

# THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Structure de Recherche : Laboratoire de Physique des Hautes Energies,  
Modélisation et Simulation (LPHE-MS)

Discipline : Physique

Spécialité : Physique Mathématique

Présentée et soutenue le 20/04/2019 par :

**Hatim ES-SOBBAHI**

**Contribution à l'étude de l'inflation cosmologique**

## JURY

Mohamed DAOUD	PES, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Kenitra	Président
El Hassan SAIDI	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Directeur de Thèse
Morad EL BAZ	PES, Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Rabat	Rapporteur/ Examineur
Khadija HTOUTOU	PH, CRMEF de Fès-Meknès, Meknès	Rapporteur/ Examineur
Mohamed BENNAI	PES, Université Hassan II, Faculté des Sciences Ben Msik, Casablanca	Examineur
Rachid AHL LAAMARA	PH, CRMEF de Fès-Meknès, Meknès	Codirecteur
Mohammed EL FALAKI	PH, Université Chouaib Doukkali, Faculté des Sciences, EL JADIDA	Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي

« *Toute personne qui n'a jamais commis  
d'erreurs n'a jamais tenté d'innover* ».

– *Albert Einstein.*

*Physicien*



*DEDICACES*

*« Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries »*

*Marcel Proust.*



*Je me dois d'avouer pleinement ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont soutenue durant mon parcours, qui ont su me hisser vers le haut pour atteindre mon objectif. C'est avec amour, respect et gratitude que*



*Je dédie cette thèse ...*



## *Tout D'Abord à ALLAH*

*Le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

*Qui m'a inspiré et guidé dans le bon chemin,*

*Je lui dois ce que je suis devenu.*

*Louage et remerciement pour sa clémence et sa miséricorde.*

## *A Mes Très Chers Parents*

*À qui je dois tout, et pour qui aucune dédicace ne saurait exprimer mon profond amour, ma gratitude, ni mon infini reconnaissance pour l'ampleur des sacrifices et des souffrances que vous avez endurés pour mon éducation, mon bien être. Vous n'avez jamais cessé de lutter. Vos prières ont été pour moi un grand soutien moral tout au long de mes études. Ce modeste travail, qui est avant tout le vôtre, n'est que la consécration de vos grands efforts et vos immenses sacrifices. Sans vous je ne saurais arriver là où je suis. J'espère rester toujours digne de votre estime.*

*Puisse Allah Le Tout Puissant vous préserver du mal, vous combler de santé, de bonheur et vous accorder longue et heureuse vie.*

*Que Dieu vous bénisse*

## *A Mon Epouse*

*Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon amour et mon attachement à toi.*

*Depuis que je t'ai connu, tu n'as cessé de me soutenir et de m'épauler.*

*Tu me voulais toujours le meilleur. Ton amour ne m'a procuré que confiance et stabilité.*

*Tu as partagé avec moi les meilleurs moments de ma vie, aux moments les plus difficiles de ma vie, tu étais toujours à mes côtés, Je te remercie de ne m'avoir jamais déçu.*

*Aucun mot ne pourrait exprimer ma gratitude, mon amour et mon respect.*

*Je remercie le bon dieu qui a croisé nos chemins. Puisse le bon dieu nous combler de bonheur, de santé et nous procurer longue vie.*

## *A Mon Très Cher Petit GHASSANE*

*Mon amour et mon affection pour toi ne cessent de s'accroître de jour en jour.*

*Ton sourire illumine ma vie et la rend plus joyeuse et pleine de sens.*

*À toi mon ange je dédie ce modeste travail en implorant DIEU le tout puissant de te garder pour tes parents qui t'adorent.*

*Je t'aime mon héros.*

## *A Mon Cher Frère & Sa Femme*

*Je ne saurais traduire sur du papier l'affection que j'ai pour Toi, je n'oublierai jamais ces merveilleux moments passés ensemble, Que Dieu tout puissant vous garde et vous procure santé, bonheur et longue vie pour que vous demeuriez le flambeau illuminant le chemin de vos enfants.*

*J'implore Allah de te réserver un avenir meilleur.*

## *A Ma Sœur Et Son Mari*

*Tu as été à mes côtés pendant toutes les étapes de ce travail, je t'en suis très reconnaissant.*

*Nul mot ne peut exprimer la profondeur des sentiments fraternels et d'amour, d'attachement que j'éprouve à votre égard. Je vous dédie ce travail en témoignage de ma profonde affection en souvenirs de notre indéfectible union qui s'est tissée au fil des jours.*

*Puisse Dieu vous protéger, garder et renforcer notre fraternité.*

## *A Ma Belle Famille*

*Je remercie Dieu de m'avoir procuré une belle famille autant affectueuse et chérisseuse, de m'avoir considéré comme l'un des vôtres, et Merci encore pour vos encouragements, vos prières et votre amour. J'espère que vous retrouvez dans la dédicace de ce travail, le témoignage de mes sentiments sincères et de mes vœux de santé et de bonheur.*

*À tous ceux qui me sont chers et que j'ai involontairement omis de citer.*

*À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*À tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer*

A decorative rectangular border with intricate floral and scrollwork patterns, featuring four ornate corner pieces and connecting lines.

*REMERCIEMENTS*



---

# Remerciement

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire de Physique des Hautes Energies, Modélisation et Simulation (LPHE-MS) du département de physique de la Faculté des Sciences de Rabat et sous la direction de Mr le professeur El Hassan SAIDI, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat et la co-direction de Mr Rachid AHL LAAMARA, professeur Habilité au CRMEF, Meknès.

D'abord et avant tout, les louanges et les remerciements vont à Dieu, le Tout-Puissant, pour ses bénédictions illimitées.

Mes plus sincères remerciements vont à mon directeur de thèse, Mr El Hassan SAIDI, professeur à la Faculté des sciences de Rabat. Je le remercie de m'avoir accueilli et intégré dans l'équipe de recherche au sein du LPHE-MS. Ses conseils, sa disponibilité et ses connaissances ont largement contribué à la réussite de cette thèse. Je le remercie pour sa rigueur et son souci de clarté qui m'ont aidé à aller plus loin. J'ai particulièrement apprécié l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et la réelle collaboration qu'il entretient avec l'équipe de recherche du LPHE-MS. Ses encouragements constants m'ont donné suffisamment de confiance en moi pour mener cette thèse à bout. Soyez assuré, Monsieur, de tout mon estime et de mon profond respect.

Je tiens également à remercier mon co-encadrant Mr le professeur Rachid AHL LAAMARA, Professeur au CRMEF de Meknès, à qui j'adresse mes remerciements les plus sincères pour ses idées scientifiques, sa disponibilité et le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie pour son aide, ses conseils, ses encouragements et aussi pour sa bonne humeur quotidienne.

J'adresse mes remerciements les plus profonds à Monsieur Mohamed DAOUD, professeur à la Faculté des Sciences de Kenitra, qui m'a fait l'honneur d'être le président de mon Jury de thèse. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon profond respect.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Morad EL BAZ, Professeur de l'Enseignement Supérieur à la Faculté des Sciences de Rabat, pour sa participation à mon jury de thèse en

---

qualité de rapporteur de mon travail et pour toutes remarques intéressantes qu'il m'a faits. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon profond respect.

Un grand merci à Madame Khadija HTOUTOU, professeure Habilité au CRMEF de Meknès, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Veuillez recevoir, Madame, l'expression de mon respect et de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré que Monsieur Mohamed BENNAI, Professeur à la Faculté des Sciences, Ben Msik, Casablanca, ait accepté d'être Examineur de ce travail. Qu'il trouve ici, l'expression de ma profonde considération.

Mes remerciements les plus profonds vont à Monsieur le Professeur Mohammed EL FALAKI, Professeur à la Faculté des Sciences, El Jadida, pour l'intérêt qu'il a toujours montré envers mon travail de thèse et pour ses conseils et ses encouragements.

Je remercie énormément tous les membres du jury pour leur disponibilité le jour de ma soutenance, pour le privilège qu'ils m'ont accordé par leur présence et pour l'intérêt qu'ils ont attribué à mon mémoire de thèse. Je tiens à vous remercier encore une fois d'avoir accepté de vous déplacer pour partager avec moi l'un des moments les plus mémorables de toute ma vie. Ces moments qui risquent de créer un événement inoubliable pour le reste de mes jours.

Si j'en suis arrivé là aujourd'hui, c'est aussi parce que j'ai rencontré sur mon chemin des personnes qui m'ont apporté le meilleur d'elles-mêmes et m'ont hissé vers l'excellence. Je remercie l'ensemble de l'équipe de recherche du LPHE-MS pour les nombreuses et toujours fructueuses discussions. Travailler avec eux a été un réel plaisir que du bonheur.

Ne pouvant malheureusement pas citer toutes les personnes que j'ai rencontré durant mon parcours et qui ont pu contribué d'une façon ou d'une autre, de près ou de loin, à l'aboutissement de cette thèse, je leur dis à toutes merci d'avoir été là à cette instant précis où je les ai rencontrés et où ils m'ont apporté cette aide qui a sûrement contribué à aller au bout de cette thèse.

Je suis seul à signer cette thèse et pourtant de nombreuses personnes ont contribué par leur aide, leur soutien et leurs conseils à la faire exister. Je tiens à remercier très sincèrement tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ce travail.

*À vous tous, du fond du cœur : Merci*

---

# Résumé

L'inflation cosmologique est une phase d'expansion accélérée de l'Univers primordial à très hautes énergies. Elle est conçue comme une solution possible aux problèmes du modèle standard de la cosmologie ; elle permet la production causale de fluctuations cosmologiques sur les grandes échelles. Suite aux résultats des observations récentes obtenues par les satellites PLANCK, WMAP et BICEP II, le paradigme inflationnaire suscite un intérêt majeur dans le domaine cosmologique. Nous accordons une place de premier choix à la dynamique du champ scalaire "Inflaton" dans le cadre de la cosmologie standard, ensuite nous mettons l'accent sur l'effet relativiste des perturbations cosmologiques, et le mécanisme de genèse de celles-ci pendant l'inflation. Nous décrivons le formalisme de l'inflation branaire dans le cadre du modèle de Randall-Sundrum qui révèle de nouvelles perspectives du point de vue cosmologique. La description de l'inflation cosmologique, stipule que toute la matière scalaire est confinée sur une 4-brane dans un espace-temps à 5-dimension. À très hautes énergies, l'effet de la Brane modifie les équations de Friedmann qui régissent la dynamique du champ scalaire. Aux basses énergies, l'effet de la Brane devient négligeable et les résultats de l'inflation standard sont retrouvés. Enfin, nous examinons les corrections à haute énergie pour certains modèles choisis et nous comparons les résultats avec les données de Planck et WMAP.

**Mots-clefs** : Cosmologie, modèle standard, Inflation, Randall-Sundrum II, Perturbation, WMAP.

---

# Abstract

Cosmological inflation is an accelerated expansion phase occurring in the primordial Universe at very high energies. It is conceived as a possible solution to the problems of the cosmological standard model. According to the results of the recent observations obtained by the satellites PLANCK, WMAP and BICEP II, the inflationary paradigm gives rise to a major interest in the cosmological field. Firstly, we begin by studying the dynamics of the scalar field within the framework of the standard cosmology; then we focus on the relativistic effect of cosmological perturbations. Secondly, we describe the formalism of the brane inflation under the Randall-Sundrum model revealing new perspectives from the cosmological point of view, where the results of standard inflation are recovered at low energy. Finally, we examine the high energy corrections for selected models and compare the results with the Planck and WMAP data.

**Keywords** : Cosmology, Inflation, Randall Sundrum II, Perturbation Spectrum, WMAP.

---

# Table des matières

Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 Modèle Standard de la Cosmologie.....	5
1.1 Principe Cosmologique . . . . .	5
1.2 Equations d'Einstein . . . . .	8
1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	9
1.4 Expansion et décalage spectral . . . . .	14
1.5 Notions de base de la cosmologie . . . . .	17
1.5.1 Loi de Hubble . . . . .	17
1.5.2 Distances cosmologiques . . . . .	17
1.5.3 Evolution de l'Univers : . . . . .	18
1.6 Limites du modèle standard . . . . .	22
1.6.1 Problème de l'horizon . . . . .	22
1.6.2 Problème de la platitude . . . . .	23
1.6.3 Problème des reliques . . . . .	24
Chapitre 2 Théorie de l'inflation standard.....	25
2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard . . . . .	25
2.1.1 Motivation de l'inflation . . . . .	25
2.1.2 Solutions aux problèmes du Big Bang chaud . . . . .	26
2.1.3 Dynamique de l'inflation . . . . .	29

## Table des matières

---

2.1.4	Inflation en roulement lent . . . . .	31
2.2	Classification des modèles inflationnaires . . . . .	34
2.2.1	Modèles à grands champs . . . . .	34
2.2.2	Modèles à petits champs . . . . .	35
2.2.3	Modèles hybrides . . . . .	36
2.3	Théorie de la perturbation cosmologique . . . . .	36
2.3.1	Fluctuations quantiques d'un champ scalaire non massif au cours de l'inflation. . . . .	37
2.3.2	Fluctuations quantiques d'un champ scalaire massif au cours de l'inflation. . . . .	40
2.3.3	Perturbations de la métrique . . . . .	41
2.3.4	Perturbations scalaires . . . . .	42
2.3.5	Perturbations de la matière . . . . .	42
2.3.6	Spectre de puissance dans l'espace Quasi-de Sitter . . . . .	44
2.4	Modèle d'inflation . . . . .	50
2.4.1	Inflation chaotique . . . . .	50
2.4.2	Inflation en loi de puissance . . . . .	53
2.4.3	Hilltop potentiel . . . . .	55
Chapitre 3	Théorie de l'inflation branaire. . . . .	58
3.1	Modèle de Randall Sundrum . . . . .	59
3.2	Equations d'Einstein sur la brane . . . . .	62
3.3	Approximation du roulement lent dans l'inflation branaire. . . . .	66
3.4	Théorie de la perturbation cosmologique sur la Brane . . . . .	69
3.5	Modèles d'inflation . . . . .	73
3.5.1	Inflation quadratique . . . . .	73
3.5.2	Potentiel exponentiel . . . . .	76
Chapitre 4	Contributions. . . . .	80
4.1	Article 1 : On braneworld inverse power-law inflation, International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 10 (2018) 1850058 (9 pages) . . . . .	80
4.2	Article 2 : On braneworld monomial inflation, International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 25 (2018) 1850147 (9 pages) . . . . .	91
	Conclusion générale. . . . .	101
	Bibliographie . . . . .	103

---

# Introduction générale

Les deux dernières décennies ont été marquées en cosmologie par une accélération formidable du rythme des découvertes scientifiques au point qu'on a pu souvent considérer la période actuelle comme l'âge d'or de la cosmologie. Par ceci, nous voulons dire que cette science, auparavant pauvre en observations, est passée dans une ère de précision dans laquelle des données fines et nombreuses peuvent maintenant être comparées aux modèles théoriques.

L'Univers n'est pas statique. Toutes les galaxies éloignées s'éloignent de nous avec une vitesse de récession proportionnelle à la distance de la galaxie. Cela a été découvert en 1929 par l'astronome Edwin Hubble [1]. L'expansion de l'univers entier est une explication évidente à ce comportement étonnant. Le modèle du big bang chaud explique mieux l'Univers en expansion et d'autres observations. Selon ce modèle, l'Univers est issu d'un état extrêmement dense et chaud, qui s'est ensuite développé et refroidi [2-4]. Une confirmation directe de la théorie du big bang a été la découverte du fond diffus cosmologique (CMB), le rayonnement résiduel remplissant tout l'Univers après le big bang [5]. L'existence du rayonnement CMB avait déjà été prédite en 1948 par G. Gamow et son groupe et a été détectée vingt ans plus tard en 1965 [6-8]. Arno Penzias et Robert Wilson ont découvert ce rayonnement dans une étude du bruit de fond dans un radiotélescope d'environ 3,5K qui ne pouvait être éliminé[5]. Autour de ces temps, R. Dicke et autres avaient théoriquement prédit qu'un rayonnement thermique isotrope à environ 3K devrait rester à partir de la phase initiale chaude du big bang [9]; ils ont conclu que le bruit de fond découvert était en effet ce rayonnement fossile, et donc une preuve significative du modèle du big bang chaud. En 1978, Penzias et Wilson ont reçu le prix Nobel de physique pour leur découverte. Les études sur le CMB se sont poursuivies et en 1992, G. Smoot et J. Mather par le satellite COBE (Cosmic Background Explorer) ont obtenu des mesures CMB plus précises [10, 11]. COBE détecte de petites variations de température (anisotropies) de l'ordre de  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$  dans le rayonnement CMB.

Ces anisotropies résultent de faibles variations de la densité de matière dans l'univers primitif au moment du découplage sur la dernière surface de diffusion, c'est-à-dire lorsque l'univers devient transparent pour les photons. Le modèle d'anisotropie CMB est donc une image directe de l'univers en ce moment. Depuis lors, les petites variations de densité ont atteint la structure actuelle observable de l'univers. La détection a valu à Mather et Smoot le prix Nobel de physique en 2006. Un résultat frappant est apparu en 1998 à partir d'études de supernova lointaines de type Ia réalisées par deux équipes de recherche indépendantes, une dirigée par B. Schmidt et A. Riess et l'autre par Perlmutter [12, 13]. Ils ont déduit que l'expansion de l'univers s'accélère. Cette découverte a été récompensée par le prix Nobel de physique en 2011. On pense que cette accélération est alimentée par l'énergie noire. Une autre raison possible pourrait être une modification de la loi de la gravité à grande distance. Le modèle du big bang n'est pas en mesure d'expliquer certaines observations<sup>1</sup> [14]. Afin de résoudre ces problèmes, une autre hypothèse est ajoutée à la théorie standard du big bang, à savoir l'hypothèse de l'inflation proposée par Alan Guth En 1980 [15]. L'hypothèse est qu'avant l'ère des radiations, l'univers était dominé par une période de lente variation de l'énergie du vide, appelée inflation, au cours de laquelle l'univers subit une expansion presque exponentielle. Cette inflation exponentielle aurait adouci toute courbure et toute inhomogénéité de l'espace de sorte que l'univers que nous voyons aujourd'hui soit très homogène et isotrope [16–22]. L'inflation permet par conséquent d'expliquer l'origine des fluctuations à partir desquelles les structures astrophysiques se sont formées par effondrement gravitationnel. Cependant cette phase primordiale d'expansion accélérée se situe à des échelles d'énergie inaccessibles en laboratoire et constitue donc une fenêtre sur la physique de très hautes énergies qui reste à découvrir. Même si sa description reste jusqu'à présent phénoménologique, la majorité d'un grand nombre de modèles ont été construits grâce à une motivation issue de la théorie des cordes. Les mesures les plus anciennes que nous pouvons obtenir de cette époque sont à chercher soit dans le fond diffus cosmologique soit dans les ondes gravitationnelles primordiales. Cependant l'univers ayant été opaque après l'inflation, le fond diffus cosmologique ne constitue pas une fenêtre directe sur l'inflation et seule l'étude détaillée de la dynamique des perturbations permet de remonter à la phase primordiale de l'univers. Quant aux ondes gravitationnelles, qui constituent en principe un témoignage directe de l'inflation et leur détection directe a valu à Rainer Weiss, Kip Thorne et Barry Barish le prix Nobel de physique en 2017.

On suppose généralement que l'origine des petites variations de densité imprimées dans le ciel du rayonnement CMB réside dans les fluctuations quantiques pendant l'inflation, c'est-à-

---

1. Problème de la platitude, problème d'horizon, origine de la structure à grande échelle dans l'Univers et problème de monopôle.



dire que les fluctuations quantiques dans un champ scalaire dominant appelé champ inflaton sont les germes observés aujourd'hui.

L'objectif de ce travail de recherche vise l'étude de certains aspects de la théorie de l'inflation cosmologique. Il s'articule autour de deux volets ; un premier volet sur le modèle standard de la cosmologie et la théorie de l'inflation standard. Cette partie est présentée dans les chapitres I et II de ce mémoire de thèse. Le deuxième volet de ce travail est consacré à l'étude de la cosmologie branaire dans le scénario de Randall-Sundrum type II dans un univers à cinq dimension.

Compte-tenu de l'importance de la théorie de l'inflation au sein de la communauté de physique théorique, nous avons souhaité traiter dans ce mémoire de thèse des récents développements dans ce domaine. Ce travail de recherche s'articule autour de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre de ce memoire, j'exposerai les généralités théoriques de bases du modèle cosmologique standard. Pour cela, je rappellerai le principe cosmologique, puis je présenterai les équations d'Einstein et les équations de Friedmann-Lemaitre pour un univers homogène en expansion avec une constante cosmologique. Je m'intéresserai ensuite à l'expansion de l'univers et au décalage spectral en décrivant les différentes distances cosmologiques et en montrant que les différents paramètres cosmologiques intervenant dans le modèle standard, tels que la constante de Hubble  $H_0$ , la densité de matière  $\Omega_M$  et la constante cosmologique  $\Omega_\Lambda$ , peuvent être contraignantes en effectuant des mesures de distance. Finalement je mettrai en lumière le modèle du Big Bang qui retracera l'histoire thermique de l'univers et la formation des structures ainsi que les limites de ce modèle en ce qui concerne ses conditions initiales.

Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation du paradigme de l'inflation. Pour ce faire, j'explique tout d'abord comment une phase inflationnaire résout les problèmes du modèle du Big Bang chaud et je décris le scénario le plus simple qui fait appel à un champ scalaire en roulement lent. Ensuite j'étudie la dynamique linéaire des perturbations cosmologiques avant de définir les outils statistiques utilisés couramment pour leur description. Et puis je détaille le mécanisme de genèse des fluctuations primordiales, scalaires et tensorielles dans l'inflation d'un champ en calculant les spectres de puissance des fluctuations scalaires et tensorielles et discutons leur dépendance à l'échelle. Je complète enfin ma présentation du modèle cosmologique en donnant les contraintes observationnelles actuelles sur l'univers homogène dans l'approximation linéaire.

Le troisième chapitre sera consacré à l'importance de la cosmologie branaire dans le modèle de Randall-Sundrum. Nous étudierons aussi les fondements conceptuels et analytiques de la théorie d'inflation dans les modèles d'univers branaires. Ensuite, nous allons calculer les diverses quantités cosmologiques pour les différents potentiels choisis. Dans ce contexte, nous allons ainsi

analyser l'effet de la tension de la brane sur l'inflation.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les résumés de nos deux travaux de recherche publiés dans le cadre de la présente thèse de Doctorat :

Article 1 : **On braneworld inverse power-law inflation, International Journal of Modern Physics A** Vol. 33, No. 10 (2018) 1850058.

Article 2 : **On braneworld monomial inflation, International Journal of Modern Physics A** Vol. 33, No. 25 (2018) 1850147.

Finalement ; nous bouclons notre travail par une conclusion synthétique.

---

---

# Chapitre 1

---

## Modèle Standard de la Cosmologie

Des considérations sur la structure de l'univers existent dans presque toutes les cultures et semblent être intrinsèques au développement de la conscience humaine. En ce sens, la cosmologie est un sujet de préoccupation qui peut être considéré comme aussi vieux que l'humanité elle-même. Cependant, pendant très longtemps, il s'agissait d'une approche très spéculative des questions métaphysiques plus que physiques dans lesquelles la philosophie ou même la religion étaient également en jeu. Cela a radicalement changé seulement dans la première moitié du vingtième siècle avec l'avènement de la théorie de la relativité générale qui a fourni pour la première fois un cadre mathématique cohérent pour décrire l'espace et le temps. Les modèles cosmologiques dans lesquels l'espace est en expansion ont été dérivés de cette théorie et ont permis de comprendre de nombreuses observations. Au cours de ces années, la cosmologie consistait principalement à décrire et à reconstruire les effets observationnels à posteriori de cette expansion. Puis, dans la seconde moitié du vingtième siècle, a été formulé le modèle du big bang chaud, qui inclut la description des processus physiques intervenant dans cet espace-temps en expansion, et l'histoire thermique associée de l'Univers. Plus récemment, la Cosmologie est entrée dans une ère de précision avec l'arrivée de données d'observation de haute précision telles que les mesures CMB, les détecteurs d'ondes gravitationnelles, etc. Les développements théoriques de la physique des hautes énergies et de la physique gravitationnelle ont permis de faire de la cosmologie une véritable science.

Le modèle standard de la cosmologie est la description effective à grande échelle de l'univers observable et son évolution du big bang jusqu'à aujourd'hui. Dans ce premier chapitre, nous allons commencer par décrire le modèle standard de la cosmologie d'un point de vue théorique.

### 1.1 Principe Cosmologique

La cosmologie est le domaine de la physique consacré à l'étude de l'univers observable aux grandes échelles en tant que système physique, c'est-à-dire étudier son histoire, sa structure et son évolution. Sa structure est décrite par une variété lorentzienne quadridimensionnelle qui

## Chapitre 1. Modèle Standard de la Cosmologie

---

modélise l'espace-temps, et son contenu matériel est décrit par des champs vivants sur cette variété. La relation entre ces deux éléments de la théorie est fournie par la relativité générale (RG).

La cosmologie telle qu'elle est étudiée à l'heure actuelle repose sur trois grandes hypothèses :

-L'universalité des lois de la physique, "les lois de la physique sont partout les mêmes en tout point de l'univers".

-L'évolution de l'Univers est gouvernée par la gravitation décrite par la Relativité Générale d'Einstein.

-l'Univers est homogène et isotrope aux grandes échelles, c'est-à-dire invariant par translation et par rotation..

Un espace est homogène quand il est invariant par translation, ce qui signifie qu'à chaque instant, tout point de l'espace est semblable à un autre, tandis qu'un espace isotrope est invariant par rotation, autrement dit identique dans toutes les directions. On note donc absence de direction privilégiée. Citons à titre d'exemple l'apport de l'astronome William Keel qui explique dans ce sens : "Vu à une échelle suffisamment grande, l'univers est le même pour tous les observateurs". En fait, l'univers tel qu'on le voit est une part représentative de l'univers et les lois qui s'y appliquent sont applicables sur toutes les autres parties de l'univers. Cette dernière hypothèse<sup>1</sup> a été introduite pour la première fois dans le cadre de la Relativité Générale par Einstein en 1917 et porte le nom de principe cosmologique.

Après s'être fondé préalablement sur des arguments philosophiques, les observations récentes ont confirmé intensément ce principe.

**Isotropie** : les deux satellites COBE<sup>2</sup> en 1992 puis WMAP<sup>3</sup> en 2003 ont observé sur tout le ciel le rayonnement du fond diffus cosmologique découvert par Penzias et Wilson [29–31].

Il s'agit d'un rayonnement de corps noir de température

$$T_0 = 2.7277 \pm 0.002K,$$

produit par les photons de l'univers primordial. Ceci est bien vérifié par l'observation du fond diffus cosmologique (CMB) dont la température est mesurée identique dans toutes les directions de l'espace à des fluctuations de température  $\delta T$  de l'ordre de  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$  [119].

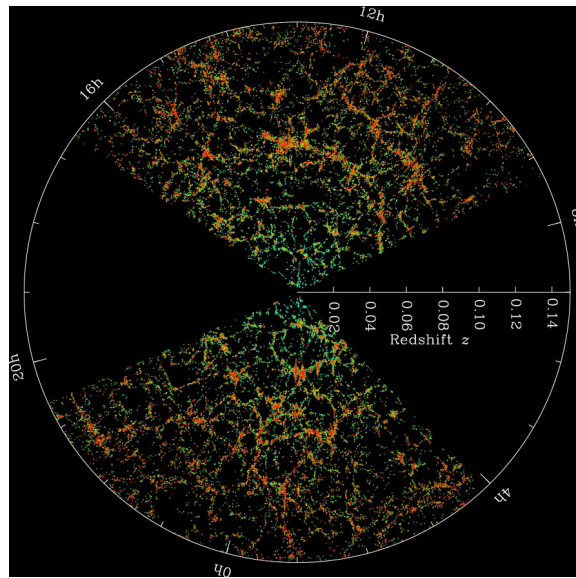
**Homogénéité** : à faible échelle, notre univers présente une certaine structure. En effet, les galaxies composées d'étoiles se regroupent en amas qui eux-mêmes s'associent en superamas.

---

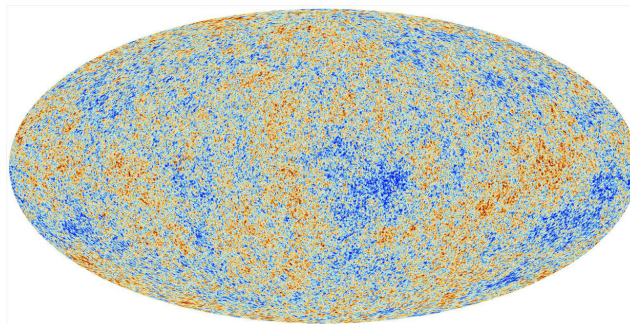
1. Homogénéité et Isotropie.  
2. Cosmic Background Explorer.  
3. Wilkinson Microwave Anisotropy probe.

### 1.1.1 Principe Cosmologique

Mais dès que l'on regarde à des échelles supérieures à la centaine de Mpc, l'univers nous apparaît homogène [118]. C'est ce qui a été mis en évidence par l'observation de plusieurs centaines de milliers de galaxies. La carte de la répartition spatiale, en trois dimensions, de ces galaxies est présentée sur la figure. L'absence de structure à grandes distances<sup>4</sup> y est clairement visible. Partant du principe cosmologique, nous allons maintenant présenter succinctement les équations qui décrivent notre Univers.



**Figure 1.1** – Répartition des galaxies détectées par l'expérience Sloan Digital Sky Survey (SDSS), en fonction du redshift  $z$ .



**Figure 1.2** – Carte de température du fond diffus cosmologique micro-onde (CMB) observée par le satellite Planck. L'écart relatif observé entre la température des points chauds (rouges) ou froids (bleus) par rapport à la moyenne est de l'ordre de  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ .

4. Décalage spectral vers le rouge  $> 0.15$ .

### 1.2 Equations d'Einstein

La Relativité Générale est la théorie de la gravitation à la base de la cosmologie moderne. Elle donne une explication géométrique à la force gravitationnelle introduite par Newton trois siècles auparavant. Dans cette théorie, une chute n'est plus due à un vecteur force orienté vers le sol, mais à la déformation de l'espace-temps engendrée par la Terre. Formulée ainsi, la Relativité Générale semble bien compliquée pour peu de choses. Mais les principes généraux à la base de cette théorie et la richesse de ses implications (dont la théorie newtonienne) en font la théorie phare pour décrire la gravitation. Au cours de cette section, nous allons introduire pas à pas plusieurs concepts de la Relativité Générale tels que la dérivée covariante et le tenseur de Riemann pour aboutir à l'équation d'Einstein de la Relativité Générale qui est la base de la cosmologie moderne. Cette introduction est largement inspirée de [23, 24]. La convention usuelle  $\hbar = c = 1$  sera suivie sauf si nécessaire.

On a vu dans l'introduction historique l'importance primordiale de la relativité générale dans le développement de la cosmologie moderne. On va ici l'introduire très brièvement.

Cette théorie de la gravitation repose sur le principe d'équivalence entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle. La gravitation n'est alors plus une force agissant entre deux corps massifs comme c'est le cas dans la théorie newtonienne, mais une conséquence de la déformation de l'espace-temps [113].

La relativité générale décrit l'espace temps en présence de la matière. La géométrie de l'Univers est décrite par sa métrique. C'est l'outil qui permet de relier la mesure de distance à un système de coordonnées. On peut l'exprimer sous la forme d'un tenseur symétrique qu'on appelle  $g_{\mu\nu}$  dans un système de coordonnées  $x^\mu$ , où les indices  $\mu$  et  $\nu$  prennent les valeurs  $\{0; 1; 2; 3\}$ . Dans ce document, l'indice  $\mu = 0$  représentera la dimension temporelle et  $\mu = 1, 2, 3$  représenteront les trois dimensions spatiales. on décrit ainsi les composantes d'un événement par [23] :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

L'élément de distance dans cette géométrie s'exprime alors par sa norme carrée sous la forme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1}$$

### 1.1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

les facteurs  $g_{\mu\nu}$  introduits sont nuls pour  $\mu \neq \nu$  et valent  $-1$  pour la coordonnée temporelle ( $x^0 = t$ ), et  $1$  pour les coordonnées spatiales  $x^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ). Dans le cadre de la relativité restreinte, qui ne prend pas en compte l'effet de la déformation de l'espace par l'énergie, on a  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ . soit  $g_{\mu\nu} = D(-1, 1, 1, 1)$  matrice diagonale de Minkowski. Dans la théorie de la relativité générale, la métrique est liée à l'énergie par l'équation d'Einstein [117] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

où  $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique,  $R_{\mu\nu}$  et  $R$  sont le tenseur et le scalaire de Ricci qui décrivent la courbure locale de l'espace-temps,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion représentant la distribution en matière et en énergie de l'Univers,  $\Lambda$  est la constante cosmologique, et  $G$  est la constante gravitationnelle. Pensant alors que l'Univers était statique, Einstein adjoint la constante cosmologique  $\Lambda$  à son équation. Suite à la mise en évidence de l'expansion de l'Univers par Hubble [101], il reviendra sur cette décision. Puis elle fût réintroduite dans les années 1990, avec la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers. Ce terme de gauche, décrivant la géométrie de l'espace-temps, est souvent noté  $G_{\mu\nu}$  qui est appelé tenseur d'Einstein. Le terme de droite contient toute l'information sur le contenu énergétique, et la nature de la matière.  $T_{\mu\nu}$  est appelé tenseur énergie-impulsion.

## 1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nous utilisons le principe cosmologique, c'est-à-dire l'hypothèse que l'Univers est homogène et isotrope à grande échelle. Cette hypothèse permet de simplifier l'équation d'Einstein, et de la résoudre analytiquement.

La description d'événements dans l'espace-temps nécessite une métrique. Celle-ci définit une distance infinitésimale  $ds^2$ . La métrique la plus générale satisfaisant les symétries imposées par le principe cosmologique est la métrique de Friedmann-Lemaître Robertson-Walker (FLRW) couramment utilisée aujourd'hui [122, 123]. Dans un système de coordonnées sphériques, elle s'écrit :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (1.3)$$

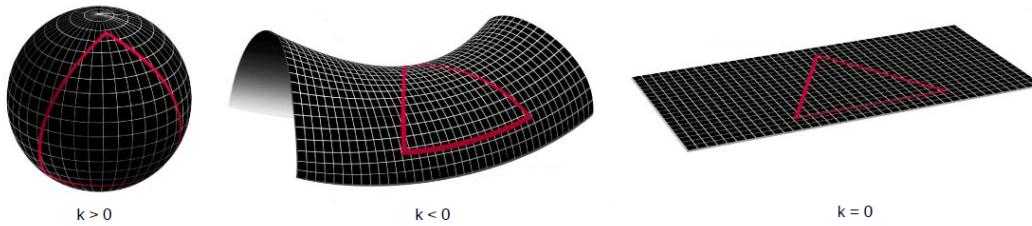
où  $ds$  est l'élément infinitésimal d'intervalle dans l'espace temps ;  $dt$  est l'élément infinitésimal de temps ;  $dr$ ,  $d\theta$ ,  $d\varphi$  sont les éléments infinitésimaux des coordonnées spatiales  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Le facteur d'échelle  $a(t)$  représente la dynamique de cette métrique, et sa variation traduit l'expansion de

## Chapitre 1. Modèle Standard de la Cosmologie

---

l'univers au cours du temps. On distingue trois types de métriques possibles selon la valeur du paramètre de courbure  $k$ . chaque cas correspond à une géométrie particulière de l'espace à trois dimensions :

$k = 0$  : la courbure est nulle, l'espace est localement euclidien en coordonnées sphériques,



**Figure 1.3** – Les trois formes géométriques possibles de l'Univers.

l'univers est alors plat, les photons se déplacent parallèlement en l'absence de matière, et la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$ .

$k = 1$  : la courbure est positive, l'espace est localement sphérique, la somme des angles d'un triangle est supérieure à  $\pi$ . ici l'espace est équivalent à trois dimensions de la surface d'une sphère. l'Univers est dit *fermé*.

$k = -1$ , la courbure est négative, l'espace est localement hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est inférieure à  $\pi$ . L'analogie à deux dimensions est une surface en selle de cheval. l'Univers est dit *ouvert*.

En supposant que l'Univers est rempli d'un fluide parfait de densité d'énergie  $\rho$  et de pression  $p$ , et en respectant le principe cosmologique, on peut écrire le tenseur énergie-impulsion sous une forme diagonale :

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{Diag}(-\rho(t), p(t), p(t), p(t)), \quad (1.4)$$

Dans les équations suivantes, on n'écrira plus la dépendance temporelle explicitement afin d'en faciliter la lecture. En écrivant les équations d'Einstein pour ces conditions, on obtient deux équations pour les deux seules composantes non nulles. Ces équations sont appelées équations de Friedmann-Lemaître<sup>5</sup> [114]. Elles s'écrivent :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.5)$$

---

5. On appelle parfois la première de ces équations l'équation de Friedmann et la seconde l'équation de Raychaudhuri.



### 1.1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

---

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.6)$$

où  $\frac{\dot{a}}{a} \equiv H$  est le paramètre de Hubble et un point représente une dérivée par rapport au temps cosmique  $t$ .

La première équation découle du terme temporel (00) de l'équation d'Einstein qui relie explicitement l'évolution du facteur d'échelle  $a(t)$  au contenu énergétique de l'Univers. La deuxième est appelée équation d'accélération. De plus, en soustrayant ces deux équations et en combinant le résultat avec la dérivée temporelle de la première, on peut obtenir l'équation de conservation de l'énergie que l'on obtiendrait aussi directement en calculant  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$  dans la métrique *FLRW* [160] :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.7)$$

Le fait que l'Univers soit homogène et isotrope implique que son contenu matériel a également une telle distribution, c'est-à-dire qu'il se comporte comme un fluide parfait. Il est en fait composé d'un ensemble de fluides parfaits : baryons, photons, ainsi que sans doute neutrinos, matière noire, et éventuellement champ scalaire et/ou constante cosmologique. Le tenseur énergie-impulsion de chacun de ces fluides a pour composantes :

$$T_0^0 = \rho, \quad (1.8)$$

$$T_i^0 = T_0^i = 0, \quad (1.9)$$

$$T_j^i = P\delta_j^i, \quad (1.10)$$

Nous avons deux équations indépendantes (1.5) et (1.6) pour 3 inconnues, le facteur d'échelle  $a(t)$ , la densité d'énergie  $\rho(t)$  et la pression  $p(t)$ . Il nous manque donc une équation pour résoudre ce système. De ce fait il nous faut décrire la matière et le plus simple est alors de nous disposer d'une équation d'état sous la forme suivante :

$$P = \omega\rho, \quad (1.11)$$

## Chapitre 1. Modèle Standard de la Cosmologie

---

$\omega$  est alors le paramètre de l'équation de la matière, et est égal au rapport de la pression du fluide sur sa densité. On peut alors réécrire l'équation (1.5) de la façon suivante :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.12)$$

tel que  $\rho = (\rho_m + \rho_k + \rho_\Lambda)$  avec  $\rho_m$ , la densité totale de matière<sup>6</sup>,  $\rho_k$ , la densité de courbure, et  $\rho_\Lambda$ , la densité de constante cosmologique. Ces deux dernières densités sont définies ainsi :

$$\rho_k = -\frac{3k}{8\pi G a^2}, \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.13)$$

On définit aussi la densité critique de l'Univers comme étant la densité totale d'un univers Einstein-de Sitter, c'est-à-dire la densité d'un univers plat ( $k = 0$ ) uniquement constitué de matière non-relativiste, et sans constante cosmologique :

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.14)$$

dont la valeur actuelle est de l'ordre de  $\rho_{cr} \simeq 9,2 * 10^{-27} h^2 kg.m^{-3}$  [116]. On définit à partir de la densité critique des paramètres de densité pour chacun des fluides contenus dans l'Univers de la manière suivante :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} \quad (1.15)$$

il est utile de réécrire les équations de Friedmann de manière adimensionnée en terme de quantités réduites. En fait, cela correspond à une paramétrisation de l'univers en fonction de son contenu. Ces quantités sont les densités suivantes :

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.16)$$

respectivement pour la matière, la constante cosmologique et la courbure [115].

La densité de matière est la somme de la densité de matière baryonique connue et de la densité de la matière noire froide dont la nature reste encore à découvrir. On peut alors réécrire la première équation de Friedmann (1.5) comme suite :

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (1.17)$$

---

6. Constituée des densités de matière non-relativiste,  $\rho_{NR}$ , et relativiste,  $\rho_R$ , et de la densité de rayonnement,  $\rho_\gamma$ .

### 1.1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Cette équation lie la courbure de l'Univers  $\Omega_k$ , et donc sa géométrie, à son contenu en matière et en énergie ( $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$ ). Pour la suite, il est nécessaire de définir la densité totale d'énergie comme étant égale à :

$$\Omega_T = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (1.18)$$

La mesure de ce paramètre de densité totale donne la courbure de l'univers :

- pour  $\Omega_T > 1$  alors  $\Omega_k > 0$ , l'Univers est fermé.
- pour  $\Omega_T = 1$  alors  $\Omega_k = 0$ , l'Univers est plat.
- pour  $\Omega_T < 1$  alors  $\Omega_k < 0$ , l'Univers est ouvert.

A partir de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion, Eq. (1.7), on conclut que la densité d'énergie d'un fluide parfait caractérisé par une constante  $\omega$  se comporte comme [124] :

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.19)$$

Combiné avec l'Eq. (1.5), si  $k = 0$  et  $\Lambda = 0$ , il est facile de montrer que le facteur d'échelle évolue comme :

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}(1+\omega)} \quad \text{avec } \omega \neq -1 \quad (1.20)$$

La résolution de l'équation d'état (1.11) donne plusieurs solutions. Chacune d'entre elles caractérise un état différent de l'Univers et correspond à une période de celui-ci :

► *Univers dominé par du rayonnement* : le rayonnement et plus généralement toute matière relativiste comme les neutrinos est caractérisée par une pression ( $p_R = \rho_R/3 \gg \rho_{NR}$  et  $\omega = 1/3$ ) l'équation de conservation de l'énergie (1.7) impose alors  $\rho_R \propto a^{-4}$ . En supposant également ici que la courbure et la constante cosmologique sont négligeables, la résolution de l'équation de Friedmann (1.5) donne  $a(t) \propto t^{1/2}$  pour un Univers en expansion.

► *Univers dominé par de la matière non-relativiste* : Quand l'univers est rempli de matière non relativiste (c'est-à-dire dont la pression est négligeable, d'où le terme de « poussière »), la densité d'énergie décroît uniquement du fait de la dilution due à l'expansion. Pour un univers de densité critique, ( $p_{NR} = 0$ ,  $\omega = 0$ , et  $\rho_{NR} \gg \rho_R$ ) appelé univers d'Einstein-de Sitter, L'équation (1.7) devient  $\rho_{NR} \propto a^{-3}$ . On suppose que la courbure et la constante cosmologique sont négligeables. La résolution de l'équation de Friedmann (1.5) donne alors  $a(t) \propto t^{2/3}$  pour un Univers en expansion.

► *Univers dominé par de l'énergie noire ou la constante cosmologique* : ( $\rho \gg \rho_m$  et  $\rho \gg \rho_k$ ) L'énergie noire ou quintessence peut être associée à un fluide de composition inconnue  $X$  et de pression négative. L'intégration de l'équation (1.7) donne  $a(t) \propto e^{Ht}$ . Un tel Univers croît donc

de manière exponentielle.

## 1.4 Expansion et décalage spectral

L'observation du spectre des galaxies permet de déterminer leur vitesse par rapport à la voie lactée. En effet pour différentes raisons, la longueur d'onde de la lumière émise par un objet lointain<sup>7</sup> peut-être décalée vers les grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire vers la partie du spectre correspondant au rouge ou inversement vers le bleu<sup>8</sup>. Pour des vitesses  $v$  petites devant la vitesse de la lumière  $c$ , ce décalage peut être dû au mouvement de la source, Il s'agit de l'effet Doppler. Ainsi, pour un photon émis à une longueur d'onde  $\lambda_e$  et observé sur terre avec une longueur d'onde  $\lambda_0$ , ce phénomène permet de relier le décalage  $\Delta\lambda = \lambda_e - \lambda_0$  à cette vitesse :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c} \equiv z \quad (1.21)$$

où  $z$  est appelé le décalage spectral vers le rouge (redshift).

Dans la métrique FLRW, plaçons nous par convention au centre  $r = 0$ , et considérons un objet situé aux coordonnées comobiles  $(r_e, \theta_e, \varphi_e)$ , émettant une onde électromagnétique à l'instant  $t_e$ . Le front d'onde est paramétré par la coordonnée comobile  $r(t)$ . Pour cette onde, voyageant à la vitesse de la lumière dans la métrique FLRW on a à tout instant :

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} dr^2. \quad (1.22)$$

Posons  $t_0$  l'instant de la réception de cette onde en  $r = 0$ , alors grâce à l'équation précédente on a la relation [124] :

$$\chi(t_0) \equiv \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.23)$$

Cette dernière intégrale est appelée distance comobile car elle fait abstraction des effets de l'expansion de l'Univers dans le calcul de la longueur parcourue par la lumière.

Pour une onde électromagnétique de période  $T$ , l'expression (1.22) étant valable à tout instant, on peut calculer la même intégrale pour l'onde émise à l'instant  $t_e + T_e$  et reçue à l'instant  $t_0 + T_0$ <sup>9</sup> :

$$\int_{t_e+T_e}^{t_0+T_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.24)$$

---

7. Comme une galaxie.

8. Petites longueurs d'onde.

9. On suppose donc que la période  $T$  va varier au cours du temps.

### 1.1.4 Expansion et décalage spectral

Par égalité des expressions (1.23) et (1.24), comme la période  $T$  est petite devant les variations du facteur d'échelle  $a(t)$  pour les ondes électromagnétiques usuelles, on obtient [26] :

$$\int_{t_e+T_e}^{t_0+T_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.25)$$

$$\int_{t_e+T_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+T_0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.26)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_0}{a(t_0)} = \frac{T_e}{a(t_e)} \quad (1.27)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.28)$$

où l'on a introduit le décalage spectral ou redshift  $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \Leftrightarrow 1 + z = \frac{a_0}{a(t_e)}$  caractérisant le décalage provoqué par l'expansion de l'univers. Ainsi, c'est l'expansion (ou la contraction) de l'univers qui explique le décalage spectral cosmologique des galaxies, et non le mouvement particulier de ces dernières.

#### Remarques

Si  $a(t_e) \leq a(t_0)$ , l'univers est en expansion et  $\lambda_0 \geq \lambda_e$  : il y a décalage spectral vers le rouge. Si  $a(t_e) \geq a(t_0)$ , l'univers est en contraction et  $\lambda_0 \leq \lambda_e$  : il y a décalage spectral vers le bleu. Les observations astronomiques portant sur un grand nombre de galaxies montrent de manière indiscutable que les longueurs d'onde des photons parvenant de galaxies lointaines sont décalées vers le rouge. L'univers actuel est bien en expansion.

Considérons maintenant le facteur d'échelle  $a(t)$  et faisons un développement limité autour du temps aujourd'hui  $t_0$ . Nous obtenons :

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t)|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}(t)|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + o(t^3) \quad (1.29)$$

$$= a(t_0) \left[ 1 + \frac{\dot{a}}{a_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a_0} (t - t_0)^2 + o(t^3) \right] \quad (1.30)$$

Rappelons que la constante de Hubble et le paramètre de décélération sont définies respectivement comme suite :

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a_0} \quad \text{et} \quad q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} \quad (1.31)$$

En posant  $t = t_1$ ,  $a(t_1) = a_1$  et en utilisant la définition du décalage spectral, nous obtenons :

$$\frac{1}{1+z} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + o(t^3) \quad (1.32)$$

## Chapitre 1. Modèle Standard de la Cosmologie

---

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)H_0^2(t_0 - t_1)^2 + o(t^3) \quad (1.33)$$

Pour un très faible redshift,  $H_0(t_0 - t_1) \ll 1$  et le terme additif  $o(t^3)$  est négligeable. La relation (1.33) peut être considérée, en première approximation, comme une équation algébrique du deuxième degré en  $(t_1 - t_0)$ . Sélectionnant la racine appropriée (i.e telle que  $(t_0 - t_1) \gg 0$ ), on a :

$$(t_0 - t_1) = \frac{1}{H_0} \left[ z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)z^2 + o(z^3) \right] \quad (1.34)$$

$(t_0 - t_1)$  est le temps de vol des photons qui ont été émis par la source à un instant  $t_0 = t_1$ , et détectés à  $t = t_0$  par l'observateur. Dans notre situation, on considère que les photons se propagent le long des trajectoires radiales, ( $d\theta = d\varphi = 0$ ), donc la condition  $ds^2 = 0$  (1.5) implique :

$$dt^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = dl^2 \quad (1.35)$$

$dl$  est la distance physique parcourue par les photons.

Pour exprimer la distance comobile  $r_1$  en fonction du temps, on doit séparer les variables  $r$  et  $t$  dans l'équation (1.35) avant d'intégrer le long de la trajectoire des photons.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} &= \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &= \int_0^{r_1} \left[ 1 + \frac{1}{2}kr^2 + o(r^3) \right] dr \\ &= r_1 \left[ 1 + o(kr_1^2) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ainsi la distance comobile séparant la source de l'observateur terrestre est :

$$r = \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^t (z + 1) dt \quad (1.37)$$

Nous obtenons ainsi :

$$r = \frac{1}{a_0} \left[ (t_0 - t) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t)^2 + o(t^3) \right] \quad (1.38)$$

et d'après la relation (1.34) on trouve que :

$$r_1 = \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + o(z^3) \right] \quad (1.39)$$

C'est la distance comobile qui sépare une source d'un observateur terrestre.

## 1.5 Notions de base de la cosmologie

### 1.5.1 Loi de Hubble

Considérons une galaxie G de position  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  comobile par rapport à un observateur O situé à l'origine. La distance métrique séparant O et G au temps  $t_0$ , calculée avec la métrique (1.3), est donnée par

$$d(t_0) = a(t_0) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.40)$$

Nous pouvons dériver le membre de droite de la relation ci-dessus par rapport au temps pour obtenir la vitesse de récession entre G et O

$$v(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0} d(t_0) = H_0 d(t_0). \quad (1.41)$$

C'est la loi de Hubble énoncée pour la première fois en 1929 par l'astronome américain Edwin Hubble [3], où  $H$  est la constante de Hubble, qui vaut par ailleurs  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  où  $a$  est le facteur d'échelle. Ce facteur d'échelle n'étant pas constant dans le temps à cause de l'expansion de l'Univers, la constante de Hubble ne l'est pas non plus, malgré son nom. D'après les dernières mesures effectuées par Planck,  $H_0 = 67.8 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$  [116]. Autrement dit, deux galaxies de l'Univers local étant séparées d'une distance de  $1\text{Mpc}$  s'éloignent l'une de l'autre avec une vitesse de  $67.8 \text{ km.s}^{-1}$ [116].

### 1.5.2 Distances cosmologiques

Dans un Univers en expansion et dont la courbure est non nulle, la notion de distance n'est pas unique. En effet la définition de distance permet la détermination des paramètres cosmologiques tels que  $H_0$  et  $q_0$  en disposant de certains paramètres observables tels que le redshift  $z$ , le diamètre angulaire<sup>10</sup> [23, 27, 28]. Voici la liste des distances utilisées en cosmologie.

#### Distance propre

C'est la distance que l'on pourrait mesurer effectivement à un instant  $t$  entre deux objets situés en  $r_1$  et  $r_2$ . Elle est donc homogène à une longueur. On peut choisir  $r_1 = 0$  et  $r_2 = r$ . La distance propre est alors définie naturellement par [35] :

$$D_M = a_0 \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

---

10. Qui sépare deux point du ciel.

## Chapitre 1. Modèle Standard de la Cosmologie

---

Or ces grandeurs ne sont pas mesurables directement. En outre la galaxie apparaît telle qu'elle était à l'instant  $t$  où le rayonnement a été émis. Des mesures ne peuvent donc pas fournir une distance propre. On définit aussi pratiquement une distance angulaire et une distance de luminosité, liées à deux méthodes physiques pour mesurer une distance.

### Distance angulaire

La distance angulaire  $D_A$  est définie comme le rapport entre la taille physique  $d$  d'un objet et son diamètre angulaire  $\theta$ . Elle est reliée à  $D_M(z)$  :

$$D_A(z) = \frac{d}{\theta} = \frac{D_M(z)}{1+z}.$$

Dans un univers en expansion, cette distance possède la particularité de ne pas augmenter infiniment avec  $z$ . Un objet de taille  $d$  fixe peut apparaître plus gros s'il est situé à un redshift  $z_1$  qu'à un redshift  $z_2$  plus grand que  $z_1$ .

### Distance de Luminosité :

Dans un univers euclidien, le flux  $F$  d'un objet de luminosité intrinsèque  $L$  situé à une distance  $d$  d'un observateur est donné par  $F = \frac{L}{4\pi d^2}$ . Cette équation suppose que la source rayonne son énergie de manière isotrope. Dans un univers en expansion, la valeur du flux reçu sera différente. En effet, la luminosité de la source vue par un observateur va être différente de sa luminosité intrinsèque à cause de l'expansion de l'univers. Les photons émis par la source pendant un temps  $dt$  vont être reçus par l'observateur pendant un temps plus long  $dt' = dt/a$ . De plus, l'énergie des photons est inversement proportionnelle au facteur d'échelle. La luminosité sera donc réduite d'un facteur  $a^2(t)$ . Au final, l'observateur mesure le flux :

$$F = \frac{La^{-2}}{4\pi D_M^2(a)} \equiv \frac{L}{4\pi D_L},$$

où  $D_L$  est la distance de luminosité qui peut être reliée aux distances  $D_M(z)$  et  $D_A(z)$  :

$$D_L(z) = (1+z)D_M(z) = (1+z)^2D_A(z).$$

### 1.5.3 Evolution de l'Univers :

Tous ces outils ainsi que le modèle standard de la physique des particules, et les observations les plus récentes nous permettent de converger vers un modèle, dit modèle de concordance [98, 99]. Dans ce cadre, le modèle  $\Lambda$ CDM est le modèle cosmologique standard le plus accepté aujourd'hui. Il repose sur le modèle d'un Big Bang, c'est-à-dire sur l'hypothèse d'une singularité



### 1.1.5 Notions de base de la cosmologie

---

primordiale, marquant le temps  $t \rightarrow 0$ , suivi de l'expansion de l'Univers [100, 101]. L'Univers est principalement constitué d'une énergie noire d'équation d'état  $w \sim -1$  et de matière noire froide. L'Univers primordial a une température et une densité extrêmement élevées. La description de la formation et de l'évolution de l'Univers commence à partir du temps de Planck, c'est-à-dire  $10^{-43}$  seconde. Avant cet instant, la densité et la température sont telles que les quatre forces fondamentales<sup>11</sup> sont unifiées en une seule et même force. Aujourd'hui, aucun modèle de grande unification (*GUT*) n'a abouti. Les événements ayant eu lieu avant le temps de Planck ne peuvent donc pas être décrits dans le contexte physique actuel. Puis, l'expansion de l'Univers entraîna un effet de dilution qui fit décroître sa température. Il est difficile de prédire l'évolution exacte de l'univers lorsque sa densité d'énergie était très élevée. Pour de très hautes énergies, on ne peut qu'extrapoler notre compréhension actuelle de la physique. Il n'est pas du tout assuré que la physique microscopique telle que nous la connaissons, soit toujours valable à de telles énergies. Les grandes lignes de la formation et de l'évolution de l'Univers sont les suivantes (Figure 1.4) :

►  $t \sim 10^{-43}$  seconde,  $z \sim 10^{32}$ ,  $T \sim 10^{32}K$ . A ce moment, la gravité se sépare des trois autres forces fondamentales et commence à agir avec l'émission d'ondes gravitationnelles.

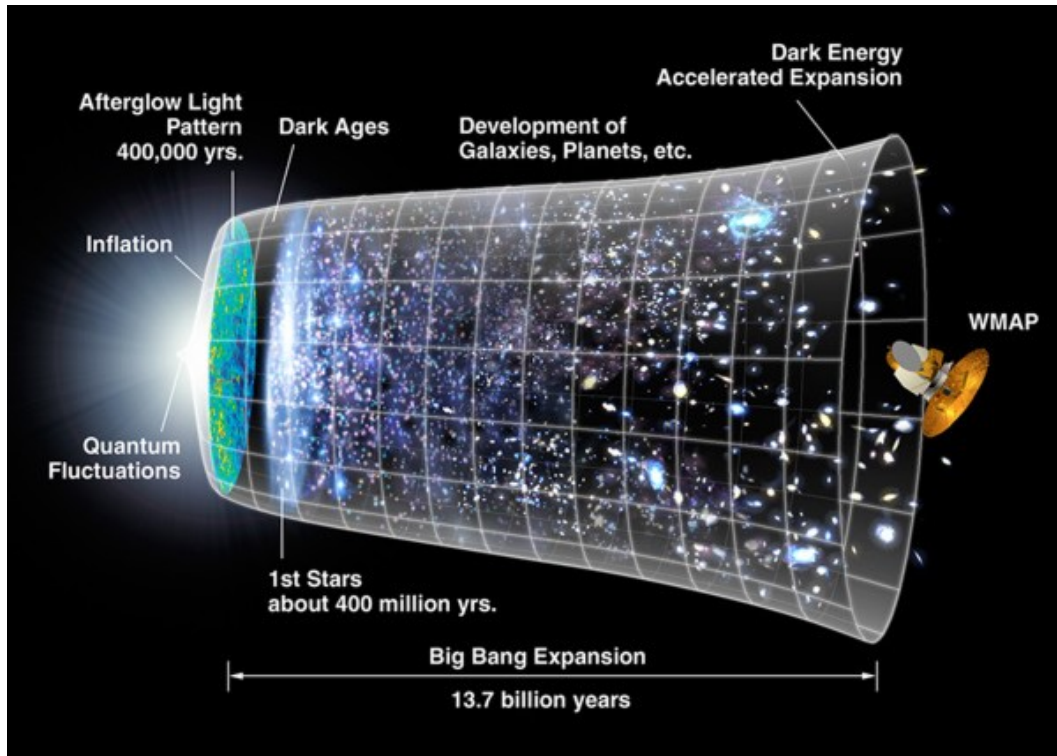
►  $t \sim 10^{-35}$  seconde,  $z \sim 10^{26}$ ,  $T \sim 10^{26}K$ . La force nucléaire forte devient à son tour autonome. Les particules se scindent un quarks et en électrons. La symétrie entre matière et antimatière se rompt et produit une transition de phase. Cette transition de phase provoque alors une inflation, qui dilate l'Univers exponentiellement. Cette hypothèse de l'inflation a été avancée pour expliquer les problèmes d'horizon, de platitude et d'uniformité de l'Univers à grande échelle. En effet, les observations du Fond Diffus Cosmologique (FDC) montrent que l'Univers a été thermalisé sur des échelles plus grandes que l'horizon au moment du découplage, c'est-à-dire a des distances supérieures a celles parcourues par la lumière a un instant  $t$ <sup>12</sup> [106–109]. La courbure de l'Univers étant aujourd'hui proche de zéro, les équations de Friedmann impliquent qu'il faut poser comme condition initiale que l'Univers était proche de la platitude à l'époque de Planck<sup>13</sup>. Enfin, le principe cosmologique qui sert de base au modèle standard, stipule que l'Univers est homogène et isotrope. Or, les structures que nous observons aujourd'hui contredisent ce principe. Dans le modèle standard, ces structures sont issues d'inhomogénéités de densité primordiales. Ces structures étant les dernières à se former, elles n'ont pas le temps

---

11. La gravité, la force nucléaire faible, la force nucléaire forte, et la force électromagnétique

12. Problème de l'horizon ou de causalité

13. Problème de la platitude



**Figure 1.4** – Les différentes phases de l’expansion de l’Univers [95]. Source : NASA/WMAP science team.

de s’effondrer à l’intérieur du rayon de Hubble<sup>14</sup>. La théorie de l’inflation propose une résolution à ces trois problèmes [102–104].

►  $t \sim 10^{-10}$  seconde,  $z \sim 10^{16}$ ,  $T \sim 10^{16}K$ . La force nucléaire faible se sépare finalement de l’interaction électromagnétique. Les quatre forces fondamentales sont ainsi en place et le resteront jusqu’à maintenant.

►  $t \sim 10^{-5}$  seconde,  $z \sim 10^{13}$ ,  $T \sim 10^{13}K$ . La transition de phase quarks-hadrons a lieu, c’est-à-dire que les protons et les neutrons, formés à partir des quarks, deviennent stables [110–112].

►  $10^{-2} \leq t \leq 10^2$  seconde,  $z \sim 10^{10}$ ,  $10^9 \leq T \leq 10^{11}K$ . C’est la nucléosynthèse primordiale [105]. Les premiers noyaux atomiques<sup>15</sup> se forment par collision. La nucléosynthèse est l’un des piliers de la théorie du Big Bang. En effet, elle prédit aux bons ordres de grandeur l’abondance observée des éléments légers dans l’Univers.

►  $t \sim 10000$  ans,  $z \sim 8000$ ,  $T \sim 65000$  K. C’est l’équilibre matière-rayonnement. Jusqu’à

14. Problème de l’homogénéité

15. Deutérium, tritium, hélium et lithium

### 1.1.5 Notions de base de la cosmologie

---

ce moment, l'Univers était dominé par des particules relativistes. La loi d'évolution du facteur d'échelle  $a(t)$  passe de  $a \propto t^{1/2}$  à  $a \propto t^{2/3}$

►  $t \sim 380000 \text{ans}$ ,  $z \sim 1000$ ,  $T \sim 3000 \text{K}$ . Lorsque la température de l'Univers atteint  $\sim 3000 \text{K}$ , la recombinaison a lieu. Les électrons s'associent aux noyaux pour former des atomes neutres stables. L'Univers devient alors transparent. En effet, au dessus de cette température, la matière était ionisée, et les photons étaient diffusés par les électrons par diffusion Thomson. L'Univers était donc opaque. Lors de la recombinaison, les photons se découplent de la matière, et l'image de la surface de dernière diffusion, le FDC est émis.

►  $t \sim 400$  millions d'années,  $z \sim 6 - 15$ ,  $T \sim \text{plusieurs dizaines de } K$ . Lors de la recombinaison, le FDC a rempli l'Univers d'une émission de corps noir rouge, correspondant à une température d'environ  $3000 \text{K}$ . Avec l'expansion, l'énergie associée au FDC s'est diluée, et sa température a diminué. Le spectre du FDC s'est alors décalé vers l'infra-rouge. L'Univers est alors noir à presque toutes les longueurs d'onde. C'est ce que nous appelons les âges sombres. Pendant cette période, seule la gravité est à l'œuvre, et aucun rayonnement électromagnétique n'est émis, si ce n'est la raie à  $21 \text{ cm}$  de l'hydrogène HI. Lorsque les nuages de gaz ont atteint la masse critique de Jeans, ceux-ci se sont effondrés, ont formé les premiers groupes d'étoiles au sein de proto-galaxies, et ont mis fin aux âges sombres. L'énergie dégagée par ces étoiles de population III, ayant des masses de plusieurs centaines de masse solaire, ionise l'Univers. C'est la réionisation.

►  $t \sim 1$  milliard d'années,  $z \sim 5$ ,  $T \sim 15 \text{K}$ . Les grandes structures de l'Univers commencent à se former sous l'effet de la gravitation. La densité de matière moyenne de l'Univers décroît avec son expansion. Vers  $z \sim 2 - 3$ , la densité atteint une valeur suffisamment basse pour que l'énergie noire contre-balance la gravité. L'énergie noire, qui peut être associée à un fluide de pression négative, est alors devenue la composante principale de la dynamique de l'Univers, et a commencé à accélérer son expansion. La loi d'évolution du facteur d'échelle  $a(t)$  passe de  $a \propto t^{2/3}$  à  $a \propto e^{Ht}$ . La formation des amas de galaxies a lieu à la même période. Les amas sont donc sensibles à l'énergie noire.

► Aujourd'hui,  $z \sim 0$ ,  $T \sim 2,7 \text{K}$ . L'univers contient de grandes structures telles que des galaxies et des amas de galaxies. Il est principalement constitué d'énergie noire et son expansion est accélérée. Il est inhomogène à petite échelle, et est environné par le FDC, qui est aujourd'hui un rayonnement de corps noir homogène et isotrope d'une température moyenne d'environ  $2,7 \text{K}$  [12, 13].

## 1.6 Limites du modèle standard

Le modèle de Big Bang chaud que nous venons de présenter et que nous appellerons désormais “scénario standard” donne une image assez convaincante de l’histoire récente de l’Univers, mais cependant certains problèmes subsistent. La physique qui régit l’Univers est a priori connue jusqu’aux plus hautes énergies accessibles en laboratoire (quelques centaines de  $GeV$ ). On peut donc considérer comme fiable le modèle présenté jusqu’à ces énergies-là<sup>16</sup>. Aux énergies plus élevées, le modèle est moins fiable, mais il est raisonnable d’espérer qu’on sait extrapoler, du moins qualitativement, la physique des accélérateurs jusqu’à l’énergie de Grande Unification ( $GUT$ ), i.e. environ  $10^{16} GeV$ . Au-delà, et certainement au-delà de l’énergie de Planck ( $10^{19} GeV$ ) où on s’attend à voir des effets de gravité quantique, la physique est beaucoup plus spéculative. Dans cette section, on décrit ces problèmes, qu’on résoudra dans le chapitre suivant en introduisant l’inflation cosmique.

### 1.6.1 Problème de l’horizon

Nous définissons l’horizon comobile des particules comme la distance maximale que la lumière peut parcourir entre un temps initial  $t_i$  et un temps  $t$  :

$$\chi_p(\tau) = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (1.42)$$

Deux particules distantes de plus de  $\chi_p$  n’ont donc jamais pu être en contact causal [143, 144]. Pendant la période où le rayonnement puis la matière dominant, l’horizon des particules est une fonction croissante du facteur d’échelle :

$$\chi_p(\tau) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{a'H(a')} = \int_0^a d \ln a' \left( \frac{1}{a'H(a')} \right) \propto \begin{cases} a & \text{DR} \\ a^{1/2} & \text{DM} \end{cases} \quad (1.43)$$

où nous avons exprimé ici l’horizon comobile comme une intégrale sur le rayon de Hubble comobile,  $(aH)^{-1}$ .

Pendant les phases conventionnelles du modèle du Big Bang ( $w \geq 0$ ),  $(aH)^{-1}$  croît de manière monotone ainsi donc que l’horizon comobile. Ceci implique que les échelles comobiles (indépendantes du temps par définition) qui rentrent sous l’horizon actuellement étaient largement hors de l’horizon à l’époque du découplage. Plus précisément, on peut montrer que les régions

---

16. Qui incluent notamment la nucléosynthèse, l’annihilation électrons-positrons et le découplage des neutrinos

en contact causal à cette époque sont vues actuellement sous un angle d'environ  $1^\circ$  [10, 120]. Cependant, le ciel est très homogène à grande échelle. La température du fond diffus cosmologique est la même dans toutes les directions avec une précision de  $10^{-5}$ . Il est surprenant que des taches célestes du ciel se trouvent à la même température, même si elles sont déconnectées causalement et la thermalisation de l'univers entier n'était pas possible. Ceci constitue le problème de l'horizon.

### 1.6.2 Problème de la platitude

Les observations actuelles indiquent que l'univers est extrêmement plat aujourd'hui. Considérons maintenant l'équation de Friedmann où la constante cosmologique est nulle avec le terme de courbure

$$H^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.44)$$

La division des deux côtés par le paramètre de Hubble donne

$$\Omega(a) - 1 = \frac{k}{(aH)^2} \quad (1.45)$$

où

$$\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{cr}(a)} \quad (1.46)$$

et

$$\rho_{cr}(a) \equiv 3Ha^2. \quad (1.47)$$

Dans la cosmologie standard, Pendant les périodes dominées par la matière ou le rayonnement,  $aH$  est une fonction décroissante.  $\Omega_k = 0$  est donc une solution instable. Toute déviation à la platitude dans les conditions initiales de notre Univers est alors amplifiée dans le modèle standard.

Pour observer  $\Omega_k < 10^{-3}$  aujourd'hui, il faudrait qu'à l'époque de la nucléosynthèse primordiale ( $\sim 1s$ ),  $|\Omega_k| < 10^{-16}$ , ( $10^{-27}$  à l'époque électrofaible,  $10^{-61}$  à l'ère de Planck [10, 11, 121]).

Ces conditions initiales n'apparaissent pas naturelles, car elles requièrent un ajustement fin<sup>17</sup> des conditions initiales pour expliquer la platitude de notre univers actuel.

---

<sup>17</sup> *fine tuning en anglais*

### 1.6.3 Problème des reliques

Selon le paradigme moderne de la physique des particules, les lois de la nature étaient unifiées dans le passé avant que certaines symétries de jauge ne soient brisées. Lors de ces transitions de phase, des défauts topologiques ont pu se former, comme des monopoles ou des cordes cosmiques [12]. Toute théorie de grande unification basée sur un groupe de Lie simple en particulier produit des monopoles. La théorie des cordes prédit également l'existence de particules supersymétriques comme des gravitinos ou des particules de Kaluza-Klein. La densité d'énergie de ces particules massives décroît comme  $a^{-3}$  quand la température devient inférieure à leur masse. Comme la densité d'énergie de la radiation décroît comme  $a^{-4}$ , ces reliques peuvent, si leur durée de vie est suffisamment longue et selon leur densité initiale, dominer le contenu matériel de l'univers et contredire de nombreuses observations cosmologiques comme celles de l'abondance des éléments. Ce problème est connu sous le nom de problème des reliques ou problème des monopoles.

Dans une classe très générale de modèles de physique des hautes énergies, on crée des monopoles dont les sections efficaces sont très faibles. Ainsi, il n'existe pas de mécanisme qui permette de faire disparaître ces monopoles, qui restent en nombre élevé au cours du temps, et finissent par se comporter comme de la matière non relativiste. Il est donc possible qu'à un moment donné une partie significative de l'énergie contenue dans l'Univers ait été transférée à de la matière non relativiste interagissant faiblement. L'échelle d'énergie d'une telle transition de phase est probablement très élevée<sup>18</sup> et s'est donc produite à très haut redshift ( $z > 10^{15}$ ). Or la transition radiation-matière est beaucoup plus récente ( $z \simeq 10^4$ ). Il faut donc soit imaginer qu'il n'y a pas de transition de phase produisant ce type de monopoles (ce qui n'est a priori pas naturel), soit imaginer un processus qui diminue de façon drastique la densité de ces objets. Notons aussi qu'il existe d'autres types de défauts qui eux aussi peuvent générer des catastrophes cosmologiques. Il faut donc trouver un mécanisme pour se débarrasser de toutes ces reliques massives produites au cours de l'histoire de l'Univers.

Dans ce chapitre, on a brièvement rappelé les avancées de la cosmologie d'un point de vue historique. On a introduit les bases observationnelles et formelles de la théorie du Big-Bang. Ce modèle est en parfait accord avec les observations, mais quelques problèmes persistent en ce qui concerne ses conditions initiales. Le mécanisme de l'inflation, dont nous allons donner les grandes lignes dans le chapitre suivant, permet d'apporter une réponse au problème des conditions initiales tout en résolvant les problèmes de platitude d'horizon et d'isotropie du big-bang chaud.

---

18. Supérieure à  $100\text{GeV}$ , car sinon elle aurait été vue dans les accélérateurs de particules.

---

---

# Chapitre 2

---

## Théorie de l'inflation standard

Ce chapitre est consacré au paradigme inflationnaire en tant que solution aux énigmes cosmologiques classiques abordées dans le chapitre précédent. Nous présentons les caractéristiques de base de l'inflation, et comment cela modifie la structure causale de l'espace-temps et sa mise en œuvre à travers un champ scalaire, en roulement lent. Ensuite, nous discutons des implications du traitement de ce scénario par la mécanique quantique : les fluctuations du point zéro du champ inflaton deviennent l'origine fondamentale de ces perturbations que nous pouvons mesurer dans le ciel sous la forme des anisotropies de température du CMB et des ondes gravitationnelles primordiales. Finalement, nous présentons les dernières données de Planck, qui fournissent des contraintes strictes sur la dynamique fondamentale de l'inflation.

### 2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard

#### 2.1.1 Motivation de l'inflation

Avant les années 1980, on s'est rendu compte qu'il y avait certains problèmes avec la cosmologie standard du Big Bang. Ces problèmes sont liées au fait que le rayon de Hubble comobile est toujours croissant dans ce modèle. L'inflation est considérée actuellement comme la seule théorie permettant de résoudre la plupart de ces problèmes. L'inflation est le nom donné à une période très courte au début de l'univers au cours de laquelle le rayon de Hubble comobile  $(aH)^{-1}$  décroît [69, 133–135].

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0 \quad (2.1)$$

Et en utilisant la relation

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} = -\frac{\ddot{a}}{(aH)^2} \quad (2.2)$$

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

on peut facilement montrer que la décroissance du rayon de Hubble implique directement une expansion accélérée de l'univers donnée par :

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \quad (2.3)$$

donc

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} = -\frac{\ddot{a}}{(aH)^2} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \quad (2.4)$$

Le premier modèle d'inflation a été proposé en 1979 par Starobinsky, mais ce modèle était compliqué et ne s'est pas étendu à l'extérieur de l'Union soviétique à cette époque [102]. L'inflation a été correctement inventée en 1981, quand Alan Guth a publié indépendamment un article, et inventé le terme «inflation»[102]. Dans ce document, une interprétation physique claire a été proposée comme solution aux problèmes de la cosmologie standard, qui sera discutée brièvement ci-dessous. Il s'agissait principalement de problèmes de l'horizon et de la platitude, mais il a également mentionné le problème de monopole.

### 2.1.2 Solutions aux problèmes du Big Bang chaud

Le scénario de l'inflation offre un cadre explicatif et prédictif qui permet de donner des solutions élégantes à ces problèmes. Il consiste en une phase d'expansion exponentiellement accélérée qui aurait pris place juste après la singularité. La seule condition étant que cette dernière dure assez longtemps.

**Résolution du problème de la platitude :** Il est clair d'après l'équation de Friedmann

$$|\Omega(a) - 1| = \frac{|k|}{(aH)^2}. \quad (2.5)$$

que le point  $\Omega = 1$  est un attracteur durant l'inflation, i.e. pendant que l'horizon de Hubble comobile décroît. Le problème de la platitude est donc résolu si l'inflation dure suffisamment longtemps pour que la petite valeur de  $|\Omega(a) - 1|$  à la fin de l'inflation ne soit pas compensée par sa dérive ultérieure pendant les ères du Big Bang chaud [25]. Pour quantifier la durée de l'inflation, on utilise la quantité, nommée nombre de "e-folds" d'inflation<sup>1</sup>, qui représentent le logarithme du rapport des facteurs d'échelle, après et avant l'inflation :

$$N \equiv \ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right) \quad (2.6)$$

---

1. Nous utilisons le terme anglais e-fold en raison de son usage très courant, y compris dans un contexte francophone.



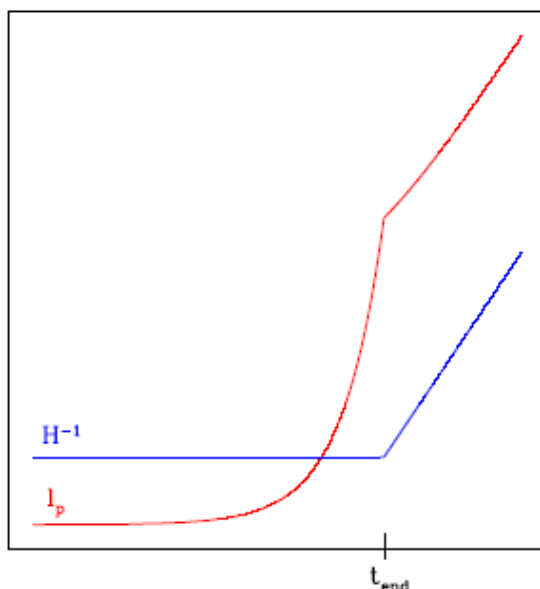
## 2.2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard

où  $a_i$  et  $a_f$  désignent respectivement les valeurs du facteur d'échelle au début et à la fin de l'inflation. En ce qui concerne le problème de la platitude, supposons qu'avant l'inflation la densité de courbure soit grande, c'est-à-dire  $\Omega_k(t_i) \sim O(1)$ , et qu'après l'inflation elle soit inférieure ou égale à  $10^{-60}$ , c'est à dire  $|\Omega_k(t_f)| \leq 10^{-60}$ . On peut constater que :

$$\left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| = \left( \frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N}. \quad (2.7)$$

Alors, pour obtenir les bonnes valeurs finale et initiale de la densité de courbure, il suffit que l'expansion ait un nombre d'e-folds supérieur à 70.

**Résolution du problème de l'horizon :** Pendant l'inflation, l'expansion est accélérée donc



**Figure 2.1** – Solution au problème de l'horizon (coordonnées physiques vs. temps) : durant l'inflation, l'horizon de particule,  $l_p$  croît exponentiellement, tandis que le paramètre de Hubble est constant. Alors après une phase inflationnaire suffisamment longue, l'horizon de particule est beaucoup plus grand que sa valeur sans inflation que serait  $l_p \sim H^{-1} \sim t$ .

$\ddot{a}(t) > 0$ , dans ce cas, le rayon de Hubble, c'est-à-dire les échelles observables, diminue avec le temps. En conséquence, deux points en contact causal avant l'inflation peuvent être séparés par une distance plus grande que le rayon de Hubble à la fin de l'inflation [24]. Pour régler le problème de l'horizon, il faut au moins que la taille de l'univers observable au facteur d'échelle  $a_0$  soit égale à la taille d'une région causalement liée au début de l'inflation, c'est-à-dire au facteur d'échelle  $a_i$ . Donc si l'inflation se termine à l'échelle de la Grande Unification ( $T_f \sim 10^{16} GeV$ ),

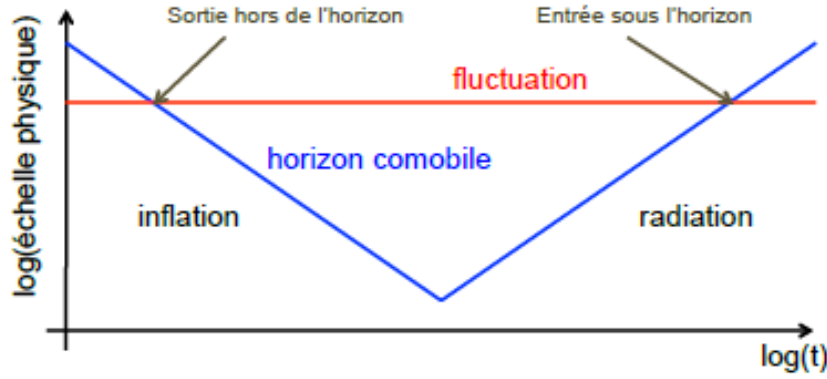
## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

il faut que

$$N \sim \ln \left( \frac{T_0}{T_f} \frac{d_{H_0}(t_i)}{d_{H_i}(t_i)} \right) \geq 57, \quad (2.8)$$

où  $T_0$  est la température des photons aujourd'hui et pour laquelle nous avons supposé  $d_{H_i}(t_i) \sim \frac{l_p T_p}{T_f}$ , où  $l_p$  et  $T_p$  sont respectivement la longueur de Planck et la température de Planck. Si cette condition est satisfaite, l'univers entier observable peut ainsi émerger de la même région causale avant le début de l'inflation.

Cela peut être illustré en considérant les distances physiques suivantes, où on compare la



**Figure 2.2** – Cette courbe représente l'évolution du rayon de Hubble comobile ( $aH^{-1}$ ) pendant et après l'inflation, une échelle comobile donnée est initialement sous le rayon de Hubble, le traverse pendant l'inflation puis rentre à nouveau dessous dans l'ère de la radiation ou de la matière [41].

distance pendant l'inflation et la distance séparant la fin de l'inflation à l'instant actuelle :

$$a(t_{rec}) \int_{t_{inf}}^{t_{rec}} \frac{dt}{a(t)} \gg a(t_0) \int_{t_{rec}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.9)$$

où  $t_{inf}$  indique le début de l'inflation, et  $t_{rec}$  signale sa fin.  $t_0$  est l'instant actuel.

Sachant que le facteur d'échelle prend la forme  $a(t) \sim e^{Ht}$  dans la phase d'inflation et  $a(t) \sim t^{2/3}$  dans le modèle standard, en supposant que  $t_{inf}$  est l'instant initial, donc  $t_{rec} = \Delta t$  :

$$e^{H\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{e^{Ht}} \gg t_0^{2/3} \int_0^{t_0} \frac{dt}{t^{2/3}}. \quad (2.10)$$

donc

$$H^{-1}(e^{H\Delta t} - 1) \gg 3t_0 = 2H^{-1}$$

---

## 2.2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard

---

Donc, le point d'émission se trouve aujourd'hui à une distance trois fois supérieure à ce que l'on pourrait croire sans calcul. La taille de l'Univers aujourd'hui est donc de l'ordre de  $13 \times 3 \approx 40$  milliards d'années-lumière, ou  $13Mpc$ . En conséquence, le problème de l'horizon sera résolu pour des durées d'inflation ( $\Delta t$ ) assez longues.

De plus la dilatation très rapide des fluctuations quantiques de l'Univers primordial fait apparaître des fluctuations de densité macroscopiques compatibles avec celles observées dans le rayonnement fossile et compatibles avec la formation des structures de l'univers, ce qui résout le problème de l'homogénéité.

**Résolution du problème de monopôles :** lors de l'inflation, le facteur d'échelle augmente d'un facteur  $10^{26}$ , la densité énergétique des monopôles générés avant l'inflation diminue d'un facteur  $10^{78}$ . Cela implique clairement que même si une grande quantité de monopôles est générée avant l'inflation, ils ne peuvent pas affecter l'évolution de l'Univers observable. Ainsi, la contribution de ces particules devient vite négligeable, résolvant ainsi le problème des monopôles si les transitions de phase les générant ont lieu suffisamment tôt pendant l'inflation. Sur cette image, les défauts topologiques ne sont donc générés qu'avant l'inflation. En particulier, des monopôles sont générés lors des transitions de phase aux échelles  $GUT$  ( $T \geq 10^{15} GeV$ ). En conséquence, si la température de réchauffage  $T_{rh}$  est inférieure à  $10^{15} GeV$ , nous générons des particules à haute énergie, évitant ainsi la production de reliques comme les gravitinos [22, 23]. Et enfin la dilatation rapide de l'espace-temps a pour effet de lisser l'espace et d'en diminuer la courbure.

La courbure résultante après l'inflation est forcément voisine de 0, ce qui résout le problème de la platitude.

### 2.1.3 Dynamique de l'inflation

Le moyen le plus simple de réaliser un processus inflationnaire est d'imaginer que l'Univers primordial est rempli d'un champ scalaire  $\phi$ , souvent appelé inflaton<sup>2</sup>. Ici nous ne spécifions pas la nature physique de l'inflaton. Mais on le considère plutôt comme un paramètre qui décrit l'évolution de la densité d'énergie pendant l'inflation. Ceci est justifié en physique des particules qu'aucun champ scalaire fondamental n'a encore été observé, cela est non seulement une faiblesse de l'inflation mais aussi une perspective de découverte qu'elle ouvre.

L'action d'un champ scalaire couplé de façon minimale à la gravitation, avec un potentiel

---

2. Notons qu'aucun champ scalaire élémentaire n'a encore été mis en évidence bien que de forts soupçons reposent sur le boson de Higgs..

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

d'auto-interaction  $V(\phi)$ , est donnée par :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.11)$$

où  $V(\phi)$  est le potentiel qui décrit l'auto-interaction de l'inflaton. Le tenseur énergie-impulsion correspondant est donné par :

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right); \quad (2.12)$$

et l'équation du mouvement de  $\phi$  est donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V'(\phi) = 0, \quad (2.13)$$

où  $V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$ . On se place en métrique FLRW, les symétries de l'espace-temps imposent à tout champ scalaire d'être homogène, Le tenseur énergie-impulsion (2.12) se comporte comme un fluide parfait de densité d'énergie et de pression données par [125] :

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.14)$$

$$T_{ii} = p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.15)$$

L'équation d'état correspondante

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (2.16)$$

montre donc qu'un champ scalaire est susceptible de nourrir une phase d'inflation si son énergie potentielle domine son énergie cinétique, c.à.d pour  $\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \ll 1$  nous obtenons  $\omega_\phi = -1$ , ce qui réalise un facteur d'échelle en croissance exponentielle.

Ensuite, nous étudions l'évolution de l'inflaton  $\phi(t)$  et du facteur d'échelle  $a(t)$ . En remplaçons  $\rho_\phi$  de (2.14) dans l'équation de Friedmann, (1.12), nous obtenons :

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.17)$$

## 2.2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard

---

On dérive cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2} [\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}] \quad (2.18)$$

L'équation de Friedmann (1.12),  $H^2 = (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$ , et l'équation de continuité (1.7),  $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$ , impliquent ensemble que [131, 132] :

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{pl}^2}(\rho + 3P) = -\frac{H^2}{2}\left(1 + \frac{3P}{\rho}\right). \quad (2.19)$$

En substituant  $\rho_\phi$  et  $p_\phi$  dans la deuxième équation de Friedmann (2.19),  $\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2}(\rho + P)$ , on obtient :

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2}\dot{\phi}^2. \quad (2.20a)$$

Notez que  $\dot{H}$  provient de la densité d'énergie cinétique. La combinaison (2.20a) avec (2.18) conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (2.21)$$

C'est l'équation d'évolution pour le champ scalaire.

### 2.1.4 Inflation en roulement lent

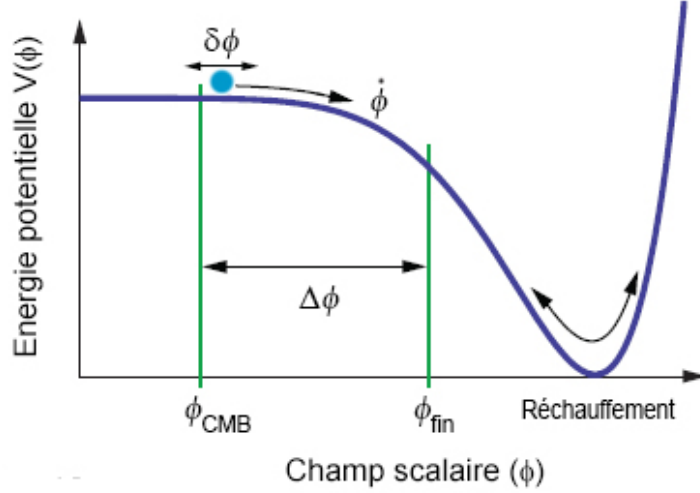
Si  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , l'inflation est en régime de roulement lent<sup>3</sup>, par analogie avec une boule roulant lentement en haut d'une colline, ayant alors une énergie cinétique négligeable devant l'énergie potentielle.

Alors, d'après (2.14) et (2.15), on a  $P = -\rho$ . L'inflaton se comporte donc comme un fluide parfait à pression négative. Cette période d'inflation ne doit pas être instantanée et doit durer suffisamment longtemps. Afin d'assurer une longue période d'inflation, nous devons donc exiger que la dérivée seconde soit faible :  $\ddot{\phi}(t) \ll 3H(t)\dot{\phi}(t)$ . Les équations (2.17) et (2.21) se simplifient alors en [127] :

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}V(\phi). \quad (2.22)$$

---

3. Slow-roll en anglais.



**Figure 2.3** – Exemple de potentiel d'inflation. L'accélération se produit lorsque l'énergie potentielle du champ,  $V(\phi)$ , l'emporte sur son énergie cinétique,  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ . L'inflation se termine à  $\phi_f$ , lorsque l'énergie cinétique devient comparable à l'énergie potentielle,  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx V(\phi)$  [41].

et

$$3H(t)\dot{\phi}(t) \simeq -V'(\phi), \quad (2.23)$$

On a alors  $H$  est presque constante, c'est-à-dire  $a(t) \simeq e^{Ht}$ . Pendant l'inflation, l'espace-temps est donc quasi-De Sitter. Les paramètres de roulement lent ont été introduits pour qualifier les conditions sur les dérivées première et seconde de l'inflaton. Il existe deux définitions logiquement distinctes des paramètres de roulement lent qui apparaissent dans la littérature. La première définition est en termes de la dynamique des champs [126] :

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \left[ \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right]^2, \quad (2.24)$$

$$\eta \equiv \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \frac{H''(\phi)}{H(\phi)}. \quad (2.25)$$

$$\xi_V^2 \equiv \frac{M_{pl}^2}{4\pi} \left( \frac{H'(\phi)H'''(\phi)}{H^2(\phi)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

$$\delta \equiv \eta - \epsilon. \quad (2.27)$$

Les conditions, dites de roulement lent,  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ,  $|\ddot{\phi}(t)| \ll |3H(t)\dot{\phi}(t)|$  assurent donc une période d'inflation prolongée dans le cas d'un univers dominé par un champ scalaire muni d'un terme cinétique standard. Le seul paramètre libre, qui détermine si un tel champ scalaire peut

## 2.2.1 Formalisme Générale de la théorie de l'inflation standard

entrer dans ce régime de roulement lent est évidemment son potentiel. On peut donc réexprimer les conditions de roulement lent comme des contraintes sur la forme du potentiel inflationnaire [127]. Introduisant

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{16} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad (2.28)$$

$$\eta_V \equiv \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \left( \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right), \quad (2.29)$$

$$\xi_V^2 \equiv \left( \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \right)^2 \left( \frac{V'(\phi)V'''(\phi)}{V^2(\phi)} \right). \quad (2.30)$$

Le paramètre  $\epsilon_V$  permet de regarder de combien varie le paramètre de Hubble durant l'inflation. Lorsqu'on a un champ scalaire dont le potentiel vérifie  $\epsilon_V, |\eta_V|, |\xi_V^2| \ll 1$ , on est dans le cas d'une inflation à roulement lent. Dans ces conditions, il est facile de montrer que les deux définitions sont liées :

$$\epsilon \approx \epsilon_V, \quad \eta \approx \eta_V - \epsilon_V. \quad (2.31)$$

Les paramètres de roulement lent permettent ainsi de ne pas avoir à décrire explicitement la forme du potentiel et qui sont infinitésimaux sur l'attracteur. Les prédictions des modèles d'inflation seront données en fonction de ces paramètres de roulement lent. L'intérêt de ne pas utiliser une pure constante cosmologique réside dans le fait que la sortie du régime d'inflation se fait lorsque la condition de roulement lent n'est plus satisfaite et que le champ est dans la partie basse de son potentiel. L'avantage de lui donner une structure dynamique à travers un champ réside aussi dans le fait qu'on va s'intéresser à la dynamique des perturbations  $\delta\phi$ . Dans la section précédente, nous allons voir comment évoluent ces perturbations mais aussi par quel moyen nous pouvons obtenir des prédictions en fixant des conditions initiales adéquates pour la perturbation du champ scalaire.

Dans l'approximation de roulement lent, le nombre de e-folds avant la fin de l'inflation peut être exprimé par :

$$N_{tot} \equiv \int_{a_i}^{a_f} d \ln a \equiv \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt, \quad (2.32)$$

où  $t_i$  et  $t_f$  sont définis comme les moments où  $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_f) \equiv 1$ . Dans le régime de roulement lent, nous pouvons utiliser

$$H dt = \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = -\frac{3H}{V'} \cdot H d\phi \approx \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{|d\phi|}{M_{pl}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{pl}} \quad (2.33)$$

Le résultat (2.32) peut être réécrit sous la forme :

$$N_{tot} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{|d\phi|}{M_{pl}} \equiv \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{pl}} \quad (2.34)$$

où  $\phi_i$  et  $\phi_f$  sont définis comme les limites de l'intervalle où  $\epsilon_V \prec 1$ .

La fin de l'inflation se produit lorsque l'énergie potentielle du champ d'inflaton devient plus petite que son énergie cinétique. L'énergie du champ, qui se met à osciller dans son potentiel, est alors transférée du champ aux particules selon le mécanisme de reheating responsable de la création des particules présentes aujourd'hui, et dont nous ne parlerons pas dans la suite.

## 2.2 Classification des modèles inflationnaires

Depuis que les premiers modèles ont été définis, un grand nombre de modèles a été proposé. Donner un examen complet de tous ces modèles dépasse le cadre de ce travail. Une discussion approfondie de la majeure partie des modèles inflationnaires existants peut être trouvée dans [50]. Il convient de définir un schéma général de classification, ou «zoologie», pour les modèles d'inflation, qui peuvent être grossièrement divisés en trois classes en fonction des caractéristiques du potentiel : les modèles à *petit champ*, les modèles à *grand champ*, les modèles *hybrides* [38–48]. Un potentiel générique à un seul champ peut être caractérisé par deux échelles de masse indépendantes : une "hauteur"  $\Lambda^4$  correspondant à la densité d'énergie du vide et une "largeur"  $\mu$  correspondant à la variation de la valeur du champ  $\Delta\phi$  pendant l'inflation :

$$V(\phi) = \Lambda^4 f\left(\frac{\phi}{\mu}\right).$$

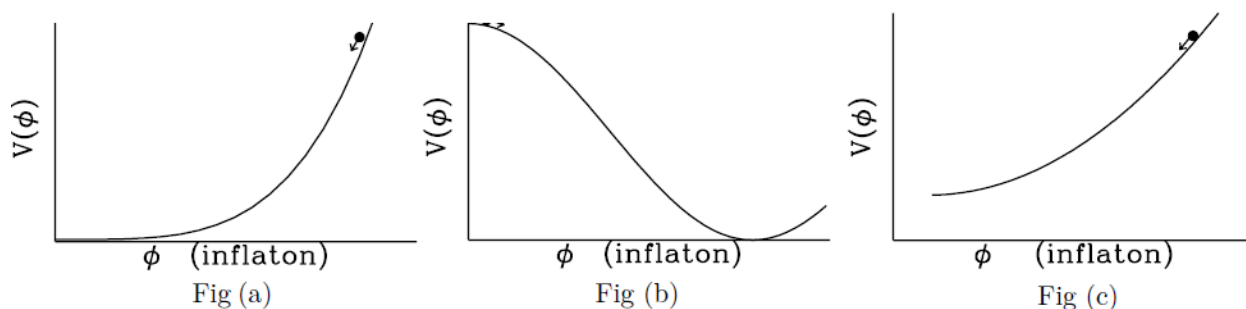
Différents modèles ont des formes différentes pour la fonction  $f$ . Décrivons maintenant brièvement les différentes classes de modèles.

### 2.2.1 Modèles à grands champs

Les modèles à grand champ sont des potentiels typiques du scénario d'inflation "chaotique" [49], dans lequel le champ scalaire est déplacé du minimum du potentiel par une quantité généralement de l'ordre de la masse de Planck. De tels modèles sont caractérisés par  $V''(\phi) > 0$  et  $0 < \eta \leq \epsilon$ . Les potentiels génériques à grand champ que nous considérons sont les potentiels polynomiaux  $V(\phi) = \Lambda^4 (\phi/\mu)^p$  et les potentiels exponentiels,  $V(\phi) = \Lambda^4 \exp(\phi/\mu)$ . Dans le scénario d'inflation chaotique, on suppose que l'univers a émergé d'un état gravitationnel



## 2.2.2 Classification des modèles inflationnaires



**Figure 2.4** – Illustrations schématiques de l'énergie potentielle de l'inflaton.

Fig (a) illustre un modèle «grand champ». Fig (b) illustre un modèle «à petit champ». Fig (c) illustre un exemple d'inflation hybride [92].

quantique avec une densité d'énergie comparable à celle de la densité de Planck. Ceci implique que  $V(\phi) \approx M_{\text{Pl}}^4$  et résulte en un terme de frottement important dans l'équation de Friedmann. Par conséquent, l'inflaton va lentement réduire son potentiel. La condition d'inflation est donc satisfaite et le facteur d'échelle augmente comme

$$a(t) = a_{\text{I}} e^{\left( \int_{t_{\text{I}}}^t dt' H(t') \right)}.$$

Le modèle d'inflation chaotique le plus simple est celui d'un champ libre de potentiel quadratique,  $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$ , où  $m$  représente la masse de l'inflaton. Pendant l'inflation, le facteur d'échelle augmente à mesure que

$$a(t) = a_{\text{I}} e^{2\pi G_{\text{N}}(\phi_{\text{I}}^2 - \phi^2(t))}$$

et l'inflation se termine lorsque  $\phi = \mathcal{O}(M_{\text{Pl}})$ . Si l'inflation commence lorsque  $V(\phi_{\text{I}}) \approx M_{\text{Pl}}^4$ , le facteur d'échelle augmente d'un facteur  $\exp(4\pi M_{\text{Pl}}^2/m^2)$  avant que l'inflaton atteigne le minimum de son potentiel. Cela implique que le volume de l'univers augmentera d'un facteur  $Z^3 \approx e^{3 \times 10^{12}}$ , ce qui est plus que suffisant pour résoudre les problèmes du modèle du big bang.

### 2.2.2 Modèles à petits champs

Les modèles à petits champs sont les types de potentiels qui résultent naturellement de la rupture spontanée de la symétrie tels que les modèles originaux de "nouvelle" inflation et

des pseudo Nambu-Goldstone modes<sup>4</sup> [52–54]. Le champ commence à partir d'un équilibre instable<sup>5</sup> et ramène le potentiel à un minimum stable.

Les modèles à petit champ sont caractérisés par  $V''(\phi) < 0$  et  $\eta < 0 < \epsilon$ . Les potentiels génériques de petit champ que nous considérons sont de la forme  $V(\phi) = \Lambda^4 [1 - (\phi/\mu)^p]$ [51], qui peut être considérée comme la plus faible extension de Taylor d'un potentiel arbitraire sur l'origine [55].

### 2.2.3 Modèles hybrides

Le scénario hybride apparaît fréquemment dans les modèles qui incorporent l'inflation dans la supersymétrie et la supergravité [56–60]. Dans un modèle d'inflation hybride typique, le champ scalaire responsable de l'inflation évolue vers un minimum avec une énergie sous vide non nulle. La fin de l'inflation résulte de l'instabilité dans un deuxième domaine. De tels modèles sont caractérisés par  $V''(\phi) > 0$  et  $0 < \epsilon < \delta$ . Nous considérons les potentiels génériques pour l'inflation hybride de la forme  $V(\phi) = \Lambda^4 [1 + (\phi/\mu)^p]$ . La valeur du champ à la fin de l'inflation est déterminée par une autre physique. Il existe donc un second paramètre libre caractérisant ces modèles.

Cette énumération de modèles n'est certainement pas exhaustive. Il existe un certain nombre de modèles à un seul champ qui ne rentrent pas bien dans ce schéma, par exemple les potentiels logarithmiques  $V(\phi) \propto \ln(\phi)$  typiques de la supersymétrie [61–65]. Un autre exemple concerne les potentiels avec des puissances négatives du champ scalaire  $V(\phi) \propto \phi^{-p}$  utilisés dans l'inflation intermédiaire et l'inflation supersymétrique dynamique [66, 67]. Ces deux cas nécessitent un champ auxiliaire pour mettre fin à l'inflation et sont mieux classés en tant que modèles hybrides, mais relèvent de la classe des petits domaines. Cependant, les trois modèles sont classés par la relation entre les paramètres de roulement lent comme  $0 < \eta \leq \epsilon$  (*grand champ*),  $\eta < 0 < \epsilon$  (*petit champ*) et  $0 < \epsilon < \delta$  (*hybride*) semblent être assez bonnes pour comparer les attentes théoriques avec les données expérimentales.

## 2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

L'un des grands succès de l'inflation, en plus de résoudre les problèmes du modèle standard, elle donne lieu à une série de prédictions sur les fluctuations : Certaines sont génériques, d'autres portant notamment sur la valeur exacte des indices spec-

---

4. Inflation naturelle.

5. Pris pour être à l'origine.

## 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

---

traux. En effet, comme dans toute théorie quantique des champs, les relations d'incertitudes stipulent que pendant des temps très courts, de grandes quantités d'énergie peuvent apparaître. Ces oscillations quantiques du vide sont la source de perturbations dans l'inflaton [128], qui vont évoluer et créer des perturbations de la courbure à la fin de l'inflation, elles-mêmes à l'origine des fluctuations dans la distribution de la matière, du rayonnement etc. L'intérêt est de pouvoir décrire ces perturbations uniformément à l'aide de leur spectre de puissance.

Dans cette section, On va étudier l'évolution des perturbations pendant l'inflation et prédire leur spectre de puissance à la fin de l'inflation, et on le calcul dans le cadre de l'approximation du roulement lent.

### 2.3.1 Fluctuations quantiques d'un champ scalaire non massif au cours de l'inflation.

Nous choisissons le champ scalaire  $\chi$  de telle sorte qu'il soit non massif, et Développant le en mode de Fourier

$$\delta\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_{\mathbf{k}}(t), \quad (2.35)$$

nous pouvons écrire l'équation pour les fluctuations comme

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + 3H \delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2} \delta\chi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.36)$$

nous étudierons le comportement de la solution de cette équation (2.36), il y a deux cas à discuter :

i- Pour les longueurs d'onde comprises dans le rayon de Hubble,  $\lambda \ll H^{-1}$ , le nombre d'onde correspondant vérifie la relation  $k \gg aH$ . Dans ce régime, nous pouvons négliger le terme de frottement  $3H \delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}}$  dans l'équation (2.36), qui se réduit à :

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2} \delta\chi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.37)$$

qui est l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique. Bien entendu, le terme de fréquence  $k^2/a^2$  dépend du temps car le facteur d'échelle  $a$  croît de manière exponentielle. Sur le plan qualitatif, cependant, on s'attend à ce que la fluctuation oscille lorsque la longueur d'onde de la fluctuation se situe dans l'horizon.

ii- Pour les longueurs d'onde supérieures au rayon de Hubble,  $\lambda \gg H^{-1}$ , le nombre d'onde correspondant vérifie la relation  $k \ll aH$  et le terme  $k^2/a^2$  peut être négligé dans l'équation

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

(2.36), qui se réduit à :

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.38)$$

ce qui nous informe que  $\delta\chi_{\mathbf{k}}$  reste constant, sur les échelles super-Hubble.

Nous avons donc la description suivante : prenons une fluctuation donnée dont la longueur d'onde initiale  $\lambda \sim a/k$  est dans le rayon de Hubble. Les fluctuations oscillent jusqu'à ce que la longueur d'onde devienne de l'ordre de l'échelle de l'horizon. Lorsque la longueur d'onde traverse le rayon de Hubble, la fluctuation cesse d'osciller et se gèle.

Nous allons étudier l'évolution de la fluctuation de manière plus quantitative. Pour ce faire, nous effectuons le changement suivant

$$\delta\chi_{\mathbf{k}} = \frac{\delta\sigma_{\mathbf{k}}}{a} \quad (2.39)$$

et nous travaillons dans le temps conforme  $d\tau = dt/a$ . Pour le moment, nous résolvons le problème pour une expansion pure de Sitter et prenons le facteur d'échelle qui croît de façon exponentielle sous la forme  $a \sim e^{Ht}$ .

Après intégration on trouve :

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \quad (\tau < 0). \quad (2.40)$$

Dans ce qui suit, nous résoudrons également le problème dans le cas d'une expansion quasi de Sitter. Le début de l'inflation coïncide avec un certain temps initial ( $\tau_i \ll 0$ ). Nous constatons que l'équation (2.36) devient [130, 136]

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.41)$$

Nous obtenons une équation très «proche» de l'équation d'un champ scalaire de Klein-Gordon dans un espace-temps plat, la seule différence étant un terme de masse dépendant du temps négatif  $-a''/a = -2/\tau^2$ . L'équation (2.41) peut être obtenu à partir d'une action du type

$$\delta S_{\mathbf{k}} = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \delta\sigma_{\mathbf{k}}'^2 - \frac{1}{2} \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \delta\sigma_{\mathbf{k}}^2 \right], \quad (2.42)$$

qui est l'action canonique d'un oscillateur harmonique simple avec des relations de commutation canoniques

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}^* \delta\sigma_{\mathbf{k}}' - \delta\sigma_{\mathbf{k}} \delta\sigma_{\mathbf{k}}'^* = -i. \quad (2.43)$$

### 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

on va étudier le comportement de cette équation dans différentes régions :

i- pour  $k^2 \gg \frac{a''}{a}$  l'équation (2.41) se réduit à

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + k^2 \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.44)$$

dont la solution est une onde plane

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH). \quad (2.45)$$

Nous constatons encore que les fluctuations de longueur d'onde dans l'horizon oscillent exactement comme dans un espace-temps plat. ce qui est plutôt cohérent, puisqu'à la limite ultraviolette, pour des longueurs d'onde plus petites que l'échelle de l'horizon, on s'attend à ce qu'un espace-temps plat soit une bonne approximation, et donc que les modes ayant cette taille oscillent à l'intérieur sans aucune trace de courbure.

ii- pour  $k^2 \ll \frac{a''}{a}$  l'équation (2.41) se réduit à

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' - \frac{a''}{a} \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.46)$$

qui est satisfait par

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = B(k) a \quad (k \ll aH). \quad (2.47)$$

où  $B(k)$  est une constante d'intégration.

En comparant grossièrement les valeurs absolues des solutions (2.45) et (2.47) à  $k = aH$  ( $-k\tau = 1$ ), nous pouvons déterminer la valeur absolue de la constante  $B(k)$

$$|B(k)| a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \implies |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (2.48)$$

En revenant à la variable initiale  $\delta\chi_{\mathbf{k}}$ , nous obtenons que la fluctuation quantique du champ aux échelles de super-Hubble est constante et approximativement égale à

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad (2.49)$$

En effet, nous pouvons faire beaucoup mieux, puisque l'équation (2.41) a une solution exacte :

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (2.50)$$

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

Cette solution reproduit tout ce que nous avons trouvé par des arguments qualitatifs dans les deux régimes extrêmes  $k \ll aH$  et  $k \gg aH$ . La raison pour laquelle nous avons effectué la procédure de mise en correspondance est de montrer que cette dernière peut être très utile pour déterminer le comportement de la solution aux échelles super-Hubble lorsque la solution exacte n'est pas connue.

### 2.3.2 Fluctuations quantiques d'un champ scalaire massif au cours de l'inflation.

Dans la section précédente, nous avons résolu l'équation des perturbations quantiques d'un champ non massif. Dans ce paragraphe, on va discuter la solution lorsqu'un tel terme de masse est présent. L'équation (2.41) devient

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + [k^2 + M^2(\tau)] \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.51)$$

avec

$$M^2(\tau) = (m_\chi^2 - 2H^2) a^2(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{m_\chi^2}{H^2} - 2 \right).$$

l'équation (2.51) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left[ k^2 - \frac{1}{\tau^2} \left( \nu_\chi^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.52)$$

avec

$$\nu_\chi^2 = \left( \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2} \right).$$

La solution général de l'équation (2.51) pour des valeurs réelles de  $\nu_\chi$  est

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \sqrt{-\tau} \left[ c_1(k) H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau) + c_2(k) H_{\nu_\chi}^{(2)}(-k\tau) \right], \quad (2.53)$$

où  $H_{\nu_\chi}^{(1)}$  et  $H_{\nu_\chi}^{(2)}$  sont les fonctions de Hankel du premier et deuxième types, respectivement. Si nous imposons cela dans le régime ultraviolet  $k \gg aH$  ( $-k\tau \gg 1$ ), la solution correspond à la solution d'onde plane  $e^{-ik\tau}/\sqrt{2k}$  que nous attendons dans un espace-temps plat et sachant

### 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

que

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}, \quad (2.54)$$

$$H_{\nu_\chi}^{(2)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}, \quad (2.55)$$

nous fixons  $c_2(k) = 0$  et  $c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\chi + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}$  La solution exacte devient [139]

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\chi + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\tau} H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau). \quad (2.56)$$

Comme  $H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{2/\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu_\chi - \frac{3}{2}} (\Gamma(\nu_\chi)/\Gamma(3/2)) x^{-\nu_\chi}$ , les fluctuations (2.56) deviennent

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = e^{i(\nu_\chi - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{(\nu_\chi - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{\frac{1}{2} - \nu_\chi}. \quad (2.57)$$

### 2.3.3 Perturbations de la métrique

Le champ d'inflaton étant un champ scalaire, il va subir des perturbations lors de l'inflation, époque où on le considère comme dominant par rapport aux autres composants possibles. Il va induire des perturbations dans le tenseur énergie-impulsion et donc dans la métrique, et réciproquement via les équations d'Einstein, des perturbations dans la métrique vont induire des perturbations dans la matière [129, 130].

$$\delta\phi \Leftrightarrow \delta T_{\mu\nu} \Leftrightarrow \left[ \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta(g_{\mu\nu} R) \right] = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \Leftrightarrow \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

On va s'intéresser aux quantités qui seront invariantes de jauge puisqu'elles représenteront les degrés de liberté physiques du système. En relativité générale, il existe 6 degrés de liberté qui vont se répartir dans les perturbations.

On va ainsi considérer :

**i-** les perturbations du champ de matière, l'inflaton, telles que  $\delta\phi(x, t) = \phi(x, t) - \bar{\phi}(t)$  où  $\bar{\phi}(t)$  est le champ d'inflaton homogène non perturbé.

**ii-** les perturbations de la métrique  $\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}$  pouvant être décomposées selon : des perturbations scalaires, des perturbations vectorielles, des perturbations tensorielles.

On va considérer par la suite des perturbations au premier ordre, donc linéaires, et chaque type de perturbations va alors évoluer indépendamment des autres : les équations vont être découplées, et on va pouvoir étudier chaque type de perturbation séparément. Bien sûr, cela

n'est vrai que jusqu'à un certain point et il faudrait considérer, pour être plus rigoureux, une interaction aux ordres suivants entre les différentes perturbations.

### 2.3.4 Perturbations scalaires

La forme la plus générale de l'élément de longueur d'une métrique FLRW perturbée s'écrit sous la forme suivante [41, 142] :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\Phi) dt^2 + 2aB_i dx^i dt + a^2 [(1 - 2\psi) \delta_{ij} + E_{ij}] dx^i dx^j \quad (2.59)$$

nous pouvons représenter  $B_i$  et  $E_{ij}$  comme :

$$B_i \equiv \partial_i B - S_i, \quad \partial^i S_i = 0, \quad (2.60)$$

et

$$E_{ij} \equiv 2\partial_{(i} E + 2\partial_{(i} F_{j)} + h_{ij}, \quad \partial^i F_i = 0, \quad h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0. \quad (2.61)$$

Nous trouverons plus facile de travailler dans l'espace de Fourier et toute quantité  $X$  peut être transformée par Fourier

$$X_k(t) = \int dx X(t, x) e^{ikx} \quad (2.62)$$

Les différents modes de Fourier désignés par le nombre d'onde  $k$  évoluent tous indépendamment les uns des autres en raison de l'invariance de la translation de l'espace-temps de fond. Nous pouvons également séparer les perturbations en scalaires, vecteurs et tenseurs. Ici,  $B$  et  $E$  sont la partie scalaire ;  $E_i$ ,  $F_i$  est la partie vectorielle et  $h_{ij}$  est la partie tensorielle. Les perturbations vectorielles se dégradent rapidement à mesure que l'univers se dilate et nous ne considérons donc que les perturbations scalaires et tensorielles. Les quantités scalaires se transforment toutes avec un changement de coordonnées, mais pas les fluctuations du tenseur [55, 56].

### 2.3.5 Perturbations de la matière

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons une description du contenu matériel de l'univers en terme d'un fluide, son tenseur énergie impulsion est caractérisé par sa quadrivitesse  $u^u$  ainsi que la densité d'énergie  $\rho$ , la pression  $p$ , selon [124]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$



### 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

où la densité d'énergie et la pression sont séparés en parties homogènes et parties perturbées

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad p = \bar{p} + \delta p. \quad (2.64)$$

Comme la quadrivitesse comobile  $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$  est soumise à la condition de normalisation

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1, \quad (2.65)$$

qui donne  $\delta u^0 = \delta u_0 = \frac{h_{00}}{2}$  tandis que  $\delta u_i$  est une variable dynamique indépendante. La perturbation de premier ordre du tenseur énergie-impulsion pour un fluide parfait est [136–138] :

$$\delta T_{ij} = \bar{p} h_{ij} + a^2 \delta_{ij} \delta p, \quad (2.66)$$

$$\delta T_{i0} = \bar{p} h_{i0} - (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_i, \quad (2.67)$$

$$\delta T_{00} = -\bar{\rho} h_{00} + \delta\rho. \quad (2.68)$$

En utilisant  $\delta T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda} [\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa} \bar{T}_\lambda^\kappa]$ , les composantes mixtes perturbées sont [124] :

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho, \quad (2.69)$$

$$\delta T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_i, \quad (2.70)$$

$$\delta T_0^i = a^{-2} (\bar{\rho} + \bar{p}) (h_{i0} - \delta u_i), \quad (2.71)$$

$$\delta T_j^i = \delta_j^i (\delta\rho) + \Sigma_j^i, \quad (2.72)$$

#### Quantités invariantes de jauge.

La liberté dans le choix de jauge peut mener à des confusions, avec des comportements différents pour les mêmes quantités évaluées dans des jauges différentes. Afin d'éviter ces confusions, une solution consiste à utiliser des variables invariantes de jauge – en pratique jusqu'à un certain ordre de la théorie des perturbations – i.e. des variables dont la valeur est indépendante de la jauge choisie. Ainsi, on peut facilement comparer différents calculs menés dans des jauges différentes. Mieux, d'après la covariance générale des équations d'Einstein  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , on sait que leur développement ne fera intervenir que des quantités invariantes de jauge. On peut donc utiliser la liberté de jauge pour simplifier les calculs intermédiaires en travaillant dans une jauge donnée, et en remplaçant à la fin du calcul toutes les quantités par leur définition invariante de jauge, i.e. les variable invariantes de jauge qui se réduisent, dans la jauge donnée,

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

aux quantités considérées.

Comme expliqué précédemment, nous allons maintenant construire des quantités invariantes par jauge. Diverses quantités peuvent être construites, mais nous en indiquerons deux des plus pertinentes sur le plan physique, puis nous expliquerons pourquoi elles sont si importantes dans le contexte des perturbations cosmologiques. Ils sont la perturbation de la courbure sur les hypersurfaces de densité uniforme ( $\zeta$ ) et la perturbation de la courbure comobile ( $R$ ) [96, 97, 130, 137]. La discussion qui suit expliquera pourquoi nous considérons ces deux quantités.

$$-\zeta = \Psi + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho \quad (2.73)$$

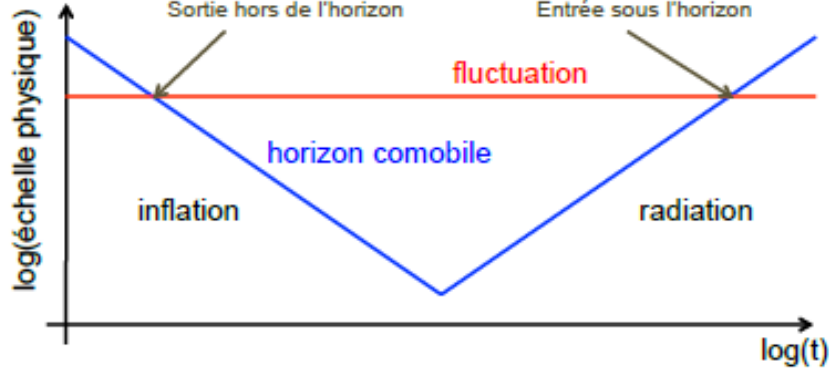
$$R = \Psi - \frac{H}{\rho + p} \delta q = \Psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi \quad (2.74)$$

Maintenant, comme nous pouvons le voir sur la figure , le rayon de Hubble diminue pendant l'inflation alors que les échelles comobiles spécifiées par les modes de Fourier ( $k$ ) restent constantes. Ainsi, les modes sortiront de l'horizon à un certain moment et rentreront à un certain moment après la fin de l'inflation. L'évolution des quantités lorsqu'elles sont en dehors de l'horizon, définie comme super-horizon ( $k \ll aH$ ), est incertaine et nous recherchons donc des quantités invariantes par jauge dont l'évolution sur les échelles superhorizon est négligeable. Des calculs explicites montrent que sur les échelles superhorizontales  $\zeta$  et  $R$  sont égales et à partir des équations d'Einstein on peut montrer que leur évolution sur les échelles superhorizontales est presque nulle  $\dot{R} \approx 0$  [4]. Donc si on calcule la valeur de  $R$  à la sortie de l'horizon ( $k = aH$ ), nous n'avons pas à nous soucier de l'évolution du super-horizon et la valeur à la rentrée de l'horizon est la même qu'à la sortie de l'horizon. Cela simplifie énormément les calculs. Nous profiterons de ce fait dans les calculs qui suivront.

### 2.3.6 Spectre de puissance dans l'espace Quasi-de Sitter

Nous allons calculer le spectre de puissance dans l'espace Quasi-de Sitter. Nous faisons le choix de jauge telque  $\delta\varphi = 0$  qui s'appelle le choix de jauge comobile. Nous ne pouvons pas considérer l'espace de Sitter complet, car nous n'aurons alors aucun mécanisme pour mettre fin à l'inflation, car nous aurons toujours une expansion exponentielle en mode De-Sitter parfait. Cependant, nous devons mettre fin à l'inflation pour pouvoir assurer le démarrage de l'évolution du Big Bang. Nous considérons donc l'espace Quasi-de Sitter. Cependant, comme nous travaillons dans le cadre de la théorie des champs quantiques dans un espace-temps courbé, le choix du vide n'est pas unique et nous devons choisir le vide en considérant certaines solutions

## 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique



**Figure 2.5** – Genèse et évolution des perturbations dans un univers inflationnaire : des fluctuations de nature quantique sont générées sous l’horizon, traversent l’horizon de Hubble pendant l’inflation avant de redevenir sub-Hubble pendant la période du Big Bang chaud. Comme  $R$  est constant hors de l’horizon pour l’inflation à un champ, il suffit de calculer son spectre de puissance à la traversée de l’horizon [41].

limitantes. Sous l’horizon, le principe d’équivalence stipule que la physique doit être identique à celle dans un espace-temps de Minkowski. Il est donc naturel, pour procéder à la quantification des perturbations sous l’horizon, d’utiliser le temps conforme  $\tau$  et la variable canoniquement normalisée associée avec

$$v(x, t) = a\delta\phi(x, t), \quad z = a\frac{\dot{\phi}}{H} \quad \text{et} \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (2.75)$$

Cette variable, et par extension toutes les variables canoniquement normalisées en temps conforme pendant l’inflation, sont souvent appelées variables de Sasaki-Mukhanov [93, 94]. L’action quadratique scalaire prend alors la forme très simple

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[ (v')^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right]. \quad (2.76)$$

Les composantes de Fourier de  $v$ , définies par

$$v_k(\tau) = \int d^3x v(\tau, x) e^{-ikx}, \quad (2.77)$$

vérifient donc

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0, \quad (2.78)$$

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

L'équation (2.78) est celle d'un oscillateur harmonique. Par analogie avec l'oscillateur harmonique sphérique en mécanique quantique, on quantifie en transformant le champ classique  $v$  en opérateur  $\hat{v}$ . On a :

$$v \rightarrow \hat{v}(\tau, x) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \left[ v_k(\tau) \hat{a}_k e^{ikx} + v_k^*(\tau) \hat{a}_k^+ e^{-ikx} \right], \quad (2.79)$$

où de manière équivalente en espace de Fourier

$$v \rightarrow \hat{v}(\tau) = v_k(\tau) \hat{a}_k + v_{-k}(\tau) \hat{a}_{-k}^+, \quad (2.80)$$

où les opérateurs création et annihilation  $\hat{a}_{-k}^+$  et  $\hat{a}_k$  satisfont les relations de commutation canoniques :

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'} \right] = \left[ \hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+ \right] = 0 \quad , \quad \left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+ \right] = (2\pi)^3 \delta(k - k'). \quad (2.81)$$

Les solutions dans le cas de De Sitter  $\frac{z''}{z} = \frac{1}{\tau}$  sont alors :

$$v_k = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\tau} \right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 + \frac{i}{k\tau} \right). \quad (2.82)$$

Pour fixer les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$ , on normalise la solution :

$$\langle v_k, v'_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \left( v_k^* v'_k - v_k'^* v_k \right) = 1 \quad (2.83)$$

et on choisit un état du vide pour les opérateurs quantiques :  $\hat{a}_k |0\rangle = 0$  On choisit ces conditions dans l'infini passé  $|k\tau| \gg 1$  ou  $k \gg aH$ , où les oscillations étaient bien à l'intérieur de l'horizon, et se comportaient alors comme dans un espace plat (*Minkowski*). L'équation (2.78) devient trivialement

$$v_k'' + k^2 v_k = 0, \quad (2.84)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation indépendante du temps. Si on impose alors que le vide soit l'état d'énergie minimale, c'est-à-dire que l'état  $|0\rangle$  annihilé par les opérateurs de création  $\hat{a}_k$  soit également l'état fondamental de l'Hamiltonien associé à l'action (2.76), on trouve facilement que  $v_k(\tau)$  doit être proportionnel à  $e^{ik\tau}$  ou  $e^{-ik\tau}$ , et non pas à une combinaison linéaire de ces deux solutions. La condition (2.83) impose alors de choisir le signe

### 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

– dans l'exponentielle ainsi que la normalisation de la solution :

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}, \quad (2.85)$$

Cet état du vide est celui dit de Bunch-Davies [139]. Les fluctuations sont alors de la forme :

$$\delta\phi_k = \frac{e^{-ik\tau}}{a\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (2.86)$$

#### Spectre de puissance des perturbations

On peut caractériser ces perturbations par leur spectre de puissance  $P(k)$ , transformée de la fonction de corrélation à 2 points [140]

$$\langle \delta\phi_k, \delta\phi_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(k + k') P(k). \quad (2.87)$$

On introduit alors le spectre de puissance sans dimension  $\mathcal{P}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P(k)$  [140], qui mesure la contribution des modes de perturbations à la variance des perturbations par intervalle logarithmique. Les perturbations  $\delta\phi$  sont directement reliées aux perturbations de la courbure  $R$  par la relation  $R = -H \frac{\delta\phi}{\phi}$ . En dehors de l'horizon de Hubble, les perturbations étant gelées, le spectre prend sa valeur à  $k = aH$  [140] :

$$\mathcal{P}_R(k) \equiv \left[ \left( \frac{H}{2\pi} \right) \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right) \right]^2 \Big|_{k=aH} \quad (2.88)$$

Nous définissons une grandeur  $A_S$ , qui est une mesure approximative de la valeur quadratique moyenne de la perturbation de densité totale  $\frac{\delta\rho}{\rho}$ , lorsqu'elle rentre dans l'horizon. Ceci est lié au spectre de la perturbation de la courbure par

$$A_S^2 = \frac{4}{25} \mathcal{P}_R, \quad (2.89)$$

où l'indice 'S' signifie 'scalaire'.

Dans le cadre de l'approximation de roulement lent, le spectre de perturbations scalaires peut

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

être trouvé en utilisant les équations (2.22) et (2.23)

$$A_S^2 = \frac{4}{25} \left[ \left( \frac{H}{2\pi} \right) \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right) \right]^2 \Big|_{k=aH} \quad (2.90)$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{M_{pl}^4} \frac{1}{\epsilon} \Big|_{k=aH}. \quad (2.91)$$

on définit l'indice spectrale  $n_s$  [140]; comme suit

$$n_s - 1 = \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} \quad (2.92)$$

$$= \frac{d \ln A_S^2}{d\phi} \frac{d\phi}{d \ln k} \quad (2.93)$$

$$\simeq \left( \frac{dV^3}{d\phi} - \frac{dV'^2}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{d \ln k} \quad (2.94)$$

pour  $k = aH$ ; nous avons  $d \ln k = d \ln(aH)$  où  $H$  est presque constant et fixons la fin de l'inflation nous trouvons  $d \ln a_i = -dN$  (d'après l'éq (2.32)). d'où

$$d \ln k \simeq -dN \simeq -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.95)$$

Le paramètre  $n_s$ , appelé indice spectral, détermine la dépendance de la perturbation à l'échelle ou son écart par rapport à l'invariance de l'échelle ( $n_s = 1$ ). Les calculs basés sur l'approximation à roulement lents ont montré que l'indice spectral est donné en fonction de ces paramètres comme suit [140] :

$$n_s - 1 \simeq - \left( 3 \frac{d \ln V}{d\phi} - 2 \frac{d \ln V'}{d\phi} \right) \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \frac{V'}{V} \quad (2.96)$$

$$= -6 \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 + 2 \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \left( \frac{V''}{V} \right) \quad (2.97)$$

$$= -6\epsilon + 2\eta. \quad (2.98)$$

Les données récentes de Planck suggèrent fortement des perturbations presque invariantes à l'échelle, précisément  $n_s \simeq 0,965$  [49]. La mesure de l'indice spectral nous permet alors de contraindre la forme des potentiels à la base de l'inflation et de ne produire que des modèles cohérents avec les valeurs mesurées, et la variation de l'indice spectral par rapport à l'échelle.

### 2.2.3 Théorie de la perturbation cosmologique

c'est-à-dire la dépendance de  $n_s$  sur le nombre d'onde  $k$ , est donnée par

$$\alpha_s \equiv \frac{d \ln n_s}{d \ln k}, \quad (2.99)$$

Il peut être exprimé en fonction des paramètres de roulement lent,

$$\alpha_s \simeq -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 - 2\xi^2. \quad (2.100)$$

Un calcul similaire peut être fait pour les perturbations tensorielles .

L'inflation produit aussi des ondes gravitationnelles, qui sont responsables de perturbations de type tensorielles. Le spectre de puissance des perturbations tensorielles est :

$$\mathcal{P}_t(k) = \frac{2}{M_{pl}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \Big|_{k=aH}. \quad (2.101)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons une quantité apparenté,  $A_t$ , où l'indice 't' signifie 'tenseur'. Ceci est défini par

$$A_t^2 = \frac{8\pi}{25} \mathcal{P}_t. \quad (2.102)$$

ce qui donne

$$A_t^2 = \frac{4\pi}{25 M_{pl}^2} H^2 \quad (2.103)$$

$$= \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_{pl}^4} \quad (2.104)$$

la variable  $n_t$  correspondant à l'indice spectral donnant la pente du spectre selon

$$n_t = \frac{d \ln A_t^2}{d \ln k}, \quad (2.105)$$

$$= \frac{d \ln A_t^2}{d\phi} \frac{d\phi}{d \ln k}, \quad (2.106)$$

$$= -2 \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.107)$$

$$= -2\epsilon. \quad (2.108)$$

et la variation de l'indice spectral par rapport à l'échelle, est donnée comme suit

$$\alpha_t \equiv \frac{d \ln n_t}{d \ln k}, \quad (2.109)$$

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

qui s'exprime en fonction des paramètres de roulement lent par

$$\alpha_t \simeq -4\epsilon\eta + 8\epsilon^2. \quad (2.110)$$

Dans l'approximation de roulement lent, On voit que l'inflation prédit une déviation à l'invariance d'échelle,  $n_s = 1$  et  $n_t = 0$ , dépendant des paramètres de roulement lent.

On introduit aussi le rapport tenseur-scalaire  $r$  défini comme

$$r \equiv 16 \frac{A_t^2}{A_s^2} \simeq 16\epsilon \simeq -8n_t \quad (2.111)$$

Cette relation entre  $r$  et  $n_t$  est appelée *relation de consistance* de l'inflation à champ unique en roulement lent.

la mesure des indices spectraux  $n_s$  et  $n_t$ , et de leur variation  $\alpha_s$  et  $\alpha_t$  permettent de caractériser le potentiel  $V$ .

Les résultats de Planck et WMAP sont donnés sous forme de tableau [5, 6]

Les Paramètres	Planck	WMAP
le rapport tenseur-scalaire $r$	$< 0.11$	$< 0.13$
l'indices spectral $n_s$	$0.9616 \pm 0.0094$	$0.972 \pm 0.013$
$A_s^2$	$(2.23 \pm 0.16) \times 10^{-9}$	$(2.41 \pm 0.10) \times 10^{-9}$
$\alpha_s$	$(-0.013 \pm 0.009)$	$(-0.019 \pm 0.025)$

**Tableau 2.1** – Les valeurs des observables  $n_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $A_s^2$  et  $r$  selon Planck et WMAP.

## 2.4 Modèle d'inflation

### 2.4.1 Inflation chaotique

C'est le modèle du champ grand, pour lequel la valeur initial de l'inflaton est grande et décroît au fur et à mesure que le potentiel décroît. L'inflation chaotique est l'un des exemples de cette classe, qui est caractérisé par un potentiel quadratique :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$$



où  $m$  est la masse de l'inflaton.

Les équations du mouvement deviennent :

$$H^2 \approx \frac{4\pi m^2}{3M_{pl}^2} \phi^2 \quad (2.112)$$

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi \approx 0 \quad (2.113)$$

La combinaison des relations (2.112) et (2.113) donne la solution suivante :

$$\phi(t) \simeq \phi_i - \frac{mM_{pl}}{2\sqrt{3}\pi} t \quad (2.114)$$

Où  $\phi_i$  est une constante d'intégration.

On cherche à calculer le facteur d'échelle  $a(t)$ , et d'après la relation suivante :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \simeq \sqrt{\frac{4\pi m^2}{3M_{pl}^2} \phi^2} \quad (2.115)$$

on intègre par rapport à  $t$ , on aboutit au résultat suivant :

$$a(t) \simeq a_i \exp 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m}{M_{pl}} \left[ \phi_{(t=0)} t - \frac{mM_{pl}}{4\sqrt{3}\pi} t^2 \right] \quad (2.116)$$

cette relation montre que l'expansion de l'Univers suit une loi exponentielle. De même, on peut calculer les paramètres de roulement lent de cette théorie :

$$\epsilon_v = \eta_v = \frac{2M_{pl}^2}{\phi^2} \quad (2.117)$$

Par conséquent, dans ce modèle, les conditions du roulement lent, ( $\epsilon_v, \eta_v \ll 1$ ), correspondent à  $\phi^2 \gg 2M_{pl}^2$ . Donc, pour réaliser l'inflation à roulement lent, nous devons prendre la valeur initiale du champ scalaire tant que  $\phi \gg \sqrt{2}M_{pl}$ . Le nombre de e-folds est défini par l'équation (2.112), on obtient :

$$N = \frac{1}{2M_{pl}^2} \left( \frac{\phi_i^2}{2} - \frac{\phi_f^2}{2} \right). \quad (2.118)$$

(où  $\phi = \phi_i$  et  $a = a_i$  à  $t = 0$ ).

La condition pour la fin de l'inflation est donnée par ( $\epsilon_v = 1$ ), ce qui conduit à  $\frac{\phi_f^2}{2M_{pl}^2} = 1$ ,

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

on obtient :

$$N = \frac{\phi_i^2}{4M_{pl}^2} - \frac{1}{2}. \quad (2.119)$$

les observables  $A_S$ ,  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  peuvent être exprimés en fonction de  $N$  en utilisant des équations (2.98), (2.111), (2.100) et (2.91) :

$$n_s = 1 + \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} = 1 - \frac{4}{2N + 1}, \quad (2.120)$$

$$r = 16\epsilon = \frac{16}{2N + 1}, \quad (2.121)$$

$$\alpha_s = \frac{d \ln n_s}{d \ln k} = \frac{-8}{(2N + 1)^2}, \quad (2.122)$$

$$A_S^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{2N + 1}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{m}{M_{pl}} \right)^2. \quad (2.123)$$

Pour contraindre les valeurs de  $m$  dans notre modèle, nous revenons au spectre de puissance scalaire  $A_S^2$  qui a été mesuré avec précision  $A_S^2 = (2.23 \pm 0.16) \times 10^{-9}$  et à partir de l'équations (2.123) [47],

on trouve :

$$\left( \frac{m}{M_{pl}} \right)^2 = \frac{12\pi^2}{(2N + 1)^2} A_S^2 \quad (2.124)$$

$$\left( \frac{m}{M_{pl}} \right)^2 = \frac{12\pi^2}{(2N + 1)^2} \times 2.23 \times 10^{-9} (GeV). \quad (2.125)$$

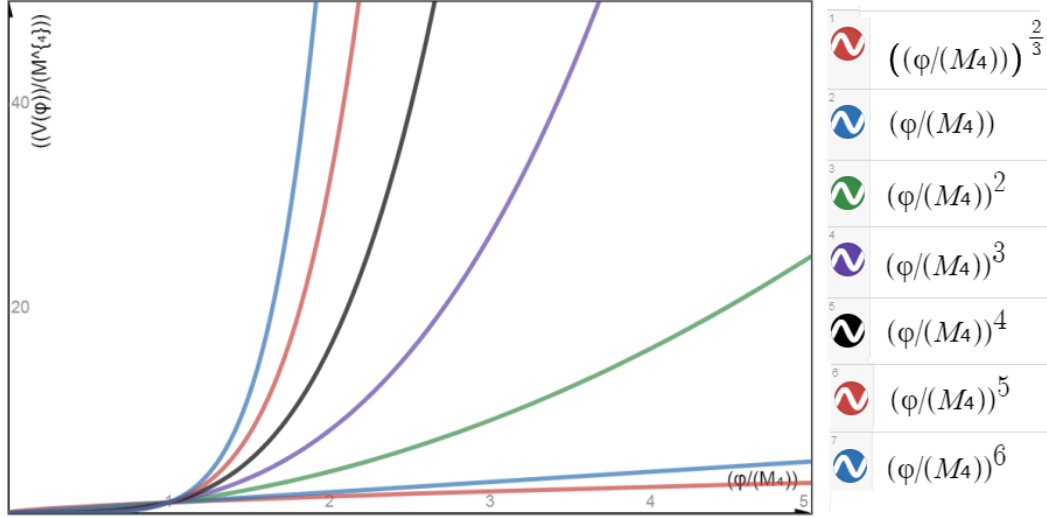
Nous résumons sous forme de tableau les résultats de  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  pour différente valeur du nombre de e-folding.

	$N = 50$	$N = 55$	$N = 60$
$n_s$	0.9604	0.9639	0.9669
$r$	0.158	0.144	0.132
$\alpha_s$	$-7.84 * 10^{-4}$	$-6.49 * 10^{-4}$	$-5.4610^{-4}$

**Tableau 2.2** – Valeurs des observables  $n_s$ ,  $\alpha_s$ , et  $r$ .

D'après les résultats trouvés dans le tableau, On constate que le potentiel chaotique se rapproche des valeurs inférieures de l'indice spectral scalaire  $n_s$  des résultats de Planck et WMAP, pour de très grandes valeurs de  $N$  ; et  $r$  prend des valeurs qui sont légèrement supérieur aux données expérimentaux.

## 2.4.2 Inflation en loi de puissance



**Figure 2.6 – Modèles à grands champs.** : La pente du potentiel devient plus raide à mesure que la puissance augmente et que le roulement lent prend place dans le sens des valeurs de champ décroissantes..

Considérons les modèles d'inflation en loi de puissance :

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^\mu. \quad (2.126)$$

où  $\mu$  est un nombre positif, et  $\Lambda^4 = \lambda M_{pl}^4$ . Ce potentiel généralise celui de l'inflation chaotique déjà étudié, et dépend d'une échelle de masse  $\Lambda$  fixée par la normalisation CMB et d'un indice libre  $\mu$  pouvant également prendre des valeurs entières ou rationnelles spécifiques. Ici on prend  $\mu \in [0.2, 6]$  car, pour  $\mu > 6$ , on sait déjà que les modèles sont exclus et  $\mu > 0.2$  au lieu de  $\mu = 0$  pour des raisons numériques<sup>6</sup>. Une autre possibilité consiste simplement à fixer  $\mu$  à certaines valeurs intéressantes :  $\mu = 2/3$  correspond à l'inflation monodromique tandis que  $\mu = 1, \dots, 4$  représente des scénarios phénoménologiques intéressants.

On peut calculer facilement les paramètres de roulement lent de cette théorie :

$$\epsilon_v(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2, \quad \eta_v(\phi) = \mu(\mu - 1) \left( \frac{M_{pl}}{\phi} \right)^2. \quad (2.127)$$

Ainsi, les conditions de roulement lent sont satisfaites, ( $\epsilon_v, \eta_v \ll 1$ ), pour les valeurs de l'in-

6. Le potentiel ne peut pas être complètement plat puisqu'on doit arrêter l'inflation.

## Chapitre 2. Théorie de l'inflation standard

---

flaton, tel que

$$\phi \gg \frac{\mu}{\sqrt{2}} M_{pl} \quad (2.128)$$

ce qui signifie que l'amplitude du champ scalaire doit être supérieure à la masse de Planck lors de l'inflation.

Après substitution du potentiel (2.126) dans les équations du mouvement en roulement lent (2.22)-(2.23), et après intégration on trouve explicitement

$$\phi^{2-\frac{\mu}{2}} - \phi_i^{2-\frac{\mu}{2}} = -\frac{2\mu}{4-\mu} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} M_{pl}^{3-\frac{\mu}{2}} (t - t_i) \quad \text{pour } \mu \neq 4. \quad (2.129)$$

$$\phi = \phi_i \exp \left[ -\sqrt{\frac{4\lambda}{3}} M_{pl} (t - t_i) \right] \quad \text{pour } \mu = 4. \quad (2.130)$$

on peut également exprimer le facteur d'échelle  $a(t)$  en fonction de la valeur du champ scalaire, en utilisant  $\frac{d \ln a}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} \approx -\frac{\phi}{\mu M_{pl}^2}$ .

On trouve

$$a = a_f \exp \left[ \frac{\phi_f^2 - \phi^2}{2\mu M_{pl}^2} \right] \quad (2.131)$$

Définissant la fin de l'inflation par  $\epsilon_v = 1$ , on obtient  $\phi_f = \frac{\mu M_{pl}}{\sqrt{2}}$  et le nombre e-folds est donc donné par

$$N(\phi) = \frac{\phi^2}{2\mu M_{pl}^2} - \frac{\mu}{4}. \quad (2.132)$$

les observables  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  peuvent être exprimés en fonction de  $N$  en utilisant les équations (2.98), (2.111), (2.100) et (2.91)

$$n_s = 1 + \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} = 1 - \frac{2(\mu + 2)}{4N + \mu}, \quad (2.133)$$

$$r = 16\epsilon = 32 \frac{\mu - 1}{4N + \mu}, \quad (2.134)$$

$$\alpha_s = \frac{d \ln n_s}{d \ln k} \quad (2.135)$$

Nous résumons sous forme de tableau les résultats de  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  pour différente valeur du nombre de e-folding  $N$  et  $\alpha$ .

## 2.2.4 Modèle d'inflation

$N/\alpha$	$N = 50$			$N = 55$			$N = 60$		
	$n_s$	$\alpha_s * 10^{-4}$	$r$	$n_s$	$\alpha_s * 10^{-4}$	$r$	$n_s$	$\alpha_s * 10^{-4}$	$r$
$\frac{2}{3}$	0.9734	3.531	-0.053	0.9758	2.921	-0.048	0.9778	2.455	-0.044
$\frac{4}{3}$	0.9668	7.455	0.052	0.9698	6.169	0.048	0.9723	5.189	0.044
2	0.9603	7.842	0.158	0.9639	6.492	0.144	0.9669	5.464	0.132
3	0.9507	1.941	0.315	0.9551	1.608	0.268	0.9588	1.354	0.263
4	0.9411	-1.153	0.470	0.9464	-9.566	0.428	0.9508	-8.062	0.393
5	0.9317	-0.323	0.624	0.9377	-0.268	0.568	0.9428	-0.226	0.522

**Tableau 2.3** – Valeurs des observables  $n_s$ ,  $\alpha_s$ , et  $r$ .

On constate que le potentiel en loi de puissance se rapproche des valeurs de l'indice spectral scalaire  $n_s$  des résultats de Planck et WMAP, pour de grandes valeurs de  $N$  et des petites valeurs de  $\alpha$ , tandis que Les valeurs de la variation de l'indice spectrale  $\alpha_s$  sont supérieur aux valeur donnée par les résultat d'observations; et les valeurs du rapport tenseur sur scalaire  $r$  sont on bon accord avec les données d'observations.

### 2.4.3 Hilltop potentiel

Les modèles Hilltop [161] sont des modèles à petit champ dans lesquels l'inflation se produit au voisinage d'un maximum instable du potentiel et  $\Delta\phi < M_{pl}$ . Pendant l'inflation, le champ scalaire s'écarte de cette configuration instable et avance lentement vers le minimum stable du potentiel.

Le potentiel de ces modèles peut être exprimé comme suit :

$$V(\phi) = \lambda^4 \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^\alpha \right]^2. \quad (2.136)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants avec la dimension d'une masse et  $\alpha > 0$ . L'inflation peut effectivement se produire pour  $0 < \phi < \mu$ . Dans cette section, nous ne considérons que les modèles dans lesquels l'inflation a lieu à  $\frac{\phi}{\mu} \ll 1$ .

Dans cette limite, le potentiel peut être approximé par :

$$V(\phi) \simeq \lambda^4 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^\alpha \right]. \quad (2.137)$$

Nous commençons par considérer  $\alpha \neq 2$  qui est spécial et doit être traité séparément.

Les paramètres de roulement lent sont calculés à partir des équations (2.98), (2.111) et (2.100) :

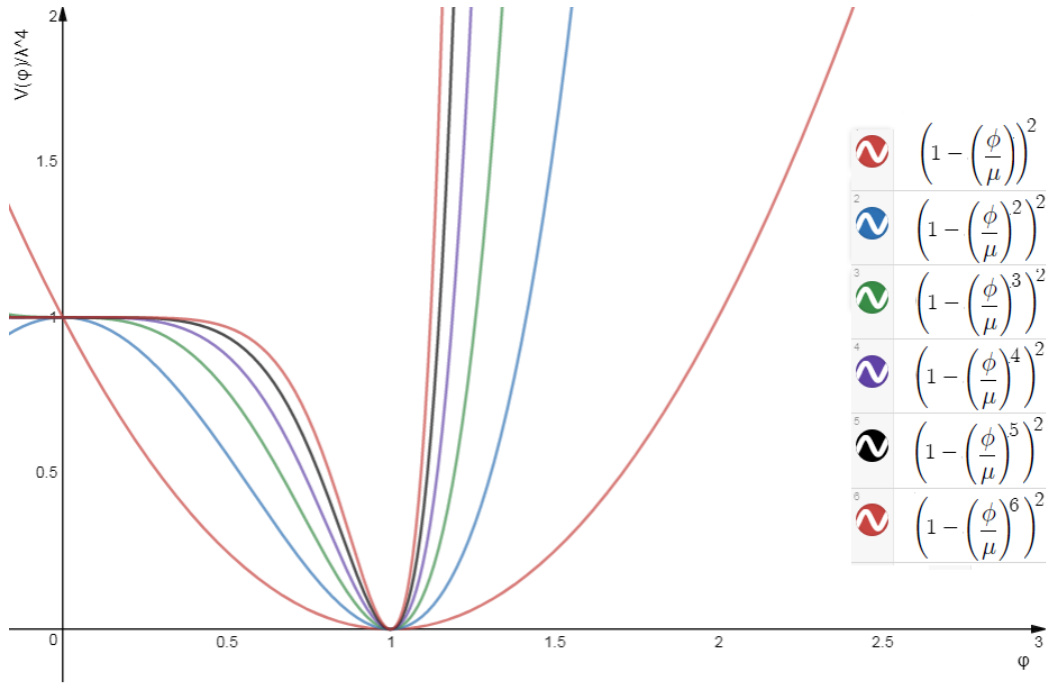


Figure 2.7 – Modèles à petit champs.

$$\epsilon_V \simeq \frac{M_p^2 \alpha^2}{4} \left( \frac{\phi^{\alpha-1}}{\mu^\alpha - 2\phi^\alpha} \right)^2,$$

$$\eta_V \simeq \frac{M_p^2 \alpha (1 - \alpha)}{4\pi} \frac{\phi^{\alpha-2}}{\mu^\alpha - 2\phi^\alpha}.$$

Le nombre de e-folding peut être exprimé comme suit :

$$N \simeq \frac{\mu^2}{2M_p^2 \alpha (\alpha - 2)} \left( \frac{\phi}{\mu} \right)^{2-\alpha} \quad (2.138)$$

les observables  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  peuvent être exprimés en fonction de  $N$  en utilisant des équations (2.98), (2.111) et (2.100)

$$n_s \simeq 1 - \frac{2(\alpha - 1)}{(\alpha - 2)N}, \quad (2.139)$$

$$r \simeq \frac{32M_p^2 \alpha^2}{\mu^2} \left[ \frac{2\alpha(\alpha - 2)M_p^2}{\mu^2} N \right]^{\frac{2\alpha-2}{2-\alpha}} \quad (2.140)$$

$$\alpha_s \simeq -\frac{2(\alpha - 1)}{(\alpha - 2)N^2}. \quad (2.141)$$

Notons que pour ces modèles, il est possible de définir une valeur extrêmement petite de  $r$  tout en maintenant  $n_s$  fixe. Ceci est notamment réalisé en prenant  $\mu \ll M_p$ . Pour cette raison, ces modèles sont généralement appelés modèles des petits champs. Enfin, considérons le cas où  $\alpha = 2$ . Dans ce cas, le nombre e-folding peut être exprimé par :

$$N \simeq -\frac{\mu^2}{4M_p^2} \ln \left( \frac{\phi}{\phi_f} \right), \quad (2.142)$$

où  $\phi_f$  est la valeur de  $\phi$  à la fin de l'inflation. D'après les équations (2.98), (2.111) et (2.100), Il est possible de montrer que les expressions  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  sont :

$$n_s \simeq 1 - \frac{8M_p^2}{\mu^2}, \quad (2.143)$$

$$r \simeq \frac{256M_p^2}{\mu^2} \left( \frac{\phi_f}{\mu} \right)^2 \exp \left( -\frac{8M_p^2}{\mu^2} N \right), \quad (2.144)$$

$$\alpha_s \simeq -\frac{1024M_p^4}{\mu^4} \left( \frac{\phi_f}{\mu} \right)^2 \exp \left( -\frac{8M_p^2}{\mu^2} N \right). \quad (2.145)$$

Notons que dans ce cas,  $n_s$  est indépendant pas  $N$ .

Dans ce chapitre, nous avons introduit l'inflation comme solution aux problèmes conceptuels du modèle du Big Bang chaud, puis nous avons analysé en détail les fondements théoriques et le formalisme analytique de la théorie d'inflation. Partons d'une formulation générale d'un champ scalaire, les équations de mouvement gouvernant la dynamique de ce dernier ont été obtenues. Ensuite, le formalisme de la théorie de perturbation cosmologique a été aussi présenté et les diverses quantités importantes relevantes de l'observation tels que les différents indices spectrales ont été obtenues. Dépendant du choix du potentiel scalaire, divers modèles d'inflation ont été analysés. Ainsi, les modèles d'inflation chaotique, et les modèles en loi de puissance, ont été revues. Tous les calculs ont été effectués dans le cadre de l'approximation de roulement lent largement justifiée en littérature .

---

---

## Chapitre 3

---

### Théorie de l'inflation branaire

L'idée qu'il y a plus de dimensions que les quatre familiers<sup>1</sup> n'était pas nouvelle quand la théorie des cordes se développait vers la fin du vingtième siècle. En effet, elle a été proposée pour la première fois par Nordstrom [72]. Les travaux ultérieurs de Kaluza-Klein en 1919 ont servi de précurseur aux travaux ultérieurs d'unification des différentes forces en augmentant les dimensions de l'espace-temps [73]. Kaluza et Klein cherchaient à unifier la théorie électromagnétique de Maxwell et la gravité par leur théorie. Cette recherche a été publiée par Kaluza en 1921, et a été développée par Klein en 1926, et leur approche a engendré une génération de telles tentatives pour résoudre des problèmes physiques en postulant des dimensions supplémentaires. Une application majeure de celle-ci était dans la gravité quantique, tandis que les autres forces avaient été unifiées. L'unification de la gravité avec les autres forces restait un défi formidable et une théorie qui a émergé dans les années 1970 – 80 était la théorie des cordes [74]. La théorie des cordes supposait que l'univers était une entité de 10 dimensions avec 9 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle. Les principales entités de cette théorie sont des cordes dont les oscillations, a-t-il été postulé, donnent lieu à toutes les interactions que nous pouvons voir aujourd'hui. Les cordes ouvertes ont été supposées représenter le secteur de la matière, c'est-à-dire les particules du modèle standard tandis que les cordes fermées représentaient des modes de graviton incorporant ainsi la gravité. Cependant la théorie a rapidement rencontré des problèmes car il est apparu qu'il n'y avait pas une, mais cinq versions différentes de la théorie des cordes qui pouvaient être dérivées. Ceci a été résolu dans les années 1990 par l'introduction de la théorie  $M$  qui supposait que l'Univers avait 11 dimensions avec 10 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle [75]. Les différentes formes des théories de corde de 10 dimensions sont juste les différentes réalisations à basse énergie de cette théorie générale.

Les dimensions supplémentaires dans le travail de Kaluza et Klein, ainsi que dans la théorie des cordes et la théorie  $M$ , sont considérées comme très petites, ou compactes. Ceci est analogue à

---

1. Une temporelle et trois spatiaux.



un tuyau d'arrosage, qui a une dimension étendue - sa longueur - et une dimension compacte - sa circonférence. Cependant, il a été récemment suggéré que si les champs de la matière ordinaire sont confinés aux trois dimensions étendues habituelles seulement [145, 146], la gravité étant autorisée à traverser toutes les dimensions, alors les dimensions supplémentaires ne doivent pas être si petites, et peuvent être très grandes, même infinies. L'espace tridimensionnel sur lequel la matière existe est appelé brane, et l'espace de dimension supérieure est appelé le volume<sup>2</sup>. Cependant, pour obtenir des prédictions testables de façon expérimentale, les physiciens devraient examiner les réalisations de la théorie des cordes à faible énergie, et l'un des secteurs les plus prometteurs était la cosmologie dans les Univers Branaires. [76–81].

Le mot brane est dérivé du mot membrane et dans la littérature, il désigne généralement le sous-espace d'un espace-temps de dimension supérieure appelé volume. Ce ne sont que des termes techniques permettant de différencier les tranches espace-temps de l'espace-temps général.

Au cours des dernières années, le cas où l'une des dimensions supplémentaires est grande<sup>3</sup> a fait l'objet d'une attention considérable. Cela conduit à un univers à cinq dimensions significatives. Randall et Sundrum ont proposé un modèle à deux branes, dont l'une contient les champs du modèle standard [147, 148]. Ils ont ensuite proposé un deuxième modèle, qui a une seule brane. Ceci est équivalent au premier modèle, mais avec l'une des branes d'origine retirée à l'infini. C'est le modèle des Univers branaire Randall-Sundrum de type *II*, ci-après appelé le scénario des Univers branaire, qui constitue la base du reste de cette thèse. Il est illustré sur la figure 3.1.

Dans ce chapitre, nous travaillerons exclusivement dans le domaine des Univers Branaire Randall-Sundrum de type *II*.

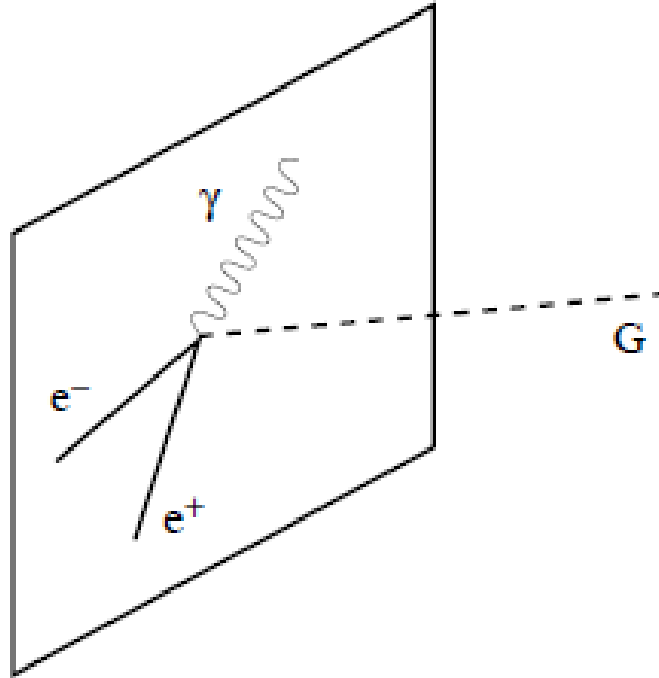
## 3.1 Modèle de Randall Sundrum

L'idée des dimensions supplémentaires a été proposée dans le début du *XXe* siècle par Kaluza et Klein [86]. Il a fait réapparaître les théories combinant les principes de la mécanique quantique et la relativité. En particulier, les théories basées sur la supersymétrie, et spécialement les théories des supercordes, sont naturellement exprimées dans plus de quatre dimensions [87]. Quatre dimensions physiques sont récupérées par la réduction de Kaluza-Klein, à savoir la compactification sur une variété de petite taille, généralement beaucoup plus faible que la taille d'un noyau atomique. Les développements récents en théorie des cordes et son extension

---

2. Bulk en anglais.

3. peut-être illimitée.



**Figure 3.1** – L’univers branaire dans le contexte du modèle Randall – Sundrum type II se limite à une "brane" à trois dimensions spatiales (présentées ici comme deux) avec une grande dimension supplémentaire, représentée par la flèche. L’espace-temps complet, avec quatre grandes dimensions et une seule dimension temporelle, est appelé «volume».

la théorie M ont suggéré une autre approche de compactification des dimensions spatiales supplémentaires. Dans la théorie de Horava-Witten [88], on a montré que l’espace-temps, après compactification de onze à cinq dimensions sur une variété de géométrie complexe, est limité par deux hyperplans bordant un intervalle à cinq dimensions, appelés branes. L’intérieur de l’intervalle séparant les deux branes est alors le lieu de propagation de la gravité et de nombreux autres champs scalaires, reflétant la géométrie de la variété.

D’autre part, Arkani-Hamed et al ont montré que si le modèle standard des particules est confiné sur la brane [89], les dimensions supplémentaires peuvent avoir une taille beaucoup plus grande que dans les scénarios de compactification habituelles. Ils ont considéré une géométrie de volume plate dans  $(4 + d)$ –dimensions dans laquelle  $d$  dimensions sont compactes. Un résultat très important obtenue par ces auteurs est le suivant :

$$M_P^2 = M_{fund}^{2+d} R^d.$$

où  $R$  est le rayon de compactification,  $M_P$  est la masse de Planck à quatre dimensions et  $M_{fund}$

### 3.3.1 Modèle de Randall Sundrum

est celui à  $(4 + d)$ -dimensions. Notons enfin que ce résultats induit une modification à la loi de la gravité sur des échelles inférieures à  $R$  [89]. Partant de ces idées, Randall et Sundrum ont proposé un modèle phénoménologique se basant sur la description des branes [90]. Ce modèle se compose de deux branes séparées par une dimension supplémentaire. Selon ces développements, les particules du modèle standard sont confinés sur une hypersurface<sup>4</sup> incorporée dans un espace de dimension supérieure<sup>5</sup>. Seuls la gravité et d'autres matière exotiques comme le dilaton peuvent se propager dans le bulk. Notre Univers peut être un tel objet. Dans ce modèle, le problème de la hiérarchie, à savoir le grand écart entre l'échelle de Planck à  $10^{19} GeV$  et l'échelle électrofaible à  $100 GeV$ , peut être abordé. La grande hiérarchie est due à l'espace-temps anti-de Sitter ( $AdS$ ) très incurvées de fond qui implique un grand décalage vers le rouge gravitationnel entre l'échelle de l'énergie sur les deux branes. Dans ce scénario, les particules du modèle standard sont confinées sur une brane avec tension négative, alors qu'une brane de tension positive est situé à  $y = 0$ . La grande hiérarchie est générée par la distance appropriée entre Brane, à savoir le radion. C'est le modèle de Randall–Sundrum type  $I$ . Dans une extension de ce travail, Randall et Sundrum ont amélioré cette description de l'univers en postulant que la gravité peut être localisée sur la 3-brane [91]. Ainsi la gravité apparait naturellement quadridimensionnelle malgré son origine extra-dimensionnelle. Dans ce cas, la brane visible porte la matière ordinaire et influence la géométrie de l'espace-temps à  $5d$ . Du point de vue cosmologique, ceci va induire des modifications aux équations de Friedmann donnant lieu à des effets qui pourraient modifier les caractéristiques de l'inflation. On étudie dans ce chapitre les divers aspects de la cosmologie branaire, et l'impact de ce modèle sur la phase inflationnaire qui se traduit par l'effet de la brane sur les équations de Friedmann et aux divers paramètres spectrales. Nous étudions alors la solution des équations d'Einstein sur la brane de tension positive alors que la brane de tension négative sera projeté à l'infini. La solution statique du modèle de Randall-Sundrum peut être obtenue à partir de l'action totale suivante qui consiste en l'action d'Einstein-Hilbert et d'action de la brane (dans le modèle de Randall–Sundrum) :

$$S_{EH} = - \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left( \frac{R}{2\kappa_5^2} + \Lambda_5 \right), \quad (3.1)$$

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} (-\lambda). \quad (3.2)$$

Ici,  $\Lambda_5$  est la constante cosmologique apparente et  $\lambda$  est la tension de la brane.  $\kappa_5$  est la constante de couplage gravitationnel à cinq dimensions. La brane est situé à  $y = 0$  et nous supposons une

---

4. Brane.

5. Bulk.

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

symétrie  $Z_2 (y \rightarrow -y)$ . L'ansatz pour la métrique est

$$ds^2 = e^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.3)$$

Les équations d'Einstein, dérivées de l'action ci-dessus, donnent deux équations indépendantes :

$$6K'^2 = -\kappa_5^2 \Lambda_5 \quad (3.4)$$

$$3K'' = \kappa_5^2 \lambda \delta(y). \quad (3.5)$$

La résolution de la première équation donne :

$$K = K(y) = \sqrt{-\frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda_5} y \equiv ky, \quad (3.6)$$

ce qui nous dit que  $\Lambda_5$  doit être négatif. L'intégration de la deuxième équation entre  $-\epsilon$  à  $+\epsilon$ , dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  conduit à (en tenant compte de la symétrie  $Z_2$ ) :

$$6K'|_0 = \kappa_5^2 \lambda \quad (3.7)$$

de l'eq (3.6) et (3.7), on obtient :

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa_5^2}{6} \lambda^2 \quad (3.8)$$

Il doit donc y avoir un ajustement fin entre la tension des branes et la constante cosmologique globale pour que des solutions statiques existent.

## 3.2 Equations d'Einstein sur la brane

Dans le but d'obtenir les équations cosmologiques, différentes méthodes ont été considérées. Ici, nous reprenons celle basée sur la dérivation des équations de Friedmann à partir de celles d'Einstein à 5-dimensions. Dans la sous-section suivante, nous allons définir  $\kappa_5 \equiv 1$ , car cela simplifie beaucoup les équations. Nous écrivons la métrique du bulk comme suit :

$$ds^2 = a^2 b^2 (dt^2 - dy^2) - a^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.9)$$

Cette métrique est consistante avec l'homogénéité et l'isotropie sur la brane localisée à  $y = 0$ . Les fonctions  $a$  et  $b$  dépendent de  $t$  et  $y$  seulement. Donc, pour cette métrique, les équations

### 3.3.2 Equations d'Einstein sur la brane

d'Einstein dans le bulk s'écrivent :

$$a^2 b^2 G^0_0 \equiv 3 \left[ 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} + kb^2 \right] = a^2 b^2 [\rho_B + \rho \bar{\delta}(y - y_b)] \quad (3.10)$$

$$a^2 b^2 G^5_5 \equiv 3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - 2 \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a'b'}{ab} + kb^2 \right] = -a^2 b^2 T^5_5 \quad (3.11)$$

$$a^2 b^2 G^0_5 \equiv 3 \left[ -\frac{\dot{a}'}{a} + 2 \frac{\dot{a}a'}{a^2} + \frac{\dot{a}b'}{ab} + \frac{a'\dot{b}}{ab} \right] = -a^2 b^2 T^0_5 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 G^i_j &\equiv \left[ 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - 3 \frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} + \frac{b'^2}{b^2} + kb^2 \right] \delta^i_j \\ &= -a^2 b^2 [p_B + p \bar{\delta}(y - y_b)] \delta^i_j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où le point représente la dérivée par rapport à  $t$  et le prime celle par rapport à  $y$ . La forme générale du tenseur énergie-impulsion dans le bulk  $T_B^A$  est :

$$T_B^A = \text{diag} \left[ (-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \frac{\delta(y)}{b} + (-\Lambda_5, -\Lambda_5, -\Lambda_5, -\Lambda_5, -\Lambda_5) \right], \quad (3.14)$$

où  $\rho_b$  et  $p_b$  sont respectivement la densité d'énergie et la pression dans la brane. Pour le modèle de Randall-Sundrum, on prendra  $\rho_b = -p_b = \Lambda_5$  et  $T^0_5 = 0$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons ces équations pour établir l'équation de Friedmann avec un champ scalaire dans le bulk. on intégrant la composante 00 par rapport à  $y$  de  $-\epsilon$  à  $\epsilon$ , et utilisant le fait que  $a(y) = a(-y)$ ,  $b(y) = b(-y)$ ,  $a'(y) = -a'(-y)$  et  $b'(y) = -b'(-y)$  (i.e symétrie  $Z_2$ ). Prenant ensuite la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\frac{a'}{a} \Big|_{y=0} = \frac{1}{6} ab \rho.$$

De même, l'intégration de la composante  $-ij$  et l'utilisation de la dernière équation donnent

$$\frac{b'}{b} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2} ab(\rho + p).$$

Ces deux conditions sont appelées conditions de jonction, et jouent un rôle important dans la cosmologie en décrivant comment la brane avec un tenseur de moment d'énergie  $T_{\mu\nu}$  donné peut être intégrée dans un espace-temps de dimension supérieure. Les autres composantes des équations d'Einstein devraient être compatibles avec ces conditions. Il n'est pas difficile de montrer que la restriction de la composante 05 à  $y = 0$  conduit à

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0, \quad (3.15)$$

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

Les équations d'Einstein avec ce tenseur énergie-impulsion, ainsi que la métrique montrée ci-dessus, conduisent à l'équation suivante :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2 \Lambda_5}{6} + \left(\frac{a'}{ba}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^4} \quad (3.16)$$

où  $a' = \frac{\partial a}{\partial y}$  et  $\varepsilon$  est une constante d'intégration. Sur la brane, il faut s'inquiéter de la discontinuité. et en utilisant certaines conditions de jonction [149], on aboutit à une équation sur la brane [155–157],

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2 \Lambda_5}{6} + \frac{\kappa^4}{36} \rho_b^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^4} \quad (3.17)$$

où  $n$  a été défini comme étant égal à 1, par une transformation appropriée à la variable de temps.

D'autre part, on peut considérer que la densité d'énergie totale et la pression contiennent des contributions de la matière ordinaire et de la tension de la brane, ce qui entraîne que :

$$\rho_b = \rho + \lambda \quad \text{et} \quad P_b = P - \lambda. \quad (3.18)$$

Cela donne

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2 \Lambda_5}{6} + \frac{\kappa^4}{36} \lambda^2 + \frac{\kappa^4}{36} \rho^2 + \frac{\kappa^4}{18} \lambda \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^4} \quad (3.19)$$

Les deux premiers termes se comportent comme étant une constante cosmologique efficace sur la brane, que nous pouvons définir comme [150],

$$\frac{\Lambda_4}{3} \equiv \frac{\kappa^2}{6} \left( \Lambda_5 + \frac{\kappa^2}{6} \lambda^2 \right) \quad (3.20)$$

avec  $8\pi G \equiv \frac{8\pi}{M_4^2} \equiv \frac{\kappa^4}{6} \lambda$ , où  $M$  est l'échelle de Planck effective et  $G$  est la constante de Newton sur la brane, On montre que la solution correspondante pour le facteur de Hubble est

$$H^2 = \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{8\pi}{3M_4^2} \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) - \frac{k}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^4}. \quad (3.21)$$

ce qui est la loi de Friedmann usuelle, avec en plus deux termes correctifs. Cette expression est obtenue en demandant la compatibilité de (3.21) avec la relation [151]

$$\dot{\rho}_b + 3\rho_b(1 + \omega)H = 0 \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Equations d'Einstein sur la brane

qui vient de l'équation d'Einstein  $G_{0y} = \kappa_5^2 T_{0y}$  et reproduit la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion quadri-dimensionnel  $D^\nu T_{\mu\nu} = 0$ .  $\omega$  est le paramètre d'état du "fluide cosmique" définie par l'équation d'état :  $P = \omega\rho$ . Pour de la matière non relativiste,  $\omega = 0$ , pour de la matière relativiste  $\omega = 1/3$  et pour une constante cosmologique,  $\omega = -1$ . Cherchons  $H^2$  sous la forme

$$H^2 = f(\rho)$$

L'échelle de Planck fondamentale,  $M_5$ , est liée à la constante de couplage,  $\kappa$ , par [151]

$$M_5^3 = \frac{8\pi}{\kappa^2}, \quad (3.23)$$

alors [152]

$$M_4 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{M_5^2}{\sqrt{\lambda}} \right) M_5 \quad (3.24)$$

Ainsi, l'échelle de Planck fondamentale est différente de l'échelle de Planck effective à quatre dimensions,  $M_4 = 10^{27} eV$ . Pour obtenir une estimation de l'ordre de grandeur de sa valeur, nous avons besoin d'une contrainte sur la tension de la branes  $\lambda$ , qui peut être limitée par le fait que les résultats de la relativité général fonctionnent très bien à l'ère de la nucléosynthèse. Toute correction énergétique si elle existe doit donc précéder l'échelle énergétique de la nucléosynthèse. Ainsi, le terme  $\rho/\lambda$  doit être négligeable à l'échelle de l'énergie de la nucléosynthèse [72]. De ces considérations, nous pouvons obtenir une limite inférieure sur la valeur de  $\lambda$  qui est [153]

$$\lambda \geq (1MeV)^4 \quad (3.25)$$

par conséquent

$$M_5 \gg 10^{13} eV. \quad (3.26)$$

La constante cosmologique à quatre dimensions est généralement ajustée pour être nulle dans le modèle branaire  $\Lambda_4 = 0$ , ce qui implique que [154]

$$\Lambda_5 + \frac{\kappa^2}{6} \lambda^2 = 0 \quad (3.27)$$

Le terme en  $\frac{\varepsilon}{a^4}$  est un terme de radiation sur la brane, et la constante  $\varepsilon$  (constante d'intégration) peut être interprétée physiquement comme la masse du trou noir. Dans la suite, nous

supposons que le terme  $\varepsilon = 0$  et  $\Lambda_4 = 0$ . Alors l'équation de Friedmann modifiée se réduit à :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_4^2} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right). \quad (3.28)$$

A partir de cette équation, on distingue que : à des énergies basses, l'inflation branaire se comporte exactement de la même manière que l'inflation standard. Mais à des énergies plus élevées, nous nous attendrions à ce que la dynamique de l'inflation soit modifiée. Dans ce Chapitre, les détails de cette modification seront étudiés. Pour ce faire, nous suivrons les dérivations du deuxième chapitre, mais avec l'équation de Friedmann modifiée (3.28).

### 3.3 Approximation du roulement lent dans l'inflation branaire.

Tout d'abord on cherche la condition requise pour que l'inflation ait lieu. Nous allons considérer le cas où le tenseur énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  sur la brane est dominé par un champ scalaire (confiné dans la brane) avec un potentiel d'auto-interaction  $V(\phi)$ . Le champ vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0,$$

avec l'équation du fluide (3.22), qui est toujours vérifiée, nous avons donc,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (3.29)$$

où  $\rho$  et  $P$  sont la densité d'énergie et la pression respectivement du champ scalaire, défini par :

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.30)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.31)$$

la dérivée de l'éq (3.28) par rapport aux temps donne :

$$2H\dot{H} = 2H \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) = \frac{8\pi}{3M_4^2} \left[ \dot{\rho} + \dot{\rho} \frac{\rho}{\lambda} \right] \quad (3.32)$$

$$= -\frac{8\pi H}{M_4^2} (\rho + P) \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) \quad (3.33)$$



### 3.3.3 Approximation du roulement lent dans l'inflation branaire.

par l'équation du fluide. Nous obtenons donc une équation d'accélération.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{M_4^2} (\rho + P) \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) + H^2 \quad (3.34)$$

$$= -\frac{4\pi}{M_4^2} \left[ (\rho + P) \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) - \frac{2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) \right] \quad (3.35)$$

$$= -\frac{4\pi}{3M_4^2} \left[ (\rho + 3P) + \frac{\rho}{\lambda} (2\rho + 3P) \right]. \quad (3.36)$$

Pendant l'inflation,  $\ddot{a} > 0$ , donc la condition pour l'inflation est

$$0 < -[\lambda(\rho + 3P) + \rho(2\rho + 3P)]. \quad (3.37)$$

$$P < -\frac{\lambda\rho + 2\rho^2}{3(\lambda + \rho)} \quad (3.38)$$

$$P < -\frac{\rho}{3} \left( \frac{\lambda + 2\rho}{\lambda + \rho} \right) \quad (3.39)$$

Pour  $\rho \ll \lambda$ , l'approximation se réduit à la condition de l'inflation standard,  $P < -\frac{\rho}{3}$  [152], mais pour  $\rho \gg \lambda$ , une condition plus stricte sur  $p$  est requise pour accélérer l'expansion. nous avons la plus forte condition ,

$$P < -\frac{2\rho}{3} \quad (3.40)$$

Lorsque la seule matière de l'univers est un champ scalaire auto-interactif, la condition de l'inflation devient

$$\dot{\phi}^2 - V + \frac{\dot{\phi}^2 + 2V}{8\lambda} (5\dot{\phi}^2 - 2V) < 0,$$

qui se réduit à  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$  quand  $(\dot{\phi}^2 + 2V) \ll \lambda$ .

Dans ce qui suit, nous aborderons le cas de l'inflation sous l'approximation du roulement lent. Par conséquent, l'évolution des champs est régie par deux équations qui décrivent la dynamique de l'inflation dans ce régime (où  $\approx$  indique l'égalité dans les conditions du roulement lent ),

$$H^2 \approx \frac{8\pi}{3M_4^2} V \left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right), \quad (3.41)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V'. \quad (3.42)$$

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

Ces deux équations (combinées à leurs dérivées temporelles, et en supposant que  $\ddot{\phi}$  est négligeable) permettent d'écrire les conditions du roulement lent respectivement comme

$$\frac{M_4^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \ll 1, \quad (3.43)$$

$$\left| \frac{M_4^2 V''}{8\pi V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \right| \ll 1. \quad (3.44)$$

Nous définissons les paramètres du roulement lent sur la brane comme suit [152] :

$$\epsilon \equiv \frac{M_4^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \left[ \frac{1 + \frac{V}{\lambda}}{\left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right)^2} \right], \quad (3.45)$$

$$\eta \equiv \frac{M_4^2 V''}{8\pi V} \left[ \frac{1}{1 + \frac{V}{2\lambda}} \right], \quad (3.46)$$

Les paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  décrivent l'écart du potentiel inflationnaire par rapport à la platitude parfaite. Pour qu'une phase d'inflation en roulement lent puisse avoir lieu, il faut et il suffit que ces paramètres soient petits devant l'unité, c.à.d.  $\max\{\epsilon; |\eta|\} \ll 1$  [158]. Dans tous les cas,  $\epsilon \sim 1$  entraîne nécessairement la fin de l'inflation.

Notons que la différence par rapport au cas standard est due aux termes entre crochets. Ceci implique que pour un potentiel donné et des conditions initiales appropriées du champ scalaire, les paramètres de l'approximation du roulement lent "slow roll" sont plus faibles que dans le cas standard. Par conséquent, l'effet du modèle branaire favorise d'avantage l'inflation [70]. La fin de l'inflation en roulement lent se produit dès que l'un de ces paramètres est de l'ordre de l'unité, et on notera  $\phi_f$  la valeur du champ à ce moment.

Le nombre d'e-folds est donné par [152] :

$$N \approx -\frac{8\pi}{M_4^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} \left( 1 + \frac{V}{2\lambda} \right) d\phi. \quad (3.47)$$

où  $\phi_i$  et  $\phi_f$  sont les valeurs du champ scalaire au début et à la fin de l'expansion respectivement. On remarque qu'une conséquence des modifications des équations de Friedmann à haute énergie conspirent à augmenter le taux d'expansion en raison d'un terme supplémentaire de  $\frac{V}{2\lambda}$ . Il en résulte une plus grande quantité d'inflation entre deux valeurs de champ par rapport au modèle standard.

## 3.4 Théorie de la perturbation cosmologique sur la Brane

Le fondement majeur de tout modèle d'inflation, ou de toute théorie de la gravité modifiée pendant l'inflation, sera le spectre de perturbations produits en raison des fluctuations quantiques des champs autour de leurs valeurs de fond homogènes. Pour quantifier l'amplitude des perturbations scalaires, nous évaluons la quantité habituelle invariante de jauge [152]

$$\zeta \equiv \mathcal{R} - \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho,$$

ce qui réduit la perturbation de courbure  $\mathcal{R}$  sur les hypersurfaces à densité uniforme ( $\delta\rho = 0$ ). Ceci est conservé à grande échelle pour les perturbations purement adiabatiques résultant de la conservation de l'énergie (indépendamment des équations du champ). En termes de champ scalaire et de fluctuations de champ, la perturbation de courbure sur les hypersurfaces à densité uniforme est donnée par [152] :

$$\zeta = \frac{H\delta\phi}{\dot{\phi}}. \quad (3.48)$$

Les fluctuations de champ à  $k = aH$  et dans la limite du roulement lent sont données par  $\langle\delta\phi^2\rangle \simeq (H/2\pi)^2$ . Pour un champ scalaire unique, les perturbations sont adiabatiques et la perturbation de courbure  $\zeta$  peut être donc liée aux perturbations de densité lorsque les modes rentrent dans l'échelle de Hubble pendant l'ère dominée par la matière est donnée par  $A_s^2 = 4\langle\zeta^2\rangle/25$ .

Dans le cadre de l'approximation du roulement lent, le spectre de perturbation scalaire prend la forme suivante [152] :

$$A_s^2 \simeq \frac{4}{25} \left[ \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right) \left( \frac{H}{2\pi} \right) \right]^2 \Big|_{k=aH}, \quad (3.49)$$

$$\simeq \left( \frac{512\pi}{75M_4^6} \right) \frac{V^3}{V'^2} \left[ \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right]^3 \Big|_{k=aH}. \quad (3.50)$$

Comme on peut le constater, l'amplitude des perturbations scalaires est augmentée aux hautes énergies, en raison du terme  $\left(\frac{V}{\lambda}\right)$  par rapport au résultat standard à une valeur fixe de  $\phi$  pour un potentiel donné.

On s'intéresse maintenant à l'indice spectrale scalaire qui est défini dans l'approximation du

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

roulement lent, par

$$n_s - 1 = \frac{d \ln A_s^2}{d \ln k} \quad (3.51)$$

$$= \frac{d \ln A_s^2}{d \phi} \frac{d \phi}{d \ln k} \quad (3.52)$$

$$\simeq \left( \frac{d \ln V^3}{d \phi} - \frac{d \ln V'^2}{d \phi} + \frac{d \ln \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right)^3}{d \phi} \right) \frac{d \phi}{d \ln k}. \quad (3.53)$$

avec

$$d \ln k \simeq -dN \quad (3.54)$$

$$\simeq -\frac{8\pi}{M_4^2} \frac{V}{V'} \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right) d\phi. \quad (3.55)$$

Par conséquent,

$$n_s - 1 \simeq - \left( 3 \frac{d \ln V}{d \phi} - 2 \frac{d \ln V'}{d \phi} + 3 \frac{d \ln \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right)}{d \phi} \right) \frac{M_4^2}{8\pi} \frac{V'}{V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \quad (3.56)$$

$$= - \left( 3 \frac{V'}{V} - 2 \frac{V''}{V'} + 3 \frac{V'}{2\lambda + V} \right) \frac{M_4^2}{8\pi} \frac{V'}{V} \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \quad (3.57)$$

$$= -6 \frac{M_4^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + V} + \frac{2\lambda V}{(2\lambda + V)^2} \right) + 2 \frac{M_4^2}{8\pi} \left( \frac{V''}{V} \right) \frac{2\lambda}{2\lambda + V} \quad (3.58)$$

$$= -6\epsilon_V + 2\eta_V. \quad (3.59)$$

Cependant, comme  $\epsilon_V$  et  $\eta_V$  tend vers zéro aux hautes énergies, nous voyons que dans le contexte de l'inflation Branaire,  $n_s$  est très proche de 1 et nous obtenons le spectre de Harrison-Zel'Dovich ( $n_s = 1$ ).

On définit la variation de l'indice spectral scalaire  $\alpha_s$  en fonction des paramètres de roulement lent, par

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} \simeq -24\epsilon_V^2 + 16\epsilon_V\eta_V - 2\xi_V^2 \quad (3.60)$$

on définit l'amplitude de perturbations tensorielle par

$$A_t^2 = \frac{4}{25\pi} \left( \frac{H}{M_4} \right)^2 F^2(H/\mu) \Big|_{k=aH} \quad (3.61)$$

$$\simeq \frac{32}{75M_4^4} V \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right) F^2(H/\mu) \Big|_{k=aH}, \quad (3.62)$$

### 3.3.4 Théorie de la perturbation cosmologique sur la Brane

---

qui est une grandeur liée à la propagations des ondes gravitationnelles qui se propagent dans le volume et  $\mu$  est une constante donnée par

$$\mu = \frac{1}{M_4} \sqrt{\frac{4\pi\lambda}{3}}, \quad (3.63)$$

et

$$F(x) = \left[ \sqrt{1+x^2} - x^2 \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right]^{-1/2} \quad (3.64)$$

$$= \left( \sqrt{1+x^2} - x^2 \sinh^{-1} \frac{1}{x} \right)^{-1/2}, \quad (3.65)$$

En combinant les deux équations (3.41) et (3.63) on montre que  $x^2$  s'écrit sous la forme

$$x^2 = (H/\mu)^2 \simeq \frac{2V}{\lambda} \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right).$$

L'équation de F se simplifie à haute et à basse énergie. Dans la limite des basses énergies,  $x^2 \simeq \left(\frac{2V}{\lambda}\right)^2 \ll 1$  et dans la limite de hautes énergies,  $x^2 \simeq \left(\frac{V}{\lambda}\right)^2 \gg 1$ . Donc, à basse énergie, on a

$$\begin{aligned} F^2 &\simeq \left( 1 - x^2 \ln \frac{2}{x} \right)^{-1} \\ &\simeq 1, \end{aligned}$$

Comme  $x \succ \ln x$ , on constate que  $x^2 \ln(2/x) = 2x(x/2) \ln(2/x) < 2x \ll 1$ . C'est comme prévu, les expressions sont les mêmes que celles dérivées sans tenir compte des effets de la brane "cas standard". Par contre, à hautes énergies, et en utilisant l'approximation  $\sinh^{-1} x \simeq x - x^3/6$

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

pour des petites valeur de  $x$ , on obtient [159]

$$\begin{aligned}
 F^2 &\simeq \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{V}{\lambda}\right)^2} - \left(\frac{V}{\lambda}\right)^2 \sinh^{-1}\left(\frac{\lambda}{V}\right) \right]^{-1} \\
 &\simeq \left[ \frac{V}{\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{V}{\lambda}\right)^2} - \left(\frac{V}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{V} - \frac{\lambda^3}{6V^3}\right) \right]^{-1} \\
 &\simeq \left[ \frac{V}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2V^2}\right) - \frac{V}{\lambda} + \frac{\lambda}{6V} \right]^{-1} \\
 &= \left(\frac{\lambda}{2V} + \frac{\lambda}{6V}\right)^{-1} \\
 &= \frac{3V}{2\lambda} \gg 1.
 \end{aligned}$$

On peut s'attendre à ce que cela augmente l'amplitude des ondes gravitationnelles produites dans le régime à hautes énergies, mais cela dépend de la valeur du champ scalaire auquel elle est évaluée.

L'indice spectral tensoriel est donné par

$$n_t \equiv \frac{d \ln A_t^2}{d \ln k} \simeq -2\epsilon_V, \quad (3.66)$$

et sa variation et comme suit

$$\alpha_t \equiv \frac{d \ln n_t}{d \ln k} \simeq -4\epsilon_V \eta_V + 8\epsilon_V^2. \quad (3.67)$$

Dans l'approximation de roulement lent, la mesure des indices spectraux  $n_s$  et  $n_t$ , de leur variation  $\alpha_s$  et  $\alpha_t$  permettent de caractériser le potentiel  $V$ . On voit aussi que l'inflation prédit une déviation à l'invariance d'échelle,  $n_s = 1$  et  $n_t = 0$ , dépendant des paramètres de roulement lent.

On introduit aussi le rapport tenseur-scalaire  $r$  :

$$r \equiv \frac{A_t^2}{A_s^2} \simeq \epsilon \left[ \frac{\lambda}{\lambda + V} \right] \Big|_{k=aH} \simeq 16\epsilon_V \simeq -8n_t. \quad (3.68)$$

Cette relation entre  $r$  et  $n_t$  est appelée relation de consistance de l'inflation à champ unique en roulement lent.

Nous avons alors donné l'essentiel du formalisme de l'inflation branaire dans le modèle de Randall Sundrum. Dans le paragraphe suivant, nous étudierons certains modèles inflationnistes

à potentiel  $V(\phi)$  et verrons si les prédictions théoriques sont vraies de manière générale pour les différents modèles que nous allons considérer. Nous rechercherons également les différences perceptibles par rapport à la norme G.R. des résultats qui nous renseigneront sur l'effet des corrections de la Brane, et nous diront probablement s'il est nécessaire de modifier la théorie sous-jacente elle-même.

## 3.5 Modèles d'inflation

### 3.5.1 Inflation quadratique

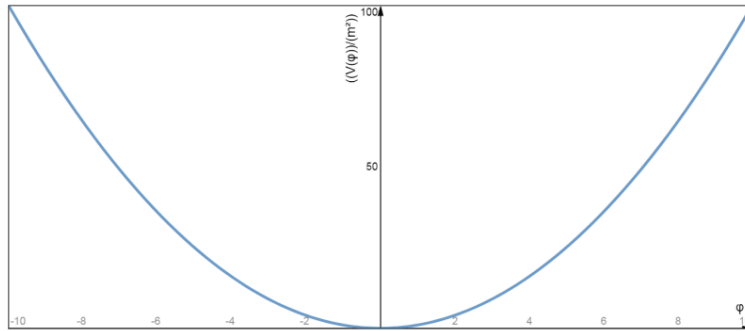


Figure 3.2 – Le potentiel chaotique.

Prenons l'exemple simple de l'inflation quadratique, de potentiel  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ . On peut calculer les paramètres de roulement lent de cette théorie :

$$\epsilon_v \approx \frac{\lambda M_4^2 V'^2}{4\pi V^3} \approx \frac{2\lambda M_4^2}{\pi} \frac{1}{m^2\phi^4}, \quad (3.69)$$

et

$$\eta_v \approx \frac{\lambda M_4^2}{4\pi} \left( \frac{V''}{V^2} \right) \approx \frac{\lambda M_4^2}{\pi} \frac{1}{m^2\phi^4}, \quad (3.70)$$

$$\xi_v^2 \approx \frac{\lambda^2 M_4^4 V'V'''}{16\pi V^4} = 0. \quad (3.71)$$

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

Le nombre d'e-folds est donné par :

$$N \approx -\frac{4\pi}{\lambda M_4^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{end}} \frac{V^2}{V'} d\phi \quad (3.72)$$

$$\approx -\frac{\pi m^2}{\lambda M_4^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{end}} \phi^3 d\phi \quad (3.73)$$

$$\approx \frac{\pi m^2}{4\lambda M_4^2} [\phi_i^4 - \phi_{end}^4] \quad (3.74)$$

la fin de l'inflation est alors obtenue si  $\epsilon_v = 1$ , qui nous donne l'expression de  $\phi_{end}$

$$\phi_{end}^4 \approx \frac{2\lambda M_4^2}{\pi m^2} \quad (3.75)$$

En injectant cette valeur de  $\phi_{end}$  dans l'équation (3.72), nous obtenons

$$N \approx \frac{\pi m^2}{4\lambda M_4^2} [\phi_i^4 - \phi_{end}^4] \approx \frac{\pi m^2}{4\lambda M_4^2} \phi_i^4 - \frac{1}{2} \quad (3.76)$$

$$m^2 \approx \frac{4\lambda M_4^2}{\pi \phi^4} \left( N + \frac{1}{2} \right). \quad (3.77)$$

$$\approx \frac{3}{(\pi \phi^2)^2} \left( N + \frac{1}{2} \right) M_5^6. \quad (3.78)$$

Dans le but de déduire une estimation du couplage  $m$  dans notre modèle, nous nous tournons vers le spectre de puissance scalaire  $A_s^2$ , qui a été mesuré avec précision et nous l'utilisons pour fixer la valeur de  $m$  afin d'obtenir le spectre de puissance scalaire approprié à partir de l'équation (3.49).

Dans la limite des hautes énergies, l'amplitude du spectre de perturbation scalaire est donnée comme suit

$$A_s^2 \approx \frac{64}{75} \frac{\pi}{\lambda^3 M_4^6} \left( \frac{V^6(\phi)}{V'^2(\phi)} \right) \approx \frac{\pi}{75\lambda^3 M_4^6} \times m^8 \phi^{10}. \quad (3.79)$$

et d'après les données observationnelles, relative à l'amplitude du spectre de perturbation scalaire [73], on a

$$A_s^2 = 2.23 \pm 0.16 \times 10^{-19}$$

et en remplaçons  $m$  par sa valeur dans l'équation (3.79), on trouve

$$A_s^2 \approx \frac{256}{75} \frac{\lambda M_4^2}{\pi^3} \phi^{-6} \left( N + \frac{1}{2} \right)^4. \quad (3.80)$$



d'où la valeur de  $\phi$  en fonction de  $N$  et  $M_5$  est la suivante

$$\phi \approx \left[ \frac{256 \lambda M_4^2}{75 \pi^3 A_s^2} \right]^{1/6} \left( N + \frac{1}{2} \right)^{2/3}, \quad (3.81)$$

$$\approx \left[ \frac{64}{25\pi^4 2.23 * 10^{-19}} \right]^{1/6} \left( N + \frac{1}{2} \right)^{2/3} * M_5 \quad (3.82)$$

Maintenant, avec les valeurs de  $m$  et de  $\phi$ , nous pouvons obtenir l'indice spectral  $n_s$  (3.59) et la variation de l'indice spectral scalaire  $\alpha_s$  (3.60) ainsi que le rapport tenseur-scalaire  $r$  (3.68) en fonction de  $N$ .

on calcul tout d'abord  $\epsilon_v$  et  $\eta_v$  en fonction de  $N$

on a

$$\epsilon_v \approx \frac{2\lambda M_4^2}{\pi} \frac{1}{m^2 \phi^4} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \approx 2\eta_v \quad (3.83)$$

d'après les relations (3.59) et (3.60) et (3.68) et (3.83) on trouve que

$$n_s \approx 1 - \frac{5}{2N + 1}, \quad (3.84)$$

$$\alpha_s \approx -\frac{16}{(2N + 1)^2}, \quad (3.85)$$

$$r \approx \frac{24}{(2N + 1)^2} \quad (3.86)$$

Nous résumons sous forme de tableau les résultats de  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  pour différente valeur du nombre de e-folding.

	$N = 50$	$N = 55$	$N = 60$
$n_s$	0.9505	0.9549	0.9586
$r$	0.0023	0.0019	0.0016
$\alpha_s$	-0.0016	-0.0013	-0.0011

**Tableau 3.1** – Valeurs des observables  $n_s$ ,  $\alpha_s$ , et  $r$ .

On constate dans ce modèle que Les valeurs de l'indice spectrale  $n_s$  et la variation de l'indice spectrale  $\alpha_s$ , nécessitent de très grandes valeurs de  $N$  pour pouvoir reproduire les résultats d'observations. Il convient également de souligner que ces valeurs extrêmement basses de  $r$  nous privent d'un paramètre important pour juger la validité du modèle.

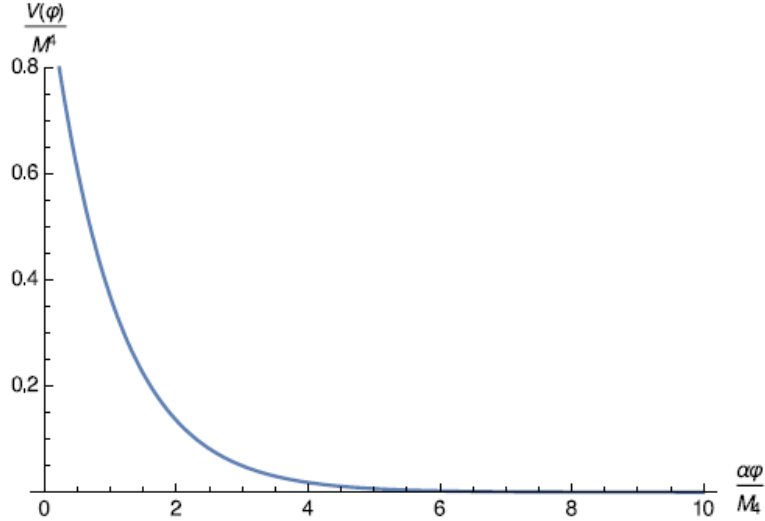


Figure 3.3 – L'inflation en loi de puissance.

### 3.5.2 Potentiel exponentiel

Le modèle d'inflation en exponentiel est très utilisé dans les récents modèles cosmologiques relatifs à la physique des branes. Il a été utilisé récemment pour décrire l'accélération observée de l'univers.

Nous considérons ici un potentiel exponentiel donné par

$$V(\phi) = \Lambda^4 \exp\left(-\frac{\alpha\phi}{M_4}\right) \quad (3.87)$$

D'après les relations, On calcule les paramètres du roulement lent

$$\epsilon_v \approx \frac{\lambda M_4^2 V'^2}{4\pi V^3} \approx \frac{\lambda \alpha^2}{4\pi \Lambda^4} \exp\left(\frac{\alpha\phi}{M_4}\right) \quad (3.88)$$

$$\eta_v \approx \frac{\lambda M_4^2}{4\pi} \left(\frac{V''}{V^2}\right) \approx \frac{\lambda \alpha^2}{4\pi \Lambda^4} \exp\left(\frac{\alpha\phi}{M_4}\right) = \epsilon_v \quad (3.89)$$

$$\xi_v^2 \approx \frac{\lambda^2 M_4^2 V' V'''}{16\pi^2 V^4} \approx \left[\frac{\lambda \alpha^2}{4\pi \Lambda^4} \exp\left(\frac{\alpha\phi}{M_4}\right)\right]^2 = \epsilon_v^2 \quad (3.90)$$

et le nombre de e-folds d'inflation (qu'on peut également l'obtenir par la relation (3.47))

$$N \approx -\frac{4\pi}{\lambda M_4^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V^2}{V'} d\phi \approx \frac{4\pi\Lambda^4}{\lambda M_4 \alpha} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \exp\left(-\frac{\alpha\phi}{M_4}\right) d\phi \quad (3.91)$$

$$\approx \frac{4\pi\Lambda^4}{\lambda\alpha^2} \left[ \exp\left(-\frac{\alpha\phi_i}{M_4}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha\phi_f}{M_4}\right) \right] \quad (3.92)$$

la fin de l'inflation est alors obtenue lorsque  $\epsilon_v = 1$ , ce qui nous donne l'expression de  $\phi_f$

$$\exp\left(-\frac{\alpha\phi_f}{M_4}\right) \approx \frac{\lambda\alpha^2}{4\pi\Lambda^4} \quad (3.93)$$

$$\phi_f \approx -\frac{M_4}{\alpha} \ln\left(\frac{\lambda\alpha^2}{4\pi\Lambda^4}\right) \quad (3.94)$$

En injectant l'expression de l'équation (3.94) dans l'équation (3.92), on trouve :

$$N = \frac{4\pi}{\lambda\alpha^2} \Lambda^4 \exp\left(-\frac{\alpha\phi_i}{M_4}\right) - 1 \quad (3.95)$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha\phi_*}{M_4}\right) = \frac{\lambda\alpha^2}{4\pi\Lambda^4} \times (N + 1) \quad (3.96)$$

Pour contraindre les valeurs de  $\alpha$  ou  $\Lambda$  du potentiel revenons maintenant au spectre de puissance scalaire. C'est-à-dire que nous voulons spécifier la valeur de  $\alpha$  ou  $\Lambda$ , ce qui nous donnera l'amplitude requise du spectre de perturbation scalaire à partir de l'équation

$$A_s^2 \approx \frac{64}{75} \frac{\pi}{\lambda^3 M_4^6} \left(\frac{V^6}{V'^2}\right)_{k=aH} \approx \frac{64}{75} \frac{\pi\Lambda^{16}}{\lambda^3 M_4^4 \alpha^2} \left(\exp\left(-\frac{\alpha\phi_*}{M_4}\right)\right)^4 \quad (3.97)$$

$$\approx \frac{1}{300\pi^3} \frac{\lambda\alpha^6}{M_4^4} \times (N + 1)^4 \quad (3.98)$$

$$\alpha^6 \approx \frac{300\pi^3 \times A_s^2}{\lambda} \times \frac{M_4^4}{(N + 1)^4} \quad (3.99)$$

Une caractéristique intéressante de ce potentiel est que le terme  $\Lambda$  n'est pas directement contraint par l'amplitude du spectre de puissance scalaire. Le terme  $\alpha$  est plutôt contraint. Toutefois, mathématiquement, cela n'est pas problématique, car à partir de l'équation (3.96), nous pouvons obtenir une forme de  $\Lambda$ , ce qui est tout ce dont nous avons besoin pour compléter nos calculs et spécifier le potentiel particulier. Maintenant, regardons les prédictions de ce

### Chapitre 3. Théorie de l'inflation branaire

---

modèle pour l'indice spectral et le fonctionnement de l'indice spectral.

$$n_s = [1 + 2\eta_v - 6\epsilon_v]_{k=aH} \quad (3.100)$$

et comme  $\epsilon_v = \eta_v$ , alors

$$n_s = [1 - 4\epsilon_v]_{k=aH} \quad (3.101)$$

En combinant l'équation (3.96) et (3.88), on trouve que les paramètres de roulement lent s'écrivent en fonction du nombre de e-folds de la façon suivante :

$$\epsilon_v \approx \eta_v \approx \frac{1}{N+1} \quad (3.102)$$

$$\xi_v^2 \approx \frac{1}{(N+1)^2} \quad (3.103)$$

En remplaçons (3.102) par sa valeur dans l'équation (3.101) ; on trouve :

$$n_s \approx 1 - \frac{4}{N+1} \quad (3.104)$$

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} \quad (3.105)$$

$$\simeq -24\epsilon_v^2 + 16\epsilon_v\eta_v - 2\xi_v^2 \quad (3.106)$$

$$\approx -10\epsilon_v^2 \quad (3.107)$$

$$\approx -\frac{10}{(N+1)^2} \quad (3.108)$$

$$r \approx \frac{24}{N+1} \quad (3.109)$$

Nous résumons sous forme de tableau les résultats de  $n_s$ ,  $r$  et  $\alpha_s$  pour différente valeur du nombre de e-folding.

	$N = 50$	$N = 55$	$N = 60$
$n_s$	0.9215	0.9286	0.9344
$r$	0.470	0.428	0.393
$\alpha_s$	$-3.844 * 10^{-3}$	$-3.188 * 10^{-3}$	$-2.687 * 10^{-3}$

**Tableau 3.2** – Valeurs des observables  $n_s$ ,  $\alpha_s$ , et  $r$ .

Pour conclure, nous résumons les principaux points développés dans ce chapitre. nous avons étudié les divers aspects de l'inflation dans les Univers branaire dans le cadre du modèle de

Randall-Sundrum. Partons d'une description simplifiée de la cosmologie branaire, toute la matière scalaire a été supposée confinée sur la brane à 4-dimensions dans un espace-temps à 5d, tandis que la gravité se propage dans la 5ème dimension perpendiculairement à la brane. Dans ce scénario, les équations de mouvement du champ scalaire ont été obtenues généralisant les équations de Friedmann via un terme quadratique en densité de matière  $\rho$ . Cet effet de la brane affectera par la même occasion toutes les grandeurs caractéristiques de la cosmologie inflationnaire telles que les paramètres de roulement lent ou encore les diverses quantités du spectre de perturbations. Il faut noter que dans la limite des basses énergies les résultats de l'inflation standard sont retrouvés facilement.

---

---

# Chapitre 4

---

## Contributions

### **4.1 Article 1 : On braneworld inverse power-law inflation, International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 10 (2018) 1850058 (9 pages)**

#### Résumé

La cosmologie est le domaine de la physique consacré à l'étude de l'univers observable à grande échelle, c'est-à-dire de sa structure et de son contenu matériel. Elle se résume donc principalement à la résolution des équations d'Einstein pour notre univers en tant que système physique. Cependant, les observations nécessaires pour réaliser cette tâche souffrent de limitations qui la rendent impossible en pratique. De plus, la relativité générale n'a été validée expérimentalement qu'à des échelles bien inférieures aux échelles cosmologiques, si bien que son utilisation aux échelles cosmologiques constitue une extrapolation dont la validité doit être testée. Cette théorie est plus communément remise en cause lorsqu'elle rentre en conflit avec la physique des particules, c'est-à-dire aux grandes énergies. Ceci ne manque pas d'arriver lorsqu'on s'intéresse plus précisément aux origines de l'univers.

Dans ce papier, nous avons étudié la théorie de l'inflation cosmologique dans les univers branaires générée par un champ scalaire avec un potentiel en loi de puissance inverse dans le scénario de Randall Sundrum type II. Ce type de potentiel (le soi-disant Ratra-Peebles) a été utilisé dans la littérature dans le contexte des modèles de Quintessence, mais il a été démontré qu'il conduit à une période d'inflation sous des hypothèses particulières sur le coefficient de la puissance. Nous avons étudié les effets de la brane dans le cadre d'un modèle des univers Branaires avec une équation de Friedmann modifiée dans la limite des Hautes énergies et sous l'approximation de roulement lent. Nous avons effectué en détail l'analyse correspondante et

**4.4.1 Article 1 : On braneworld inverse power-law inflation, International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 10 (2018) 1850058 (9 pages)**

---

dériver les solutions pour le champ scalaire et le facteur d'échelle. Puis on a trouvé les solutions aux équations de mouvement sur la brane. Ensuite nous avons présenté les résultats de l'indice spectral scalaire, sa variation et le rapport tenseur-sur-scalaire. Enfin nous avons montré que pour certaines valeurs du nombre de e-folds  $N$ , le potentiel offre de meilleurs résultats avec les données observationnelles.

## On braneworld inverse power-law inflation

H. Es-sobbahi\*

*LPHE-MS, Faculty of Science, Mohammed V University, Rabat, Morocco*  
*essohat@gmail.com*

M. Nach

*LabSIMO, Faculty of Science, Ibn Tofail University, Kenitra, Morocco*

Received 10 December 2017

Revised 15 February 2018

Accepted 5 March 2018

Published 10 April 2018

In the framework of the braneworld Randall–Sundrum type II model, we investigate an inflationary scalar model in the high-energy regime. In this regime, the slow-roll parameters and the perturbation spectrum of the model are derived. The corresponding results are dealt with according to the known observational data. Then the solutions to the equations of motion on the brane are given.

*Keywords:* Inflation potential; perturbation spectrum; Randall–Sundrum; braneworld.

PACS numbers: 98.80.Cq, 98.80.Es, 04.50.+h

### 1. Introduction

In modern cosmology, inflation plays a key role.<sup>1</sup> It has become the dominant paradigm to explain many long-standing issues of big-bang models such as horizon, flatness, homogeneity and monopole problems.<sup>2,3</sup> It also provides the primordial density fluctuations required for the formation of large-scale structures.<sup>4,5</sup>

In spite of its success, a theory of inflation is still missing, because inflation can take place at energies greater than  $10^{16}$  GeV, and of course, at these energy scales, particle physics remains speculative because it corresponds to the regimes which cannot be probed in the accelerators.

The three main parameters in the study of inflation are the spectral index ( $n_S$ ), the tensor-to-scalar ratio ( $r$ ) and the running of the spectral index ( $\alpha = \frac{dn_S}{d \ln k}$ ). All the standard models of inflation are based on a type of matter known as scalar fields

\*Corresponding author.



which are among other things, responsible for the physics of symmetry breaking.<sup>6</sup> Particle physics has yet to offer a definitive view of the detailed properties of such fields. In particular, it has not specified the potential energy, which is responsible for driving inflationary expansion. The freedom exists to build a wide range of different inflationary models, based on different choices of the potential energy and perhaps different motivations for its particle physics origin.

The literature contains a large number of different models of inflation in connection with string theory,<sup>7–13</sup> brane physics<sup>14,15</sup> and black holes.<sup>16,17</sup> A model of inflation amounts to a choice for the potential of the scalar field (or fields) driving inflation, plus a means of ending inflation.

In this work, we concentrate on the Ratra–Peebles potential, which is used to illustrate many features common to scalar-field based quintessence scenarios. This potential has been studied in various occasions; in particular in connection with quintessence in brane inflation<sup>19,20</sup> and tachyonic inflation.<sup>21</sup> At high energies, and under the slow roll approximation, we compute the inflation time evolution  $\phi = \phi(t)$  and determine the corresponding scale factor  $a = a(t)$  and other cosmological quantities.

The organization of this work is as follows. In Sec. 2, we summarize the basics of the brane model as well as the dynamics of inflation. In Sec. 3, we investigate inverse monomial inflation in the framework of Randall–Sundrum type II RS-II model. Then, we present our results. Section 4 is devoted to conclusions.

## 2. Cosmological Perturbation Theory on the Brane

In this section, we give some basic aspect on 3-brane cosmology in five-dimensional space–time.<sup>18</sup> The exact analysis is done in Refs. 32 and 33. We assume that the universe is filled with a perfect fluid with energy density  $\rho(t)$  and pressure  $p(t)$ . In the braneworld cosmological model where the metric induced on the brane is a spatially flat metric of Friedmann–Robertson–Walker (FRW) model. The Friedmann equation on the brane reads as

$$H^2 = \frac{\Lambda_4}{3} + \left( \frac{8\pi}{3M_4^2} \right) \rho + \left( \frac{4\pi}{3M_5^3} \right)^2 \rho^2 + \frac{\varepsilon}{a^4}, \quad (2.1)$$

describing the time evolution of  $a(t)$ .<sup>22,30,31</sup> Here,  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  is the Hubble parameter,  $a$  is the scale factor,  $\Lambda_4$  is the four-dimensional cosmological constant and the final term represents the influence of bulk gravitons on the brane. The term  $\frac{\varepsilon}{a^4}$  takes the name of dark radiation, since it decomposes in the same way as radiation. However, during inflation this term will be diluted quickly and we can neglect it. The brane tension  $\lambda$  relates the four- and five-dimensional Planck masses via

$$M_4 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{M_5^2}{\sqrt{\lambda}} \right) M_5.$$

In the present work, we will assume that the  $\varepsilon$  term is zero and choose the form of  $\Lambda_5$  as  $\Lambda_5 \approx -\frac{4\pi\lambda^2}{3M_5^3}$ , such that  $\Lambda = 0$ . Physically thus, we fine-tune our parameters

to make the 4D cosmological constant to be zero.<sup>23</sup> Then the modified Friedmann equation reduces to

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_4^2} \rho \left[ 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right], \quad (2.2)$$

where we have assumed that inflation rapidly makes any dark radiation term negligible.<sup>24,25</sup> This reduces to the usual Friedmann equation for  $\rho \ll \lambda$ . If the universe is dominated by a scalar field  $\phi$  with potential  $V(\phi)$ , we can use the slow-roll approximation to write this as<sup>26</sup>

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_4^2} V(\phi) \left[ 1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right]. \quad (2.3)$$

The scalar field obeys the usual slow-roll equation

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (2.4)$$

where the prime indicates a derivative with respect to field, and the dot indicates a derivative with respect to time.

We define the slow-roll parameters on the brane as follows:<sup>9</sup>

$$\varepsilon = \frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \left[ \frac{4\lambda(1+V)}{(2\lambda+V)^2} \right], \quad (2.5)$$

$$\eta = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{V''}{V} \left[ \frac{4\lambda}{2\lambda+V} \right], \quad (2.6)$$

where  $\kappa^2 = 8\pi G = \frac{8\pi}{M_4^2}$  and  $M_4 = 1.22 \times 10^{28}$  eV is the four-dimensional Planck mass. In the slow-roll approximation, these parameters are very small, such as  $\varepsilon \ll 1$  and  $|\eta| \ll 1$ . Inflation ends if one of the two parameters is equal to one. In this case, it is easy to calculate the number of  $e$ -foldings between the start and end of inflation. The amount of expansion in terms of  $e$ -foldings is given by

$$N = -\kappa^2 \int_{\phi_i}^{\phi_{\text{end}}} \frac{V}{V'} \left[ 1 + \frac{V}{2\lambda} \right] d\phi, \quad (2.7)$$

where  $\phi_i$  and  $\phi_{\text{end}}$  are the values of the scalar field at the beginning and at the end of the expansion, respectively.

Now, we discuss the cosmological perturbations in braneworld inflation. We consider the gauge invariant perturbation parameter  $\zeta = -\psi - H \frac{\delta\rho}{\rho}$  with  $\psi$  as the curvature perturbation. This parameter is defined on slices of uniform density and reduces to the perturbation of curvature at the super-horizon scales and is almost constant on these scales.<sup>27</sup> This property does not depend on the gravitational field equations.<sup>28</sup> Therefore, for a spatially flat hypersurface, we have  $\zeta = H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$ , where  $\delta\phi$  on the large scale is  $|\delta\phi| = \frac{H}{2\pi}$ . In this case and under the slow-roll approximation,

the spectrum of scalar perturbations is written as<sup>18</sup>

$$A_S^2 = \frac{4}{25} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{512\pi}{75M_4^6} \frac{(V(\phi))^3}{(V'(\phi))^2} \left( 1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right)^3. \quad (2.8)$$

Under the slow-roll approximation, the scale dependence of the scalar power spectra is determined by the scalar spectral index which obeys the usual relation<sup>18</sup>

$$n_S - 1 = \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} \simeq -6\varepsilon + 2\eta. \quad (2.9)$$

In the approximation of high energies,  $\varepsilon$  and  $\eta$  are both suppressed. We find that in the context of braneworld,  $n_s$  is very close to 1 and we obtain the Harrison–Zel’dovich spectrum ( $n_s = 1$ ). The running of the spectral index ( $\alpha_S$ ) is presented. It is also possible to define the variation of the spectral index

$$\alpha_S = \left. \frac{dn_S}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -24\varepsilon^2 + 16\varepsilon\eta - 2\zeta^2. \quad (2.10)$$

The amplitude of tensor perturbations and the tensor spectral index are given by

$$A_T^2 \simeq \frac{32}{75M_4^4} \left[ V(\phi) \left[ 1 + \frac{V(\phi)}{2\lambda} \right] \right]_{k=aH} \quad (2.11)$$

and

$$n_T = \left. \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} \right|_{k=aH} \simeq -2\varepsilon. \quad (2.12)$$

Therefore, the tensor-to-scalar ratio is given by<sup>34</sup>

$$r = \frac{A_T^2}{A_S^2} = \left[ \varepsilon \left[ \frac{1}{1 + \frac{V(\phi)}{\lambda}} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.13)$$

### 3. Inverse Monomial Inflation

Here, we restrict our discussion to potentials of the form

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}. \quad (3.1)$$

This potential has been studied in various occasions in connection with quintessence in brane inflation<sup>19,20</sup> and tachyonic inflation.<sup>21</sup> One of the interesting results in this matter, which is due to Huey and Lidsey,<sup>19,20</sup> is that the inflation is generated for the range  $\alpha > 2$ . At high energies, the standard slow-roll parameters were modified by the quadratic correction of the Friedmann equation. The modifications related to usual slow-roll parameters are contained in the square brackets of expressions

(2.5), (2.6). The slow-roll parameters are given by

$$\varepsilon = \frac{1}{2\kappa^2} \alpha^2 \phi^{\alpha+2} \left[ \frac{4\lambda(\phi^\alpha + M^{4+\alpha})}{(2\lambda\phi^\alpha + M^{4+\alpha})^2} \right], \quad (3.2)$$

$$\eta = \frac{1}{2\kappa^2} \alpha(\alpha+1) \phi^{\alpha-2} \left( \frac{4\lambda}{2\lambda\phi^\alpha + M^{4+\alpha}} \right). \quad (3.3)$$

During slow-roll brane inflation, under the approximation  $\lambda \ll V(\phi)$ , and from (3.2), (3.3) we have

$$\varepsilon \simeq \frac{4\lambda\alpha^2}{2\kappa^2} \frac{\phi^{\alpha-2}}{M^{4+\alpha}}, \quad (3.4)$$

$$\eta = \frac{2\lambda\alpha(\alpha+1)\phi^{\alpha-2}}{\kappa^2 M^{4+\alpha}}, \quad (3.5)$$

and

$$\zeta^2 \simeq \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} \frac{V'V'''}{V^4} \simeq \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} \frac{\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2)}{M^{8+2\alpha}} \phi^{2\alpha-4}. \quad (3.6)$$

Inflation ends when  $\varepsilon = 1$  and this occurs for

$$\phi_{\text{end}} = \left( \frac{2\kappa^2}{4\lambda} \frac{M^{4+\alpha}}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-2}}. \quad (3.7)$$

The potential at the end of inflation

$$V_{\text{end}} = \frac{1}{\left( \frac{\kappa^2}{2\lambda\alpha^2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( M^{\frac{4+\alpha}{\alpha-1}} \right)}. \quad (3.8)$$

The modifications within square brackets to usual number of  $e$ -folds (2.7) allow to obtain more inflation between any two values of the field. At very high energies  $\lambda \ll V$

$$N = -\frac{\kappa^2}{2\lambda} \int_{\phi_i}^{\phi_{\text{end}}} \frac{V^2}{V'} d\phi. \quad (3.9)$$

For the potential (3.1), we find

$$N = \frac{\kappa^2 M^{\frac{2(4+\alpha)}{\alpha}}}{2\lambda\alpha(2-\alpha)} \left[ V_{\text{end}}^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - V_i^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \right], \quad (3.10)$$

$$N = \frac{\kappa^2 M^{4+\alpha}}{2\lambda\alpha(2-\alpha)} \left[ \phi_{\text{end}}^{2-\alpha} - \phi_{\text{in}}^{2-\alpha} \right]. \quad (3.11)$$

The amplitude of the scalar and tensor perturbations produced during inflation are given by

$$A_S^2 = \frac{\kappa^6}{75\pi^2} \frac{V^3}{V'^2} \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right)^3, \quad (3.12)$$

$$A_T^2 = \frac{\kappa^4}{150\pi^2} V \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right). \quad (3.13)$$

At very high energies, the amplitude of the scalar perturbation can be approximated by

$$A_S^2 = \frac{\kappa^6}{600\pi^2\lambda^3} \frac{V^6}{V'^2} = \frac{\kappa^6}{600\pi^2\lambda^3} \left( \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{2\alpha-1}} \right)^2, \quad (3.14)$$

then we express  $A_S^2$  in functions of  $N$  and  $\alpha$

$$A_S^2 = \frac{[\alpha - (\alpha - 2)N]^2}{600\pi^2\kappa^2\lambda}, \quad (3.15)$$

$$A_T^2 = \frac{\kappa^4}{150\pi^2} V \left( \frac{2\lambda + V}{2\lambda} \right). \quad (3.16)$$

The scale-dependence of the perturbations is given by mean of the spectral indices

$$n_S - 1 = \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} \approx -6\varepsilon + 2\eta, \quad (3.17)$$

$$n_S - 1 = \frac{4\lambda\alpha(1 - 2\alpha)}{\kappa^2} \frac{\phi^{\alpha-2}}{M^{4+\alpha}}, \quad (3.18)$$

$$n_T = \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} = \frac{4\lambda\alpha(\alpha + 1)}{\kappa^2} \frac{\phi^{\alpha-2}}{M^{4+\alpha}}. \quad (3.19)$$

The slow-roll parameters at horizon crossing are found from Eqs. (3.4)–(3.6)

$$\varepsilon \simeq \frac{\alpha}{\alpha + (\alpha - 2)N}, \quad \eta \simeq \frac{\alpha + 1}{\alpha + (\alpha - 2)N}, \quad \zeta \simeq \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + (\alpha - 2)N)^2}. \quad (3.20)$$

Therefore, we have from Eqs. (3.12) and (3.13)

$$n_S - 1 \simeq \frac{2 - 4\alpha}{\alpha + (\alpha - 2)N}, \quad (3.21)$$

$$n_T \simeq -\frac{2\alpha}{\alpha + (\alpha - 2)N} \quad (3.22)$$

and

$$\alpha_S \simeq \frac{-24\alpha^2 + 16\alpha(\alpha + 1) - 2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + (\alpha - 2)N)^2}. \quad (3.23)$$

In fact, the intrinsic amplitude of the tensor fluctuations is rarely mentioned, but rather the value normalized to the (measured) value of the scalar fluctuations. We define the tensor-to-scalar ratio

$$r = \frac{A_T^2}{A_S^2} \simeq \varepsilon \frac{\lambda}{V}. \quad (3.24)$$

The tensor-to-scalar ratio is expressed as a function of  $\alpha$  and  $N$  as follows:

$$r = \frac{\kappa^2 \left[ \frac{2\lambda\alpha}{\kappa^2 M^{4+\alpha}} (\alpha - (2 - \alpha)N) \right]^{\frac{2}{2-\alpha}}}{2[\alpha^2 + (\alpha - 2)^2 N^2]}. \quad (3.25)$$

Now, we look at specific cases of the potential for given values of  $\alpha$ , see Table 1.

Table 1. Values of  $n_s$ ,  $\alpha_S$ ,  $r$  with respect to  $N$ . As we see in this table, when  $N$  and  $\alpha$  increase,  $n_s$  gets near to the experimental value.

$N/\alpha$	$N = 55$			$N = 60$			$N = 70$		
$\alpha$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r$
3	0,8276	-19	$1,777.10^{-2}$	0,8412	-16,12	$1,506.10^{-2}$	0,863	-12	$1,121.10^{-2}$
4	0,8772	-9,54	$9,554.10^{-12}$	0,8771	-8,06	$8,784.10^{-12}$	0,902	-5,97	$7,564.10^{-12}$
5	0,9841	-7,06	$2,381.10^{-15}$	0,9027	-5,96	$4,848.10^{-15}$	0,916	-4,41	$4,386.10^{-15}$
6	0,9026	-5,95	$9,278.10^{-17}$	0,9105	-5,02	$8,893.10^{-17}$	0,923	-3,71	$8,247.10^{-17}$

At high energies, it is remarked that during the slow-roll inflation  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , the Friedmann equation (2.3) can be approximated by

$$H(\phi) = \frac{\kappa}{\sqrt{6\lambda}} V(\phi), \quad (3.26)$$

such an approach is valid only if  $\lambda \ll V(\phi)$ . For simplicity, we can write the Friedmann and Klein–Gordon equations in the Hamilton–Jacobi form<sup>29</sup>

$$H'a' = -\frac{\kappa^2}{2} Ha, \quad (3.27)$$

which becomes

$$H' = -\frac{\kappa^2}{2} \dot{\phi}. \quad (3.28)$$

The first Hamilton–Jacobi equation can be integrated and gives

$$a(\phi) = \exp\left[-\frac{\kappa^2}{2} \int \frac{H}{H'} d\phi\right]. \quad (3.29)$$

Substituting the potential (3.1) into the Friedmann equation (3.26) and integrating in above equation, we obtain

$$a(\phi) = C \exp\left[\frac{\kappa^2}{4\alpha} \phi^2\right]. \quad (3.30)$$

Considering the scale factor dependence  $a(\phi)$ , we can determine the dependence  $\phi(t)$  through the second Hamilton–Jacobi equation which takes the following form:

$$\dot{\phi} - \frac{2\alpha}{\kappa\sqrt{6\lambda}} \frac{M^{\alpha+4}}{\phi^{\alpha+1}} = 0. \quad (3.31)$$

This equation can be easily integrated to

$$\phi(t) = \left[ \phi_0^{\alpha+2} + \frac{2\alpha[\alpha+2]}{\kappa\sqrt{6\lambda}} M^{\alpha+4} (t-t_0) \right]^{\frac{1}{\alpha+2}}, \quad (3.32)$$

where  $\phi_0 = \phi(t_0)$  is the initial value of the inflaton field. Thus, we have found the dependence of the inflaton field with the cosmological time.

## 4. Conclusion

In this work, we have studied the inverse monomial inflation in the framework of the Randall–Sundrum II brane model. In particular, we have calculated the scale factor for the potential of Ratra–Peebles having an exponential form, as it appears in the inflation theory.

The Ratra–Peebles model comes closer to the lower values of  $n_s$  from the Planck, WMAP and BICEP2 results when  $\alpha$  increases, while the  $\alpha_s$  values are in good agreement with the data. Based on the Hamilton–Jacobi formalism, we have constructed a framework in order to determine the dependence of the scalar field with the scale factor and also with the cosmological time allowing to specify the corresponding behavior.

## Acknowledgments

The authors would like to thank URAC09 CNRST for support.

## References

1. A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
2. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
3. A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
4. G. Mukhanov and J. Chibisov, *Exp. Theor. Phys.* **33**, 532 (1981).
5. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117**, 175 (1982).
6. A. R. Liddle and H. D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).
7. T. Battefeld and S. Watson, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 435 (2006).
8. C. P. Burgess, *Pramana* **63**, 1269 (2004).
9. J. M. Cline, Inflation from string theory, arXiv:hep-th/0501179.
10. A. Linde, *eConf C040802*, L024 (2004).
11. A. Linde, *J. Phys. Conf. Ser.* **24**, 151 (2005).
12. L. Pilo, A. Riotto and A. Zaffaroni, *J. High Energy Phys.* **2004**, 052 (2004).
13. S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister and S. P. Trivedi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2003**, 013 (2003).
14. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
15. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
16. S. G. Rubin, Massive primordial black holes in hybrid inflation, in *Ya Pomeranchuk and Physics at the Turn of the Century* (World Scientific, 2003), p. 413, arXiv:astro-ph/0511181.
17. P. Velino, *Phys. Rev. D* **72**, 124004 (2005).
18. R. Maartens, D. Wands, A. Bassett and I. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000).
19. G. Huey and J. E. Lidsey, *Phys. Lett. B* **514**, 217 (2001).
20. E. J. Copeland, A. R. Liddle and J. E. Lidsey, *Phys. Rev. D* **64**, 023509 (2001).
21. L. R. Abramo and F. Finelli, *Phys. Lett. B* **575**, 165 (2003).
22. P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477**, 285 (2000).
23. P. Brax, C. Van de Bruck and A. C. Davis, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 2183 (2004).
24. K. Ichiki, M. Yahiro, T. Kajino, M. Orito and G. J. Mathews, *Phys. Rev. D* **66**, 043521 (2002).

25. N. Sasankan, R. M. Gangopadhyay, G. J. Mathews and M. Kusakabe, *Phys. Rev. D* **95**, 083516 (2017).
26. R. Maartens, D. Wands, B. Basset and I. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000).
27. A. Riotto, Inflation and the theory of cosmological perturbations, arXiv:hep-ph/0210162.
28. D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043527 (2000).
29. D. S. Salopek, J. R. Bond and J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **40**, 1753 (1989).
30. P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Phys. Lett. B* **477**, 285 (2000).
31. E. Flanagan, S.-H. Tye and I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **62**, 044039 (2000).
32. S. Mukohyama, T. Shiromizu and K. Maeda, *Phys. Rev. D* **62**, 1 (2000).
33. P. Bowcock, C. Charmousis and R. Gregory, *Class. Quantum Grav.* **17**, 4745 (2000).
34. H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 213 (2003).



## 4.2 Article 2 : On braneworld monomial inflation, International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 25 (2018) 1850147 (9 pages)

### Résumé

Dans le présent document, nous avons examiné un modèle d'inflation cosmologique dans les univers branaires générée par un champ scalaire avec un potentiel Monomial dans le scénario de Randall Sundrum type II. Précisément, nous avons considéré le potentiel  $V(\phi) = \mu^4 \left(\frac{\phi}{M_4}\right)^\alpha$ . Nous avons étudié les effets de la brane dans le cadre d'un modèle des univers Branaire avec une équation de Friedmann modifiée dans l'approximation de roulement lent aux énergies élevées. Nous avons en particulier déterminé l'échelle de masse  $\mu$ , et nous avons effectué en détail l'analyse correspondante et dériver les solutions pour le champ scalaire et le facteur d'échelle qui a une forme exponentielle. Puis on a trouvé les solutions aux équations de mouvement sur la brane. Ensuite nous avons présenté les résultats de l'indice spectral scalaire, sa variation et le rapport tenseur-sur-scalaire. Enfin nous avons montré que pour certaines valeurs du nombre d'e-folds  $N$ , le potentiel offre de meilleurs résultats pour les données observationnelles. Bien que les modèles d'inflation chaotique aient été abondamment étudiés dans la littérature, nous pensons que l'inflation monomiale mérite toujours plus d'attention et de considération.

## On braneworld monomial inflation

R. Ahl Laamara,<sup>\*,†</sup> H. Es-sobbahi<sup>\*,‡</sup> and S. E. Ennadifi<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> *LHEP-MS, Faculty of Science, Mohammed V University, Rabat, Morocco*

<sup>†</sup> *CRMEF, Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation,  
Meknès, Morocco*

<sup>‡</sup> *essohat@gmail.com*

Received 8 May 2018

Revised 13 August 2018

Accepted 29 August 2018

Published 7 September 2018

We investigate a monomial inflationary scalar model in the braneworld Randall–Sundrum type II model. In the high-energy regime, we determine the slow-roll parameters as well as the perturbation spectrum of the model. According to the known observational data, the corresponding results and the solutions of the equation of motion on the brane are discussed.

*Keywords:* Inflation potential; perturbation spectrum; Randall–Sundrum; braneworld.

PACS numbers: 98.80.Cq, 98.80.Es, 04.50.+h

### 1. Introduction

Cosmic inflation is currently the main paradigm for explaining the anisotropies of the Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR).<sup>1–4</sup> It describes a phase of accelerated expansion that provides a causal mechanism for generating inhomogeneities on cosmological scales and solves the various problems of the standard hot big bang model.<sup>5–9</sup> Inflation is usually driven by one or more scalar fields. However, the physical nature of these scalar fields remains unknown, and many different inflationary models have been suggested.<sup>10</sup> The reason for such a situation stems from the fact that inflation can occur at energies above  $10^{16}$  GeV,<sup>11</sup> and of course at these energy scales, particle physics remains elusive and, as a result, there is currently a wide variety of different inflationary scenarios. Moreover, to obtain sufficiently long inflation such models should have very flat potentials on the ranges of super-Planckian fields.<sup>12,13</sup> The large field model is characterized by

<sup>‡</sup>Corresponding author.

the condition that the field moves over distances greater than the Planck mass, and the slow-roll parameters obey the following condition  $0 < \eta \leq \varepsilon$ . In this category of models, monomial inflation with the chaotic inflation models are one of the most studied models in the literature.<sup>20</sup> Recently, a type of extra-dimensional theories that has attracted a lot of attention is the Randall–Sundrum (RS-II) model where our observed Universe is considered as a brane embedded in a higher-dimensional space–time.<sup>21–24</sup> In such models, only gravitation can propagate through the whole space–time, unlike ordinary matter living on the brane. The RS-II chaotic inflation has been studied and extended to other inflations.<sup>25</sup>

In this work, our goal is to find an inflation model that gives a correct magnitude for the scalar density perturbation and provides values of the scalar spectral index  $n_s$  and of the tensor-scalar ratio  $r$  compatible with Planck constraints. For that, we consider the monomial potential  $V(\varphi) = \mu^4 \left(\frac{\phi}{M_4}\right)^\alpha$ , and compute the corresponding scale factor  $a = a(t)$ , the inflation time evolution  $\phi = \phi(t)$ , and the other cosmological quantities under the slow-roll approximation at high energies.

The organization of this paper is as follows. In Sec. 2, we review the physics of the brane model and the dynamics of inflation. In Sec. 3, we study the monomial inflation  $V(\varphi)$  in the Randall–Sundrum type II (RS-II) model, and present our results. The last section is dedicated to the conclusion.

## 2. Cosmological Perturbation on the Brane

We begin this section by briefly recalling some fundamentals on RS-II braneworld model. The four-dimensional Einstein equations can be written in the RS-II model as follows:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + \frac{8\pi}{M_4^2} T_{\mu\nu} + \left(\frac{8\pi}{M_5^3}\right)^2 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

where  $T_{\mu\nu}$  is the energy–momentum tensor of matter on the brane,  $E_{\mu\nu}$  is the projection of the five-dimensional Weyl tensor on the brane,  $\Lambda_4$  is the four-dimensional cosmological constant, and finally  $\pi_{\mu\nu}$  is a contribution of the quadratic of the energy–momentum tensor in the field equation. The four-dimensional cosmological constant  $\Lambda_4$  can be computed in terms of the five-dimensional one as follows:

$$\Lambda_4 = \frac{4\pi}{M_5^3} \left( \Lambda_5 + \frac{4\pi\lambda^2}{3M_5^3} \right), \quad (2.2)$$

where  $\lambda$  is the brane tension. The relationship between the Planck masses  $M_4$  and  $M_5$  is given by

$$M_4 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{M_5^2}{\sqrt{\lambda}} \right) M_5. \quad (2.3)$$

In a braneworld cosmological scenario where the metric induced on the brane is a spatially flat metric of Friedmann–Robertson–Walker model, the Friedmann equation on the brane is described by

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_4}{3} + \left(\frac{8\pi}{3M_4^2}\right)\rho + \left(\frac{4\pi}{3M_5^3}\right)^2\rho^2 + \frac{\varepsilon}{a^4}, \quad (2.4)$$

where  $a(t)$  is the usual scale factor at time  $t$ ,  $\rho$  is the energy density of matter,  $\varepsilon$  is an integration constant coming from  $E_{\mu\nu}$ , and the term  $\varepsilon/a^4$  is known as the dark radiation since it decays in the same way as radiation.<sup>a</sup> However, during inflation, this term will be diluted quickly, and we can neglect it. In the following, we will assume that  $\Lambda_4 = 0$  and  $\varepsilon = 0$ ; this leads to the writing of the Friedmann equation (2.4) in the following form:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3M_4^2}\rho\left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right). \quad (2.5)$$

Now, we consider an inflationary theory driven by a scalar field  $\varphi$ , for which the pressure and the energy density are given by  $P = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$  and  $\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ , respectively, where  $V(\varphi)$  is the scalar potential. The scalar field on the brane satisfies the Klein–Gordon equation

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad V'(\varphi) = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}. \quad (2.6)$$

In the slow-roll limit, the Friedmann equations (2.5) and KG equation (2.6) reduce to

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_4^2}V\left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right) \quad (2.7)$$

and

$$V'(\varphi) \simeq -3H\dot{\varphi}. \quad (2.8)$$

Using these two equations, we can define the slow-roll parameters on the brane as<sup>31</sup>

$$\varepsilon = \frac{M_4^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \left[\frac{1 + \frac{V}{\lambda}}{\left(1 + \frac{V}{2\lambda}\right)^2}\right], \quad (2.9)$$

$$\eta = \frac{M_4^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V}\right) \left[\frac{1}{1 + \frac{V}{2\lambda}}\right]. \quad (2.10)$$

The amount of inflation is given by the number of  $e$ -foldings between some reference time  $t_i$  and the end of inflation  $t_f$  as  $N = \int_{t_i}^{t_f} H dt$ . The number of  $e$ -folds is also modified on the brane

$$N \approx -\frac{8\pi}{M_4^2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} \left[1 + \frac{V}{2\lambda}\right] d\varphi, \quad (2.11)$$

<sup>a</sup>The energy density during radiation domination is proportional to  $a^{-4}$ .

where  $\varphi_i$  and  $\varphi_f$  are the values of the scalar field at the beginning and at the end of the expansion, respectively. At very high energies  $\lambda \ll V$ , we have

$$N \approx -\frac{8\pi}{2\lambda M_4^2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V^2}{V'} d\varphi. \quad (2.12)$$

Using the slow-roll approximation, the amplitude of the scalar and tensor perturbations produced during inflation are given

$$A_S^2 \approx \frac{512\pi}{75M_4^6} \left[ \frac{V^3}{V'^2} \left( 1 + \frac{V(\varphi)}{2\lambda} \right)^3 \right]_{k=aH}, \quad (2.13)$$

$$A_T^2 \approx \frac{32}{75M_4^4} \left[ V \left( 1 + \frac{V(\varphi)}{2\lambda} \right) \right]_{k=aH}. \quad (2.14)$$

The properties of the power spectra can be characterized by the spectral indices and their running. They are determined by the coefficients of the Taylor expansions of the logarithm of the power spectra with respect to  $\ln k$ ,<sup>27</sup> which gives the usual relation

$$n_S - 1 = \frac{d \ln A_S^2}{d \ln k} \approx -6\varepsilon + 2\eta, \quad (2.15)$$

$$n_T = \frac{d \ln A_T^2}{d \ln k} \Big|_{k=aH} \approx -2\varepsilon. \quad (2.16)$$

However, at high energies, the slow-roll parameters ( $\varepsilon$  and  $\eta$ ) are both suppressed, we find that in the context of braneworld,  $n_S$  is very close to 1 and we obtain the Harrison–Zel’dovich spectrum ( $n_S = 1$ ). For the runnings, one has the two following expressions:

$$\alpha_S = \frac{d^2 \ln A_S^2}{d(\ln k)^2} \Big|_{k=aH} = \frac{dn_S}{d \ln k} \Big|_{k=aH} \approx -24\varepsilon^2 + 16\varepsilon\eta - 2\zeta^2, \quad (2.17)$$

$$\alpha_T = \frac{d^2 \ln A_T^2}{d(\ln k)^2} \Big|_{k=aH}. \quad (2.18)$$

Under the slow-roll approximation the ratio  $r$ ,<sup>b</sup> takes the form<sup>28</sup>

$$r = \frac{A_T^2}{A_S^2} = \left[ \varepsilon \left[ \frac{1}{1 + \frac{V(\phi)}{\lambda}} \right] \right]_{k=aH}. \quad (2.19)$$

### 3. Monomial Inflation

Here, we restrict our discussion to potentials of the form

$$V(\varphi) = \mu^4 \left( \frac{\phi}{M_4} \right)^\alpha. \quad (3.1)$$

<sup>b</sup>The ratio  $r$  is often used to characterize the primordial level of gravity waves.

This potential depends on a mass scale  $\mu^4$  constrained by the scalar perturbation amplitude value which has been precisely measured. Here,  $M_4$  is the four-dimensional Planck mass, and the free index  $\alpha$  that can also take integer or fractional values.<sup>14–19</sup> Here, we take  $\alpha \in [0.2–5]$  because for  $\alpha \succ 5$ , we already know that the models are excluded and have no energy motivation, and for  $\alpha \succ 0.2$  instead of  $\alpha = 0$  because the potential cannot be completely flat since it must stop inflation. Another possibility is simply to set  $\alpha$  to some interesting values such as  $\alpha = 2$  which is the standard chaotic inflation model proposed by Linde.<sup>20</sup> The case  $\alpha = 2/3$  is related to the monodromy potential,<sup>16</sup> whereas the cases  $\alpha = 1, \dots, 4$  represent interesting phenomenological scenarios. At high energies where  $\lambda \ll V$ , the brane effect becomes important, and the standard parameters of the slow-roll approximations are modified by the quadratic correction of the Friedmann equation. These parameters are given as follows:

$$\varepsilon \approx \frac{\lambda M_4^2 V'^2}{4\pi V^3} \approx \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\alpha^2}{\mu^4} \left( \frac{\phi}{M_4} \right)^{-(\alpha+2)}, \quad (3.2)$$

$$\eta \approx \frac{\lambda M_4^2 V''}{4\pi V^2} \approx \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\mu^4} \left( \frac{\phi}{M_4} \right)^{-(\alpha+2)} \quad (3.3)$$

and

$$\zeta^2 \approx \frac{\lambda^2 \mu^2 V' V'''}{16\pi^2 V^4} \approx \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)}{\mu^8 M_4^2} \left( \frac{\phi}{M_4} \right)^{-2(\alpha+2)}. \quad (3.4)$$

The condition for end of the slow-roll approximations is  $\varepsilon = 1$ . Therefore, we have from Eq. (3.2)

$$\phi_{\text{end}} \approx M_4 \left( \frac{\lambda \alpha^2}{4\pi \mu^4} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}}. \quad (3.5)$$

The potential at the end of inflation

$$V_{\text{end}} \approx \mu^4 \left( \frac{\lambda \alpha^2}{4\pi \mu^4} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}. \quad (3.6)$$

For the potential (3.1), we find

$$N \approx \frac{4\pi \mu^4}{\lambda \alpha (\alpha + 2)} \left[ \left( \frac{\phi_i}{M_4} \right)^{(\alpha+2)} - \left( \frac{\phi_{\text{end}}}{M_4} \right)^{(\alpha+2)} \right]. \quad (3.7)$$

Now, by injecting the value of Eq. (3.5) into Eq. (3.7), we find

$$N \approx \frac{4\pi \mu^4}{\lambda \alpha (\alpha + 2)} \left( \frac{\phi_i}{M_4} \right)^{(\alpha+2)} - \frac{\alpha}{\alpha + 2}, \quad (3.8)$$

$$\mu^4 \approx \frac{\lambda}{4\pi} (N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2) \left( \frac{\phi_*}{M_4} \right)^{-(\alpha+2)}, \quad (3.9)$$

$$A_S^2 \approx \frac{64\pi}{75\lambda^3 M_4^6} \left( \frac{V^6}{V'^2} \right)_{k=\alpha H} \approx \frac{64\pi}{75\lambda^3 M_4^4} \frac{\mu^{16}}{\alpha^2} \left( \frac{\phi_*}{M_4} \right)^{4\alpha+2}. \quad (3.10)$$

According to the Planck observations, the power spectrum of the curvature perturbation is given by  $A_S^2 = (2.23 \pm 0.16) \cdot 10^{-19}$ .<sup>29</sup> Finally, the scale  $\mu^4$  can be determined from the amplitude of the CMB anisotropies, and this leads to the following expression for  $\mu^4$ :

$$\mu^4 \approx \frac{\lambda}{4\pi} (N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2) \left[ 4, 64 * 10^{-13} \frac{(N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2)^4}{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (3.11)$$

and for  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\zeta^2$ ,  $n_S$ ,  $\alpha_S$ , and  $r$  to the expressions

$$\varepsilon \simeq \frac{\alpha^2}{[N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2]},$$

$$\eta \simeq \frac{\alpha(\alpha - 1)}{[N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2]}, \quad (3.12)$$

$$\zeta^2 \approx \frac{\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{[N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2]^2},$$

$$n_S - 1 = \frac{-2(1 + 2\alpha)}{N(\alpha + 2) + \alpha}, \quad (3.13)$$

$$\alpha_S \simeq \frac{-24\alpha^2 + 16\alpha(\alpha - 1) - 2\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{[N(\alpha + 2) + \alpha]^2}. \quad (3.14)$$

In fact, the intrinsic amplitude of the tensor fluctuations is rarely mentioned, but rather the value normalized to the (measured) value of the scalar fluctuations. We define the tensor-to-scalar ratio

$$r = \frac{A_T^2}{A_S^2} \simeq \varepsilon \frac{\lambda}{V}. \quad (3.15)$$

The tensor-to-scalar ratio is expressed as a function of  $\alpha$  and  $N$  as follows:

$$r = \left( \frac{4\pi}{\alpha^2 \lambda} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \frac{\alpha^2 \lambda}{(N\alpha(\alpha + 2) + \alpha^2)^{\frac{\alpha+4}{\alpha+2}}} \frac{1}{\left\{ \frac{\lambda}{4\pi} \left[ 4, 64 * 10^{-13} \frac{(N\alpha(\alpha+2)+\alpha^2)^4}{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{6}} \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}}. \quad (3.16)$$

At this stage, for given values of  $\alpha$ , with  $\lambda$  taken of the order  $\sim 10^{24}$  eV, we consider specific cases of the potential as it can be seen in Table 1, where we observe that for higher values of  $\alpha$ , the spectral index  $n_s$  decreases while the tensor-to-scalar ratio  $r$  increases. For instance, the derived parameters  $\alpha_s$  and  $n_s$  are in agreement with

Table 1. Values of  $n_s$ ,  $\alpha_S$ ,  $r$  with respect to  $N$ . As we see in this table, when  $\alpha$  decrease,  $n_s$  get near to the experimental value.

$N/\alpha$	$N = 55$			$N = 60$			$N = 70$		
$\alpha$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r * 10^{-26}$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r * 10^{-26}$	$n_s$	$\alpha_S * 10^{-3}$	$r * 10^{-26}$
2/3	0,9683	-0,673	2,817	0,9709	-0,566	2,659	0,9750	-0,416	2,401
1	0,9638	-0,871	3,410	0,9668	-0,732	3,218	0,9715	-0,539	2,906
4/3	0,9602	-1,019	3,847	0,9603	-0,857	3,632	0,9687	-0,631	3,279
2	0,9549	-1,298	4,459	0,9586	-1,092	4,210	0,9645	-0,804	3,802
3	0,9496	-2,018	5,029	0,9538	-1,699	4,749	0,9603	-1,251	4,289
4	0,9461	-3,442	5,391	0,9505	-2,898	5,091	0,9575	-2,135	4,598
5	0,9435	-5,785	5,642	0,9482	-4,871	5,328	0,9555	-3,591	4,813

the observational data, but the tensor-to-scalar ratio  $r$  appears to be too small. For a  $r$  value near to the likely experimental range, a higher value of  $\lambda \ll V$  could be considered.

The Friedmann equation (2.7) can be approximated, at high energies during the slow-roll inflation  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , by

$$H(\phi) = \frac{2}{M_4} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} V(\phi). \quad (3.17)$$

Such approximation is allowed only if  $\lambda \ll V(\phi)$ . For clarity, the Friedmann and Klein–Gordon equation can be written in the Hamilton–Jacobi form<sup>30</sup> as

$$H' a' = -\frac{4\pi}{M_4^2} H a, \quad (3.18)$$

which becomes

$$H' = -\frac{4\pi}{M_4^2} \dot{\phi}. \quad (3.19)$$

The first Hamilton–Jacobi equation can be integrated, which gives

$$a(\phi) = \exp \left[ -\frac{4\pi}{M_4^2} \int \frac{H}{H'} d\phi \right]. \quad (3.20)$$

Straightforward calculations involving potential (3.1) and the Friedmann equation (3.17) lead to

$$a(\phi) = C \exp \left[ \frac{-2\pi}{\alpha M_4^2} \phi^2 \right]. \quad (3.21)$$

According to the second Hamilton–Jacobi equation (3.19) and the scale factor  $a(\phi)$ , the dependence  $\phi(t)$  takes the following form:

$$\dot{\phi} + \frac{\alpha \mu^4}{2\sqrt{3\lambda\pi}} \frac{\phi^{\alpha-1}}{M_4^{\alpha-1}} = 0, \quad (3.22)$$



which leads after integration to

$$\phi(t) = \left[ \phi_0^{2-\alpha} + \frac{\mu^4 \alpha [\alpha - 2]}{2\sqrt{3\lambda\pi} M_4^{\alpha-1}} (t - t_0) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad (3.23)$$

where the initial value of the inflaton field is  $\phi_0 = \phi(t_0)$ . That is, the dependence of the inflaton field with the cosmological time has been determined.

#### 4. Conclusion

In this work, we have studied a monomial inflation in the RS-II model. Precisely, we have considered the monomial potential  $V(\varphi) = \mu^4 \left(\frac{\phi}{M_4}\right)^\alpha$ , and derived the corresponding cosmological quantities under the slow-roll approximations at high energies. We have in particular determined the mass scale  $\mu$ , the scale factor  $a = a(t)$  with exponential form, the inflation time evolution  $\phi = \phi(t)$ , and the spectral index  $n_s$  which is found to be in accordance with observational data.

Although chaotic inflation models have been extensively studied in the literature,<sup>20</sup> we believe that monomial inflation still deserves more attention and consideration.

#### Acknowledgments

The authors are grateful to URAC09 for support.

#### References

1. A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
2. A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
3. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
4. A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
5. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).
6. V. F. Mukhanov and G. Chibisov, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **33**, 532 (1981).
7. V. F. Mukhanov and G. Chibisov, *Sov. Phys. JETP* **56**, 258 (1982).
8. A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117**, 175 (1982).
9. A. H. Guth and S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982).
10. A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
11. J. Martin and C. Ringeval, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0608**, 009 (2006), arXiv:astro-ph/0605367.
12. D. H. Lyth, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1861 (1997), arXiv:hep-ph/9606387.
13. G. Efstathiou and K. J. Mack, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0505**, 008 (2005), arXiv:astro-ph/0503360.
14. M. Kawasaki, M. Yamaguchi and T. Yanagida, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3572 (2000), arXiv:hep-ph/0004243.
15. D. Baumann, A. Dymarsky, I. R. Klebanov and L. McAllister, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0801**, 024 (2008), arXiv:0706.0360.
16. E. Silverstein and A. Westphal, *Phys. Rev. D* **78**, 106003 (2008), arXiv:0803.3085.
17. R. H. Brandenberger, A. Knauf and L. C. Lorenz, *J. High Energy Phys.* **0810**, 110 (2008), arXiv:0808.3936.

18. K. Nakayama and F. Takahashi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1102**, 010 (2011), arXiv:1008.4457.
19. F. Takahashi, *Phys. Lett. B* **693**, 140 (2010), arXiv:1006.2801.
20. A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).
21. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998).
22. I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998).
23. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
24. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
25. M. Antonella Cid, S. del Campo and R. Herrera, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 005 (2007), arXiv:0710.3148.
26. J. M. Cline, Inflation from string theory, **86**, 117 (2007).
27. R. Maartens, D. Wands, B. Basset and I. Heard, *Phys. Rev. D* **62**, 041301 (2000).
28. H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 213 (2003).
29. Planck Collab. (P. A. R. Ade *et al.*), Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
30. D. S. Salopek, J. R. Bond and J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **40**, 1753 (1989).
31. J. E. Lidsey, *Phys. Lett. B* **273**, 42 (1991).

---

## Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons présenté en détail les fondements théoriques et le formalisme analytique de la théorie d'inflation dans le modèle standard cosmologique du Big Bang chaud. Dépendant du choix du potentiel scalaire, divers modèles d'inflation ont été analysés. Tous les calculs ont été effectués dans le cadre de l'approximation de roulement lent largement justifiée en littérature. le formalisme de la théorie de perturbation cosmologique a été aussi présenté et les diverses quantités importantes relevantes de l'observation tels que les différents indices spectraux ont été obtenues. Ensuite nous avons étudié les divers aspects de la théorie d'inflation branaire dans le cadre du modèle de Randall-Sundrum type *II*. Nous nous sommes intéressés principalement au fondement physique de la théorie d'inflation branaire et ses diverses prédictions cosmologiques en relation avec les résultats observationnels récents. En se basant sur le modèle de Randall-Sundrum, les équations de Friedmann gouvernant la dynamique de l'expansion de l'Univers sont modifiées, comparées à celles du cas standard, par l'addition d'un terme quadratique en la densité de matière  $\rho^2$  et d'un paramètre intrinsèque de la brane à savoir la tension de la brane  $\lambda$ . Cet effet de la brane affectera toutes les grandeurs caractéristiques de la cosmologie inflationnaire, telles que les paramètres de "slow roll" ou encore les diverses quantités du spectre de perturbations. Notons enfin que tous les résultats théoriques présentés dans cette thèse ont montré un très bon accord avec les récentes données observationnelles du satellite WMAP.

Pour continuer à progresser dans notre compréhension de l'Univers primordial, il serait beaucoup plus satisfaisant de disposer d'une description microphysique de la théorie de l'inflation permettant de répondre, ou au moins de poser des questions naturelles comme :

Quelle est la nature de l'inflaton ?

Quelle est la forme du potentiel inflationnaire ?

Quelle est l'échelle d'énergie de l'inflation ?

## Chapitre 4. Contributions

---

Bref, comment incorporer l'inflation dans un cadre de physique des hautes énergies ?

Le décryptage de l'Univers primordial repose donc sur une compréhension de phénomènes physiques très variés, et sur la réalisation de mesures qui mettent au défi la technologie moderne. Seulement à ce prix pourrons-nous avancer dans cette quête universelle qu'est la compréhension du monde dans lequel nous vivons.

---

# Bibliographie

- [1] Hubble, Edwin. "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15.3 (1929) : 168-173.
- [2] Lemaître, Georges. "The beginning of the world from the point of view of quantum theory." *Nature* 127.3210 (1931) : 706.
- [3] Einstein, Albert, and Willem De Sitter. "On the relation between the expansion and the mean density of the universe." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 18.3 (1932) : 213.
- [4] Riess, Adam G., et al. "Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution." *The Astrophysical Journal* 607.2 (2004) : 665.
- [5] Penzias, Arno A., and Robert Woodrow Wilson. "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s." *The Astrophysical Journal* 142 (1965) : 419-421.
- [6] Gamow, George. "The evolution of the universe." *Nature* 162.4122 (1948) : 680.
- [7] Gamow, George. "The origin of elements and the separation of galaxies." *Physical Review* 74.4 (1948) : 505.
- [8] Alpher, Ralph A., and Robert C. Herman. "Remarks on the Evolution of the Expanding Universe." *Physical Review* 75.7 (1949) : 1089.
- [9] Dicke, Robert H., et al. "Cosmic Black-Body Radiation." *The Astrophysical Journal* 142 (1965) : 414-419.
- [10] Smoot, George F., et al. "Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps." *The Astrophysical Journal* 396 (1992) : L1-L5.

## Bibliographie

---

- [11] Mather, John C., et al. "Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument." *The Astrophysical Journal* 420 (1994) : 439-444.
- [12] Riess, Adam G., et al. "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant." *The Astronomical Journal* 116.3 (1998) : 1009.
- [13] Perlmutter, Saul, et al. "Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae." *The Astrophysical Journal* 517.2 (1999) : 565.
- [14] Tsujikawa, Shinji. "Introductory review of cosmic inflation." arXiv preprint hep-ph/0304257 (2003).
- [15] Guth, Alan H. "Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems." *Physical Review D* 23.2 (1981) : 347.
- [16] Weinberg, Steven. *Cosmology*. Oxford university press, (2008) 593 p.
- [17] Weinberg, Steven. "Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity." (1972).
- [18] Weinberg, S. "The Quantum Theory of Fields, vol. 2 : Modern Applications, Univ." Press, Cambridge, UK (1996) 489 p.
- [19] Mukhanov, Viatcheslav. "Physical foundations of cosmology." Cambridge university press, (2005) 421 p.
- [20] Linde, Andrei D. "A new inflationary universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems." *Physics Letters B* 108.6 (1982) : 389-393.
- [21] Linde, Andrei D. "Coleman-Weinberg theory and the new inflationary universe scenario." *Physics Letters B* 114.6 (1982) : 431-435.
- [22] Albrecht, Andreas, and Paul J. Steinhardt. "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking." *Physical Review Letters* 48.17 (1982) : 1220.
- [23] Weinberg, Steven. "Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity." (1972).
- [24] Gourgoulhon, Eric. "Relativité générale, CNRS." Observatoire de Paris (2013).
- [25] Hubble, Edwin, and Milton L. Humason. "The velocity-distance relation among extragalactic nebulae." *The Astrophysical Journal* 74 (1931) : 43.
- [26] Peacock, John A. "Cosmological physics." Cambridge university press, 1999.
- [27] Garcia-Bellido, Juan. "Cosmology and astrophysics." arXiv preprint astro-ph/0502139 (2005).

- [28] Garcia-Bellido, Juan. "Astrophysics and cosmology." arXiv preprint hep-ph/0004188 (2000).
- [29] Fixsen, D. J., et al. "The cosmic microwave background spectrum from the full coBE\* FIRAS data set." *The Astrophysical Journal* 473.2 (1996) : 576.
- [30] Spergel, David N., et al. "First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)\* observations : determination of cosmological parameters." *The Astrophysical Journal Supplement Series* 148.1 (2003) : 175.
- [31] Penzias, Arno A., and Robert Woodrow Wilson. "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s." *The Astrophysical Journal* 142 (1965) : 419-421.
- [32] Peter, P., and J. P. Uzan. "Cosmologie primordiale, Belin (Paris, France, 2005) ; F." Bernardreau, *Cosmologie*, CNRS Editions (Paris, France, 2007).
- [33] Liddle, Andrew R., and David H. Lyth. "Cosmological inflation and large-scale structure." Cambridge University Press, 2000.
- [34] Linde, Andrei. "Particle physics and inflationary cosmology." arXiv preprint hep-th/0503203 (2005).
- [35] Hogg, David W. "Distance measures in cosmology." arXiv preprint astro-ph/9905116 (1999).
- [36] Friedman, Alexander. "On the curvature of space." *General Relativity and Gravitation* 31.12 (1999) : 1991-2000.
- [37] Raychaudhuri, Amalkumar. "Relativistic cosmology. I." *Physical Review* 98.4 (1955) : 1123.
- [38] Maartens, Roy, et al. "Chaotic inflation on the brane." *Physical Review D* 62.4 (2000) : 041301.
- [39] Copeland, Edmund J., Andrew R. Liddle, and James E. Lidsey. "Steep inflation : Ending braneworld inflation by gravitational particle production." *Physical Review D* 64.2 (2001) : 023509.
- [40] Malik, Karim A., and David Wands. "Cosmological perturbations." *Physics Reports* 475.1-4 (2009) : 1-51.
- [41] Baumann, Daniel. "TASI lectures on inflation." arXiv preprint arXiv :0907.5424 (2009).
- [42] Ade, Peter AR, et al. "Joint analysis of BICEP2/Keck Array and Planck data." *Physical review letters* 114.10 (2015) : 101301.
- [43] Hinshaw, Gary, et al. "Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : cosmological parameter results." *The Astrophysical Journal Supplement Series* 208.2 (2013) : 19.

## Bibliographie

---

- [44] Kawasaki, Masahiro, and Takeo Moroi. "Gravitino production in the inflationary universe and the effects on big-bang nucleosynthesis." *Progress of Theoretical Physics* 93.5 (1995) : 879-899.
- [45] Moroi, Takeo. "Effects of the gravitino on the inflationary universe." arXiv preprint hep-ph/9503210 (1995).
- [46] Liddle, Andrew R., and David H. Lyth. "Cosmological inflation and large-scale structure." Cambridge University Press, 2000.
- [47] Guth, Alan H. "Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems." *Physical Review D* 23.2 (1981) : 347.
- [48] Dodelson, Scott, William H. Kinney, and Edward W. Kolb. "Cosmic microwave background measurements can discriminate among inflation models." *Physical Review D* 56.6 (1997) : 3207.
- [49] Linde, Andrei D. "Chaotic inflation." *Physics Letters B* 129.3-4 (1983) : 177-181.
- [50] Martin, Jerome, Christophe Ringeval, and Vincent Vennin. "Encyclopedia inflationaris." *Physics of the Dark Universe* 5 (2014) : 75-235.
- [51] Langlois, David. "Inflation and cosmological perturbations." *Lectures on Cosmology*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. 1-57.
- [52] Albrecht, Andreas, and Paul J. Steinhardt. "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking." *Physical Review Letters* 48.17 (1982) : 1220.
- [53] Linde, Andrei D. "A new inflationary universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems." *Physics Letters B* 108.6 (1982) : 389-393.
- [54] Freese, Katherine, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto. "Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons." *Physical Review Letters* 65.26 (1990) : 3233.
- [55] Dine, Micheal, and Antonio Riotto. "An inflaton candidate in gauge mediated supersymmetry breaking." *Physical review letters* 79.14 (1997) : 2632.
- [56] Copeland, Edmund J., et al. "False vacuum inflation with Einstein gravity." *Physical Review D* 49.12 (1994) : 6410.
- [57] Linde, Andrei. "Axions in inflationary cosmology." *Physics Letters B* 259.1-2 (1991) : 38-47.
- [58] Linde, Andrei. "Hybrid inflation." *Physical Review D* 49.2 (1994) : 748.
- [59] Riotto, Antonio. "Inflation and the nature of supersymmetry breaking." *Nuclear Physics B* 515.1-2 (1998) : 413-435.



- 
- [60] Linde, Andrei, and Antonio Riotto. "Hybrid inflation in supergravity." *Physical Review D* 56.4 (1997) : R1841.
- [61] Bintruy, Pierre, and Gia Dvali. "D-term inflation." *Physics Letters B* 388.2 (1996) : 241-246.
- [62] Dvali, Gia, and Antonio Riotto. "Minimalism in inflation model building." *Physics Letters B* 417.1-2 (1998) : 20-26.
- [63] Halyo, Edi. "Hybrid inflation from supergravity D-terms." *Physics Letters B* 387.1 (1996) : 43-47.
- [64] Lyth, David H., and Antonio Riotto. "Comments on D-term inflation." *Physics Letters B* 412.1-2 (1997) : 28-34.
- [65] Lyth, David H., and Antonio Riotto. "Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation." *Physics Reports* 314.1-2 (1999) : 1-146.
- [66] Barrow, John D., and Andrew R. Liddle. "Perturbation spectra from intermediate inflation." *Physical Review D* 47.12 (1993) : R5219.
- [67] Kinney, William H., and Antonio Riotto. "Dynamical supersymmetric inflation." *Astroparticle Physics* 10.4 (1999) : 387-395.
- [68] Abramowitz, Milton, and Irene A. Stegun. "Handbook of mathematical functions Dover Publications." New York (1965) : 361.
- [69] Dodelson, Scott. "Physics of the Large and the Small : TASI 09," *Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009.* World Scientific, 2011.
- [70] Silverstein, Eva, and Alexander Westphal. "Monodromy in the CMB : gravity waves and string inflation." *Physical Review D* 78.10 (2008) : 106003.
- [71] Ade, Peter AR, et al. "Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters." *Astronomy Astrophysics* 594 (2016) : A13.
- [72] Nordström, Gunnar. "On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields." *arXiv preprint physics/0702221* (2007).
- [73] Kaluza, Th. "Sitzungsber. preuss. akad. wiss. berlin (math. phys.) k1, 966 (1921); o. klein." *Z. Phys* 37.985 (1926) : 985.
- [74] Polchinski, Joseph. "What is string theory?." *arXiv preprint hep-th/9411028* (1994).
- [75] A. Miemiec, I. Schnakenburg. "Basics of M-Theory." *arXiv preprint hep-th/0509137* (2005).

## Bibliographie

---

- [76] Hořava, Petr, and Edward Witten. "Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions." *Nuclear Physics B* 460.3 (1996) : 506-524.
- [77] Lukas, Andre, et al. "Universe as a domain wall." *Physical Review D* 59.8 (1999) : 086001.
- [78] Lukas, Andre, Burt A. Ovrut, and Daniel Waldram. "Cosmological solutions of Hořava-Witten theory." *Physical Review D* 60.8 (1999) : 086001.
- [79] Lukas, Andre, Burt A. Ovrut, and Daniel Waldram. "Boundary inflation." *Physical Review D* 61.2 (1999) : 023506.
- [80] Maartens, Roy. "Cosmological dynamics on the brane." *Physical Review D* 62.8 (2000) : 084023.
- [81] Maartens, Roy, and Kazuya Koyama. "Brane-world gravity." *Living Reviews in Relativity* 13.1 (2010) : 5.
- [82] Maartens, Roy, et al. "Chaotic inflation on the brane." *Physical Review D* 62.4 (2000) : 041301.
- [83] Copeland, Edmund J., Andrew R. Liddle, and James E. Lidsey. "Steep inflation : Ending braneworld inflation by gravitational particle production." *Physical Review D* 64.2 (2001) : 023509.
- [84] Duff, Michael J. "Benchmarks on the brane." arXiv preprint hep-th/0407175 (2004).
- [85] Ade, Peter AR, et al. "Joint analysis of BICEP2/Keck Array and Planck data." *Physical review letters* 114.10 (2015) : 101301.
- [86] Arkani-Hamed, Nima, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter." *Physics Letters B* 429.3-4 (1998) : 263-272.
- [87] Dudas, Emilian. "Theory and phenomenology of type I strings and M-theory." *Classical and quantum gravity* 17.22 (2000) : R41.
- [88] Hořava, Petr, and Edward Witten. "Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary." *Nuclear Physics B* 475.1-2 (1996) : 94-114.
- [89] Antoniadis, Ignatios, et al. "New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV." *Physics Letters B* 436.3-4 (1998) : 257-263.
- [90] Randall, Lisa, and Raman Sundrum. "Large mass hierarchy from a small extra dimension." *Physical Review Letters* 83.17 (1999) : 3370.
- [91] Randall, Lisa, and Raman Sundrum. "An alternative to compactification." *Physical Review Letters* 83.23 (1999) : 4690.

- [92] Kolb, Edward W. "Dynamics of the inflationary era." arXiv preprint hep-ph/9910311 (1999).
- [93] Sasaki, Misao. "Large scale quantum fluctuations in the inflationary universe." *Progress of Theoretical Physics* 76.5 (1986) : 1036-1046.
- [94] Mukhanov, Viatcheslav F. "Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations." *Zh. Eksp. Teor. Fiz* 94.1 (1988).
- [95] Commons-b, Wikimedia. "The Thames Tunnel <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thamestunnel1840.jpg?uselang=tr>." Accessed 31 (2017) : 2017.
- [96] Bardeen, James M. "Gauge-invariant cosmological perturbations." *Physical Review D* 22.8 (1980) : 1882.
- [97] Bardeen, James M., Paul J. Steinhardt, and Michael S. Turner. "Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe." *Physical Review D* 28.4 (1983) : 679.
- [98] Burles, Scott, et al. "Sharpening the predictions of big-bang nucleosynthesis." *Physical Review Letters* 82.21 (1999) : 4176.
- [99] Garcia-Bellido, Juan. "Cosmology and astrophysics." arXiv preprint astro-ph/0502139 (2005).
- [100] Lemaître, Georges. "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques." *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. Vol. 47. 1927.
- [101] Hubble, Edwin. "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15.3 (1929) : 168-173.
- [102] Starobinskii, A. A. "Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe." *JETP Letters* 30 (1979) : 682-685.
- [103] Lukas, Andre, et al. "Heterotic M-theory in five dimensions." *Nuclear Physics B* 552.1-2 (1999) : 246-290.
- [104] Linde, Andrei D. "A new inflationary universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems." *Physics Letters B* 108.6 (1982) : 389-393.
- [105] Gamow, George. "Expanding universe and the origin of elements." *Physical Review* 70.7-8 (1946) : 572.

## Bibliographie

---

- [106] Komatsu, Eiichiro, et al. "Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP\*) observations : cosmological interpretation." *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.2 (2011) : 18.
- [107] Percival, Will J., et al. "Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey data release 7 galaxy sample." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 401.4 (2010) : 2148-2168.
- [108] Riess, Adam G., et al. "A redetermination of the Hubble constant with the Hubble Space Telescope from a differential distance ladder." *The Astrophysical Journal* 699.1 (2009) : 539.
- [109] Allen, S. W., et al. "Constraints on dark energy from Chandra observations of the largest relaxed galaxy clusters." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 353.2 (2004) : 457-467.
- [110] Kolb, E. W., and M. S. Turner. "The Early Universe Addison-Wesley." Redwood City (1990).
- [111] Sakharov, Andrej Dmitrievich. "Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe." *JETP lett.* 5 (1967) : 24-27.
- [112] Josephs, S. F., et al. "Long terminal repeat structure of an American isolate of type I human T-cell leukemia virus." *Virology* 139.2 (1984) : 340-345.
- [113] A. Einstein. "Annalen der Physik." vol.354, Issue 7. (1916) : 769-822.
- [114] Friedmann, Alexander. "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes." *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 21.1 (1924) : 326-332.
- [115] Spergel, David N., et al. "Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : implications for cosmology." *The Astrophysical Journal Supplement Series* 170.2 (2007) : 377.
- [116] Ade, Peter AR, et al. "Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters." *Astronomy Astrophysics* 594 (2016) : A13.
- [117] Einstein, A. "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d." *Wissenschaften (Berlin)* (1917) : 142-152.
- [118] Scrimgeour, Morag I., et al. "The WiggleZ Dark Energy Survey : the transition to large-scale cosmic homogeneity." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 425.1 (2012) : 116-134.
- [119] Mather, John C., et al. "Calibrator Design for the COBE\* Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS)." *The Astrophysical Journal* 512.2 (1999) : 511.

- [120] Peter, P., and J. P. Uzan. "Cosmologie primordiale, Belin (Paris, France, 2005) ; F." Bernardreau, Cosmologie, CNRS Editions (Paris, France, 2007).
- [121] Liddle, Andrew R., and David H. Lyth. "Cosmological inflation and large-scale structure." Cambridge University Press, 2000.
- [122] Walker, Arthur Geoffrey. "On Milne's Theory of World-Structure." Proceedings of the London Mathematical Society 2.1 (1937) : 90-127.
- [123] Robertson, Howard P. "On the foundations of relativistic cosmology." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 15.11 (1929) : 822.
- [124] Weinberg, Steven. "Cosmology." Oxford university press, (2008).
- [125] Liddle, Andrew R. "An introduction to cosmological inflation." in Proceedings, Summer School in High-energy physics and cosmology : Trieste, Italy, June 29-July 17, arXiv preprint astro-ph/9901124 (1998) : 260-295.
- [126] Copeland, Edmund J., et al. "Reconstructing the inflaton potential : In principle and in practice." Physical Review D 48.6, arXiv preprint hep-ph/9303288 (1993) : 2529.
- [127] Liddle, Andrew R., Paul Parsons, and John D. Barrow. "Formalizing the slow-roll approximation in inflation." Physical Review D 50.12 (1994) : 7222.
- [128] Mukhanov, Viatcheslav F., and G. V. Chibisov. "Quantum fluctuations and a nonsingular universe." JETP Lett. 33 (1981) : 532-535.
- [129] Salopek, D. S., J. R. Bond, and James M. Bardeen. "Designing density fluctuation spectra in inflation." Physical Review D 40.6 (1989) : 1753.
- [130] Mukhanov, Viatcheslav F., Hume A. Feldman, and Robert Hans Brandenberger. "Theory of cosmological perturbations." Physics Reports 215.5-6 (1992) : 203-333.
- [131] S, Dodelson. "Modern Cosmology." Academic Press, Amsterdam, (2003).
- [132] Kolb, Edward W., and Michael S. Turner. "The early universe." Front. Phys. 69 (1990) : 1-547.
- [133] Lidsey, James E., et al. "Reconstructing the inflaton potential-an overview." Reviews of Modern Physics 69.2 (1997) : 373.
- [134] Lyth, David H., and Antonio Riotto. "Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation." Physics Reports 314.1-2 (1999) : 1-146.
- [135] Bassett, Bruce A., Shinji Tsujikawa, and David Wands. "Inflation dynamics and reheating." Reviews of Modern Physics 78.2 (2006) : 537.

## Bibliographie

---

- [136] Kodama, Hideo, and Misao Sasaki. "Cosmological perturbation theory." *Progress of Theoretical Physics Supplement* 78 (1984) : 1-166.
- [137] Lyth, David H., Karim A. Malik, and Misao Sasaki. "A general proof of the conservation of the curvature perturbation." *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2005.05 (2005) : 004.
- [138] Malik, Karim A., and David Wands. "Cosmological perturbations." *Physics Reports* 475.1-4 (2009) : 1-51.
- [139] Bunch, Timothy S., and Paul CW Davies. "Quantum field theory in de Sitter space : renormalization by point-splitting." *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 360.1700 (1978) : 117-134.
- [140] Liddle, Andrew R., David H. Lyth, and Ruth A. Daly. "Cosmological inflation and large-scale structure." *Physics Today* 54.7 (2001) : 56.
- [141] Wald, Robert M. "General Relativity." Chicago University Press, 1984. Chicago, Usa : Univ. Pr. ( 1984) 491p.
- [142] Bruni, Marco, et al. "Perturbations of spacetime : gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond." *Classical and Quantum Gravity* 14.9 (1997) : 2585.
- [143] C. W. Misner, K. S. Thorne, & J. A. Wheeler. "Gravitation." W. H. Freeman, San Francisco (1973), xxvi+1279 pages, ISBN 0-7167-0334-3.
- [144] Dodelson, S. "Modern Cosmology." Academic Press, 1 ed. March, 2003.
- [145] Arkani-Hamed, Nima, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter." *Physics Letters B* 429.3-4 (1998) : 263-272.
- [146] Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S. and Dvali, G. "New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV." *Physics Letters B* 436.3-4 (1998) : 257-263.
- [147] Randall, L. and Sundrum, R. "Large mass hierarchy from a small extra dimension." *Physical Review Letters* 83.17 (1999) : 3370.
- [148] Randall, L. and Sundrum, R. "An alternative to compactification." *Physical Review Letters* 83.23 (1999) : 4690.
- [149] Binétruy, P., Deffayet, C. and Langlois, D. "Non-conventional cosmology from a brane universe." *Nuclear Physics B* 565.1-2 (2000) : 269-287.
- [150] Shiromizu, T., Maeda, K.-I. and Sasaki, M. "The Einstein equations on the 3-brane world." *Physical Review D* 62.2 (2000) : 024012.

- [151] Binétruy, P., Deffayet, C., Ellwanger, U. and Langlois, D. "Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant." *Physics Letters B* 477.1-3 (2000) : 285-291.
- [152] Maartens, R., Wands, D., Bassett, B. A. and Heard, I. P. C. "Chaotic inflation on the brane." *Physical Review D* 62.4 (2000) : 041301.
- [153] Copeland, E. J., Liddle, A. R. and Lidsey, J. E. "Steep inflation : Ending braneworld inflation by gravitational particle production." *Physical Review D* 64.2 (2001) : 023509.
- [154] Brax, P. and van de Bruck, C. "Cosmology and brane worlds : a review." *Classical and Quantum Gravity* 20.9 (2003) : R201.
- [155] Flanagan, Eanna E., S-H. Henry Tye, and Ira Wasserman. "Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenario." *Physical Review D* 62.4 (2000) : 044039.
- [156] Mukohyama, Shinji, Tetsuya Shiromizu, and Kei-ichi Maeda. "Global structure of exact cosmological solutions in the brane world." *Physical Review D* 62.2 (2000) : 024028.
- [157] Bowcock, Peter, Christos Charmousis, and Ruth Gregory. "General brane cosmologies and their global spacetime structure." *Classical and Quantum Gravity* 17.22 (2000) : 4745.
- [158] Liddle, Andrew R., Paul Parsons, and John D. Barrow. "Formalizing the slow-roll approximation in inflation." *Physical Review D* 50.12 (1994) : 7222.
- [159] Langlois, David, Roy Maartens, and David Wands. "Gravitational waves from inflation on the brane." *Physics Letters B* 489.3-4 (2000) : 259-267.
- [160] Liddle, Andrew R., and David H. Lyth. "Cosmological inflation and large-scale structure." Cambridge University Press, 2000.
- [161] Boubekur, Lotfi, and David H. Lyth. "Hilltop inflation." *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2005.07 (2005) : 010.
- [162] Freese, Katherine, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto. "Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons." *Physical Review Letters* 65.26 (1990) : 3233.
- [163] Freese, Katherine, Joshua A. Frieman, and Angela V. Olinto. "Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons." *Physical Review Letters* 65.26 (1990) : 3233.
- [164] Belavin, Alexander A., Alexander M. Polyakov, and Alexander B. Zamolodchikov. "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory." *Nuclear Physics B* 241.2 (1984) : 333-380.
- [165] Friedan, Daniel, Emil Martinec, and Stephen Shenker. "Conformal invariance, supersymmetry and string theory." *Nuclear Physics B* 271.3-4 (1986) : 93-165.

## Bibliographie

---

- [166] Rigopoulos, G. I., and E. P. S. Shellard. "Separate universe approach and the evolution of nonlinear superhorizon cosmological perturbations." *Physical Review D* 68.12 (2003) : 123518.
- [167] Langlois, David, and Filippo Vernizzi. "Conserved nonlinear quantities in cosmology." *Physical Review D* 72.10 (2005) : 103501.
- [168] F. C. Adams, J. R. Bond, K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto. "Natural inflation : Particle physics models, power-law spectra for large-scale structure, and constraints from the Cosmic Background Explorer." *Physical Review D* 47.2 (1993) : 426.



### Résumé

L'inflation cosmologique est une phase d'expansion accélérée de l'Univers primordial à très hautes énergies. Elle est conçue comme une solution possible aux problèmes du modèle standard de la cosmologie ; elle permet la production causale de fluctuations cosmologiques sur les grandes échelles. Suite aux résultats des observations récentes obtenues par les satellites PLANCK, WMAP, le paradigme inflationnaire suscite un intérêt majeur dans le domaine cosmologique. Nous accordons une place du premier choix à la dynamique du champ scalaire "Inflaton" dans le cadre de la cosmologie standard, ensuite nous mettons l'accent sur l'effet relativiste des perturbations cosmologiques, et le mécanisme de genèse de celles-ci pendant l'inflation. Nous décrivons le formalisme de l'inflation branaire dans le cadre du modèle de Randall-Sundrum qui révèle de nouvelles perspectives du point de vue cosmologique. La description de l'inflation cosmologique, stipule que toute la matière scalaire est confinée sur une 4-brane dans un espace-temps à 5-dimension. À très hautes énergies, l'effet de la Brane modifie les équations de Friedmann qui régissent la dynamique du champ scalaire. Aux basses énergies, l'effet de la Brane devient négligeable et les résultats de l'inflation standard sont retrouvés. Enfin, nous examinons les corrections à haute énergie pour certains modèles choisis et nous comparons les résultats avec les données de Planck et WMAP.

**Mots-clefs (5):** Cosmologie, modèle standard, Inflation, Randall-Sundrum II, Perturbation, WMAP.

### Abstract

Cosmological inflation is an accelerated expansion phase occurring in the primordial Universe at very high energies. It is conceived as a possible solution to the problems of the cosmological standard model. According to the results of the recent observations obtained by the satellites PLANCK, WMAP and BICEP II, the inflationary paradigm gives rise to a major interest in the cosmological field. Firstly, we begin by studying the dynamics of the scalar field within the framework of the standard cosmology; then we focus on the relativistic effect of cosmological perturbations. Secondly, we describe the formalism of the brane inflation under the Randall-Sundrum model revealing new perspectives from the cosmological point of view, where the results of standard inflation are recovered at low energy. Finally, we examine the high energy corrections for selected models and compare the results with the Planck and WMAP data.

**Key Words (5):** Cosmology, Inflation, Randall-Sundrum II, Perturbation Spectrum, WMAP.

Année Universitaire : 2018 -2019