Résumé de la thèse

Introduction

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modlisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires ou par des Equations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

Les EDPs sont probablement apparues pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDPs s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDPs de la théorie de la relativité.

Cependant, l'étude systématique des EDPs est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est dû à Hörmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDPs reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs, ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse.

L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

Par ailleurs, les travaux présentés dans cette thèse concernant la preuve de l'existence, de la régularité et unicité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques avec conditions en bordure de type Dirichlet ou Neumann impliquant des opérateurs de type Leray-Lions [11] dans les espaces Musielak-Orlicz-Sobolev et dans leurs cas particuliers (les espaces de Lebesgue-Sobolev et les espaces d'Orlicz-Sobolev). Ce travail est réparti sur les quatre chapitres suivants.

Le premier chapitre est intitulé "Preliminaries (Rappels and de

nitions)". Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement les différents concepts et outils que nous utilisons fréquemment dans les autres chapitres.

Le deuxième chapitre, intitulé "On a nonlinear eigenvalue problem for generalized Laplacian in Orlicz-Sobolev spaces" (basé sur le papier [16]) est consacré à étudier le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) & = \lambda\rho(x)\phi(|u|)u \quad \text{in } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω un sous-ensemble borné ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, satisfait la propriété de segment, $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ est une fonction continue. Définissons la fonction $m(t) = \phi(|t|)t$ et supposons que m est strictement croissante et satisfaisant $m(t) \to 0$ si $t \to 0$ et $m(t) \to \infty$ si $t \to \infty$. La fonction de poids $\rho \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $\rho \geq 0$ p.p.

dans Ω et $\rho \neq 0$ dans Ω. Ce problème est étudié dans l'espace d'Orlicz-Sobolev $W_0^1 L_M(\Omega)$ (voir Chapitre 1) construit par la $N-$fonction (qui sera définie plus tard) $M(t) = \int_0^{|t|} m(s)ds$. Tout au long de ce chapitre, nous n'imposons pas la condition Δ_2 (voir la définition 1.1.1) ni sur M ni sur sa $N-$fonction complémentaire dans le sens de Young (que nous définissons précisément plus tard). Par conséquent, nous perdons un large éventail de propriétés facilitantes des espaces fonctionnels avec lesquels on travaille normalement. A savoir, si M ne satisfait pas la condition Δ_2. Ce chapitre comprend trois sections. Dans la première section, nous exposons deux constantes positives

$$\lambda_0 = \inf_{u \in W_0^1 L_M(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho(x)\phi(|u|)|u|^2 dx}$$

et

$$\lambda_1 = \inf\Big\{ \int_\Omega M(|\nabla u|)dx \;\Big|\; u \in W_0^1 L_M(\Omega),\ \int_\Omega \rho(x) M(|u|)dx = 1 \Big\}.$$

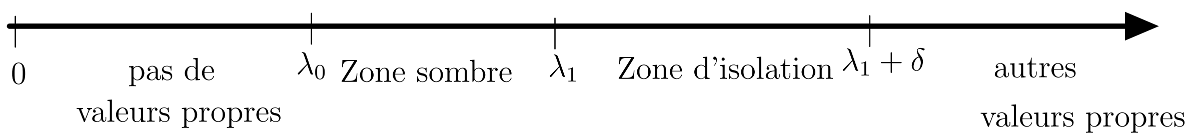
Nous savons déjà d'après [13] et Gossez-Manásevich [8] que λ_1 est une valeur propre de (1). Contrairement au cas du modèle $\phi(t) = |t|^{p-2}$, $1 < p < +\infty$, on ne peut pas dire que λ_1 est la première valeur propre de (1). Montrons que $\lambda_0 \leq \lambda_1$ et toute $\lambda < \lambda_0$ n'est pas une valeur propre de (1). Dans la deuxième section, nous prouvons un principe de comparaison faible sous la condition (see [14])

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(M(s))} = +\infty, \tag{2}$$

où H est une fonction définie pour tout $t \geq 0$ par

$$H(t) = tm(t) - M(t) = M^*(m(t)),$$

nous permettent d'obtenir un principe du maximum fort. Montrons sous la condition (2) et en utilisant ce principe du maximum fort que toute fonction propre u associée à λ_1 garde un signe constant, c-à-d soit $u > 0$ dans Ω ou $u < 0$ dans Ω en utilisant ce résultat nous montrons que si v est une fonction propre associée à $\lambda > \lambda_1$, alors $v^+ \not\equiv 0$ et $v^- \not\equiv 0$ dans Ω, c-à-d change de signe dans Ω. Enfin, nous montrons notre objectif principal de ce chapitre le Théorème 2.2.3 qui prouve que λ_1 est isolée du côté droit, c-à-d, il existe $\delta > 0$ tel que dans l'intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ il n'y a pas de valeurs propres. Nous pouvons résumer les résultats de cette section dans la figure suivante.



Dans la troisième section, nous prouvons quelques lemmes importants qui sont nécessaires pour la réalisation des preuves des résultats obtenus dans la section ci-dessus. Tout d'abord, nous montrons que toute solution u de (1), associée à $\lambda > 0$, uniformément bornée dans L^∞, c-à-d il existe une constante $c > 0$ ne dépend pas de u tel que $\|u\|_\infty \leq c$. En utilisant la bornitude uniforme des solutions et des idées classiques on montre les inégalités de type Harnack et finalement et par ces inégalités de type Harnack on prouve l'inégalité de Hölder.

Le troisième chapitre est intitulé "Imbedding results in Musielak-Orlicz-Sobolev spaces with an application to anisotropic nonlinear Neumann problems", (basé sur le papier [17]) comprend quatre sections.

Dans la première, considérons $\vec{\phi} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$, la fonction vectorielle $\vec{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, ϕ_i est une fonction de Musielak-Orlicz (voir le Chapter 1) et on donne la définition de l'espace de Musielak-Orlicz-Sobolev anisotropique $W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega)$, qui est équivaut à l'espace de Sobolev à exposant variables anisotropique $W^1 L^{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ défini dans [3], si pour $i \in \{1, \cdots, N\}$, $\phi_i(x,t) = t^{p_i(x)}$ et $p_i \in C_+(\overline{\Omega}) = \{h \in C(\overline{\Omega}) \ : \ \inf_{x \in \overline{\Omega}} h(x) > 1\}$, aussi $W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega) = W^1 L^{p(\cdot)}(\Omega)$, si $\phi_1(x,t) = \cdots = \phi_N(x,t) = t^{p(x)}$ et $p \in C_+(\overline{\Omega})$, où $W^1 L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev à exposant variables défini dans [6]. Dans la deuxième section, supposons les conditions suivante

$$\int_0^1 \frac{(\phi_{min}^{**})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}}dt < +\infty \text{ and } \int_1^{+\infty} \frac{(\phi_{min}^{**})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}}dt = +\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

où ils existes deux constantes positifs $\nu < \frac{1}{N}$ et c_0, tel que

$$\Big|\frac{\partial(\phi_{min}^{**})_*(x,t)}{\partial x_i}\Big| \leq c_0\Big[(\phi_{min}^{**})_*(x,t) + ((\phi_{min}^{**})_*(x,t))^{1+\nu}\Big], \tag{4}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$, à condition que pour tout $i = 1, \cdots, N$ la dérivée $\frac{\partial(\phi_{min}^{**})_*(x,t)}{\partial x_i}$ existe, où $(\phi_{min}^{**})_*$ est la conjuguée de Sobolev de ϕ_{min}^{**} définie par

$$(\phi_{min}^{**})_*^{-1}(x,s) = \int_0^s \frac{(\phi_{min}^{**})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}}dt, \quad \text{for } x \in \overline{\Omega} \text{ and } s \in [0,+\infty),$$

où ϕ_{min}^{**} est la deuxième fonction complémentaire de ϕ_{min} et $\phi_{min}(x,s) = \min\limits_{i=1,\cdots,N} \phi_i(x,s)$. On peut facilement vérifier que $(\phi_{min}^{**})_*$ est une fonction de Musielak-Orlicz. Sous les conditions (3) et (4), on montre l'injection continu $W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_{(\phi_{min}^{**})_*}(\Omega)$, et l'injection compact $W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$, où A est une fonction de Musielak-Orlicz croit essentiellement moins vite (voir (1.3)) que $(\phi_{min}^{**})_*$, dénoté $A \ll (\phi_{min}^{**})_*$ et l'injection de trace $W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\psi_{min}}(\partial\Omega)$, où

$$\psi_{min}(x,t) = [(\phi_{min}^{**})_*(x,t)]^{\frac{N-1}{N}}.$$

Dans la troisième section nous appliquons les résultats prouvés dans la section ci-dessus pour obtenir l'existence et l'unicité de solution du problème

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^N \partial_{x_i} a_i(x, \partial_{x_i} u) + b(x)\varphi_{max}(x, |u(x)|) &= f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &\geq 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \sum_{i=1}^N a_i(x, \partial_{x_i} u)\nu_i &= g(x,u) \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

qui est exactement le problème étudié par Boureanu et Rădulescu [3] dans le cas particulier, pour $i \in \{1, \cdots, N\}$, $\phi_i(x,t) = t^{p_i(x)}$, avec $p_i \in C_+(\overline{\Omega})$. Ici, $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\varphi_{max}(x,s) = \frac{\partial \phi_{max}}{\partial s}(x,s)$, où $\phi_{max}(x,s) = \max\limits_{i=1,\cdots,N} \phi_i(x,s)$ et pour tout $i = 1, \cdots, N$, nous désignons par ν_i le i^{th} composante du vecteur d'unité normale externe et $a_i : \Omega \times$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory telle qu'ils existent une fonction de Musielak-Orlicz localement intégrable P_i avec $P_i \ll \phi_i$, un constante positif c_i et une fonction négative $d_i \in E_{\phi_i^*}$ ($E_{\phi_i^*}$ défini (1.5)) satisfaisante pour touts $s, t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$ les conditions suivantes

$$|a_i(x,s)| \leq c_i[d_i(x) + (\phi_i^*)^{-1}(x, P_i(x,s))],$$

$$\phi_i(x,|s|) \leq a_i(x,s)s \leq A_i(x,s),$$

$$(a_i(x,s) - a_i(x,t)) \cdot (s-t) > 0, \text{ for all } s \neq t,$$

la fonction $A_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$A_i(x,s) = \int_0^s a_i(x,t)dt.$$

Supposons aussi qu'elle existe une fonction de Musielak-Orlic R localement intégrable avec $R \ll \phi_{max}$ et une fonction positive $D \in E_{\phi_{max}^*}(\Omega)$, tel que pour touts $s, t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$

$$|\varphi_{max}(x,s)| \leq D(x) + (\phi_{max}^*)^{-1}(x, R(x,s))$$

Pour ce qui concerne les données, on suppose que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions Carathéodory. Définissons les primitives $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et supposons qu'ils existent deux positifs constantes k_1 et k_2 et deux fonctions de Musielak-Orlicz M and H localement intégrables satisfaisantes la conditions Δ_2- et différenciables par rapport à leurs seconds arguments avec $M \ll \phi_{min}^{**}$, $H \ll \phi_{min}^{**}$ et $H \ll \psi_{min}$ tel que f et g satisfaisantes pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ les conditions suivantes

$$|f(x,s)| \leq k_1 m(x,s) \text{ for a.e. } x \in \Omega,$$

$$|g(x,s)| \leq k_1 h(x,s) \text{ for a.e. } x \in \partial\Omega,$$

où $\psi_{min}(x,s) = [(\phi_{min}^{**})_*(x,s)]^{\frac{N-1}{N}}$, $m(x,s) = \frac{\partial M}{\partial s}(x,s)$ et $h(x,s) = \frac{\partial H}{\partial s}(x,s)$. Finalement, pour la fonction b impliqué dans (5), on suppose qu'il existe un constante $b_0 > 0$ tel que b satisfaisante

$$b \in L^\infty(\Omega), b(x) \geq b_0, \text{ for a.e. } x \in \Omega.$$

Dans la quatrième section, montrons quelques lemmes importants qui sont nécessaires pour la réalisation des preuves des résultats obtenus dans les sections précédentes.

Le quatrième chapitre est intitulé "Semilinear heat equation with Hardy potential and singular terms" (basé sur le papier [18]) et s'intéresse à l'étude du problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= \mu \frac{u}{|x|^2} + \frac{f(x,t)}{u^\sigma} \quad \text{in } \Omega_T, \\ u(x,t) &> 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, contenant l'origine, σ et μ sont des positifs constantes et les données f et u_0 satisfaisantes

$$f \geq 0,\ f \in L^m(\Omega_T), m \geq 1$$

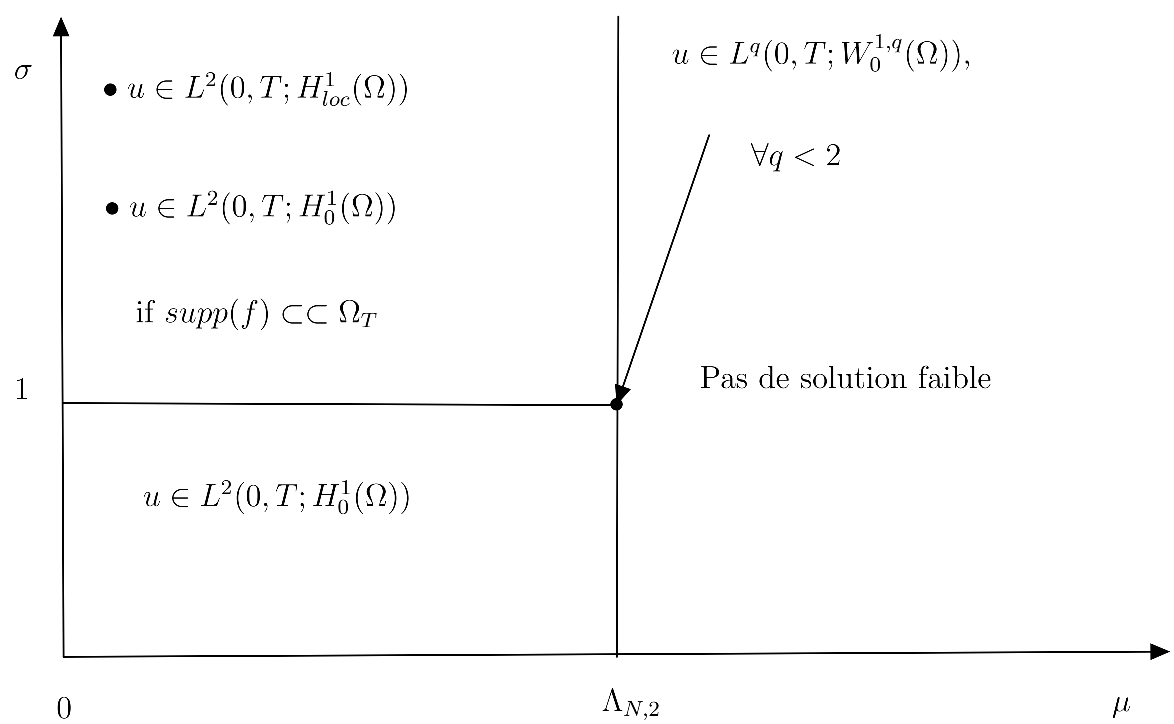
et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\forall w \subset\subset \Omega\ \exists d_w > 0 : u_0 \geq d_w \text{ in } w. \tag{7}$$

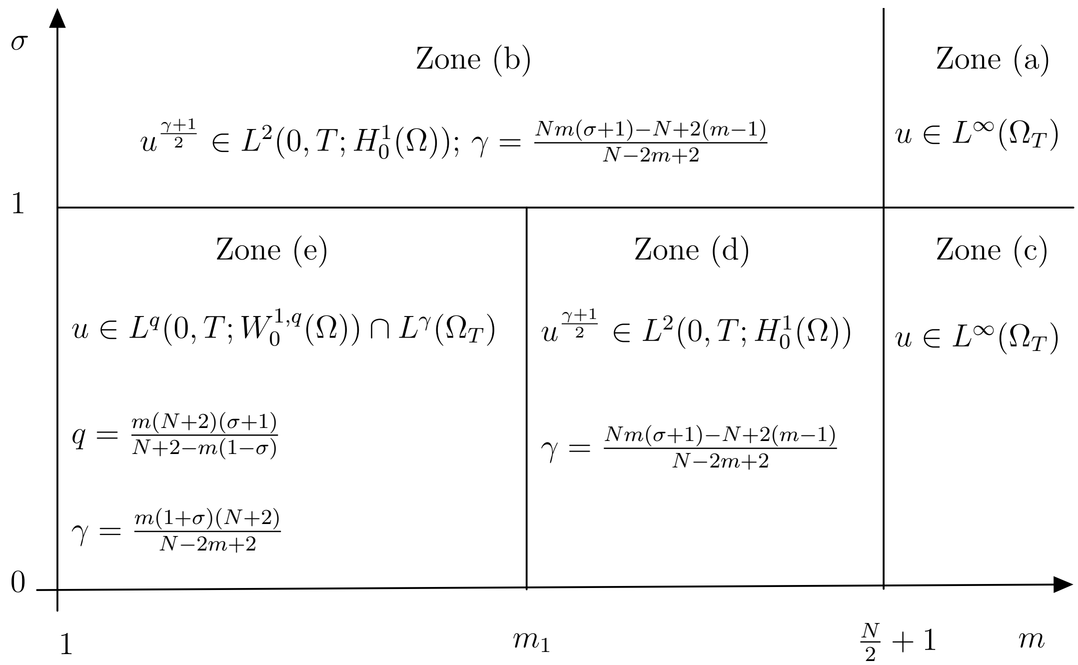
Supposons que

$$\begin{cases} f \in L^{\frac{2N}{2N+(\sigma-1)(N-2)}}(\Omega_T) \quad \text{if} \quad \sigma \leq 1, \\ f \in L^1(\Omega_T) \quad \text{if} \quad \sigma > 1 \end{cases} \tag{8}$$

et sous les conditions (7) et (8), commençons par étudier d'abord le cas $\mu < \Lambda_{N,2} := \frac{(N-2)^2}{4}$ en distinguant deux cas : le cas $\sigma \geq 1$ et $f \in L^1(\Omega_T)$ et le case où $\sigma < 1$ avec $f \in L^{m_1}(\Omega_T)$, $m_1 = \frac{2N}{2N+(\sigma-1)(N-2)}$. Ensuite, nous étudions le cas $\mu = \Lambda_{N,2}$ et $\sigma = 1$ avec des données $f \in L^1(\Omega_T)$. Dans les deux cas, nous prouvons l'existence d'une solution faible obtenue comme limite d'approximations appartenant à un espace de Sobolev approprié. L'approche que nous utilisons consiste à approximer l'équation singulière avec un problème régulier, où les techniques standard (par exemple, argument de point fixe) peut être appliqué pour passé à la limite pour obtenir la solution faible du problème d'origine. La régularité des solutions faibles est analysée selon la sommabilité de Lebesgue de f et σ. De plus, nous prouvons l'unicité des solutions d'énergie finie lorsque le terme source f a un support compact en étendant la formulation de solutions faibles à une large classe de fonctions test. Finalement, dans le cas $\mu > \Lambda_{N,2}$ on montre un résultat de non-existence. Ce chapitre est présenté comme suit. La première section contient tous les résultats principaux (existence, régularité et l'unicité) et aussi des présentations graphiques permettant de mieux localiser les résultats obtenus. Dans la deuxième section, nous prouvons d'abord un résultat d'existence pour le problème approché du (6) puis nous donnons la preuve de tous les résultats principaux : Théorèm 4.2.1, Théorèm 4.2.2, Théorèm 4.2.3, Théorèm 4.2.4, Théorèm 4.2.5 et Théorèm 4.2.6. A la fin, quelques résultats nécessaires pour compléter le travail sont donnés en annexe pour rendre le chapitre assez autonome. On peut résumé les résultats d'existence du ce chapitre dans la figure suivante :



On peut aussi résumé les résultats de régularité du ce chapitre dans la figure suivante :



Chapter 1

Préliminaires (rappels et définitions)

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. Il est donc logique de faire une brève présentation avant d'aborder parler sur ces équations.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $1 \leq p \leq \infty$ nous dénotons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ telle que, si $p < +\infty$

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

et si $p = \infty$

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Pour la définition,les principales propriétés et résultats sur les espaces de Lebesgue auxquels nous nous référons [4, 10]. Pour une fonction u dans un espace de Lebesgue, nous mettons $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (ou simplement u_{x_i}) sa dérivée partielle dans le sens x_i défini au sens de distributions, c'est-à-dire

$$< u_{x_i}, \phi >= - \int_\Omega u \phi_{x_i} dx,$$

alors, nous désignons par $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_N})$ le gradient de la fonction u.

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, est l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$

telle que $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$, doté de sa norme naturelle

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p,$$

tandis que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ (l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ avec un support compacte dans Ω) par rapport à cette norme. Pour $1 < p < \infty$, l'espace duale de $L^p(\Omega)$ est identifié par $L^{p'}(\Omega)$, où $p = \frac{p}{p-1}$ est la conjuguée de Hölder de p, et l'espace duale de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est désigné par $W^{-1,p'}(\Omega)$. On sait que si Ω est borné, alors tout élément $T \in W^{-1,p'}(\Omega)$ peut être écrit, (voir [4]), dans la forme $T = -\mathrm{div}(F)$ où $F \in (L^{p'}(\Omega))^N$.

1.1 Les espaces d'Orlicz-Sobolev

1.1.1 $N-$fonctions.

Une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dit une $N-$fonction si elle est continue, à valeur réelle, positive, convexe, qui a une croissance super-linéaire proche de zéro et de l'infini, c-à-d, $\lim_{t\to 0} \frac{M(t)}{t} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$, et $M(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.
Une fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une $N-$fonction si et seulement s'elle peut être représentée comme une intégrale

$$M(t) = \int_0^{|t|} m(s)ds,$$

où $m : [0, \infty[\tau[0, \infty[$ est croissante, continue à coté droite, $m(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$, et $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$ (voir [9]). La fonction complémentaire M^* de la fonction M est définie par

$$M^*(s) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \{st - M(t)\},$$

pour $s \in \mathbb{R}_+$. Ensuite, nous présentons quelques inégalités de base liées à $N-$fonction (voir [9]).

Lemme 1.1.1 *Soit M est une $N-$fonction, alors*

(1) pour touts $t, s \geq 0$ et p.p. $x \in \Omega$ nous avons l'inégalité de Young

$$ts \leq M(t) + M^*(s).$$

(2)

$$M(t) \leq tM^{*-1}(M(t)) \leq 2M(t), \text{ for all } t \geq 0.$$

Définition 1.1.1 *Une $N-$fonction satisfait la condition Δ_2 noté $M \in \Delta_2$, s'il existe un constante $k > 0$ tel que*

$$M(2t) \leq kM(t), \text{ for all } t \geq 0. \tag{1.1}$$

On voit bien que ce sera le cas si et seulement si pour chaque $r > 1$ s'il existe un constante $k = k(r)$ tel que pour tout $t \geq 0$

$$M(rt) \leq kM(t), \text{ for all } t \geq 0.$$

Si (1.1) n'est pas vérifie que pour $t \geq$ certaines t_0, alors M est dit satisfaire la condition Δ_2 au voisinage de l'infini.

Pour deux $N-$fonctions P et Q, on dit que Q domine P, et on note $P \prec Q$ s'il existe $k > 0$ tel que:

$$P(t) \leq Q(kt) \text{ for all } t \geq 0. \tag{1.2}$$

De même, Q domine P au voisinage de l'infinie s'il existe $k > 0$ et $t_0 \geq 0$ tel que (1.2) vérifiée que pour $t \geq t_0$. Dans ce cas il existe $K > 0$ tel que:

$$P(t) \leq Q(kt) + K \text{ for all } t \geq 0.$$

On va dire que la $N-$fonctions P et Q sont équivalente et on écrit $P \sim Q$ si $P \prec Q$ et $Q \prec P$.

Donc les $N-$fonctions P et Q sont équivalentes si et seulement s'il existe deux positifs constante k_1, k_2 et t_0 tel que

$$P(k_1 t) \leq Q(t) \leq P(k_2 t) \text{ for all } t \geq t_0.$$

On dit que P augmente essentiellement plus lentement que Q au voisinage de l'infinie et on note $P \ll Q$, s'il existe $k > 0$; $\lim_{t\to\infty} \frac{P(kt)}{Q(t)} = 0$. C'est le cas si et seulement si $\lim_{t\to\infty} \frac{Q^{-1}(t)}{P^{-1}(t)} = 0$. On a aussi, (voir [10]), l'équivalence $P \ll Q \Leftrightarrow Q^* \ll P^*$.

1.1.2 Les espaces d'Orlicz.

Soit M une $N-$fonction et Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace d'Orlicz $L_M(\Omega)$ est définie comme l'espace de (classes d'équivalence de) fonctions mesurables u sur Ω pour lequel il existe $\lambda > 0$ $(\lambda = \lambda(u))$ telle que :

$$\int_\Omega M\Big(\frac{u(x)}{\lambda}\Big)dx < +\infty.$$

Rappelons que $L_M(\Omega)$ est un espace de Banach sous la norme

$$\|u\|_M = \inf\Big\{\lambda > 0, \int_\Omega M\Big(\frac{u(x)}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\}.$$

On définie le classe d'Orlicz $K_M(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions u sur Ω tel que

$$\int_\Omega M(u(x))dx < +\infty,$$

$K_M(\Omega)$ est un sous ensemble convexe de $L_M(\Omega)$.
La fermeture dans $L_M(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions bornées de support compacte dans $\overline{\Omega}$ est noté par $E_M(\Omega)$.
Le duale de $E_M(\Omega)$ peut être identifié avec $L_{M^*}(\Omega)$ au moyen de l'appariement $\int_\Omega uv\,dx$ et la norme de $L_{M^*}(\Omega)$ est équivalente de $\|\cdot\|_{M^*}$.

Théorème 1.1.1 *[15] Soit M est une $N-$fonction et Ω est un sous ensemble borné de $\mathbb{R}^N$. Alors,*

(1) $E_M(\Omega) \subset K_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$,

(2) $E_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ si et seulement si $M \in \Delta_2$,

(3) $E_M(\Omega)$ est séparable,

(4) $L_M(\Omega)$ *est réflexive si et seulement* $M \in \Delta_2$ *et* $M^* \in \Delta_2$.

La norme d'Orlicz $\|u\|_{(M)}$ est définie par

$$\|u\|_{(M)} = \sup \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

où le supremum prend sur tout $v \in E_{M^*}(\Omega)$ tel que $\|u\|_{M^*} \leq 1$, pour lequel

$$\|u\|_M \leq \|u\|_{(M)} \leq 2\|u\|_M$$

est valable pour tous $u \in L_M(\Omega)$ (voir [9]). Maintenant, On définie la version d'Orlicz de l'inégalité de Hölder par

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_M \|v\|_{(M^*)}$$

pour tout $u \in L_M(\Omega)$ et $v \in L_{M^*}(\Omega)$.

Soit E est un sous ensemble de Ω, la norme de Luxemburg, associée d'une $N-$fonction M, de la fonction caractéristique χ_E de E est (voir [9])

$$\|\chi_E\|_M = \frac{1}{M^{-1}\Big(\frac{1}{|E|}\Big)}.$$

Soit $\{u_n\}$ est une suite de $L_M(\Omega)$, on dit que $\{u_n\}$ converge vers $u \in L_M(\Omega)$ dans le sens modulaire, s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\int_\Omega M\Big(\frac{u_n - u}{\lambda}\Big)dx \to 0 \text{ as } n \to +\infty.$$

Soit X et Y deux espaces de Banach avec appariement bilinéaire bicontinu $< \cdot, \cdot >_{X,Y}$. Soit $(u_n)_n$ est une suite de X, on dit $(u_n)_n$ converge vers $u \in X$ par rapport à la topologie $\sigma(X,Y)$, noté $u_n \to u$ $\sigma(X,Y)$ dans X, si $< u_n, v > \to < u, v >$ pour tout $v \in Y$. Par exemple si $X = L_M(\Omega)$ et $Y = L_{M^*}(\Omega)$, alors l'appariement est défini par

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

pour tout $u \in X$ et $v \in Y$.

1.1.3 Les espaces d'Orlicz-Sobolev

Soit M une $N-$fonction et Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace d'Orlicz-Sobolev $W^1L_M(\Omega)$ (resp. $W^1E_M(\Omega)$) est l'espace des fonctions u tel que u et ses dérivés distributionnels à partir d'ordre 1 se trouvent dans $L_M(\Omega)$ (resp. $E_M(\Omega)$). L'espace d'Orlicz-Sobolev est un espace de Banach sous la norme

$$\|u\|_{1,M} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_M.$$

Alors, $W^1L_M(\Omega)$ et $W^1E_M(\Omega)$ peut être identifié avec des sous-espaces du produit de $N+1$ copies de L_M. Ce produit noté ΠL_M. L'espace $W_0^1E_M(\Omega)$ est définie comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ (l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ avec un support compacte dans Ω) dans $W^1E_M(\Omega)$, tandis que $W_0^1E_M(\Omega)$ est définie comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^1L_M(\Omega)$ par rapport à la topologie faible $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{M^*})$.

La suite $\{u_n\}_n \subset W^1L_M(\Omega)$ est dit convergente vers $u \in W^1L_M(\Omega)$ dans le sens modulaire dans $W^1L_M(\Omega)$, s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\int_\Omega M\Big(\frac{D^\alpha u_n - D^\alpha u}{\lambda}\Big)dx \to 0, \text{ as } n \to +\infty, \text{ for all } |\alpha| \leq 1,$$

qui implique la convergence pour $\sigma(L_M, L_{M^*})$.

On définie $W^{-1}L_{M^*}(\Omega)$ et $W^{-1}E_{M^*}(\Omega)$ comme l'espace des distributions sur Ωqui peuvent s'écrire comme une somme de dérivées d'ordre ≤ 1 des fonctions de $L_{M^*}(\Omega)$ et $E_{M^*}(\Omega)$ respectivement c'est-à-dire

$$W^{-1}L_{M^*}(\Omega) = \Big\{\phi \in \mathcal{D}'(\Omega) : \phi = \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi_\alpha \text{ with } \phi_\alpha \in L_{M^*}(\Omega)\Big\}$$

et

$$W^{-1}E_{M^*}(\Omega) = \Big\{\phi \in \mathcal{D}'(\Omega) : \phi = \sum_{|\alpha|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi_\alpha \text{ with } \phi_\alpha \in E_{M^*}(\Omega)\Big\}.$$

Sont des espaces de Banach sous la norme de quotient habituelle. Si, Ω vérifie la propriété de segment puis l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $W_0^1L_M(\Omega)$ pour la topologie $\sigma(L_M, L_{M^*})$ (voir [7]). Ensuite, nous pouvons définir l'action d'une distribution en $W^{-1}L_{M^*}(\Omega)$ sur un élément de $W_0^1L_M(\Omega)$.

1.2 Les espaces de Musielak-Orlicz-Sobolev

Soit Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Une fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sera appelé un Musielak-Orlicz function, s'elle satisfaire les conditions suivantes :

(i) $\phi(\cdot, t)$ est mesurable sur Ω.

(ii) $\phi(x, \cdot)$ est convexe, croissante avec $\phi(x,t) = 0$ si et seulement si $t = 0$, $\phi(x,t) > 0$ pour tout $t > 0$ p.p. $x \in \Omega$,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(x,t)}{t} = 0 \text{ and } \lim_{t \to +\infty} \inf_{x \in \Omega} \frac{\phi(x,t)}{t} = +\infty.$$

Nous donnons ici quelques exemples sur les fonctions Musielak-Orlicz.

$$\begin{array}{rcl} \phi(x,t) & = & t^{p(x)} \text{ such that } \sup_{x\in\Omega} p(x) < +\infty, \\ \phi(x,t) & = & t^{p(x)} \log(1+t), \\ \phi(x,t) & = & t(\log(1+t))^{p(x)}, \\ \phi(x,t) & = & (e^t)^{p(x)} - 1. \end{array}$$

La fonction complémentaire ϕ^* de ϕ est définie par

$$\phi^*(x,s) = \sup_{t \geq 0} \{st - \phi(x,t)\}.$$

On peut vérifier que ϕ^* est aussi une fonction de Musielak-Orlicz (voir [12]). De plus, pour tout t, $s \geq 0$ et p.p. $x \in \Omega$ on a l'inégalité de Young suivante (voir [12])

$$ts \leq \phi(x,t) + \phi^*(x,s).$$

Pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction seconde complémentaire $h^{**} = (h^*)^*$, est convexe et satisfaire

$$h^{**}(x) \leq h(x),$$

avec égalité si h est convexe. Grosso modo, h^{**} est l'envelope convexe de h, c-à-d la plus grande fonction convexe inférieure ou égale à h.

Soit ϕ et ψ deux fonctions de Musielak-Orlicz. On dit que ψ pousse essentiellement plus lentement que ϕ, noté $\psi \ll \phi$, si

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\Omega} \frac{\psi(x,t)}{\phi(x,ct)} = 0, \tag{1.3}$$

pour tout constante $c > 0$ et pour p.p. $x \in \Omega$. On remarque que si ψ est localement intégrable, alors $\psi \ll \phi$ implique que pour tout $c > 0$ il existe une fonction positive intégrable h, tel que

$$\psi(x,t) \leq \phi(x,ct) + h(x), \text{ for all } t \in \mathbb{R} \text{ and for a.e. } x \in \Omega.$$

L'espace de Musielak-Orlicz $L_\phi(\Omega)$ est définie par

$$L_\phi(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ measurable } / \int_\Omega \phi\Big(x, \frac{u(x)}{\lambda}\Big) < +\infty \text{ for some } \lambda > 0\Big\}.$$

Doté de la norme de Luxemborg

$$\|u\|_\phi = \inf\Big\{\lambda > 0/ \int_\Omega \phi\Big(x, \frac{u(x)}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\},$$

$(L_\phi(\Omega), \|\cdot\|_\phi)$ est un espace de Banach. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \inf\limits_{x\in\Omega} \dfrac{\phi(x,t)}{t} = +\infty$et si Ω a une mesure finie alors on a

$$L_\phi(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega). \tag{1.4}$$

On va aussi utiliser $E_\phi(\Omega)$ définie par

$$E_\phi(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ measurable } / \int_\Omega \phi\Big(x, \frac{u(x)}{\lambda}\Big) < +\infty \text{ for all } \lambda > 0\Big\}. \tag{1.5}$$

L'inégalité de Hölder suivante (voir [12])

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq 2\|u\|_\phi \|v\|_{\phi^*}$$

vérifiée pour tout $u \in L_\phi(\Omega)$ et $v \in L_{\phi^*}(\Omega)$, où ϕ et ϕ^* sont deux fonction de Musielak-Orlicz complémentaires. On définie ϕ^{-1} pour tout $s \geq 0$ par

$$\phi^{-1}(x,s) = \sup\{\tau \geq 0 : \phi(x,\tau) \leq s\}.$$

Maintenant, on donne la définition de l'espace de Musielak-Orlicz-Sobolev anisotropique.

Définition 1.2.1 *Soit $\vec{\phi} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N$, la fonction vectorielle $\vec{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, ϕ_i est une fonction de Musielak-Orlicz. On définie l'espace de Musielak-Orlicz-Sobolev anisotropique par*

$$W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega) = \Big\{ u \in L_{\phi_{max}}(\Omega);\ \partial_{x_i} u \in L_{\phi_i}(\Omega) \text{ for all } i = 1, \cdots, N \Big\}.$$

Puisque Ω a une mesure finie, d'après l'injection continue (1.4), on trouve que $W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega)$ est un espace de Banach sous la norme

$$\|u\|_{W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega)} = \|u\|_{\phi_{max}} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_{x_i} u\|_{\phi_i}.$$

De plus, puisque Ω a une mesure finie on a l'injection continue $W^1 L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$.

Chapter 2

Sur un problème de valeurs propres non linéaires pour le laplacien généralisé dans les espaces d'Orlicz-Sobolev

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de valeurs propres non linéaires suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) & = \lambda\rho(x)\phi(|u|)u \quad \text{in } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le cadre naturel dans lequel nous considérons de telles équations est celui des espaces d'Orlicz-Sobolev. Nous présentons les deux constantes positives λ_0 et λ_1 suivants :

$$\lambda_0 = \inf_{u \in W_0^1 L_M(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho(x)\phi(|u|)|u|^2 dx} \tag{2.2}$$

et

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \int_\Omega M(|\nabla u|)dx \,\middle|\, u \in W_0^1 L_M(\Omega),\ \int_\Omega \rho(x) M(|u|)dx = 1 \right\}, \tag{2.3}$$

avec $\lambda_0 \leq \lambda_1$ tel que λ_1 est une valeur propre du problème tendis que toute $\lambda < \lambda_0$ ne peut pas être ainsi. Au moyen d'inégalités de type Harnack et d'un principe de maximum fort, nous prouvons l'isolation de λ_1 de la coté droite. Nous soulignons que tout au long du chapitre, aucune condition de type Δ_2 est nécessaire.

2.1 Les lemmes importants du ce chapitre

Soit J et B définie par :

$$J(u) = \int_\Omega M(|\nabla u|)dx \tag{2.4}$$

et

$$B(u) = \int_\Omega \rho(x)M(|u|)dx, \tag{2.5}$$

Lemme 2.1.1 *Soit J et B définie par (2.4) et (2.5). Alors*
(i) B est $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{M^*})$ continue,
(ii) J est $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{M^*})$ semi-continue inférieurement.

Lemme 2.1.2 *Le minimum dans (2.3) est atteint à une certaine fonction $u \in K$ qui est une solution faible de (2.1) et ainsi u est une fonction propre associée à la valeur propre λ_1. De plus, $\lambda_0 \leq \lambda_1$ et toute valeur $\lambda < \lambda_0$ n'est pas une valeur propre du problème (2.1).*

Lemme 2.1.3 *Dénoter par $B(y, R)$ une boule ouvert dans Ω de rayon R et centrée au point $y \in \Omega$ et considérons l'anneau*

$$E_R = \left\{x \in B(y, R) : \frac{R}{2} \leq |y - x| < R\right\}.$$

Supposons que (2.7) vérifiée. Alors, elle existe une fonction $v \in C^1$ avec $0 < v < \delta$, $v' < 0$ dans E_R et $w \geq v$ sur ∂E_R. De plus, v satisfaire

$$-\int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \cdot \nabla\psi dx \leq \int_\Omega f(v)\psi dx, \tag{2.6}$$

pour toute $\psi \in W_0^1 L_M(\Omega)$ et $\psi \leq 0$.

où (2.7) est la condition définie par

$$\int_0^\delta \frac{ds}{H^{-1}(M(s))} = +\infty, \tag{2.7}$$

avec H est la fonction définie par

$$H(t) = tm(t) - M(t) = M^*(m(t)),$$

et $\delta = \sup w$, où w est la fonction propre associée à λ_1.

Lemme 2.1.4 (Principe de comparaison) *Supposons (2.7) est vérifiée. Soit v est une fonction $\mathcal{C}^1$ donnée par le Lemme 2.1.3 avec $0 < v < \delta$ dans Ω et $w \geq v$ sur $\partial\Omega$. Alors $w \geq v$ dans Ω.*

Lemme 2.1.5 (Principe de maximum fort) *Supposons (2.7) est vérifiée. Alors, si w est une fonction propre positif associée à λ_1, alors $w > 0$ dans Ω.*

Lemme 2.1.6 *Soit ξ et η des vecteurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors*

$$[\phi(|\xi|)\xi - \phi(|\eta|)\eta] \cdot (\xi - \eta) > 0, \ \textit{whenever}\ \xi \neq \eta.$$

Lemme 2.1.7 *Soit A une N-fonction (voir [2]). Si $u \in W^1L_A(\Omega)$ a un support compact dans un ensemble ouvert Ω vérifiée la propriété de sigma, alors $u \in W_0^1L_A(\Omega)$.*

Lemme 2.1.8 *Pour toute solution faible $u \in W_0^1L_M(\Omega)$ du (6) associée à $\lambda > 0$, alors il existe un constant $c_\infty > 0$, ne dépendant pas de u, tel que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_\infty.$$

Lemme 2.1.9 *Soit Ω est un sous ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $B_R \subset \Omega$ est une boule ouvert de rayon $0 < R \leq 1$. Supposons que g est une fonction positif telle que $g^\alpha \in L^\infty(B_R)$, où $|\alpha| \geq 1$. Supposons que*

$$\Big(\int_{B_R} g^{\alpha q k} dx\Big)^{\frac{1}{k}} \leq C \int_{B_R} g^{\alpha q} dx, \tag{2.8}$$

où $q, k > 1$ et C est un constant positive. Alors pout tout $p > 0$ il existe un positive constant c tel que

$$\sup_{B_R} g^{\alpha} \leq \frac{c}{R^{\frac{k}{(k-1)p}}} \Big(\int_{B_R} g^{\alpha p} dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemme 2.1.10 *Soit $B_r \subset \Omega$ une boule ouvert de rayon $0 < r \leq 1$. Alors pour tout $p > 0$, il existe un positive constante C, dépend de p, tel que*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} v \leq C\bigg(\Big(r^{-N} \int_{B_r} v^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + r\bigg), \tag{2.9}$$

où $B_{\frac{r}{2}}$ est la boule ouvert de rayon $r/2$ concentrique avec B_r.

Lemme 2.1.11 *Soit $B_r \subset \Omega$ une boule ouvert de rayon $0 < r \leq 1$. Alors, ils existent deux constantes $C > 0$ et $p_0 > 0$ tel que*

$$\Big(r^{-N} \int_{B_r} v^{p_0} dx\Big)^{\frac{1}{p_0}} \leq C\Big(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} v + r\Big), \tag{2.10}$$

où $B_{\frac{r}{2}}$ est la boule ouvert de rayon $r/2$ concentrique avec B_r.

Lemme 2.1.12 (Les inégalités de type Harnack) *Soit $u \in W_0^1 L_M(\Omega)$ est une solution bornée du problème (2.1) et soit $B_{\frac{r}{2}}$, $0 < r \leq 1$, une boule ouvert de rayon $\frac{r}{2}$. Il existe une grande constante $C > 0$ tel que*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} v \leq C(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} v + r) \tag{2.11}$$

et

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} w \leq C(\inf_{B_{\frac{r}{2}}} w + r). \tag{2.12}$$

Lemme 2.1.13 (La régularité de Hölder) *Soit $u \in W_0^1 L_M(\Omega)$ est une solution faible bornée du (2.1). Alors, ils existent deux constantes $0 < \alpha < 1$ et $C > 0$ tel que si B_r et B_R sont deux boules concentriques de rayons $0 < r \leq R \leq 1$, alors*

$$osc_{B_r} u \leq C\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\alpha}\Big(\sup_{B_R} |u| + C(R)\Big),$$

où $osc_{B_r} u = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u$ et $C(R)$ est une constante positive qui dépend de R.

2.2 Les principaux résultats du ce chapitre

Théorème 2.2.1 *Supposons (2.7) vérifiée. Alors, pour toute fonction propre u associée à λ_1 a un signe constant dans Ω, c-à-d, soit $u > 0$ dans Ω ou $u < 0$ dans Ω.*

Théorème 2.2.2 *Supposons (2.7) vérifiée. Si $v \in W_0^1 L_M(\Omega)$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda > \lambda_1$. Alors $v^+ \not\equiv 0$ et $v^- \not\equiv 0$ dans Ω. De plus, si nous définissons $\Omega^+ = \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$ et $\Omega^- = \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$, alors*

$$\min\{|\Omega^+|, |\Omega^-|\} \geq \min\left\{\frac{1}{M^*\left(\frac{dc}{\min\{a,1\}}\right)}, \frac{1}{M^*\left(\frac{dc}{\min\{b,1\}}\right)}\right\} \tag{2.13}$$

où $a = \int_\Omega v^+(x)dx$, $b = \int_\Omega v^-(x)dx$, $c = c(\lambda, |\Omega|, \|v\|_\infty, \|\rho\|_\infty)$ et d est la constante de l'inégalité de Poincaré norme (voir [7, Lemma 5.7]).

Théorème 2.2.3 *Supposons (2.7) vérifiée. Alors, la valeur propre λ_1 est isolée du côté droit, c à d, il existe $\delta > 0$ tel que dans l'intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ il n'y a pas de valeurs propres.*

Chapter 3

les résultats d'injection dans les espaces de Musielak-Orlicz-sobolev avec une application aux problèmes de Neumann non linéaires anisotropes

Dans ce chapitre, nous prouvons une injection continue qui nous permet d'obtenir un résultat d'injection de trace de frontière pour les espaces de Musielak-Orlicz anisotropiques, que nous appliquons ensuite pour obtenir un résultat d'existence pour le problème non linéaire anisotropique de type Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} a_i(x, \partial_{x_i} u) + b(x)\varphi_{max}(x, |u(x)|) & = f(x, u) \quad \text{in } \Omega, \\ u & \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \sum_{i=1}^{N} a_i(x, \partial_{x_i} u)\nu_i & = g(x, u) \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

dans l'espace de Musielak-Orlicz construit à partir d'une fonction de Musielak-Orlicz, sur lesquels et sur leurs conjugués nous supposons pas la condition Δ_2. L'unicité de solution est également étudiée. $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory function tel qu'elle existe une fonction de Musielak-Orlicz localement intégrable P_i avec $P_i \ll \phi_i$, une constante positive c_i et une fonction positive $d_i \in E_{\phi_i^*}(\Omega)$ satisfaisante pour tout s, $t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$ les conditions suivantes

$$|a_i(x,s)| \leq c_i[d_i(x) + (\phi_i^*)^{-1}(x, P_i(x,s))], \tag{3.2}$$

$$\phi_i(x,|s|) \leq a_i(x,s)s \leq A_i(x,s), \tag{3.3}$$

$$\big(a_i(x,s) - a_i(x,t)\big) \cdot \big(s - t\big) > 0, \text{ for all } s \neq t, \tag{3.4}$$

la fonction $A_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$A_i(x,s) = \int_0^s a_i(x,t)dt.$$

Ici et dans ce qui suit, on définie ϕ_{min} et ϕ_{max} par

$$\phi_{min}(x,s) = \min_{i=1,\cdots,N} \phi_i(x,s) \text{ et } \phi_{max}(x,s) = \max_{i=1,\cdots,N} \phi_i(x,s).$$

Soit $\varphi_{max}(x,y) = \frac{\partial \phi_{max}}{\partial y}(x,y)$. On suppose aussi qu'elle existe une fonction de Musielak-Orlicz localement intégrable R avec $R \ll \phi_{max}$ et une fonction positive $D \in E_{\phi_{max}^*}(\Omega)$, tel que pour tout s, $t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$

$$|\varphi_{max}(x,s)| \leq D(x) + (\phi_{max}^*)^{-1}(x, R(x,s)), \tag{3.5}$$

où ϕ_{max}^* représente la fonction complémentaire de ϕ_{max}.

Pour ce qui concerne les données, nous supposons que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions Carathéodory. Nous définissons les primitives $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f et g respectivement par

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \text{ and } G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt.$$

Nous supposons maintenant qu'il existe deux constantes positives k_1 et k_2 et deux fonctions de Musielak-Orlicz localement intégrables M et H satisfaites la condition Δ_2 et différenciables par rapport à leurs seconds arguments avec $M \ll \phi_{min}^{**}$,

$H \ll \phi^{**}_{min}$ et $H \ll \psi_{min}$, tel que les fonctions f et g satisfaites pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ les conditions suivantes

$$|f(x,s)| \leq k_1 m(x,s), \text{ pour p.p. } x \in \Omega, \tag{3.6}$$

$$|g(x,s)| \leq k_2 h(x,s), \text{ pour p.p. } x \in \partial\Omega, \tag{3.7}$$

où

$$\psi_{min}(x,t) = [(\phi^{**}_{min})_*(x,t)]^{\frac{N-1}{N}}, \; m(x,s) = \frac{\partial M(x,s)}{\partial s} \text{ et } h(x,s) = \frac{\partial H(x,s)}{\partial s}. \tag{3.8}$$

Finalement, pour la fonction b impliqué dans (3.1), on suppose qu'il existe une constante $b_0 > 0$ tel que b satisfait l'hypothèse

$$b \in L^\infty(\Omega) \text{ and } b(x) \geq b_0, \text{ pour p.p. } x \in \Omega. \tag{3.9}$$

3.1 Les lemmes importants du ce chapitre

Lemme 3.1.1 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $f, g : \Omega \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ des fonctions continues non décroissantes par rapport à leur deuxième argument et $g(\cdot, t)$ is continue sur $\overline{\Omega}$ avec $\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{g(x,t)} = +\infty$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante positive K_0 tel que*

$$g(x,t) \leq \epsilon f(x,t) + K_0, \textit{ for all } t > 0.$$

Lemme 3.1.2 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient A, B deux fonctions de Musielak-Orlicz tel que $B \ll A$, avec $B(\cdot, t)$ est continue sur $\overline{\Omega}$. Si $\{u_n\}$ est une suite bornée dans $L_A(\Omega)$ et converge en mesure dans Ω, alors, elle converge en norme dans $L_B(\Omega)$.*

Lemme 3.1.3 *Soit $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ et soit $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue Lipschitzienne. Si $f(x) = F(x, u(x))$ alors $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. De plus, our tout $j = 1, \cdots, N$, la dérivée faible $\partial_{x_j} f$ de f est telle que*

$$\partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial F(x, u(x))}{\partial x_j} + \frac{\partial F(x, u(x))}{\partial t} \partial_{x_j} u(x), \textit{ for a.e. } x \in \Omega.$$

Lemme 3.1.4 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient A, ϕ deux fonctions de Musielak-Orlicz avec ϕ est localement intégrable, différentiable par rapport a sa deuxième variable et $\phi \ll A$. Alors, $\varphi(\cdot, s) \in L_{\phi^*}(\Omega)$ pour tout $s \in L_A(\Omega)$, où $\varphi(x,s) = \frac{\partial\phi(x,s)}{\partial s}$.*

Lemme 3.1.5 *Soit $t_0 > 0$ arbitraire et soit $\phi : \overline{\Omega} \times [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction réelle où la fonction partielle $\phi(x,\cdot)$ est convexe. Définissons la fonction $\varphi(x,t) = \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}$. Si $\phi(\cdot,t)$ et $\varphi(\cdot,t)$ sont continues sur $\overline{\Omega}$ et $\lim_{t\to+\infty} \inf_{x\in\Omega} \varphi(x,t) = +\infty$. Alors $\phi(x,t)$ est la partie principale de fonction de Musielak-Orlicz $M(x,t)$.*

3.2 Les résultats principaux du ce chapitre

Pour montrer les résultats principaux du ce chapitre on suppose les conditions suivantes :

$$\int_0^1 \frac{(\phi^{**}_{min})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt < +\infty \text{ and } \int_1^{+\infty} \frac{(\phi^{**}_{min})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt = +\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

Donc, on définit le conjugué de Sobolev $(\phi^{**}_{min})_*$ de ϕ^{**}_{min} par

$$(\phi^{**}_{min})_*^{-1}(x,s) = \int_0^s \frac{(\phi^{**}_{min})^{-1}(x,t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} dt, \quad \text{for } x \in \overline{\Omega} \text{ and } s \in [0,+\infty). \tag{3.11}$$

On peut facilement vérifier que $(\phi^{**}_{min})_*$ est une fonction de Musielak-Orlicz. On suppose qu'ils existent deux constantes positives $\nu < \frac{1}{N}$ et c_0, tel que

$$\left|\frac{\partial(\phi^{**}_{min})_*(x,t)}{\partial x_i}\right| \le c_0 \Big[(\phi^{**}_{min})_*(x,t) + ((\phi^{**}_{min})_*(x,t))^{1+\nu}\Big], \tag{3.12}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour p.p. $x \in \Omega$,à condition que pour chaque $i = 1, \cdots, N$ la dérivée $\frac{\partial(\phi^{**}_{min})_*(x,t)}{\partial x_i}$ existe.

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $(N \ge 2)$, vérifié la propriété de con. Supposons que (3.10) et (3.12) sont vérifiées, $(\phi^{**}_{min})_*(\cdot,t)$ est*

Lipschitzienne continue sur $\overline{\Omega}$ *et* ϕ_{max} *est localement intégrable. Alors, il y l'injection continue*

$$W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_{(\phi^{**}_{min})_*}(\Omega).$$

Théorème 3.2.2 *Soit* Ω *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$, *vérifié la propriété de con. Supposons que* (3.10) *et* (3.12) *sont vérifiées,* $(\phi^{**}_{min})_*(\cdot,t)$ *est Lipschitzienne continue sur* $\overline{\Omega}$ *et* ϕ_{max} *est localement intégrable. soit* A *une fonction de Musielak-Orlicz où la fonction* $A(\cdot,t)$ *est continue sur* $\overline{\Omega}$ *et* $A \ll (\phi^{**}_{min})_*$. *Alors, l'injection suivante*

$$W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega).$$

is compact.

Théorème 3.2.3 *Soit* Ω *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$, *vérifié la propriété de con. Supposons que* (3.10) *et* (3.12) *sont vérifiées,* $(\phi^{**}_{min})_*(\cdot,t)$ *est Lipschitzienne continue sur* $\overline{\Omega}$ *et* ϕ_{max} *est localement intégrable. Soit* ψ_{min} *la fonction de Musielak-Orlicz définie dans* (3.8). *Alors, l'injection de trace de frontière suivante* $W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\psi_{min}}(\partial\Omega)$ *est continue.*

Théorème 3.2.4 *Soit* Ω *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$, *vérifié la propriété de con. Supposons que* (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) *et* (3.12) *sont vérifiées et supposons que* ϕ_{max} *et* ϕ^*_{min} *sont localement intégrables et* $(\phi^{**}_{min})_*(\cdot,t)$ *is Lipschitz continuous on* $\overline{\Omega}$. *Alors, le problème* (3.1) *admet au moins une solution faible dans* $W^1L_{\vec{\phi}}(\Omega)$.

Afin de prouver le caractère unique de la solution faible que nous avons trouvée, nous devons supposer les hypothèses de monotonie suivantes

$$\big(f(x,s) - f(x,t)\big)\big(s - t\big) < 0 \text{ for a.e. } x \in \Omega \text{ and for all } s,t \in \mathbb{R} \text{ with } s \neq t \tag{3.13}$$

$$\big(g(x,s) - g(x,t)\big)\big(s - t\big) < 0 \text{ for a.e. } x \in \Omega \text{ and for all } s,t \in \mathbb{R} \text{ with } s \neq t \tag{3.14}$$

$$\big(\varphi_{max}(x,s)-\varphi_{max}(x,t)\big)\big(s-t\big)>0 \text{ for a.e. } x\in\Omega \text{ and for all } s,t\in\mathbb{R} \text{ with } s\neq t. \tag{3.15}$$

Théorème 3.2.5 *Si en plus de l'hypothèse (3.4) les conditions (3.13), (3.14) et (3.15) sont vérifiées, la solution faible u du problème (3.1) est unique.*

Chapter 4

Équation de chaleur semi-linéaire avec potentiel Hardy et termes singuliers

Dans ce chapitre, nous analysons la question de l'existence et de l'inexistence de solutions positives pour le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= \mu \dfrac{u}{|x|^2} + \dfrac{f}{u^\sigma} \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0,T), \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Omega \subset \mathrm{R}^N$, $N \geq 3$, est un ouvert borné, $\sigma \geq 0$ et $\mu \geq 0$ sont des contentes réelles et $f \in L^m(\Omega_T)$, $m \geq 1$, et u_0 sont des fonctions positives. L'étude que nous menons montre que l'existence de solutions dépend de σ et la sommabilité de la donnée f ainsi que sur l'interaction entre μ et la meilleure constante de l'inégalité Hardy. Les résultats de régularité des solutions positives, lorsqu'elles existent, sont également obtenus. De plus, nous prouvons l'unicité des solutions d'énergie finies.

4.1 Les lemmes importants du ce chapitre

Pour montrer les lemmes importants du ce chapitre on suppose que les termes sources u_0 et f satisfaire $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\forall w \subset\subset \Omega \; \exists d_w > 0 : u_0 \geq d_w \text{ in } w. \tag{4.2}$$

et

$$\begin{cases} f \in L^{m_1}(\Omega_T) & \text{if} \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \\ f \in L^1(\Omega_T) & \text{if} \quad \sigma \geq 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

où $m_1 := \frac{2N}{2N-(1-\sigma)(N-2)}$. Considérons le problème approché suivant

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n &= \mu \frac{T_n(u_n)}{|x|^2+\frac{1}{n}} + \frac{f_n}{(|u_n|+\frac{1}{n})^\sigma} & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,t) &> 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u_n(x,t) &= 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n(x,0) &= u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Soit

$$\alpha_1 := \frac{N-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \lambda} \tag{4.5}$$

Lemme 4.1.1 *[1, Lemma 2.2] Supposons que u est une fonction continue définie dans Ω tel que $u \neq 0$, $u \in L^1_{loc}(\Omega_T)$. Si u satisfaire*

$$\partial_t u - \Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} \geq 0, \; \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_T)$$

avec $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, $\lambda \leq \Lambda_{N,2}$ et $B_r(0) \subset\subset \Omega$, alors il existe une constante $C = C(N, r, t_1, t_2)$ tel que pour chaque cylindre $B_{r_1}(0) \times (t_1, t_2) \subset \Omega \times (0,T)$, $0 < r_1 < r$,

$$u \geq C|x|^{-\alpha_1} \text{ in } B_{r_1}(0) \times (t_1, t_2),$$

où α_1 est la constante définie dans (4.5).

Lemme 4.1.2 *Soit $g \geq 0$. Si u est une solution faible du problème*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + g \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

où $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, alors g satisfaire

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_{r_1}(0)} |x|^{-\alpha_1} g dx dt < +\infty,$$

pour toute boule $B_{r_1}(0) \subset\subset \Omega$, où α_1 est définie dans (4.5).

Nous allons maintenant comparer la solution u_n du (4.4) avec la solution w_n du problème

$$\begin{cases} \partial_t w_n - \Delta w_n &= \frac{f_n}{(w_n + \frac{1}{n})^\sigma} \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ w_n(x,t) &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,T), \\ w_n(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

où $f = min(f,n)$ et u_0 satisfaire (4.2). Rappelons que 4.7 a une solution unique w_n (voir [5, Lemma 2.1]).

Lemme 4.1.3 *Soit u_n la solution du (4.4) et w_n la solution du (4.7). Alors, $w_n \leq u_n$ p.p. dans Ω_T.*

Lemme 4.1.4 *Soit u_n la solution du (4.4). Alors pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ il existe $C_{\Omega'} > 0$ (ne dépend pas de n), tel que $u_n \geq C_{\Omega'}$ dans $\Omega' \times [0,T]$.*

Lemme 4.1.5 *supposons que $\mu \leq \Lambda_{N,2}$ et soit u_n la solution du (4.4). Alors la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ croissante par rapport à $n \in \mathbb{N}$.*

Lemme 4.1.6 *Soit $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ une solution énergie du (4.1) avec la donnée $f \in L^1(\Omega_T)$ tel que $supp(f) \subset\subset \Omega_T$. Alors u satisfaire $\frac{u\phi}{|x|^2} \in L^1(\Omega_T)$, $\frac{f\phi}{u^\sigma} \in L^1(\Omega_T)$ et*

$$\int_{\Omega_T} \partial_t u \phi dx dt + \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \phi dx dt = \int_{\Omega_T} \Big(\mu \frac{u}{|x|^2} + \frac{f}{u^\sigma}\Big) \phi dx dt, \tag{4.8}$$

pour tout $\phi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$.

4.2 Les résultats principaux du ce chapitre

Théorème 4.2.1 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, contenant l'origine. Supposons que u_0 et f des fonctions non négatives satisfont (4.2) et (4.3) respectivement. Si $\mu < \Lambda_{N,2}$ alors le problème (4.1) a une solution faible positive u tel que*

1. *si $0 \leq \sigma \leq 1$ alors u est une solution d'énergie,*
2. *si $\sigma > 1$ alors $u \in L^2(0,T;H^1_{loc}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ avec $G_k(u) \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. De plus, si $\frac{4\sigma}{(\sigma+1)^2} - \frac{\mu}{\Lambda_{N,2}} > 0$ alors $u^{\frac{\sigma+1}{2}} \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$,*
3. *si $\sigma > 1$ et supp$(f) \subset\subset \Omega$ alors u est une solution d'énergie.*

Théorème 4.2.2 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, contenant l'origine. Supposons que (4.2) est satisfaite et on suppose que $\sigma = 1$ et $f \in L^1(\Omega_T)$. Si $\mu = \Lambda_{N,2}$ alors le problème (4.1) a une solution faible u tel que $u \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pour tout $q < 2$.*

Théorème 4.2.3 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, contenant l'origine. Supposons que (2.2) et (4.2) tiennent. Si $\mu > \Lambda_{N,2}$ alors le problème (4.1) n'a pas de solution faible positive.*

Théorème 4.2.4 *Soit Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, contenant l'origine. Supposons que (2.2) et (4.2) tiennent et supposons que $\sigma > 0$ et $\mu < \Lambda_{N,2}$. alors*

(i) si $\sigma \geq 1$ et $m \geq 1$ on a

  (a) si $m > \frac{N}{2} + 1$ alors $u \in L^\infty(\Omega_T)$,

(b) *si* $1 \leq m < \frac{N}{2}+1$, *alors* $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *où* $\gamma = \frac{Nm(1+\sigma)-N+2m-2}{N-2m+2}$ *à condition que* $\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} - \frac{\mu}{\Lambda_{N,2}} > 0$.

(ii) *Si* $0 \leq \sigma \leq 1$ *on a*

(c) *si* $m > \frac{N}{2}+1$ *alors* $u \in L^\infty(\Omega_T)$,

(d) *si* $m_1 \leq m < \frac{N}{2}+1$ *alors* $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *où* $\gamma = \frac{Nm(1+\sigma)-N+2m-2}{N-2m+2}$ *à condition que* $\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} - \frac{\mu}{\Lambda_{N,2}} > 0$.

Théorème 4.2.5 *Soit* Ω *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *contenant l'origine. Supposons que (4.2) est vérifiée et* $f \in L^m(\Omega_T)$, *avec* $1 < m < m_1$ *et on suppose que* $0 \leq \sigma < 1$ *et* $\mu < \Lambda_{N,2}$. *Alors le problème (4.1) a une solution faible* $u \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\gamma(\Omega_T)$, *avec* $q = \frac{m(N+2)(1+\sigma)}{N+2-m(1-\sigma)}$ *et* $\gamma = \frac{m(1+\sigma)(N+2)}{N-2m+2}$.

Théorème 4.2.6 *Soit* Ω *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *contenant l'origine. Supposons que (4.2) est vérifiée,* $\mu < \Lambda_{N,2}$ *et* $\sigma \geq 0$. *Si* $f \in L^m(\Omega_T)$, *avec* $m \geq 1$ *et supp*$(f) \subset\subset \Omega_T$ *la solution d'énergie* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *du problème (4.1) est unique.*

Bibliography

[1] B. Abdellaoui, I. Peral, and A. Primo. Influence of the Hardy potential in a semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 139(5):897–926, (2009).

[2] R.A. Adams and J.F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam).* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, (2003).

[3] M.-M. Boureanu and V. Rădulescu. Anisotropic Neumann problems in Sobolev spaces with variable exponent. *Nonlinear Anal.*, 75(12):4471–4482, 2012.

[4] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, (2011).

[5] I. de Bonis and L.M. De Cave. Degenerate parabolic equations with singular lower order terms. *Differential Integral Equations*, 27(9-10):949–976, (2014).

[6] X. Fan, J.S. Shen, and D. Zhao. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 262(2):749–760, 2001.

[7] J. P. Gossez. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190:163–205, 1974.

[8] J. P. Gossez and R. Manásevich. On a nonlinear eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(4):891–909, 2002.

[9] M. A. Krasnosel'skii and J. B. Rutic'kii. *Convex functions and Orlicz spaces.* Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[10] A. Kufner, O. John, and S. Fučík. *Function spaces.* Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis.

[11] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod; Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[12] J. Musielak. *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[13] V. Mustonen and M. Tienari. An eigenvalue problem for generalized Laplacian in Orlicz-Sobolev spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 129(1):153–163, 1999.

[14] P. Pucci and J. Serrin. A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(1):57–71, 2000.

[15] M. Tienari. A degree theory for a class of mappings of monotone type in Orlicz-Sobolev spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes*, (97):68, 1994.

[16] A. Youssfi and M M.O. Khatri. On a nonlinear eigenvalue problem for generalized laplacian in orlicz-sobolev spaces. *J. Nonlinear Anal.*, 190, 2020.

[17] A. Youssfi and M.M.O. Khatri. Imbedding results in musielak-orlicz-sobolev spaces with an application to anisotropic nonlinear neumann problems. *Submitted to Electronic Journal of differential equations*.

[18] A. Youssfi and M.M.O. Khatri. Semilinear heat equation with hardy potential and singular terms. *Submitted to Journal of Evolution Equations*.