ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V
- RABAT -
جامعة محمد الخامس
– الرباط –
Faculté des sciences
كلية العلوم
CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

N° d'ordre 3249

THESE

En vue de l'obtention du : **DOCTORAT**

Centre de Recherche : **Centre de Recherche de Mathématiques et Applications de Rabat.**
Structure de Recherche **: Laboratoire Analyse Mathématique et Applications**

Discipline : **Mathématiques**
Spécialité : **Analyse mathématique**

Présentée et soutenue le 05/10/2019 par :

Abdelmajid OUDADES

Le titre de la thèse

EQUICONTINUITE DES APPLICATIONS PUISSANCES ET SERIES ENTIERES DANS LES ALGEBRES LOCALEMENT CONVEXE

JURY

Mr. Mohamed OUANNASSER	*PES, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat.*	*Président*
Mr. Abdellah EL KINANI	*PES, Ecole Normale Supérieure, Université Mohammed V, Rabat.*	*Directeur de Thèse*
Mr. Samir EL KABBAJ	*PES, Faculté des Sciences, Université Ibn Tofail, Kenitra.*	*Rapporteur/Examinateur*
Mr. Rachid CHOUKRI	*PES, Ecole Normale Supérieure, Université Mohammed V, Rabat.*	*Rapporteur/Examinateur*
Mr. Miloud CHAHBOUN	*PES, Ecole Normale Supérieure, Université Mohammed V, Rabat.*	*Rapporteur/Examinateur*
Mr. Houssame MAHZOULI	*PH, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, Rabat.*	*Examinateur*

Année universitaire : 2019/2020

✉ Faculté des Sciences, avenue Ibn Battouta, BP. 1014 RP, Rabat –Maroc
☎ 00212 (05) 37 77 18 76 ✆ 00212(05) 37 77 42 61; http://www. fsr.um5.ac.ma

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer, en premier lieu, ma profonde gratitude au Professeur **Abdellah EL KINANI** qui a bien voulu prendre en charge la direction de cette thèse. Ses encouragements, ses consiels et sa disponibilité m'ont été si précieux. Son talent de chercheur ainsi que ses qualités humaines ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. Qu'il trouve ici le temoignage de ma reconnaissance et de mon profond respect.

Je remercie vivement le Professeur **Mohamed OUANASSER,** de la faculté des Sciences de Rabat, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury de cette thèse.

Le Professeur **Rachid CHOUKRI** s'est toujours intéressé à mes travaux. Il n'a cesser de m'encourager. Les discussions qu'il m'a accordées m'ont été très profitables. Je le remercie infiniment pour avoir voulu rapporter et juger ce travail. Je lui exprime toute ma reconnaissance et tout mon respect.

Mes vifs remerciements vont également au Professeur **Miloud CHAHBOUN** qui a bien voulu rapporter les résultats de ma thèse. Son aide et ses remarques pertinentes m'ont été très précieuses. Sa présence dans ce jury me fait un grand plaisir.

Le Professeur **Samir El KABBAJ,** de la Faculté des Sciences de Kénitra, me fait l'honneur de rapporter ce travail et de siéger au jury. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

J'adresse mes sincères remerciements au Professeur **Houssame MAHZOULI,** de la Faculté des Sciences de Rabat, pour son aide et ses encouragements. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accépté de juger ce travail.

Résumé

Ce travail porte sur l'étude, ainsi que les liens, entre quelques questions de la théorie spectrale des algèbres localement convexes, non nécessairement commutatives. Il s'agit de l'opération des séries entières, l'équicontinuité en zéro de la suite des applications puissances et la continuité de l'application inverse.

Nous introduisons la classe des algèbres localement convexes non nécessairement commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances est équicontinue en zéro. Une étude approfondie, de leurs propriétés spectrales, est produite. Le cas particulier des B_0-algèbres est bien examiné.

Nous montrons que l'application inverse est continue dans toute algèbre localement convexe, non nécessairement commutative, dans laquelle la suite des applications puissances est équicontinue en zéro. Puis, nous prouvons que la réciproque est fausse en général. Nous obtenons, en particulier, la continuité de l'application inverse dans toute B_0-algèbre dans laquelle les séries entières opèrent. Nous montrons que la complétude ainsi que la métrisabilité sont nécessaires.

Nous dégageons l'outil fondamental qui est à la base des résultats de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko et de A. El Kinani et M. Oudadess. Il s'agit de la notion de pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications. Elle permet d'alléger les preuves de certains résultats classiques tels que les théorèmes de Turpin pour les applications puissances dans les algèbres commutatives localement convexes et celui de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Żelazko pour les séries entières dans les B_0-algèbres commutatives. Nous obtenons également qu'une B_0-algèbre commutative est m-convexe si une série entière, avec un contrôle approprié sur ses coefficients, opère dans un ouvert de l'algèbre.

Mots clés : algèbres localement convexes, B_0-algèbres, séries entières, applications puissances, l'application inverse, pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications.

Abstract

This work deals with the study, as links between some questions, of the spectral theory of locally convex algebras that are not necessarily commutative. This is the operation of entire series, the equicontinuity at zero of the sequence of power maps and the continuity of the inverse map.

We introduce the class of locally convex algebras that are not necessarily commutative in which the sequence of power maps is equicontinuous at zero. A thorough study of their spectral properties is produced. The special case of B_0-algebras is well examined.

We prove that the inverse map is continuous in any locally convex algebra, not necessarily commutative, in which the sequence of power maps is equicontinuous at zero. We show that the converse is not valid in general. We obtain, in particular, the continuity of the inverse map in any B_0-algebra in which the the series operate. We also prove that completeness and metrizability are necessary.

We extricate the fundamental tool that is the basis of the results of B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Zelazko and A. El Kinani and M. Oudadess. This is the notion of pseudo-equicontinuity at zero of a family of applications. It makes it possible to lighten the proofs of some classical results such as Turpin's theorems for power applications in locally convex commutative algebras and that of B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Żelazko for the series in commutative B_0-algebras. We also obtain that a commutative B_0-algebra is m-convex if an entire series, with appropriate control over its coefficients, operates in an open of the subset of the algebre.

Key Words: locally convex algebras, B_0-algebras, entire series, power maps, inverse map, pseudo-aquicontinuity.

Table des matières

Introduction générale

Ce travail est une contribution à l'étude de quelques questions concernant les fonctions entières opérant dans les algèbres localement convexes. Nous introduisons et étudions une classe d'algèbres localement convexes, non nécessairement commutatives, dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Nous montrons que cette dernière propriété entraîne la continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ et que le spectre de tout élément est non vide. Nous dégageons l'outil qui est à la base des résultats de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko (Chap.2, [9])[1] et de A. El Kinani et M. Oudadess (Chap.2, [6]). Il s'agit de la notion de pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications. Elle permet d'alléger les preuves de certains résultats, d'obtenir des théorèmes qui généralisent plusieurs résultats connus et donnent d'autres qui sont tout à fait nouveaux. De plus, le lien entre la continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ et le fait que les séries entières opérent est également dégagé. Nous obtenons aussi que si une seule série, avec un certain contrôle sur ses coefficients, opère sur un ouvert d'une B_0-algèbre, alors l'algèbre est m-convexe.

Dans les algèbres de Banach, le calcul opérationnel de Gelfand ou "calcul fonctionnel holomorphe" permet de donner un sens à $f(x)$, où x est un élément de l'algèbre A et f est une fonction holomorphe sur un ouvert voisinage du spectre de x noté $Sp_A(x)$. En particulier, on peut définir toutes les fonctions entières; c'est à dire, si x est un élément de l'algèbre A et $f(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ est une fonction entière, on peut donner un sens à $f(x)$ par le fait que la série $\sum\limits_n a_n x^n$ est convergente dans A.

Dans le cadre topologique, les généralisations de la théorie des algèbres de Banach se sont opérées dans plusieurs directions. Parmi celles rencontrées souvent en analyse fonctionnelle, nous avons les algèbres topologiques localement multiplicativement convexes ($a.l.m.c.$ en abrégé), introduites par Arens (Chap.1, [1]) et étudiées par Michael (Chap.1, [4]), et les algèbres topologiques localement convexes métrisables (B_0-algèbres en abrégé) dont la théorie est développée par Zelazko (Chap.1, [7] et [8]).

[1] Pour les références de cette introduction, le premier chiffre indique le chapitre et le deuxième renvoie au numéro de la référence dans ce chapitre.

Les $a.l.m.c$ complètes ne permettent qu'un calcul fonctionnel holomorphe faible. Cependant, les fonctions entières opèrent. L'algèbre L^ω d'Arens (Chap.1, [1]), dans laquelle seules les fonctions polynômiales opèrent, montre que dans les B_0-algèbres les fonctions entières n'opèrent pas nécessairement. B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko (Chap.2, [9]) ont montré que si toutes les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative, alors elle est nécessairement m-convexe. Dans le cas non nécessairement commutatif, W. Zelazko (Chap.2, [12]) a exhibé un exemple d'une B_0-algèbre non commutative et non m-convexe dans laquelle les séries entières opèrent. Par ailleurs, A. El Kinani (Chap.2, [3]) a montré que si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre non nécessairement commutative, alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Au chapitre 3, nous étudions la classe des algèbres localement convexes non nécessairement commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Le plan de notre travail est le suivant:

Le premier chapitre est considéré comme préalable aux autres chapitres. Il contient des définitions et quelques résultats sur les séries entières utiles à la lecture de cette thèse.

Dans la première partie du chapitre 2, on donne différentes classes d'algèbres dans lesquelles les séries entières opèrent. Le cas Banach constitue le cadre classique. Plus généralement, d'après Arens (Chap.2, [2]), les séries entières opèrent dans les algèbres localement multiplicativement convexes complètes. A. El Kinani et M. Oudadess ont montré (Chap.2, [7]) que la M-complétude suffit pour avoir le résultat d'Arens. Un contre exemple, donné par les mêmes auteurs, montre que la pseudo-complétude est insuffisante.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko (Chap.2, [9]). En fait, les fonctions entières n'opèrent pas nécessairement dans les B_0-algèbres commutatives comme le montre l'algèbre L^ω d'Arens (Chap.2, [2]) dans laquelle seules les fonctions polynômiales opèrent. B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ont montré (Chap.2, [9]) que, si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative unitaire, alors elle est m-convexe. Ce dernier résultat a été généralisé par A. El Kinani et M. Oudadess (Chap.2, [6])) aux algèbres localement convexes commutatives unitaires à produit continu et dont l'espace sous-jacent est de Baire. De plus, la complétude ainsi que la métrisablité ne sont pas superflues dans le résultat de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko. Toute-fois, R. Choukri, A. El Kinani et M. Oudadess (Chap.2, [4]) ont montré que les séries entières opèrent dans une algèbre localement convexe complète commutative à produit continu si, et seulement si, elle est réunion filtrante croissante d'algèbres localement multiplicativement convexes de Fréchet.

Dans la dernière partie du chapitre 2, on traîte le cas non commutatif. W. Zelazko (Chap.2, [12]) a donné un exemple d'une B_0-algèbre non commutative, non m-convexe dans laquelle les séries entières opèrent. Ce qui montre que le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ne reste plus valable dans le cas non commutatif. Cependant, A. El Kinani (chap.2, [3]) a montré que si les séries entières opèrent dans une algèbre localement convexe unitaire à produit continu et dont l'espace sous-jacent est de Baire, alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Par ailleurs, R. Choukri, A. El Kinani et M. Oudadess (Chap.2, [4]) ont montré que dès que les fonctions entières opèrent dans une algèbre localement convexe séparé, on peut mettre en évidence, en un certain sens local, une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe de Fréchet. Un contre exemple (Chap.2, [4]) montre que ce fait n'est pas globale.

Au chapitre 3, on s'intéresse à la classe des algèbres localement convexes non nécessairement commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Nous examinons d'abord le lien entre la m-convexité et l'équicontinuité en zéro des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$. En fait, la famille des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans toute algèbre localement multiplicativement convexe. P. Turpin (Chap.2, [10]) a montré que la réciproque est vraie dans le cas commutatif. Dans le cas général, l'exemple de W. Zelazko (Chap.2, [12]) est une algèbre localement convexe non commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, mais qui n'est pas m-convexe. Ceci permet de voir que le résultat de P. Turpin ne reste plus valable dans la cas non commutatif. On termine cette partie par une caractérisation pratique, à l'aide d'une famille particulière de semi-normes, de l'équicontinuité en zéro des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$.

On s'intéresse ensuite à une généralisation, des résultats donnés dans la première partie du chapitre 2, aux algèbres localement convexes dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

La continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est l'une des propriétés les plus intéressantes des algèbres localement multiplicativement convexes. On montre que cette propriété est également vraie dans toute algèbre localement convexe non commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Le lien entre le fait que les séries entières opèrent et la continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est étudié dans la dernière partie de ce chapitre. On montre que, dans toute B_0-algèbre non commutative dans laquelle les séries entières opèrent, l'application inverse est continue. Puis, nous prouvons que cette dérnière propriété n'est pas nécessairement vraie dans le cas tout à fait génénal des algèbres localement convexes, même en présence de la commutativité. De plus, on montre que la complétude ainsi que la métrisablité sont nécessaires. Concernant la réciproque, on montre que les séries entières opèrent dans toute $a.l.c$ unitaire pseudo-complète qui est une Q-algèbre et dans laquelle l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue. Comme conséquence, nous obtenons que les séries entières opèrent dans toute B_0-algèbre qui est une Q-algèbre.

Au chapitre 4, on introduit la notion de la pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications. Dans la première partie de ce chapitre, on montre que, dans toute algèbre localement convexe non nécessairement commutative, l'équicontinuité en zéro d'une suite de polynômes homogènes est équivalente à la pseudo-équicontinuité en zéro de la suite de leurs génératrices. On obtient également que si une suite de polynômes homogènes particulière est équicontinue en zéro dans une algèbre localement convexe, alors elle est m-convexe. Comme conséquence, on retrouve le résultat de P. Turpin (Chap.2, [10]) qui montre que si la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans une algèbre localement convexe commutative, alors elle est m-convexe. Signalons que ce résultat ne reste plus valable dans le cas non commutatif. En s'appuyant sur la notion de la pseudo-équicontinuité en zéro, nous dégageons une condition nécessaire et suffisante qui remplace l'équicontinuité en zéro des applications puissances dans le résultat de P. Turpin. Il s'agit de la pseudo-équicontinuité en zéro de la suite des applications produits $[(x_1, ..., x_n) \longmapsto x_1 ... x_n]_n$. Ainsi, nous montrons que cette dernière propriété est exactement la m-convexité, dans toute algèbre localement convexe non nécessairement commutative.

La deuxième partie de ce chapitre constitue une application aux B_0-algèbres. On montre que si une série de polynômes homogènes continus converge sur un ouvert d'une B_0-algèbre, alors la suite constituée par son terme général est équicontinue en zéro. Comme conséquence, on retrouve, avec une approche simple et courte, le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko. Enfin, on obtient que le fait qu'une seule série, avec un certain contrôle sur ses coefficients, opère sur un ouvert d'une B_0-algèbre entraîne la m-convexité de cette dernière.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est considéré comme préalable aux autres chapitres. Il contient principalement des définitions, des rappels et quelques résultats, sur les séries entières, utiles à la lecture de cette thèse. Il contient également une série d'exemples d'algèbres topologiques considérées dans ce travail.

Toutes les algèbres considérées dans cette thèse sont associatives et complexes.

1. Notions algébriques

Soit A une algèbre unitaire d'unité e et $x \in A$.

(a) Spectre d'un élément

(i) On appelle spectre de x l'ensemble $Spx = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}$, où $G(A)$ est le groupe des éléments inversibles de A.

(ii) Le rayon spectral de x est $\rho_A(x) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in Spx\}$.

(b) Radical de Jacobson

(i) Le radical (de Jacobson) $Rad(A)$ de A est l'intersection des idéaux à droite (ou à gauche) maximaux de A. On montre que:
$Rad(A) = \{x \in A : e + xy$ est inversible à droite (ou à gauche), pour tout $y \in A\}$.

(ii) On dira que A est semi-simple si $Rad(A) = \{0\}$.

(c) Caractères: Soit χ une forme linéaire sur A. On dit que χ est un caractère de A si elle est multiplicative, i.e:

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y), \text{ pour tous } x, y \in A.$$

L'ensemble des caractères non nuls de A est noté par $\mathcal{M}^*(A)$.

2. Algèbres topologiques

Une algèbre A est dite topologique si elle est munie d'une topologie τ d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparément continu, c'est à dire que, pour tout $y \in A$, les applications de A dans A données par: $x \longmapsto xy$ et $x \longmapsto yx$ sont continues. Si l'application: $A \times A \longrightarrow A$, $(x, y) \longmapsto xy$ est continue, on dira que A est à produit continu.

(i) Q-algèbres. On dit que A est une Q-algèbre si le groupe des éléments inversibles de A est ouvert.

(ii) Algèbres à inverse continus. On dit que A est à inverse continu si l'application $x \longmapsto x^{-1}$, de $G(A)$ vers $G(A)$, est continue.

3. Algèbres localement convexes.

Une classe importante d'algèbres topologiques est la classe des algèbres localement convexes donnée par la définition suivante:

Définition 3.1. Une algèbre topologique (A, τ) est dite localement convexe (*a.l.c en abrégé*) si l'espace sous-jacent est localement convexe.

4. Algèbres multiplicativement convexes

Une algèbre normée (A, τ) est une algèbre dont la topologie peut être définie par une norme $\|.\|$ d'espace vectoriel vérifiant la propriété suivante:

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \text{ pour tout } x, y \in A.$$

Plus généralement, on a la définition suivante:

Définition 4.1. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe.
1) Une famille de semi-normes $(|.|_i)_{i \in I}$ sur A est dite sous-multiplicative si, et seulement si

$$|xy|_i \leq |x|_i |y|_i, \; i \in I, \; x, y \in A.$$

2) (A, τ) est dite m-convexe ou multiplicativement convexe ($a.l.m.c$ en abrégé) si, et seulement si, sa topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives.

Dans la suite, on va donner une caractérisation pratique d'une algèbre localement multiplicativement convexe à l'aide d'un système fondamental de voisinages de l'origine ([21]). Pour ce faire, on a besion de la définition et du lemme ci-dessous.

Définition 4.2. Soit A une algèbre et $X \subset A$. On dit que X est idempotent si et seulement, si $X^2 \subset X$, où $X^2 = \{xy : x, y \in X\}$.

Lemme 4.3. Soit A une algèbre topologique. Alors
1) L'enveloppe convexe d'un idempotent est idempotente.
2) La fermeture d'un idempotent est idempotente.

Preuve. **1)** Soit X un idempotent et $x, y \in conv(X)$. Alors:

$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{j \in J} \beta_j y_j$, $x_i, y_j \in X$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = 1$, I et J sont finis.

D'où

$$xy = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j y_j \right) = \sum_{j \in J; i \in I} \alpha_i \beta_j x_i y_j.$$

Et puisque

$$x_i y_j \in X^2 \subset X \text{ et } \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j \right) = \sum_{j \in J; i \in I} \alpha_i \beta_j = 1,$$

$conv(X)$ est un idempotent.
2) Soit maintenant $x, y \in \overline{X}$. Alors, il existe deux suites généralisées $(x_\lambda)_\lambda$ et $(y_\mu)_\mu$ d'éléments de X telle que $x_\lambda \longrightarrow x$ et $y_\mu \longrightarrow y$. On a $x_\lambda y_\mu \in X$. Pour μ fixé, on a: $x_\lambda y_\mu \longrightarrow xy_\mu \in \overline{X}$. Puis, $xy_\mu \longrightarrow xy$. Donc $xy \in \overline{X}$. Par conséquent, $\overline{X}$ est idempotent.

Proposition 4.4 ([21]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) (A, τ) est m-convexe.
2) L'origine admet un système fondamental de voisinages de zéro idempotents.

Preuve. Si la topologie de A est définie par une famille de semi-normes $(|.|_i)_{i \in I}$ sous-multiplicatives. Alors les ensembles:

$$K_i \left(0, \frac{1}{n} \right) = \left\{ x \in A, |x|_i < \frac{1}{n} \right\}, \; i \in I, \; n = 1, 2, ...$$

forment un système fondamental de voisinages idempotents de l'origine.
2)$\Longrightarrow$1): Soit V un voisinage de zéro. Comme (A, τ) est localement convexe, on peut supposer que V est convexe et fermé. Puisque l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est continue, il existe un voisinage de zéro idempotent W et $\alpha > 0$ tel que:

$$\lambda W \subset V, \text{ pour tout } |\lambda| < \alpha.$$

Posons:

$$\Omega = \bigcup_{|\lambda| \leq \min(1,\alpha)} \lambda W.$$

Alors Ω est idempotent et équilibré. En effet, soit $x, y \in \Omega$, alors

$$x \in \lambda_1 W \text{ avec } |\lambda_1| \leq 1 \text{ et } y \in \lambda_2 W \text{ avec } |\lambda_2| \leq 1.$$

Donc

$$xy \in \lambda_1\lambda_2 WW \subset \lambda_1\lambda_2 W, \text{ avec } |\lambda_1\lambda_2| \leq 1.$$

Par conséquent, Ω est idempotent. Soit maintenant $x \in \Omega$ et $|\beta| \leq 1$. Alors $x \in \lambda W$ avec $|\lambda| \leq 1$. Il s'ensuit que $\beta x \in \lambda\beta W$ avec $|\lambda\beta| \leq 1$. Donc Ω est équilibré. De plus $\overline{conv(\Omega)} \subset V$. Ainsi, on voit que zéro admet un système fondamental de voisinages convexes, équilibrés, fermés et idempotents. En associant à chaque élément de ce système sa jauge, on obtient une famille de semi-normes sous-multiplicatives qui définit la topologie de A. Par conséquent A est m-convexe.

Remarque 4.5. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe qui est m-convexe. Puisque la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives, (A, τ) est à produit continu.

Une autre propriété intéressante des *a.l.m.c* concerne la continuité de l'inverse.

Proposition 4.6 ([21]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire qui est m-convexe. Alors (A, τ) est à inverse continu.

Remarque 4.7. **1)** Comme conséquence de cette dernière propriété, on obtient que le spectre de tout élément de A est non vide. Si de plus, (A, τ) est une Q-algèbre, le spectre de tout élément est compact ([21]).

2) Une autre conséquence est le fait que l'ensemble des caractères continus non nuls dans une *a.l.m.c* commutative et unitaire est non vide ([21]).

5. Les B_0-algèbres

Définition 5.1. Une B_0-algèbre est une algèbre localement convexe métrisable et complète.

Dans une B_0-algèbre, il est parfois plus simple de raisonner avec la famille de semi-normes donnée par la proposition suivante:

Proposition 5.2 ([21])**.** Soit (A, τ) une B_0-algèbre. Alors la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(|.|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x, y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait:

$$\begin{array}{rcll} |x|_n & \leq & |x|_{n+1} & \quad\textbf{(1)} \\ |xy|_n & \leq & |x|_{n+1}\,|y|_{n+1} & \quad\textbf{(2)} \end{array}$$

Le résultat suivant montre que le produit est continu dans les B_0-algèbres ([15]).

Proposition 5.3 ([15])**.** Soit (A, τ) une B_0-algèbre. Alors (A, τ) est à produit continu.

Preuve. Puisque (A, τ) est métrisable, elle est à base dénombrable de voisinages de zéro qu'on note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit U un voisinage de zéro fermé dans A tel que $U + U \subset U$. On pose:

$$A_n = \{x \in A : xU_n \subset U\}.$$

Alors A_n est fermé. En effet, soit $y \in \overline{A_n}$. Il existe alors une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A_n telle que $x_n \longrightarrow x$. Le produit étant séparément continu, on a $xy_n \longrightarrow xy$, pour tout $y \in U_n$. Comme $x_n y \in xU_n \subset U$ qui est fermé, on obtient $xy \in U$. D'où $xU_n \subset U$ et par suite $x \in A_n$. Ainsi A_n est fermé, pour tout n. De plus, on a:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$

Donc, d'après le théorème de Baire, il existe n_0 tel que A_{n_0} est d'intérieur non vide. Soit alors $x_0 \in A_{n_0}$ et W un voisinage de zéro tel que $x_0 + W \subset A_{n_0}$. Pour tout $x \in W$, on a:

$$(x + x_0)U_{n_0} = xU_{n_0} + x_0U_{n_0} \subset U.$$

D'où

$$xU_{n_0} \subset U - x_0U_{n_0} \subset U + U \subset U$$

Par conséquent, $WU_{n_0} \subset U$. Donc A est à produit continu.

La proposition suivante concerne la continuité de l'inverse dans une classe particulière des B_0-algèbres.

Proposition 5.4 ([21]). L'inverse est continu dans toute B_0-algèbre unitaire qui est une Q-algèbre.

6. Séries entières dans les algèbres topologiques

Dans une algèbre, un polynôme a toujours un sens. Mais une série entière ne l'a pas nécessairement, d'où la nécessité de la définition suivante:

Définition 6.1. Soit (A, τ) une algèbre topologique unitaire et $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. On dit que φ opère dans (A, τ) si, et seulement, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge dans (A, τ), pour tout $x \in A$.

Remarque 6.2. L'opération des séries entières est preservée par passage au produit quelconque. En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres topologiques, si les séries entières opèrent dans chaque A_i, pour tout $i \in I$, alors elles opèrent dans $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ car si $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière, alors $f(x) = (f(x_i))_{i\in I} \in A$. Notons que la réciproque est également vraie.

Concernant le passage au quotient, on a le résultat suivant:

Proposition 6.3. Soit (A, τ) une algèbre topologique dans laquelle les séries entières opèrent et soit I un idéal bilatère fermé de A. Alors les séries entières opèrent dans l'algèbre topologique quotient A/I.

Preuve. Soit $x \in A$ et $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Par la continuité de la surjection canonique $s : A \longrightarrow A/I$, on a: $f(s(x)) = s(f(x))$.

Remarque 6.4. 1) La réciproque de la proposition 6.3 est fausse en général. En effet, soit $A = \mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients complexes munie de la norme:

$$\left\| \sum \alpha_i X^i \right\| = \sum |\alpha_i|\,.$$

La fonction exponentielle $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ n'opère pas dans A. En fait, seuls les polynômes y opérent. Cependant, tous les quotients propres de $\mathbb{C}[X]$ sont de dimension finie.

2) L'opération des fonctions entières n'est pas nécessairement preservée par passage à la complétée. En effet, les fonctions entières opèrent dans l'algèbre $(\mathcal{C}([0,1]), (\|.\|_p)_{p\geq 1})$ alors que seuls les polynômes opèrent dans sa complétée $L^\omega = \bigcap\limits_{p\geq 1} L^p$.

Les fonctions entières opèrent dans A si, et seulement si, elles opèrent dans $\overline{\mathbb{C}[x]}$, pour tout $x \in A$. Ceci donne naissance à une classe d'algèbres topologiques, non nécessairement complètes, dans lesquelles les fonctions entières opèrent comme le montre le résultat suivant:

Proposition 6.5. Soit (A, τ) une algèbre topologique. Si A est algébrique, alors toutes les fonctions entières opèrent dans A.

Voici deux exemples d'une telle situation:

Exemple 6.6. Soit A l'algèbre des suites complexes stationnaires munie d'une topologie d'algèbre quelconque. Alors A est algébrique car si $x = (x_n)_{n\geq 0}$, où $x_n = x_p$, pour tout $n \geq p$, alors x est racine du polynôme $P = \prod\limits_{0\leq k\leq p} (X - x_k) \in \mathbb{C}[X]$. Par la proposition 6.5, toutes les fonctions entières opèrent dans A.

Exemple 6.7. Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé de dimension infinie, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs bornés de E et A la sous -algèbre de $\mathcal{L}(E)$ formée des opérateurs de rang fini. Alors A est algébrique. En effet, soit $f \in E$. On a

$$g = f_{/\operatorname{Im} f} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f)$$

et $\dim \operatorname{Im} f < \infty$. Donc il existe un polynôme non nul P tel que $P(g) = 0$ (par exemple, le polynôme caractéristique de g). Soit maintenant $x \in E$. On a $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $P(f)(f(x)) = 0$. En prenant $Q = XP$, on voit que $Q(f) = 0$.

Remarque 6.8. Soient $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et A une algèbre topologique. Le fait que les séries entières opèrent en un point $x \in A$, donne naissance à un morphisme d'algèbres:

$$\varphi_x : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow A$$

tel que $\operatorname{Im}\varphi_x \subset \overline{\mathbb{C}[x]}$. Cette inclusion est en général stricte. En effet soit $A = (\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ et $x \in A$ donné par $x(t) = t$, pour tout $t \in [0,1]$. Alors $\overline{\mathbb{C}[x]} = A$; par contre $\operatorname{Im}\varphi_x \neq \overline{\mathbb{C}[x]}$ car $t \longmapsto \sqrt{t}$ n'est pas dans $\operatorname{Im}\varphi_x$.

Le résultat suivant caractérise, dans le cas Banach, les points x vérifiant $\operatorname{Im}\varphi_x = \overline{\mathbb{C}[x]}$.

Proposition 6.9. Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre de Banach complexe et $x \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes:
i) $\operatorname{Im}\varphi_x = \overline{\mathbb{C}[x]}$,
ii) x est algébrique.

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii): Dans $\overline{\mathbb{C}[x]}$, le spectre de tout élément est compact et $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ contient des éléments de spectre non borné. Donc $\ker\varphi_x \neq \{0\}$. Soit alors $f_0 \in \ker\varphi_x$, non nul. On a:

$$\{0\} = Sp(f_0(x)) = f_0(Sp(x)).$$

Ainsi f_0, qui est holomorphe, s'annule sur le compact $Sp(x)$. Donc $Sp(x)$ est fini. Posons:

$$Sp(x) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}.$$

Soit $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $g(\lambda_k) \neq 0$, pour tout k, et

$$f_0(z) = \prod_{1 \leq k \leq r} (z - \lambda_k)^{m_k} g(z).$$

Alors, on a:

$$0 = f_0(x) = \prod_{1 \leq k \leq r} (x - \lambda_k e)^{m_k} g(x),$$

mais $0 \notin Sp(g(x))$. Donc $\prod\limits_{1 \leq k \leq r} (x - \lambda_k e)^{m_k} = 0$ et x est algébrique.
ii) $\Longrightarrow$i): Supposons que x est algébrique. Alors $\mathbb{C}[x]$ est de dimension finie et $\operatorname{Im}\varphi_x = \mathbb{C}[x] = \overline{\mathbb{C}[x]}$.

Remarque 6.10. La proposition précédente ne marche pas dans le cas Fréchet. En effet, prenons $A = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ elle même, $x \in A$, où $x(z) = z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a alors $\operatorname{Im}\varphi_x = \mathcal{H}(\mathbb{C}) = \overline{\mathbb{C}[x]}$, mais x n'est pas algébrique.

7. Equicontinuité en zéro des applications puissances.

Définition 7.1. Soit (A, τ) une algèbre topologique. On dit que la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro si, pour tout voisinage de zéro V, il existe un voisinage de zéro U tel que:

$$x^n \in V, \forall x \in U, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(ce qui est équivalent au fait que, (A, τ) possède un système fondamental de voisinages de zéro U tels que $x^n \in U$, dès que $x \in U$ et $n \geq 1$).

Dans toute *a.l.m.c.*, la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Dans le cas commutatif, P. Turpin a montré que la réciproque est également vraie.

Proposition 7.1 ([17]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe commutative, où la suite des applications $(x \longmapsto x^n)_n$ de (A, τ) dans (A, τ) est équicontinue en zéro. Alors (A, τ) est m-convexe.

La continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ n'est pas suffisante pour avoir l'équicontinuité en zéro de la suite des applications $(x \longmapsto x^n)_n$. Cependant, avec la Q-propriété, P. Turpin a montré que le résultat reste encore vrai:

Proposition 7.2 ([17]). Soit (A, τ) une Q-algèbre localement convexe à inverse continu. Alors la suite des applications $(x \longmapsto x^n)_n$ de (A, τ) dans (A, τ) est équicontinue en zéro.

8. Notions de complétudes

La notion de complétude la plus connue est le fait que tout suite de Cauchy converge. Il existe plusieurs autres notions de complétues. Ici, on utilise la M-complétude et la pseudo-complétude.

Définition 8.1. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe.
1) On dit que (A, τ) est Mackey complète (en abrégé M-complète) si tout disque fermé borné B est complétant i.e., l'espace vectoriel E_B, engendré par B, muni de la jauge de B est un Banach.
2) On dit que (A, τ) est pseudo-complète si tout disque fermé borné et idempotent B est complétant.

Remarque 8.2. Soit $(A, (p_i)_i)$ une algèbre localement convexe, B un disque fermé borné de $(A, (p_i)_i)$ et E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la jauge de B qu'on note par $\|.\|_B$. Alors la topologie induite par la famille de semi-normes $(p_i)_i$ sur E_B est moins fine que celle associée à la norme $\|.\|_B$.

En effet, comme B est borné, pour tout i, il existe une constante strictement positive M_i telle que:

$$p_i(x) \leq M_i, \text{ pour tout } x \in B.$$

Par conséquent

$$B \subset M_i \overline{B_i(0;1)}, \text{ où } B_i(0;1) = \{x \in A : p_i(x) < 1\}.$$

donc

$$p_i(x) \leq M_i \|x\|_B.$$

Le résulat suivant montre que la complétude entraîne la M-complétude.

Proposition 8.3. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe complète. Alors (A, τ) est M-complète.

Preuve. Soit B un disque fermé borné, $\|.\|_B$ la jauge de B et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E_B, \|.\|_B)$. Alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (A, τ), donc converge vers un élément x de E. Et puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que:

$$x_m - x_n \in \varepsilon B, \text{ pour tout } n, m \geq N,$$

il s'ensuit que

$$x_m - x \in \varepsilon B, \text{ pour tout } m \geq N.$$

Par conséquent $x \in E_B$. D'où le résultat.

La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 8.4. Soit $E = (C_0(X), \beta)$ l'algèbre des fonctions continues sur X et tendant vers 0 à l'infini, où X est un espace localement compact, σ-compact non compact. L'espace E muni de la topologie stricte induite par $C_b(X)$ n'est pas complète. En effet, soit $f \in C_b(X)$ et $(A_n)_n$ une suite de compacts de X telle que:

$$A_n \subset \overset{0}{A_{n+1}} \text{ et } \bigcup_n A_n = X.$$

Alors, pour tout n, il existe une fonction continue g_n telle que:

$$0 \leq g_n \leq 1, g_n = 1 \text{ sur } A_n \text{ et } supp\ g_n \subset A_{n+1}.$$

Posons $f_n = fg_n$. Ainsi on obtient une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E dont la limite dans $C_b(X)$ est f. Donc E n'est pas complète. Comme les bornés de β et ceux de la norme de la convergence uniforme coïncident et que E est complète pour la norme de la convergence uniforme, alors (E, β) est M-complète.

Dans le cas métrisable la M-complétude implique la complétude comme le montre le résultat suivant:

Proposition 8.5. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe métrisable M-complète. Alors (A, τ) est complète.

Dans la suite, nous allons donner des exemples d'algèbres localement convexes pseudo-complètes non M-complètes.

Exemple 8.6. Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$. Elle est définie par la famille de semi-normes:

$$|f|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|, \ K \text{ est compact de } \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

C'est une algèbre localement convexe métrisable qui est m-convexe et qui n'est pas complète. Par conséquent, elle n'est pas M-complète. Montrons que E est pseudo-complète. En effet, soit D un disque fermé borné et idempotent de E et $\|.\|_D$ sa jauge. Supposons qu'il existe $g \in D$ telle que $\|g\|_\infty > 1$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $|g(x_0)| > 1$. Maintenant soit K' un compact de $\mathbb{R}$ contenant x_0. Comme D est borné, il existe une constante strictement positive $M_{K'}$ telle que:

$$|f|_{K'} \leq M_{K'}, \text{ pour tout } f \in D.$$

En particulier $|g|_{K'} \leq M_{K'}$, et puisque D est idempotent, on a:

$$|g^n|_{K'} \leq M_{K'}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mais on a $|g|_{K'} > 1$, d'où $|g^n|_{K'} \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Contradiction. D'où

$$\|g\|_\infty \leq 1, \text{ pour tout } f \in D.$$

$$D \subset M_{K'}\overline{B_{\|.\|_\infty}(0;1)}, \text{ où } B_{\|.\|_\infty}(0,1) = \{f \in E : \|f\|_\infty < 1\}.$$

donc

$$\|f\|_\infty \leq M_{K'} \|f\|_D.$$

Comme $(E, \|.\|_\infty)$ est complet, il s'ensuit que le sous-espace vectoriel E_D, engendré par D, est un Banach.

Exemple 8.7. Soit $A = \mathcal{C}([0,1])$ l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur $[0,1]$, munie de la norme $\|.\|_1$ définie par:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt, \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

C'est une algèbre localement convexe pseudo-complète non M-complète.

Exemple 8.8. Soit $\phi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$\phi(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On définit sur $A = \mathcal{C}([0,1])$ la norme suivante:

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)\,\phi(x)|.$$

Ainsi $(A, \|.\|)$ devient une algèbre localement convexe pseudo-complète non M-complète.

9. Quelques exemples d'algèbres topologiques

Exemple 9.1. On note par $(\mathbb{C}[X], \|.\|)$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes, munie de la norme d'algèbre:

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|.$$

C'est une algèbre normée non Q-algèbre.

Exemple 9.2. Soit D le disque unité de $\mathbb{C}$. On note par $A(D)$ l'algèbre des fonctions complexes définies continues sur D, holomorphes à l'intérieur de D. Pour tout $f \in A(D)$, on pose:

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| \text{ et } \|f\|' = \sup_{|z| \leq \frac{1}{2}} |f(z)|.$$

$(A(D), \|.\|)$ est une algèbre de Banach, alors que $\left(A(D), \|.\|'\right)$ est une algèbre normée, non Q-algèbre.

Exemple 9.3. On note par $(\mathbb{C}[[X]], (p_n)_n)$ l'algèbre des séries formelles, munie de la famille de semi-normes définie par:

$$p_n\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|.$$

C'est une *a.l.m.c* de Fréchet qui est une Q-algèbre.

Exemple 9.4. L'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites complexes, munie de la topologie produit, est une *a.l.m.c* de Fréchet qui est n'est pas une Q-algèbre.

Exemple 9.5. On note par $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions complexes définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$. C'est une *a.l.m.c* de Fréchet qui est n'est pas une Q-algèbre.

Exemple 9.6. L'algèbre $(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\infty}([0;1]), (p_n)_n)$ des fonctions complexes définies sur $[0;1]$, indéfiniment dérivables, munie de la famille de semi-normes définie par:

$$p_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{z\in[0,1]} \left|f^{(k)}(z)\right|$$

C'est une *a.l.m.c* de Fréchet qui est une Q-algèbre.

Exemple 9.7. Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur $\mathbb{R}$, munie de la famille de semi-normes définie par:

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|, \ K \text{ est un compact de } \mathbb{R} \text{ et } f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

$(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), (p_K)_K)$ est une *a.l.m.c* de Frechet qui n'est pas une Q-algèbre.

Exemple 9.8. Soit $\left(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([0,1]), (p_D)_{D\in\mathcal{D}}\right)$ ($\mathcal{D}$ étant la famille des parties dénombrables compactes de $[0,1]$), l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur $[0,1]$, munie de la famille de semi-normes définie par:

$$p_D(f) = \sup_{x\in D} |f(x)|, \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}([0,1]).$$

$\left(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([0,1]), (p_D)_{D\in\mathcal{D}}\right)$ est une *a.l.m.c* complète non métrisable et qui n'est pas une Q-algèbre.

Exemple 9.9. On note par $\mathbb{C}(X)$ l'algèbre (le corps) des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients complexes. Muni de la topologie de Williamson ([18]), $\mathbb{C}(X)$ devient une algèbre localement convexe, métrisable non complète, à produit continu et qui est une Q-algèbre.

Exemple 9.10. L'algèbre d'Arens ([2]):

$$L^{\omega} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} L^p[0,1],$$

munie du produit usuel et de la topologie τ définie par la suite de semi-normes $\left(\|.\|_p\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ donnée par:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x \in L^{\omega},$$

est une B_0-algèbre commutative unitaire non m-convexe, non Q-algèbre, à inverse non continu et sans caractère non nul.

10. Formule de polarisation et formule de Mazur-Orlicz

Les deux formules suivantes sont fréquemment utilisées dans notre travail.

Proposition 10.1 ([3])**.** Soit A une algèbre commutative. Alors, pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, on a la formule suivante qui est dite "formule de polarisation"

$$x_1 x_2 ... x_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

avec

$$\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} (x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k})^n.$$

Proposition 10.2 ([3])**.** Soit A une algèbre non nécessairement commutative unitaire et $x_0 \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, on a la formule de Mazur-Orlicz suivante:

$$x^n = \frac{n^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j \left(x_0 + \frac{j}{n} x\right)^n, \; n = 1, 2....$$

Bibliographie du chapitre 1

[2] R. Arens, The space L^ω and convex topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 931-935.

[3] J. Bochnak, J. Siciak, Polynomials and multilinear mappings in topological vector space, Studia. Math. 39, 59-76 (1971).

[6] R. Creighton, Buck, Bounded continuous functions on a locally compact space, The Machigan Mathmatical Journal 5(2), 1958, p 95-104.

[15] E. A. Michael, Locally multiplicatively-convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[17] P. Turpin, Une remarque sur les algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 270. Série A (1970), p. 1686-1689.

[18] J. H. Williamson, On topologising the field $\mathbb{C}(t)$, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954), 729-734.

[21] W. Zelazko, Selected topics in topological algebras, Lect. Notes Series 31 (1971), Matematisk Institut Aarhus Universitet-Aarhus.

[22] W. Zelazko, Metric generalisation of Banach algebras, Rozprway Mat. (Dissertationes Math.) 47 (1965).

Chapitre 2

Séries entières dans les algèbres localement convexes

Il est bien connu que les séries entières opèrent dans les algèbres de Banach, et plus généralement, d'après Arens ([2]), dans les algèbres localement multiplicativement convexes complètes. A. El Kinani et M. Oudadess ([13]) ont montré que la M-complétude suffit pour avoir ce dernier résultat. Les mêmes auteurs ([13]) ont donné un exemple d'une $a.l.m.c$ pseudo-complète dans laquelle les séries entières n'opèrent pas. Ce qui prouve que la pseudo-complétude n'est pas suffisante pour que les entières opèrent dans une $a.l.m.c.$ Cependant, elle l'est avec la condition supplémentaire de la Q-propriété ([13]).

Dans les B_0-algèbres, les fonctions entières n'opèrent pas nécessairement comme le montre l'algèbre L^ω d'Arens ([2]) dans laquelle seules les fonctions polynômiales opèrent. Par ailleurs, B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]) ont montré que si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative, alors elle est nécessairement m-convexe. Notons que leur preuve est longue et fort calculatoire et se fait en plusieurs lemmes techniques. Dans [12], A. El Kinani et M. Oudadess ont donné une généralisation de ce résultat à une classe d'algèbres plus grande. Il s'agit des algèbres localement convexes commutatives unitaires à produit continu et dont l'espace sous-jacent est de Baire. Leur preuve est beaucoup plus simple et courte. Deux contre exemples montrent que la complétude ainsi que la métrisablité sont nécessaires. Dans le cas non nécessairement métrisable, A. El Kinani, R. Choukri et M. Oudadess ont montré ([11]) que les séries entières opèrent dans une algèbre localement convexe complète commutative à produit continu si, et seulement si elle est réunion filtrante croissante d'$a.l.m.c$ de Fréchet.

Dans le cas non commutatif, le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ne reste plus valable. En fait, Zelazko ([20]) a donné un exemple d'une B_0-algèbre non commutative et non m-convexe dans laquelle les séries entières opèrent. Par ailleurs, A. El Kinani ([7]) a montré que si les séries entières opèrent dans une algèbre localement convexe unitaire non nécessairement commutative à produit continu et dont l'espace sous-jacent est de Baire, alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Ce résultat est en particulier vrai dans toute B_0-algèbre unitaire. De plus, en présence de la commutativité, il permet de retrouver le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]) ainsi que celui de A. El Kinani et M. Oudadess ([12]).

Plus généralement, A. El Kinani, R. Choukri et M. Oudadess ([11]) ont montré que dès que les fonctions entières opèrent dans une algèbre localement convexe séparée, on peut mettre en évidence, en un sens local, une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe de Fréchet. Un contre exemple montre que ce fait n'est pas global.

1. Classes d'algèbres dans lesquelles les séries entières opérent

On sait que les séries entières opèrent dans les algèbres de Banach, plus généralement, elles opèrent dans toute *a.l.m.c.* complète comme le montre ce qui suit.

Proposition 1.1 ([15]). Les séries entières opèrent dans toute *a.l.m.c* unitaire et complète (A, τ).

Preuve. Soit $(|.|_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives qui définit τ et soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors, pour tout $i \in I$, on a:

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)|_i \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k|\, |x|_i^k$$

et $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |a_k|\, |x|_i^k$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ainsi, la suite $(S_n(x))_n$ est de *Cauchy* dans $\left(A, (|.|_i)_{i\in I}\right)$ qui est complète. Donc elle converge dans A.

Remarques 1.2. 1) La preuve ci-dessus est donnée par Michael ([15]). Une autre preuve de ce résultat est donnée par Arens ([2]). Elle utilise les voisinages de la façon suivante: Soient U un voisinage de zéro, disqué et idempotent, $x \in A$ et $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_k z^k$ une série entière. Alors, il existe $t > 0$ tel que $tx \in U$. Et comme U est idempotent, on a:

$$t^k x^k \in U, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \, t^{-k}$ existe vu que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_k z^k$ est absolument convergente dans A. Par suite, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \, t^{-k} \leq 1, \text{ pour tous } n > m \geq m_0.$$

Comme U est disqué, on a:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k x^k = \sum_{k=m}^{n} a_k t^{-k} \left(t^k x^k\right) \in U.$$

Ainsi la série $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k$ est de *Cauchy* dans (A, τ) qui est complète. Donc elle converge dans (A, τ).

2) L'application $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$ est continue. En effet, soit $(|.|_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives qui définit τ. Pour tout $h \in A$ et $i \in I$, on a:

$$|S(x+h) - S(x)|_i \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left|(x+h)^k - x^k\right|_i.$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < t < +\infty$ tel que $\left|\dfrac{x}{t}\right|_i \leq \varepsilon$. Soit $a \geq 1$ tel que:

$$\sum_{k\geq 0} a_k (1+t)^k < a.$$

Comme l'application $h \longmapsto ah$ est continue en zéro, il existe $\alpha > 0$ et $j \in I$ telle que:

$$|h|_j < \alpha \Longrightarrow |ah|_i < \varepsilon.$$

En écrivant $\left[(x+h)^k - x^k\right]$ comme somme de produit de puissances de $\dfrac{x}{t}$ et h, pour tout $|h|_j < \alpha$, on obtient:

$$\frac{a}{(1+t)^k} \left|(x+h)^k - x^k\right|_i \leq \varepsilon.$$

D'où

$$|S(x+h) - S(x)|_i \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k (1+t)^k}{a} \frac{a}{(1+t)^k} \left|(x+h)^k - x^k\right|_i \leq \varepsilon,$$

ce qui donne le résultat. Ainsi, les séries entières opèrent continûment dans (A, τ).

3) Les séries entières n'opèrent pas nécessairement continûment dans le cas général d'une algèbre localement convexe. En effet, soit E l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$ munie de la norme:

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt, \text{ pour tout } f \in E.$$

L'algèbre E est A-normée et non normée. Les fonctions entières opèrent dans E, mais l'application $f \longmapsto f^2$ est non continue vue que l'algèbre E est non normée.

Nous avons vu que les séries entières opèrent dans toute $a.l.m.c$ complète. A. EL Kinani et M. Oudadess ([13]) ont montré que la M-complétude suffit pour avoir ce résultat.

Proposition 1.3 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute $a.l.m.c$ (A, τ) unitaire et M-complète.

Preuve. Soit $(|.|_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant τ, $\varphi(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et a un élément de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$I_n = \{i \in I : |a|_i \leq n\}$$

et

$$p_n(x) = \sup_{i \in I_n} |x|_i \,, \text{ pour tout } x \in A.$$

Ensuite, on considère:

$$A_a = \{x \in A : p_n(x) < +\infty, \text{ pour tout } n\}.$$

Alors $(A_a, (p_n)_n)$ est une $a.l.m.c$ métrisable contenant a. Comme les p_n sont sous-multiplicatives, la suite $(S_N)_N$, où $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n$, est de Cauchy dans A_a qui est métrisable. Par conséquent $(S_N)_N$ est M-Cauchy dans A_a, et donc M-Cauchy dans (A, τ) qui est M-complète. Il s'ensuit que la suite $(S_N)_N$ est M-convergente et donc convergente.

Remarque 1.4. La preuve précédente utilise des notions de bornologie. On donne dans ce qui suit une preuve directe qui permet de dégager le disque fermé borné qui est derrière le fait que les séries entières opèrent. En effet, soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $(|.|_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant τ. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, pour tout $i \in I$, on a:

$$|a_n x^n|_i \leq |a_n|\,|x|_i^n\,.$$

Comme $|a_n|\,|x|_i^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, la suite $(a_n x^n)_n$ est bornée. De la même manière, on montre que la suite $\left(\sqrt{|a_n|}x^n\right)_n$ est bornée. Posons:

$$B = \overline{conv\,(A_1 \cup A_2)},$$

où

$$A_1 = \{\alpha a_n x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\}$$

et

$$A_2 = \left\{\alpha\sqrt{|a_n|}x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\right\}.$$

On vérifie facilement que B est un disque fermé borné. Et puisque $\left(A, (|.|_i)_{i\in I}\right)$ est M-complète, il s'ensuit que le sous espace vectoriel E_B engendré par B muni de la jauge $\|.\|_B$, de B, est un espace de Banach. Soit maintenant $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a:

$$\begin{aligned}
\|S_{n+m}(x) - S_n(x)\|_B &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}\sqrt{|a_n|}\,\|x^n\|_B \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}\left\|\sqrt{|a_n|}x^n\right\|_B \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}$ tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini, la suite $(S_n(x))_n$ est de *Cauchy* dans $(E_B, \|.\|_B)$ qui est complet. Donc converge dans (A, τ).

Dans la proposition 1.3, la pseudo-complétude est insuffisante comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 1.5. ([13]). Soit A l'algèbre des polynômes définis sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs complexes munie la famille de semi-normes définies par:

$$|P|_n = \sup_{|x|\leq n} |P(x)|, \ n \in \mathbb{N}^*, \ P \in A.$$

Alors $\left(A, (|.|_n)_n\right)$ est une $a.l.m.c$ métrisable. Comme $\left(A, (|.|_n)_n\right)$ est à base dénombrabe, elle n'est pas complète. Par conséquent, elle n'est pas M-complète. Montrons maintenant que $\left(A, (|.|_n)_n\right)$ est pseudo-complète. En effet, soit D un disque fermé borné et idempotent de A et $\|.\|_D$ sa jauge. Supposons qu'il existe un polynôme non constant $P \in D$. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(x_0)| > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_0| \leq n$. Comme D est borné, il existe une constante strictement positive M_n telle que:

$$|Q|_n \leq M_n, \text{ pour tout } Q \in D.$$

En particulier, $|P|_n \leq M_n$, et puisque D est idempotent, on a:

$$\left|P^k\right|_n \leq M_n, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Mais, on a $|P|_n > 1$, d'où $\left|P^k\right|_n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$; contradiction. D'où D ne contient que les constantes donc $E_D = \mathbb{C}$ (ou $\{0\}$ si $D = \{0\}$). Soit maintenant E_D le sous espace vectoriel engendré par D. Alors

$$\|\lambda\|_D = |\lambda|, \text{ pour tout } \lambda \in E_D.$$

Il s'ensuit que $(E_D, \|\lambda\|_D)$ est un Banach. Par conséquent, A est pseudo-complète. Montrons que la fonction exponentielle n'opère pas dans $\left(A, (|.|_n)_n\right)$. En effet, supposons que $x \longmapsto e^x$ opère dans $\left(A, (|.|_n)_n\right)$. Soit $P_0 \in A$, où $P_0(x) = x$, pour tout $x \geq 0$. Alors la série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{P_0^k}{k!}$ est convergente dans A. Soit $P \in A$, tel que $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{P_0^k}{k!} = P$, où $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$, pour tout $x \geq 0$. Alors, on aura $e^x = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$, pour tout $x \geq 0$. En passant à la dérivée d'ordre $N+1$, on obtient $e^x = 0$, pour tout $x \geq 0$; contradiction. Par conséquent, la fonction exponenetielle n'opère pas dans $\left(A, (|.|_n)_n\right)$.

Dans le cas Q-algèbre, la pseudo-complétude est suffisante comme le montre le résultat suivant ([13]).

Proposition 1.6 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute $a.l.m.c.$ unitaire pseudo-complète (A, τ) qui est une Q-algèbre.

Preuve. Soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et $x \in A$. Comme (A,τ) est m-convexe, l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue. Et puisque c'est une Q-algèbre, le spectre de tout élément est compact. D'où, d'après un résultat d'Allan ([1]), il existe un nombre complexe non nul λ tel que la partie:

$$\{(\lambda x)^n \,, n = 1, 2, ...\}$$

est bornée. Posons maintenant

$$B = \overline{conv\,\{\alpha\,(\lambda x)^n\,,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\}}.$$

On vérifie facilement que la partie B est disquée, fermée, bornée et idempotente. Comme (A,τ) est pseudo-complète, le sous espace vectoriel E_B engendré par B muni de la jauge $\|.\|_B$ de B est un espace de Banach. Posons: $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a:

$$\|S_{n+m}(x) - S_n(x)\|_B \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n} \|(\lambda x)^n\|_B \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n}.$$

Et puisque $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n}$ tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini, la suite $(S_n(x))_n$ est de *Cauchy* dans $(E_B, \|.\|_B)$ qui est complet. Donc elle converge dans (A,τ).

L'analyse de la preuve de la proposition précédente montre que si on remplace la m-convexité par la continuité de l'application inverse, on obtient le résultat suivant:

Proposition 1.7 ([13])**.** Les séries entières opèrent dans toute $a.l.c$ unitaire pseudo-complète (A,τ) qui est une Q-algèbre et dans laquelle l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue.

Comme conséquence, on obtient:

Corollaire 1.8 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute B_0-algèbre qui est une Q-algèbre.

Preuve. On sait, d'après un résultat de Zelazko ([21]), que l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue dans toute B_0-algèbre qui est une Q-algèbre. Et on conclut, en utilisant la proposition 1.6.

Dans la suite, on va donner deux exemples de Q-algèbres dans lesquelles les séries entières n'opèrent pas. Dans le premier exemple ([13]), l'algèbre est complète et dans le second ([11]) l'algèbre est normée.

Exemples 1.9. 1) Soit $E = C(X)$, le corps des fractions rationnelles, muni de la topologie de Mackey $\tau(E, E^*)$. C'est une algèbre localement convexe complète qui est une Q-algèbre, mais les fonctions entières n'opèrent pas. Par conséquent, E n'est pas m-convexe. Remarquons aussi que l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ n'est pas continue. Cet exemple montre que la complétude et la Q-propriété ne sont pas suffisantes pour que les séries entières opèrent.

2) Exemple d'une Q-algèbre normée commutative dans laquelle seules les polynômes opèrent: Soit A l'algèbre des fractions rationnelles à coefficients complexes de la forme:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} \text{ avec } Q(0) \text{ non nul.}$$

Soit B une algèbre de Banach unitaire intègre et non semi-simple (e.g. l'algèbre de convolution obtenue par adjonction d'une unité à $L^1[0,1]$). Considérons x non nul dans le radical de B. Alors il n'est pas algébrique, car, sinon il existerait un polynôme $P(X)$, de terme constant non nul et un entier naturel n tel que

$$x^n P(x) = 0.$$

Mais $P(x)$ est inversible, donc $x^n = 0$ et par suite $x = 0$; ce qui n'est pas le cas. Par ailleurs $Sp_B(x) = \{0\}$. Donc $P(x)$ est inversible pour tout polynôme $P(X)$ tel que $P(0) \neq 0$. Considérons alors l'application:

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & A & \longrightarrow & B \\ & & \frac{P(X)}{Q(X)} & \longmapsto & P(x)\,Q(x)^{-1} \end{array}$$

On montre que φ est un morphisme d'algèbre. De plus, il est injectif puisque x n'est pas algébrique. Donc A est isomorphe (algébriquement) à une sous-algèbre de B. D'où l'existence d'une norme $\|.\|$ d'algèbre sur A. Par ailleurs, A admet un seul idéal maximal (c'est le noyau du caractère χ_0 défini par $\chi_0(x) = x(0)$), il est nécessairement fermé et par suite $(A, \|.\|)$ est une Q-algèbre. Montrons maintenent, par l'absurde, que seuls les polynômes opèrent dans A. Considérons un polynôme $Q(X)$, à terme constant non nul, de degré minimal tel que:

i) Il existe une fonction entière $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ qui n'est pas un polynôme avec $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$ converge dans $(A, \|.\|)$.

ii) Il existe un polynôme $P(X)$ tel que $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$. Le polynôme $Q(X)$ n'est pas constant. Sinon, il existerait $b_0, ..., b_r \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n = \sum_{0\leq n\leq r} b_n X^n.$$

En appliquant le caractère χ_0 et en utilisant l'intégrité de la complétée de $(A, \|.\|)$, nous aurons $a_n = b_n$ pour $n \leq r$ et $a_n = 0$ pour $n > r$. Ainsi f serait un polynôme, ce qui n'est pas le cas. Soit maintenant α une racine de $Q(X)$ et $Q_1(X)$ un polynôme tel que:

$$Q(X) = (X - \alpha) Q_1(X).$$

On a:

$$(X - \alpha) f(X) = \frac{P(X)}{Q_1(X)}.$$

Considérons la fonction entière:

$$g(z) = (x - \alpha) f(z).$$

Comme le degré de $Q_1(X)$ est strictement inférieur à celui de $Q(X)$, la fonction g est un polynôme. Il en résulte que f est un polynôme, ce qui n'est pas le cas.

Dans les B_0-algèbres, les fonctions entières n'opèrent pas nécessairement comme le montre l'exemple (cf. [2]) suivant: Soit $L^\omega = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*} L^p([0,1])$ l'algèbre, dite d'Arens, munie du produit usuel et de la topologie τ définie par la suite de semi-normes $\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ donnée par:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x \in L^\omega.$$

On a le résultat suivant:

Proposition 1.10 ([2]). L'algèbre d'Arens $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une B_0-algèbre commutative unitaire qui n'est pas m-convexe et dans laquelle seules les fonctions polynômiales opèrent.

Preuve. Montrons tout d'abord que $\left(L^{\omega},\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une B_0-algèbre. Soient $x,y\in L^{\omega}$ et $p\in\mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, on a:

$$\begin{aligned}
\|xy\|_p &= \left(\int_0^1 |xy(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left(\int_0^1 |x(t)|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{2p}}\left(\int_0^1 |y(t)|^{2p}\,dt\right)^{\frac{1}{2p}}\\
&\le \|x\|_{2p}\,\|y\|_{2p}\,.
\end{aligned}$$

Donc $xy\in L^{\omega}$. Ensuite, on vérifie facilement que l'espace $\left(L^{\omega},\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une algèbre commutative et unitaire. De plus, $\left(L^{\omega},\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est complète et métrisable. Ainsi $\left(L^{\omega},\left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une B_0-algèbre. Montrons maintenant qu'elle n'est pas m-convexe. Pour cela, montrons que l'ensemble des caractères non nuls de L^{ω} est vide. Soit χ un caractère non nul de L^{ω}. Comme $\mathcal{C}([0,1])\subset L^{\omega}$, il existe $t_0\in[0,1]$ tel que:

$$\chi(x)=x(t_0),\text{ pour tout } x\in\mathcal{C}([0,1]).$$

Soit f la fonction définie, sur $[0,1]$, par:

$$f(t)=\left|\ln\left(|t-t_0|\right)\right|.$$

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^p &= \int_0^1 \left|\ln\left(|t-t_0|\right)\right|^p dt\\
&= (-1)^p\int_0^{t_0}\left[\ln\left(t_0-t\right)\right]^p dt+(-1)^p\int_{t_0}^1\left[\ln\left(t-t_0\right)\right]^p dt.
\end{aligned}$$

Posons:

$$I_1=(-1)^p\int_0^{t_0}\left[\ln\left(t_0-t\right)\right]^p dt\ \text{ et } I_2=(-1)^p\int_{t_0}^1\left[\ln\left(t-t_0\right)\right]^p dt.$$

En faisant le changement de variable suivant $-u=\ln\left(t_0-t\right)$, on obtient:

$$I_1=\int_{-\ln(t_0)}^{+\infty} u^pe^{-u}du\le\int_0^{+\infty}u^pe^{-u}du=\Gamma(p+1)<\infty.$$

De la même manière, on obtient:

$$I_2 = \int_{-\ln(1-t_0)}^{+\infty} u^p e^{-u} du < \infty.$$

Par conséquent, $f \in L^\omega$. De plus, $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} f(t) = +\infty$, $f(t) > 0$ et f est continue sur $[0,1] \backslash \{t_0\}$. Alors f est inversible dans L^ω et son inverse est une fonction continue. De plus $f^{-1}(t_0) = 0$. Il s'ensuit que:

$$1 = \chi(ff^{-1}) = \chi(f)\chi(f^{-1}) = \chi(f)f^{-1}(t_0) = 0.$$

Donc l'ensemble des caractères non nuls de L^ω est vide. Par conséquent $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ n'est pas m-convexe. Enfin, montrons que seules les fonctions polynômiales opèrent dans $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$. En effet, soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière qui n'est pas un polynôme et qui opère dans $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$. Soient $x \in L^\omega$ et $t \in \mathbb{C}$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n t^n$ converge dans L^ω. Comme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n t^n$ est une série entière en t, on a:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n| \left\|x^n\right\|_p} = 0, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier,

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n| \left\|x^n\right\|_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left\|x^n\right\|_1 = \|x\|_n^n.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \, \|x\|_n = 0.$$

D'où

$$\sup_n \sqrt[n]{|a_n|} \, \|x\|_n < +\infty.$$

Posons:

$$\|x\| = \sup_n \sqrt[n]{|a_n|} \, \|x\|_n, \text{ pour tout } x \in L^\omega.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|.\|_n$ est une semi-norme, donc $\|.\|$ est aussi une semi-norme sur L^ω. Montrons que si $\|x\| = 0$, alors $x = 0$. En effet, si $\|x\| = 0$, alors

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \|x\|_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme la série entière $\varphi(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ n'est pas un polynôme, on peut donc supposer que $a_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où $\|x\|_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et puisque $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est séparée, on a $x = 0$. Ainsi $(L^\omega, \|.\|)$ est une algèbre normée. De plus, elle est complète vue que l'espace $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est complet et $\|x\| = \sup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|}\, \|x\|_n$. Notons par $\tau^{'}$ la topologie définie par $\|.\|$. On a:

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \|x\|_n \leq \|x\|\,, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc τ est moins fine que $\tau^{'}$. Mais L^ω est un espace de Fréchet pour τ et $\tau^{'}$. Alors, d'après le théorème de l'application ouverte, $\tau = \tau^{'}$. Par conséquent $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ devient une algèbre de Banach; ce qui est impossible. Donc seules les fonctions polynômiales opèrent dans $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$.

Remarque 1.11. 1) Pour montrer que l'algèbre $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ n'est pas m-convexe, on peut également montrer que l'inverse $f \longmapsto f^{-1}$, de $G\left(L^\omega\right)$ dans $G\left(L^\omega\right)$, n'est pas continu. En effet, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des applications de L^ω définie par:

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n - 1\|_p^p = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)^p.$$

En particulier, si $p > 1$, alors $\|f_n - 1\|_p$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par ailleurs, on a:

$$f_n^{-1}(t) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

D'où

$$\left\|f_n^{-1} - 1\right\|_p^p = \frac{1}{n}(n-1)^p.$$

Par conséquent, $\|f_n - 1\|_p$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini. D'où le résultat.

2) Les fonctions entières opèrent dans l'algèbre $(\mathcal{C}([0,1]),(\|.\|_p)_{p\geq 1})$. Cependant, seuls les polynômes opèrent dans sa complétée $(L^\omega,(\|.\|_p)_{p\geq 1})$. Ainsi l'opération des fonctions entières n'est pas nécessairement preservée par passage à la complétée.

2. Théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko.

L'algèbre L^ω d'Arens est une B_0-algèbre commutative non m-convexe dans laquelle les séries entières n'opèrent pas. B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ont montré ([16]) que si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative, alors elle est m-convexe.

Théorème 2.1 ([16]). Si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative (A,τ), alors (A,τ) est m-convexe.

La preuve se fait en plusieurs étapes et sous forme de lemmes enchainés. Commençons d'abord par un résultat utile concernant la construction de voisinages idempotents de zéro.

Lemme 2.2. Soient (A,τ) une algèbre topologique et U un voisinage de zéro dans A. Alors l'ensembe $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$ est un voisinage de zéro idempotent.

Preuve. Soit $x,y\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$. Alors il existe $n_0,p_0\in\mathbb{N}$ tels que $x\in U^{n_0}$ et $y\in U^{p_0}$. D'où

$$xy\in U^{n_0+p_0}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Par conséquent, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$ est idempotent. Et puisque $U\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$, l'ensemble $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$ est un voisinage de zéro idempotent.

Dans tout ce qui suit, la famille $(|.|_i)_{i\in I}$ de semi-normes définissant la topologie τ, d'une B_0-algèbre (A,τ) considérée, vérifie les deux propriétés suivantes: pour tous $x,y\in A$ et $i\in I$, on a:

$$\begin{array}{rcl} |x|_i & \leq & |x|_{i+1} \\ |xy|_i & \leq & |x|_{i+1}\,|y|_{i+1} \end{array}$$

Lemme 2.3 ([16]). Soit (A,τ) une B_0-algèbre unitaire et $(|.|_i)_{i\in I}$ une famille

de semi-normes définissant sa topologie. Supposons que:
1) Pour tout $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c(i,n) \geq 0$ telle que:

$$|x_1 x_2 ... x_n|_i \leq c(i,n) |x_1|_{i+1} |x_2|_{i+1} ... |x_n|_{i+1}, \text{ pour tous } x_1, ..., x_n \in A.$$

2)

$$\sup_n (c(i,n))^{\frac{1}{n}} = p_i < \infty.$$

Alors A est m-convexe.

Preuve. Par **2)**, on a $\sup_n (c(i,n))^{\frac{1}{n}} = p_i < \infty$. Donc $c(i,n) \leq p_i^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où, pour tous x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, on a:

$$\begin{aligned} |x_1 x_2 ... x_n|_i &\leq c(i,n) |x_1|_{i+1} |x_2|_{i+1} ... |x_n|_{i+1} \\ &\leq p_i^n |x_1|_{i+1} |x_2|_{i+1} ... |x_n|_{i+1}. \end{aligned}$$

Si x_1, x_2, ..., $x_n \in K_{i+1}(\frac{1}{p_i})$, alors $x_1 x_2 ... x_n \in K_i(1)$. Donc

$$\left(K_{i+1}\left(\frac{1}{p_i}\right)\right)^n \subset K_i(1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $U_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(K_{i+1}(\frac{1}{p_i})\right)^n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\frac{1}{n} U_i \subset K_i\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme U_i est un voisinage de zéro équilibré et idempotent, alors $\frac{1}{n}U_i$ est un voisinage de zéro idempotent. Ainsi, zéro admet un système fondamental de voisinages idempotents. Donc A est m-convexe.

Lemme 2.4 ([16]). Soit (A, τ) une B_0-algèbre commutative unitaire et $(|.|_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes définissant sa topologie. Supposons que:
1) Pour tout $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c(i,n) \geq 0$ telle que:

$$|x^n|_i \leq c(i,n) |x|_{i+1}^n, \text{ pour tout } x \in A.$$

2)

$$\sup_n (c(i,n))^{\frac{1}{n}} = p_i < \infty.$$

Alors A est m-convexe.

Preuve. Soit $x_1, ..., x_n \in A$. On a:

$$|x_1 x_2 ... x_n|_i = |x_1|_{i+1} |x_2|_{i+1} ... |x_n|_{i+1} \left| \frac{x_1}{|x_1|_{i+1}} \frac{x_2}{|x_2|_{i+1}} ... \frac{x_n}{|x_n|_{i+1}} \right|_i.$$

Pour tout $j = 1, ..., n$, on pose $\bar{x}_j = \dfrac{x_j}{|x_j|_{i+1}}$. Il est clair que $\left|\bar{x}_j\right|_{i+1} \leq 1$, pour tout $j = 1, ..., n$. En utilisant la formule de polarisation, on obtient

$$\left|\frac{x_1}{|x_1|_{i+1}} \frac{x_2}{|x_2|_{i+1}} ... \frac{x_n}{|x_n|_{i+1}}\right|_i \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \left|\omega_k^n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)\right|_i .$$

Or

$$\begin{aligned}
\left|\omega_k^n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)\right|_i &\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \left|(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + ... + \bar{x}_{i_k})^n\right|_i \\
&\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} c\,(i,n) \left|\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + ... + \bar{x}_{i_k}\right|_{i+1}^n \\
&\leq c\,(i,n)\, C_n^k n^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{x_1}{|x_1|_{i+1}} \frac{x_2}{|x_2|_{i+1}} ... \frac{x_n}{|x_n|_{i+1}}\right|_i \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} c\,(i,n)\, C_n^k n^n \leq 2^n \frac{n^n}{n!} c\,(i,n) .$$

D'où

$$|x_1 x_2 ... x_n|_i \leq \frac{(2n)^n}{n!} c_n^i\, |x_1|_{i+1} |x_2|_{i+1} ... |x_n|_{i+1} .$$

Et puisque

$$\lim_n \left(\frac{(2n)^n}{n!} c\,(i,n)\right)^{\frac{1}{n}} = 2ep_i < \infty,$$

on voit que les hypothèses du lemme **2.3** sont vérifiées. Par conséquent, A est m-convexe.

Lemme 2.5 ([16]). Soit (A, τ) une B_0-algèbre commutative unitaire et $(|.|_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes définissant sa topologie. Supposons que, pour tout $x \in A$, on a:

$$\sup_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}} < \infty, \text{ pour tout } i \in I.$$

Alors A est m-convexe.

Preuve. Pour tout $x \in A$ et tout $i \in I$, on pose:

$$p_i(x) = \sup_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Alors la fonction p_i est semi continue inférieurement $(s.c.i)$. Il s'ensuit que l'ensemble

$$A_n = \{x \in A : p_i(x) \leq n\}$$

est fermé, pour tout n dans $\mathbb{N}$. De plus, on a $\bigcup\limits_{n} A_n = A$. Donc, d'après le théorème de Baire, il existe un entier m telle que A_m est d'intérieur non vide. Soit alors $x_0 \in A_m$ et un voisinage U de zéro tel que $U + x_0 \subset A_m$. Par ailleurs, on a:

$$(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(-x_0)^k.$$

Si $x \in U$ et $i \geq 2$, on obtient:

$$|(x - x_0)^n|_{i-1} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|x^{n-k}\right|_i \left|x_0^k\right|_i \leq (2m)^n.$$

Il s'ensuit que $V = U - x_0$ est un voisinage de zéro. Donc il existe $k(i) \geq i$ et $r_i > 0$ telle que $\overline{K_{k(i)}(r_i)} \subset V$. Ensuite, pour tout $x \in A$, on a:

$$\frac{x}{|x|_{k(i)}} r_i \in \overline{K_{k(i)}(r_i)}.$$

Donc

$$\left| \left(\frac{x}{|x|_{k(i)}} r_i \right)^n \right|_{i-1} \leq (2m)^n$$

D'où

$$|x^n|_{i-1} \leq \left(\frac{2m}{r_i} \right)^n |x|_{k(i)}^n \text{, pour tout } x \in A.$$

Notons que

$$\sup_n \left[\left(\frac{2m}{r_i} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{2m}{r_i} < \infty.$$

Enfin, posons:

$$|x|_i' = |x|_{t_i}, t_1 = 1, \ t_{i+1} = k(t_i + 1).$$

On obtient ainsi une famille de semi-normes $\left(|.|_i'\right)_{i \in I}$ qui vérifie les hypothèses du lemme 2.4 et qui est équivalente à $(|.|_i)_{i \in I}$. Donc A est m-convexe.

Lemme 2.6 ([16]). Soit (A, τ) une $a.l.c$ unitaire et $(|.|_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes définissant sa topologie. Si toute série entière opère dans (A, τ), alors, pour tout $x \in A$ et tout $i \in I$, on a:

$$\sup_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Preuve. Supposons que $\sup\limits_n (|x_0^n|_{i_0})^{\frac{1}{n}} = \infty$, pour un certain i_0 et x_0. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \left|x_0^{k_n}\right|_{i_0} > n^{k_n}.$$

On considère la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{kn}}{n^{kn}}$. On remarque qu'elle n'opère pas en x_0. Donc, pour tout $x \in A$ et tout $i \in I$, on a:

$$\sup_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Remarque 2.7. La réciproque du lemme 2.6 est fausse en général. En effet, dans une *a.l.m.c*, $\big(A, (|.|_i)_{i\in I}\big)$, $\sup\limits_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}} < \infty$, pour tout $i \in I$, alors que les séries entières n'opèrent pas nécessairement.

Preuve du théorème 2.1. Supposons que les séries entières opèrent dans (A, τ). D'après le lemme 2.6, pour tout $x \in A$, on a:

$$\sup_n (|x^n|_i)^{\frac{1}{n}} < \infty, \text{ pour tout } i \in I.$$

Donc, d'après le lemme 2.5, (A, τ) est m-convexe.

Remarque 2.8. La complétude est nécessaire dans le théorème précédent. En effet, on a déjà vu que l'algèbre d'Arens $\left(L^\omega, \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une B_0-algèbre commutative unitaire non m-convexe. De plus, on a $\overline{\mathcal{C}([0,1])} = L^\omega$. Posons:

$$B = \left(\mathcal{C}([0,1]), \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right).$$

Alors B est une $a.l.c$ commutative unitaire et métrisable, mais qui n'est pas complète car sinon elle serait fermée et on aura $\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\mathcal{C}([0,1])} = L^\omega$; ce qui n'est pas le cas. Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty.$$

Comme l'algèbre $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire, les séries entières opèrent dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$. Par suite, elles opèrent dans B. Pourtant l'algèbre B n'est pas m-convexe, car sinon L^ω le serait par la densité de B dans L^ω. Ainsi l'algèbre:

$$B = \left(\mathcal{C}([0,1]), \left(\|.\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}\right)$$

est une $a.l.c.$ commutative unitaire métrisable non complète dans laquelle les séries entières opèrent, mais elle n'est pas m-convexe.

L'exemple suivant donné par W. Zelazko ([19]) montre la nécessité de la métrisabilité dans le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko.

On note par Φ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

1)

$$0 < \varphi(t) \leq 1, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

2)

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \varphi(t) = 0.$$

On considère l'algèbre $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ de toutes les fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la famille de semi-normes $\left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi$ données par:

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)\varphi(t)| < \infty, \, f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \; \varphi \in \Phi.$$

Ainsi $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ muni du produit usuel est une algèbre localement convexe à produit continu.

Proposition 2.9 ([19]). $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est une algèbre localement convexe complète à produit continu dans laquelle les séries entières opèrent et qui n'est pas m-convexe.

Preuve. Montrons d'abord que l'algèbre $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est complète. En effet, soit $(f_\alpha)_\alpha$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$. Soit $\varphi_n \in \Phi$ définie par:

$$\varphi_n(t) = 1, \text{ pour } 0 \leq t \leq n.$$

Pour tout $f \in A$, on a:

$$\sup_{t \in [0,n]} |f(t)| = \sup_{t \in [0,n]} |f(t)\varphi_n(t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)\varphi_n(t)| \leq \|f\|_{\varphi_n}.$$

Donc $(f_\alpha)_\alpha$ est une suite de *Cauchy*, pour la topologie de la convergence uniforme, sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, il existe une fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $(f_\alpha)_\alpha$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. Nous allons montrer que $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$. En effet, si f n'est pas bornée on peut trouver une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$, $t_n \longrightarrow \infty$, telle que $|f(t_n)| > n$. Comme $(f_\alpha)_\alpha$ converge uniformément vers f sur tout compact, il existe $\alpha(n)$ telle que:

$$|f_\alpha(t_n)| > n, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha(n).$$

En choisissant $\varphi \in \Phi$ telle que $\varphi(t_n) = n^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\|f_\alpha\|_\varphi > n^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tour } \alpha \geq \alpha(n).$$

C'est à dire que $(f_\alpha)_\alpha$ n'est pas bornée; ce qui est absurde. Reste à montrer que, pour tout $\varphi \in \Phi$,

$$\lim_\alpha \|f_\alpha - f\|_\varphi = 0.$$

En effet, soit $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\psi = \sqrt{\varphi}$. On a $\psi \in \Phi$. Donc, il existe une constante $M_\psi > 0$ telle que:

$$\|f_\alpha\|_\psi = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f_\alpha(t)\psi(t)| < M_\psi, \text{ pout tout } \alpha \geq \alpha(\psi).$$

D'où, pout tout $\alpha \geq \alpha(\psi)$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a:

$$|f_\alpha(t)\varphi(t)| = |f_\alpha(t)\psi(t)\psi(t)| \leq M_\psi\psi(t).$$

Comme $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \psi(t) = 0$, il existe $t_\psi \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$|f_\alpha(t)\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha(\psi) \text{ et } t \geq t_\psi.$$

Et puisque $(f_\alpha)_\alpha$ converge uniformément sur tout compact vers f, on obtient

$$|f(t)\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } t \geq t_\psi.$$

Donc, pour tout $\alpha \geq \alpha(\psi)$, on a:

$$\sup_{t\geq t_\psi} |(f_\alpha(t) - f(t))\,\varphi(t)| \leq \sup_{t\geq t_\psi} |f_\alpha(t)\varphi(t)| + \sup_{t\geq t_\psi} |f_\alpha(t)\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe α_0 telle que, pour tout $\alpha > \alpha_0$ et $0 \leq t \leq t_\psi$, on a:

$$|f_\alpha(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que, pour pour tout $\alpha > \alpha_0$, on a:

$$\sup_{0\leq t\leq t_\psi} |(f_\alpha(t) - f(t))\,\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Posons $\alpha(\varphi, \varepsilon) = \max \alpha(\alpha(\psi), \alpha_0)$. Ainsi, pour tout $\alpha \geq \alpha(\varphi, \varepsilon)$, on obtient

$$\|f_\alpha - f\|_\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |(f_\alpha(t) - f(t))\,\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Donc toute suite de *Cauchy* d'éléments de $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est convergente. Par conséquent $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est complète.

Maintenant, soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et $\varphi \in \Phi$. Posons $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n z^n$. Pour tout $x \in A$, on a:

$$\|S_{n+m}(x) - S_n(x)\|_\varphi \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_n x^n \right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_n x^n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_n| \, \|x\|_\infty^n .$$

Et $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_n| \, \|x\|_\infty^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par conséquent $(S_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\left(A, \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ qui est complète, donc elle converge.

Supposons que $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est m-convexe. La topologie de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ peut donc être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives. Par conséquent, pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe $\psi \in \Phi$, $p, q > 0$ et une semi-norme sous multiplicative $\|.\|$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$:

$$p \, \|f\|_\varphi \leq \|f\| \leq q \, \|f\|_\psi .$$

En particulier, si $q \, \|f\|_\psi < 1$, alors $\|f\| < 1$, il s'ensuit que $\|f^n\| < 1$. D'où $p \, \|f^n\|_\varphi < 1$, pour tout n. Puisque $\lim\limits_{t=\infty} \psi(t) = 0$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ telle que $q\psi(t) < \frac{1}{2}$, pour $t_1 > t_0$. Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ positive à support dans $[t_0, \infty[$, $f(t) \leq 2$ telle que $f(t_1) = 2$ pour un certain $t > t_0$. On a $q \, \|f\|_\psi < 1$. Par ailleurs,

$$p \, \|f^n\|_\varphi \geq p 2^n \varphi(t_1)$$

et $p2^n\varphi(t_1)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. On obtient ainsi une contradiction. Par conséquent $\left(C_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est non m-convexe.

Remarque 2.10. L'algèbre $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ n'est pas métrisable. Sinon elle serait m-convexe d'après le théorème de B. *Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko.*

Le résultat suivant, obtenu par W. Zelazko ([21]), est une conséquence du théorème de B. S Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko.

Théorème 2.11 ([21]). Soit A une B_0-algèbre commutative unitaire qui est une Q-algèbre. Alors A est m-convexe.

Preuve. Les séries entières opèrent dans toute B_0-algèbre unitaire qui est une Q-algèbre (cf. corollaire 1.7). Par le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko, A est m-convexe.

Signalons que P. Turpin ([17]) a montré que la convexité locale est nécessaire dans le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko. En fait, il a obtenu ce qui suit:

Proposition 2.12 ([17]). Pour tout $0 < p < 1$, il existe une algèbre topologique commutative localement p-convexe métrisable complète dans laquelle toutes les séries entières opèrent et qui n'est pas m-convexe.

Remarque 2.13. Dans [16], B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ont montré que, pour toute série entière $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, il existe une B_0-algèbre A_φ non m-convexe dans laquelle la série $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge pour tout $x \in A_\varphi$,

3. Généralisation du théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko.

Le résultat suivant obtenu par A. El Kinani et M. Oudadess ([12]) constitue une généralisation du théorème de Mitiagin, Rolewicz et Zelazko. Contrairement à la démonstration donnée par B. Mitiagin, S. Rolewicz et W. Zelazko ([17]), qui est longue et calculatoire, la preuve de A. El Kinani et M. Oudadess ([12]) est simple et directe.

Théorème 3.1 ([12]). Soit (A, τ) une $a.l.c$ commutative unitaire, à produit continu et qui est un espace de Baire. Si les séries entières opèrent dans (A, τ), alors elle est m-convexe.

Preuve. Soit V un voisinage de zéro absolument convexe et fermé et p sa jauge. Puisque (A, τ) est à produit continu, il existe une autre semi-norme q telle que

$$p(ab) \leq q(a)q(b),\ a, b \in A.$$

Comme les séries entières opérent dans (A, τ), on a, d'après le lemme 2.6,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(q(a^n))^{\frac{1}{n}} < \infty, \text{ pour tout } a \in A.$$

Posons:

$$f_q(a) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(q(a^n))^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction f_q est alors semi continue inférieurement $(s.c.i)$. Il s'ensuit que l'ensemble:

$$A_n = \{a \in A : f_q(a) \leq n\}$$

est fermé, pour tout n dans $\mathbb{N}$. De plus, on a $\bigcup_n A_n = A$. Donc, d'après le théorème de Baire, il existe un entier m telle que A_m est d'intérieur non vide. Il existe alors $a_0 \in A_m$ et un voisinage U de zéro tel que:

$$U + a_0 \subset A_m.$$

Pour tout $a \in U$, on a:

$$q((a + a_0)^n) \leq m^n,\ n = 1, 2, ...$$

D'où:

$$\begin{aligned}
p(a^n) &= p[(a + a_0 - a_0)^n] \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k p[(a + a_0)^k(-a_0)^{n-k}] \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k q[(a + a_0)^k] q[(-a_0)^{n-k}] \\
&\leq (2m)^n.
\end{aligned}$$

Soit $x_1, x_2, ..., x_n \in U$. En utilisant la formule de polarisation, on obtient

$$p\left(x_1 x_2 ... x_n\right) \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} p[\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)].$$

Comme:

$$\begin{aligned}
p[\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)] &\leq \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} p[(x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k})^n] \\
&\leq C_n^k (2mn)^n.
\end{aligned}$$

Alors

$$p\left(x_1x_2...x_n\right) \leq \frac{(4mn)^n}{n!}.$$

Soit $c>0$ telle que $\frac{(4mn)^n}{n!} \leq c^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x_1x_2...x_n \in c^nV, \text{ pour tout } x_1, x_2, ..., x_n \in U.$$

Donc:

$$\left(\frac{1}{c}U\right)^n \subset V, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose:

$$\Omega = \bigcup_n \left(\frac{1}{c}U\right)^n.$$

Alors Ω est un voisinage idempotent de zéro contenu dans V. Par conséquent A est m-convexe.

4. Séries entières dans les B_0-algèbres non commutatives.

Dans le cas non commutatif, W. Zelazko ([20]) a montré que le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ne reste plus valable. En fait, il a d'abord construit un exemple de B_0-algèbre A non m-convexe vérifiant la propriété donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.1 ([20])**.** Il existe une B_0-algèbre A non m-convexe telle que

$$\lim_n\ x^n = 0, \text{ pour tout } x \in A.$$

La preuve de ce résultat est basée sur le lemme suivant:

Lemme 4.2 ([20])**.** Pour toute fonction continue $v(t) > 0$, $0 \leq t < \infty$, telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{t} = +\infty,$$

il existe une fonction continue $u(t) \geq 0$, $0 \leq t < \infty$, telle que:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{t} = +\infty$.

2) u est convexe.

3) Pour tout $t_i \geq 0$, on a

$$u\left(t_1 + ... + t_n\right) \leq 8[u(t_1) + ... + u(t_n)] + v(n)$$

Preuve du théorème 4.1. Soit $v(n) = n(\log n)^{\frac{1}{2}}$, $n \geq 2$. Alors

$$v(n) = r_n n \log n \text{ avec } \lim_n r_n = 0.$$

Par le Lemme 4.2**,** il existe une fonction $u(t) \geq 0$, $0 \leq t < \infty$, telle que

$$u(k_1 + ... + k_n) \leq 8[u(k_1) + ... + u(k_n)] + v(n), \text{ pour tout } k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$$

et

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u(n)}{n} = \infty.$$

Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables et A_0 l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies de tous les produits de la forme:

$$t_n t_{n+1} ... t_{n+k}, \ n \geq 1, \ k \geq 0. \qquad \textbf{(1)}$$

On définit sur A_0 un produit associatif en posant:

$$t_i t_j = 0, \text{ si } j \neq i + 1.$$

Ainsi tout produit

$$t_{i_1} t_{i_2} ... t_{i_k}$$

est nul sauf dans le cas où $i_s = i_1 + s - 1$, c'est à dire, si le produit est de la forme **(1).** Tout élément $x \in A_0$ peut s'écrire sous la forme:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n,k) t_n t_{n+1} .... t_{n+k}, \qquad \textbf{(2)}$$

où seulement un nombre fini de coefficients $\alpha(n,k)$ sont non nuls. On définit sur A_0 une suite de semi-normes$\left(|.|_j\right)_j$ en posant, pour tout $x \in A_0$,

$$|x|_m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n,k)| \exp(8^m u(k+1)), \ m \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que:

$$|x|_m \leq |x|_{m+1}, \text{ pour tout } m.$$

Soit $y \in A_0$. Alors:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n,k) t_n t_{n+1} ... t_{n+k}.$$

Et l'on a:

$$\begin{aligned}
xy &= \sum_{n\geq 1,k\geq 0}\alpha(n,k)\sum_{q\geq 0}\beta(n+k+1,q)t_nt_{n+1}...t_{n+k}t_{n+k+1}...t_{n+k+1+q} \\
&= \sum_{n\geq 1,k\geq 0}\ \sum_{p=n+k+1,q\geq 0}\alpha(n,k)\beta(p,q)t_nt_{n+1}...t_{p+q} \\
&= \sum_{n\geq 1,p_1\geq 0}\ \sum_{p=p_1+p_2,p_2\geq 1}\alpha(n,p_1)\beta(n+p_1+1,p_2-1)t_nt_{n+1}...t_{n+p}.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
|xy|_m &\leq \sum_{k,q\geq 0;n,p\geq 1}|\alpha(n,k)|\,|\beta(p,q)|\exp(8^m u(k+q+2)) \\
&\leq \sum_{k,q\geq 0;n,p\geq 1}|\alpha(n,k)|\,|\beta(p,q)|\exp[8^m(8u(k+1)+8u(q+1)+v(2))] \\
&\leq \exp(8^m v(2))\sum_{k,n}|\alpha(n,k)|\exp[8^{m+1}(8u(k+1)] \\
&\quad\times\sum_{p,q}|\beta(p,q)|\exp[8^{m+1}(8u(q+1)] \\
&\leq \exp(8^m v(2))\,|x|_{m+1}\,|y|_{m+1}\,.
\end{aligned}$$

Donc A_0 est une algèbre localement convexe métrisable à produit continu. Soit A sa complétée. Alors A est une B_0-algèbre. Montrons maintenant que $\lim\limits_n x^n = 0$, pour tout $x\in A$. Par récurrence, on obtient:

$$x^m = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta(n,k)t_nt_{n+1}...t_{n+k},\ x\in A,\ m\in\mathbb{N},$$

où:

$$\eta(n,k) = \sum_{k_1+...+k_m=k}\alpha(n,k_1)\alpha(n+k_1+1,k_2-1)...\alpha(n+k_1+...+k_{m-1}+1,k_m-1).$$

Donc:

$$\begin{aligned}
|x^m|_j &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\eta(n,k)| \exp(8^j u(k+1)) \\
&\leq \sum_{n,k} \sum_{k_1+...+k_m=k} |\alpha(n,k_1)|\, |\alpha(n+k_1+1,k_2-1)| \\
&\quad ...\, |\alpha(n+k_1+......+k_{m-1}+1,k_m-1)| \exp(8^j u(k+1)) \\
&\leq \sum_{n,k} \sum_{k_1+...+k_m=k} |\alpha(n,k_1)|\, |\alpha(n+k_1+1,k_2-1)| \\
&\quad ...\exp\{8^j[8u(k_1+1)+8u(k_2)+....+8u(k_m)+v(m)]\} \\
&\leq \exp(8^j v(m)) \sum_{n,k} \sum_{k_1+...+k_m=k} |\alpha(n,k_1)| \exp(8^{j+1}u(k_1+1)) \\
&\quad ...\, |\alpha(n+k_1+...+k_{m-1}+1,k_m-1)| \exp(8^{j+1}u(k_m)).
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|x|_{j+1}^m &\geq m! \sum_{n,k} \sum_{k_1+...+k_m=k} |\alpha(n,k_1)| \exp(8^{j+1}u(k_1+1))... \\
&\quad ...\, |\alpha(n+k_1+...+k_{m-1}+1,k_m-1)| \exp(8^{j+1}u(k_m)).
\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$|x^m|_j \leq \frac{\exp(8^j v(m))}{m!}\, |x|_{j+1}^m .$$

Posons:

$$a_{m,j} = \frac{\exp(8^j v(m)}{m!} = \frac{m^{m8^j r_m}}{m!}$$

Pour m assez grand, on a $8^j r_m \leq \dfrac{1}{2}$. D'où:

$$a_{m,j} \leq \left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(m!)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme $\lim\limits_n \left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{1}{m}} = e$, il existe $c > 0$ telle que $\left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{c})^m$. Il s'ensuit que:

$$a_{m,j} \leq \frac{(\sqrt{c})^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc:

$$|x^m|_j \leq \frac{\left(\sqrt{c}\,|x|_{j+1}\right)^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}}$$

Par conséquent, pour tout $x \in A$, on a:

$$\lim_n x^n = 0.$$

Notons que $\lim_m a_{m,j} = 0$ entraine l'existence d'une constante c_j telle que

$$|x^m|_j \leq c_j |x|_{j+1}^m .$$

Montrons enfin que A n'est pas m-convexe. En effet, supposons qu'elle est m-convexe, et soit $(\|.\|_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur A telle que:

1)

$$\|x\|_i \leq \|x\|_{i+1} , \, x \in A.$$

2)

$$\|xy\|_i \leq \|x\|_i \|y\|_i , \, x, y \in A.$$

D'après la continuité des semi-normes, il existe $i, k \in \mathbb{N}$ et $\alpha_1 \alpha_k > 0$ telle que

$$\alpha_1 |x|_1 \leq \|x\|_i \leq \alpha_k |x|_k , \, x \in A.$$

Soit $(x_j)_j$ une suite d'éléments de A telle que $\alpha_k |x_j|_k \leq \frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_1 |x_1 ... x_n|_1 &\leq \|x_1 ... x_n\|_i \\ &\leq \|x_1\|_i ... \|x_n\|_i \\ &\leq \alpha_k^n |x_1|_k ... |x_n|_k \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_n |x_1 ... x_n|_1 = 0.$$

En particulier, pour $x_j = \varepsilon t_j$, avec

$$\alpha_k |\varepsilon t_j|_k = \alpha_k \varepsilon \exp(8^k u(1)) \leq \frac{1}{2},$$

on obtient:

$$\lim_n \varepsilon^n |t_1 ... t_n|_1 = 0.$$

Or,

$$\varepsilon^n |t_1 ... t_n|_1 = \varepsilon^n \exp(8u(n)),$$

et $\varepsilon^n \exp(8u(n))$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Ainsi, on obtient une contradiction. Donc A n'est pas m-convexe.

Théorème 4.3 ([20])**.** Il existe une B_0-algèbre non m-convexe dans la quelle toutes les fonctions entières opèrent.

Preuve. Soit A l'algèbre donnée par le théorème 4.1 et $\varphi(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ une série entière. On a:

$$\sum_n |a_n x^n|_j \leq C_j \sum_n |a_n|\,|x|_{j+1}^n < \infty,$$

pour tout $x \in A$. Donc toutes les séries entières opèrent dans A qui est non m-convexe.

Remarque 4.4. L'algèbre donnée par le théorème 4.3 vérifie la propriété suivante:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x^n = 0, \text{ pour tout } x \in A.$$

Elle est donc radicale.

Comme conséquence du théorème 4.3, on a ce qui suit:

Théorème 4.5 ([20]). Il existe une B_0-algèbre non m-convexe qui est une Q-algèbre.

Preuve. Considérons l'algèbre A donnée par le théorème 4.1 et montrons que c'est une Q-algèbre. Soit $x \in A$. D'après le théorème 4.1, on a $\lim\limits_n (2x)^n = 0$, il s'ensuit que pour tout j, il existe une constante c_j telle que:

$$|2^n x^n|_j \leq c_j \text{ pour tout } n.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|_j \leq c_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Donc l'élèment x est quasi-inversible et son quasi-inverse est donné par $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$. Ainsi A est une Q-algèbre. En fait, toute algèbre topologique radicale est une Q-algèbre.

Dans [7], A. El Kinani a obtenu une version non commutative suivante du théorème de B. S Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko:

Théorème 4.6 ([7]). Soit (A, τ) une $a.l.c$ de Baire unitaire à produit continu. Si les séries entières opèrent dans (A, τ), alors la suite des applications $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. En particulier, si A est commutative, elle est m-convexe.

Preuve. Soit V un voisinage de zéro absolument convexe et fermé et p sa jauge. Comme (A, τ) est à produit continu, il existe une autre semi-norme q telle que:

$$p(xy) \leq q(x)q(y),\ x, y \in A.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $A_k = \{a \in A : f_q(a) \leq k\}$, où $f_q(x) = \sup_n (q(x^n))^{\frac{1}{n}}$, pour tout $x \in A$. Par un raisonnement identique à celui du théorème 3.1, il existe un entier k telle que A_k est d'intérieur non vide. Il existe alors $x_0 \in A_k$ et un voisinage U de zéro telle que $U + x_0 \subset A_k$. Pour tout $x \in U$, on a:

$$q((x_0 + x)^n) \leq k^n,\ n = 1, 2, ...$$

D'où:

$$p((x_0 + x)^n) \leq k^n,\ n = 1, 2, ...$$

D'après la formule de Mazur-Orlicz, on a:
On a:

$$p\left(\frac{x}{kn}\right)^n \leq \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} C_n^j p\left[\left(\frac{x_0}{k} + \frac{j}{kn}x\right)^n\right]$$

Comme

$$p\left(\frac{x_0}{k} + \frac{j}{kn}x\right)^n = \frac{1}{k^n} p\left[\left(x_0 + \frac{j}{n}x\right)^n\right] \leq 1,$$

il s'ensuit que:

$$\left(\frac{x}{k}\right)^n \in \frac{(2n)^n}{n!} V,\ x \in U.$$

Mais, il existe $c > 0$ telle que:

$$\frac{(2n)^n}{n!} \leq c^n, \text{ pour tout entier } n.$$

Par conséquent:

$$x^n \in V, \text{ pour tout } x \in \frac{1}{ck} U,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, supposons que A est commutative et posons $W = \frac{1}{ck} U$. Pour tout $x_1, ..., x_k \in W$, on a:

$$p[(x_1 + ... + x_k)^n] \leq k^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

D'après la formule de polarisation, on a:

$$p\left(x_1x_2...x_n\right) \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} p[\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)].$$

Et puisque;

$$\begin{aligned} p[\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)] &\leq \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} p[(x_{i_1}+x_{i_2}+...+x_{i_k})^n] \\ &\leq k^n C_n^k. \end{aligned}$$

Alors

$$p\left(x_1x_2...x_n\right) \leq \frac{(2n)^n}{n!}.$$

D'où

$$x_1x_2...x_n \in \frac{(2n)^n}{n!}V, \text{ pour tout } x_1, x_2, ..., x_n \in W.$$

Mais il existe $M > 0$ telle que $\dfrac{(2n)^n}{n!} \leq M^n$. Donc

$$\left(\frac{1}{M}W\right)^n \subset V,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M}W\right)^n$$

Alors Ω est un voisinage de zéro idempotent contenu dans V. Par conséquent, (A, τ) est m-convexe.

Dans le cas général d'une algèbre localement convexe unitaire, A. El Kinani, R. Choukri et M. Oudadess ont montré ([11]), que dès que les séries entières opèrent dans une $a.l.c$, on peut mettre en évidence, en un sens local, une topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet.

Théorème 4.7 ([11]). Soit $(A, (p_\lambda)_\lambda)$ une algèbre localement convexe unitaire d'unité e. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) Les séries entières opèrent dans A.

2) Pour tout $x \in A$, il existe une sous-algèbre A_x telle que:

$$\mathbb{C}\left[x\right] \subset A_x \subset \overline{\mathbb{C}\left[x\right]}.$$

De plus, elle peut être munie d'une topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet. $\mathbb{C}[x]$ (resp. $\overline{\mathbb{C}[x]}$) désigne la sous-algèbre (resp. la sous-algèbre fermée) engendrée par $\{e, x\}$..

Preuve. 2)$\Longrightarrow$1): est évidente.
2)$\Longrightarrow$1): On sait que $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), (p_n)_n)$ est une $a.l.m.c$ de Fréchet, où $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des séries entières et $(p_n)_n$ la famille de semi-normes définie par:

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|.$$

Maintenant, soit $x \in A$ et on considère l'application:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_x & : & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & A \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Soit $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ une série entière. On a:

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} \left| \sum_{k\geq 0} a_k z^k \right| \leq \sup_{|z|\leq n} \sum_{k\geq 0} a_k |z|^k.$$

Si, pour chaque sérire entière $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$, on pose:

$$q_n(f) = \sup_{|z|\leq n} \sum_{k\geq 0} a_k |z|^k,$$

on voit bien que l 'application identité:

$$\begin{array}{ccccc} Id & : & (\mathcal{H}(\mathbb{C}), (q_n)_n) & \longrightarrow & (\mathcal{H}(\mathbb{C}), (p_n)_n) \end{array}$$

est continue. Et comme $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), (q_n)_n)$ est complète, les deux familles de semi-normes $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ définissent la même topologie d'après le théorème de l'application ouverte. Il s'ensuit que le morphisme φ_x est continu. Et puisque $\mathrm{Im}(\varphi_x)$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathbb{C}) /_{\ker(\varphi_x)}$, on peut munir $\mathrm{Im}(\varphi_x)$ d'une topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet plus fine que la topologie induite par celle de A. D'autre part, on a bien

$$\mathbb{C}[x] \subset \mathrm{Im}(\varphi_x) \subset \overline{\mathbb{C}[x]}.$$

Ainsi la sous-algèbre cherchée n'est autre que $\mathrm{Im}(\varphi_x)$.

Remarque 4.8. Le théorème précédent montre que derrière le fait que

$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ opère, il y a localement, une topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet. Ce fait n'est pas nécessairement global. En effet, soit A l'algèbre des suites complexes stationnaires. Considérons la famille $(A_k)_k$ des sous-algèbres de dimensions finie, où

$$A_k = \{(x_n)_n \in A,\ x_n = x_k,\ \text{pour tout } n \geq k\}.$$

Munie de la topologie localement convexe limite inductive du système inductif $(A_k)_k$, l'algèbre A devient une $a.l.m.c$ complète et les fonctions entières y opèrent en conséquence. Cependant, il n'existe aucune topologie d'$a.l.m.c$ de Fréchet sur A puisqu'elle est de dimension dénombrable.

Bibliographie du Chapitre 2

[**1**] G. R Allan, *A spectral Theory for Locally Convex Algebras*, Proc. London Math. Soc., 15(1965), pp. 399-421.

[**2**] R. Arens, *The space L^ω and convex topological rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 931-935.

[**7**] A. El Kinani, *Entire functions and equicontinuity of power maps in Baire algebras*, Revista Matematica Complutense. 2000, p. 337-340.

[**8**] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, *On a Result of Turpin*, Mediterr. J. Math. (2016), p. 4211-4217.

[**11**] A. El Kinani, R. Choukri, M. Oudadess, *Fonctions entières et m-convexité*, Bull. Belg. Math. Soc. 8(2001), p. 67-73.

[**12**] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions and m-convex structure in commutative Baire algebra*, Bull. Belg. Math. Soc. 4 (1997), p. 685-687.

[**13**] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions in locally convex algebras,* The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 27, Number 1A (2002), p. 85-90.

[**15**] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[**16**] B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Zelazko, *Entire functions in B_0-algebras*, Studia Math. 21 (1961), p. 291-306.

[**17**] P. Turpin, *Une remarque sur les algèbres à inverse continu*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 270. Série A (1970), p. 1686-1689.

[**19**] W. Zelazko, *A non-m-convex algebra on which operate all entire functions*, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 389-394.

[**20**] W. Zelazko, *Concerning entire functions in B_0-algebras*, Studia Math. 110 (3) 1994, p. 283-290.

[**21**] W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lect. Notes Series 31 (1971), Matematisk Institut Aarhus Universitet-Aarhus.

Chapitre 3

Equicontinuité des applications puissances dans les algèbres localement convexes

Dans [16], B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ont montré que si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative, alors elle est m-convexe. Dans le cas non commutatif, W. Zelazko ([20]) a exhibé un exemple d'une B_0-algèbre non m-convexe dont lequel les séries entières opèrent. Par ailleurs, dans [7], A. El Kinani a montré que si les séries entièrs opèrent dans une B_0-algèbre non nécessairement commutative, la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est alors équicontinue en zéro. Ceci nous amène à étudier la classe des algèbres localement convexes non nécessairement commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Dans la première partie de ce chapitre, on examine le lien entre la m-convexité et l'équicontinuité en zéro de la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ tout en remarquant que la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans toute algèbre localement multiplicativement convexe. Dans [17], P. Turpin a montré que la réciproque est vraie dans le cas commutatif. Dans le cas général, W. Zelazko a donné ([20]) un exemple d'une algèbre localemet convexe non commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, mais qui n'est pas m-convexe. Cette exemple montre que le résultat de P. Turpin ([17]) ne reste plus valable dans la cas non nécessairement commutatif. On termine cette partie par une caractérisation pratique ([8]), de l'équicontinuité en zéro des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$, à l'aide d'une famille particulière de semi-normes.

Dans la deuxième partie, on donne de nouvelles classes d'algèbres dans lesquelles les séries entières opèrent. Ici, on remplace la m-convexité par l'équicontinuité en zéro de la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$. On obtient des résultats qui sont analogues à ceux de la première partie du chapitre 2 mais avec une approche différente.

Il est bien connu que l'application l'inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue dans toute algèbre localement multiplicativement convexe ([21]). On montre ([9]) que ce résultat s'étend aux algèbres localement convexes non commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Comme conséquence, on obtient que le spectre de tout élément est non vide ([9]), ainsi que le théorème de Gelfand-Mazur.

Dans la dernière partie, on examine le lien entre le fait que les séries entières opèrent et la continuité de l'application l'inverse $x \longmapsto x^{-1}$. Nous montrons ([9]) que cette dérnière est continue dans toute B_0-algèbre non nécessairement commutative dans laquelle les séries entières opèrent. On donne ([9]) deux contre-exemples qui montrent que la complétude ainsi que la métrisablité sont nécessaires. De plus, avec des conditions supplémentaires, on montre que la réciproque est également vraie.

1. m-convexité et équicontinuité des applications puissances en zéro.

Il est facile de voir que la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans toute algèbre localement convexe qui est m-convexe. La réciproque est également vraie dans le cas commutatif, d'après P. Turpin ([17]).

Proposition 1.1 ([17]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe commutative dans laquelle la suite des applications puissances est équicontinue en zéro. Alors (A, τ) est m-convexe.

Preuve. Soit V un voisinage convexe équilibré et fermé de zéro. Comme la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, il existe un voisinage de zéro convexe et équilibré tel que:

$$x^n \in V,\ x \in U,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ensuite, d'après la formule de polarisation, pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, on a:

$$x_1 x_2 ... x_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

avec

$$\omega_k^n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} (x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k})^n.$$

En particulier, si $x_1, ..., x_n \in U$, alors

$$\frac{x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k}}{n} \in U$$

et on obtient:

$$(x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k})^n \in n^n V.$$

Il s'ensuit que:

$$x_1 x_2 ... x_n \in \frac{2^n n^n}{n!} V, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, ..., x_n \in U.$$

Par ailleurs, il existe $c > 0$ telle que:

$$\frac{(2n)^n}{n!} \leq c^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Il s'ensuit que:

$$x_1 x_2 ... x_n \in V, \ \forall x_1, ..., x_n \in \frac{1}{c} U, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc

$$\left(\frac{1}{c} U\right)^n \subset V, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $\Omega = \bigcup\limits_n \left(\frac{1}{c} U\right)^n$. Alors Ω est un voisinage de zéro idempotent inclus dans V. Par conséquent, A est m-convexe. D'où le résultat.

Remarques 1.2. **1)** Si on considère une partie U, on voit bien que la partie $\Omega = \bigcup\limits_n U^n$, où

$$U^n = \{x_1 x_2 ... x_n, \ x_1, ..., x_n \in U\},$$

est idempotente. En fait, c'est le plus petit idempotent qui contient U. Cette technique de construction de parties idempotentes joue un rôle important dans la preuve précédente. Mais sans la formule de polarisation, valable uniquement dans la cas commutatif, elle n'est pas payante.

2) Dans le cas non commutatif, l'équicontinuité en zéro des applications puissances n'implique pas nécessairement la m-convexté ([20]).

On sait que la topologie d'une $a.l.m.c$ peut être définie par une famille de semi-normes sous-multiplicatives $(p_i)_{i \in I}$. En particulier, on a:

$$p_i(x^n) \leq [p_i(x)]^n, \ n \in \mathbb{N}^*, \ i \in I.$$

Dans le cas d'une algèbre localement convexe dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, on a le résultat suivant ([8]).

Proposition 1.3 ([8]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1) La suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.
2) La topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ telle que, pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \ x \in A, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit V un voisinage de zéro convexe, équilibré et fermé. Comme la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, il existe un voisinage de zéro, convexe, équilibré et fermé U tel que

$$x^n \in V, \ x \in U, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit p la jauge associée à V et q celle de U. Alors, on a:

$$p(x^n) = \inf \{\lambda > 0 : x^n \in \lambda V\} \quad \text{et} \quad q(x) = \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $x \in \alpha U$. Alors $x^n \in \alpha^n V$. D'où:

$$\alpha^n \in \{\lambda > 0 : x^n \in \lambda V\}.$$

Il s'ensuit que:

$$p(x^n) \leq (q(x))^n.$$

Ainsi, en considérant la famille des jauges associées à tous les voisinages disqués de zéro, on obtient le résultat.

2) $\Longrightarrow$1) Soit $i \in I$. Alors il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \ x \in A, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $x \in K_j\left(0, \frac{1}{k}\right)$, où:

$$K_j\left(0, \frac{1}{k}\right) = \left\{x \in X, \ p_j(x) < \frac{1}{k}\right\}, k = 1, 2, ...$$

Comme $p_j(x) < \frac{1}{k}$, on a:

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n < \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{k}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, $x^n \in K_i(0, \frac{1}{k})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la famille $\left\{K_i(0, \frac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}^*, i \in I\right\}$ constitue un système fondamental de voisinages de zéro, la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est donc équicontinue en zéro.

Comme conséquence, on a le résultat suivant:

Corollaire 1.4. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe à produit continu dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans la complétée $\widehat{A}$ de (A, τ).

Preuve. Découle du fait que l'assertion 2) de la proposition 1.3, passe à la complétée.

2. Equicontinuité en zéro des applications puissances et séries entières.

On sait que les séries entières opèrent dans toute $a.l.m.c$ complète ([15]). Plus généralement, elles opèrent dans toute algèbre localement convexe complète dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Proposition 2.1 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute $a.l.c.$ unitaire et complète (A, τ) dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Preuve. Comme la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, alors, d'après la proposition 1.3, la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ vérifiant la propriété suivante: Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \, x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit maintenant $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors, pour tout $i \in I$, on a:

$$p_i(S_{n+m}(x) - S_n(x)) \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| \left(p_j(x)\right)^k ,$$

et comme $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |a_k| \left(p_j(x)\right)^k$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, la suite $\left(S_n(x)\right)_n$ est alors de *Cauchy* dans (A, τ) qui est complète. Donc converge.

En utilisant le corollaire 1.4, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 2.2. Soit (A, τ) une algèbre localement convexe unitaire à produit continu dans laquelle la suite des applications puissances $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ est équicontinue en zéro. Alors les séries entières opèrent dans la complétée $\widehat{A}$ de (A, τ).

Remarque 2.3. La différence entre la preuve donnée dans la cas m-convexe et la preuve précédente est que dans le cas des $a.l.m.c$, on utilise la sous multiplicativité des semi-normes, alors que le cas des algèbres localement convexes dans lesquelles la suite des applications puissances $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ est équicontinue en zéro, on utilise la propriété: Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq \left(p_j(x)\right)^n , \; x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Le résultat précédent s'obtient ([13]) sous une notion de complétude plus faible, à savoir la M-complétude.

Proposition 2.4 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute $a.l.c.$ unitaire et M-complète (A, τ) dans laquelle la suite des applications puissances $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ est équicontinue en zéro.

Preuve. Comme la suite des applications puissances $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ est équicontinue en zéro, la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $\left(p_i\right)_{i \in I}$ vérifiant la propriété suivante: Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq \left(p_j(x)\right)^n , \; x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit maintenant $\varphi(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On a:

$$p_i(a_n x^n) \leq |a_n| \left(p_j(x)\right)^n , \; x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $|a_n|\,(p_j(x))^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, la suite $(a_n x^n)_n$ est alors *bornée*. De la même manière, on montre que la suite $\left(\sqrt{|a_n|}x^n\right)_n$ est *bornée*. Posons:

$$B = \overline{conv(A_1 \cup A_2)},$$

où

$$A_1 = \{\alpha a_n x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\}$$

et

$$A_2 = \left\{\alpha\sqrt{|a_n|}x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\right\}.$$

On vérifie facilement que B est un disque fermé borné. Et puisque (A, τ) est M-complète, il s'ensuit que le sous espace vectoriel E_B, engendré par B, muni de la jauge $\|.\|_B$ de B est un espace Banach. Soit alors $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a:

$$\begin{aligned}
\|S_{n+m}(x) - S_n(x)\|_B &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}\sqrt{|a_n|}\,\|x^n\|_B \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}\left\|\sqrt{|a_n|}x^n\right\|_B \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \sqrt{|a_n|}$ tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini, la suite $(S_n(x))_n$ est de *Cauchy* dans $(E_B, \|.\|_B)$ qui est complet. Donc converge dans (A, τ).

Remarques 2.5. 1) Le résultat précédent peut être démontré en se ramenant au cas m-convexe comme suit: Soit $x \in A$ et $A(x)$ la sous-algèbre engendrée par x et l'unité e. Alors $A(x)$, munie de la topologie induite, est une algèbre commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Donc, elle est m-convexe, d'après Turpin ([17]). Il s'ensuit que sa fermeture $\overline{A(x)}$ est une $a.l.m.c$ M-complète. D'où, les séries entières opèrent dans $\overline{A(x)}$, et par conséquent elles opèrent dans (A, τ).

2) On sait que l'algèbre A des polynômes à valeurs complexes munie de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts de $\mathbb{R}^+$ est une

$a.l.m.c$ pseudo-complète non M-complète dans laquelle la fonction exponentielle n'opère pas. Et comme la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans le cas m-convexe, on voit bien que la pseudo-complétude est insuffisante pour avoir le résultat précédent.

On sait que la pseudo complétude et l'équicontinuité en zéro des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ ne sont pas suffisantes pour que les séries entières opèrent. Mais elles le sont dans le cas Q-algèbre ([13]).

Proposition 2.6 ([13]). Les séries entières opèrent dans toute $a.l.c.$ unitaire pseudo-complète (A, τ) dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro et qui est une Q-algèbre.

Preuve. Soit $\varphi(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et $x \in A$. Comme la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro dans (A, τ), l'inverse est alors continu ([3]). Et puisque c'est une Q-algèbre, le spectre de tout élément est compact. D'où, d'après Allan ([1]), il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que la partie

$$\{(\lambda x)^n, n = 1, 2, ...\}$$

est bornée. Posons:

$$B = \overline{conv\{\alpha (\lambda x)^n,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq 1\}}.$$

On vérifie facilement que la partie B est disquée, fermée bornée et idempotente. Comme (A, τ) est pseudo-complète, il s'ensuit que le sous espace vectoriel E_B, engendré par B, muni de la jauge $\|.\|_B$ de B est un espace de Banach. Soit maintenant $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors

$$\begin{aligned} \|S_{n+m}(x) - S_n(x)\|_B &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n} \|(\lambda x)^n\|_B \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n}. \end{aligned}$$

La quantité $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \frac{|a_n|}{|\lambda|^n}$ tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini. Ainsi, la suite $(S_n(x))_n$ est de *Cauchy* dans $(E_B, \|.\|_B)$ qui est complet. Donc elle converge dans (A, τ).

3) Equicontinuité des applications puissances en zéro et continuité de l'inverse.

Il est bien connu que l'inverse est continu dans toute *a.l.m.c.* ([21]). On montre ([9]) que ce résultat s'étend aux algèbres localement convexes dans lesquelles la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Pour ce faire, on a besoin du résultat suivant.

Lemme 3.6 ([9]). Soit (E, τ) une algèbre localement convexe non nécessairement commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Alors, la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ telle que:

1) *Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ telle que:*

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \text{ pour tout } x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

2) *Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ telle que:*

$$p_i(xy + yx) \leq 6 p_j(x) p_j(y), \; x, y \in E.$$

Preuve. 1) D'après la proposition 1.3.
2) Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ vérifiant **1)** et $i \in I$. Alors, il existe $j \in I$ tel que:

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \text{ pour tout } x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $x_1, y_1 \in E$ tels que $p_j(x_1) \leq 1$ et $p_j(y_1) \leq 1$. En utilisant l'égalité

$$x_1 y_1 + y_1 x_1 = (x_1 + y_1)^2 - x_1^2 - y_1^2,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} p_i(x_1 y_1 + y_1 x_1) &\leq p_i\left[(x_1 + y_1)^2\right] + p_i(x_1^2) + p_i(y_1^2) \\ &\leq [p_j(x_1 + y_1)]^2 + [p_j(x_1)]^2 + [p_j(y_1)]^2 \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

Soit maintenant x et y deux éléments de E. En appliquant la dernière inégalité à

$$x_1 = \frac{x}{p_j(x) + \varepsilon} \text{ et } y_1 = \frac{y}{p_j(y) + \varepsilon}, \text{ où } \varepsilon > 0,$$

on obtient:

$$p_i(xy + yx) \leq 6\left(p_j(x) + \varepsilon\right)\left(p_j(y) + \varepsilon\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que:

$$p_i(xy + yx) \leq 6p_j(x)p_j(y)$$

Remarques 3.7. En fait, la continuité en zéro de l'application $x \longmapsto x^2$ est suffisante pour avoir une famille de semi-normes vérifiant **2)** du lemme ci-dessus, mais pas nécessairement **1).** En effet, soit V un voisinage de zéro, convexe, équilibré et fermé. Comme l'application $x \longmapsto x^2$ est continue en zéro, il existe un voisinage de zéro, convexe, équilibré et fermé U tel que

$$x^2 \in V, \ x \in U.$$

Soit p la jauge associée à V et q celle de U. On a:

$$p(x^2) = \inf\left\{\lambda > 0 : x^2 \in \lambda V\right\} \quad \text{et } q(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\right\}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $x \in \alpha U.$ Alors $x^2 \in \alpha^2 V$. Donc $\alpha^2 \in \{\lambda > 0 : x^2 \in \lambda V\}$. D'où

$$p(x^2) \leq \left(q(x)\right)^2.$$

Par conséquent, la famille des jauges $\left(p_i\right)_{i \in I}$ associées à tous les voisinages de zéro, convexes, équilibrés et fermés vérifie bien **2)**.

Théorème 3.8 ([9])**.** L'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue dans toute *algèbre localement convexe unitaire non nécessairement commutative* (E, τ) *dans laquelle la suite des applications puissances* $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ *est équicontinue en zéro.*

Preuve. Comme la suite des applications puissances $\left(x \longmapsto x^n\right)_n$ est équicontinue en zéro, la topologie τ peut être définie, d'après le lemme 3.6, par une famille de semi-normes $\left(p_i\right)_{i \in I}$ vérifiant **1)** et **2)** du même lemme 3.6. Donc, pour $i \in I$, ils existent h et j tels que:

$$p_i(xy + yx) \leq 6p_j(x)p_j(y) \text{ et } p_j(x^n) \leq \left[p_h(x)\right]^n, \ x, y \in E, \ n \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{(*)}$$

Maintenant, soit $\left(x_\alpha\right)_\alpha \in G(E)$ telle que $x_\alpha \longrightarrow e$ et $0 < \varepsilon < 1$. alors, il existe α_0 tel que:

$$p_h(x_\alpha - e) < \varepsilon, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_0.$$

Soit $\alpha \geq \alpha_0$. On a

$$e - x_\alpha \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n = (e - x_\alpha)^{N+1}.$$

En utilisant **(*)**, on obtient:

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} p_j \left(e - x_\alpha \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) = 0.$$

Il s'ensuit que:

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} p_i \left(x_\alpha^{-1} - \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) \leq \lim_{N \longrightarrow +\infty} 3p_j \left(e - x_\alpha \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) p_j \left(x_\alpha^{-1} \right).$$

Donc, en utilisant **(*)** une autre fois**,** on obtient:

$$\begin{aligned}
p_i \left(x_\alpha^{-1} \right) &\leq p_i \left(x_\alpha^{-1} - \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) + p_i \left(\sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) \\
&\leq p_i \left(x_\alpha^{-1} - \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) + \sum_{n=0}^{N} 3 \left[p_h (e - x_\alpha) \right]^n \\
&\leq p_i \left(x_\alpha^{-1} - \sum_{n=0}^{N} (e - x_\alpha)^n \right) + 3 \sum_{n=0}^{N} \left[p_h (e - x_\alpha) \right]^n \\
&\leq 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n = \frac{3}{1 - \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour toute semi-norme p_l et tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $\alpha_{l,\varepsilon}$ tel que

$$p_l \left(x_\alpha^{-1} \right) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_{l,\varepsilon}.$$

En particulier, on a:

$$p_j \left(x_\alpha^{-1} \right) \leq \frac{3}{1 - \varepsilon}, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_{j,\varepsilon}.$$

D'où:

$$p_i(x_\alpha^{-1} - e) \leq p_j \left(x_\alpha^{-1} \right) p_j(x_\alpha - e) \leq \frac{3}{1 - \varepsilon} p_j(x_\alpha - e), \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_{j,\varepsilon}.$$

Mais, on sait qu'il existe α_1 tel que:

$$p_j(x_\alpha - e) \leq \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{3}, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_1.$$

Soit β tel que $\beta \geq \alpha_{j,\varepsilon}$ et $\beta \geq \alpha_1$. Alors:

$$p_i(x_\alpha^{-1} - e) \leq \varepsilon \text{ pour tout } \alpha \geq \beta.$$

Il s'ensuit que $x_\alpha^{-1} \longrightarrow e$. Maintenant, si $x \in G(E)$ et $(x_\alpha)_\alpha \in G(E)$ tels que $x_\alpha \longrightarrow x$. On a:

$$x_\alpha^{-1} = (x^{-1}x_\alpha)^{-1}x^{-1} \text{ et } x^{-1}x_\alpha \longrightarrow e.$$

Donc $x_\alpha^{-1} \longrightarrow x^{-1}$. Par conséquent, l'inverse est continu.

Comme conséquence, on obtient le théorème de type Gelfand-Mazur suivant.

Corollaire 3.9 ([9]). Toute *algèbre localement convexe unitaire non nécessairement commutative* (E,τ) *dans laquelle la suite des applications puissances* $(x \longmapsto x^n)_n$ *est équicontinue en zéro et qui est un corps* est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve. Il suffit de montrer que le spectre de toute élément est non vide. Soit $x \in E$. Supposons que $Sp(x) = \varnothing$ et considèrons l'application

$$\begin{array}{rcccl} R_x & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \left(E,(p_i)_{i\in I}\right) \\ & & \lambda & \longmapsto & (x-\lambda e)^{-1} \end{array}$$

On a:

$$\frac{R_x(\lambda) - R_x(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = -(x-\lambda e)^{-1}(x-\lambda' e)^{-1},$$

Comme l'inverse est continu, d'après le théorème 3.8, on obtient:

$$\lim_{\lambda' \longrightarrow \lambda} \frac{R_x(\lambda) - R_x(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = -(x-\lambda e)^{-2}.$$

Donc

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \varphi \circ R_x(\lambda) = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \frac{1}{\lambda}\varphi\left[\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}\right] = 0, \text{ pour tout } \varphi \in E',$$

où E' est le dual topologique de E. Puisque $\varphi \circ R_x$ est continue, elle est bornée. En utilisant l'holomorphie de $\varphi \circ R_x$ et le théorème de Louiville, on conclût que $\varphi \circ R_x$ est constante. Donc $\varphi \circ R_x = 0$, pour tout $\varphi \in E'$; contradiction.

Remarque 3.10. On peut montrer que le spectre de tout élément est non vide sans utiliser la continuité de l'inverse. En effet, soit $x \in (E, \tau)$ et $E(x)$ la sous-algèbre commutative maximale contenant x. $E(x)$ est une algèbre localement convexe commutative unitaire dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro. Donc, d'après Turpin ([17]), $E(x)$ est m-convexe. Et puisque

$$Sp_E(x) = Sp_{E(x}(x),$$

il s'ensuit que $Sp_E(x) \neq \emptyset$.

L'exemple ([9]) suivant montre que, dans le cas général, la réciproque du théorème 3.8 n'est pas vraie.

Exemple 3.11 ([9]). Soit E l'algèbre des fonctions polynomiales à coefficients complexes. On munit E de la norme d'espace vectoriel définie par:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt, \ f \in E.$$

L'algèbre $(E, \|.\|_1)$ est localement convexe. Comme $G(E)$ ne contient que les constantes, l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue. Mais, d'après Turpin ([17]), la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ n'est pas équicontinue en zéro car l'algèbre $(E, \|.\|_1)$ n'est pas m-convexe. En effet, supposons qu'il existe un système équivalent de semi-normes sous-multiplicatives $(|.|_i)_{i \in I}$ définissant la topologie de $(E, \|.\|_1)$. Alors, pour chaque semi-norme sous-multiplicative $|.|_i$, ils existent des constantes positives p et q telles que:

$$p \|f\|_1 \leq |f|_i \leq q \|f\|_1, \text{ pour tout } f \in E.$$

Donc, pour tout $k, p \in \mathbb{N}^*$, on obtient:

$$\begin{aligned} p \left\|t^k t^p\right\|_1 &\leq \left|t^k t^p\right|_i \\ &\leq \left|t^k\right|_i |t^p|_i \\ &\leq q^2 \left\|t^k\right\|_1 \|t^p\|_1 . \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{(k+1)(p+1)}{k+p+1} \leq \frac{q^2}{p}, \text{ pour tout } k, p \in \mathbb{N}^*;$$

contradiction. En fait, on peut remarquer que l'application $x \longmapsto x^2$ est non continue en zéro dans l'algèbre $(E, \|.\|_1)$ et donc elle est non m-convexe.

Dans le cas tout à fait général d'une algèbre localement convexe, la continuité de l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ n'est pas équivalente à l'équicontinuité en zéro des applications puissances. Cependant, elle a lieu avec la Q-propriété.

Proposition 3.12 ([9]). Soit (E, τ) une algèbre localement convexe qui est une Q-algèbre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) La suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.
2) L'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue.

Preuve. 1$\Longrightarrow$2: D'après le théorème 3.8.
2$\Longrightarrow$1: D'après Turpin ([17]), on sait que *l'application inverse* $x \longmapsto x^{-1}$ *est continue* dans toute algèbre localement convexe (A, τ) dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro ([9]). On sait également que sa topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ telle que, pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ telle que

$$p_i(x^n) \leq (p_j(x))^n, \; x \in A, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, si cette dernière inégalité est vérifiée pour $i = j$ et $n = 2$, on obtient le résultat ([8]) suivant:

Proposition 3.13 ([8]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe non commutative dont la topologie τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ telle que, pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ telle que:

$$p_i(x^2) \leq (p_i(x))^2, \; x \in A.$$

Alors
1) L'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue.
2) Si de plus (A, τ) est une Q-algèbre, alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro.

Preuve. 1) Soient $x_1, y_1 \in A$ et $i \in I$ tels que:

$$x_1 y_1 = y_1 x_1, \; p_i(x_1) \leq 1 \text{ et } p_i(y_1) \leq 1.$$

On a:

$$2p_i(x_1 y_1) \leq [p_i(x_1) + p_i(y_1)]^2 + [p_i(x_1)]^2 + [p_i(y_1)]^2 \leq 6.$$

D'où $p_i(x_1 y_1) \leq 3$. En appliquant cette dérnière inégalité à:

$$x_1 = \frac{x}{p_i(x) + \varepsilon} \text{ et } y_1 = \frac{y}{p_i(y) + \varepsilon},$$

où $x, y \in A$ tels que $xy = yx$ et $\varepsilon > 0$, on obtient:

$$p_i(xy) \leq 3\left(p_i(x) + \varepsilon\right)\left(p_i(y) + \varepsilon\right).$$

Donc:

$$p_i(xy) \leq 3p_i(x)p_i(y).$$

Soit maintenant $(x_\alpha)_\alpha$ une suite d'éléments inversibles de A telle que $\lim\limits_\alpha x_\alpha = e$ (e est l'unité de A). Comme $x_\alpha^{-1}(x_\alpha - e) = (x_\alpha - e)\, x_\alpha^{-1}$, on a:

$$\left|p_i(x_\alpha^{-1}) - p_i(e)\right| \leq p_i(x_\alpha^{-1} - e) \leq p_i\left[x_\alpha^{-1}(x_\alpha - e)\right] \leq 3p_i(x_\alpha^{-1})p_i(x_\alpha - e).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_\alpha x_\alpha = e$, il existe α_0 tel que:

$$p_i(x_\alpha - e) < \varepsilon', \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_0,$$

où $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}$. On obtient:

$$p_i(x_\alpha^{-1}) \leq \frac{1}{1 - 3\varepsilon'}, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_0.$$

Il s'ensuit que:

$$p_i(x_\alpha^{-1} - e) \leq \frac{3\varepsilon'}{1 - 3\varepsilon'} \leq \varepsilon, \text{ pour tout } \alpha \geq \alpha_0.$$

D'où $\lim\limits_\alpha x_\alpha^{-1} = e$. Finalement, soit $x \in G(A)$ et $(x_\alpha)_\alpha \in G(A)$ tel que $\lim\limits_\alpha x_\alpha = x$. On a $x_\alpha^{-1} = (x^{-1}x_\alpha)^{-1}x^{-1}$ et $x^{-1}x_\alpha \longrightarrow e$. Par conséquent $x_\alpha^{-1} \longrightarrow x^{-1}$ et donc l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue.

2) D'après P. Turpin ([17]).

4) Application: continuité de l'inverse et séries entières.

Rappelons que B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ont montré ([16]) que si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative, alors elle est m-convexe. Par conséquent, l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue. Dans le cas non commutatif, on a:

Théorème 4.1 ([9]). Soit (E, τ) *une* B_0-algèbre non nécessairement commutative dans laquelle les séries entières opèrent. Alors (E, τ) est à inverse continu.

Preuve. Comme les séries entières opèrent dans (E, τ) qui est une B_0-algèbre, alors la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est equicontinue en zéro ([7]). Par conséquent, d'après le théorème 3.8, l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue.

Remarques 4.2. 1) Sans la complétude, le résultat précédent ne reste plus vrai(**[9]**). En effet, considèrons l'algèbre $(L^\infty, \|.\|_1)$, où:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt,\ f \in L^\infty.$$

Comme $\|.\|_1 \leq \|.\|_\infty$, les séries entières opèrent dans $(L^\infty, \|.\|_1)$. Mais l'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ n'est pas continue dans $(L^\infty, \|.\|_1)$. En effet, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de L^∞ définie par:

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

on a:

$$\|f_n - 1\|_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. De plus

$$f_n^{-1}(t) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

donc

$$\left\|f_n^{-1} - 1\right\|_1 = \frac{1}{n}(n-1).$$

Par conséquent, $\|f_n - 1\|_1$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini.

2) Comme la complétude, la métrisabilité est nécessaire dans le résultat précédent(**[9]**). En effet, considérons l'algèbre $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$ munie de la famille de semi-normes $\left(\|.\|_\varphi\right)_{\varphi\in\Phi}$ définie comme suit:

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)\varphi(t)|\,,\ \varphi \in \Phi,$$

où Φ est l'ensemble des fonctions continues $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que:

$$0 < |\varphi(t)| \leq 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{t\longrightarrow\infty} \varphi(t) = 0.$$

Ainsi $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$ est une algèbre localement convexe non m-convexe dans laquelle les séries entières opèrent. Il s'ensuit qu'elle n'est pas métrisable, mais elle n'est pas à inverse continu comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.3 ([9]). L'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ n'est pas continue dans $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+), \left(\|.\|_\varphi\right)_\varphi\right)$.

Preuve. Soit V un voisinage de l'unité 1. Alors, il existe $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$ tels que:

$$B_{\|.\|_\varphi}(1, \varepsilon) \subset V,$$

où:

$$B_{\|.\|_\varphi}(1, \varepsilon) = \left\{f \in C_b(\mathbb{R}^+) : \|f - 1\| \leq \varepsilon\right\}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(a) < \varepsilon$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que:

$$\varphi(x) < \varepsilon, \text{ pour tout } x \in]a - \delta, a + \delta[.$$

Soit f une fonction continue telle que:

$$0 \leq f \leq 1, \; f(a) = 0$$

et:

$$f = 1 \text{ en dehors de }]a - \delta, a + \delta[.$$

Maintenant, on considère $\psi \in \Phi$ et la fonction g définie par:

$$g = \frac{1 + \psi(a)}{1 + 2\psi(a)} f + \frac{\psi(a)}{1 + 2\psi(a)}.$$

Il est clair que g est continue,

$$g = 1 \text{ sur }]a - \delta, a + \delta[$$

et:

$$1 \leq g^{-1} \leq \frac{1 + \psi(a)}{1 + 2\psi(a)}.$$

De plus $g \in V$ vue que:

$$\|g - e\|_\varphi = \sup_{|x-a|<\delta} |\psi(x) g(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

Mais;

$$\begin{aligned}\left\|g^{-1}-e\right\|_{\varphi} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\psi\left(x\right)\left(g^{-1}\left(x\right)-1\right)\right| \\ &\geq \psi\left(a\right)\left(g^{-1}\left(a\right)-1\right) \\ &\geq 1+\psi\left(a\right)>1.\end{aligned}$$

Donc $g\in V$ et $g^{-1}\notin B_{\|.\|_{\psi}}\left(1,\frac{1}{2}\right)$. Il s'ensuit que l'application inverse $x\longmapsto x^{-1}$ n'est pas continue dans $\left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+),\left(\|.\|_{\varphi}\right)_{\varphi}\right)$.

Dans le cas tout à fait général d'une algèbre localement convexe, la continuité de l'application inverse $x\longmapsto x^{-1}$ n'entraîne pas nécessairement le fait que les séries entières opèrent. Mais, c'est le cas avec la Q-propriété (cf. chapitre 2).

Proposition 4.4. Les séries entières opèrent dans toute $a.l.c$ unitaire pseudo-complète (A,τ) qui est une Q-algèbre et dans laquelle l'application inverse $x\longmapsto x^{-1}$ est continue.

Comme corollaire on a:

Corollaire 4.5. Les séries entières opèrent dans toute B_0-algèbre qui est une Q-algèbre.

Preuve. On sait, d'après Zelazko ([21]), que l'application inverse $x\longmapsto x^{-1}$ est continue dans toute B_0-algèbre qui est une Q-algèbre. Et on conclut en utilisant la proposition 4.4.

Bibliographie du chapitre 3

[**1**] G.R Allan, *A spectral Theory for Locally Convex Algebras*, Proc. London Math. Soc., 15(1965), pp. 399-421.

[**7**] A. El Kinani, *Entire functions and equicontinuity of power maps in Baire algebras*, Revista Matematica Complutense. 2000, p. 337-340.

[**8**] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, *On a Result of Turpin*, Mediterr. J. Math. (2016), p. 4211-4217.

[**9**] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, *The inverse map and equicontinuity of power maps in locally convex algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Steven 25(2018), no. 3, 321-329.

[**11**] A. El Kinani, R. Choukri, M. Oudadess, *Fonctions entières et m-convexité*, Bull. Belg. Math. Soc. 8(2001), p. 67-73.

[**13**] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions in locally convex algebras,* The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 27, Number 1A (2002), p. 85-90.

[**15**] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[**16**] B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Zelazko, *Entire functions in B_0-algebras*, Studia Math. 21 (1962), p. 291-306.

[**17**] P. Turpin, *Une remarque sur les algèbres à inverse continu*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 270. Série A (1970), p. 1686-1689.

[**19**] W. Zelazko, *A non-m-convex algebra on which operate all entire functions*, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 389-394.

[**20**] W. Zelazko, *Concerning entire functions in B_0-algebras*, Studia Math. 110 (3) 1994, p. 283-290.

[**21**] W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lect. Notes Series 31 (1971), Matematisk Institut Aarhus Universitet-Aarhus.

Chapitre 4

Polynômes et applications multilinéaires dans les algèbres localement convexes

L'analyse de la démarche utilisée dans le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]) et de celle de sa généralisation obtenue par A. El Kinani et M. Oudadess ([12]) a montré que le raisonnement utilisé peut s'étendre à un cadre beaucoup plus général qui est celui des polynômes homogènes et d'applications multinéaires. Ceci nous a amené à introduire ([10]) la notion de la pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications.

Dans la première partie de ce chapitre, on montre ([10]) que, dans toute algèbre localement convexe non nécessairement commutative, l'équicontinuité en zéro d'une suite de polynômes homogènes est équivalente à la pseudo-équicontinuité en zéro de la suite de leurs génératrices. De plus, en utilisant ce dernier résultat, et sous certaines conditions supplémentaires, on obtient ([10]) que si une suite de polynômes homogènes est équicontinue en zéro dans une algèbre localement convexe, alors elle est m-convexe. Comme conséquence, on retrouve le résultat de P. Turpin ([17]) qui affirme que si la suite des applications puissances est équicontinue en zéro dans une algèbre localement convexe commutative, alors elle est m-convexe. Signalons que ce dernier résultat ne reste plus valable dans le cas non commutatif. Ici, en s'appuyant sur la notion de la pseudo-équicontinuité en zéro, on obtient une condition nécessaire est suffisante qui remplace l'équicontinuité en zéro des applications puissances. En fait, on montre ([8]) qu'une algèbre localement convexe non nécessairement commutative est m-convexe si, est seulement si la suite des applications produits est pseudo-équicontinue en zéro.

La deuxième partie de ce chapitre constitue une application, des résulats de la première partie, aux B_0-algèbres,. On montre ([10]) que si une série de polynômes homogènes continus converge sur un ouvert d'une B_0-algèbre, alors la suite constituée par son terme général est équicontinue en zéro. Comme conséquence, on retrouve, avec une preuve courte et beaucoup plus simple, le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]). On obtient ([10]) également que le fait qu'une seule série, avec un certain contrôle sur ses coefficients, opère sur un ouvert d'une B_0-algèbre entraîne la m-convexité de cette dernière.

1. Equicontinuité en zéro d'une suite de polynômes homogènes dans les algèbres localement convexes.

Les raisonnements utilisés par B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]) et par A. El Kinani et M. Oudadess ([12]) peuvent s'étendre à toute famille de polynômes homogènes. Ceci a motivé l'introduction de la notion de la pseudo-équicontinuité en zéro d'une suite d'applications ([10]).

Définition 1.1 ([10]). Soit (A, τ) une algèbre topologique. Une suite d'applications $f_n : A^n \longrightarrow A$, $n \in N^*$, est dite pseudo-équicontinue en zéro si, pour tout voisinage U de zéro dans (A, τ), il existe un voisinage V de zéro dans (A, τ), tel que:

$$f_n(V^n) \subset U, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

où $V^n = V \times V \times ... \times V$.

Remarque 1.2. **1**) Notons que la pseudo-équicontinuité en zéro est une notion différente de l'équicontinuité en zéro car les f_n ne sont pas définies sur le même espace.

2) Dans tout espace localement convexe, la suite d'applications:

$$\left((x_1, ..., x_n) \longmapsto \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est pseudo-équicontinue en zéro.

Rappelons la définition d'un polynôme homogène de degré n.

Définition 1.3 ([3]). Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite polynôme homogène de degré n s'il existe une application n-linéaire et symétrique $\overline{f} : E^n \longrightarrow F$ telle que:

$$f(x) = \overline{f}(x_1, ..., x_n), \ x_1 = x_2 = ... = x_n = x \in E.$$

$\overline{f}$ est dite la génératrice de f.

Exemple 1.4. **1**) Soit (E, τ) une algèbre commutative et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'application:

$$\begin{array}{rcccc} f_n & : & E & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

est un polynôme homogène de degré n. En fait la génératrice de f_n est donnée par:

$$\begin{array}{rcccc} \overline{f}_n & : & E^n & \longrightarrow & E \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_1 x_2 ... x_n \end{array}.$$

Elle est bien n-linéaire et symétrique.

2) Si l'algèbre (E, τ) est non commutative, alors l'application:

$$(x_1, ..., x_n) \longmapsto x_1 x_2 ... x_n$$

n'est pas nécessairement symétrique. Donc $\overline{f}_n$ n'est pas nécessairement la génératrice de f_n. En fait, dans cette situation, l'expression de $\overline{f}_n$ est donnée par:

$$\begin{array}{rcccc} \overline{f}_n & : & E^n & \longrightarrow & E \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \frac{1}{n!} \sum x_{j_1} ... x_{j_n} \end{array},$$

où la somme est prise sur toutes les permutations $(j_1, ..., j_n)$ de la suite $(1, ..., n)$.

La proposition ci-dessous donne le lien entre l'équicontinuité en zéro d'une famille de polynômes homogènes et la pseudo-équicontnuité en zéro de la famille constituée de leurs génératrices ([10]).

Proposition 1.5 ([10]). Soit (E, τ) une algèbre localement convexe et $f_n : E \longrightarrow E$, $n \in N^*$, une suite de polynômes homogènes telle que chaque f_n est de degré n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) $(f_n)_n$ est équicontinue en zéro.
2) La suite des génératrices $\left(\overline{f}_n\right)_n$ est pseudo-équicontinue en zéro.

Preuve. 2)$\Longrightarrow$1): Evident.
1)$\Longrightarrow$2): Soit V un voisinage disqué et fermé de zéro. D'après le théorème de Mazur-Orlicz ([3]), on a:

$$\overline{f}_n(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n = 0}^{1} (-1)^{n-(\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n)} f_n(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_n x_n), \ x_1, ..., x_n \in E,$$

où x_0 est un point arbitraire de E. On prend $x_0 = 0$. Comme la suite $(f_n)_n$ est équicontinue en zéro, il existe un voisinage disqué U de zéro tel que:

$$f_n(U) \subset V, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant soient $x_1, ..., x_n \in U$. Comme:

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \in U$$

et

$$f_n(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}) = \frac{1}{n^n} f_n(x_1 + ... + x_n),$$

on obtient que:

$$f_n(x_1 + ... + x_n) \in n^n V.$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{f}_n(x_1, ..., x_n) \in \frac{2^n n^n}{n!} V, \text{ pour tous } x_1, ..., x_n \in U.$$

Et puisque il existe $c > 0$ tel que:

$$\frac{(2n)^n}{n!} \leq c^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

on a:

$$\overline{f}_n(x_1, ..., x_n) \in V, \ \forall x_1, ..., x_n \in \frac{1}{c} U, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où le résultat.

Le résultat suivant ([10]) montre que, sous certaines conditions supplémentaires, l'équicontinuité en zéro d'une famille de polynômes homogènes dans une algèbre localement convexe entraîne la m-convexité de cette dernière.

Proposition 1.6 ([10])**.** Soit (E, τ) une algèbre localement convexe et

$$f_n : E \longrightarrow E, \ n \in \mathbb{N}^*$$

une suite de polynômes homogènes, où $\deg(f_n) = n$. Si,
1) $(f_n)_n$ est équicontinue en zéro,
2) $\overline{f}_n(x_1, ..., x_n).\overline{f}_m(y_1, ..., y_m) = \overline{f}_{n+m}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$,
3) l'image de tout voisinage de zéro par $\overline{f}_1$ est un voisinage de zéro,
alors (E, τ) est m-convexe.

Preuve. Soit V un voisinage de zéro disqué et fermé. Comme la suite des $(f_n)_n$ est équicontinue en zéro, d'après la proposition 1.5, la suite des génératrices $\left(\overline{f}_n\right)_n$ est pseudo-équicontinue en zéro. Il existe alors un voisinage de zéro disqué et fermé U tel que:

$$\overline{f_n}(U^n) \in V, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{f_n}(U^n) \subset V.$$

Soit maintenant x et y deux éléments de Ω. Alors, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in U^n$ et $(y_1, ..., y_m) \in U^m$, on a:

$$x = \overline{f_n}(x_1, ..., x_n), \quad y = \overline{f_m}(y_1, ..., y_m).$$

En utilisant **2),** on obtient:

$$\overline{f_n}(x_1, ..., x_n)\overline{f_m}(y_1, ..., y_m) = \overline{f_{n+m}}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in f_{n+m}\left(U^{m+n}\right) \subset \Omega.$$

Donc $xy \in \Omega$, et par conséquent Ω est idempotent. De plus, on a:

$$f_1(U) = \overline{f_1}(U) \subset \Omega.$$

D'après **3),** $f_1(U)$ est un voisinage de zéro. Il s'ensuit que Ω est un voisinage de zéro. D'où le résultat.

Comme conséquence, on retrouve le résultat de Turpin ([17]) suivant:

Corollaire 1.7 ([17])**.** Soit (A, τ) une algèbre localement convexe commutative. Si la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, alors (A, τ) est m-convexe.

Preuve. Il suffit de remarquer que la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ constitue une famille de polynômes homogènes dont la suite des génératrices est donnée par la famille des applications produits:

$$[(x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_1...x_n]_n$$

et qui vérifie bien **2)** et **3)** du corollaire ci-dessus.

On sait que le résultat de P. Turpin ([17]) ne reste plus valable dans le cas non nécessairement commutatif. W. Zelazko a donné ([20]) un exemple d'une algèbre localement convexe non commutative dans laquelle la suite des applications puissances $(x \longmapsto x^n)_n$ est équicontinue en zéro, mais qui n'est pas m-convexe. A l'aide de la notion de la pseudo-équicontinuité, on obtient ([8]) le résultat ci-dessous qui constitue une généralisation du résultat de P. Turpin au cas non commutatif.

Proposition 1.8 ([8]). Soit (A, τ) une algèbre localement convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes:
1) La suite des applications produits:

$$[(x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_1...x_n]_n$$

est pseudo-équicontinue en zéro.
2) (A, τ) est m-convexe.

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit V un voisinage de zéro. Comme la suite des applications produits

$$[(x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_1...x_n]_n$$

est pseudo-équicontinue en zéro, il existe alors un voisinage U de zéro tel que:

$$U^{(n)} \subset V, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

où $U^{(n)} = \{x_1...x_n, \ (x_1, ..., x_n) \in U^n\}$. Posons $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^{(n)}$. Alors Ω est un voisinage de zéro idempotent inclus dans V. Par conséquent, (A, τ) est m-convexe.

Preuve. 2) $\Longrightarrow$ 1): Soit V un voisinage de zéro. Comme (A, τ) est m-convexe, il existe un voisinage U de zéro tel que $U^n \subset V$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la suite des applications produits

$$[(x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_1...x_n]_n$$

est pseudo-équicontinue en zéro.

Dans le cas tout à fait général d'une algèbre topologique, on obtient ([8]) le résultat suivant:

Proposition 1.9 ([8]). Soit (A, τ) une algèbre topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes:
1) La suite des applications produits

$$[(x_1, ..., x_n) \longrightarrow x_1...x_n]_n$$

est pseudo-équicontinue en zéro.
2) (A, τ) est localement idempotente.

Preuve. Semblable a celle de la proposition 1.8 précédente.

2. Application aux B_0-algèbres.

Dans la pratique, les séries de polynômes homogènes sont d'un usage fréquent. Le résultat ci-dessous ([10]) montre que si une série de polynômes homogènes continus converge sur un ouvert d'une B_0-algèbre, alors son terme général constitue une famille d'applications qui est équicontinuite en zéro.

Proposition 2.1 ([10]). Soit (E, τ) une B_0-algèbre et $f_n : E \longrightarrow E$, $n \in N^*$ une suite de polynômes homogènes continus avec $\deg(f_n) = n$. Si la série $\sum\limits_n f_n(x)$ converge sur un ouvert Ω de (E, τ) . Alors $(f_n)_n$ est équicontinue en zéro et par conséquent la suite $\left(\overline{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est pseudo-équicontinue en zéro.

Preuve. Soit V un voisinage de zéro équilibré et fermé. On pose:

$$E_k = \{x \in \Omega : f_n(x) \in V,\ \forall n \geq k\} = \bigcap_{n\geq k}\{x \in \Omega : f_n(x) \in V\}.$$

Comme tous les f_n sont continus, tous les E_k sont fermés. De plus:

$$\bigcup_k E_k = \Omega.$$

D'après le théorème de Baire, il existe m tel que E_m est d'intérieur non vide. Il existe alors $x_0 \in E_m$ et un voisinage de zéro disqué U tels que:

$$f_n(x + x_0) \in V,\ \forall n \geq m,\ \forall x \in U.$$

D'après le théorème de Mazur-Orlicz ([3]), on a:

$$f_n(x) = \frac{n^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}C_n^j f_n\left(x_0 + \frac{j}{n}x\right)^n,\ x \in A,\ n = 1, 2....$$

En particulier, si $x \in U$, on obtient:

$$(-1)^{n-j} f_n\left(x_0 + \frac{j}{n}x\right)^n \in V, \text{ pour tout } n \geq m.$$

Il s'ensuit que:

$$f_n(x) \in \frac{(2n)^n}{n!}V,\ \forall n \geq m,\ \forall x \in U.$$

Mais, il existe $C > 0$ telle que:

$$\frac{(2n)^n}{n!} \leq C^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc:

$$f_n(x) \in V, \forall n \geq m, \ \forall x \in \frac{1}{C}U.$$

Pour tout $n < m$, il existe W_n voisinage de zéro tel que:

$$f_n(x) \in V, \text{ pour tout } x \in W_n.$$

En posant:

$$W = \left(\bigcap_{n<m} W_n \right) \bigcap \left(\frac{1}{C} U \right),$$

on obtient:

$$f_n(x) \in V, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in W.$$

D'où l'équicontinuité en zéro des $(f_n)_n$. Le deuxième point est une conséquence immédiate de la proposition 1.5.

Le résultat qui suit ([10]) constitue une application de ce qui précéde à une classe particulière de séries de polynômes homogènes.

Corollaire 2.2 ([10]). Soient (E, τ) une B_0-algèbre et $\sum\limits_n a_n z^n$ une série qui opère sur un ouvert de (E, τ). Alors la suite

$$(x \longmapsto a_n x^n)_n$$

est équicontinue en zéro. Si de plus E est commutative, la suite:

$$((x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto a_n x_1 x_2 ... x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est pseudo-équicontinue en zéro.

Preuve. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite de polynômes homogènes:

$$(x \longmapsto a_n x^n)_n$$

dont la suite des génératrices est donnée par:

$$((x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto a_n x_1 x_2 ... x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Remarque 2.3. En l'abscence de la commutativité, on obtient que la suite:

$$\left((x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \frac{a_n}{n!} \sum x_{j_1} ... x_{j_n}\right)_n$$

est pseudo-équicontinue en zéro. La somme étant prise sur toutes les permutations $(j_1, ..., j_n)$ de la suite $(1, ..., n)$.

Comme conséquence, on retrouve le théorème de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko ([16]).

Théorème 2.4 ([16]). Si les séries entières opèrent dans une B_0-algèbre commutative (E, τ), alors elle est m-convexe.

Preuve. Si (E, τ) n'est pas m-convexe, soit V un voisinage de zéro tel que, tout voisinage U_n de zéro contiendrait des éléments $y_1, ..., y_{k_n}$ vérifiant:

$$\frac{y_1 ... y_{k_n}}{n^{k_n}} \notin V.$$

Ceci contredit le fait que la famille:

$$\left((x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \frac{1}{n^{k_n}} x_1 x_2 ... x_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est pseudo-équicontinue en zéro.

Le résultat suivant ([10]) montre que le fait qu'une seule série particulière opère sur un ouvert d'une B_0-algèbre commutative entraîne la m-convexité de cette dernière.

Théorème 2.5 ([10]). Soient (A, τ) une B_0-algèbre commutative et $\sum\limits_n a_n z^n$ une série où $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$. Si $\sum\limits_n a_n x^n$ converge sur un ouvert de (A, τ), alors la topologie τ peut être définie par une famille $(|.|_k)_k$ de semi-normes telle que

$$|xy|_k \leq \frac{a_{n_x} a_{m_y}}{a_{n_x + m_y}} \; |x|_k \, |y|_k \, , \; x, y \in A, \; n_x, m_y \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, si la suite $\left(\frac{a_n a_m}{a_{m+n}}\right)_{n,m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, l'algèbre (A, τ) est m-convexe.

Preuve. Soit V_k un voisinage de zéro disqué et fermé. Comme la série

$\sum_n a_n z^n$ opère sur un ouvert de (A, τ) qui est une B_0-algèbre commutative. Alors la suite:

$$((x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto a_n x_1 x_2 ... x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est pseudo-équicontinue en zéro. Il existe un voisinage U_k de zéro équilibré et fermé tel que:

$$\Omega_k = \bigcup_n a_n U_k^n \subset V_k.$$

Soit $conv\,(\Omega_k)$ l'enveloppe convexe de Ω_k. Alors $conv\,(\Omega_k)$ est un voisinage de zéro disqué. Soient $x, y \in conv(\Omega_k)$. Alors, on a:

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i,\ y = \sum_{j \in J} \beta_j y_j,\ x_i, y_j \in \Omega_k,\ \sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{j \in J} \beta_j = 1,$$

où I et J sont finis. Il s'ensuit que:

$$xy = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j y_j \right) = \sum_{j \in J; i \in I} \alpha_i \beta_j x_i y_j.$$

Comme $x_i, y_j \in \Omega_k$, on a:

$$x_i = a_{n_i} x_{1_i} x_{2_i} ... x_{n_i} \text{ et } y_j = a_{m_j} y_{1_j} y_{2_j} ... y_{m_j}$$

où $x_{1_i}, ..., x_{n_i},\ y_{1_j}, ..., y_{m_j} \in U_k$. D'où:

$$x_i y_j \in \frac{a_{ni} a_{m_j}}{a_{m_j + n_i}} \Omega_k.$$

Soit maintenant:

$$\frac{a_{n_x} a_{m_y}}{a_{n_x + m_y}} = \sup_{i,j} \frac{a_{ni} a_{m_j}}{a_{m_j + n_i}}.$$

Alors:

$$x_i y_j \in \frac{a_{ni} a_{m_j}}{a_{m_j + n_i}} \Omega_k \subset \frac{a_{n_x} a_{m_y}}{a_{n_x + m_y}} \Omega_k.$$

D'où:

$$\frac{a_{n_x + m_y}}{a_{n_x} a_{m_y}}\ x_i y_j \in \Omega_k,\ i \in I,\ j \in J.$$

Et puisque:

$$\frac{a_{n_x + m_y}}{a_{n_x} a_{m_y}}\ xy = \sum_{j \in J,\ i \in I} \alpha_i \beta_j\ \frac{a_{n_x + m_y}}{a_{n_x} a_{m_y}} x_i y_j \text{ et } \sum_{j \in J,\ i \in I} \alpha_i \beta_j = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j \right) = 1,$$

on obtient que:

$$\frac{a_{n_x+m_y}}{a_{n_x}a_{m_y}}xy \in conv(\Omega_k).$$

Par conséquent, la famille de semi-normes $(|.|_k)_k$ associées aux $conv(\Omega_k)$, définie bien la topologie τ, et vérifie:

$$|xy|_k \leq \frac{a_{n_x}a_{m_y}}{a_{n_x+m_y}} |x|_k \, |y|_k \, , \; x, \; y \in A, \; n_x, \; m_y \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre que si la suite:

$$\left(\frac{a_n a_m}{a_{m+n}}\right)_{n,m\in\mathbb{N}^*}$$

est bornée, alors l'algèbre (A, τ) est m-convexe.

Remarque 2.6. Si $\sum\limits_n a_n z^n$ est une série entière, la suite

$$\left(\frac{a_n a_m}{a_{m+n}}\right)_{n,m\in\mathbb{N}^*}$$

n'est jamais bornée. En effet, Zelazko ([16]) a montré que pour toute série entière il existe une B_0-algèbre commutative non m-convexe dans laquelle elle opère.

Bibliographie du chapitre 4

[**3**] J. Bochnak, J. Siciak, Polynomials and multilinear mappings in topological vector space. Studia. Math. 39, 59-76 (1971).

[**7**] A. El Kinani, Entire functions and equicontinuity of power maps in Baire algebras, Revista Matematica Complutense. 13, No. 2, 337-340 (2000).

[**8**] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, On a Result of Turpin, Mediterr. J. Math. (2016), p. 4211-4217.

[**10**] A. El Kinani, R. Choukri et A. Oudades, Polynomials and multilinear mappings in locally convex algebras, Acta Math. Univer. Commenian. (N.S) 87(2018), no. 2, 301-307.

[**12**] A. El Kinani, M. Oudadess, Entire functions and m-convex structure in commutative Baire algebra, Bull. Belg. Math. Soc. 4, 685-687 (1997).

[**16**] B. S, Mitiagin, S. Rolewics, W. Żelazko, Entire functions in B_0-algebras, Studia Math. 21, 291-306 (1962).

[**17**] P. Turpin, Une remarque sur les algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sci. Paris, A 270. Série A, 1686-1689 (1970).

[**20**] W. Żelazko, Concerning entire functions in B_0-algebras, Studia Math. 110, No. 3, 283-290 (1994).

[**21**] W. Żelazko, Selected topics in topological algebras, Lecture Notes Series No 31, Aarhus, Univ. (1971).

Bibliographie générale

[1] G.R Allan, *A spectral Theory for locally Convex Algebras,* Proc. London Math. Soc., 15(1965), pp. 399-421.

[2] R. Arens, *The space L^{ω} and convex topological rings,* Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 931-935.

[3] J. Bochnak, J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector space.* Studia. Math. 39, 59-76 (1971).

[4] F. F. Bonsall and Duncan, *Complete normed algebras,* Ergebnise der Mathmatik, Band 80, Springer-Verlag, Berlin 1973. Math.

[5] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques, théorie spectrale,* chapitres 1 et 2, Hermann, Paris 1967.

[6] RC Buck, *Bounded continuous functions on a locally compact space,* The Machigan Mathmatical Journal 5(2), 1958, p 95-10.

[7] A. El Kinani, *Entire functions and equicontinuity of power maps in Baire algebras,* Revista Matematica Complutense. 2000, p. 337-340.

[8] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, *On a Result of Turpin,* Mediterr. J. Math. (2016), p. 4211-4217.

[9] A. El Kinani, R. Choukri, A. Oudades, *The inverse map and equicontinuity of power maps in locally convex algebras,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Steven 25(2018), no. 3, 321-329.

[10] A. El Kinani, R. Choukri et A. Oudades, *Polynomials and multilinear mappings in locally convex algebras*, Acta Math. Univer. Commenian. (N.S) 87(2018), no. 2, 301-307.

[11] A. El Kinani, R. Choukri, M. Oudadess, *Fonctions entières et m-convexité,* Bull. Belg. Math. Soc. 8(2001), p. 67-73.

[12] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions and m-convex structure in* *commutative Baire algebra,* Bull. Belg. Math. Soc. 4 (1997), p. 685-687.

[13] A. El Kinani, M. Oudadess, *Entire functions in locally convex algebras,* The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 27, Number 1A (2002), p. 85-90.

[14] A. Mallios, *Topological Algebras.* Selected Topics. North-Holland. Mathematics Studies, 124. Notas de Mathemàtica, 109. North-Holland Publishing Co. Amesterdam, 1967.

[15] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras,* Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[16] B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Zelazko, *Entire functions in B_0-algebras,* Studia Math. 21 (1962), p. 291-306.J. H.

[17] P. Turpin, *Une remarque sur les algèbres à inverse continu,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 270. Série A (1970), p. 1686-1689.

[18] J. H. Williamson, *On topologising the field $\mathbb{C}(t)$,* Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954), 729-734.

[19] W. Zelazko, *A non-m-convex algebra on which operate all entire functions,* Ann. Polon. Math. 46 (1985), 389-394.

[20] W. Zelazko, *Concerning entire functions in B_0-algebras,* Studia Math. 110 (3) 1994, p. 283-290.

[21] W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras,* Lect. Notes Series 31 (1971), Matematisk Institut Aarhus Universitet-Aarhus.

[22] W. Zelazko, *Metric generalisation of Banach algebras,* Rozprway Mat. (Dissertationes Math.) 47 (1965).

ROYAUME DU MAROC
Université Mohammed V
- RABAT -
جامعة محمد الخامس
- الرباط -
Faculté des sciences
كلية العلوم

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Année universitaire : 2019/2020

Résume

Ce travail porte sur l'étude, ainsi que les liens, entre quelques questions de la théorie spectrale des algèbres localement convexes, non nécessairement commutatives. Il s'agit de l'opération des séries entières, l'équicontinuité en zéro de la suite des applications puissances et la continuité de l'application inverse. Nous introduisons la classe des algèbres localement convexes non nécessairement commutatives dans lesquelles la suite des applications puissances est équicontinue en zéro. Une étude approfondie, de leurs propriétés spectrales, est produite. Le cas particulier des B_0-algèbres est bien examiné. Nous montrons que l'application inverse est continue dans toute algèbre localement convexe, non nécessairement commutative, dans laquelle la suite des applications puissances est équicontinue en zéro. Puis, nous prouvons que la réciproque est fausse en général. Nous obtenons, en particulier, la continuité de l'application inverse dans toute B_0-algèbre dans laquelle les séries entières opèrent. Nous montrons que la complétude ainsi que la métrisabilité sont nécessaires. Nous dégageons l'outil fondamental qui est à la base des résultats de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Zelazko et de A. El Kinani et M. Oudadess. Il s'agit de la notion de pseudo-équicontinuité en zéro d'une famille d'applications. Elle permet d'alléger les preuves de certains résultats classiques tels que les théorèmes de Turpin pour les applications puissances dans les algèbres commutatives localement convexes et celui de B. Mitiagin, S. Rolewics et W. Żelazko pour les séries entières dans les B_0-algèbres commutatives. Nous obtenons également qu'une B_0-algèbre commutative est m-convexe si une série entière, avec un contrôle approprié sur ses coefficients, opère dans un ouvert de l'algèbre.

Mots-clefs : Algèbres localement convexes, B_0-algèbres, séries entières, applications puissances, l'application inverse, pseudo-équicontinuité.

Abstract

This work deals with the study, as links between some questions, of the spectral theory of locally convex algebras that are not necessarily commutative. This is the operation of entire series, the equicontinuity at zero of the sequence of power maps and the continuity of the inverse map. We introduce the class of locally convex algebras that are not necessarily commutative in which the sequence of power maps is equicontinuous at zero. A thorough study of their spectral properties is produced. The special case of B_0-algebras is well examined.We prove that the inverse map is continuous in any locally convex algebra, not necessarily commutative, in which the sequence of power maps is equicontinuous at zero. We show that the converse is not valid in general. We obtain, in particular, the continuity of the inverse map in any B_0-algebra in which the the series operate. We also prove that completeness and metrizability are necessary. We extricate the fundamental tool that is the basis of the results of B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Zelazko and A. El Kinani and M. Oudadess. This is the notion of pseudo-equicontinuity at zero of a family of applications. It makes it possible to lighten the proofs of some classical results such as Turpin's theorems for power applications in locally convex commutative algebras and that of B. Mitiagin, S. Rolewics and W. Żelazko for the series in commutative B_0-algebras. We also obtain that a commutative B_0-algebra is m-convex if an entire series, with appropriate control over its coefficients, operates in an open of the subset of the algebra.

Key Words: locally convex algebras, B_0-algebras, entire series, power maps, inverse map, pseudo-aquicontinuity.