i1+4j} - \rho_{2+4i3+4j} + \rho_{3+4i2+4j}), \quad (15)$$

$$R_{21}^{ij} = i (\rho_{1+4i4+4j} - \rho_{4+4i1+4j} + \rho_{2+4i3+4j} - \rho_{3+4i2+4j}), \quad (16)$$

$$R_{22}^{ij} = \rho_{2+4i3+4j} + \rho_{3+4i2+4j} - \rho_{1+4i4+4j} - \rho_{4+4i1+4j}. \quad (17)$$

The elements of the tripartite correlations matrix $R_{\alpha\beta\gamma}$ (10) can be written in terms of bipartite correlation parameters $R_{\alpha\beta}^{ij}$. Indeed, it is simple to see that the density matrix ρ_{123} can be written as

$$\begin{aligned} \rho_{123} = & \frac{1}{2} (\rho^{00} + \rho^{11}) \otimes \sigma_0 + \frac{1}{2} (\rho^{01} + \rho^{10}) \\ & \otimes \sigma_1 + \frac{i}{2} (\rho^{01} + \rho^{10}) \otimes \sigma_2 + \frac{1}{2} (\rho^{00} - \rho^{11}) \otimes \sigma_3. \end{aligned}$$

Furthermore, one verifies that

$$\frac{1}{2} (\rho^{00} + \rho^{11}) = \frac{1}{8} [R_{00}^{++} \sigma_0 \otimes \sigma_0 + R_{03}^{++} \sigma_0 \otimes \sigma_3 + R_{30}^{++} \sigma_3 \otimes \sigma_0 + R_{33}^{++} \sigma_3 \otimes \sigma_3], \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} (\rho^{00} - \rho^{11}) = \frac{1}{8} [R_{00}^{--} \sigma_0 \otimes \sigma_0 + R_{03}^{--} \sigma_0 \otimes \sigma_3 + R_{30}^{--} \sigma_3 \otimes \sigma_0 + R_{33}^{--} \sigma_3 \otimes \sigma_3], \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} (\rho^{01} + \rho^{10}) = \frac{1}{8} [R_{11}^{+-} \sigma_1 \otimes \sigma_1 + R_{12}^{+-} \sigma_1 \otimes \sigma_2 + R_{21}^{+-} \sigma_2 \otimes \sigma_1 + R_{22}^{+-} \sigma_2 \otimes \sigma_2], \quad (20)$$

$$\frac{i}{2} (\rho^{01} - \rho^{10}) = \frac{1}{8} [R_{11}^{-+} \sigma_1 \otimes \sigma_1 + R_{12}^{-+} \sigma_1 \otimes \sigma_2 + R_{21}^{-+} \sigma_2 \otimes \sigma_1 + R_{22}^{-+} \sigma_2 \otimes \sigma_2]. \quad (21)$$

with

$$R_{\alpha\beta}^{++} = R_{\alpha\beta}^{00} + R_{\alpha\beta}^{11}, \quad R_{\alpha\beta}^{--} = R_{\alpha\beta}^{00} - R_{\alpha\beta}^{11} \quad \text{for } \alpha, \beta = 0, 3, \quad (22)$$

and

$$R_{\alpha\beta}^{+-} = R_{\alpha\beta}^{01} + R_{\alpha\beta}^{10}, \quad R_{\alpha\beta}^{-+} = i (R_{\alpha\beta}^{01} - R_{\alpha\beta}^{10}) \quad \text{for } \alpha, \beta = 1, 2. \quad (23)$$

In this picture, we get

$$\rho_{123} = \frac{1}{8} \left[\sum_{\alpha, \beta=0,3} R_{\alpha\beta 0} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_0 + R_{\alpha\beta 3} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_3 + \sum_{\alpha, \beta=1,2} R_{\alpha\beta 1} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_1 + R_{\alpha\beta 2} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta \otimes \sigma_2 \right],$$

where the matrix elements $R_{\alpha\beta\gamma}$ are given by

$$R_{\alpha\beta 0} = R_{\alpha\beta}^{++}, \quad R_{\alpha\beta 3} = R_{\alpha\beta}^{--} \quad \text{for } \alpha, \beta = 0, 3, \tag{24}$$

and

$$R_{\alpha\beta 1} = R_{\alpha\beta}^{+-}, \quad R_{\alpha\beta 2} = R_{\alpha\beta}^{-+} \quad \text{for } \alpha, \beta = 1, 2, \tag{25}$$

in term of the correlations matrix elements (22) and (23). The three-qubit system described by the density matrix (5) may be viewed as 2×4 quantum systems. The first subsystem is a qubit ($d = 2$) and the second subsystem is a quartet ($d = 4$). In this partitioning scheme, the matrix elements (3) write as

$$w_{ij} = \text{tr} \left(\sqrt{\rho_{123}} (\sigma_i \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0) \sqrt{\rho_{123}} (\sigma_j \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0) \right), \tag{26}$$

where i and j take the values 1, 2, 3. To evaluate w_{ij} (26), we write the matrix $\sqrt{\rho_{123}}$ in the Fano–Bloch representation as $\sqrt{\rho_{123}} = \sum_{\chi\delta\eta} T_{\chi\delta\eta} \sigma_\chi \otimes \sigma_\delta \otimes \sigma_\eta$. The correlation tensor elements $T_{\chi\delta\eta}$ are given in “Appendix”. After some algebra, one shown that the matrix elements (26) are explicitly given by

$$w_{ij} = \frac{1}{8} \left[\left(S_{00} - \sum_k S_{kk} \right) \delta_{ij} + 2S_{ij} \right], \tag{27}$$

where the quantities S_{ij} are given by

$$S_{00} = \sum_{\chi\delta} T_{0\chi\delta} T_{0\chi\delta}, \tag{28}$$

$$S_{kk} = \sum_{\chi\delta} T_{k\chi\delta} T_{k\chi\delta} \quad \text{for } k = 1, 2, 3, \tag{29}$$

and

$$S_{ij} = \sum_{\chi\delta} T_{i\chi\delta} T_{j\chi\delta}. \tag{30}$$

The matrix elements w_{ij} (27) can be alternatively expanded as

$$w_{11} = \frac{1}{8} [S_{00} + S_{11} - S_{22} - S_{33}] \quad (31)$$

$$w_{22} = \frac{1}{8} [S_{00} - S_{11} + S_{22} - S_{33}] \quad (32)$$

$$w_{33} = \frac{1}{8} [S_{00} - S_{11} - S_{22} + S_{33}] \quad (33)$$

$$w_{13} = w_{31} = w_{23} = w_{32} = 0, \quad (34)$$

where the quantities S_{ij} are given by (28), (29) and (30). The explicit form of the matrix elements w_{ij} in terms of the density matrix elements is given in ‘‘Appendix’’.

2.3 Illustration

To exemplify the results obtained above, we consider the special cases of mixed GHZ states and three-qubit states of Bell type.

2.3.1 Mixed GHZ-states

We consider first the three-qubit mixed states of GHZ type given by

$$\rho_{GHZ} = \frac{p}{8} \mathbb{1}_3 + (1 - p) |\text{GHZ}\rangle \langle \text{GHZ}|, \quad (35)$$

where $|\text{GHZ}\rangle$ denotes the usual GHZ state: $|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle)$. In the computational basis, the state (35) takes the form

$$\rho_{GHZ} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 - 3p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(1 - p) \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 4(1 - p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 - 3p \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Using equation (114), (115) and (116), the matrix elements w_{ij} needed to evaluate the local quantum uncertainty, write as

$$w_{11} = w_{22} = \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p(4 - 3p + \sqrt{p(8 - 7p)})}{2}} \right),$$

$$w_{33} = \frac{8\sqrt{p(8 - 7p)} - 31p^2 + 38p + 1}{8(4 - 3p + \sqrt{p(8 - 7p)})}. \quad (37)$$

The off diagonal matrix elements w_{ij} are zero. It is simple to verify that $w_{33} \geq w_{11}$ for any value of p . This implies that $\lambda_{\max}(W) = w_{33}$. Therefore, the local quantum uncertainty is simply given by

$$\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}) = \frac{31(p - 1)^2}{8(4 - 3p + \sqrt{p(8 - 7p)})}. \tag{38}$$

The variation of local quantum uncertainty versus the parameter p is reported in Fig. 2 and will be compared with two other quantum correlations quantifiers: the tripartite negativity [18] and quantum discord [50].

2.3.2 Three-qubit state of Bell type

As a second instance of three-qubit X-states, we consider states of Bell type [51]

$$\rho_B = \frac{1}{8} \left(\sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \otimes \sigma_i \right), \tag{39}$$

with $0 \leq c_i \leq 1$ and $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \leq 1$. In the computational basis, ρ_B takes the form

$$\rho_B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 + ic_2 \\ 0 & 1 - c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - ic_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - c_3 & 0 & 0 & c_1 - ic_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + c_3 & c_1 + ic_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 - ic_2 & 1 - c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + ic_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + ic_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + c_3 & 0 \\ c_1 - ic_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - c_3 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

In this case also the matrix W , whose elements are given by (26), is diagonal. The diagonal elements write

$$\begin{aligned} w_{11} &= 1 - \frac{c_2^2 + c_3^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}, \\ w_{22} &= 1 - \frac{c_1^2 + c_3^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}, \\ w_{33} &= 1 - \frac{c_1^2 + c_2^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}. \end{aligned} \tag{41}$$

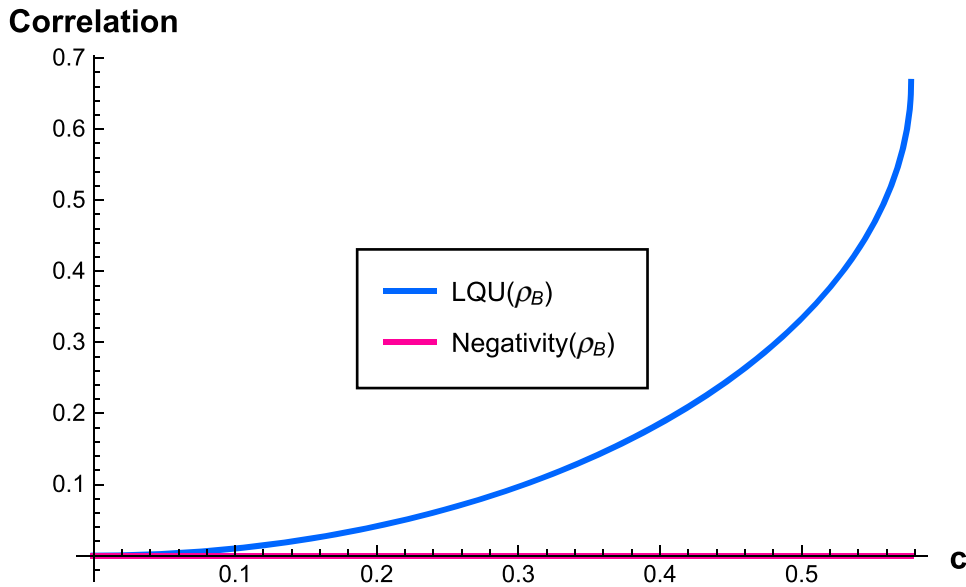


Fig. 1 The local quantum uncertainty and negativity in three-qubit state of Bell type versus the parameter c

Therefore, the local quantum uncertainty in the state ρ_B is given by

$$\mathcal{U}(\rho_B) = \begin{cases} \frac{c_2^2 + c_3^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}, & \text{if } c_1 \geq c_2 \text{ and } c_1 \geq c_3 \\ \frac{c_1^2 + c_3^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}, & \text{if } c_2 \geq c_1 \text{ and } c_2 \geq c_3 \\ \frac{c_1^2 + c_2^2}{1 + \sqrt{1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}}, & \text{if } c_3 \geq c_1 \text{ and } c_3 \geq c_2. \end{cases} \quad (42)$$

To simplify our numerical analysis and the comparison with other discord-like quantities, we consider the situation where $c_1 = c_2 = c_3 = c$. In this case, Eq. (42) gives

$$\mathcal{U}(\rho_B) = \frac{2c^2}{1 + \sqrt{1 - 3c^2}}. \quad (43)$$

The local quantum uncertainty is depicted in Fig. 1.

2.4 Comparison with quantum discord and negativity

2.4.1 Tripartite negativity

The entanglement properties of three-qubit X states was discussed in several works (see for instance [52,53]). To decide about entanglement in a tripartite system, the tripartite negativity $N^{(3)}(\rho_{123})$ was introduced in [18]. It is given by

$$N^{(3)}(\rho_{123}) := \sqrt[3]{N(\rho_{123}^{T_1})N(\rho_{123}^{T_2})N(\rho_{123}^{T_3})}, \tag{44}$$

where $N(\rho_{123}^{T_1})$ denotes the bipartite negativity between the qubit 1 and the subsystem 2 and 3. It is defined by $N(\rho_{123}^{T_1}) = \sum_i |\lambda_i(\rho_{123}^{T_1})| - 1$ where $\rho_{123}^{T_1}$ is the partial transpose of ρ_{123} with respect to the subsystem 1 and $\lambda_i(\rho_{123}^{T_1})$ are the eigenvalues of $\rho_{123}^{T_1}$. Similar definitions hold for $N(\rho_{123}^{T_2})$ and $N(\rho_{123}^{T_3})$. The negativity can be equivalently interpreted as the most negative eigenvalue of the partial transpose of the density matrix with respect to qubit 1. For tripartite quantum systems with permutation invariance, $N^{(3)}(\rho_{123})$ reduces to the bipartite negativity of any bipartition of the system. This writes as

$$N^{(3)}(\rho_{123}) = N(\rho_{123}^{T_1}) = N(\rho_{123}^{T_2}) = N(\rho_{123}^{T_3}). \tag{45}$$

Thus, for the three-qubit state of Bell type (39), the tripartite negativity vanishes

$$N^{(3)}(\rho_B) = \frac{1}{2} |1 - \sqrt{3}c| + \frac{1}{2} |1 + \sqrt{3}c| - 1 = 0. \tag{46}$$

2.4.2 Tripartite quantum discord

According to reference [50], the genuine tripartite total correlations $T^{(3)}(\rho)$ in a mixed three-qubit state ρ_{123} is defined by

$$T^{(3)}(\rho_{123}) = T(\rho_{123}) - T^{(2)}(\rho_{123}), \tag{47}$$

where $T(\rho_{123}) = S(\rho_1) + S(\rho_2) + S(\rho_3) - S(\rho_{123})$ is the quantum extension of Shannon classical mutual information and $T^{(2)}(\rho)$ is the maximum of the pairwise correlations in the quantum system

$$T^{(2)}(\rho_{123}) = \max[I^{(2)}(\rho_{1|2}), I^{(2)}(\rho_{1|3}), I^{(2)}(\rho_{2|3})] \tag{48}$$

with $I^{(2)}(\rho_{i|j}) = S(\rho_i) + S(\rho_j) - S(\rho_{ij})$. Here ρ_i ($i = 1, 2, 3$) is the reduced density matrix for the subsystem i and $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \log(\rho)]$ is the von Neumann entropy. The total tripartite correlation (47) rewrites also as

$$T^{(3)}(\rho_{123}) = \min[I^{(2)}(\rho_{1|23}), I^{(2)}(\rho_{2|13}), I^{(2)}(\rho_{3|12})]. \tag{49}$$

Analogously, the genuine tripartite classical correlations $J^{(3)}(\rho_{123})$ is defined as

$$J^{(3)}(\rho_{123}) = J(\rho_{123}) - J^{(2)}(\rho_{123}), \tag{50}$$

where

$$J(\rho_{123}) = \max_{i,j,k \in \{1,2,3\}} [S(\rho_i) - S(\rho_{i|j}) + S(\rho_k) - S(\rho_{k|ij})], \tag{51}$$

and

$$J^{(2)}(\rho_{123}) = \max \left[J^{(2)}(\rho_{1|2}), J^{(2)}(\rho_{1|3}), J^{(2)}(\rho_{2|3}) \right]. \quad (52)$$

As for two-qubit systems [19,20], the tripartite quantum discord $D^{(3)}(\rho_{123})$ can be expressed as the difference between the genuine total correlations and the genuine classical correlations. This is given by

$$D^{(3)}(\rho_{123}) = T^{(3)}(\rho_{123}) - J^{(3)}(\rho_{123}). \quad (53)$$

For three-qubit states which are invariant under permutations symmetry, the total and classical correlations can be expressed, respectively, as

$$T^{(3)}(\rho_{123}) = S(\rho_1) + S(\rho_{1|2}) - S(\rho_{123}), \quad (54)$$

and

$$J^{(3)}(\rho_{123}) = S(\rho_1) - S(\rho_{1|23}). \quad (55)$$

In this case, the tripartite quantum discord reduces to

$$D^{(3)}(\rho_{123}) = S(\rho_{1|23}) + S(\rho_{1,2}) - S(\rho), \quad (56)$$

where $S(\rho_{1|23}) = \min_{\{E_{ij}^{23}\}} \sum_{ij} p_{ij} S(\rho_{1/E_{ij}^{23}})$ is the relative entropy of the qubit “1”

when the measurement is carried out on the subsystem (23), the operators E_{ij}^{23} are positive-operator-valued measures (POVMs) that act on the qubits 2 and 3 (see [54]), $p_{ij} = \text{tr} \left[\left(\mathbb{1}^1 \otimes E_{ij}^{23} \right) \rho \right]$ is the probability to obtain the (i, j) outcomes. The density matrix of the system after the measurement is given by $\rho_{1/E_{ij}^{23}} = \text{tr}_{23} \left[\left(\mathbb{1}^1 \otimes E_{ij}^{23} \right) \rho \right] / p_{ij}$. For three-qubit X states, the quantum discord is given by [55,56]

$$\begin{aligned} D^{(3)}(\rho_{123}) &= S(\rho_{1|23}) - \frac{1}{3} (1 + 4\rho_{11}) \log(2 + 8\rho_{11}) \\ &\quad - \frac{2}{3} (1 - 2\rho_{11}) \log(4 - 8\rho_{11}) - 1 + 2\rho_{11} \log(3) \\ &\quad + (\rho_{11} - \rho_{18}) \log(8\rho_{11} - 8\rho_{18}) + (\rho_{11} + \rho_{18}) \log(8\rho_{11} + 8\rho_{18}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - 2\rho_{11} - 6\rho_{27}) \log(4 - 8\rho_{11} - 24\rho_{27}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - 2\rho_{11} + 6\rho_{27}) \log(4 - 8\rho_{11} + 24\rho_{27}), \end{aligned} \quad (57)$$

where the relative entropy $S(\rho_{1|23}) = \min\{S_1, S_3\}$ if $|3\rho_{18}| \geq |\rho_{27}|$ and $\rho_{18}\rho_{27} < 0$, otherwise it is given by $S(\rho_{1|23}) = \min\{S_1, S_2\}$. The quantities S_1 , S_2 and S_3 are given by

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{12}F(1 - 8\rho_{11}), \\ S_2 &= 1 - \frac{1}{2}G(6\rho_{27} + 2\rho_{18}), \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{2}G\left(\sqrt{\frac{(\rho_{18} - \rho_{27})^3}{\rho_{18}}}\right), \end{aligned} \quad (58)$$

where the functions $F(x)$ and $G(x)$ are defined by

$$G(x) = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (3+x)\log(3+x) \\ &+ (3-3x)\log(3-3x) - 2(3-x)\log(3-x). \end{aligned} \quad (60)$$

Using expressions (56), (57) and (58), the quantum discord in the GHZ state (35) is given by

$$D^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}) = \left(\frac{3p-4}{4}\right)\log(4-3p) + \frac{p}{8}\log(p) + \frac{8-7p}{8}\log(8-7p). \quad (61)$$

The amount of quantum correlation is compared, in Fig. 2, to the local quantum uncertainty (38) and the negativity

$$N^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}) = \left|\frac{p}{2}\right| + \left|\frac{12-9p}{8}\right| + \left|\frac{5p-4}{8}\right| - 1, \quad (62)$$

which is simply obtained from the expressions (44) and (45).

The results plotted in Fig. 2 show that local quantum uncertainty and quantum discord present similar behavior. It is also noticed that like quantum discord, the local quantum uncertainty captures the classical correlations that cannot be revealed by the negativity. Indeed for $0.8 \leq p \leq 1$, the negativity is zero and cannot be employed as a faithful measure of quantum correlations. Our results agree with the results reported in [25] for special mixed three-qubit states in which the discord-like measures reveal more quantum correlations than entanglement. Moreover, this shows that local quantum uncertainty constitutes a good quantum correlation quantifier for three-qubit systems.

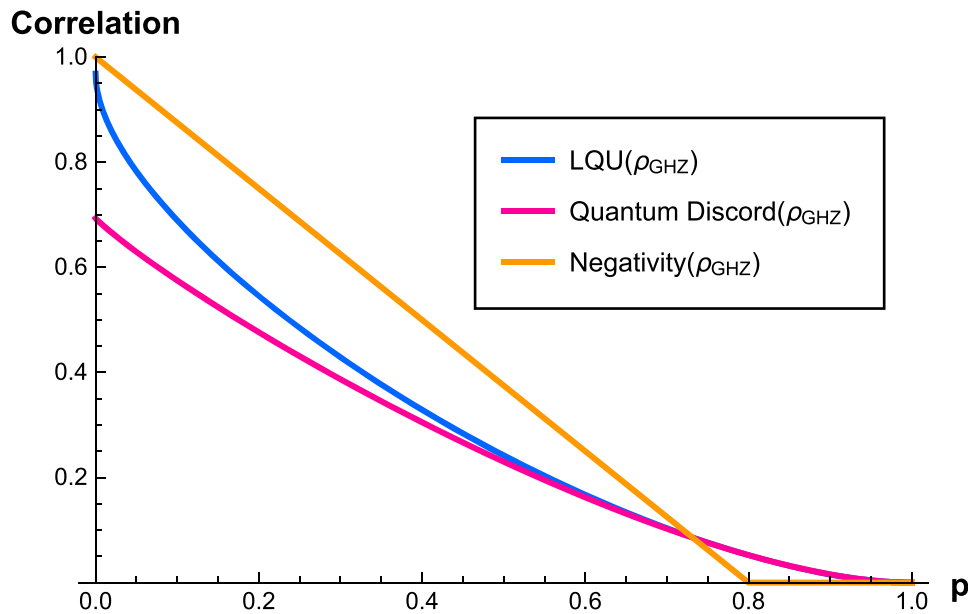


Fig. 2 The quantum correlations in tripartite mixed GHZ state measured by local quantum uncertainty, quantum discord and negativity

3 Local quantum uncertainty in three-qubit GHZ state under decoherence channels

The Markov dynamics of states evolving in noisy environments is modeled by the quantum operation $\varepsilon : \rho \rightarrow \varepsilon(\rho)$. The channel action on a tripartite state ρ_{123} can be completely characterized in the Kraus representation as follows

$$\varepsilon(\rho_{123}) = \sum_{ijk} (K_i \otimes K_j \otimes K_k) \rho_{123} (K_i \otimes K_j \otimes K_k)^\dagger, \tag{63}$$

where K_i are the local Kraus operators describing the decoherence of a single qubit. For several decoherence scenarios, the action of the decoherence channel is generally parameterized by the decoherence probability $q = 1 - \exp(-\kappa t)$ with κ is the decay parameter. The Kraus operators satisfy the closure condition $\sum_i K_i K_i^\dagger = 1$. In this section, we shall discuss the effects of three different environments on the mixed GHZ-state (35). The dynamics of the quantum correlations is fully characterized by the decoherence parameter q .

3.1 Dephasing environment

We first consider the situation where each qubit is submitted to a dephasing effect induced by the environment. The Kraus operators representing this effect are

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q} \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Under this effect, the tripartite state ρ_{123} (5) remains of X type. The evolved matrix density denoted by $\varepsilon_{DE}(\rho_{123}) = \rho_{123}^{DE}$ has the same diagonal elements as ρ_{123} while the anti-diagonal elements are multiplied by the factor $(1 - q)^{\frac{3}{2}}$. The local quantum uncertainty $\mathcal{U}(\rho_{123}^{DE}) = 1 - \lambda_{\max}(W^{DE})$ can be evaluated using the results reported in Sect. 2. For the GHZ-state (35), we show that the non-vanishing matrix elements of the matrix W^{DE} (27), associated with the density matrix ρ_{123}^{DE} , are given by

$$w_{11}^{DE} = w_{22}^{DE} = \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p \left(4 - 3p + \sqrt{(4 - 3p)^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^3} \right)}{2}} \right), \tag{65}$$

$$w_{33}^{DE} = \frac{32(1 - p)(1 + (p - 1)(1 - q)^3) + (1 + p)^2 + 4 \left(p + 2\sqrt{(4 - 3p)^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^3} \right)}{8 \left(4 - 3p + \sqrt{(4 - 3p)^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^3} \right)}. \tag{66}$$

It is simple to check that $w_{33}^{DE} \geq w_{11}^{DE}$. This gives $\lambda_{\max}(W^{DE}) = w_{33}^{DE}$ and in this case the local quantum uncertainty is

$$\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{DE}) = \frac{(1 - p)^2 (32(1 - q)^3 - 1)}{8 \left(4 - 3p + \sqrt{(4 - 3p)^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^3} \right)}. \tag{67}$$

The local quantum uncertainty is plotted in Fig. 3 for different values of mixedness parameter p and the decoherence parameter q which reflects the degradation of quantum correlations under decoherence effects. To investigate the robustness of local quantum uncertainty in comparison with other quantifiers, we analyzed also the dynamics of quantum discord and negativity. Using results (45) and (57), the negativity in the state ρ_{GHZ}^{DE} writes

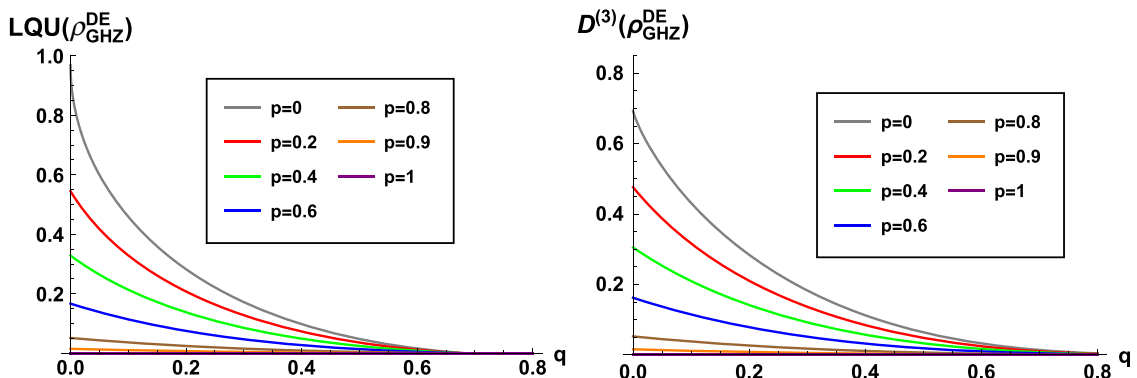


Fig. 3 The local quantum uncertainty and the quantum discord versus the dephasing parameter q

$$N^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{DE}}) = \left| \frac{p}{2} \right| + \left| \frac{4-3p}{4} \right| + \left| \frac{p-4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}}}{8} \right| + \left| \frac{p+4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}}}{8} \right| - 1, \quad (68)$$

and the quantum discord (57) is given by

$$D^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{DE}}) = \frac{3p-4}{4} \log(4-3p) + \frac{1}{8} \left(4-3p-4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}} \right) \log \left(4-3p-4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{8} \left(4-3p+4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}} \right) \log \left(4-3p+4(1-p)(1-q)^{\frac{3}{2}} \right). \quad (69)$$

The entropic quantum discord in mixed GHZ states shows more robustness against the dephasing effects in comparison with local quantum uncertainty. On the other hand, the negativity is more robust than local quantum uncertainty and quantum discord (see Fig. 4). Indeed, for $0.8 < q < 1$, the local quantum uncertainty and quantum discord vanished whereas the negativity is nonzero for a mixing parameter p taking the values between 0 and 0.6. This is an unusual and unexpected important behavior of the negativity in noisy environment in comparison with quantum discord and local quantum uncertainty believed stranger and robust that entanglement.

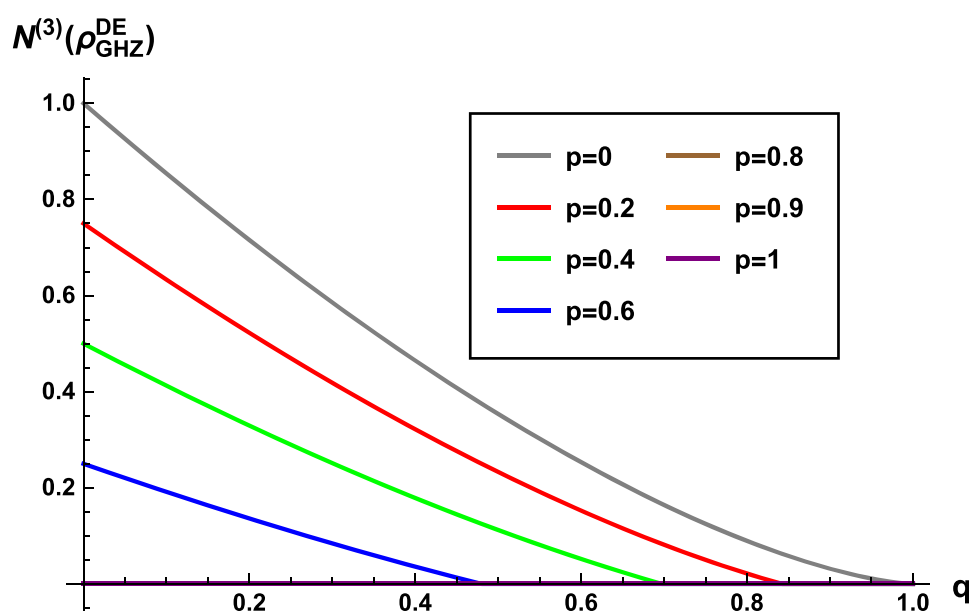


Fig. 4 The negativity versus the dephasing parameter q

3.2 Depolarizing environment

The depolarization effect of a single qubit in the Kraus representation is given by

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \sqrt{1 - \frac{3q}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & K_2 &= \frac{\sqrt{q}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 K_3 &= \frac{\sqrt{q}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & K_4 &= \frac{\sqrt{q}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

In this case, the evolved state is also a three-qubit state of X type. The nonzero matrix elements of the density matrix ρ_{GHZ}^{PE} are given

$$\rho'_{11} = \rho'_{88} = \frac{4 - 3p}{8} \left(1 - \frac{3q}{2} + \frac{3q^2}{4} \right) + \frac{3p}{8} \left(\frac{q}{2} - \frac{q^2}{4} \right),
 \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
 \rho'_{22} = \rho'_{33} = \rho'_{44} = \rho'_{55} = \rho'_{66} = \rho'_{77} \\
 = \frac{p}{8} \left(1 - \frac{3q}{2} + \frac{3q^2}{4} \right) + \frac{4 - p}{8} \left(\frac{q}{2} - \frac{q^2}{4} \right),
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

$$\rho'_{18} = \rho'_{81} = \frac{(1 - p)(1 - q)^3}{2},
 \tag{73}$$

in the computational basis. The elements of the matrix (26) write as

$$\begin{aligned}
 w_{11}^{PE} &= w_{22}^{PE} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{8}(p + q(1 - p)(2 - q)) \left(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2) + \sqrt{(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2))^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^6} \right)} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(p + q(1 - p)(2 - q)),
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
 w_{33}^{PE} &= \frac{(1 - p)^2(1 - q)^2(1 - 16(1 - q)^4)}{8 \left(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2) + \sqrt{(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2))^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^6} \right)} \\
 &\quad + \frac{1}{8}(4 + 3p + 3q(1 - p)(q - 2) \\
 &\quad + \sqrt{(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2))^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^6}).
 \end{aligned}
 \tag{75}$$

Since $w_{11}^{PE} \leq w_{33}^{PE}$, the local quantum uncertainty is given by $\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{PE}) = 1 - w_{33}^{PE}$ and one gets

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{PE}) \\
 &= \frac{(1 - p)^2(1 - q)^2(16(1 - q)^4 - 1)}{8 \left(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2) + \sqrt{(4 - 3p + 3q(1 - p)(q - 2))^2 - 16(1 - p)^2(1 - q)^6} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \left(4 - 3p - 3q(1-p)(2-q) \right. \\
& \left. - \sqrt{(4 - 3p + 3q(1-p)(q-2))^2 - 16(1-p)^2(1-q)^6} \right). \quad (76)
\end{aligned}$$

The negativity in the evolved state ρ_{GHZ}^{PE} is

$$\begin{aligned}
N^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{PE}) &= \frac{1}{2} \left| p - 2pq + pq^2 + 2q - q^2 \right| \\
& + \frac{1}{4} \left| 4 - 6q + 3q^2 - 3p + 6pq - 3pq^2 \right| - 1 \\
& + \frac{1}{8} \left| p - 2pq + pq^2 + 2q - q^2 + 4(1-p)(1-q)^3 \right| \\
& + \frac{1}{8} \left| p - 2pq + pq^2 + 2q - q^2 - 4(1-p)(1-q)^3 \right|, \quad (77)
\end{aligned}$$

and the quantum discord is given by the following expression

$$\begin{aligned}
D^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{PE}) &= -\frac{1}{4} \left((4-3p) \left(1 - \frac{3q}{2} + \frac{3q^2}{4} \right) + 3p \left(\frac{q}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \right) \\
& \log \left((4-3p) \left(1 - \frac{3q}{2} + \frac{3q^2}{4} \right) + 3p \left(\frac{q}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \right) \\
& + \frac{1}{8} \beta_+(p, q) \log(\beta_+(p, q)) + \frac{1}{8} \beta_-(p, q) \log(\beta_-(p, q)), \quad (78)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\beta_{\pm}(p, q) &= (4-3p) \left(1 - \frac{3q}{2} + \frac{3q^2}{4} \right) \\
& + 3p \left(\frac{q}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \pm 4(1-p)(1-q)^3. \quad (79)
\end{aligned}$$

Under depolarizing effects, the quantum discord is more robust in comparison with local quantum uncertainty. However, like for the dephasing effects, it is remarkable that the negativity shows more robustness than the local quantum uncertainty and the quantum discord (Figs. 5, 6).

3.3 Phase reversal environment

Phase reversal environment leaves the state invariant $|0\rangle$ with the probability q and changes the state $|1\rangle$ to $-|1\rangle$ with the probability $(1-q)$. The corresponding Kraus

operators are

$$K_1 = \sqrt{1-q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K_2 = \sqrt{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Under the phase reversal effect, the matrix elements of the evolved density matrix $\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}$ are $\rho_{ij}^{\text{PRE}} = (1 + 10q^2 - 6q(1 + q^2))\rho_{ij}$ for $i \neq j$ and $\rho_{ii}^{\text{PRE}} = \rho_{ii}$. In this case, the eigenvalues of the matrix W^{PRE} obtained from the equation (26) are given by

$$w_{11}^{\text{PRE}} = w_{22}^{\text{PRE}} = \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p \left(4 - 3p + \sqrt{(4 - 3p)^2 - 16(1 - p)^2 (32(1 + 10q^2 - 6q(1 + q^2)) - 1)} \right)}{2}} \right), \tag{81}$$

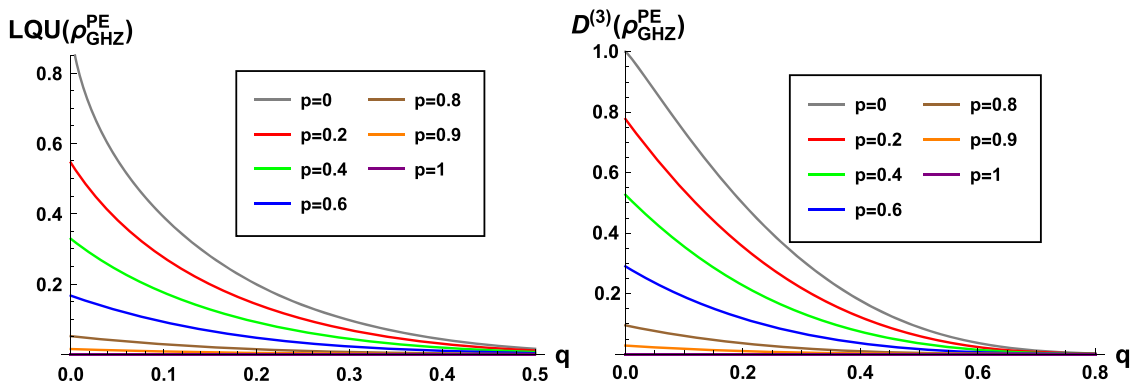


Fig. 5 The local quantum uncertainty and the quantum discord versus the depolarizing strength q

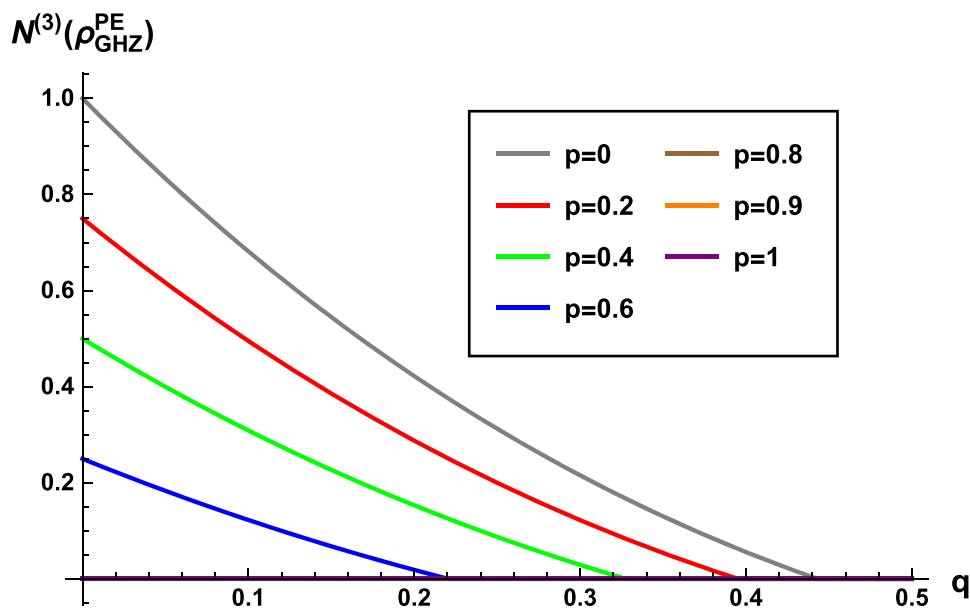


Fig. 6 The negativity versus the depolarizing strength q

and

$$w_{33}^{\text{PRE}} = \frac{32(1-p)(1+(p-1)(32(1+10q^2-6q(1+q^2))-1))+(1+p)^2}{8\left(4-3p+\sqrt{(4-3p)^2-16(1-p)^2(32(1+10q^2-6q(1+q^2))-1)}\right)} + \frac{\left(p+2\sqrt{(4-3p)^2-16(1-p)^2(32(1+10q^2-6q(1+q^2))-1)}\right)}{2\left(4-3p+\sqrt{(4-3p)^2-16(1-p)^2(32(1+10q^2-6q(1+q^2))-1)}\right)}. \quad (82)$$

Here also we have $w_{11}^{\text{PRE}} \leq w_{33}^{\text{PRE}}$ and the local quantum uncertainty is simply given by $\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}) = 1 - w_{33}^{\text{PRE}}$. This can be written as

$$\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}) = \frac{(1-p)^2(32(1+10q^2-6q(1+q^2))-1)}{8\left(4-3p+\sqrt{(4-3p)^2-16(1-p)^2(1+10q^2-6q(1+q^2))}\right)}. \quad (83)$$

For the evolved state $\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}$, the negativity is given by

$$N^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}) = \left|\frac{p}{2}\right| + \left|\frac{4-3p}{4}\right| + \left|\frac{p-4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))}{8}\right| + \left|\frac{p+4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))}{8}\right| - 1, \quad (84)$$

and the quantum discord writes as

$$D^{(3)}(\rho_{\text{GHZ}}^{\text{PRE}}) = \frac{1}{8}\left(4-3p-4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))\right) \log\left(4-3p-4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))\right) + \frac{1}{8}\left(4-3p+4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))\right) \log\left(4-3p+4(1-p)(1+10q^2-6q(1+q^2))\right) + \frac{3p-4}{4} \log(4-3p). \quad (85)$$

For a mixing parameters p such that $0 < p < 0.6$, the local quantum uncertainty shows a revival phenomenon under the phase reversal environment. It increases to become maximal for higher values of decoherence parameter q . It seems that the phase reversal tends to enhance the amount of quantum correlation in the system. Also for states with a mixing parameter p such that $0.7 < p < 1$, the local quantum uncertainty tends to be frozen. The entropic quantum discord does not exhibit this

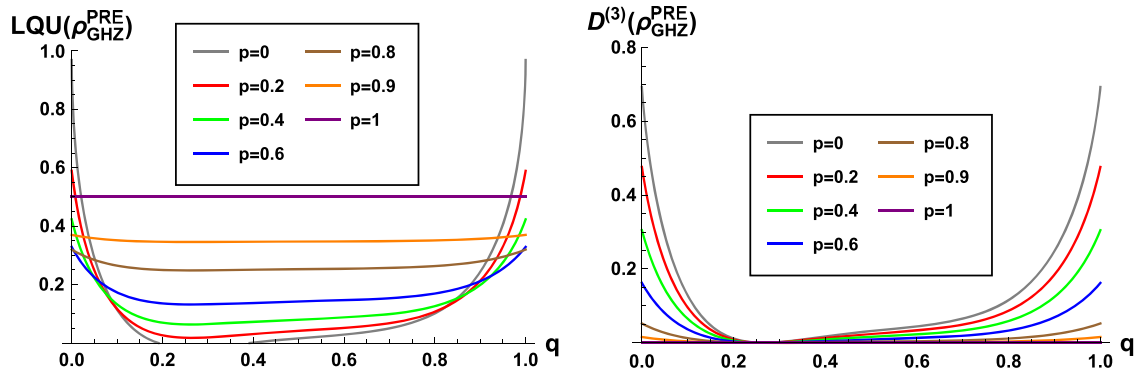


Fig. 7 The local quantum uncertainty and the quantum discord versus the decoherence parameter q

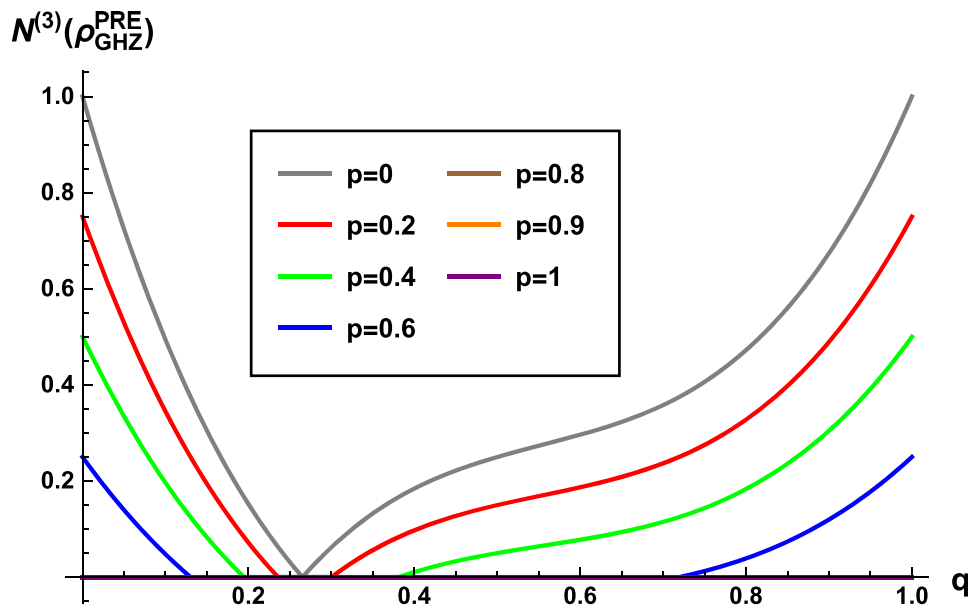


Fig. 8 The negativity versus the decoherence parameter q

phenomenon. The negativity and entropic quantum discord confirm the revival of non-classical correlation in three-qubit GHZ under phase reversal effects (see Figs. 7, 8).

4 Monogamy of local quantum uncertainty

The free shareability relation of classical correlations is no longer valid in the quantum case. Indeed, it has been shown that there are several limitation in sharing quantum correlations between the components of a multi-partite quantum system. These limitations are expressed by the so-called monogamy relation [57,58]. This limitation was equaled by Coffman, Kundu and Wootters in 2001 for the concurrence and was extended since then to other quantum correlations quantifiers [59]. The concept of monogamy can be expressed as follows. Let us denote by $Q_{1|2}$ the shared correlations between the qubits 1 and 2, and $Q_{1|3}$ the amount of quantum correlations between the qubits 1 and 3. The monogamy constraint imposes that the quantum correlation

$Q_{1|23}$ (between the qubit 1 and the subsystem comprising the qubits 2 and 3) is always greater than the sum of $Q_{1|2}$ and $Q_{1|3}$:

$$Q_{1|23} \geq Q_{1|2} + Q_{1|3}. \quad (86)$$

Extending this inequality to local quantum uncertainty, the monogamy holds when

$$\mathcal{U}_{1|23} \geq \mathcal{U}_{1|2} + \mathcal{U}_{1|3}. \quad (87)$$

We first consider the monogamy of local quantum uncertainty in the mixed GHZ state. To do this, we determine the bipartite local quantum uncertainty in the subsystems containing the qubits 2 and 3 and the qubits 1 and 3. The corresponding reduced density matrices are

$$\rho_{\text{GHZ}}^{23} = \rho_{\text{GHZ}}^{13} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-p \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Using equation (2), the elements of the matrix W (3) are simply given by

$$w_{11} = w_{22} = \sqrt{p(2-p)} \quad \text{and} \quad w_{33} = 1. \quad (89)$$

We have $w_{33} \geq w_{11}$ and the local quantum uncertainty is

$$\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{23}) = \mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{13}) = 0. \quad (90)$$

It is clear that the local quantum uncertainty in the ρ_{GHZ} satisfies the monogamy constraint

$$\mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}) \geq \mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{23}) + \mathcal{U}(\rho_{\text{GHZ}}^{13}). \quad (91)$$

Similarly, we consider the monogamy property of local quantum uncertainty in the three-qubit Bell states (39). In this case we have $\rho_B^{23} = \rho_B^{13} = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{4 \times 4}$ and $w_{11} = w_{22} = w_{33} = 1$. Thus, we obtain

$$\mathcal{U}(\rho_B^{23}) = \mathcal{U}(\rho_B^{13}) = 0, \quad (92)$$

and this implies that the local quantum uncertainty in the Bell states (39) is monogamous.

5 Conclusion

The analytical expression of local quantum uncertainty is derived for three-qubit X states. As illustration, we computed the non-classical correlation in mixed GHZ state and Bell-type three-qubit state by employing this quantum correlation quantifier. The obtained results are compared with ones obtained by means of entropic quantum discord and negativity. The amount of quantum correlations quantified by local quantum uncertainty is almost similar to one measured by entropic quantum discord. This indicates that local quantum uncertainty constitutes an appropriate quantifier to deal with quantum correlation in multi-qubit systems. This is essentially due to its easiness computability. Also, it goes beyond the negativity and offers the tool to quantify the non-classical correlations contained in multi-qubit separable states. The evolution of local quantum uncertainty in different noisy environments is also discussed in this work. Different aspects of the local quantum uncertainty are compared to the evolution of entropic quantum discord and negativity. In particular, we have shown that under phase reversal effect, the local quantum uncertainty show revival and frozen phenomena. We also investigated the monogamy property in three-qubit state of GHZ and Bell type. We have shown that the monogamy constraint (86) is satisfied. As prolongation of the results obtained in this work, we believe that it will be interesting to study the local quantum uncertainty for other three-qubit states, which are not of X type, as for instance mixed W states of type $\rho_W = \alpha |W\rangle \langle W| + \frac{1-\alpha}{8} \mathbb{1}_8$ where $\alpha \in \mathbf{R}$ and $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ denotes a three-qubit W state. We hope to report on this question in another work.

Appendix

In this appendix, we give the necessary tools to compute the local quantum uncertainty for three-qubit X states. First, the eigenvalues corresponding to density matrix ρ_{123} of the form (5) are given by

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^\pm &= \frac{1}{2}t_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 - 4d_1}, \\
 \lambda_2^\pm &= \frac{1}{2}t_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_2^2 - 4d_2}, \\
 \lambda_3^\pm &= \frac{1}{2}t_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_3^2 - 4d_3}, \\
 \lambda_4^\pm &= \frac{1}{2}t_4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{t_4^2 - 4d_4},
 \end{aligned}
 \tag{93}$$

where

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \rho_{11} + \rho_{88}, & d_1 &= \rho_{11}\rho_{88} - \rho_{18}\rho_{81}, \\
 t_2 &= \rho_{22} + \rho_{77}, & d_2 &= \rho_{22}\rho_{77} - \rho_{27}\rho_{72}, \\
 t_3 &= \rho_{33} + \rho_{66}, & d_3 &= \rho_{33}\rho_{66} - \rho_{36}\rho_{63}, \\
 t_4 &= \rho_{44} + \rho_{55}, & d_4 &= \rho_{44}\rho_{55} - \rho_{45}\rho_{54}.
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

The matrix $\sqrt{\rho_{123}}$ is also X -shaped and has the form

$$\sqrt{\rho_{123}} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{11} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{18}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \\ 0 & \frac{\rho_{22} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{27}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_{33} + \sqrt{d_3}}{\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{36}}{\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{44} + \sqrt{d_4}}{\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}} & \frac{\rho_{45}}{\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{54}}{\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}} & \frac{\rho_{55} + \sqrt{d_4}}{\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_{63}}{\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} & 0 & 0 & \frac{\rho_{66} + \sqrt{d_3}}{\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{72}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{77} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} & 0 \\ \frac{\rho_{81}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{88} + \sqrt{d_1}}{\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} \end{pmatrix}.$$

In the Fano–Bloch representation, the matrix $\sqrt{\rho_{123}}$ rewrites as

$$\sqrt{\rho_{123}} = \sum_{\chi\delta\eta} T_{\chi\delta\eta} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta} \otimes \sigma_{\eta}, \tag{95}$$

where $\chi, \delta, \eta = 0, 1, 2, 3$ and the Fano–Bloch parameters are defined by $T_{\chi\delta\eta} = \text{tr}(\sqrt{\rho_{123}} \sigma_{\chi} \otimes \sigma_{\delta} \otimes \sigma_{\eta})$.

The non-vanishing elements $T_{\chi\delta\eta}$ are given by

$$T_{111} = \frac{R_{111} - R_{221} - R_{122} - R_{212}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{111} - R_{221} + R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{111} + R_{221} + R_{122} - R_{212}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{111} + R_{221} - R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{96}$$

$$T_{211} = \frac{R_{112} + R_{121} + R_{211} - R_{222}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{222} + R_{121} + R_{211} - R_{112}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{121} - R_{211} - R_{112} - R_{222}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{121} + R_{112} + R_{222} - R_{211}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{97}$$

$$T_{121} = \frac{R_{112} + R_{121} + R_{211} - R_{222}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{112} - R_{222} - R_{121} - R_{211}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{211} + R_{112} + R_{222} - R_{121}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{121} + R_{112} + R_{222} - R_{211}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{98}$$

$$T_{221} = \frac{R_{221} + R_{122} + R_{212} - R_{111}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{111} - R_{221} + R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{111} + R_{221} + R_{122} - R_{212}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{122} - R_{111} - R_{221} - R_{212}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{99}$$

$$T_{112} = \frac{R_{112} + R_{121} + R_{211} - R_{222}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{222} + R_{121} + R_{211} - R_{112}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{211} + R_{112} + R_{222} - R_{121}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{211} - R_{121} - R_{112} - R_{222}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{100}$$

$$T_{122} = \frac{R_{221} + R_{122} + R_{212} - R_{111}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{111} - R_{221} + R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{212} - R_{111} - R_{221} - R_{122}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{111} + R_{221} - R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{101}$$

$$T_{212} = \frac{R_{221} + R_{122} + R_{212} - R_{111}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{221} - R_{111} - R_{122} - R_{212}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{111} + R_{221} + R_{122} - R_{212}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{111} + R_{221} - R_{122} + R_{212}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{102}$$

$$T_{222} = \frac{R_{222} - R_{112} - R_{121} - R_{211}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{222} + R_{121} + R_{211} - R_{112}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{211} + R_{112} + R_{222} - R_{121}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{121} + R_{112} + R_{222} - R_{211}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{103}$$

$$T_{000} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} + \sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}} + \sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}, \tag{104}$$

$$T_{030} = \frac{R_{030} + R_{300} + R_{003} + R_{333}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{333} + R_{003} - R_{030} - R_{300}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{300} + R_{003} - R_{030} - R_{333}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{030} - R_{300} + R_{003} - R_{333}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{105}$$

$$T_{300} = \frac{R_{030} + R_{300} + R_{003} + R_{333}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} - \frac{R_{333} + R_{003} - R_{030} - R_{300}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} - \frac{R_{300} + R_{003} - R_{030} - R_{333}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{030} - R_{300} + R_{003} - R_{333}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{106}$$

$$T_{330} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} - \sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}} + \sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}, \tag{107}$$

$$T_{003} = \frac{R_{030} + R_{300} + R_{003} + R_{333}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{030} + R_{300} - R_{333} - R_{003}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{300} + R_{003} - R_{030} - R_{333}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{300} + R_{333} - R_{003} - R_{030}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}, \tag{108}$$

$$T_{033} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} - \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} + \sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}} - \sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}, \tag{109}$$

$$T_{303} = \sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} + \sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} - \sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}} - \sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}, \tag{110}$$

$$T_{333} = \frac{R_{030} + R_{300} + R_{003} + R_{333}}{4\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}}} + \frac{R_{333} + R_{003} - R_{030} - R_{300}}{4\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}}} + \frac{R_{030} + R_{333} - R_{300} - R_{003}}{4\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}}} + \frac{R_{300} + R_{333} - R_{003} - R_{030}}{4\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}}}. \tag{111}$$

The eigenvalues $\sqrt{\lambda_1^\pm}, \sqrt{\lambda_2^\pm}, \sqrt{\lambda_3^\pm}$ and $\sqrt{\lambda_4^\pm}$ of the matrix $\sqrt{\rho_{123}}$ are given by

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_1^\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{t_1 + 2\sqrt{d_1}} \pm \sqrt{t_1 - 2\sqrt{d_1}}, \\ \sqrt{\lambda_2^\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{t_2 + 2\sqrt{d_2}} \pm \sqrt{t_2 - 2\sqrt{d_2}}, \\ \sqrt{\lambda_3^\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{t_3 + 2\sqrt{d_3}} \pm \sqrt{t_3 - 2\sqrt{d_3}}, \\ \sqrt{\lambda_4^\pm} &= \frac{1}{2}\sqrt{t_4 + 2\sqrt{d_4}} \pm \sqrt{t_4 - 2\sqrt{d_4}}. \end{aligned} \tag{112}$$

The elements of the matrix W defined by (3) are given in terms of $R_{\alpha\beta\gamma}$ and $\sqrt{\lambda_i^\pm}$ by

$$\begin{aligned} w_{12} = w_{21} &= \frac{(R_{111} - R_{212})(R_{121} - R_{222}) + (R_{221} + R_{122})(R_{112} + R_{211})}{8(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-})} \\ &+ \frac{(R_{111} + R_{212})(R_{121} + R_{222}) + (R_{122} - R_{221})(R_{112} - R_{211})}{8(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-})} \\ w_{11} &= (\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}) + (\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}) \\ &+ \frac{(R_{300} + R_{003})^2 + (R_{111} - R_{212})^2 - (R_{221} + R_{122})^2 + (R_{112} + R_{211})^2 - (R_{121} - R_{222})^2 - (R_{030} + R_{333})^2}{16(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-})} \\ &+ \frac{(R_{111} + R_{212})^2 - (R_{122} - R_{221})^2 + (R_{112} - R_{211})^2 - (R_{121} + R_{222})^2 + (R_{003} - R_{300})^2 - (R_{333} - R_{030})^2}{16(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-})}, \\ w_{22} &= (\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}) + (\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}) \\ &+ \frac{(R_{221} + R_{122})^2 - (R_{111} - R_{212})^2 + (R_{121} - R_{222})^2 - (R_{112} + R_{211})^2 + (R_{300} + R_{003})^2 - (R_{030} + R_{333})^2}{16(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-})} \\ &+ \frac{(R_{122} - R_{221})^2 - (R_{111} + R_{212})^2 + (R_{121} + R_{222})^2 - (R_{112} - R_{211})^2 + (R_{003} - R_{300})^2 - (R_{333} - R_{030})^2}{16(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-})}, \\ w_{33} &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})^2 + (\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-})^2 + (\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})^2 + (\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-})^2 \right] \\ &+ \frac{1}{32} \left[\frac{(R_{033} + R_{300} + R_{003} + R_{333})^2 - (R_{112} + R_{121} + R_{211} - R_{222})^2 - (R_{111} - R_{221} - R_{122} - R_{212})^2}{(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-})^2} \right] \\ &+ \frac{1}{32} \left[\frac{(R_{333} + R_{003} - R_{300} - R_{030})^2 - (R_{222} + R_{121} + R_{211} - R_{112})^2 - (R_{111} - R_{221} + R_{122} + R_{212})^2}{(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-})^2} \right] \\ &+ \frac{1}{32} \left[\frac{(R_{300} + R_{003} - R_{030} - R_{333})^2 - (R_{121} - R_{211} - R_{112} - R_{222})^2 - (R_{111} + R_{221} + R_{122} - R_{212})^2}{(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-})^2} \right] \\ &+ \frac{1}{32} \left[\frac{(R_{030} - R_{300} + R_{003} - R_{333})^2 - (R_{121} - R_{211} + R_{112} + R_{222})^2 - (R_{111} + R_{221} - R_{122} + R_{212})^2}{(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-})^2} \right]. \end{aligned}$$

After some long but feasible calculations, we get

$$w_{12} = w_{21} = \frac{2i(\rho_{18}\rho_{72} - \rho_{81}\rho_{27})}{\left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right)} + \frac{2i(\rho_{36}\rho_{54} - \rho_{45}\rho_{63})}{\left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right)}, \tag{113}$$

$$w_{11} = \left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right) + \left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{88})(\rho_{22} - \rho_{77}) + 2(\rho_{18}\rho_{72} + \rho_{81}\rho_{27})}{\left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right)} + \frac{(\rho_{44} - \rho_{55})(\rho_{33} - \rho_{66}) + 2(\rho_{36}\rho_{54} + \rho_{45}\rho_{63})}{\left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right)}, \tag{114}$$

$$w_{22} = \left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right) + \left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{88})(\rho_{22} - \rho_{77}) - 2(\rho_{18}\rho_{72} + \rho_{81}\rho_{27})}{\left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right)} + \frac{(\rho_{44} - \rho_{55})(\rho_{33} - \rho_{66}) - 2(\rho_{36}\rho_{54} + \rho_{45}\rho_{63})}{\left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right)}, \tag{115}$$

$$w_{33} = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^4 \sqrt{d_i}\right) + \frac{(2\rho_{11} + \rho_{66} - \rho_{88} - \rho_{77} - \rho_{55})^2 - 16\rho_{18}\rho_{81}}{8\left(\sqrt{\lambda_1^+} + \sqrt{\lambda_1^-}\right)^2} + \frac{(\rho_{33} - \rho_{66})^2 - 4\rho_{36}\rho_{63}}{2\left(\sqrt{\lambda_4^+} + \sqrt{\lambda_4^-}\right)^2} + \frac{(\rho_{44} - \rho_{55})^2 + (\rho_{63} - \rho_{36})^2 - (\rho_{45} + \rho_{54})^2}{2\left(\sqrt{\lambda_2^+} + \sqrt{\lambda_2^-}\right)^2} + \frac{(\rho_{22} - \rho_{77})^2 - 4\rho_{27}\rho_{72}}{2\left(\sqrt{\lambda_3^+} + \sqrt{\lambda_3^-}\right)^2}. \tag{116}$$

with $\lambda^\pm(i = 1, 2, 3, 4)$ are the eigenvalues of the density matrix ρ_{123} (5).

References

1. Nielsen, M.A., Chuang, I.L.: Quantum Information and Quantum Computation. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
2. Le Bellac, M.: A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation. Cambridge University Press, Cambridge (2006)
3. Bouwmeester, D., Pan, J.W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., Zeilinger, A.: Experimental quantum teleportation. *Nature* **390**, 6660 (1997)
4. Braunstein, S.L., Kimble, H.J.: Teleportation of continuous quantum variables. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998)
5. Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P.G., Zeilinger, A.: Dense coding in experimental quantum communication. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656 (1996)
6. Li, X., Pan, Q., Jing, J., Zhang, J., Xie, C., Peng, K.: Quantum dense coding exploiting a bright Einstein–Podolsky–Rosen beam. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047904 (2002)
7. Bennett, C.H.: Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 557 (1992)
8. Daoud, M., Ez-Zahraouy, H.: Three-dimensional quantum key distribution in the presence of several eavesdroppers. *Physica Scr.* **84**, 045018 (2011)
9. Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N.: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)
10. Bell, J.S.: On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics* **1**, 195 (1964)
11. Yu, T., Eberly, J.H.: Sudden death of entanglement. *Science* **323**, 598 (2009)
12. Wootters, W.K.: Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Inf. Comput.* **1**, 27–44 (2001)
13. Bennett, C.H., Bernstein, H.J., Popescu, S., Schumacher, B.: Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996)
14. Popescu, S., Rohrlich, D.: On the measure of entanglement for pure states. *Phys. Rev. A* **56**, R3319 (1997)
15. Bose, S., Vedral, V.: Mixedness and teleportation. *Phys. Rev. A* **61**, 040101 (2000)
16. Bennett, C.H., Brassard, G., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J., Wootters, W.K.: Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996)
17. Peres, A.: Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996)
18. Vidal, G., Werner, R.F.: Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002)
19. Ollivier, H., Zurek, W.H.: Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001)
20. Henderson, L., Vedral, V.: Classical, quantum and total correlations. *J. Phys. A Math. Gen.* **34**, 6899 (2001)
21. Yurischev, M.A.: On the quantum discord of general X states. *Quantum Inf. Process.* **14**, 3399 (2015)
22. Chakrabarty, I., Agrawal, P., Pati, A.K.: Quantum dissension: generalizing quantum discord for three-qubit states. *Eur. Phys. J. D* **65**, 605 (2011)
23. Dakic, B., Vedral, V., Brukner, C.: Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010)
24. Girolami, D., Adesso, G.: Quantum discord for general two-qubit states: analytical progress. *Phys. Rev. A* **83**(5), 052108 (2011)
25. Huang, Z., Qiu, D.: Geometric quantum discord under noisy environment. *Quantum Inf. Process.* **15**, 1979–1998 (2016)
26. Daoud, M., Laamara, R.A., Seddik, S.: Hilbert–Schmidt measure of pairwise quantum discord for three-qubit X states. *Rep. Math. Phys.* **76**, 207–230 (2015)
27. Daoud, M., Laamara, R.A., Essaber, R., Kaydi, W.: Global quantum correlations in tripartite nonorthogonal states and monogamy properties. *Physica Scr.* **89**, 065004 (2014)
28. Piani, M.: Problem with geometric discord. *Phys. Rev. A* **86**, 034101 (2012)
29. Paula, F.M., de Oliveira, T.R., Sarandy, M.S.: Geometric quantum discord through the Schatten 1-norm. *Phys. Rev. A* **87**, 064101 (2013)
30. Luo, S., Fu, S.: Measurement-induced nonlocality. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120401 (2011)
31. Huang, Z., Qiu, D., Mateus, P.: Geometry and dynamics of one-norm geometric quantum discord. *Quantum Inf. Process.* **15**, 301–326 (2016)
32. Huang, Z.: Dynamics of quantum correlation of atoms immersed in a thermal quantum scalar fields with a boundary. *Quantum Inf. Process.* **17**, 221 (2018)

33. Girolami, D., Tufarelli, T., Adesso, G.: Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 240402 (2013)
34. Slaoui, A., Daoud, M., Ahl Laamara, R.: The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence: a comparative study. *Quantum Inf. Process.* **17**, 178 (2018)
35. Wigner, E.P., Yanase, M.M.: Information contents of distributions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **49**, 910 (1963)
36. Luo, S.L.: Quantum versus classical uncertainty. *Theor. Math. Phys.* **143**, 681–688 (2005)
37. Luo, S.L.: Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 180403 (2003)
38. Frieden, B.R.: *Science from Fisher Information: A Unification*. Cambridge University Press, Cambridge (2004)
39. Slaoui, A., Bakmou, L., Daoud, M., Laamara, R.A.: A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model. *Phys. Lett. A* **383**, 2241–2247 (2019)
40. Luo, S.L., Fu, S.S., Oh, C.H.: Quantifying correlations via the Wigner-Yanase skew information. *Phys. Rev. A* **85**, 032117 (2012)
41. Girolami, D.: Observable measure of quantum coherence in finite dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 170401 (2014)
42. Du, S.P., Bai, Z.F.: The Wigner-Yanase information can increase under phase sensitive incoherent operations. *Ann. Phys. (New York)* **359**, 136 (2015)
43. Baumgratz, T., Cramer, M., Plenio, M.B.: Quantifying coherence. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014)
44. Kraus, K.: *States, Effect, and Operations: Fundamental Notions in Quantum Theory*. Springer, Berlin (1983)
45. Nielson, M.A., Chuang, I.L.: *Quantum computation and quantum information*. *Am. J. Phys.* **70**, 558 (2002)
46. Slaoui, A., Shaukat, M.I., Daoud, M., Ahl Laamara, R.: Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission. *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 413 (2018)
47. Huang, Z., Zhang, C.: Protecting quantum correlation from correlated amplitude damping channel. *Braz. J. Phys.* **47**, 400–405 (2017)
48. Sen, A., Bhar, A., Sarkar, D.: Local quantum uncertainty and bounds on quantumness for orthogonally invariant class of states. *Quantum Inf. Process.* **14**, 269–285 (2015)
49. Vinjanampathy, S., Rau, A.: Calculation of quantum discord for qubit-qudit or N qubits. [arXiv:1106.4488](https://arxiv.org/abs/1106.4488) (2011)
50. Giorgi, G.L., Bellomo, B., Galve, F., Zambrini, R.: Genuine quantum and classical correlations in multipartite systems. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 190501 (2011)
51. Cabello, A.: Bell's theorem with and without inequalities for the three-qubit Greenberger–Horne–Zeilinger and W states. *Phys. Rev. A* **65**, 032108 (2002)
52. Sabin, C., Garcia-Alcaine, G.: A classification of entanglement in three-qubit systems. *Eur. Phys. J. D* **48**, 435 (2008)
53. Weinstein, Y.S.: Tripartite entanglement witnesses and entanglement sudden death. *Phys. Rev. A* **79**, 012318 (2009)
54. Hamieh, S., Kobes, R., Zaraket, H.: Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations. *Phys. Rev. A* **70**, 052325 (2004)
55. Buscemi, F., Bordone, P.: Time evolution of tripartite quantum discord and entanglement under local and nonlocal random telegraph noise. *Phys. Rev. A* **87**, 042310 (2013)
56. Beggi, A., Buscemi, F., Bordone, P.: Analytical expression of genuine tripartite quantum discord for symmetrical X -states. *Quantum Inf. Process.* **14**, 573–592 (2015)
57. Kim, J.S., Gour, G., Sanders, B.C.: Limitations to sharing entanglement. *Contemp. Phys.* **53**, 417–432 (2012)
58. Streltsov, A., Adesso, G., Piani, M., Bruss, D.: Are general quantum correlations monogamous? *Phys. Rev. Lett.* **109**, 050503 (2012)
59. Coffman, V., Kundu, J., Wootters, W.K.: Distributed entanglement. *Phys. Rev. A* **61**, 052306 (2000)

5.4 Contribution 4 : A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model

Physics Letters A, 383 (2019) 2241-2247

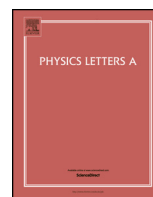
5.4.1 Résumé :

Bien que la capacité de l'intrication à améliorer la métrologie quantique a été bien explorée dans des scénarios idéaux, les contraintes expérimentales, telles que le bruit, les états mixtes et la restriction aux mesures locales, rendent généralement impossible l'atteinte de la limite quantique ultime. Dans ce contexte, une étude plus générale du rôle des corrélations quantiques dans la métrologie quantique est essentielle, car elle peut conduire à des schémas de mesure plus généraux qui tirent parti des propriétés non classiques. La discordance quantique est une mesure des corrélations non classiques, dont l'intrication est un sous-ensemble. L'exploration de la signification opérationnelle de la discordance quantique en tant que ressource dans les tâches de la métrologie quantique est d'une importance essentielle pour notre compréhension des corrélations non classiques.

Dans ce travail, nous montrons que l'information quantique de Fisher locale joue un rôle essentiel dans l'évaluation des corrélations quantiques. Cela est dû à sa relation avec le concept de l'incertitude quantique locale. Nous montrons que l'incertitude quantique locale est majorée par l'information quantique de Fisher locale dans toute tâche métrologique de l'estimation de phase et que l'analogie quantique de l'inégalité de Cramér-Rao classique peut s'écrire en termes de ces deux quantificateurs de corrélations quantiques de type discordance. De plus, l'incertitude quantique locale d'un état quantique mixte garantit une précision minimale quantifiée par l'information quantique de Fisher dans le protocole d'estimation de phase optimale.

D'un point de vue analytique, nous proposons un formalisme relativement simple pour dériver des expressions analytiques des corrélations quantiques. Grâce à ce formalisme, nous analysons le comportement de l'incertitude quantique locale et le comparons au comportement de l'information quantique de Fisher locale dans le modèle de Heisenberg XY . Nous considérons deux situations particulières. La première concerne le modèle XY anisotrope et la seconde situation concerne le modèle XY isotrope soumis à un champ magnétique externe. Dans ces deux situations, l'information quantique de Fisher locale et l'incertitude quantique locale présentent une variation similaire. Plus important encore, l'information de Fisher quantique locale est toujours supérieure à l'incertitude quantique locale. Ces résultats confirment que ces deux mesures offrent un outil prometteur pour comprendre le rôle des corrélations quantiques autres que l'intrication dans l'amélioration de la précision et de l'efficacité des protocoles de métrologie quantique.

5.4.2 Contenu de la publication 4 :



A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model

A. Slaoui^{a,*}, L. Bakmou^a, M. Daoud^b, R. Ahl Laamara^{a,c}

^a LPHE-MS, Faculty of Sciences, Mohammed V University of Rabat, Rabat, Morocco

^b Department of Physics, Faculty of Sciences, University Ibn Tofail, Kénitra, Morocco

^c Centre of Physics and Mathematics (CPM), Mohammed V University of Rabat, Rabat, Morocco

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 February 2019

Received in revised form 26 March 2019

Accepted 19 April 2019

Available online 26 April 2019

Communicated by M.G.A. Paris

Keywords:

Local quantum Fisher information

Local quantum uncertainty

Quantum correlations

Quantum Heisenberg XY model

ABSTRACT

Recently, it has been shown that the quantum Fisher information via local observables and via local measurements (i.e., local quantum Fisher information (LQFI)) is a central concept in quantum estimation and quantum metrology and captures the quantumness of correlations in multi-component quantum system (Kim et al. (2018) [28]). This new discord-like measure is very similar to the quantum correlations measure called local quantum uncertainty (LQU). In the present study, we have revealed that LQU is bounded by LQFI in the phase estimation protocol. Also, a comparative study between these two quantum correlations quantifiers is addressed for the quantum Heisenberg XY model. Two distinct situations are considered. The first one concerns the anisotropic XY model and the second situation concerns isotropic XY model submitted to an external magnetic field. Our results confirm that LQFI reveals more quantum correlations than LQU.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Quantum entanglement, as a special type of quantum correlations, is a key ingredient in quantum information science [1–3]. Nowadays, it has been realized that entanglement plays a very important role in many applications in quantum information theory including quantum computing [4], quantum communications [5,6] and quantum key distribution [7]. In this sense, their quantification and investigation in multipartite closed and open systems is one of the most fundamental problems in the quantum physics literature. Many different quantification methods have been proposed [8,9] and many studies have investigated the dynamical behavior of entanglement submitted to decoherence effects, which constitutes one of the major challenges for the physical realization of quantum information and computation protocols [10,11].

On the other hand, recent studies showed that quantum correlations can not only be limited to entanglement, because it represents only one special kind of correlation useful for quantum technology [12]. It has been shown that some separable quantum states have non-classical correlations that may arise without

entanglement and that are also very useful in practical quantum information processing [13,14]. Additionally, finding physically meaningful and mathematically rigorous quantifiers of the quantum correlation beyond entanglement have attracted an impressive amount of attention and efforts. Historically, entropic quantum discord (QD), first introduced by Ollivier and Zurek [15] and later proposed by Henderson and Vedral [16], is the widely used quantum correlations quantifier and several works were dedicated to this class of measure. Streltsov and Zurek [17] showed that the measurement results cannot be communicated perfectly by classical means if a measurement device is in a nonclassical state. This means that the lost of information occurs even when the measurement apparatus is not entangled with the system and the amount of this lost information turns out to be exactly the quantum discord. Moreover, Werlang et al. [18], showed that QD is more robust than entanglement under the same Markovian environment conditions for dissipative systems. Quantum discord is defined as the difference between two classically-equivalent expressions of the mutual information: the quantum mutual information and the local measurement-induced quantum mutual information. The analytical expressions of QD have been found only for some special types of states and the situation becomes more complicated for general quantum states. This is due to an optimization procedure for the conditional entropy over all local generalized measurements which is difficult to perform. The computation of QD is NP-complete [19]. These difficulties led Dakic et al., to propose

* Corresponding author.

E-mail addresses: abdallahsalaoui1992@gmail.com (A. Slaoui), baqmou@gmail.com (L. Bakmou), m_daoud@hotmail.com (M. Daoud), ahllaamara@gmail.com (R. Ahl Laamara).

an alternative formulation of QD which is called “the geometric measure of quantum discord (GMQD)”. It is the minimum Hilbert-Schmidt distance between the given state and the zero discord state [20]. From an analytical point of view, the calculation of this geometric measure requires a simpler minimization process compared to the entropic QD [21,22]. Despite this remarkable feature, the GMQD cannot be considered as a faithful quantifier of non-classical correlations [23].

To overcome such difficulties and problems, now tools were proposed to quantify the non-classical correlations. In this sense, Girolami et al., [24] have introduced the concept of local quantum uncertainty (LQU) as a discord-like measure of quantum correlation. It is defined as the minimum uncertainty induced by measurement of a single local observable on a quantum state using the notion of Wigner-Yanase skew information [25]. This measure satisfies the full physical requirements of a measure of quantum correlations. Beyond its importance as a quantum correlation quantifier, LQU is also deeply related to quantum Fisher information (QFI) in the context of quantum metrology. Indeed, it has been proven that in the case of unitary dynamics of a state ρ , i.e., $\rho_\theta = U_\theta^\dagger \rho U_\theta$ with $U_\theta = e^{iH\theta}$, the skew information is majorized by the QFI associated with the phase parameter and the quantum analog of the classical Cramer-Rao inequality can be written in term of the skew information [26,27]. Therefore, the LQU of a bipartite mixed probe state guarantees a minimum precision quantified by the QFI in the optimal phase estimation protocol [24]. Recently, the concept of local quantum Fisher information (LQFI) was introduced in [28] to characterize quantum correlations in terms of QFI. This reliable quantum discord-like quantifier, is based on minimizing QFI over a local maximally informative observable associated with one of the subsystems. Furthermore, LQFI offers a promising tool to understand the role of quantum correlations other than entanglement in enhancing the precisions and the efficiency of quantum metrology protocols.

Since LQU and LQFI are both based on the notion of quantum uncertainty, it is of interest to study the relationship and interplay between them. This is the main issue that we develop in this work. We give the relation between LQU and LQFI for qubit-qudit systems. This paper is structured as follows. In section 2, we provide an overview on LQFI and LQU to quantify the degree of quantum correlations contained in a bipartite quantum system. We show that LQU is majorized by LQFI in any metrological task of the phase estimation. In section 3, we analyze the behavior of the LQU and compare it to the behavior of the LQFI in Heisenberg XY model. We consider two special situations [29]. The first one concerns the anisotropic XY model and the second situation concerns the isotropic XY model submitted to an external magnetic field. Concluding remarks close this paper.

2. Quantifiers of non-classical correlations by quantum uncertainty

2.1. Local quantum Fisher information

In quantum estimation theory, the quantum Fisher information (QFI) is recognized as the most widely used quantity for characterizing the ultimate accuracy in parameter estimation scenarios [30–32]. More recently, many efforts have been made in evaluating the dynamics of QFI to establish the relevance of quantum entanglement in quantum metrology [33,34]. It has been demonstrated that, in the unitary processes, entanglement leads to a notable improvement of the accuracy of parameter estimation [35,36]. In this context, it is natural to wonder whether quantum correlations beyond entanglement can be related to precision in quantum metrology protocols. Usually, for an arbitrary quantum state ρ_θ

that depends on the parameter θ , we can define the QFI as [26, 37,38]

$$\mathcal{F}(\rho_\theta) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\rho_\theta L_\theta^2 \right], \tag{1}$$

where the symmetric logarithmic derivative L_θ is defined as the solution of the equation

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta). \tag{2}$$

The parametric states ρ_θ can be obtained from an initial probe state ρ subjected to a unitary transformation $U_\theta = e^{iH\theta}$ dependent on θ and generated by a Hermitian operator H , i.e., $\rho_\theta = U_\theta^\dagger \rho U_\theta$. In this case $\mathcal{F}(\rho_\theta)$, that we denote by $\mathcal{F}(\rho, H)$, is given by

$$\mathcal{F}(\rho, H) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2, \tag{3}$$

where we used the spectral decomposition of ρ , i.e., $\rho = \sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ with $p_i \geq 0$ and $\sum_{i=1} p_i = 1$. The QFI is θ -independent. Now we consider an $2 \times d$ bipartite quantum state ρ_{AB} in the Hilbert space $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. We assume that the dynamics of the first part is governed by the local phase shift transformation $e^{-i\theta H_A}$, with $H_A \equiv H_a \otimes \mathbb{I}_B$ is the local Hamiltonian. In this case, QFI reduces to local quantum Fisher information (LQFI). It writes [39]

$$\mathcal{F}(\rho, H_A) = \text{Tr} \left(\rho H_A^2 \right) - \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | H_A | \psi_j \rangle|^2. \tag{4}$$

Local quantum Fisher information was introduced to deal with pairwise quantum correlations of discord type [28]. This quantifier enables us to gain a deeper insight on how quantum correlations are instrumental in setting metrological precision. It has the desirable properties that any good quantum correlation quantifiers should satisfy. Indeed, it is non-negative and vanishes for zero discord bipartite states (classically correlated states). It is invariant under any local unitary operation and coincides with the geometric discord for pure quantum states [28]. The quantification of quantum correlations in terms of local quantum Fisher information $\mathcal{Q}(\rho)$ is defined as the minimum quantum Fisher information over all local Hamiltonians H_A acting on the A -part [28]

$$\mathcal{Q}(\rho) = \min_{H_A} \mathcal{F}(\rho, H_A). \tag{5}$$

The general form of a local Hamiltonian is $H_a = \vec{\sigma} \cdot \vec{r}$ with $|\vec{r}| = 1$ and $\vec{\sigma} = (\sigma_x \equiv \sigma_1, \sigma_y \equiv \sigma_2, \sigma_z \equiv \sigma_3)$ are the usual Pauli matrices. It can be seen that $\text{Tr}(\rho H_A^2) = 1$ and the second term in the equation (4) can be expressed as

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | H_A | \psi_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{i \neq j} \sum_{l,k=1}^3 \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} \langle \psi_i | \sigma_l \otimes \mathbb{I}_B | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \sigma_k \otimes \mathbb{I}_B | \psi_i \rangle \\ &= \vec{r}^\dagger \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{r} \end{aligned} \tag{6}$$

where the elements of the 3×3 symmetric matrix \mathbf{M} are given by

$$M_{lk} = \sum_{i \neq j} \frac{2p_i p_j}{p_i + p_j} \langle \psi_i | \sigma_l \otimes \mathbb{I}_B | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \sigma_k \otimes \mathbb{I}_B | \psi_i \rangle. \tag{7}$$

To minimize $\mathcal{F}(\rho, H_A)$, it is necessary to maximize the quantity $\vec{r}^\dagger \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{r}$ over all unit vectors \vec{r} . The maximum value coincides with

the maximum eigenvalue of M . Hence, the minimal value of local quantum Fisher information $\mathcal{Q}(\rho)$ is

$$\mathcal{Q}(\rho) = 1 - \lambda_{\max}(M), \tag{8}$$

where λ_{\max} denotes the maximal eigenvalue of the symmetric matrix M defined by (7).

2.2. Local quantum uncertainty

Unlike the classic case, due to the probabilistic character of quantum mechanics, two noncommuting observables cannot be simultaneously measured with arbitrary precision and the uncertainty relation imposes a fundamental limit on the precision. Usually, the total uncertainty due to a single observable H measurement in a quantum state ρ is quantified by the variance as $\text{Var}(\rho, H) = \text{Tr}(\rho H^2) - (\text{Tr}(\rho H))^2$. This uncertainty may exhibit contributions of quantum and classical nature when the statistical error in its measurement is due to classical ignorance about the classical mixing in ρ . To quantify only the quantum part of the variance, Wigner and Yanase introduced the notion of skew information as a good quantifier of this uncertainty. It is defined as [25]

$$\mathcal{I}(\rho, H) = -\frac{1}{2} \text{Tr}([\sqrt{\rho}, H]^2). \tag{9}$$

For a bipartite quantum state $\rho \equiv \rho_{AB}$, a discord-like measure of quantum correlations was recently introduced by Girolami et al. [24]. This is called local quantum uncertainty and it is defined as the minimum skew information attainable with a single local measurement. It is given by [40,41]

$$\mathcal{U}(\rho) \equiv \min_{H_A} \mathcal{I}(\rho, H_A \otimes \mathbb{I}_B), \tag{10}$$

where H_A is a Hermitian operator acting on the subsystem A admitting a nondegenerate spectrum and \mathbb{I}_B is the identity operator acting on the subsystem B . For pure bipartite states, the local quantum uncertainty reduces to the linear entropy of entanglement and vanishes for classically correlated states [24]. This measure is directly linked to the concept of quantum discord and leads to an entire class of bona fide measures of non-classical correlations. It is also effortlessly computable contrarily to some other measures for which closed analytical expressions are not always easy obtainable. The closed form of the local quantum uncertainty for $2 \times d$ quantum systems is

$$\mathcal{U}(\rho) = 1 - \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \tag{11}$$

where ξ_1, ξ_2 and ξ_3 are the eigenvalues of the 3×3 matrix W whose matrix elements are defined by

$$\omega_{ij} \equiv \text{Tr}\{\sqrt{\rho}(\sigma_i \otimes \mathbb{I}_B)\sqrt{\rho}(\sigma_j \otimes \mathbb{I}_B)\}, \tag{12}$$

with $i, j = 1, 2, 3$ and the σ_i represent the Pauli matrices. For the so-called X states, containing the non-zero entries only along the diagonal and anti-diagonal (states with a visual appearance like the letter X [42,43]), the analytical expression of local quantum uncertainty was derived in Refs. [44,45]. Using the identity resolution of the orthonormal basis $\{|\psi_i\rangle\}$, i.e., $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \mathbb{I}$, it is simple to verify that [26]

$$\mathcal{I}(\rho, H) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sqrt{p_i} - \sqrt{p_j})^2 |\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle|^2, \tag{13}$$

and

$$\mathcal{F}(\rho, H) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(1 + \frac{2\sqrt{p_i p_j}}{p_i + p_j}\right) (\sqrt{p_i} - \sqrt{p_j})^2 |\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle|^2. \tag{14}$$

The skew information and QFI satisfy the following inequality

$$\mathcal{I}(\rho, H) \leq \mathcal{F}(\rho, H) \leq 2\mathcal{I}(\rho, H), \tag{15}$$

from which one gets

$$\mathcal{U}(\rho) \leq \mathcal{Q}(\rho) \leq 2\mathcal{U}(\rho). \tag{16}$$

In quantum metrology, the parameter θ can be estimated through an (unbiased) estimator $\hat{\theta}$ and the limit of the precision of their measurement is usually framed by the quantum Cramér-Rao bound which writes [38]

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n\mathcal{F}(\rho, H)}, \tag{17}$$

where n is the number of times the estimation protocol is repeated. According to Cramér-Rao theorem, more precision is obtained for small variance. It is clear that the inverse of the QFI depicts the lower error limit in statistical estimation of an unknown parameter. It should also be noted that, in the unitary evolution, LQU is majorized by QFI, i.e.,

$$\mathcal{U}(\rho) \leq \mathcal{I}(\rho, H) = \mathcal{I}(\rho_\theta, H) \leq \mathcal{F}(\rho, H). \tag{18}$$

For $n = 1$, the parameter precision can be bound by LQU and by LQFI as

$$\text{Var}(\hat{\theta})_{\min} \leq \frac{1}{\mathcal{U}(\rho)}, \quad \text{and} \quad \text{Var}(\hat{\theta})_{\min} \leq \frac{1}{\mathcal{Q}(\rho)}. \tag{19}$$

3. Non-classical correlations in the quantum Heisenberg XY model

The Heisenberg Hamiltonian for a chain of N qubits can be written as [46–48]

$$H = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z), \tag{20}$$

where σ_i^α ($\alpha = x, y, z$) are Pauli matrices satisfying the usual commutation relations and J_α are the coupling constants of the model. For $J_x \neq J_y \neq J_z$, the model is called the anisotropic Heisenberg XYZ model. In the case where $J_x = J_y \neq J_z$, the Hamiltonian describes the partial anisotropic Heisenberg XXZ model. Finally, for $J_x = J_y = J_z$ this corresponds to the isotropic Heisenberg XXX model. The interaction in the chain is said to be antiferromagnetic for J_α positive and ferromagnetic for J_α negative. We assume periodic boundary conditions, so that the $(N + 1)$ th site is identified with the first site. Recently, several studies have been conducted on Heisenberg spin systems to investigate their entanglement properties at certain temperatures. In this context, an interesting type of entanglement called thermal entanglement was introduced and analyzed in Heisenberg models XYZ [49], XXZ [50] and XXX [51]. In this work, we employ the concepts of LQFI and LQU to investigate the non-classical correlations in the XY ($J_z = 0$) anisotropic model and the XY ($J_z = 0$) isotropic model in external magnetic field. For a system in thermal equilibrium, the corresponding state is described by the density operator $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ where $Z = \text{Tr}[\exp(-\beta H)]$ is the partition function and $\beta = 1/kT$ (k is the Boltzmann constant and T is the temperature) and H is the system Hamiltonian. In the numerical calculations, we set $k = 1$.

3.1. Two-qubit anisotropic XY model

The two-qubit anisotropic XY model is obtained from (20) for $N = 2$ by setting zero the coupling constant on the z-axis ($J_z = 0$). In this case, using the raising and lowering operators $\sigma_i^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y)$, the Hamiltonian (20) becomes

$$H = J(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^- \sigma_1^+) + J\gamma(\sigma_1^+ \sigma_2^+ + \sigma_1^- \sigma_2^-), \tag{21}$$

with $J = \frac{J_x + J_y}{2}$ and $\gamma = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}$. Without loss of generality, we take $J = 1$. The parameter γ is the anisotropic parameter; it is zero ($J_x = J_y$) for the isotropic XX model and ± 1 for the Ising model. The Hamiltonian H satisfies the eigenvalues equations:

$$H|\psi^\pm\rangle = \pm|\psi^\pm\rangle, \quad H|\chi^\pm\rangle = \pm\gamma|\chi^\pm\rangle, \tag{22}$$

where $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ and $|\chi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ are the states of Bell maximally entangled. In the standard basis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, the density matrix of this system is given by

$$\rho = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \cosh(\gamma\beta) & 0 & 0 & -\sinh(\gamma\beta) \\ 0 & \cosh(\beta) & -\sinh(\beta) & 0 \\ 0 & -\sinh(\beta) & \cosh(\beta) & 0 \\ -\sinh(\gamma\beta) & 0 & 0 & \cosh(\gamma\beta) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

where $Z = \text{Tr}[\exp(-H\beta)] = 2(\cosh(\beta) + \cosh(\gamma\beta))$ is the partition function. The eigenvalues of the density matrix ρ (23) are given by

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{e^{-\beta}}{Z}, & p_2 &= \frac{e^\beta}{Z}, \\ p_3 &= \frac{e^{-\gamma\beta}}{Z}, & p_4 &= \frac{e^{\gamma\beta}}{Z}, \end{aligned} \tag{24}$$

and the corresponding eigenstates are respectively given by

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), & |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle). \end{aligned} \tag{25}$$

To obtain the explicit expression of LQFI, one computes first the elements of the matrix M . From (7), it is easy to check that their off-diagonal elements are equal to zero and the diagonal elements are given as

$$\begin{aligned} M_{11} &= \text{sech}^2\left(\frac{(1-\gamma)\beta}{2}\right), & M_{22} &= \text{sech}^2\left(\frac{(1+\gamma)\beta}{2}\right), \\ M_{33} &= \text{sech}(\beta) \text{sech}(\gamma\beta). \end{aligned} \tag{26}$$

It is simple to verify that

$$M_{11} - M_{33} = \frac{\cosh((1+\gamma)\beta) - 1}{\cosh(\beta) \cosh(\gamma\beta) [\cosh((1-\gamma)\beta) + 1]}, \tag{27}$$

and

$$M_{22} - M_{33} = \frac{\cosh((1-\gamma)\beta) - 1}{\cosh(\beta) \cosh(\gamma\beta) [\cosh((1+\gamma)\beta) + 1]}. \tag{28}$$

From equations (27) and (28), it is clear that $M_{33} \leq M_{11}$ and $M_{33} \leq M_{22}$. Therefore, the analytical expression of LQFI is

$$\mathcal{Q}(\rho) = \begin{cases} 1 - M_{22} & \text{for } -1 \leq \gamma \leq 0 \\ 1 - M_{11} & \text{for } 0 \leq \gamma \leq 1 \end{cases} \tag{29}$$

On the other hand, to determine the analytic expression of LQU given by (11), it is necessary to compute the matrix elements given by (12). After straightforward calculation, the LQU is

$$\mathcal{U}(\rho) = 1 - \max\{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}\}, \tag{30}$$

where

$$\omega_{11} = \frac{(\cosh(\beta) + 1)(\cosh(\beta\gamma) + 1) + \sinh(\beta\gamma) \sinh(\beta)}{(\cosh(\beta\gamma) + \cosh(\beta)) \sqrt{(\cosh(\beta) + 1)(\cosh(\beta\gamma) + 1)}}, \tag{31}$$

$$\omega_{22} = \frac{(\cosh(\beta) + 1)(\cosh(\beta\gamma) + 1) - \sinh(\beta\gamma) \sinh(\beta)}{(\cosh(\beta\gamma) + \cosh(\beta)) \sqrt{(\cosh(\beta) + 1)(\cosh(\beta\gamma) + 1)}}, \tag{32}$$

and

$$\omega_{33} = \frac{2}{\cosh(\beta\gamma) + \cosh(\beta)}. \tag{33}$$

To compare the eigenvalues ω_{11} , ω_{22} and ω_{33} , we analyze the sign of the following quantities:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\omega_{11} - \omega_{33}) &= \text{sign}\left(\cosh((1+\gamma)\beta) - 1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\cosh(\beta) + 1} - \sqrt{\cosh(\gamma\beta) + 1}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{34}$$

and

$$\begin{aligned} \text{sign}(\omega_{22} - \omega_{33}) &= \text{sign}\left(\cosh((1-\gamma)\beta) - 1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\cosh(\beta) + 1} - \sqrt{\cosh(\gamma\beta) + 1}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{35}$$

We note that $\omega_{33} \leq \omega_{11}$ and $\omega_{33} \leq \omega_{22}$. Thus, to determine the expression of LQU, one should find the conditions under which $\omega_{11} \leq \omega_{22}$ or $\omega_{22} \leq \omega_{11}$. Finally, we obtain

$$\mathcal{U}(\rho) = \begin{cases} 1 - \omega_{11} & \text{when } 0 \leq \gamma \leq 1 \\ 1 - \omega_{22} & \text{when } -1 \leq \gamma \leq 0 \end{cases} \tag{36}$$

In Fig. 1 (a), we depict the behavior of local quantum Fisher information versus the coupling parameter γ for various values of the temperature. It is clearly seen from the results reported in this figure that the maximum amount of local quantum Fisher information is obtained when $\gamma \rightarrow 0$ and for low temperatures. This indicates that the isotropic XX model exhibits more pairwise quantum correlations, especially for lower values of temperatures. We notice that increasing the temperature values tend to reduce the amount of quantum correlations in the system. In the limiting case when $\gamma \rightarrow 1$, which corresponds to Ising model, the quantum correlations vanish (even for low temperature). The results reported in Fig. 1(b) confirm the results obtained in Fig. 1(a). In particular, one verifies that the maximal amount of quantum correlations is exhibited by isotropic XX model ($\gamma = 0$) and the temperature effects tend to destroy the quantum correlations.

Let us now analyze the behavior of quantum correlations measured by local quantum uncertainty. As depicted in Fig. 2(a) and Fig. 2(b), it is obvious that the local quantum uncertainty and local quantum Fisher information exhibit similar variation versus B and T . Furthermore, it is simple to see from the results depicted in Fig. 1 and Fig. 2 that the amount of quantum correlations measured by local quantum Fisher information is greater than the local quantum uncertainty. This result agrees with the inequality (16) which states that LQFI is always greater than LQU.

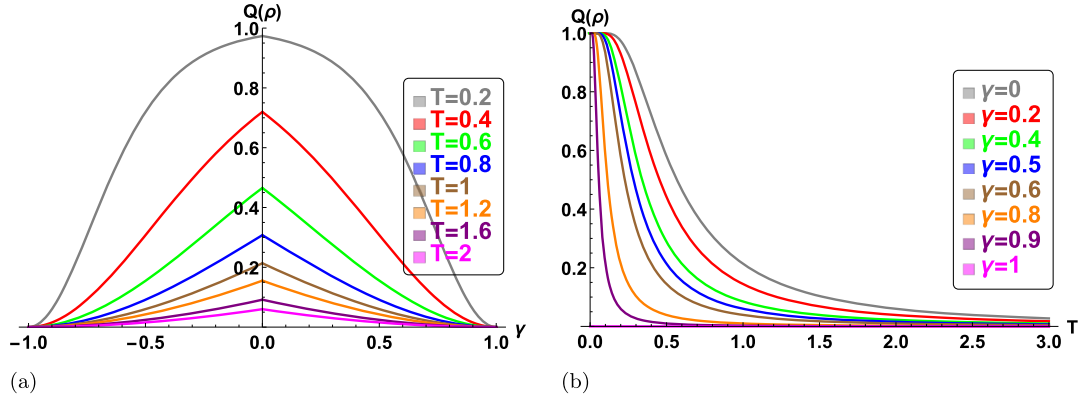


Fig. 1. Local quantum Fisher information versus the coupling parameter γ and the temperature T . (For interpretation of the colors in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

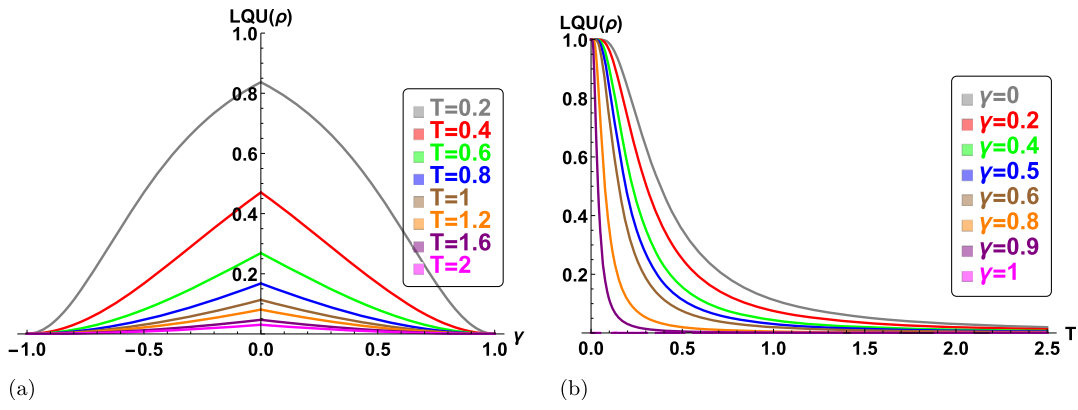


Fig. 2. Local quantum uncertainty versus the coupling parameter γ and the temperature T .

3.2. Two qubit isotropic XY model with a magnetic field

Consider now the Hamiltonian for the two qubit isotropic XY model subjected to an external magnetic field B along the z axis. For $N = 2$, $J_x = J_y = J$ and $J_z = 0$, the Hamiltonian (20) becomes

$$H = J \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^z. \tag{37}$$

In terms of the raising and lowering operators σ^\pm , the Hamiltonian (37) rewrites

$$H = J (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) + \frac{B}{2} (\sigma_1^z + \sigma_2^z). \tag{38}$$

The corresponding eigenvalues and eigenvectors are given by

$$H |00\rangle = B |00\rangle, \quad H |11\rangle = -B |11\rangle, \quad H |\psi^\pm\rangle = J |\psi^\pm\rangle, \tag{39}$$

where $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle)$ are the maximally entangled Bell states. In the standard computational basis, the density matrix of this system, in thermal equilibrium, is given by

$$\rho = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-B\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(J\beta) & -\sinh(J\beta) & 0 \\ 0 & -\sinh(J\beta) & \cosh(J\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{B\beta} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

where the partition function in this case is given by $Z = \cosh(J\beta) + \cosh(B\beta)$. The eigenvalues and eigenvectors associated with this density matrix are given respectively by

$$p_1 = \frac{e^{-B\beta}}{Z}, \quad p_2 = \frac{e^{B\beta}}{Z}, \quad p_3 = \frac{e^{-J\beta}}{Z}, \quad p_4 = \frac{e^{J\beta}}{Z}, \tag{41}$$

and

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |00\rangle, & |\psi_2\rangle &= |11\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle). \end{aligned} \tag{42}$$

Reporting these eigenvalues and eigenvectors in Eq. (7), it is simple to check that the matrix M is diagonal (i.e., $M_{12} = M_{13} = M_{23} = 0$) and the diagonal elements are given by

$$M_{11} = M_{22} = \frac{2(1 + \cosh(B\beta) \cosh(J\beta))}{(\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta))^2}, \tag{43}$$

and

$$M_{33} = \frac{\operatorname{sech}(J\beta)}{4(\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta))}. \tag{44}$$

It is also simple to verify that

$$M_{11} - M_{33} = \frac{7 + \cosh(B\beta) (4 \cosh(2J\beta) + 3) \operatorname{sech}(J\beta)}{4(\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta))^2} \geq 0. \tag{45}$$

Using the expression of LQFI (8), one finds

$$Q(\rho) = 1 - \frac{2(1 + \cosh(B\beta) \cosh(J\beta))}{(\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta))^2}. \tag{46}$$

On the other hand, to obtain the explicit expression of LQU, we compute first the elements of the matrix W given by (12). The non-zero elements write as

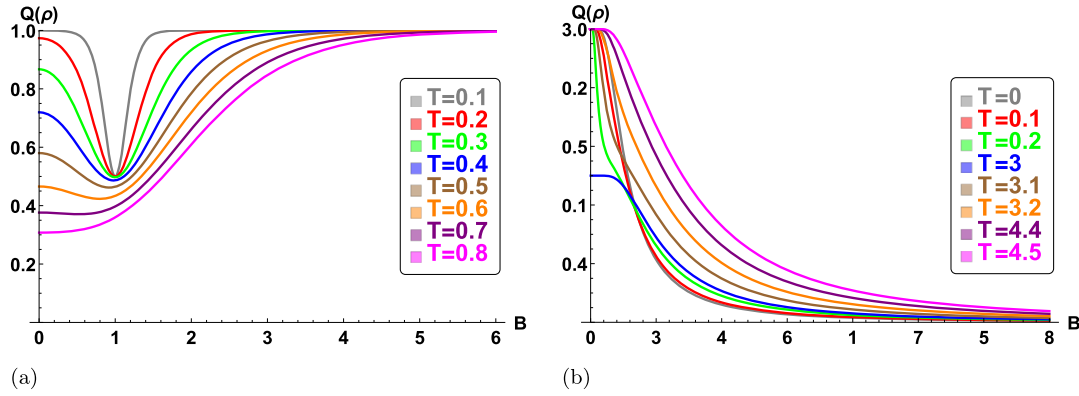


Fig. 3. Local quantum Fisher information versus the magnetic field B and the temperature T .

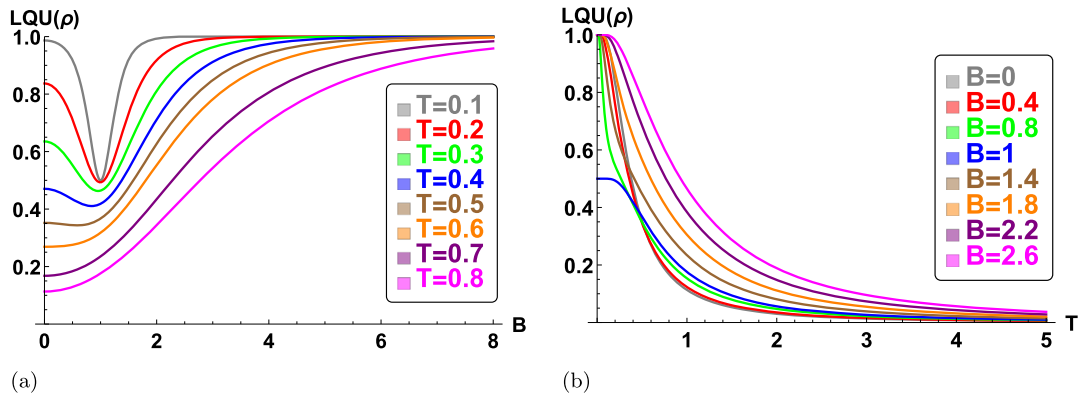


Fig. 4. Local quantum uncertainty versus the magnetic field B and the temperature T .

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \frac{\sqrt{(\cosh(B\beta) + 1)(\cosh(J\beta) + 1)}}{\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta)}, \tag{47}$$

$$\omega_{33} = \frac{2}{\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta)}. \tag{48}$$

Since $\omega_{11} \geq \omega_{33}$, LQU is simply given by

$$\mathcal{U}(\rho) = 1 - \frac{\sqrt{(\cosh(B\beta) + 1)(\cosh(J\beta) + 1)}}{\cosh(B\beta) + \cosh(J\beta)}. \tag{49}$$

The behavior of local quantum Fisher information in isotropic XY model subjected to an external magnetic field is plotted in Fig. 3. Fig. 3(a) gives the local quantum Fisher information versus the magnetic field B for various values of the temperature T . The local quantum Fisher information exhibit a sudden change behavior for $B = 1$. In addition, the increase of the magnetic field enhances the amount of quantum correlations contained in the system until it reaches a maximum amount of correlations. We notice that the amount of local quantum Fisher information is larger for low temperatures and it is reduced by increasing the values of T . The analysis of local quantum Fisher information versus the temperature reported in Fig. 3(b) shows that the LQFI is maximal for $T = 0$ and decreases monotonically with T increasing to become zero for higher temperature. From Fig. 3(a), the LQFI decreases for $B < 1$ and low temperatures and starts increasing when $B > 1$ to reach the maximal value $Q(\rho)_{\max} = 1$. This result is corroborated by the plot reported in Fig. 3(b) which shows that for a fixed low temperature T , the quantum correlations decrease as B increases. This shows that an external magnetic field destroys the amount of quantum correlation in the system for low temperature. On the other hand, the behavior of quantum correlations captured by local quantum uncertainty versus the magnetic field are depicted in Fig. 4(a) and versus the temperature are reported in Fig. 4(b). We

remark that the local quantum Fisher information and the local quantum uncertainty exhibit similar variations versus the temperature T and the magnetic field B (see Figs. 3 and 4). The results reported in the Figs. 3 and 4 show that the local quantum Fisher information is always greater than the local quantum uncertainty. This agrees with the result given by the inequality (16).

4. Concluding remarks

In summary, the local quantum Fisher information plays an essential role in evaluating quantum correlations. This is due to its relationship with the concept of local quantum uncertainty. Also, the local quantum Fisher information is essential to determine the precision in metrological protocols.

To analyze the behaviors of these quantum correlation quantifiers, we have considered two variants of the Heisenberg XY model. The first one concerns the anisotropic XY model and the second variant deals with isotropic XY model embedded in a magnetic field. Our results imply that the quantum correlations (LQFI or LQU) depends on the temperature and the coupling parameter in the anisotropic XY model. The amount of quantum correlations take a maximum value for the isotropic XX model ($\gamma = 0$) and vanishes for the Ising model ($\gamma = \pm 1$). In analyzing the effect of temperature, we noticed that for higher values of temperature, the quantum correlations are destroyed. For a two qubit isotropic XY model with a magnetic field, unlike the temperature, the increase of the magnetic field enhances the amount of quantum correlations contained in the system. Most importantly, the present investigation suggests that local quantum Fisher information and local quantum uncertainty exhibit a similar variation. This paper highlights the importance and interplay between these two special types of quantum correlations.

References

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.* 47 (1935) 777.
- [2] J.S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen paradox, *Physics* 1 (1964) 195.
- [3] S. Hill, W.K. Wootters, Entanglement of a pair of quantum bits, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 5022.
- [4] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [5] S.L. Braunstein, H.J. Kimble, Teleportation of continuous quantum variables, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 869.
- [6] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation, *Nature* 390 (1997) 575.
- [7] A.K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 661.
- [8] T. Yu, J.H. Eberly, Sudden death of entanglement, *Science* 323 (2009) 598.
- [9] W.K. Wootters, Entanglement of formation and concurrence, *Quantum Inf. Comput.* 1 (2001) 27–44.
- [10] L. Viola, S. Lloyd, Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 2733.
- [11] A.R. Carvalho, F. Mintert, A. Buchleitner, Decoherence and multipartite entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 230501.
- [12] A. Datta, A. Shaji, C.M. Caves, Quantum discord and the power of one qubit, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 050502.
- [13] B.P. Lanyon, M. Barbieri, M.P. Almeida, A.G. White, Experimental quantum computing without entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 200501.
- [14] A. Datta, G. Vidal, Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 042310.
- [15] H. Ollivier, W.H. Zurek, Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2001) 017901.
- [16] L. Henderson, V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *J. Phys. A, Math. Gen.* 34 (2001) 6899.
- [17] A. Streltsov, W.H. Zurek, Quantum discord cannot be shared, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 040401.
- [18] T. Werlang, S. Souza, F.F. Fanchini, C.V. Boas, Robustness of quantum discord to sudden death, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 024103.
- [19] Y. Huang, Computing quantum discord is NP-complete, *New J. Phys.* 16 (2014) 033027.
- [20] B. Dakić, V. Vedral, Č. Brukner, Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 190502.
- [21] M. Daoud, R. Ahl Laamara, Quantum discord for multipartite coherent states interpolating between Werner and Greenberger-Horne-Zeilinger states, *Int. J. Quantum Inf.* 10 (2012) 1250060.
- [22] M. Daoud, R.A. Laamara, S. Seddik, Hilbert–Schmidt measure of pairwise quantum discord for three-qubit X states, *Rep. Math. Phys.* 76 (2015) 207–230.
- [23] M. Piani, Problem with geometric discord, *Phys. Rev. A* 86 (2012) 034101.
- [24] D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 240402.
- [25] E.P. Wigner, M.M. Yanasse, Information contents of distributions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 49 (1963) 910.
- [26] S. Luo, Wigner-Yanase skew information vs quantum Fisher information, *Proc. Am. Math. Soc.* 132 (2003) 885.
- [27] S. Luo, Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 180403.
- [28] S. Kim, L. Li, A. Kumar, J. Wu, Characterizing nonclassical correlations via local quantum Fisher information, *Phys. Rev. A* 97 (2018) 032326.
- [29] G.F. Zhang, Thermal entanglement and teleportation in a two-qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 034304.
- [30] C.W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, 1976.
- [31] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Estimation Theory* (vol. 1), PTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [32] M.G. Genoni, S. Olivares, M.G. Paris, Optical phase estimation in the presence of phase diffusion, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 153603.
- [33] F. Chapeau-Blondeau, Entanglement-assisted quantum parameter estimation from a noisy qubit pair: a Fisher information analysis, *Phys. Lett. A* 381 (2017) 1369–1378.
- [34] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit, *Science* 306 (2004) 1330–1336.
- [35] S.F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A.K. Ekert, M.B. Plenio, J.I. Cirac, Improvement of frequency standards with quantum entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 3865.
- [36] F. Chapeau-Blondeau, Optimizing qubit phase estimation, *Phys. Rev. A* 94 (2016) 022334.
- [37] B.L. Ye, B. Li, Z.X. Wang, X. Li-Jost, S.M. Fei, Quantum Fisher information and coherence in one-dimensional XY spin models with Dzyaloshinski-Moriya interactions, *Sci. China, Phys. Mech. Astron.* 61 (2018) 110312.
- [38] M.G.A. Paris, Quantum estimation for quantum technology, *Int. J. Quantum Inf.* 07 (2009) 125.
- [39] M.N. Bera, Role of quantum correlation in metrology beyond standard quantum limit, arXiv:1405.5357, 2014.
- [40] G. Karpat, B. Akmak, F.F. Fanchini, Quantum coherence and uncertainty in the anisotropic XY chain, *Phys. Rev. B* 90 (2014) 104431.
- [41] J.L. Guo, J.L. Wei, W. Qin, Examining quantum correlations in the XY spin chain by local quantum uncertainty, *Quantum Inf. Process.* 14 (2015) 1429.
- [42] M. Ali, A.R.P. Rau, G. Alber, Quantum discord for two-qubit X states, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 042105.
- [43] S. Vinjanampathy, A. Rau, Calculation of quantum discord for qubit-qudit or N qubits, arXiv:1106.4488, 2011.
- [44] A. Slaoui, M. Daoud, R. Ahl Laamara, The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X states under decoherence: a comparative study, *Quantum Inf. Process.* 17 (2018) 178.
- [45] A. Slaoui, M.I. Shaukat, M. Daoud, R. Ahl Laamara, Universal evolution of nonclassical correlations due to collective spontaneous emission, *Eur. Phys. J. Plus* 133 (2018) 413.
- [46] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, pp. 63–79.
- [47] X. Wang, P. Zanardi, Quantum entanglement and Bell inequalities in Heisenberg spin chains, *Phys. Lett. A* 301 (2002) 1–6.
- [48] G.L. Kamta, A.F. Starace, Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit Heisenberg XY chain, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 107901.
- [49] Y. Guo-Hui, G. Wen-Bin, Z. Ling, S. He-Shan, Entanglement in anisotropic Heisenberg XYZ chain with inhomogeneous magnetic field, *Commun. Theor. Phys.* 48 (2007) 453.
- [50] D.C. Li, X.P. Wang, Z.L. Cao, Thermal entanglement in the anisotropic Heisenberg XXZ model with the Dzyaloshinski-Moriya interaction, *J. Phys. Condens. Matter* 20 (2008) 325229.
- [51] Z. Yong, L. Gui-Lu, W. Yu-Chun, G. Guang-Can, Partial teleportation of entanglement through natural thermal entanglement in two-qubit Heisenberg XXX chain, *Commun. Theor. Phys.* 47 (2007) 787.

5.5 Contribution 5 : Influence of Stark-shift on quantum coherence and non-classical correlations for two two-level atoms interacting with a single-mode cavity field

Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 558 (2020) 124946

5.5.1 Résumé :

Comme nous le savons de la mécanique quantique, la présence de symétries conduit à des niveaux d'énergie dégénérés. Par exemple, considérons un électron atomique avec le potentiel $V(r)$, nous disons que ce système est invariant par rotation et nous nous attendons à une certaine forme de dégénérescence pour chaque niveau atomique. La disparition de la dégénérescence peut être réalisée en brisant la symétrie. La symétrie rotationnelle peut être manifestement brisée en considérant un champ électrique ou magnétique externe uniforme le long d'une direction fixe. Un champ magnétique se couple avec le moment magnétique de l'atome, tandis qu'un champ électrique se couple avec le moment dipolaire électrique de l'atome. Dans les deux cas, on vérifie le fractionnement des niveaux d'énergie atomique dû au couplage avec le champ externe. Dans le cas d'un champ magnétique uniforme, ce phénomène est connu sous le nom d'effet Zeeman. Dans le cas où le champ externe est un champ électrique uniforme, on l'appelle l'effet Stark.

Dans cet article, nous nous intéressons à la manière dont l'effet du décalage de Stark et le nombre de photons d'état cohérents affectent à la fois les comportements de corrélation quantique et de cohérence quantique. Le modèle considéré est constitué de deux atomes à deux niveaux couplés à un champ de cavité électromagnétique monomode multi-photons en présence du décalage de Stark. Pour atteindre cet objectif, nous supposons que le champ est initialement préparé dans un état cohérent et que les deux atomes sont initialement préparés dans un état excité. Ensuite, nous avons étudié l'évolution de notre modèle physique, et la solution exacte de l'évolution est dérivée en analysant l'équation de Schrödinger avec quelques simplifications. Nous avons observé que l'évolution temporelle de la cohérence quantique, quantifiée par la divergence quantique de Jensen-Shannon, est presque similaire à l'évolution temporelle des corrélations quantiques mesurée par la discordance quantique entropique. Mais nous avons remarqué que la quantité de cohérence quantique est toujours plus grande et va au-delà de la discordance quantique en raison du fait que la cohérence quantique totale dans les systèmes multipartites a des contributions de la cohérence locale sur les sous-systèmes et de la cohérence collective entre eux. En l'absence et en présence des photons d'état cohérent, l'effet du décalage de Stark sur le système est examiné. Nous avons montré que le système est sensible à la variation à la fois du paramètre de décalage de Stark et du nombre de photons d'état cohérent initial. De plus, ces deux quantificateurs diminuent avec des valeurs croissantes des paramètres de décalage de Stark lorsque le nombre de photons augmente.

Dans une vue globale, nous pensons que ce travail montre que les protocoles d'information quantique basés sur des ressources physiques dans les systèmes optiques pourraient être contrôlés en ajustant les paramètres de décalage de Stark. Aussi, ce dernier peut également modifier les autres propriétés des ressources physiques nécessaires à la mise en œuvre des tâches de traitement de l'information quantique.

5.5.2 Contenu de la publication 5 :



Influence of Stark-shift on quantum coherence and non-classical correlations for two two-level atoms interacting with a single-mode cavity field

Abdallah Slaoui^{a,*}, Ahmed Salah^{b,c,1}, Mohammed Daoud^{c,d,1}

^a LPHE-Modeling and Simulation, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Morocco

^b Mathematics and Theoretical Physics Department, Nuclear Research Center (NRC), Atomic Energy Authority, Cairo, 13759, Egypt

^c Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera, 11 I-34151, Trieste, Italy

^d Department of Physics, Faculty of Sciences, University Ibn Tofail, Kenitra, Morocco

ARTICLE INFO

Article history:

Received 24 March 2020

Received in revised form 22 May 2020

Available online 17 July 2020

Keywords:

Stark-shift effect

Quantum coherence

Non classical correlations

Decoherence

Two two-level atoms

ABSTRACT

An exact analytic solution for two two-level atoms coupled with a multi-photon single-mode electromagnetic cavity field in the presence of the Stark shift is derived. We assume that the field is initially prepared in a coherent state and the two atoms are initially prepared in excited state. Considering the atomic level shifts generated by the Stark shift effect, the dynamical behavior of both quantum coherence (QC) measured using a quantum Jensen–Shannon divergence and of quantum correlations captured by quantum discord (QD) are investigated. It is shown that the intensity-dependent Stark-shift in the cavity and the number of coherent state photons plays a key role in enhancing or destroying both QC and QD during the process of intrinsic decoherence. We remarked that increasing the Stark-shift parameters, the frequencies of the transition for the mode of the cavity field, and photons number destroy both the amount of QC and QD and affected their periodicity. More importantly, QC and QD exhibit similar behavior and both show a revival phenomenon. We believe that the present work shows that the quantum information protocols based on physical resources in optical systems could be controlled by adjusting the Stark-shift parameters.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Over the past decades, the two-levels atoms constitute valuable tools for both theoretical and experimental investigations in various fields of modern physics such as collision physics [1,2] and quantum optics [3,4]. They were considered to be the simplest quantum model used to solve many problems of light–matter interaction and for the fundamental building of modern applications in quantum control [5] and quantum processing [6]. Further, there are many physical systems recognized as a possible candidate for quantum processing such as the cavity QED which studies the interaction between the individual atoms and a single-mode electromagnetic field inside a cavity [7], the artificial two-level atoms based on the superconducting qubits [8,9], ion traps [10] and quantum dots [11].

On the other hand, the Dicke model [12], describes the interaction between a collection of N two-level atoms and a quantized electromagnetic field, has been extensively used in quantum optics. It gives an opportunities to simulate

* Corresponding author.

E-mail addresses: abdallah_slaoui@um5.ac.ma (A. Slaoui), asalah3020@gmail.com (A. Salah), m_daoud@hotmail.com (M. Daoud).

¹ The authors contributed equally to this work.

quantum optical and condensed matter phenomena. This class of models has been employed to investigate quantum phase transition with a coupled optical cavity [13]. Also, a new physical phenomenon of the splitting of the dressed states is explained as a manifestation of an n -photon coupling between them, i.e., it represents an n -photon ac Stark effect parameter [14]. Moreover, a three-level Λ -type atom interacting with a two-mode of electromagnetic cavity field surrounded by a nonlinear Kerr-like medium with decay rates have been considered in [15]. The time-dependent interaction between the time-dependent field and a two-level atom with one mode electromagnetic field have been explored in [16]. In addition, the time-dependent fields were also used for controlling quantum states in several protocols and shown various useful applications, especially in carrying out rapid population transfers by the invariant-based inverse engineering method in a three-level system [17], realizing the perfect adiabatic state transfer protocols via an intermediate lossy system [18,19] and performing fast population transfer for ground states in multiparticle cavity QED systems via the adiabatic passage [20,21].

Quantum entanglement (QE), as a special type of quantum correlations, is a valuable resource for several tasks of quantum information processing and has a crucial role in setting the boundary between quantum and classical worlds [22,23]. It has recently attracted significant attention as an essential ingredient for powerful applications including quantum teleportation [24], dense coding [25], quantum cryptography [26] and telecloning [27]. In this regard, various proper entanglement measures have been proposed by employing a rigorous mathematical framework [28] and their time evolution has been studied in several quantum systems of two-level atoms [29–31]. It was believed that QE is tightly related to quantum correlations. However, according to various studies [32,33], it has been proved experimentally that there exist some separable quantum states that are very useful in practical quantum technology and that QE is not the only meaningful type of quantum correlations. For instance, quantum speedup with separable states [34,35], quantum nonlocality without QE [36,37] and the efficiency of deterministic quantum computation with one qubit [38]. In this sense, considerable efforts have been devoted over the last years to characterize and to quantify quantum correlations that may be contained in a multipartite system.

The problem of quantifying non-classical correlations beyond QE in a generic quantum state has not solved yet and their investigation in closed and open multipartite systems is one of the most challenging topics in the literature. Historically, entropic quantum discord (QD) is an alternative approach to investigate quantum correlations for an arbitrary bipartite state even those which are separable. This measure was first proposed independently by Ollivier et al. [39] and Henderson et al. [40]. They have shown that QD is more general and goes beyond QE and it coincides with the entanglement of formation for pure bipartite states. In addition to that, the QD obeys a conservation law with the QE based upon a monogamic principle of the quantum correlation distribution [41] and it is related to the QE irreversibility [42]. Interestingly, Dakić et al. [43] showed that a correlated separable state (i.e., the separable state with non-zero QD) can outperform entangled states and it exhibits better performance for remote quantum state preparation. Datta et al. [44] confirmed that QD is a better figure of merit for providing computational speedup compared with classical states in quantum computation models. Moreover, Werlang et al. [45] showed that QD is more robust than QE against decoherence in Markovian environments. It is interesting to stress that other discord-like measures have been introduced such as one-way quantum deficit [46], local quantum uncertainty [47–49], local quantum Fisher information [50,51] and quantum interferometric power [52].

On the other side, one of the main challenges in the practical implementation of quantum computing and in the physical realization of quantum technologies is how to protect quantum coherence (QC) and overcome decoherence [53]. This is due to the realistic quantum systems are naturally open and very brittle, which leads to loss of information and the intrinsic physical quantum properties from the system to the environment. So, it is important to study both QD and QC dynamics in open quantum systems when loses their coherence. QC also provides essential power for quantum information processing and a theoretic framework for their quantification in quantum states has been developed [54–56]. The new fundamental and challenging task in this field, from both theoretical and experimental perspectives, consists of how to characterize and quantify the interplay between these different kinds of quantum correlation. In this sense, the role of QC to characterize QE and quantum thermodynamics was discussed in [57] and in [58,59] respectively.

Inspired by these works, we would study the QD and QC dynamics in an open quantum system consisting of two two-level atoms that are connected by a single-mode electromagnetic cavity field in the presence of the Stark-shift effect. We are especially interested in how intensity-dependent Stark-shift in the cavity and the number of coherent state photons would affect both QD and QC behaviors in this model. This paper is structured as follows: In Section 2, we firstly introduce the considered physical model and then we find an exact solution of the density matrix in the Schrödinger picture when these two atoms are initially prepared in their excited state. In Section 3, we give the explicit expression of QC by employing the concepts of the quantum Jensen–Shannon divergence. The time evolution behavior of the QC as a function of the parameters of the considered system and its environment is also discussed. Section 4 is devoted to the effect of Stark-shift in the cavity on the temporal evolution of correlations captured by QD. A brief summary of the main obtained results closes this paper.

2. The model: Hamiltonian and solution

In this work, the system under consideration consists of two 2-level atoms (considered as two qubits A and B) having ground states $|g_i\rangle$ and excited states $|e_i\rangle$ ($i = 1, 2$) which are coupled with a single-mode electromagnetic cavity field. In

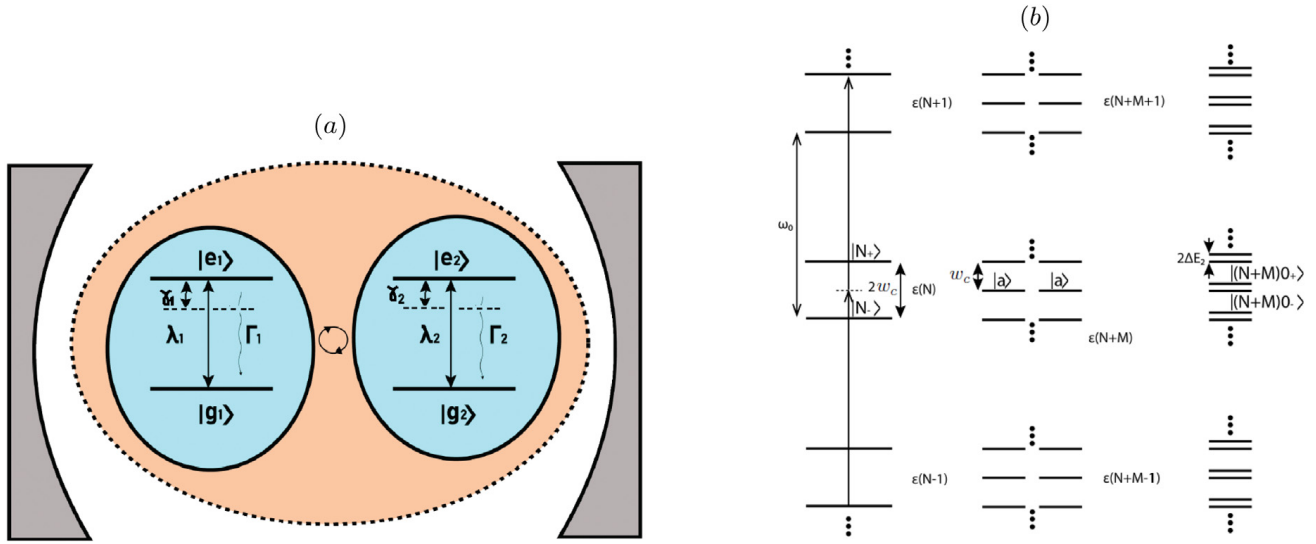


Fig. 1. (a) Energy level diagram for two two-level atoms interacting to a single-mode cavity field (b) graphical representation of the dynamic Stark splitting of the effective two two-level atoms.

our consideration, we assume that the interaction occurs in the presence of the Stark-shift effect as shown schematically in Fig. 1. This Stark effect induces the splitting and shifting of spectral energy levels due to the presence of an electromagnetic cavity field [60–62]. In this picture, the total Hamiltonian of the system is given by ($\hbar = 1$)

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{A-F} + \hat{H}_{\text{Stark}}, \quad (1)$$

where \hat{H}_A and \hat{H}_F describes respectively the two atoms Hamiltonian and the quantized electromagnetic cavity field Hamiltonian, which can be written as

$$\hat{H}_A + \hat{H}_F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 w_z \hat{S}_z^j + w_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2)$$

where $\hat{S}_z^j = |e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|$ is the energy operator of i th atom, w_z and w_c denotes the transition frequency and the frequency of the mode of the cavity field, respectively and \hat{a}^\dagger (\hat{a}) is the creation (annihilation) operators of the cavity field which they satisfy the usual bosonic commutation relations. The interaction Hamiltonian \hat{H}_{A-F} between the atoms and the electromagnetic cavity field is given by

$$\hat{H}_{A-F} = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \left(\hat{a} \hat{S}_+^j + \hat{a}^\dagger \hat{S}_-^j \right), \quad (3)$$

where λ_j ($j = 1, 2$) is the coupling strength between the atom j and the mode of the cavity field and $\hat{S}_+^j = |e_j\rangle\langle g_j|$ and $\hat{S}_-^j = |g_j\rangle\langle e_j|$ represents the dipole raising and lowering operators, respectively. The Hamiltonian describing the effect of Stark shift in the cavity can be written as [61]

$$\hat{H}_{\text{Stark}} = (\gamma_1 + \gamma_2) \sum_{j=1}^2 \hat{S}_z^j + \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \hat{a}^\dagger \hat{a} \sum_{j=1}^2 \hat{S}_z^j, \quad (4)$$

where γ_1 and γ_2 describe the intensity-dependent Stark-shift in the cavity. The dynamic Stark shift parameters and effect has been included in two-photon absorption studies in the past. The Stark effect to first order in a perturbative calculation in two-photon equal frequency absorption has been studied [63]. Furthermore, the importance of the Stark-shift terms in an exact calculation of two-photon equal-frequency absorption has been demonstrated [64]. Moreover, Ashraf and Zubairy [65] included this power-dependent effect in their study of the equal-frequency two-photon micromaser. Also, Gou [66] discussed how to eliminate the Stark shifts through the use of correlated two-mode field states in unequal-frequency absorption. All of these studies investigated the case of exact two-photon resonance. The general expression of the time-dependent wave function of an atom j ($j = 1, 2$) in the system under consideration can be written as

$$|\psi_n^j(t)\rangle = A_j(t) |e_j, n\rangle + B_j(t) |g_j, n+1\rangle, \quad (5)$$

with $A_j(t)$ and $B_j(t)$ are the probability amplitudes. Consequently, after interacting with a single-mode electromagnetic cavity field, the state vector of the whole system $|\psi(t)\rangle$ takes the following form

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t) |e_1, e_2, n\rangle + C_{n+1}(t) |e_1, g_2, n+1\rangle + D_{n+1}(t) |g_1, e_2, n+1\rangle + B_{n+2}(t) |g_1, g_2, n+2\rangle] \quad (6)$$

with $A_n(t) = A_1(t)A_2(t)$, $C_{n+1}(t) = A_1(t)B_2(t)$, $D_{n+1}(t) = B_1(t)A_2(t)$ and $B_{n+2}(t) = B_1(t)B_2(t)$. To determine the probability amplitudes of the state (6), it is necessary to solve the time-dependent Schrödinger equation

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (7)$$

After some simplifications and by using the following creation and annihilation operators actions

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

we obtain the following coupled differential equations

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_n(t)}{\partial t} &= \xi_1 A_n(t) + \lambda_2 \sqrt{n+1} C_{n+1}(t) \\ &+ \lambda_1 \sqrt{n+1} D_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial C_{n+1}(t)}{\partial t} &= \lambda_2 \sqrt{n+1} A_n(t) + \xi_2 C_{n+1}(t) \\ &+ \lambda_1 \sqrt{n+2} B_{n+2}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial D_{n+1}(t)}{\partial t} &= \lambda_1 \sqrt{n+1} A_n(t) + \xi_3 D_{n+1}(t) \\ &+ \lambda_2 \sqrt{n+2} B_{n+2}(t), \end{aligned} \quad (11)$$

and

$$\begin{aligned} i \frac{\partial B_{n+2}(t)}{\partial t} &= \lambda_1 \sqrt{n+2} C_{n+1}(t) + \lambda_2 \sqrt{n+2} D_{n+1}(t) \\ &+ \xi_4 B_{n+2}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

The parameters appearing in these differential equations are

$$\xi_1 = w_z + w_c n + (\gamma_1 + \gamma_2)(2 + n), \quad (13)$$

$$\xi_2 = \xi_3 = w_c(n + 1), \quad (14)$$

and

$$\xi_4 = -w_z + w_c(n + 2) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 4). \quad (15)$$

We assume that two atoms are initially prepared in their excited states $|e_1\rangle$ and $|e_2\rangle$. We also assume that the cavity electromagnetic field is prepared in the Glauber coherent states

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (16)$$

where $\alpha \in \mathbb{C}$. In this scheme, the initial state is given by

$$|\psi(0)\rangle = |e_1, e_2, \alpha\rangle. \quad (17)$$

Comparing with Eq. (6), the initial probability amplitudes are

$$A_n(0) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (18)$$

and

$$C_{n+1}(0) = D_{n+1}(0) = B_{n+2}(0) = 0. \quad (19)$$

To solve the differential equations (9), (10), (11) and (12), we set

$$A_n(t) = a_n(t) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (20)$$

$$C_{n+1}(t) = c_{n+1}(t) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \tag{21}$$

$$D_{n+1}(t) = d_{n+1}(t) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \tag{22}$$

$$B_{n+2}(t) = b_{n+2}(t) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \tag{23}$$

The exact solution for the coupled differential equations is given by

$$a_n(t) = \sum_{l=1}^4 \tilde{a}_l \exp(iM_l t), \tag{24}$$

$$c_{n+1}(t) = \sum_{l=1}^4 \tilde{c}_l \exp(iM_l t), \tag{25}$$

$$d_{n+1}(t) = \sum_{l=1}^4 \tilde{d}_l \exp(iM_l t), \tag{26}$$

$$b_{n+2}(t) = \sum_{l=1}^4 \tilde{b}_l \exp(iM_l t), \tag{27}$$

where

$$\tilde{a}_l = \frac{R_1 + \xi_1 (M_k + M_m + M_n) + R_2 (M_k M_m + M_k M_n + M_m M_n) + M_k M_m M_n}{M_{lk} M_{lm} M_{ln}}, \tag{28}$$

$$\tilde{c}_l = \frac{R_3 + f_1 (M_k + M_m + M_n) + R_4 (M_k M_m + M_k M_n + M_m M_n)}{M_{lk} M_{lm} M_{ln}}, \tag{29}$$

$$\tilde{d}_l = \frac{R_5 + f_1 (M_k + M_m + M_n) + R_6 (M_k M_m + M_k M_n + M_m M_n)}{M_{lk} M_{lm} M_{ln}}, \tag{30}$$

$$\tilde{b}_l = \frac{R_7 + R_8 (M_k M_m + M_k M_n + M_m M_n)}{M_{lk} M_{lm} M_{ln}}, \quad M_{lk} = M_l - M_k, \tag{31}$$

with

$$R_1 = \xi_1^3 + (f_1^2 + f_2^2) (2\xi_1 + \xi_2), \tag{32}$$

where

$$f_1 = \lambda_2 \sqrt{n+1}, \quad f_2 = \lambda_1 \sqrt{n+1}, \tag{33}$$

and

$$R_2 = f_1^2 + f_2^2 + \xi_1^2, \tag{34}$$

$$R_3 = f_2 (3f_1^2 + f_2^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2), \tag{35}$$

$$R_4 = 2f_1 f_2 (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \tag{36}$$

$$R_5 = f_1 (f_1^2 + 3f_2^2 + \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2), \tag{37}$$

$$R_6 = f_1 (\xi_1 + \xi_2), \tag{38}$$

$$R_7 = f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2, \tag{39}$$

$$R_8 = 2f_1 f_2. \tag{40}$$

The quantities M_l ($l = 1, 2, 3, 4$) in the above equations are the roots of the following fourth-order equation

$$M^4 + \chi_3 M^3 + \chi_2 M^2 + \chi_1 M + \chi_0 = 0, \tag{41}$$

with

$$\chi_3 = -\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3, \tag{42}$$

$$\chi_2 = 2\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 2f_1^2 - 2f_2^2, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 = & f_1^2\xi_1 + f_2^2\xi_3 + 2f_1^2\xi_2 + 2f_2^2\xi_2 - \xi_1\xi_2^2 \\ & + f_1^2\xi_3 + f_2^2\xi_3 - 2\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_2^2\xi_3, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \chi_0 = & f_1^4 - 2f_1^2f_2^2 + f_2^4 - f_1^4\xi_1\xi_2 - f_2^2\xi_1\xi_2 \\ & - f_1^2\xi_2\xi_3 - f_2^2\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2^2\xi_3. \end{aligned} \quad (45)$$

The solutions of Eq. (41) write as

$$M_{1,2} = -\frac{\chi_3}{4} - \frac{g_1}{2} \pm \frac{Z_-}{2}, \quad (46)$$

and

$$M_{3,4} = -\frac{\chi_3}{4} + \frac{g_1}{2} \pm \frac{Z_+}{2}, \quad (47)$$

where

$$g_1 = \sqrt{\frac{U_1}{3v_1} + \frac{v_2}{3} + U_2}, \quad Z_{\pm} = \sqrt{\eta_2 \pm \frac{\eta_3}{4\eta_1}}, \quad (48)$$

$$v_1 = 27\chi_1^2 - 72\chi_0\chi_2 + 2\chi_2^3 - g\chi_1\chi_2\chi_3 + 27\chi_0\chi_3^2, \quad (49)$$

$$v_2 = \left(\frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - 4U_1^3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \eta_1 = \sqrt{U_1 + \frac{U_1}{3v_2} + \frac{v_2}{3}}, \quad (50)$$

$$\eta_2 = 2U_2 - \frac{U_1}{3v_1} - \frac{v_2}{3}, \quad \eta_3 = -8\chi_1 + 4\chi_2\chi_3 - \chi_3^3. \quad (51)$$

In a special case, we consider that $c_{n+1}(t) = d_{n+1}(t) = e_{n+1}(t)$. In this case, the system of coupled differential equations reduced to

$$i \begin{bmatrix} \dot{a}_n(t) \\ \dot{e}_{n+1}(t) \\ \dot{b}_{n+2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & f_1 + f_2 & 0 \\ f_1 & \xi_2 & f_2 \\ 0 & f_1 + f_2 & \xi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n(t) \\ e_{n+1}(t) \\ b_{n+2}(t) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Solving the coupled differential equations obtained from the Schrödinger equation gives the following general solutions of the probability amplitudes

$$b_{n+2}(t) = \sum_{j=1}^3 k_j \exp[i\chi_j t], \quad (53)$$

$$e_{n+1}(t) = -\frac{1}{(f_1 + f_2)} \sum_{j=1}^3 k_j (\chi_j + \xi_4) \exp[i\chi_j t], \quad (54)$$

and

$$\begin{aligned} a_n(t) = & \frac{1}{f_1(f_1 + f_2)} \sum_{j=1}^3 k_j [(\chi_j + \xi_4)(\chi_j + \xi_2) \\ & - f_2(f_1 + f_2)] \exp[i\chi_j t] \end{aligned} \quad (55)$$

where k_j ($i = 1, 2, 3$) are time-independent functions and χ_j are the eigenvalues of the matrix

$$W(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 & f_1 + f_2 & 0 \\ f_1 & \xi_2 & f_2 \\ 0 & f_1 + f_2 & \xi_4 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

It is simple to verify that the eigenvalues of the matrix $W(t)$ (56) are analytically obtained as

$$\chi_1 = \frac{1}{2} \left[\xi_1 + \xi_2 - \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + 4f_1(f_1 + f_2)} \right], \quad (57)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2} \left[\xi_1 + \xi_2 + \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + 4f_1(f_1 + f_2)} \right], \tag{58}$$

and

$$\chi_3 = \xi_4. \tag{59}$$

From Eqs. (9)–(11), we obtain the following conditions

$$\begin{aligned} k_1 \chi_1^2 + k_2 \chi_2^2 + k_3 \chi_3^2 &= f_1(f_1 + f_2), \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ k_1 \chi_1 + k_2 \chi_2 + k_3 \chi_3 &= 0. \end{aligned} \tag{60}$$

In this picture, the eigenvalues of the matrix $W(t)$ (56) as a function of the transition frequency w_z , the frequency of the mode of the cavity field w_c and the photon number n are

$$\chi_1 = \frac{1}{2} [w_z + w_c(2n + 1) + (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 2) - \delta], \tag{61}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2} [w_z + w_c(2n + 1) + (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 2) + \delta], \tag{62}$$

and

$$\chi_3 = -w_z + w_c(n + 2) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 4), \tag{63}$$

where the function δ is defined by

$$\delta = (w_z - w_c + (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 2))^2 + 4\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(n + 1). \tag{64}$$

After some straightforward calculations, we can obtain the functions k_1 , k_2 and k_3 as

$$k_1 = \frac{2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(n + 1)}{\delta - F\sqrt{\delta}}, \tag{65}$$

$$k_2 = \frac{2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(n + 1)}{\delta + F\sqrt{\delta}}, \tag{66}$$

and

$$k_3 = \frac{4\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(n + 1)}{F^2 - \delta}, \tag{67}$$

where the function F is defined by

$$F = 3(w_z - w_c) + (\gamma_1 + \gamma_2)(3n + 10). \tag{68}$$

Using these results, the atom–atom density operator ρ_{AB} can be obtained by tracing out the electromagnetic cavity field degrees of freedom. It is given by $\rho_{AB} = \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | n' \rangle$. In the computational basis $\{|e_1, e_2\rangle, |e_1, g_2\rangle, |g_1, e_2\rangle, |g_1, g_2\rangle\}$, the density matrix ρ_{AB} takes the form

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} |a_n(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |e_{n+1}(t)|^2 & |e_{n+1}(t)|^2 & 0 \\ 0 & |e_{n+1}(t)|^2 & |e_{n+1}(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |b_{n+2}(t)|^2 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

which is a two-qubit state of X type and their entries are given by

$$\begin{aligned} |e_{n+1}(t)|^2 &= \lambda_2^2(n + 1) \left[\sum_{\pm} \frac{-w_z + w_c(4n + 5) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 6) \mp \sqrt{\delta}}{(\delta \mp F\sqrt{\delta})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{64(-w_z + w_c(n + 2) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 4))^2}{(F^2 - \delta)^2} \right] \\ &\quad + \frac{2\lambda_2^2(n + 1) \cos(\sqrt{\delta}t)}{\delta^2 - F\delta} [(-w_z + w_c(4n + 5) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 6))^2 - \delta] \\ &\quad + \sum_{\pm} \frac{16\lambda_2^2(n + 1) \cos\left(\left(\frac{F \pm \sqrt{\delta}}{2}\right)t\right)}{(F^2 - \delta)(\delta \mp F\sqrt{\delta})} \left[\frac{(-w_z + w_c(n + 2) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 4)) \times}{(-w_z + w_c(4n + 5) - (\gamma_1 + \gamma_2)(n + 6) \mp \sqrt{\delta})} \right], \end{aligned} \tag{70}$$

$$|b_{n+2}(t)|^2 = \frac{8\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2(n+1)^2}{(\delta - F^2)} \left[\frac{3\delta + F^2}{\delta(\delta - F^2)} + \frac{\cos(\sqrt{\delta}t)}{\delta} - \sum_{\pm} \frac{\cos\left(\frac{F \pm \sqrt{\delta}}{2}t\right)}{\delta \mp F\sqrt{\delta}} \right], \quad (71)$$

and

$$|a_n(t)|^2 = 1 - 2|e_{n+1}(t)|^2 - |b_{n+2}(t)|^2. \quad (72)$$

Having determined the bipartite atomic density matrix operator, we shall investigate the quantum coherence and quantum discord. In particular, we shall investigate the influence of effect of the stark-shift parameter on these quantum measures.

3. Quantum coherence

Arising from the superposition principle, quantum coherence (QC) is a key concept to understand the weirdness of the fundamental aspects of quantum mechanics. QC is an important resource in different quantum information processing tasks. The characterization of QC in composite quantum systems and in particular how it can be quantified is one of the challenges facing both quantum information theory and quantum technologies. For this reason, a rigorous framework to quantify the degree of superposition in quantum states has been established by Åberg [54,55] and recently updated by Baumgratz et al. [56]. By analogy with the resource theory of quantum entanglement which establishes the sets of separable states and local operations and classical communication (LOCC), the quantification of QC is based on the concepts of incoherent states and incoherent operations. For a quantum state associated with a d -dimensional Hilbert space \mathcal{H} , we fix the orthogonal basis $\{|j\rangle\}_{j=1}^d$ as the reference basis. If a quantum state is diagonal when expressed on this local reference basis, it is called incoherent state. On the other hand, an incoherent operation is a completely positive and trace-preserving linear map (CPTP) that maps an incoherent state to an incoherent state and no creation of coherence could be observed.

The Baumgratz et al. analysis [56] has attracted deep attention of many researchers and various measures of QC, which satisfy the physical requirements of noncontractivity and monotonicity, have been proposed since then. We quote, for instance, the l_1 -norm coherence [56], the coherence of formation [67,68], the relative entropy coherence [56], the geometric measure of coherence [69], the distillable coherence [68,70], the coherence measures based on entanglement [69,71], the coherence measures based on trace norm [67], the coherence measure via quantum skew information [72], via Tsallis relative entropy [73,74], via fidelity [75] and via relative entropy in Gaussian states [76].

It is worth noticing that all of the QC measures of a quantum state can be classified into two categories; the first concerns the entropic measures which are based on the entropic function and the second situation concerns the geometric class of the measures which has a metric character and is quantified as its distance to the closest incoherent state. Recently, a new measure of CQ based on the quantum version of the Jensen–Shannon divergence has been introduced by Radhakrishnan et al. [77]. This measure has both entropic and geometric characters and is easy to compute analytically for a generic quantum state. In addition, it satisfies the full physical requirements that every good QC quantifier should satisfy [56]. The quantum Jensen–Shannon divergence, as a measure of the distance between two quantum states, is defined as [78–81]

$$\mathfrak{J}(\rho, \sigma) = S\left(\frac{\rho + \sigma}{2}\right) - \frac{1}{2}(S(\rho) + S(\sigma)), \quad (73)$$

and the QC is defined as the square root of the quantum Jensen–Shannon divergence, i.e.,

$$c(\rho) = \sqrt{\mathfrak{J}(\rho, \rho_d)}, \quad (74)$$

where $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ is the von Neumann entropy and ρ_d is the diagonal part of quantum state ρ in the computational basis.

Hence, the expression of QC for two 2-level atoms interacting with a single-mode electromagnetic cavity field in the presence of the Stark-shift effect can be easily computed. Indeed, using the density matrix (69), one can check that the quantum coherence defined by (74) is given by

$$c(\rho) = \sqrt{3|e_{n+1}|^2 \left(1 - \frac{\log_2(3)}{2}\right)}. \quad (75)$$

In order to analyze in detail the influence of the Stark shift on the QC dynamics of two two-level atoms interacting with a single-mode electromagnetic cavity field, we display the evolution of QC based on the quantum Jensen–Shannon divergence versus the time t for various values of the Stark shift parameters in Fig. 2. To simplify the numerical analysis, we consider the situation where w_z (transition frequency) and w_c (mode field cavity frequency) vanishes. From the plot of Fig. 2, it is observed that the QC behavior of this model is a periodic function of time t and their periods decrease with the increase of the Stark shift parameters $\gamma_{1,2}$. Also, the increase of the Stark shift parameters in the cavity leads to a rapid decrease of QC due to the intrinsic decoherence and the two atoms can remain in a stationary incoherent state

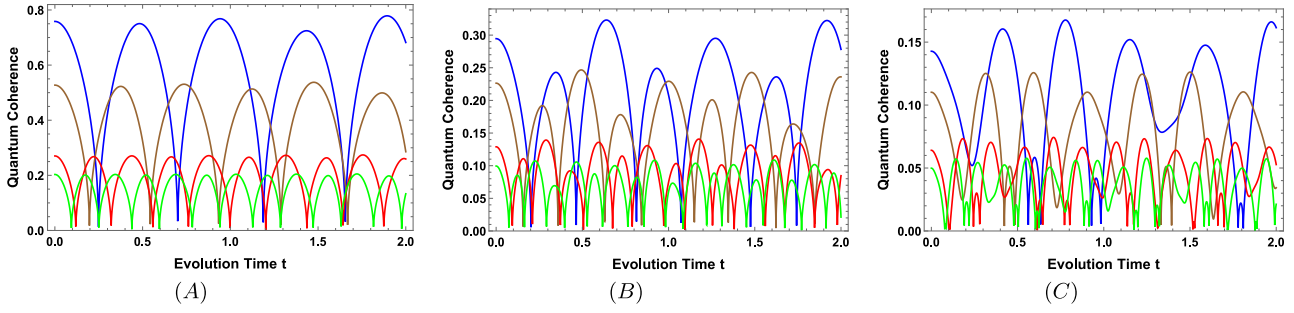


Fig. 2. Time evolution of quantum coherence in terms of the time t for different values of the Stark shift; $\gamma_1 = 1$ and $\gamma_2 = 2$ for blue curve, $\gamma_1 = 2$ and $\gamma_2 = 3$ for brown curve, $\gamma_1 = 3$ and $\gamma_2 = 4$ for red curve, $\gamma_1 = 4$ and $\gamma_2 = 5$ for green curve and for different values of the number of coherent state photons; $n = 0$ for panel (A), $n = 1$ for panel (B), $n = 3$ for panel (C), when $w_z = w_c = 0$.

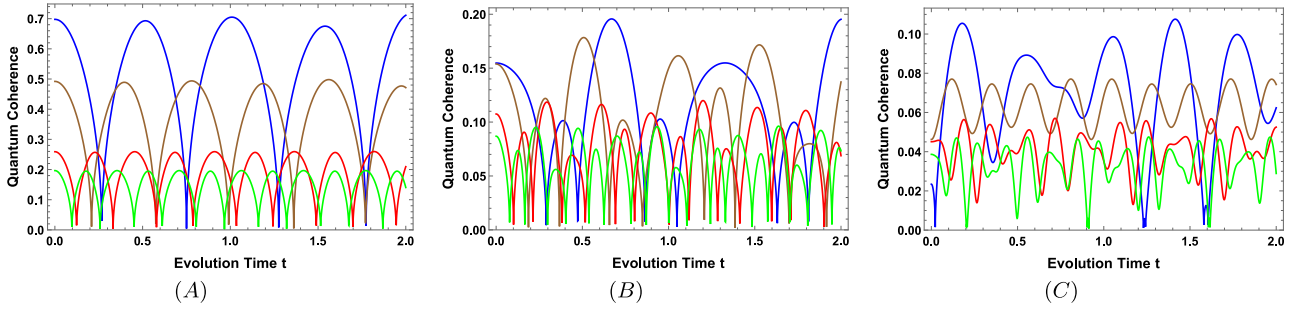


Fig. 3. The same as in Fig. 2 but for different parameters of $w_z = 0.5$ and $w_c = 1$.

for large values of the Stark shift parameters. As depicted in Fig. 2, the amount of QC decreases over a certain interval of time showing the degradation of the superposition of the initial state. After, it increases and survives which shows the revival phenomenon of QC in the system. This revival phenomenon can be explained by the transfer of QC between the total system including the cavity field and the two atoms. Furthermore, we noticed also that the decrease in the amount of QC becomes more pronounced when passing from $n = 0$ (Fig. 2-A) to $n = 3$ (Fig. 2-C). This means that QC decreases abruptly with the increasing number of photons. In Fig. 3, we depict the behavior of QC versus the time t for different values of the Stark shift parameters with $w_z = 0.5$ and $w_c = 1$. These results are in agreement with the results obtained in Fig. 2 which shows that for fixed Stark shift parameters, the QC decreases as the number of coherent state photons increases. Also, for a fixed number of coherent state photons, the QC decreases as the Stark shift parameters increases. On the other hand, the results reported in Fig. 3 show that increasing both the transition frequency and frequency of the mode of the cavity field destroys the amount of QC in the system and modify their periodicity.

4. Quantum discord

In order to investigate the dynamic evolutions of the quantum correlations in our system, one can use the quantum discord (QD) measure which characterizes the nonclassicality of correlations in multipartite quantum system [39,40]. It is noteworthy that QD is captured by strong measurements that lead to the loss of its coherence, but it reveals more quantum correlations than entanglement in the sense that it may not disappear even for mixed separable quantum states. It is defined as the difference between two classically-equivalent expressions of the mutual information; the original quantum mutual information and the local measurement-induced quantum mutual information. According to Ref. [39], the QD $Q(\rho_{AB})$ in a two-qubit state ρ_{AB} is defined by:

$$Q(\rho_{AB}) := \mathcal{I}(\rho_{AB}) - \mathcal{J}(\rho_{AB}), \quad (76)$$

with the total correlation is quantified by the quantum mutual information $\mathcal{I}(\rho_{AB}) := S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, and the quantity $\mathcal{J}(\rho_{AB})$ is defined as a measure of classical correlation

$$\mathcal{J}(\rho_{AB}) = \max_{\pi_B^j} \left(S(\rho_B) - \sum_j p_{B,j} S(\rho_{B,j}) \right), \quad (77)$$

where the minimum is taken over the set of positive operator valued measurements (POVM) $\{\pi_B^j\}$ on subsystem B which satisfy $\sum_j \pi_B^{j\dagger} \pi_B^j = I$, $S(\rho)$ is the von Neumann entropy, $p_{B,j} = \text{Tr}_{AB} \left[(I \otimes \pi_B^j) \rho_{AB} (I \otimes \pi_B^{j\dagger}) \right]$ and $\rho_{B,j} =$

$\text{Tr}_A \left[(I \otimes \pi_{B^j}) \rho_{AB} (I \otimes \pi_{B^j}^\dagger) \right] / p_{B,j}$ are the probability and the conditional state of subsystem B associated with outcome j . It is worth pointing out that the main idea of calculating the QD is to quantify the amount of information that is not accessible by a local measurement by extracting some information about subsystem A by reading the state of subsystem B without disturbing state A . The difficult step in evaluating QD is to find an analytical expression of classical correlations because it requires a minimization process in optimizing the conditional entropy over all possible local measurements. Due to this fact, the analytical derivation of QD may be performed only for some specific two-qubit [82,83]. For the bipartite system under consideration in this paper, the analytic expressions of QD can be computed by using the method reported by C.Z Wang et al. in [84]. First, for a two qubit state of X -type, the density matrix has taken the following form

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (78)$$

and the corresponding eigenvalues are given by

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\rho_{11} + \rho_{44} \pm \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2} \right],$$

and

$$\eta_{3,4} = \frac{1}{2} \left[\rho_{22} + \rho_{33} \pm \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2} \right].$$

The entropy of the reduced matrix of ρ_A and ρ_B is given by

$$\begin{aligned} S(\rho_A) &= -(\rho_{11} + \rho_{22}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{22}) \\ &\quad - (\rho_{33} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{33} + \rho_{44}), \end{aligned} \quad (79)$$

and

$$\begin{aligned} S(\rho_B) &= -(\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2(\rho_{11} + \rho_{33}) \\ &\quad - (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2(\rho_{22} + \rho_{44}). \end{aligned} \quad (80)$$

To minimize the classical correlations (77), we take a complete set of projective measures on the subsystem B which are represented by the operators $\{\pi_{B^j} = |B_j\rangle\langle B_j|, j = 1, 2\}$ with

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \\ |B_2\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle - e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (81)$$

with $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ and $0 \leq \varphi < 2\pi$. The probability $p_{B,j}$ corresponding to the result j and the two eigenvalues of the corresponding $\rho_{B,j}$ after the measurement are given by

$$p_{B,j} = \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^j \cos \theta (1 - 2\rho_{11} - 2\rho_{33}) \right] \quad (82)$$

and

$$\eta_{\pm}(\rho_{B,j}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{v_j}}{p_{B,j}} \right), \quad (83)$$

with

$$\begin{aligned} v_j &= \frac{1}{4} \left[1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}) + (-1)^j \cos \theta (1 - 2\rho_{11} - 2\rho_{44}) \right]^2 + \\ &\quad \sin^2 \theta \left[|\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2 - 2|\rho_{14}||\rho_{23}| \sin(2\varphi + \phi) \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

The entropy of $\rho_{B,j}$ can be written in terms of its eigenvalues as follows

$$S(\rho_{B,j}) = H(\eta_{\pm}(\rho_{B,j})) \quad (85)$$

where $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$ is the binary Shannon entropy. Thus, the conditional entropy is

$$S(\rho_{A|B}) = \sum_{j=1}^2 p_{B,j} S(\rho_{B,j}) = p_{B,1} S(\rho_{B,1}) + p_{B,2} S(\rho_{B,2}). \quad (86)$$

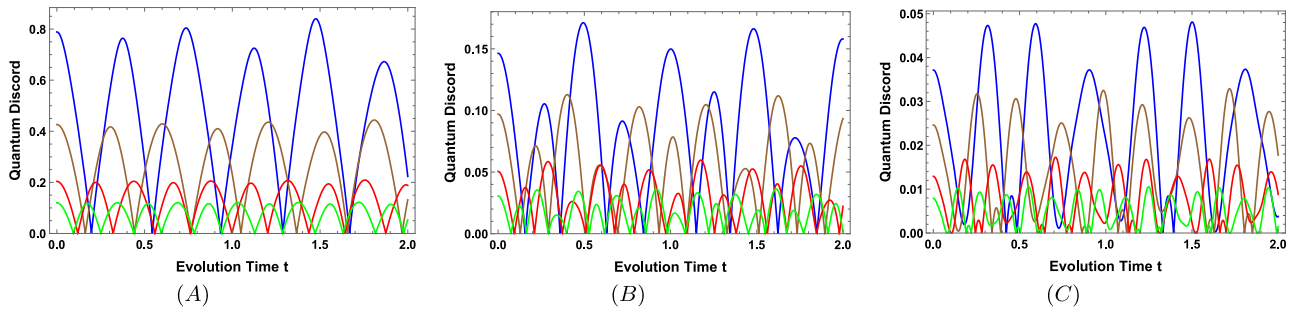


Fig. 4. The same as in Fig. 2 but for the time evolution of quantum discord in terms of the time t .

By setting partial derivatives of this conditional entropy with respect to θ and φ equal to zero, it is easy to show that the conditional entropy is minimal when $\theta = \frac{\pi}{2}$ (in this case $p_{B,1} = p_{B,2}$ and $S(\rho_{B,1}) = S(\rho_{B,2})$). Thus, the minimum value of the conditional entropy is

$$\zeta_1 = H\left(\frac{1 + \sqrt{(1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}))^2 + 4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2}}{2}\right), \quad (87)$$

The second extremal value is obtained when $\theta = 0$ for any arbitrary value of φ and the second minimal value of the conditional entropy is

$$\zeta_2 = -\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} - H(\rho_{11} + \rho_{33}). \quad (88)$$

Consequently, the explicit expression of classical correlations for the X -states (78) takes the form

$$\mathcal{J}(\rho_{AB}) = \max(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2), \quad (89)$$

with

$$\mathcal{J}_i = H(\rho_{11} + \rho_{22}) - \zeta_i. \quad (90)$$

Finally, the analytical expression of QD can be determined from Eq. (76) as

$$\mathcal{Q}(\rho_{AB}) = \min(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2), \quad (91)$$

where

$$\mathcal{Q}_i = H(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^4 \eta_i \log_2 \eta_i + \zeta_i. \quad (92)$$

For the two-qubit state (69), the quantum discord is given by the expression (91) with

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 = & H(1 - |e_{n+1}|^2 - |b_{n+2}|^2) + |a_n|^2 \log_2(|a_n|^2) \\ & + |b_{n+2}|^2 \log_2(|b_{n+2}|^2) - 2|e_{n+1}|^2 \log_2(2|e_{n+1}|^2) + \\ & H\left(\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(1 - 2|e_{n+1}|^2 - 2|b_{n+2}|^2)^2 + 4|e_{n+1}|^4}\right)\right), \end{aligned} \quad (93)$$

and

$$\mathcal{Q}_2 = 2|e_{n+1}|^2. \quad (94)$$

The time evolution of the quantum discord for different values of the Stark shift parameters, when the two atoms are initially prepared in their excited state, is depicted in Fig. 4 for $w_z = w_c = 0$ and in Fig. 5 when $w_z = 0.5$ and $w_c = 1$. We observe from these figures that QD and QC have similar behaviors. As mentioned earlier for QC, the QD evolves periodically with respect to time and their periods depend heavily on the Stark-shift parameters. Also, increasing the Stark shift parameters leads to reduce the amount of quantum correlations contained in the system. Moreover, QD has confirmed the revival phenomenon like QC and we can find more quantum correlation oscillations for the large values of the Stark shift parameters. We also remark that QD decreases with increasing of photon number as the frequency w_z and w_c increase. More importantly, by comparing the Fig. 2(A)–(C) with Figs. 4(A)–(C) and 3(A)–(C) with Fig. 5(A)–(C), we remark that the amount of QC is greater and goes beyond QD. This result is completely in concordance with the physical interpretation given in [85] where the authors show that QC (via the quantum relative entropy) is more fundamental than other manifestations of quantum correlations (QE and QD) since it can also appear in single-partite systems.

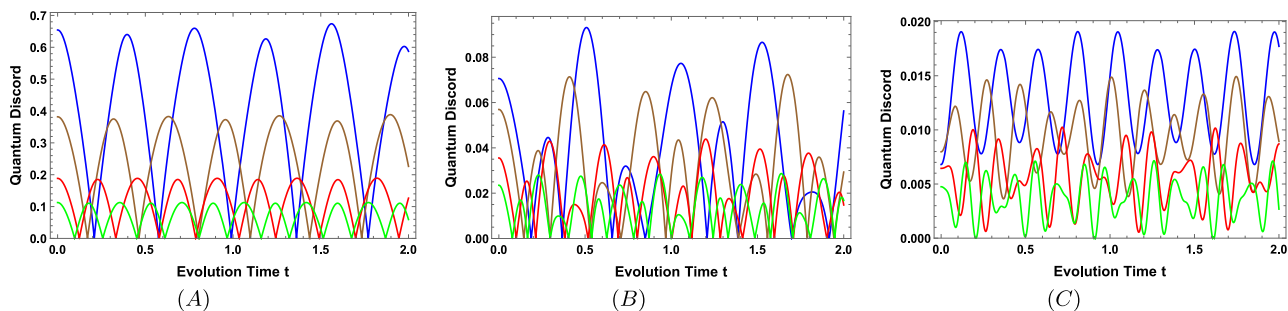


Fig. 5. The same as in Fig. 3 but for the time evolution of quantum discord in terms of the time t .

5. Conclusions

To summarize, we have investigated the quantum coherence dynamics and non-classical correlation dynamics in two two-level atoms interacting with a single-mode electromagnetic cavity field. A special attention is dedicated to the presence of the Stark shifts. Considering two atoms initially in their excited states and the field in coherent state, we have obtained the exact analytic solution of the time-dependent Schrödinger equation and extracted the time evolution of the relevant density matrix elements. In analyzing the dynamics of QC and QD, we observed that the time evolution of quantum coherence quantified by quantum Jensen–Shannon divergence is almost similar to the time evolution of quantum correlations measured by entropic quantum discord. But we have noticed the amount of quantum coherence is always greater and goes beyond quantum discord due to the fact that the total quantum coherence in multipartite systems has contributions from local coherence on subsystems and collective coherence between them. Another remarkable feature for both QC and QD behaviors is the revival phenomenon which reflects the transfer of quantum features from the cavity to the two-qubit system. Furthermore, these two quantifiers decrease with increasing values of the Stark shift parameters as photons number increases. Because of the degeneracy of the levels in the two atoms produced by the electromagnetic cavity field, we remarked that the Stark-shift parameters can dramatically influence both the quantity of the initial quantum correlations and the quantum superposition of the system and can also change the other properties of the physical resources needed for implementing quantum information processing tasks.

As prolongation of this work, we believe that it will be interesting to study the effects of the reflecting boundary on the coherence dynamics in this model. Very recently, Huang [86] has shown that the presence of the boundary in two identical two-level atoms weakly interacting with a bath of fluctuating electromagnetic fields in a vacuum has a significant impact on the generation, revival and degradation of quantum correlations. Furthermore, Cheng et al. [87] showed that the boundary executes important influences on the entanglement dynamics behaviors in the same model. On the other hand, this research raised many questions that need further investigation, the most important of which is related to the influence of Stark-shift when the field of photons coupled with a modulated coupling parameter which depends explicitly on time. In other words, our results are encouraging and should be validated in the case of time-dependent fields. We hope to report on this subject in another work.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

References

- [1] B.W. Shore, *The Theory of Coherent Atomic Excitation*, Wiley, New York, NY, USA, 2019.
- [2] M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University, Cambridge, England, 1997.
- [3] L. Allen, J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Cambridge University, Cambridge, England, 1997.
- [4] D.X. Li, X.Q. Shao, Rapid population transfer of a two-level system by a polychromatic driving field, *Sci. Rep.* 9 (2019) 9023.
- [5] Y. Nakamura, Y.A. Pashkin, J.S. Tsai, Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box, *Nature* 398 (1999) 786–788.
- [6] P. Treutlein, C. Genes, K. Hammerer, M. Poggio, P. Rabl, *Hybrid Mechanical Systems*, in: *Quantum Science and Technology*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014, pp. 327–351.
- [7] M. Lukin, M. Fleischhauer, A. Imamoglu, *Quantum Information Processing Based on Cavity QED with Mesoscopic Systems*, Springer, Berlin Heidelberg, 2011, pp. 193–203.
- [8] Y.H. Kang, Y.H. Chen, Q.C. Wu, B.H. Huang, J. Song, Y. Xia, Fast generation of W states of superconducting qubits with multiple Schrödinger dynamics, *Sci. Rep.* 6 (2016) 36737.
- [9] S. Khan, H.E. Türeci, Frequency combs in a lumped-element Josephson-junction circuit, *Phys. Rev. Lett.* 120 (2018) 153601.
- [10] A.M. Steane, The ion trap quantum information processor, *Appl. Phys. B* 64 (1997) 623.
- [11] P. Michler, *Quantum Dots for Quantum Information Technologies*, Springer international publishing, Berlin, 2017.
- [12] R.H. Dicke, Coherence in spontaneous radiation processes, *Phys. Rev.* 93 (1954) 99.

- [13] A.S. Abdel-Rady, S.S. Hassan, A.N.A. Osman, A. Salah, Evolution of extended JC-dicke quantum phase transition with a coupled optical cavity in Bose–Einstein condensate system, *Int. J. Theor. Phys.* 56 (2017) 3655–3666.
- [14] T.G. Rudolph, H.S. Freedhoff, Z. Ficek, Multiphoton ac stark effect in a bichromatically driven two-level atom, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 1296.
- [15] A.S.F. Obada, M.M. Ahmed, A.M. Farouk, A. Salah, A moving three-level Λ -type atom in a dissipative cavity, *Eur. Phys. J. D* 71 (2017) 338.
- [16] N.H. Abdel-Wahab, A. Salah, On the interaction between a time-dependent field and a two-level atom, *Modern Phys. Lett. A* 34 (2019) 1950081.
- [17] Xi Chen, J.G. Muga, Engineering of fast population transfer in three-level systems, *Phys. Rev. A* 86 (2012) 033405.
- [18] A. Baksic, H. Ribeiro, A.A. Clerk, Speeding up adiabatic quantum state transfer by using dressed states, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 230503.
- [19] Y.H. Chen, Z.C. Shi, J. Song, Y. Xia, S.B. Zheng, Optimal shortcut approach based on an easily obtained intermediate hamiltonian, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 062319.
- [20] Y.H. Chen, Y. Xia, Q.Q. Chen, J. Song, Efficient shortcuts to adiabatic passage for fast population transfer in multiparticle systems, *Phys. Rev. A* 89 (2014) 033856.
- [21] Y.H. Chen, Y. Xia, Q.Q. Chen, J. Song, Fast and noise-resistant implementation of quantum phase gates and creation of quantum entangled states, *Phys. Rev. A* 91 (2015) 012325.
- [22] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [23] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Quantum entanglement, *Rev. Modern Phys.* 81 (2009) 865.
- [24] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 1895–1899.
- [25] C.H. Bennett, S.J. Wiesner, Communication via one-and two-particle operators on Einstein–Podolsky–Rosen states, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2881–2884.
- [26] T. Jennewein, C. Simon, G. Weihs, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Quantum cryptography with entangled photons, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 4729.
- [27] M. Murao, D. Jonathan, M.B. Plenio, V. Vedral, Quantum telecloning and multiparticle entanglement, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 156.
- [28] V. Vedral, M.B. Plenio, M.A. Rippin, P.L. Knight, Quantifying entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 2275.
- [29] D. Braun, Creation of entanglement by interaction with a common heat bath, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 277901.
- [30] A. Slaoui, M.I. Shaukat, M. Daoud, R.A. Laamara, Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission, *Eur. Phys. J. Plus* 133 (2018) 413.
- [31] T. Yu, J.H. Eberly, Finite-time disentanglement via spontaneous emission, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 140404.
- [32] A. Datta, A.T. Flammia, C.M. Caves, Entanglement and the power of one qubit, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 042316.
- [33] A. Datta, G. Vidal, Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 042310.
- [34] S.L. Braunstein, C.M. Caves, R. Jozsa, N. Linden, S. Popescu, R. Schack, Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 1054.
- [35] D.A. Meyer, Sophisticated quantum search without entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 2014.
- [36] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, C.A. Fuchs, T. Mor, E. Rains, P.W. Shor, J.A. Smolin, W.K. Wootters, Quantum nonlocality without entanglement, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 1070.
- [37] J. Niset, N.J. Cerf, Multipartite nonlocality without entanglement in many dimensions, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 052103.
- [38] B.P. Lanyon, M. Barbieri, M.P. Almeida, A.G. White, Experimental quantum computing without entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 200501.
- [39] H. Ollivier, W.H. Zurek, Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2001) 017901.
- [40] L. Henderson, V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 (2001) 6899.
- [41] F.F. Fanchini, M.F. Cornelio, M.C. de Oliveira, A.O. Caldeira, Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 012313.
- [42] M.F. Cornelio, M.C. de Oliveira, F.F. Fanchini, Entanglement irreversibility from quantum discord and quantum deficit, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 020502.
- [43] B. Dakić, et al., Quantum discord as resource for remote state preparation, *Nat. Phys.* 8 (2012) 666–670.
- [44] A. Datta, A. Shaji, C.M. Caves, Quantum discord and the power of one qubit, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 050502.
- [45] T. Werlang, S. Souza, F.F. Fanchini, C.V. Boas, Robustness of quantum discord to sudden death, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 024103.
- [46] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, J. Oppenheim, A. Sen, U. Sen, B. Synak-Radtke, Local versus nonlocal information in quantum-information theory: formalism and phenomena, *Phys. Rev. A* 71 (2005) 062307.
- [47] D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 240402.
- [48] A. Slaoui, M. Daoud, R.A. Laamara, The dynamics of local quantum uncertainty and trace distance discord for two-qubit X-states under decoherence: a comparative study, *Quantum Inf. Process.* 17 (2018) 178.
- [49] A. Slaoui, M. Daoud, R.A. Laamara, The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three-qubit X states under decoherence channels, *Quantum Inf. Process.* 18 (2019) 250.
- [50] S. Kim, L. Li, A. Kumar, J. Wu, Characterizing nonclassical correlations via local quantum Fisher information, *Phys. Rev. A* 97 (2018) 032326.
- [51] A. Slaoui, L. Bakmou, M. Daoud, R.A. Laamara, A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model, *Phys. Lett. A* 383 (2019) 2241–2247.
- [52] D. Girolami, A.M. Souza, V. Giovannetti, T. Tufarelli, J.G. Filgueiras, R.S. Sarthour, D.O. Soares-Pinto, I.S. Oliveira, G. Adesso, Quantum discord determines the interferometric power of quantum states, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 210401.
- [53] W.H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Rev. Modern Phys.* 75 (2003) 715.
- [54] J. Åberg, Quantifying superposition, 2006, arXiv preprint arXiv:quant-ph/0612146 [quant-ph].
- [55] J. Åberg, Catalytic coherence, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 150402.
- [56] T. Baumgratz, M. Cramer, M.B. Plenio, Quantifying coherence, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 140401.
- [57] A. Streltsov, E. Chitambar, S. Rana, M.N. Bera, A. Winter, M. Lewenstein, Entanglement and coherence in quantum state merging, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 240405.
- [58] J.P. Santos, L.C. Céleri, G.T. Landi, M. Paternostro, The role of quantum coherence in non-equilibrium entropy production, *npj. Quantum Inf.* 5 (2019) 1–7.
- [59] V. Narasimhachar, G. Gour, Low-temperature thermodynamics with quantum coherence, *Nature Commun.* 6 (2015) 7689.
- [60] A. Carollo, M.F. Santos, V. Vedral, Berry’s phase in cavity QED: Proposal for observing an effect of field quantization, *Phys. Rev. A* 67 (2003) 063804.
- [61] A. Salah, A.S. Abdel-Rady, A.N.A. Osman, S.S. Hassan, Enhancing quantum phase transitions in the critical point of extended TC–Dicke model via Stark effect, *Sci. Rep.* 8 (2018) 11633.
- [62] A.S. Abdel-Rady, S.S. Hassan, A.N.A. Osman, A. Salah, Quantum phase transition and Berry phase of the Dicke model in the presence of the Stark-shift, *Internat. J. Modern Phys. B* 31 (2017) 1750091.
- [63] P. Alsing, M.S. Zubairy, Collapse and revivals in a two-photon absorption process, *J. Opt. Soc. Amer. B* 4 (1987) 177–184.
- [64] R.R. Puri, R.K. Bullough, Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity, *J. Opt. Soc. Amer. B* 5 (1988) 2021–2028.
- [65] I. Ashraf, M.S. Zubairy, Photon statistics of the two-photon micromaser, *Opt. Commun.* 77 (1990) 85–90.

- [66] S.-C. Gou, Dynamics of the two-mode Jaynes-Cummings model modified by Stark shifts, *Phys. Lett. A* 147 (1990) 218–222.
- [67] X.-D. Yu, D.-J. Zhang, G.F. Xu, D.M. Tong, Alternative framework for quantifying coherence, *Phys. Rev. A* 94 (2016) 060302.
- [68] A. Winter, D. Yang, Operational resource theory of coherence, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 120404.
- [69] A. Streltsov, U. Singh, H.S. Dhar, M.N. Bera, G. Adesso, Measuring quantum coherence with entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015) 020403.
- [70] X. Yuan, H. Zhou, Z. Cao, X. Ma, Intrinsic randomness as a measure of quantum coherence, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 022124.
- [71] X. Qi, T. Gao, F. Yan, Measuring coherence with entanglement concurrence, *J. Phys. A* 50 (2017) 285301.
- [72] C.-S. Yu, Quantum coherence via skew information and its polygamy, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 042337.
- [73] A.E. Rastegin, Quantum-coherence quantifiers based on the Tsallis relative α entropies, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 032136.
- [74] H. Zhao, C.S. Yu, Coherence measure in terms of the Tsallis relative α entropy, *Sci. Rep.* 8 (2018) 299.
- [75] C.L. Liu, D.-J. Zhang, X.-D. Yu, Q.-M. Ding, L. Liu, A new coherence measure based on fidelity, *Quantum Inf. Process.* 16 (2017) 198.
- [76] J. Xu, Quantifying coherence of Gaussian states, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 032111.
- [77] C. Radhakrishnan, M. Parthasarathy, S. Jambulingam, T. Byrnes, Distribution of quantum coherence in multipartite systems, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 150504.
- [78] J. Lin, Divergence measures based on the Shannon entropy, *IEEE Trans. Inform. Theory* 37 (1991) 145–151.
- [79] J. Briët, P. Harremoës, Properties of classical and quantum Jensen–Shannon divergence, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 052311.
- [80] A.P. Majtey, P.W. Lamberti, D.P. Prato, Jensen–Shannon divergence as a measure of distinguishability between mixed quantum states, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 052310.
- [81] P.W. Lamberti, A.P. Majtey, A. Borras, M. Casas, A. Plastino, Metric character of the quantum Jensen–Shannon divergence, *Phys. Rev. A* 77 (2008) 052311.
- [82] B. Dakic, V. Vedral, C. Brukner, Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 190502.
- [83] D. Girolami, G. Adesso, Quantum discord for general two-qubit states: analytical progress, *Phys. Rev. A* 83 (2011) 052108.
- [84] C.-Z. Wang, C.-X. Li, L.-Y. Nie, J.-F. Li, Classical correlation and quantum discord mediated by cavity in two coupled qubits, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 44 (2010) 015503.
- [85] Y. Yao, X. Xiao, L. Ge, C.P. Sun, Quantum coherence in multipartite systems, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 022112.
- [86] Z. Huang, Behaviors of quantum correlation for atoms coupled with fluctuating electromagnetic field with a perfectly reflecting boundary, *Quantum Inf. Process.* 18 (2019) 149.
- [87] S. Cheng, H. Yu, J. Hu, Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms in the presence of a reflecting boundary, *Phys. Rev. D* 98 (2018) 025001.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

La théorie de l'information quantique est devenue l'une des nouvelles interfaces entre la science et la technologie au cours des dernières décennies. Contrairement à la théorie de l'information classique qui porte sur le bit classique, la théorie de l'information quantique est centrée sur le concept de qubit qui peut exister dans une superposition de deux états en même temps. L'importance des ressources quantiques est évidente du fait que certaines tâches de traitement de l'information, comme la téléportation et la sécurité de l'information, ne peuvent être accomplies avec les seules ressources classiques et que leurs résultats sont grandement améliorés lorsque les ressources classiques sont combinées aux ressources quantiques. Alors que la superposition et les corrélations quantiques sont des ressources quantiques bien établies. Des travaux de recherche importants ont récemment été menés pour explorer la possibilité d'utiliser la cohérence quantique comme ressource pour des applications de traitement de l'information. D'autre part, les progrès récents dans le domaine de l'estimation quantique des paramètres ont été stimulés par la perspective d'une deuxième révolution quantique, visant à exploiter les phénomènes quantiques pour améliorer les performances de plusieurs tâches relevant de la théorie de l'information.

L'essentiel de cette thèse, et le principal objectif de l'auteur, est de trouver les méthodes analytiques pour résoudre plusieurs problèmes ouverts en théorie de l'information quantique. Nous nous sommes principalement intéressés à trouver les nombreuses connexions entre les théories des ressources quantiques et la théorie de l'estimation quantique, où certains résultats intéressants ont été trouvés et discutés tout au long de cette thèse. Dans cette partie, nous fournissons un résumé technique du contenu de la thèse, discutons de l'avenir de ce travail, et tirons des conclusions générales basées sur les résultats que nous avons obtenus. A travers ce manuscrit, nous avons essayé de présenter notre travail de manière conviviale et concise. Celui-ci est réparti en quatre chapitres plus d'une introduction générale constituant les piliers de cette thèse.

Le premier chapitre sert de révision des concepts d'introduction importants de la théorie de l'information quantique, en commençant par expliquer l'information d'un point de vue physique. Ensuite, nous explorons le lien entre le caractère aléatoire et le manque d'information, puis nous étudions la différence entre l'information classique et l'information quantique, ainsi qu'un bref aperçu des mesures correspondantes. Nous avons également évoqué les outils mathématiques de base utilisés dans la description des états quantiques, le formalisme de l'opérateur de densité, des qubits, des mesures quantiques, des types d'entropies et du phénomène d'intrication quantique. Enfin, le chapitre se termine par quelques critères et mesures de l'intrication dans les systèmes quantiques avec leurs expressions analytiques en basse dimension.

De nombreuses études ont porté sur la réalisation de l'intrication dans des états quantiques et beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude de la dynamique de l'intrication, de sa décohérence et de son contrôle dans différents systèmes. C'est malgré tous ces progrès que l'absence d'une théorie complète de l'intrication persiste et que la détermination de l'intrication d'un état donné reste un problème ouvert. Pour les systèmes bipartites, à deux et trois niveaux, le problème peut être abordé à l'aide de la concurrence ou de la négativité. Pour les systèmes multipartites, même ce progrès limité est resté insaisissable. Par ailleurs, il a été démontré que même les états séparables peuvent jouer un rôle important dans l'exécution de protocoles de communication et d'information plus performants que les protocoles classiques. Il est donc intéressant d'étudier les avantages fondamentaux des corrélations quantiques au-delà de l'intrication.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous avons développé des méthodes analytiques qui permettent la détection et la quantification des corrélations de type discorde avec des opérations locales sur un seul sous-système, et qui ont promis de représenter une approche évolutive de la caractérisation des corrélations à la lumière de l'augmentation de la dimension de l'espace de Hilbert avec le nombre de particules en interaction. Tout d'abord, nous fournissons une prescription générale pour calculer la discorde quantique des états à deux qubits. Ensuite, nous étudions l'interaction entre les mesures d'intrication et la discorde quantique. Le problème d'optimisation pour l'entropie conditionnelle, et de manière équivalente pour la discorde quantique, est reformulé en utilisant l'entropie linéaire au lieu de l'entropie de von Neumann dans le calcul de corrélation classique induit par la mesure locale. Ce processus permet d'obtenir deux expressions analytiques de la discorde quantique, l'une pour les états qubit-qubit arbitraire, et l'autre pour des états bipartites de type qudit-qubit. Nous construisons également un point de vue alternatif sur la corrélation quantique à partir du concept d'incertitude quantique, en prouvant un lien frappant entre deux caractéristiques quantiques, à savoir la corrélation quantique des états et l'incertitude sur les observables locales. En effet, chaque fois que nous effectuons une mesure sur un sous-système d'un système bipartite dont l'état possède une corrélation quantique, l'incertitude quantique sur cet état est garantie d'apparaître. L'incertitude quantique minimale sur une seule mesure locale est elle-même un quantificateur de corrélation quantique. À la fin de ce chapitre, nous avons étudié un ensemble de lois conservatrices qui régissent la façon dont l'intrication et la discorde quantique sont distribuées dans les systèmes multipartites. Ces égalités relient les contraintes de l'intrication distribuée à la discorde distribuée et vice versa.

En revanche, l'interaction inévitable entre un système quantique et son environnement détruit généralement la cohérence et le caractère quantique du système. Cependant, une dynamique cohérente et les survivances des corrélations quantiques sont des conditions nécessaires au traitement de l'information quantique. Une description détaillée du mécanisme de décohérence est donc d'une grande importance pour le développement des technologies quantiques et la caractérisation précise du bruit agissant sur un système quantique est le principal outil pour concevoir des protocoles robustes contre les effets néfastes de la décohérence. L'approche habituelle pour étudier la décohérence due à l'interaction entre un système quantique et son environnement consiste à décrire ce dernier comme un réservoir quantique. Mais il existe des situations où cette description peut être difficile ou inappropriée. Dans cette inspiration, le troisième chapitre fournit une description complète de la théorie des systèmes quantiques ouverts, où nous avons discuté en détail le concept d'application dynamique universelle et sa relation avec l'évolution du système quantique ouvert. Nous avons montré que la dynamique du système réduit est obtenue à partir de l'équation de Liouville-Von Neumann, puis nous avons présenté l'équation maîtresse de Lindblad que nous avons dérivée sous des approximations de Born-Markov. Les approches et techniques markoviennes les plus couramment utilisées ont également été présentées. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous explorons le fait que la cohérence et les corrélations quantiques sont intimement liées et peuvent être transformées l'une

en l'autre, bien que la première notion a été définie par rapport à un système unique, tandis que la seconde concerne les systèmes bipartites et multipartites. Concernant la caractérisation et la quantification de la cohérence quantique, il existe de nombreuses méthodes différentes qui s'appliquent à des situations différentes. Elles peuvent également être quantifiées de manière similaire aux corrélations quantiques, par exemple en utilisant la distance géométrique de deux états. Ce cadre unifié permet de comprendre les liens intrinsèques entre ces deux notions fondamentales.

Dans le quatrième chapitre, nous avons revu les grandes idées sur la métrologie quantique. Notre grand intérêt fut porté principalement sur le rôle des corrélations quantiques en métrologie quantique, afin de fournir une meilleure précision dans l'estimation d'un paramètre inconnu. En effet, la théorie de l'estimation quantique permet de trouver le paramètre optimal pour estimer efficacement la valeur d'un paramètre. La limite ultime de la précision de la variance associée à un estimateur est bornée selon le théorème de Cramér-Rao quantique et elle est proportionnelle à l'inverse de l'information de Fisher quantique. Les bases de la théorie de l'estimation classique et de celle de l'estimation quantique sont discutées. Par ailleurs, des méthodes analytiques permettant de calculer l'information de Fisher quantique dans plusieurs scénarios ont été obtenues. De surcroît, nous avons lié l'information quantique de Fisher à l'analyse des corrélations quantiques. Nous avons étudié la caractérisation des corrélations quantiques du point de vue de l'information quantique de Fisher locale, qui constitue une mesure raisonnable des corrélations quantiques. Cela signifie que nous pouvons quantifier les corrélations quantiques en termes de l'information quantique de Fisher. Ce lien est devenu apparent lorsque nous avons examiné la relation entre l'information quantique de Fisher locale et l'incertitude quantique locale, qui sont toutes des quantificateurs de corrélations quantiques de type discord via l'incertitude quantique. Cela donne des avantages significatifs pour examiner le rôle des corrélations quantiques dans la détermination de la haute précision du paramètre estimé.

Dans le cinquième chapitre, nous avons inséré nos contributions consacrées à ces différents axes majeurs. Le premier travail portait principalement sur le problème des mesures de corrélations quantiques dans les systèmes bipartites à deux qubits. Nous nous sommes attachés à étudier, via quelques modèles spécifiques, la dynamique des corrélations quantiques sous les effets induisant la disparition de la cohérence. Le premier modèle est un système à deux qubits couplé à deux réservoirs bosoniques indépendants, dont trois types de réservoirs : sub-ohmique, ohmique et super-ohmique. Le second concerne deux atomes à deux niveaux interagissant avec les modes d'un champ de radiation quantifié. Dans ce sens, nous avons dérivé l'expression analytique de l'incertitude quantique locale pour les états X à deux qubits. En analysant la dynamique de ce quantificateur, et en le comparant avec la discord quantique de trace et la concurrence dans chaque modèle considéré. Ces trois quantificateurs des corrélations quantiques se comportent différemment, et chaque mesure présente des avantages par rapport à l'autre qui dépendent de chaque système considéré.

Dans la seconde contribution, nous nous intéressons à la création de corrélations quantiques entre deux atomes identiques couplés à un environnement markovien commun en présence de modes de champ électromagnétique. Pour cela, nous analysons la dynamique des corrélations quantiques, avec une attention particulière à la concurrence, à la discord quantique de trace et à l'incertitude quantique locale, pour différents états initiaux de Dicke. Nos résultats montrent que l'effet d'amortissement collectif et l'interaction dipôle-dipôle jouent un rôle essentiel dans l'amélioration des corrélations non classiques au cours du processus de décohérence intrinsèque.

Le troisième publication présentait l'expression analytique de l'incertitude quantique locale pour des états X à trois qubits. À titre d'illustration, nous avons calculé la corrélation non-classique, dans les cas particuliers des états mixtes GHZ et des états de type Bell, en utilisant ce quantificateur de corrélation quantique. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la discord quantique entropique et de la négativité. La quantité de corrélations quantiques

quantifiées par l'incertitude quantique locale est presque similaire à celle mesurée par la discordance quantique entropique. Cela indique que l'incertitude quantique locale constitue un quantificateur approprié pour traiter la corrélation quantique dans les systèmes multi-qubit. Nous examinons également la dynamique de ces quantificateurs sous les effets des canaux d'amortissement de phase, de dépolarisation et d'inversion de phase. Nous constatons que l'incertitude quantique locale montre plus de robustesse de corrélation quantique. Enfin, nous montrons que l'incertitude quantique locale satisfait le principe de monogamie pour les états à trois qubits.

Dans le quatrième papier, nous avons examiné le rôle des corrélations quantiques dans les protocoles d'estimation de phase en métrologie quantique. Nous avons donné la relation entre l'incertitude quantique locale et l'information quantique locale de Fisher, et nous montrons que ces deux mesures sont essentielles pour déterminer la précision dans les protocoles métrologiques. Surtout, la présente étude suggère que l'information quantique de Fisher locale et l'incertitude quantique locale présentent une variation similaire. Ces résultats soulignent l'importance et l'interaction entre ces deux types particuliers de corrélations quantiques.

La cinquième publication est consacrée à la compréhension des liens entre la corrélation et la cohérence quantique dans les systèmes quantiques. En particulier, nous avons étudié la dynamique de la cohérence quantique (mesurée à l'aide de la divergence quantique de Jensen-Shannon) et la dynamique de corrélation non-classique (capturée par la discordance quantique) dans deux atomes à deux niveaux interagissant avec un champ de cavité électromagnétique monomode. Une attention particulière est consacrée à la présence des décalages de Stark. Nous avons montré que le décalage de Stark et le nombre de photons de l'état cohérent jouent un rôle clé dans le renforcement ou la disparition de la cohérence et de la discordance quantique au cours du processus de décohérence intrinsèque. En outre, ces deux concepts différents présentent un comportement similaire dans notre modèle, avec l'observation intuitive qui affirme que la quantité de la cohérence quantique est toujours plus grande et va au-delà de la discordance quantique.

Plusieurs obstacles doivent encore être surmontés, certaines clés restent perdues et de nombreuses questions sans réponse apparaissent, qui pourront être étudiées dans le cadre de développements ultérieurs. Ceci nous a motivé à présenter les perspectives d'avenir. En effet, nous envisageons d'aller plus loin dans ce terrain, et nous synthétisons ici quelques points de vue :

- Durant cette thèse, nous avons discuté de la manière dont l'information quantique peut être quantifiée et caractérisée en utilisant le concept de qubit dans l'espace de Hilbert fini. D'autre part, une autre approche de la construction des qubits a fait l'objet de plusieurs études en utilisant des systèmes à variables continues, où l'information est codée dans la position et l'impulsion des particules. Nous sommes convaincus que nos résultats serviront de base aux futures études à la fois de la corrélation et de la cohérence quantique dans l'espace de phase et devraient être étendus et validés par de grandes classes d'états des systèmes à variables continues.
- De nombreux schémas d'estimation multiparamétrique quantique ont été proposés et discutés en ce qui concerne divers systèmes quantiques, et certains d'entre eux ont montré des avancées théoriques par rapport aux schémas à paramètre unique. Cependant, de nombreux problèmes restent ouverts, comme la conception d'une mesure optimale, une mesure particulièrement simple et pratique qui est indépendante des paramètres inconnus, les méthodes analytiques pour saturer la borne de Cramér-Rao, ainsi que le rôle des corrélations quantiques dans la stratégie d'estimation multiparamétrique quantique. Nous pensons que certains de ces problèmes seront résolus dans un avenir proche.
- Très récemment, deux extensions de la thermodynamique (développée à l'origine comme une théorie visant à optimiser l'efficacité des machines thermiques) ont fait progresser la théorie au point où la mécanique quantique devrait être incorporée ; Premièrement, le

rôle de l'information en thermodynamique, Deuxièmement, les extensions de la thermodynamique au domaine des systèmes microscopiques dans lesquels les fluctuations sont importantes. Ces deux extensions conduisent la thermodynamique comme une théorie de ressource quantique qui nous permet de reformuler ses lois d'une manière naturelle [221, 222]. Il est donc très intéressant d'étudier les liens entre cette nouvelle ressource quantique et les autres ressources que nous avons abordées dans cette thèse.

Théories des ressources quantiques			
Ressources quantique	Intrication quantique	Cohérence quantique	Thermodynamique quantique
États des ressources	États intriqués	États cohérents	États hors-équilibre
Opérations libres	LOCC	Opérations incohérents	Opérations thermodynamiques
États libres	États séparables	États incohérents	États thermiques

Nous espérons que les résultats décrits dans cette thèse seront utilisés pour mieux décrire et comprendre les ressources quantiques et leurs applications en théorie de l'information quantique. Si vous, le lecteur, avez des questions relatives à ces résultats, l'auteur de la thèse est plus que ravi de vous répondre par e-mail. Veuillez contacter l'auteur à l'adresse électronique suivante :

abdallah.slaoui@um5s.net.ma

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth Edition. International series of monographs on physics 27, Clarendon Press, 1981.
- [2] E. Schrödinger, Discussion of probability relations between separated systems. *Math. Proc. Camb. Philo. Soc.*, **31** (1935) 555.
- [3] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Quantum entanglement, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865.
- [4] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390** (1997) 575-579.
- [5] S. Pirandola, J. Eisert, C. Weedbrook, A. Furusawa and S. L. Braunstein, Advances in quantum teleportation. *Nature photonics*, **9** (2015) 641-652.
- [6] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel and H. Zbinden, Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, **74** (2002) 145.
- [7] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail and J. Smolin, Experimental quantum cryptography. *Journal of cryptology*, **5** (1992) 3-28.
- [8] A. J. Scott, Multipartite entanglement, quantum-error-correcting codes, and entangling power of quantum evolutions, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 052330.
- [9] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*, (1994) 124-134. Ieee.
- [10] L. K. Grover, in *Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, (1996) 212-219.
- [11] M. B. Plenio and S. S. Virmani, An introduction to entanglement theory, *Quantum information and coherence*, (2014) 173-209.
- [12] O. Gühne and G. Tóth, Entanglement detection. *Phys. Repts*, **474** (2009) 1-75.
- [13] R.F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hiddenvariable model. *Phys. Rev. A*, **40** (1989) 4277.
- [14] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47** (1935) 77.
- [15] E. Schrödinger, Probability relations between separated systems. *Math. Proc. Camb. Philo. Soc.*, **32** (1936) 446.
- [16] E. Schrödinger, Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik (The present situation in quantum mechanics), *Naturwissenschaften* **23** (1935) 807,823,844.

- [17] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [18] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner, Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, **86** 419 (2014).
- [19] H. Ollivier and W. H. Zurek, Quantum discord : a measure of the quantumness of correlations, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2001) 017901.
- [20] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, Z. Paterek and V. Vedral, The classical-quantum boundary for correlations : discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 1655–1707.
- [21] G. Adesso, T. R. Bromley and M. Cianciaruso, Measures and applications of quantum correlations, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **49** (2016) 473001.
- [22] A. Brodutch and D. R. Terno, *Lectures on General Quantum Correlations and their Applications*. *Quantum Science and Technology* ed F Fanchini et al (Berlin : Springer) 2017 pp 183–99.
- [23] G. Adesso, M. Cianciaruso and T. R. Bromley, An introduction to quantum discord and non-classical correlations beyond entanglement, 2016 (arXiv :1611.01959).
- [24] Z. Ma, Z. Chen, F. F. Fanchini, and S. M. Fei, Quantum Discord for $d \otimes 2$ Systems, *Sci. Rep.* **5** (2015) 10262.
- [25] D. Girolami, T. Tufarelli and G. Adesso, Characterizing non-classical correlations via local quantum uncertainty, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 240402.
- [26] S. Kim, L. Li, A. Kumar and J. Wu, Characterizing nonclassical correlations via local quantum Fisher information, *Phys. Rev. A.* **97** (2018) 032326.
- [27] T. Theurer, N. Killoran, D. Egloff, and M. B. Plenio, Resource Theory of Superposition, *Phys. Rev. Lett.*, **119** (2017) 230401.
- [28] T. Biswas, M. G. Díaz, and A. Winter, Interferometric visibility and coherence, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **473** (2017) 20170170.
- [29] Y.-T. Wang, J.-S. Tang, Z.-Y. Wei, S. Yu, Z.-J. Ke, X.-Y. Xu, C.-F. Li, and G.-C. Guo, Directly Measuring the Degree of Quantum Coherence Using Interference Fringes, *Phys. Rev. Lett.*, **118** (2017) 020403.
- [30] E. Chitambar and G. Gour, Quantum resource theories, *Rev. Mod. Phys.* **91** (2019) 025001.
- [31] E. B. Davies, *Quantum theory of open systems*, Academic Press (1976).
- [32] A. Rivas and S. F. Huelga, *Open Quantum Systems. An Introduction*, Springer Briefs in Physics (2012).
- [33] H. P. Breuer, E. M. Laine, J. Piilo and B. Vacchini, Colloquium : Non-Markovian dynamics in open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, **88** (2016) 021002.
- [34] D. P. DiVincenzo, The physical implementation of quantum computation, *Fortschritte der Physik : Progress of Physics.* **48** (2000) 771.
- [35] C. M. Caves, Quantum-mechanical noise in an interferometer, *Phys. Rev. D*, **23** (1981)1693.
- [36] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore and D. J. Heinzen, Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy, *Phys. Rev. A*, **46** (1992) 67.
- [37] J. W. Britton, B. C. Sawyer, A. C. Keith, C.-C. J. Wang, J. K. Freericks, H. Uys, M. J. Biercuk, and J. J. Bollinger, Engineered two-dimensional Ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins, *Nature* **484** (2012) 489.
- [38] V. Giovannetti, S. Lloyd and L. Maccone, Quantum metrology, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 010401.

- [39] V. Giovannetti, S. Lloyd and L. Maccone, Advances in quantum metrology, *Nature photonics*. **5** (2011) 222.
- [40] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [41] M. G. Paris, Quantum estimation for quantum technology, *International Journal of Quantum Information*, **7** (2009) 125-137.
- [42] C. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, 1976.
- [43] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [44] S. L. Braunstein and C. M. Caves, Statistical distance and the geometry of quantum states, *Phys. Rev. Lett*, **72** (1994) 3439.
- [45] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone. Quantum-enhanced measurements : beating the standard quantum limit. *Science*, **306** (2004) 1330.
- [46] C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27** (1948) 379-423.
- [47] E. T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics. *Phy.Rev.* **106** (1957) 620.
- [48] M. Keyl, Fundamentals of Quantum Information Theory, *Phys. Rep.* **369** (2002) 431-548.
- [49] M. M. Wilde, From classical to quantum Shannon theory, arXiv preprint arXiv :1106.1445 (2011).
- [50] C. G. Timpson, Quantum Information Theory and The Foundations of Quantum Mechanics. arXiv :0412063 (2004).
- [51] H. Nyquist, Certain topics in telegraph transmission theory, *AIEE Trans*, **47** (1928) 617-644.
- [52] R. V. L. Hartley, Transmission of information, *Bell Syst. Techn. J*, **7** (1928) 535-563.
- [53] J. Watrous, *The theory of quantum information*. Cambridge University Press (2018).
- [54] S. Verdu, Fifty Years of Shannon Theory, *IEEE Transaction on information theory*, **44** (1998) 2057-2078.
- [55] R. Clausius, The Nature of the Motion which we call Heat, *Ann. Phys*, **125** (1865) 353.
- [56] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, 2 vols. Barth, Leipzig, 1898 (1896); transl. by S. G. Brush, *Lectures on Gas Theory*, Cambridge University Press, London, 1964.
- [57] C. H. Bennett, D.P. DiVincenzo and J. A. Smolin, Capacities of quantum erasure channels, *Phys. Rev. Lett*, **78** (1997) 3217.
- [58] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Vol. I, II*, Paris-New York, (1977).
- [59] J. von Neuman, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932); transl. by E. T. Beyer : *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1955).
- [60] B. W. Schumacher, Quantum coding, *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 2738.
- [61] B. Friedrich and D. Herschbach, Stern and Gerlach : How a bad cigar helped reorient atomic physics, *Phys.Today*, **56** (2003) 53-59.
- [62] V. B. Braginsky, B. B. Vladimir and Y. K. Farid, *Quantum measurement*. Cambridge University Press, (1995).
- [63] H. M. Wiseman and J. M. Gerard, *Quantum measurement and control*, Cambridge university press, (2009).

- [64] H. E. Brandt, Positive operator-valued measure in quantum information processing. American Journal of Physics, **67** (1999) 434-439.
- [65] S. Hamieh, R. Kobes and H. Zaraket, Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations. Phys. Rev. A, **70** (2004) 052325.
- [66] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [67] R. Alicki and M. Fannes, arXiv :quant-ph/0407033 (2003) ; M.M. Wolf and J. Eisert, New J. Phys. **7** (2005) 93 ; M. Mosonyi and F. Hiai, IEEE Trans. Inf. Th, **57** (2011) 2474.
- [68] M. Muller-Lennert, F. Dupuis, O. Szehr, S. Fehr and M. Tomamichel, On quantum Rényi entropies : A new generalization and some properties, J. Math. Phys, **54** (2013) 122203.
- [69] M. M. Wilde, A. Winter and D. Yang, Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy, Comm. Math. Phys, **331** (2014) 593-622.
- [70] S. Hill and W. K. Wootters, Entanglement of a pair of quantum bits. Phys. Rev. Lett, **78** (1997) 5022.
- [71] S. L. Braunstein and P. V. Loock, Quantum information with continuous variables, Rev. Mod. Phys, **77** (2005) 513.
- [72] A. K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, Phys. Rev. Lett, **67** (1991) 661.
- [73] A. Ekert, P. L. Knight, Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition, American Journal of Physics, **63** (1995) 415-423.
- [74] T. Radtke, S. Fritzsche, Simulation of n-qubit quantum systems. II. Separability and entanglement, Comp. Phys. Commu. **175** (2006) 145-166.
- [75] A. Peres, Separability criterion for density matrices, Phys. Rev. Lett, **77** (1996) 1413.
- [76] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin and P. L. Knight, Quantifying entanglement, Phys. Rev. Lett, **78** (1997) 2275-2279.
- [77] C. Eltschka and S. Jens, Quantifying entanglement resources, J. Phys. A : Math. Theor, **47** (2014) 424005.
- [78] D. Kabat, Black hole entropy and entropy of entanglement ; Nuc. Phys. B, **453** (1995) 281-299.
- [79] C. H. Bennett, Herbert J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, Concentrating partial entanglement by local operations, Phys. Rev. A, **53** (1996) 2046.
- [80] W. K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, Phys. Rev. Lett, **80** (1998) 2245.
- [81] P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery and G. J. Milburn. Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions. Phys.Rev. A, **64** (2001) 042315.
- [82] G. Vidal, R.F. Werner, Computable measure of entanglement, Phys. Rev. A, **65** (2002) 032314.
- [83] V. Coffman, J. Kundu and W. K. Wootters, Distributed entanglement, Phys. Rev. A, **61** (2000) 052306.
- [84] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Teleportation of continuous quantum variables, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 869.
- [85] A. Sørensen and M. Klaus, Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion, Phys. Rev. A. **62** (2000) 022311.

- [86] A. K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 661.
- [87] A. Datta, A. T. Flammia and C. M. Caves, Entanglement and the power of one qubit, *Phys. Rev. A.* **72** (2005) 042316.
- [88] A. Datta and G. Vidal, Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation, *Phys. Rev. A.* **75** (2007) 042310.
- [89] S. L. Braunstein, C. M. Caves, R. Jozsa, N. Linden, S. Popescu and R. Schack, Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1054.
- [90] D. A. Meyer, Sophisticated quantum search without entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 2014.
- [91] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, C. A. Fuchs, T. Mor, E. Rains, P. W. Shor, J. A. Smolin and W. K. Wootters, Quantum non-locality without entanglement, *Phys. Rev. A.* **59** (1999) 1070.
- [92] J. Niset and N. J. Cerf, Multipartite nonlocality without entanglement in many dimensions, *Phys. Rev. A.* **74** (2006) 052103.
- [93] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida and A. G. White, Experimental quantum computing without entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 200501.
- [94] L. Henderson and V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** (2001) 6899.
- [95] B. Dakić, V. Vlatko and B. Časlav, Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 190502.
- [96] M. Piani, Problem with geometric discord. *Phys. Rev. A.* **86** (2012) 034101.
- [97] F. M. Paula, T. R. de Oliveira, and M. S. Sarandy, Geometric quantum discord through the Schatten 1-norm, *Phys. Rev. A.* **87** (2013) 064101.
- [98] D. Girolami, A. M. Souza, V. Giovannetti, T. Tufarelli, J. G. Filgueiras, R. S. Sarthour, D. O. Soares-Pinto, I. S. Oliveira and G. Adesso, Quantum discord determines the interferometric power of quantum states, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 210401.
- [99] A. Datta, A. Shaji, C. M. Caves, Quantum discord and the power of one qubit. *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 050502.
- [100] J. Maziero, H. C. Guzman, L. C. Céleri, M. S. Sarandy and R. M. Serra, Quantum and classical thermal correlations in the XY spin-1/2 chain, *Phys. Rev. A*, **82** (2010) 012106 ; T. Werlang, C. Trippe, G. A. P. Ribeiro and G. Rigolin, Quantum correlations in spin chains at finite temperatures and quantum phase transitions, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 095702 ; J. Maziero, L. C. Céleri, R. M. Serra and M. S. Sarandy, Long-range quantum discord in critical spin systems, *Phys. Lett. A.* **376** (2012) 1540-1544.
- [101] K. Brádler, M. M. Wilde, S. Vinjanampathy and D. B. Uskov, Identifying the quantum correlations in light-harvesting complexes, *Phys. Rev. A.* **82** (2010) 062310.
- [102] L. C. Céleri, A. G. Landulfo, R. M. Serra and G. E. Matsas, Sudden change in quantum and classical correlations and the Unruh effect. *Phys. Rev. A.* **81** (2010) 062130.
- [103] T. Werlang, S. Souza, F.F. Fanchini and C.V. Boas, Robustness of quantum discord to sudden death, *Phys. Rev. A.* **80** (2009) 024103.
- [104] A. Streltsov and W.H. Zurek, Quantum discord cannot be shared, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 040401.
- [105] C.-Z. Wang, C.-X. Li, L.-Y. Nie and J.-F. Li, Classical correlation and quantum discord mediated by cavity in two coupled qubits, *J. Phys. B : At.Mol. Opt. Phys.* **44** (2010) 015503.

- [106] M. Koashi and A. Winter, Monogamy of quantum entanglement and other correlations, *Phys. Rev. A.* **69** (2004) 022309.
- [107] D. Girolami and G. Adesso; Quantum discord for general two-qubit states : analytical progress; *Phys. Rev. A.* **83** (2011) 052108.
- [108] D. Girolami and G. Adesso; Interplay between computable measures of entanglement and other quantum correlations; *Phys. Rev. A.* **84** (2011) 052110.
- [109] T. Nakano, M. Piani and G. Adesso; Negativity of quantumness and its interpretations; *Phys. Rev. A.* **88** (2013) 012117.
- [110] F. Ciccarello, T. Tufarelli and V. Giovannetti; Toward computability of one-norm geometric quantum discord; *New J. Phys.* **16** (2014) 013038.
- [111] T. J. Osborne and F. Verstraete, General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 220503.
- [112] M. I. Shaukat, A. Slaoui, H. Terças and M. Daoud, Phonon-mediated quantum discord in dark solitons, *Eur. Phys. J. Plus.* **135** (2020) 357.
- [113] T. J. Osborne, Entanglement measure for rank-2 mixed states, *Phys. Rev. A.* **72** (2005) 022309.
- [114] B. Horst, K. Bartkiewicz, A. Miranowicz, Two-qubit mixed states more entangled than pure states : comparison of the relative entropy of entanglement for a given nonlocality, *Phys. Rev. A.* **87** (2013) 042108.
- [115] F. Benabdallah, A. Slaoui and M. Daoud, Quantum discord based on linear entropy and thermal negativity of qutrit–qubit mixed spin chain under the influence of external magnetic field, *Quantum Inf Process.* **19** (2020) 252.
- [116] W. Heisenberg, Uber den anschaulichen Inhalt der quanten theoretischen Kinematik und Mechanik, *Z. Phys.* **43** (1927) 172.
- [117] J. Oppenheim and S. Wehner, The uncertainty principle determines the nonlocality of quantum mechanics. *Science.* **330** (2010) 1072.
- [118] S. L. Luo, Quantum versus classical uncertainty, *Theoretical and mathematical physics,* **143** (2005) 681-688.
- [119] E. P. Wigner and M.M. Yanase, Information contents of distributions, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **49** (1963) 910.
- [120] S. Luo, Wigner-Yanase skew information and uncertainty relations, *Phys. Rev. Lett,* **91** (2003) 180403.
- [121] S.L. Luo, Quantum uncertainty of mixed states based on skew information. *Phys. Rev. A.* **73** (2006) 022324.
- [122] S. Wang, H. Li, X. Lu and B. Chen, Lower bound of local quantum uncertainty for high-dimensional bipartite quantum systems. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy.* **62** (2019) 990311.
- [123] A. Sen, D. Sarkar and A. Bhar, Local quantum uncertainty in two-qubit separable states : a case study, *Quantum. Inf. Process.* **15** (2016) 233-243.
- [124] H.P. Robertson, The uncertainty principle, *Phys. Rev.* **34** (1929) 163.
- [125] D. Deutsch, Uncertainty in quantum measurements, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 631-633.
- [126] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, J.M. Renes and R. Renner, The uncertainty principle in the presence of quantum memory. *Nature Physics.* **6** (2010) 659–662.
- [127] A.K. Pati, M.M. Wilde, A. U. Devi, A. R. Rajagopal, Quantum discord and classical correlation can tighten the uncertainty principle in the presence of quantum memory, *Phy. Rev. A.* **86** (2012) 042105.

- [128] J. M. Renes and M. Grassl, Generalized decoding, effective channels, and simplified security proofs in quantum key distribution, *Phys. Rev. A.* **74** (2006) 022317.
- [129] L. Masanes, Universally composable privacy amplification from causality constraints, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 140501.
- [130] Y. K. Bai, N. Zhang, M. Y. Ye and Z. D. Wang, Exploring multipartite quantum correlations with the square of quantum discord *Phys. Rev. A.* **88** (2013) 012123.
- [131] A. Slaoui, M. Daoud and R. Ahl Laamara, The dynamic behaviors of local quantum uncertainty for three-qubit X states under decoherence channels. *Quantum Inf Process.* **18** (2019) 250.
- [132] F. F. Fanchini, M. F. Cornelio, M. C. de Oliveira and A. O. Caldeira, Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord. *Phys. Rev. A,* **84** (2011) 012313.
- [133] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy, *J. Math. Phys,* **14** (1973) 1938.
- [134] W. H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys,* **75** (2003) 715.
- [135] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, 13 (2012).
- [136] W. H. Zurek, Decoherence and the transition from quantum to classical, *Physics Today,* **44** (1991) 36.
- [137] J. R. Norris, *Markov Chains* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [138] C. N. Yang, Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 694.
- [139] O. Penrose and L. Onsager, Bose-Einstein condensation and liquid helium, *Phys. Rev.* **104** (1956) 576.
- [140] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, Quantifying coherence, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 140401.
- [141] Z. Ficek and S. Swain, *Quantum interference and coherence : theory and experiments* (Springer Series in Optical Sciences, 2005).
- [142] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, (2002).
- [143] W. T. Pollard, A. K. Felts, and R. A. Friesner. *The Redfield Equation in Condensed-Phase Quantum Dynamics*. Wiley, 1996.
- [144] J. M. Jean, R. A. Friesner, and G. R. Fleming. Application of a multilevel Redfield theory to electron transfer in condensed phases. *The Journal of Chemical Physics.* **96** (1992) 5827–5842.
- [145] A. Ishizaki, T. R. Calhoun, G. S. Schlau-Cohen, and G. R. Fleming. Quantum coherence and its interplay with protein environments in photosynthetic electronic energy transfer. *Physical Chemistry Chemical Physics,* **12** (2010) 7319–7337.
- [146] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley, Berlin, 2001).
- [147] A. Slaoui, M. I. Shaukat, M. Daoud and R. Ahl Laamara, Universal evolution of non-classical correlations due to collective spontaneous emission, *Eur. Phys. J. Plus,* **133** (2018) 413.
- [148] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics,* **48** (1976) 119-130.

- [149] Y. Yao, G. H. Dong, X. Xiao, M. Li, C. P. Sun, Interpreting quantum coherence through a quantum measurement process. *Phys. Rev. A*, **96** (2017) 052322.
- [150] J. Aberg, Quantifying superposition. (2006) arXiv preprint quant-ph/0612146.
- [151] X.D. Yu, D.J. Zhang, G.F. Xu, D.M. Tong, Alternative framework for quantifying coherence, *Phys. Rev. A*, **94** (2016) 060302.
- [152] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer–Verlag, Berlin, 1995).
- [153] Y. Dai, W. You, Y. Dong and C. Zhang, Triangle inequalities in coherence measures and entanglement concurrence, *Phys. Rev. A*, **96** (2017) 062308.
- [154] S. Rana, P. Parashar and M. Lewenstein, Trace-distance measure of coherence, *Phys. Rev. A*, **93** (2016) 012110.
- [155] S. Rana, P. Parashar, A. Winter and M. Lewenstein, Logarithmic coherence : Operational interpretation of l_1 -norm coherence. *Phys. Rev. A*, **96** (2017) 052336.
- [156] M. S. Byrd and N. Khaneja, Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation, *Phys. Rev. A*, **68** (2003) 062322.
- [157] U. Singh, M. N. Bera, H. S. Dhar and A. K. Pati, Maximally coherent mixed states : Complementarity between maximal coherence and mixedness. *Phys. Rev. A*, **91** (2015) 052115.
- [158] N. A. Peters, T.-C. Wei, and P. G. Kwiat, Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks, *Phys. Rev. A*, **70** (2004) 052309.
- [159] T.R. Bromley, M. Cianciaruso, G. Adesso, Frozen quantum coherence, *Phys. Rev. Lett.* **114**(2015) 210401.
- [160] Z. Xi, Y. Li and H. Fan, Quantum coherence and correlations in quantum system. *Sci. Rep.* **5** (2015) 10922.
- [161] K. C. Tan, H. Kwon, C. Y. Park, and H. Jeong, Unified view of quantum correlations and quantum coherence, *Phys. Rev. A*, **94** (2016) 022329.
- [162] T.-C. Wei and P. M. Goldbart, Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states, *Phys. Rev. A*, **68** (2003) 042307.
- [163] A. Streltsov, U. Singh, H. S. Dhar, M. N. Bera, and G. Adesso, Measuring quantum coherence with entanglement, *Phys. Rev. Lett.*, **115** (2015) 020403.
- [164] A. Uhlmann, The “transition probability” in the state space of a-algebra. *Reports on Mathematical Physics*, **9** (1976) 273-279.
- [165] B. Yadin, J. Ma, D. Girolami, M. Gu and V. Vedral, Quantum Processes Which Do Not Use Coherence. *Phys. Rev. X*, **6** (2016) 041028.
- [166] X. Qi, T. Gao and F. Yan. Measuring coherence with entanglement concurrence. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, **50** (2017) 28530.
- [167] M. J. Zhao, T. Ma, Z. Wang, S. M. Fei and R. Pereira. Coherence concurrence for X states. *Quantum Inf Process.* **19** (2020) 104.
- [168] D. Girolami, Observable measure of quantum coherence in finite-dimensional systems, *Phys. Rev. Lett.*, **113** (2014) 170401.
- [169] X. Yuan, H. Zhou, Z. Cao, and X. Ma, Intrinsic randomness as a measure of quantum coherence. *Phys. Rev. A*. **92** (2015) 022124.
- [170] Y. Peng, Y. Jiang, and H. Fan, Maximally coherent states and coherence-preserving operations, *Phys. Rev. A*. **93** (2016) 032326.
- [171] C. Radhakrishnan, M. Parthasarathy, S. Jambulingam, and T. Byrnes, Distribution of quantum coherence in multipartite systems. *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 150504.

- [172] A. Streltsov, U. Singh, H. S. Dhar, M. N. Bera, and G. Adesso, Measuring quantum coherence with entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 020403.
- [173] Y. Yao, X. Xiao, L. Ge, and C. P. Sun, Quantum coherence in multipartite systems, *Phys. Rev. A*. **92** (2015) 022112.
- [174] J. Ma, B. Yadin, D. Girolami, V. Vedral, and M. Gu, Converting coherence to quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 160407.
- [175] M. B. Plenio, S. Virmani, and P. Papadopoulos, *J. Phys. A : Math and Gen.* Operator monotones, the reduction criterion and the relative entropy. **33** (2000) L193.
- [176] C. R. Rao, Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Calcutta Math. Soc.*, **37** (1945) 81.
- [177] G. Darrois, Sur les limites de la dispersion de certaines estimations. *Rev. Internat. Stat. Instt.* **13** (1945) 9.
- [178] R. A. Fisher, XXI.—on the dominance ratio. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, **42** (1923) 321-341.
- [179] S. L. Braunstein, C.M. Caves and G.J. Milburn, Generalized uncertainty relations : theory, examples, and Lorentz invariance, *Ann. of Phys*, **247** (1996) 135.
- [180] E. J. Ye, Z. D. Hu and W. Wu, Scaling of quantum Fisher information close to the quantum phase transition in the *XY* spin chain, *Physica B : Condensed Matter*, **502** (2016) 151-154.
- [181] Y. Hasegawa, Quantum thermodynamic uncertainty relation for continuous measurement, *Phys. Rev. Lett.* **125** (2020) 050601.
- [182] F. Chapeau-Blondeau, Entanglement-assisted quantum parameter estimation from a noisy qubit pair : A Fisher information analysis. *Phys. Lett. A*, **381** (2017) 1369-1378.
- [183] M. M. Taddei, B. M. Escher, L. Davidovich and R. L. de Matos Filho, Quantum speed limit for physical processes, *Phys. Rev. Lett*, **110** (2013) 050402.
- [184] Z. Zhang and L. M. Duan, Quantum metrology with Dicke squeezed states, *New Journal of Physics*, **16** (2014) 103037.
- [185] P. Hyllus, O. Gühne, A. Smerzi, Not all pure entangled states are useful for sub-shot-noise interferometry, *Phys. Rev. A*, **82** (2010) 012337.
- [186] Steven M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing Vol. 1 (Estimation Theory)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1993.
- [187] D.R. Cox and D.V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Taylor and Francis, 1979.
- [188] P. Kok and B.W. Lovett. *Introduction to Optical Quantum Information Processing*. Cambridge University Press, 2010.
- [189] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, Prentice-Hall Inc, Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [190] V. B. Braginskii and Y. I. Vorontsov. Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique. *Soviet Physics Uspekhi*, **17** (1975) 644.
- [191] S. M. Barnett, C. Fabre, and A. Maitre. Ultimate quantum limits for resolution of beam displacements. *European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, **22** (2003) 513.
- [192] J. P. Dowling. Correlated input-port, matter-wave interferometer : Quantum noise limits to the atom-laser gyroscope. *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 4736.
- [193] Z. Ou, Fundamental quantum limit in precision phase measurement, *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 2598.

- [194] S. Pang and T. A. Brun. Quantum metrology for a general Hamiltonian parameter. *Phys. Rev. A*, **90** (2014) 022117.
- [195] L. Jing, J. Xiao-Xing, Z. Wei et al. Quantum Fisher information for density matrices with arbitrary ranks. *Communications in Theoretical Physics*, **61** (2014) 45.
- [196] P. C. Humphreys, M. Barbieri, A. Datta and I. A. Walmsley. Quantum enhanced multiple phase estimation. *Phys. Rev. Lett*, **111** (2013) 070403.
- [197] T. Baumgratz and A. Datta, Quantum enhanced estimation of a multidimensional field. *Phys. Rev. Lett*, **116** (2016) 030801.
- [198] D. W. Berry, M. Tsang, M. J. Hall and H. M. Wiseman, Quantum Bell-Ziv-Zakai bounds and Heisenberg limits for waveform estimation, *Phys. Rev. X*, **5** (2015) 031018.
- [199] C. Vaneph, T. Tufarelli and M.G. Genoni, Quantum estimation of a two-phase spin rotation, *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, **1** (2013) 12-20.
- [200] H. Yuan and C. H. F. Fung, Fidelity and Fisher information on quantum channels, *New J. Phys.* **19** (2017) 113039.
- [201] J. Liu, X. Jing and X. Wang, Phase-matching condition for enhancement of phase sensitivity in quantum metrology, *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 042316.
- [202] K. Matsumoto, When is an input state always better than the others? : universally optimal input states for statistical inference of quantum channels, (2012) arXiv :1209.2392.
- [203] J. Řeháček, Z. Hradil, D. Koutný, J. Grover, A. Krzic and L. L. Sánchez-Soto, Optimal measurements for quantum spatial superresolution, *Phys. Rev. A*, **98** (2018) 012103.
- [204] S. Ragy, M. Jarzyna and R. Demkowicz-Dobrzański, Compatibility in multiparameter quantum metrology, *Phys. Rev. A*, **94** (2016) 052108.
- [205] D. Petz, *Quantum Information Theory and Quantum Statistics Theoretical and Mathematical Physics* (Springer Berlin Heidelberg) 2008.
- [206] Y. Watanabe, T. Sagawa, and M. Ueda, Optimal Measurement on Noisy Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett*, **104** (2010) 020401.
- [207] Y. Watanabe, T. Sagawa and M. Ueda, Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory, *Phys. Rev. A*, **84** (2011) 042121
- [208] Y. Watanabe, *Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory*, 2014 (Springer Berlin Heidelberg)
- [209] J. Liu, X-X. Jing, W. Zhong and X. Wang, Quantum Fisher information for density matrices with arbitrary ranks *Commun. Theor. Phys.* **61** (2014) 45-50.
- [210] D. Šafránek, Simple expression for the quantum Fisher information matrix. *Phys. Rev. A*, **97** (2018) 042322.
- [211] A. Gilchrist, D. R. Terno and C. J. Wood, Vectorization of quantum operations and its use, arXiv :0911.2539
- [212] K. Schacke, On the Kronecker product. Master's thesis, University of Waterloo, 2004.
- [213] L. Bakmou, A. Slaoui, M. Daoud and R. A. Laamara, Quantum Fisher information matrix in Heisenberg XY model, *Quantum Information Processing*, **18** (2019) 1-20.
- [214] A. Krishnamoorthy and D. Menon, Matrix inversion using Cholesky decomposition, In : SPA, pp. 70-72 IEEE (2013)
- [215] F. Chapeau-Blondeau, Optimizing qubit phase estimation, *Phys. Rev. A*. **94** (2016) 022334.

- [216] S. F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio and J. I. Cirac, Improvement of frequency standards with quantum entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 3865.
- [217] L. Pezzé and A. Smerzi, Entanglement, nonlinear dynamics, and the Heisenberg limit, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 100401.
- [218] Á. Rivas and A. Luis, Precision quantum metrology and nonclassicality in linear and nonlinear detection schemes, *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 010403.
- [219] S. Kim, L. Li, A. Kumar and J. Wu ; "Characterizing nonclassical correlations via local quantum Fisher information" ; *Phys. Rev. A.* 97 (2018) 032326.
- [220] A. Slaoui, L. Bakmou, M. Daoud and R. A. Laamara, A comparative study of local quantum Fisher information and local quantum uncertainty in Heisenberg XY model. *Phys. Lett. A*, **383** (2019) 2241-2247.
- [221] S. Deffner and S. Campbell, *Quantum Thermodynamics : An introduction to the thermodynamics of quantum information*, Morgan and Claypool Publishers (2019).
- [222] J. Goold, M. Huber, A. Riera, L. Del Rio and P. Skrzypczyk, The role of quantum information in thermodynamics—a topical review. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, **49** (2016) 143001.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous focalisons sur les théories des ressources de l'intrication, des corrélations quantiques de type discord et de la cohérence quantique, les phénomènes quantiques les plus intrigants exploités jusqu'à présent dans la théorie de l'information quantique. Nous commençons par présenter brièvement les outils théoriques de ces ressources quantiques en mettant en évidence les techniques et les problèmes de calcul les plus remarquables. Dans ce sens, nous abordons plusieurs méthodes mathématiques qui permettent de résoudre certains problèmes liés à leurs quantifications, et quelques résultats analytiques pour les systèmes bipartites sont donnés. Nous examinons également les connexions intrinsèques entre ces ressources quantiques en extrayant les liens qui unissent les mesures correspondantes. En revanche, la révolution de la technologie quantique a suscité un intérêt croissant en faveur de la métrologie quantique, et l'intrication quantique a été employée pour surmonter la limite classique dans plusieurs protocoles d'estimation quantique. Dans le présent document, nous analysons le rôle des corrélations quantiques au-delà de l'intrication en vue d'améliorer la précision d'un paramètre inconnu. Selon nos résultats, les corrélations peuvent être capturées à l'aide de l'information quantique de Fisher, et les corrélations quantiques de type discord peuvent être exploitées pour garantir la précision des protocoles d'estimation de phase. Cette thèse comprend également des contributions sur la dynamique de ces ressources quantiques dans différents modèles de systèmes quantiques ouverts. Parmi nos objectifs, est d'étudier les effets de l'environnement sur ces ressources quantiques et d'obtenir des techniques pour les protéger contre les effets de la décohérence intrinsèque.

Mots-clefs : Intrication quantique, cohérence quantique, systèmes quantiques ouverts, décohérence, métrologie quantique, corrélations quantiques, théories des ressources quantiques, incertitude quantique, théorie de l'estimation quantique.

Abstract

In this thesis, we focus on the resource theories of entanglement, discord-like quantum correlations, and quantum coherence, the most intriguing quantum phenomena exploited so far in quantum information theory. We begin by presenting in detail the theoretical tools of these quantum resources, focusing on the most remarkable techniques and computational problems. In this sense, we discuss several mathematical methods that solve some problems related to their quantifications, and some analytical results for bipartite quantum systems are given. We also examine the intrinsic connections between these quantum resources by extracting the links that unite the corresponding measures. In contrast, the revolution of quantum technology has led to a growing interest in quantum metrology, and quantum entanglement has been employed to overcome the classical limit in several quantum estimation protocols. In this work, we analyze the role of quantum correlations beyond entanglement in improving the accuracy of an unknown parameter. According to our results, correlations can be captured using quantum Fisher information, and quantum discord correlations can be exploited to ensure the accuracy of phase estimation protocols. This thesis includes also the contributions on the dynamics of these quantum resources in various models of open quantum systems. Among our objectives, is to study the effects of the environment on these quantum resources and to obtain techniques to protect them from the effects of intrinsic decoherence.

Keywords: Quantum entanglement, quantum discord, quantum coherence, open quantum systems, decoherence, quantum metrology, quantum correlations, quantum resource theories, quantum uncertainty, quantum Fisher information, quantum estimation theory.