Remerciement

Dans ces lignes où il m'est donné l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse. Je voudrais commencer par exprimer ma profonde gratitude envers la personne qui, sans elle, ce travail n'aurait jamais vu le jour, mon encadrant de thèse, monsieur El Baraka Azzeddine. C'est la personne qui n'a épargné aucun effort à m'écouter, à me conseiller et à me guider durant mon cheminement. Au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années de thèse agréables et enrichissantes.

C'est avec grand plaisir que j'ai appris que les professeurs Elhoussine AZROUL, Abdelatif CHAIRA et Mohamed RHOUDAF sont les rapporteurs de ma thèse. Je ne les remercierais jamais assez pour le temps et l'effort qu'ils ont consacré à lire et à évaluer ce travail. Ma profonde gratitude va également à monsieur Mohammed AKHMOUCH, monsieur Omar SIDKI et monsieur Ahmed YOUSSFI qui me font le plaisir d'être parmi les membres du jury. C'est pour moi un grand honneur et en même temps une véritable épreuve que mon travail soit évalué par des professeurs d'un tel renom ! Un énorme merci.

Merci à tous les membres du laboratoire « Modélisation et Structures Mathématiques », au sein duquel j'ai passé ces belles années de thèse, en particulier à monsieur Najib MAHDOU, pour sa disponibilité, son soutien et son empathie. Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs du laboratoire qui n'ont jamais hésité à nous venir en aide en cas de besoin. Un merci amical à tous les doctorants du laboratoire.

Les mots ne suffisent pas pour exprimer mes sentiments de gratitude et d'affection envers ma petite famille qui m'a toujours supporté et soutenu durant ces années. D'abord mes parents Doha et Mhammed qui étaient plus enthousiastes et excités que moi, pour que ce travail soit accompli, mes sœurs Ahlam et Zahrae qui m'ont toujours encouragé et ont toléré tous mes états d'humeur durant ces années, mon "beau" frère Kamal que je considère comme un grand frère, et mes neveux Ines et Othmane qui sont venus au monde pour embellir et décorer notre petite famille.

Enfin, mes vifs remerciements vont à tous les amis et les personnes qui m'ont accompagné et soutenu de près ou de loin pour réussir ce travail. Je commence par Aziz et Issam que j'aurais peut-être dû placer dans le paragraphe précédent, vu que ce n'est pas des sentiments d'amitié que j'éprouve envers eux mais plutôt de fraternité. Je cite aussi : Soukaina M, Laila E, Afaf S, Youssra B, Imane S, Simohamed S, Badr E, Omar M, Abdelhaq Z, Tarik T, Mohammed M, Amine J, ... et la liste est longue. Bref, Merci !

Résumé

Dans cette thèse, nous prouvons des estimations à priori dans les espaces de type Besov pour les solutions des problèmes aux limites associés à deux classes d'opérateurs linéaires, elliptiques et dégénérés d'ordre supérieur. Les résultats établis dans ce mémoire prolongent et généralisent ceux donnés dans les espaces de Hölder, les espaces de Sobolev et les espaces de Besov classiques à un cadre fonctionnel plus large.

Les méthodes utilisées dans ce travail sont principalement basées sur des techniques d'analyse harmonique, et consistent d'une part, grâce à la décomposition de Littlewood-Paley à donner une caractérisation dyadique de l'espace de type Besov, et d'une autre part, à l'aide d'une transformation de Fourier partielle, à réduire le problème à l'étude d'une équation différentielle ordinaire, ce qui permet grâce à un résultat d'isomorphisme, d'estimer les dérivées "presque tangentielles" des solutions, ensuite, certains lemmes d'interpolation nous permettent d'obtenir la régularité en variable normale.

Mots clés : Régularité ; Espaces de type Besov ; Opérateurs linéaires elliptiques ; Problèmes dégénérés ; Estimations à priori.

Mathematics Subject Classification (2010) : MSC 35J30, MSC 35J40, MSC 35B45, MSC 35B65.

Abstract

In this thesis, we prove a-priori estimates in Besov-type spaces for solutions of boundary value problems involving two class of linear elliptic degenerate higher-order operators. This work extends some well-known results given in Hölder spaces, Sobolev spaces and classical Besov spaces to the more general framework of Besov-type spaces.

The methods used in this dissertation are mainly based on harmonic analysis techniques, they consist on the one hand, in giving a dyadic characterization of Besov-type spaces thanks to the Littlewood-Paley decomposition, on the other hand, in reducing the problem by means of a partial Fourier transformation to an isomorphism theorem for an ordinary differential equation, which allows us to estimate the "almost tangential" derivatives of solutions, then using some interpolation inequalities we evaluate the normal derivatives.

Keywords : Boundary value problems ; A priori estimates ; Regularity ; Besov-type spaces ; Degenerate elliptic equations.

Mathematics Subject Classification (2010) : MSC 35J30, MSC 35J40, MSC 35B45, MSC 35B65.

Table des matières

Introduction

Notre compréhension du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, (notées en abrégé EDP). Les EDPs décrivent la relation entre une fonction inconnue et ses dérivées partielles et semblent généraliser au contexte multidimensionnel les équations différentielles ordinaires (notées EDO), ils apparaissent fréquemment dans la modélisation de nombreux problèmes en physique et en ingénierie. Par ailleurs, ces dernières années ont connu une utilisation extrêmement remarquable de ces EDPs en biologie, chimie, informatique (imagerie), économie (finance), dynamique de la population$\cdots$.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDPs, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiciens peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés qualitatives de ces solutions, l'une de ces propriétés est la régularité.

D'autre part, les travaux présentés dans cette thèse portent sur une famille d'EDPs associées à des opérateurs linéaires, elliptiques à l'intérieur d'un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, et dégénérés au bord (i.e., qui cessent d'être elliptiques au bord de cet ouvert). Plus précisément, nous prouvons la régularité des solutions des problèmes aux limites associés à ces EDPs via des estimations à priori. En guise de simplification, et par passage aux cartes locales, on va se réduire à l'étude de ces EDPs dans le demi-espace $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(t, x') = (t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t > 0\}$.

Ainsi, soient $\alpha = (\alpha', j)$ avec $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $j \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha'| = \alpha_1 +$

$\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ et notant $D_t^j = i^{-j}\dfrac{\partial^j}{\partial_t^j}$, $D_{x'}^{\alpha'} = i^{-|\alpha'|}\dfrac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, dans cette étude on est intéressé par les deux classes d'opérateurs différentiels suivantes :

$$L \equiv L(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h}P^{2m-h}(t,x';D_t,D_{x'}), \tag{0.0.1}$$

où

$k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ et $P^{2m-h}(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{|\alpha'|+j\le 2m-h} a_{\alpha' j}(t,x')D_{x'}^{\alpha'}D_t^j$ à coefficients $a_{\alpha' j}(t,x')$ dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$.

Et

$$M \equiv M(t,x';D_t,D_{x'}) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\le m\\ j<m}} a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j, \tag{0.0.2}$$

où

$m \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $-m+\delta m \in \mathbb{N}_0$, $\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil$ est le plus petit entier naturel, supérieur ou égale à $-m+\delta|\alpha'|+j$, et à coefficients $a_{\alpha' j}(t,x')$ dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$.

La classe L avait été introduite par N. Shimakura, l'auteur a prouvé un résultat de régularité, et un certain théorème d'existence et d'unicité dans les espaces de Sobolev classiques H^m, avec m entier [44], l'idée était d'obtenir des estimations à priori à partir d'un théorème d'isomorphisme à une variable. Des résultats similaires ont été établis par P. Bolley et J. Camus [8]. En théorie höldérienne, les opérateurs de type L du second ordre ($m=1, k=2$) avaient été investigués par C. Goulaouic et N. Shimakura dans [36], les auteurs ont montré un théorème de régularité par une estimation du noyau des opérateurs de "Green" du problème aux limites considéré. Plus tard, P. Bolley, C. Camus et G. Métivier [12] ont prouvé que la classique méthode de Peetre utilisée dans [8], s'adapte au cadre des espaces de Hölder, et aussi au cadre des espaces de Besov classiques $B_{p,q}^s$ par J. Rolland [43].

D'un autre côté, les opérateurs M ont été introduits par M.S. Baouendi, il a établit un résultat de régularité dans les espaces de Sobolev H^m pour les solutions du cas du second ordre de l'opérateur M [5], pour cela, l'auteur a utilisé la "régularisation elliptique" qui consiste à approcher l'opérateur différentiel dégénéré par un autre non dégénéré. Ensuite, l'étude a été étendue par M.I. Vishik et V.V. Grushin [58] aux opérateurs d'ordre supérieur. Un résultat d'hypo-ellipticité partielle est donné par, P. Bolley, J. Camus et B. Helffer par une première méthode basée sur des quotients différentiels à partir d'une estimation à priori, et une deuxième, qui s'appuie sur la construction d'une paramètrix partielle. La régularité Höldérienne est démontrée par O. Debbaj [18] pour les opérateurs M d'ordre 2 ($m = \delta = 2$), en étudiant la continuité des "noyaux de Poisson et de Green". L'auteur a prolongé ensuite ses résultats pour couvrir des opérateurs différentiels plus généraux, notamment, ceux d'Hermite et de Tricomi [19]. Plus tard, l'étude des opérateurs M est reprise par A. El Baraka [23, 27], l'auteur prouve une estimation à priori des solutions de ces opérateurs dans le cadre des espaces de Besov classiques, généralisant ainsi les travaux effectués dans les espaces de Sobolev et de Hölder. Dans les espace de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$, le même auteur établit des estimations à priori pour les solutions des problèmes aux limites elliptiques réguliers, qui correspondent aux opérateurs M avec $\delta = 1$ [28].

D'autres résultats voisins sont donnés par plusieurs chercheurs dans [12, 18, 28, 31].

Par conséquent, notre objectif principal est de prouver un tel résultat de régularité pour les solutions des EDPs associées aux opérateurs L et M, dans un cadre fonctionnel plus large qui est celui des espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$.

Les espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$ ont été introduits dans [30, 25], dans le but de résoudre une propriété conjecturée par H. Triebel [54, Section 4.3.4], concernant des estimations à priori pour des problèmes elliptiques réguliers dans les espaces de John-Nirenberg BMO et les espaces de Campanato $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ et leurs versions locales *bmo* et $l^{2,\lambda}$, en effet, un choix précis des indices s, τ, p, q nous permettent de retrouver ces espaces. On obtient également les espaces de Besov classiques $B^{s}_{p,q}$ si on prend $\tau = 0$, les espaces de Hölder C^s si $\tau = 0$ et $p = q = \infty$, les espaces de Sobolev H^s si $\tau = 0$ et $p = q = 2 \cdots$, d'où l'importance de ce cadre de fonctions et par conséquent de ce mémoire. Nous y reviendrons ultérieurement dans le premier chapitre de cette thèse pour plus de détails.

Le manuscrit de ce mémoire est scindé en trois chapitres. L'objectif du Chapitre 1 est de rappeler en premier lieu la définition des espaces qui apparaissent dans cette thèse, ensuite à l'aide des outils de l'analyse de Fourier, on introduit la définition de l'espace de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$ dans sa version non homogène, puis, nous collectons des relations d'équivalence et certaines injections importantes. En second lieu, nous recueillons les lemmes nécessaires pour la suite de ce document.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la classe des opérateurs L. Nous prouvons une estimation à priori dans les espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ pour les solutions du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u \quad\quad\;\; \in & B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_{+}) \\ Lu = f \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_{+}) \\ \gamma_l u = g_l \in & B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n}) \quad , \qquad 0 \leq l \leq \chi - 1. \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Pour cet effet, la deuxième section du chapitre sera dédiée aux espaces de Sobolev et de Besov à poids requis pour établir l'inégalité à priori. Ensuite, nous posons les hypothèses nécessaires pour énoncer le résultat principal. La troisième section sera consacrée à la définition des traces des éléments dans les espaces à poids considérés. La preuve du théorème principal est esquissée dans la quatrième section et se déroulera en deux étapes : la première s'inspire de la méthode décrite par P. Bolley, J. Camus et G. Métivier dans [11], et consiste, grâce à une transformation de Fourier partielle en x', à se ramener à l'étude d'une équation différentielle ordinaire, ensuite, à l'aide d'un résultat d'isomorphisme, nous obtenons l'inégalité à priori pour les dérivées "presque tangentielles" des solutions. La deuxième étape s'appuie sur des lemmes d'interpolation pour contrôler les dérivées normales. Dans la cinquième section, nous allons illustrer le théorème par quelques exemples.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la classe d'opérateurs M. Nous considérons alors le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u \quad\quad\;\;\; \in & B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_{+}) \\ Mu = f \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_{+}) \\ \gamma_l u = g_l \in & B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n}) \quad , \qquad 0 \leq l \leq m_{+} - 1. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Pareillement, la deuxième section sert à construire les espaces à poids nécessaires pour traiter le problème, nous élaborons les hypothèses nécessaires et nous présentons ensuite le théorème de régularité. La troisième section fera l'objet d'un théorème des traces. Dans la quatrième section, nous prouvons le théorème principal. De manière analogue à celle dans le chapitre 2, nous réduirons le problème à un théorème d'isomorphisme pour une équation différentielle ordinaire afin d'estimer les dérivées “presque tangentielles”. Ensuite, à l'aide des lemmes d'interpolation nous évaluons les dérivées normales. Dans la cinquième section, nous donnons quelques exemples.

Les résultats prouvés dans cette thèse font l'objet de plusieurs applications. Entre autres, en géophysique, plus précisément dans l'étude des eaux peu profondes (Shallow water en anglais), un cas particulier des opérateurs L donne l'équation du lac dans le cas non visqueux dégénéré [13, Section 7]. D'un autre côté, la classe d'opérateurs M contribue dans certains problèmes de physique, on peut citer par exemple les travaux [37, 53], concernant l'étude des équations des ondes associées aux opérateurs de Grushin. En outre, à l'instar de [27], les résultats de ce manuscrit peuvent également servir à établir des théorèmes de régularité pour des problèmes aux limites non linéaires, et dont les opérateurs linéarisés sont dans la classe L ou M.

Notations.

Tout au long de cette thèse, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Pour $J \in \mathbb{Z}$, on désigne par B_J (resp. B'_J), la boule centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ (resp. $x'_0 \in \mathbb{R}^n$) et de rayon 2^{-J}. C'est à dire, $B_J = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad |x - x_0| < 2^{-J}\}$ (resp. $B'_J = \{x' \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |x' - x'_0| < 2^{-J}\}$).

Pour $\alpha > 0$, αB_J (resp. $\alpha B'_J$), désigne la boule centrée en x_0 (resp. x'_0) et de rayon $\alpha 2^{-J}$.

Pareillement, pour $\nu \in \mathbb{Z}$, F_ν (resp. F'_ν) désigne la couronne centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, (resp. $x'_0 \in \mathbb{R}^n$), telle que $F_\nu = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \quad 2^\nu \leq |x - x_0| \leq 2^{\nu+1}\}$, (resp. $F'_\nu = \{x' \in \mathbb{R}^n \quad : \quad 2^\nu \leq |x' - x'_0| \leq 2^{\nu+1}\}$).

On pose $J^+ = \max(J, 0)$ et on désigne par $|\Omega|$ la mesure de $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

On note par C, C_M, C_N, C_K, ϵ, $\varepsilon, \cdots$, des constantes réelles positives, qui n'ont pas nécessairement la même valeur à chaque occurrence.

La notation $U \lesssim V$ indique qu'il existe une constante positive C telle que $U \leq CV$.

Par $\mathcal{S}$ on désigne l'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tous ordre sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Le dual $\mathcal{S}'$ de cet espace est l'espace des distributions tempérées.

Chapitre 1

Cadre fonctionnel et propriétés

Sommaire

1.1 Introduction

Ce chapitre décrit le cadre fonctionnel général dans lequel nous mènerons notre étude, et est organisé de la manière suivante. Dans la deuxième section, nous rappelons la définition des espaces de fonctions qui figurent dans cette thèse. Ensuite, la troisième section est consacrée à l'étude des espaces fonctionnels définis à l'aide des outils de l'analyse de Fourier, en effet, on rappelle en premier lieu la décomposition de Littlewood-Paley, ensuite, on introduit la définition de l'espace de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$ utilisé tout au long de ce travail. En même temps, on rappelle les définitions d'autres espaces utilisant la même technique. Nous collectons à la fin quelques relations de coïncidence, des injections importantes et certaines propriétés dans cet espace de fonctions.

1.2 Espaces usuels

Dans cette partie, nous rappelons les définitions de quelques espaces fonctionnels qui figurent dans ce mémoire.

- **L'espace de Lebesgue : L^p.**

  Pour $0 < p < +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ est l'ensemble des fonctions Lebesgue-mesurables f telles que :

$$\| f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \Big(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

  Si $p = +\infty$, alors $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables telles que :

$$\| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv ess \sup_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} |f(x)| < +\infty.$$

- **L'espace des fonctions continues : C.**

  L'espace $C(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne l'ensemble des fonctions continues et bornées telles que :

$$\| f \|_{C(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} |f(x)| < +\infty.$$

- **L'espace des fonctions de classe C^m.**

  Soit m un entier naturel, l'espace $C^m(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{R}^{n+1})$, avec toutes les dérivées $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$ sont dans $C(\mathbb{R}^{n+1})$ et telles que :

$$\| f \|_{C^m(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha f \|_{C(\mathbb{R}^{n+1})} < +\infty.$$

  On note $C^0(\mathbb{R}^{n+1}) = C(\mathbb{R}^{n+1})$ si $m = 0$, et $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ si $m = +\infty$.

  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne l'espace des fonctions tests, (i.e. l'espace des fonctions de classe C^∞ à supports compacts).

- **L'espace de Schwarz : $\mathcal{S}$.**

  Une fonction $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide, si elle est indéfiniment différentiable et si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty.$$

L'espace de ces fonctions est noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ et appelé l'espace de Schwarz, son dual topologique est l'espace des distributions tempérées noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

- **L'espace de Hölder : C^s.**

  Soit m un entier naturel et soit s un réel tel que $m < s < m+1$, alors $C^s(\mathbb{R}^{n+1})$ est l'espace des fonctions $f \in C^m(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que :

$$\| f \|_{C^s(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \| f \|_{C^m(\mathbb{R}^{n+1})} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-m}} < +\infty.$$

- **L'espace de Zygmund : $\mathscr{L}^m$.**

  Soit m un entier naturel, l'espace de Zygmund $\mathscr{L}^m(\mathbb{R}^{n+1})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que :

$$\| f \|_{\mathscr{L}^m(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \| f \|_{C^{m-1}(\mathbb{R}^{n+1})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{h \neq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{|D^\alpha f(x+2h) - 2D^\alpha f(x+h) + D^\alpha f(x)|}{|h|} < \infty.$$

  Dans le cas où $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{L}^s(\mathbb{R}^{n+1}) = C^s(\mathbb{R}^{n+1})$.

- **L'espace de Sobolev : $W^{m,p}$.**

  Soient m un entier naturel et $1 \leq p \leq +\infty$, on notera par $W^{m,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, telles que $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, $|\alpha| \leq m$. Sur ces espaces, on définit la norme suivante

$$\| f \|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

  Si m est non entier, on peut définir l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire (ou l'espace de Bessel) à l'aide de la transformation de Fourier. Dans ce cas, pour $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$W^{s,p} = H^{s,p} = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}) : \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F} f] \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}) \}.$$

- **L'espace de fonctions à Oscillation Moyenne Bornée : BMO et bmo.**
  - L'espace $BMO(\mathbb{R}^{n+1})$ (Bounded Mean Oscillation), est l'ensemble des fonctions f localement intégrables sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telles que

$$\| f \|_{BMO(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sup_{Q \subset \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty,$$

où $f_Q \equiv \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur Q, et où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des cubes Q dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

- ○ L'espace *bmo* (local Bounded Mean Oscillation) est l'ensemble des fonctions $f \in BMO(\mathbb{R}^{n+1})$ qui satisfont la condition suivante :

$$\sup_{|Q|\geq 1}\int_Q |f(x)| < \infty,$$

muni de la norme suivante

$$\| f \|_{bmo(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \| f \|_{BMO(\mathbb{R}^{n+1})} + \sup_{|Q|=1}\int_Q |f(x)|dx.$$

- **L'espace de Campanato : $\mathscr{L}^{p,\lambda}$.**

Soient $0 \leq \lambda < +\infty$ et $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $\mathscr{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, telles que

$$\| f \|_{\mathscr{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sup_B \frac{1}{|B|^{\frac{\lambda}{n+1}}}\left(\int_B |f(x) - f_B|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

où $f_B \equiv \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur B, et où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Il est facile de voir que si $\lambda = n+1$ et $p = 1$ l'espace de Campanato coïncide avec BMO, $\mathscr{L}^{1,n+1} = BMO$.

- **L'espace d'approximation local : $\mathcal{L}^\alpha_p$.**

Soit $1 \leq p < +\infty$, $\alpha \geq -\dfrac{n}{p}$ et $N = \max(-1, [\alpha])$ où $[\alpha]$ est la partie entière de α. On dit que $u \in \mathcal{L}^\alpha_p(\mathbb{R}^{n+1})$ si et seulement si $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ et pour certaines constantes $M = M(u)$, pour tout cube B d'arrêt de longueur δ, il existe un polynôme P_B de degré inférieur ou égale à N ($P_B = 0$ si $N = -1$), tel que

$$\left\{\frac{1}{|B|^{1+\frac{\alpha p}{n+1}}}\int_B |u(x) - P_B|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq M \quad \text{si} \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \text{et}$$

$$\left\{\frac{1}{|B|}\int_B |u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq M \quad \text{si} \quad \delta = 1.$$

On définit $\| u \|_{\mathcal{L}^\alpha_p(\mathbb{R}^{n+1})}$ comme l'infinimum des constantes M.

Ainsi, on a $\mathcal{L}^0_1(\mathbb{R}^{n+1}) = bmo(\mathbb{R}^{n+1})$ et $\mathcal{L}_p^{\lambda-\frac{n+1}{p}}(\mathbb{R}^{n+1}) = l^{p,\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})$ (Espace de Campanato local).

1.3 Espaces fonctionnels définis à l'aide des outils d'analyse de Fourier

Le but de ce chapitre est d'introduire une collection d'espaces fonctionnels définis à l'aide des outils d'analyse de Fourier, et d'en donner certaines propriétés et relations de coïncidence. On se focalisera plus précisément sur les espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$, puisqu'ils constituent le cadre fonctionnel dans lequel nous démontrons nos résultats tout au long de ce travail.

1.3.1 Décomposition de Littlewood-Paley

On procède à une partition dyadique de l'unité via une décomposition de Littlewood-Paley.

Soit $x = (t, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1, 1]$ et à support inclus dans $[-2, 2]$. Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on pose :

$$S_j = \varphi(2^{-j}|D_x|) \ ; \ S'_j = \varphi(2^{-j}|D_{x'}|) \ ; \ S''_j = \varphi(2^{-j}|D_t|),$$

$$S_{-1} = S'_{-1} = S''_{-1} = 0,$$

et

$$\Delta_j = S_j - S_{j-1} \ ; \ \Delta'_j = S'_j - S'_{j-1} \ ; \ \Delta''_j = S''_j - S''_{j-1}.$$

1.3.2 Espace de type Besov

1.3.2.1 Définitions

À l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley, nous donnons la définition de l'espace de type Besov.

Nous rappelons d'abord la caractérisation dyadique de l'espace de Besov non homogène, qui est la version trois paramètres de l'espace de type Besov non homogène (i.e. dépend de s, p et q seulement.), on a la définition suivante.

Définition 1.3.1 (Espace de Besov non homogène) *Soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $1 \leq p, q \leq +\infty$. On note par $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que*

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \begin{cases} \Big\{ \sum\limits_{j\geq 0} 2^{jsq} ||\Delta_j u||^q_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \Big\}^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \textit{pour } q < \infty \\ \sup\limits_{j\geq 0} 2^{js} ||\Delta_j u||_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} < +\infty, & \textit{pour } q = \infty\,. \end{cases}$$

Maintenant, nous énonçons la définition de l'espace de type Besov.

Définition 1.3.2 (Espace de type Besov non homogène) *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ et soit $1 \leq p, q \leq +\infty$. On note par $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que*

$$\|u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \begin{cases} \sup\limits_{B_J} \dfrac{1}{|B_J|^\tau} \Big\{ \sum\limits_{j\geq J^+} 2^{jsq} ||\Delta_j u||^q_{L^p(B_J)} \Big\}^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \textit{pour } q < \infty \\ \sup\limits_{B_J} \dfrac{1}{|B_J|^\tau} \sup\limits_{j\geq J^+} 2^{js} ||\Delta_j u||_{L^p(B_J)} < +\infty, & \textit{pour } q = \infty\,, \end{cases}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B_J dans $\mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $J \in \mathbb{Z}$ et avec $J^+ = \max(J, 0)$.

Remarque 1.3.3 *Pour pouvoir traiter de manière séparée la régularité globale (i.e., en toutes les variables) et la régularité tangentielle, on utilisera les espaces anisotropes suivants : pour $x = (t, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on désigne par $L^p(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ l'espace des fonctions qui sont L^p par rapport à la variable t et $B^{s,\tau}_{p,q}$ par rapport à x', autrement dit, c'est l'ensemble des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que :*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \equiv \begin{cases} \sup\limits_{B'_J} \dfrac{1}{|B'_J|^\tau} \Big\{ \sum\limits_{j\geq J^+} 2^{jsq} ||\Delta'_j u||^q_{L^p(B'_J)} \Big\}^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \textit{pour } q < \infty \\ \sup\limits_{B'_J} \dfrac{1}{|B'_J|^\tau} \sup\limits_{j\geq J^+} 2^{js} ||\Delta'_j u||_{L^p(B'_J)} < +\infty, & \textit{pour } q = \infty\,, \end{cases}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B'_J dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $J \in \mathbb{Z}$ et avec $J^+ = \max(J, 0)$.

De la même manière, on peut aussi rappeler la définition des espaces suivants.

Définition 1.3.4 (Espace de type Triebel-Lizorkin) *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ et soit $1 \leq p, q \leq +\infty$. On note par $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que*

$$\|u\|_{F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \begin{cases} \sup\limits_{B_J} \dfrac{1}{|B_J|^\tau} \Big\| \Big(\sum\limits_{j \geq J^+} 2^{jsq} |\Delta_j u|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p(B_J)} < +\infty, & \textit{pour } q < \infty \\ \sup\limits_{B_J} \dfrac{1}{|B_J|^\tau} || \sup\limits_{j \geq J^+} 2^{js} |\Delta_j u| ||_{L^p(B_J)} < +\infty, & \textit{pour } q = \infty. \end{cases}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B_J dans $\mathbb{R}^{n+1}$, pour tout $J \in \mathbb{Z}$ et avec $J^+ = \max(J, 0)$.

Définition 1.3.5 (Espace de Besov-Morrey) *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq +\infty$ et soit $0 < u \leq p \leq +\infty$. On note par $\mathcal{N}^s_{p,q,u}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'ensemble des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telles que*

$$\|u\|_{\mathcal{N}^s_{p,q,u}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \begin{cases} \sup\limits_{B_J} |B_J|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{u}} \Big\{ \sum\limits_{j \geq 0} 2^{jsq} ||\Delta_j u||^q_{L^u(B_J)} \Big\}^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \textit{pour } q < \infty \\ \sup\limits_{B_J} |B_J|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{u}} \sup\limits_{j \geq 0} 2^{js} ||\Delta_j u||_{L^u(B_J)} < +\infty, & \textit{pour } q = \infty\,. \end{cases}$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B_J dans $\mathbb{R}^{n+1}$, pour tout $J \in \mathbb{Z}$.

1.3.2.2 Relations de coïncidence

Au sens de l'équivalence des normes, on a les relations de coïncidence suivantes, voir [30, 57, 59, 60] :

1. $B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Besov classiques.
2. $B^{s,0}_{p,p}(\mathbb{R}^{n+1}) = W^{s,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Bessel, $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$.
3. $B^{s,\tau}_{p,p}(\mathbb{R}^{n+1}) = F^{s,\tau}_{p,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de type Triebel-Lizorkin.
4. $B^{s,1}_{p,p}(\mathbb{R}^{n+1}) = bmo^s_p(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Goldberg.
5. $B^{0,\frac{\lambda}{2(n+1)}}_{2,2}(\mathbb{R}^{n+1}) = l^{2,\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Campanato (Version locale).

6. $B^{s,0}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) = F^{s,0}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathscr{L}^s(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Zygmund, $s > 0$.
7. $B^{s,0}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) = F^{s,0}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) = C^s(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Hölder, $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$.
8. $B^{s,\frac{1}{p}+\frac{r}{n+1}}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) = L^r B^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces hybrides de Triebel, pour $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $-\dfrac{n+1}{p} \leq r < \infty$.
9. $B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{N}^s_{p,q,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Besov-Morrey, pour $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq +\infty$ et $q > 0$.
10. $B^{s,\frac{1}{p}-\frac{1}{u}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{N}^s_{u,p,\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ les espaces de Besov-Morrey, pour $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p \leq u < +\infty$.
11. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq +\infty$ alors $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) = B^{s+(n+1)(\tau-\frac{1}{p})}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$, pour $0 < q < +\infty$ et $\dfrac{1}{p} < \tau < +\infty$, ou $q = +\infty$ et $\dfrac{1}{p} \leq \tau < +\infty$.

1.3.2.3 Injections

Ci-dessous quelques injections importantes, voir [20, 24] :

1. $B^{s_1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow B^{s_2,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$, si $s_2 \leq s_1$.
2. $B^{s,\tau}_{p,q_0}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^{n+1})$, si $0 < q_0 \leq q_1 < +\infty$ et $0 < p < +\infty$.
3. $B^{s,\tau}_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^{n+1})$.
4. $B^{s+\frac{n+1}{p}-\frac{\tau(n+1)}{q},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow C^s(\mathbb{R}^{n+1})$.
5. $B^{s}_{p,q_1}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$, pour $0 < q_1 \leq q < +\infty$.
6. Soit $0 < t \leq p < +\infty$, alors $B^{s+\varepsilon}_{t,q}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$, si et seulement si $\varepsilon \geq \dfrac{\tau(n+1)}{q} + \dfrac{n+1}{t} - \dfrac{n+1}{p}$.

1.3.2.4 Propriétés

Cette section rassemble une collection de lemmes qui décrivent certaines propriétés de l'espace $B^{s,\tau}_{p,q}$, le lecteur peut se référer à [24, 28] pour les démonstrations.

Lemme 1.3.6 ([24]) *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $A < 0$. Si $(a_{j\nu})_{j,\nu}$ est une séquence de nombres réels telle que $(a_{j\nu})_j \in \ell^p$ pour tout $\nu \geq 1$, alors on a*

$$\sum_{j\geq 1}\Big(\sum_{\nu\geq 1} 2^{\nu A} a_{j\nu}\Big)^p \lesssim \sup_{\nu\geq 1}\sum_{j\geq 1} a^p_{j\nu}.$$

Lemme 1.3.7 ([24]) *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout entier $M > 0$, il existe une constante $C_M > 0$ telle que pour toute boule B_J avec $J \in \mathbb{Z}$, tout $l \in \mathbb{Z}$ et pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, l'inégalité*

$$\|A_l u\|_{L^p(B_J)} \leq C_M \Big\{ \|u\|_{L^p(2B_J)} + \sum_{\nu \geq -J+1} 2^{-(\nu+l)M} \|u\|_{L^p(F_\nu)} \Big\}$$

est vérifiée pour $A_l = \Delta_l, \Delta'_l, \Delta''_l, S_l, S'_l, S''_l$.

Lemme 1.3.8 ([24]) *La dérivation D_x^α, est un opérateur borné de $B_{p,q}^{s+|\alpha|,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$ vers $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Les trois prochains lemmes sont prouvés dans [28] pour $p = q$, de la même manière on peut les montrer pour $p \neq q$.

Lemme 1.3.9 ([28]) *Soient τ un réel positif, $1 \leq p, q < +\infty$, m un entier ≥ 1, et soit s un réel $< m$. Si $u \in L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$ telle que $D_t^m u \in L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s-m,\tau}(\mathbb{R}^n))$ alors $u \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$, et on a*

$$\|u\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|D_t^m u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s-m,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}.$$

Lemme 1.3.10 ([28]) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $u \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$ $\Big[$resp. $L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))\Big]$*

$$\|\varphi u\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \|u\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} + C\|u\|_{B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

$$\Big[\textit{resp. } \|\varphi u\|_{L^p(\mathbb{R}, B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big].$$

Lemme 1.3.11 ([28]) *Soient s_1, s_2 et s_3 trois nombres réels tels que $s_1 \leq s_2 < s_3$. Soient $\tau \geq 0$ et $1 \leq p, q < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \in B_{p,q}^{s_3,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$ $\Big[$resp. $L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s_3,\tau}(\mathbb{R}^n))\Big]$, on a*

$$\|u\|_{B_{p,q}^{s_2,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \varepsilon \|u\|_{B_{p,q}^{s_3,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} + \varepsilon^{-\frac{s_2-s_1}{s_3-s_2}} \|u\|_{B_{p,q}^{s_1,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

$$\Big[\textit{resp. } \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s_2,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \varepsilon \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s_3,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon^{-\frac{s_2-s_1}{s_3-s_2}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s_1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big].$$

Chapitre 2

Étude de la classe d'opérateurs L

Sommaire

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir une estimation à priori dans les espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ des solutions du problème aux limites associé à la classe d'opérateurs elliptiques dégénérés L définie comme dans (0.0.1) par :

$$L \equiv L(t, x'; D_t, D_{x'}) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} P^{2m-h}(t, x'; D_t, D_{x'}),$$

où $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ et $P^{2m-h}(t, x'; D_t, D_{x'}) = \sum_{|\alpha'|+j \leq 2m-h} a_{\alpha' j}(t, x') D^{\alpha'}_{x'} D^j_t$ à coefficients $a_{\alpha' j}(t, x')$ dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

Les résultats de ce chapitre étendent les travaux réalisés dans les espaces de Hölder C^s , les espaces de Sobolev H^s et les espaces de Besov classiques $B^s_{p,p}$ à un cadre de fonctions plus général.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la seconde section, nous introduirons dans un premier temps les espaces à poids nécessaires à l'étude du problème, ensuite, nous posons les hypothèses et nous énonçons le résultat principal. La troisième section est consacrée à la caractérisation de l'opérateur des traces dans les espaces à poids considérés. La quatrième section est dédiée à la preuve du théorème principal. Enfin, dans la cinquième section, nous allons exemplifier le théorème en faisant une application sur quelques modèles de l'opérateur L.

2.2 Définitions, hypothèses et résultats

2.2.1 Définitions

Les espaces de Sobolev et de type Besov à poids dont nous aurons besoin sont définis par :

Définition 2.2.1 *Pour $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p, q < +\infty$, on définit :*

— ***Espace de Sobolev à poids :***

On désigne par $W^{2m,p}_k(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\mathbb{R})$ telles que $t^{k-h} D^j_t u \in L^p(\mathbb{R})$, pour $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ et $0 \leq j \leq 2m - h$. On muni cet espace de la norme suivante :

$$\| u \|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R})} \equiv \left\{ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j=0}^{2m-h} \| t^{k-h} D^j_t u \|^p_{L^p(\mathbb{R})} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

— ***Espace de type Besov à poids anisotrope :***

On définit l'espace de type Besov à poids anisotrope, où les propriétés de différentiabilité dans les directions des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont différentes de celles dans la direction de t, par :

$W_k^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)) = \Big\{u \in L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s+2m-k,\tau}(\mathbb{R}^n)) : t^{k-h} D_t^j u \in L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s+2m-h-j,\tau}(\mathbb{R}^n))$ *pour tout* $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ *et* $0 \leq j \leq 2m - h\Big\}$.

Ces espaces vont nous permettre d'estimer les dérivées "presque tangentielles" des solutions, ce qui est essentiel pour la preuve du théorème principal. On convient alors, que dans ces espaces on a la norme suivante :

$$\| u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \equiv \left\{ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j=0}^{2m-h} \| t^{k-h} D_t^j u \|^p_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s+2m-h-j,\tau}(\mathbb{R}^n))} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

— ***Espace de type Besov à poids :***

Maintenant on introduit la version à poids des espaces de type Besov :
$B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}^{n+1}) = \Big\{u \in B_{p,q}^{s+2m-k,\tau}(\mathbb{R}^{n+1}) : t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \in B_{p,q}^{s+2m-(|\alpha'|+j)-h,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$ *pour tous* $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ *et* $0 \leq |\alpha'| + j \leq 2m - h\Big\}$, *cet espace est doté de la norme suivante :*

$$\| u \|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\alpha'|+j \leq 2m-h} \| t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+2m-(|\alpha'|+j)-h,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

On définit également,
$V_{p,q}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}) = \{u \in B_{p,q}^{s+2m-k,\tau}(\mathbb{R}) : t^{k-h} D_t^j u \in B_{p,q}^{s+2m-h-j,\tau}(\mathbb{R})$ *où* $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ *et* $0 \leq j \leq 2m - h\}$.

Remarque 2.2.2

- *On appelle* $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+)$ $\Big[$*resp.* $V_{p,q}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+)\Big]$, *l'espace des restrictions à* $\mathbb{R}_+$ *des éléments de* $W_k^{2m,p}(\mathbb{R})$ $\Big[$*resp.* $V_{p,q}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R})\Big]$; *De même,* $B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ $\Big[$*resp.* $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))\Big]$, *est l'espace des restrictions à* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *des éléments de* $B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$ $\Big[$*resp.* $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))\Big]$.
- *Si* $s \geq 0$, *on a l'injection :*
$$B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow W_{k,loc}^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)).$$

2.2.2 Hypothèses

On fixe $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < +\infty$.

Notons par L^0 la "partie principale" de l'opérateur L définie par :

$$L^0(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} P_{2m-h}^{2m-h}(t,x';D_t,D_{x'}) \tag{2.2.1}$$

où $P_{2m-h}^{2m-h}(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{|\alpha'|+j=2m-h} a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j$, est le symbole de l'opérateur $P^{2m-h}(t,x';D_t,D_{x'})$.

On suppose que :

(A0) $P^{2m}(t,x';D_t,D_{x'})$ est un opérateur proprement elliptique sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

(A1) Pour tous $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le polynôme en la variable complexe z

$$P(z) = \sum_{|\alpha'|+j=2m} a_{\alpha' j}(0,x') \xi'^{\alpha'} z^j$$

admet exactement m racines avec parties imaginaires positives et m racines avec parties imaginaires négatives.

(A2) Pour tout $x' \in \mathbb{R}^n$, le polynôme en λ :

$$p(x',\lambda) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} (-i)^{2m-h} a_{0,m-h}(0,x') \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+h+1)$$

n'a aucune racine sur les droites $\Re e\lambda = s + \dfrac{1}{p}$ et $\Re e\lambda = 1 + \dfrac{1}{p}$.

Soit $r(x')$ le nombre des racines vérifiant $\Re e\lambda > \max(s+\dfrac{1}{p}, 1+\dfrac{1}{p})$, on suppose que $r(x') = r$ est indépendant de x' et on pose $\chi = m - k + r$.

(A3) Pour tous $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\omega' \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, |\omega'| = 1$, le problème :

$$\begin{cases} L^0(t,x';D_t,\omega')u(t) & = 0 \\ \quad D_t^l u(0) & = 0 \quad , \qquad 0 \le l \le \chi - 1, \end{cases}$$

admet $u \equiv 0$ comme unique solution dans l'espace $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

2.2.3 Théorème principal

Théorème 2.2.3 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \le p,q < +\infty$. Sous les hypothèses (A0)–(A3), pour tout compact K dans $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $u \in B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ à support inclus dans K, on ait*

$$\|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \le C_K \Big\{ \|Lu\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \|u\|_{B_{p,q}^{s+2m-k-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \Big\},$$

où γ_l est l'opérateur des traces sur $t = 0$.

Remarque 2.2.4

1. *Si $\chi = 0$, le terme $\sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}$ n'apparaît pas dans l'inégalité du théorème.*

2. *En prenant $\tau = 0$ et $p = q$, on obtient la régularité dans les espaces de Besov classiques [43]. Si $k = 0$, on trouve les résultats prouvés dans [28] concernant des problèmes elliptiques réguliers. En faisant $k = 1$ et $m = 1$, on obtient l'estimation à priori prouvée dans [31]. Si $s = 0$, $\tau = \dfrac{\lambda}{2(n+1)}$, et $p = q = 2$, on déduit la régularité dans l'espace de Morrey-Campanato local $l^{2,\lambda}$.*

Le lemme suivant est nécessaire pour la suite.

Lemme 2.2.5 (Lemme des dérivées intermédiaires) *Soient s et τ deux nombres réels tels que $\tau \geq 0$, et soit $1 \leq p, q \leq +\infty$. Pour tous $\varepsilon > 0$, $k, m \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $u \in W_k^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$, l'inégalité*

$$\begin{aligned} &\| t^{k-h} D_t^r u \|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s+2m-h-r,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \varepsilon \| t^k D_t^{2m} u \|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon^{-\frac{r+h}{2m-r}} \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

est vérifiée pour $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ et $0 \leq r \leq 2m - h$, avec $r \neq 2m$.

Preuve Il est bien connu selon [45], que si $t^k D_t^{2m} u$ et $t^k u$ appartiennent à $L^p(\mathbb{R})$ alors $t^{k-h} D_t^r u \in L^p(\mathbb{R})$ pour $0 \leq h \leq \min(k, 2m)$ et $0 \leq r \leq 2m - h$ avec $r \neq 2m$, en plus, on a

$$\| t^{k-h} D_t^r u \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \| t^k D_t^{2m} u \|_{L^p(\mathbb{R})} + \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R})}$$

en appliquant l'inégalité précédente à $u(\lambda t)$ avec $\lambda > 0$, on déduit

$$\| t^{k-h} D_t^r u \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \lambda^{2m-h-r} \| t^k D_t^{2m} u \|_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda^{-h-r} \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R})} . \tag{2.2.2}$$

Soit $u \in W_k^{2m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$, on applique l'estimation (2.2.2) à $\Delta_j' u(t,x')$ avec $j \in \mathbb{N}_0$ et $x' \in B_J'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\| t^{k-h} D_t^r \Delta_j' u(\cdot, x') \|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \lambda^{2m-h-r} \| t^k D_t^{2m} \Delta_j' u(\cdot, x') \|_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda^{-h-r} \| t^k \Delta_j' u(\cdot, x') \|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

en remplaçant λ par $\varepsilon^{\frac{1}{2m-h-r}} 2^{-j}$, en intégrant par rapport à $x' \in B_J'$ et en multipliant chaque côté de l'inégalité précédente par $\dfrac{2^{j(s+2m-h-r)}}{|B_J'|^\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{2^{j(s+2m-h-r)}}{|B_J'|^\tau} \| t^{k-h} D_t^r \Delta_j' u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B_J')} \\ &\lesssim \varepsilon \frac{2^{js}}{|B_J'|^\tau} \| t^k D_t^{2m} \Delta_j' u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B_J')} + \varepsilon^{-\frac{h+r}{2m-h-r}} \frac{2^{j(s+2m)}}{|B_J'|^\tau} \| t^k \Delta_j' u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B_J')} \end{aligned}$$

en sommant sur $j \geq J^+$ et en prenant la norme l^q, on déduit le Lemme 2.2.5.

2.3 Les traces

Le théorème suivant permet de caractériser les traces des éléments des espaces $B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ et $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$.

Théorème 2.3.1 *Soient s et τ deux réels tels que $\tau \geq 0$ et soit $1 \leq p, q < +\infty$. Pour $u \in W_{k,loc}^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$ et $l \in \{0, \cdots, 2m-1\}$, la série $\sum_{j\geq 0} D_t^l \Delta_j' u(0,\cdot)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et définit un élément $\gamma_l u$ appartenant à $B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)$.*

En plus, l'application $u \mapsto \gamma_l u$ est continue et surjective de $W_{k,loc}^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$ vers $B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Aussi, il existe un opérateur linéaire continu R_l de $B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)$ vers $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$, dit de relèvement, tel que

$$\gamma_l o R_l = Id_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

En particulier, si $s \geq 0$, l'opérateur γ_l est borné et surjectif de $B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ vers $B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Pour établir ce théorème, il suffit de prouver que pour tout $0 \leq l \leq 2m-1$, on a les deux assertions suivantes :

(1) L'opérateur γ_l est borné de $W^{2m,p}_{k,loc}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ vers $B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$;

(2) Il existe un opérateur de relèvement R_l borné de $B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{2m,p}_{k}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$.

Montrons d'abord la première assertion (1), puisque

$$W^{2m,p}_{k,loc}(\mathbb{R}_+) \subset W^{2m,p}_{loc}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow C^{2m-1}_{loc}(\mathbb{R}_+),$$

alors pour tout entier l tel que $0 \leq l \leq 2m-1$, pour tout $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}_+)$ et $v \in W^{2m,p}_{k}(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\mid D^l_t v(0) \mid \lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \parallel t^{k-h} D^r_t \varphi v \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+)}$$

en remplaçant $v(t)$ par $v(\lambda t)$ avec $\lambda > 0$, on obtient

$$\lambda^l \mid D^l_t v(0) \mid \lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \lambda^{r-k+h-\frac{1}{p}} \parallel t^{k-h} D^r_t \varphi v \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+)} . \tag{2.3.1}$$

Soit $u \in W^{2m,p}_{k}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, pour $j \in \mathbb{N}_0$, on met

$$u_j(t,x') = \Delta'_j u(t,x') \in W^{2m,p}_{k,loc}(\mathbb{R}_+; C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

En appliquant l'inégalité (2.3.1) à u_j tout en prenant $\lambda = 2^{-j}$, intégrant sur B'_J et multipliant les deux côtés de l'inégalité par $\dfrac{2^{j(s+2m-k-\frac{1}{p})}}{\mid B'_J \mid^\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{\mid B'_J \mid^\tau} \parallel D^l_t \Delta'_j u(0,\cdot) \parallel_{L^p(B'_J)} \\ &\qquad \lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \frac{2^{j(s+2m-r-h)}}{\mid B'_J \mid^\tau} \parallel t^{k-h} D^r_t \varphi \Delta'_j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_J)} . \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Puisque φ et Δ'_j commutent, en sommant sur $j \geq J^+$ et en appliquant la norme l^q à chaque côté de l'inégalité (2.3.2), on déduit la première affirmation (1).

Maintenant, soit $u \in B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 \leq l \leq 2m-1$.

Soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0, avec $\varphi_l(t) = \dfrac{t^l}{l!}\varphi_0(t)$, alors $\partial_t^l \varphi_l(0) = 1$ et $\partial_t^k \varphi_l(0) = 0$ pour $k \neq l$, $0 \leq k \leq 2m-1$. Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jl}\varphi_l(2^j t)\Delta_j' u(0,x').$$

La deuxième assertion (2) se déduit de l'estimation suivante

$$\| \tilde{R}_l u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \| u \|_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.3.3}$$

On a

$$t^{k-h} D_t^r \tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jl} \times 2^{jr} \times t^{k-h}(D_t^r \varphi_l)(2^j t)\Delta_j' u(0,x')$$

alors,

$$\Delta_i' t^{k-h} D_t^r \tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j\sim i} 2^{-jl} \times 2^{jr} \times t^{k-h}(D_t^r \varphi_l)(2^j t)\Delta_i'\Delta_j' u(0,x')$$

en intégrant par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$ ensuite par rapport à $x' \in B_J'$, on obtient

$$\| \Delta_i' t^{k-h} D_t^r \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_J')} \lesssim 2^{i(r-l+h-k-\frac{1}{p})} \sum_{j\sim i} \| \Delta_i'\Delta_j' u \|_{L^p(B_J')} .$$

Le Lemme 1.3.7 entraîne

$$\begin{aligned}
&\| \Delta_i' t^{k-h} D_t^r \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_J')} \\
&\lesssim 2^{i(r-l+h-k-\frac{1}{p})} \| \Delta_i' u \|_{L^p(2B_J')} \\
&\quad + 2^{i(r-l+h-k-\frac{1}{p})} \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta_i' u \|_{L^p(F_\nu')}
\end{aligned}$$

en multipliant par $\dfrac{2^{i(s+2m-h-r)}}{| B_J' |^\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{i(s+2m-h-r)}}{| B_J' |^\tau} \| \Delta_i' t^{k-h} D_t^r \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_J')} \\
&\lesssim \frac{2^{i(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{| B_J' |^\tau} \left\{ \| \Delta_i' u \|_{L^p(2B_J')} + \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta_i' u \|_{L^p(F_\nu')} \right\}
\end{aligned}$$

en sommant sur $i \geq J^+$ et en prenant la norme l^q, il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
&\| \tilde{R}_l u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim \frac{1}{| B'_J |^\tau}\left\{ \sum_{i\geq J^+} 2^{iq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \| \Delta'_i u \|^q_{L^p(2B'_J)} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{1}{| B'_J |^\tau}\left\{ \sum_{i\geq J^+} 2^{iq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}\left(\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_\nu)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \frac{1}{| B'_J |^\tau}\left\{ \sum_{i\geq (J-1)^+} 2^{iq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \| \Delta'_i u \|^q_{L^p(2B'_J)} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{1}{| B'_J |^\tau}\left\{ \sum_{i\geq J^+} 2^{iq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}\left(\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_\nu)} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Le terme I_1 est équivalent à $\| u \|_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}$.

Pour I_2, on pose $\mu = \nu + J$. Puisque $| F'_{\mu-J} | \sim 2^{n(\mu-J)}$, on a

$$
\begin{aligned}
I_2^q &\lesssim \frac{1}{| B'_J |^{\tau q}} \sum_{i\geq J^+}\left(\sum_{\mu\geq 1} 2^{n\tau(\mu-J)} \times 2^{-(\mu-J+i)M} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{2^{i(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{| F'_{\mu-J} |^\tau} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_{\mu-J})} \right)^q \\
&\lesssim \sum_{i\geq J^+} 2^{(J-i)Mq} \sum_{\mu\geq 1}\left(2^{\mu(n\tau-M)} \times \frac{2^{i(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{| F'_{\mu-J} |^\tau} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_{\mu-J})} \right)^q .
\end{aligned}
$$

Pour M suffisamment grand, on applique le Lemme 1.3.6, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2^q &\lesssim \sup_{\mu\geq 1} \frac{1}{| F'_{\mu-J} |^{\tau q}} \sum_{i\geq J^+}\left(2^{i(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_{\mu-J})} \right)^q \\
&\lesssim \sup_{\mu\geq 1} \frac{1}{| F'_{\mu-J} |^{\tau q}} \sum_{i\geq (J-\mu+1)^+}\left(2^{i(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_{\mu-J})} \right)^q
\end{aligned}
$$

on en déduit

$$
I_2 \lesssim \| u \|_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}
$$

d'où l'estimation (2.3.3).

Maintenant, en prenant $R_l u = \tilde{R}_l u|_{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ on déduit l'assertion (2), et il est aisé de voir que

$$
\gamma_l o R_l = Id_{B_{p,q}^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}
$$

pour $l \in \{0, \cdots, 2m-1\}$.

2.4 Preuve du Théorème

Sur une classe d'équations différentielles ordinaires.

On considère la classe d'opérateurs différentiels ordinaires définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$L = L(t, D_t) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} P^{2m-h}(D_t)$$

où

$$P^{2m-h}(D_t) = \sum_{j=0}^{2m-h} a_j^{2m-h} D_t^j$$

avec $a_j^{2m-h} \in \mathbb{C}$.

On suppose que :

(C1) Pour tout $z \in \mathbb{R}$, le polynôme $P^{2m}(z)$ admet exactement m racines avec parties imaginaires positives et m racines avec parties imaginaires négatives.

(C2) Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$ et soit $\phi(\lambda) = 0$ l'équation caractéristique associée à l'opérateur L en $t = 0$ telle que

$$\phi(\lambda) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} (-i)^{2m-h} a_{2m-h}^{2m-h} \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + h + 1),$$

qui est aussi l'équation caractéristique de l'opérateur

$$L^0(t, D_t) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} a_{2m-h}^{2m-h} t^{k-h} D_t^{2m-h}.$$

On suppose que l'équation $\phi(\lambda) = 0$ n'admet pas de racines sur les droites : $\Re e(\lambda) = 1 + \dfrac{1}{p}$ et $\Re e(\lambda) = s + \dfrac{1}{p}$ et soit r le nombre des racines qui vérifient $\Re e(\lambda) > \max(1 + \dfrac{1}{p}, s + \dfrac{1}{p})$.

On a le théorème suivant.

Théorème 2.4.1 ([11, 43]) *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p, q < +\infty$. Sous les hypothèses $(C1)$ et $(C2)$. L'opérateur L de $W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+)$ vers $L^p(\mathbb{R}_+)$ et de $V_{p,q}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+)$ vers $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+)$ est un opérateur à indice et son indice est égale à $m-k+r$.*

La preuve du théorème 2.2.3, va se dérouler en deux phases : la première, consiste à établir une proposition qui va permettre de contrôler les dérivées "presque tangentielles" des solutions, ensuite, la deuxième est basée sur le Lemme 2.4.3, et permettra d'estimer les dérivées normales.

Proposition 2.4.2 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p, q < +\infty$. Sous les hypothèses (A0)–(A3), pour tout compact K de $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $u \in W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ avec $\operatorname{supp} u \subset K$, on ait*

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq & C_K \Big\{ \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|_{B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ & + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big\}.\end{aligned}$$

Preuve.

L'idée de la preuve s'inspire de celle utilisée dans [11, 27, 28], par une technique de Korn on décompose l'opérateur L de manière à obtenir un opérateur à coefficients constants L^0 que nous traiterons en premier lieu, alors on écrit

$$L = L^0 + L^1 + L^2$$

où

$$\begin{aligned} L^0(t,x';D_t,D_{x'}) &= t^k D_t^{2m} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} a_{\alpha' j}(0,0) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j, \\ L^1(t,x';D_t,D_{x'}) &= \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0) \Big) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j, \\ L^2(t,x';D_t,D_{x'}) &= \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{|\alpha'|+j=0}^{2m-h-1} a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j. \end{aligned}$$

On note $\gamma = (\gamma_l)_{0\leq l\leq \chi-1}$. Suivant [11] on a le résultat suivant.

Sous les hypothèses (A0)–(A3) et à l'aide du Théorème 2.4.1, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'opérateur $(L^0(t,0;D_t,\xi'),\gamma)$ est inversible à gauche de $W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+)$ vers $L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\chi$. Si $K_{\xi'}$ désigne son inverse, alors l'application $\xi' \mapsto K_{\xi'}$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vers $\mathcal{L}\Big(L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\chi; W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+)\Big)$ et pour tout multi-indice α', il existe $C_{\alpha'} > 0$ tel que pour tout ξ' avec $\frac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$ et pour tout $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\chi$, on ait

$$\|D^{\alpha'}_{\xi'} K_{\xi'}(f,g)\|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+)} \leq C_{\alpha'} \|(f,g)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}. \tag{2.4.1}$$

Tout d'abord, on prouve que pour $N \geq 1$ suffisamment grand, et pour tout $B'_J \subset \mathbb{R}^n$, l'estimation

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^p(B'_J;W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+))} \\ &\lesssim \|L^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1}\|\gamma_l u\|_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{1}{p}}\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \\ &\quad\times\Big(\|L^0u\|_{L^p(F'_\nu;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1}\|\gamma_l u\|_{L^p(F'_\nu)}\Big) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

est vraie pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+))$ à spectre tangentiel inclus dans l'anneau $\frac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$.

Tout d'abord, on applique l'opérateur $(L^0(t,0;D_t,\xi'),\gamma(\xi'))$ à la relation

$$\widehat{u}(\cdot,\xi') = \int_{y'\in\mathbb{R}^n} e^{-iy'\cdot\xi'}u(\cdot,y')dy'$$

on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} L^0(t,0;D_t,\xi')\widehat{u}(\cdot,\xi') & = & \widehat{L^0u}(\cdot,\xi') = \int e^{-iy'\cdot\xi'}L^0u(\cdot,y')dy' \\ \gamma_l\widehat{u}(\xi') & = & \widehat{\gamma_l u}(\xi') = \int e^{-iy'\cdot\xi'}\gamma_l u(y')dy', \end{array}\right. \tag{2.4.3}$$

pour $l \in \{0,1,\cdots,\chi-1\}$.

En appliquant $K_{\xi'}$ au système (2.4.3), on déduit

$$\widehat{u}(\cdot,\xi') = \int e^{-iy'\cdot\xi'}K_{\xi'}\Big(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)dy'.$$

Soit $\phi(\xi') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur $\frac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$ et avec support inclus dans un anneau, donc

$$\begin{aligned} &u(\cdot,x') \\ &= \int e^{ix'\cdot\xi'}\phi(\xi')\widehat{u}(\cdot,\xi')\frac{d\xi'}{(2\pi)^n} \\ &= \int\int e^{i(x'-y')\cdot\xi'}\Big\{\phi(\xi')K_{\xi'}\Big(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\}dy'\frac{d\xi'}{(2\pi)^n} \\ &= \int\int\frac{e^{i(x'-y')\cdot\xi'}}{\Big(1+|x'-y'|^2\Big)^N}\Big(I-\Delta_{\xi'}\Big)^N\Big\{\phi(\xi')K_{\xi'}\Big(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\}dy'\frac{d\xi'}{(2\pi)^n} \end{aligned}$$

le résultat (2.4.1) entraîne

$$\begin{aligned} &\|u(\cdot,x')\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq C_N\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\Big\|\Big(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy' \end{aligned}$$

en intégrant par rapport à x' sur B'_J, on obtient

$$\|u\|_{L^p(B'_J;W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+))}$$
$$\leq C_N\left\{\int_{B'_J}\left(\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\left\|\left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy'\right)^p dx'\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, on décompose $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante

$$\mathbb{R}^n = 2B'_J \cup \bigcup_{\nu\geq -J+1} F'_\nu.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p(B'_J;W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+))}\\
&\lesssim \left\{\int_{B'_J}\left(\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\chi_{2B'_J}(y')\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\times\left\|\left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy'\right)^p dx'\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad + \left\{\int_{B'_J}\left(\sum_{\nu\geq -J+1}\int_{y'\in F'_\nu}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\times\left\|\left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy'\right)^p dx'\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim I'_1 + I'_2.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Le premier terme I'_1 est une norme L^p du produit de convolution entre une fonction $L^1(\mathbb{R}^n)$ (pour N assez grand) et une fonction $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors de l'inégalité de Young s'ensuit

$$I'_1 \leq C_N\left\{\|L^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \|\gamma u\|_{L^p(2B'_J)}\right\}. \tag{2.4.5}$$

Pour I'_2, vu que $x'\in B'_J$ et $y'\in F'_\nu$ on a $|x'-y'|\sim 2^\nu$, alors

$$I'_2 \lesssim |B'_J|^{\frac{1}{p}}\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-2\nu N}\int_{y'\in F'_\nu}\left\|\left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy'$$

l'inégalité de Hölder implique

$$\begin{aligned}
&I'_2\\
&\lesssim |B'_J|^{\frac{1}{p}}\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{y'\in F'_\nu}\left\|\left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi}dy'\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Les estimations (2.4.4), (2.4.5) et (2.4.6) entraînent

$$\|u\|_{L^p(B'_J;W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+))}$$

$$\lesssim \|L^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{1}{p}} \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \tag{2.4.7}$$
$$\times \left(\int_{y'\in F'_\nu} \left\| \left(L^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\right)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi} dy'\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $u \in W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ avec support inclus dans un compact K de $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on met $u_j(t,x') = \Delta'_j u(2^{-j}t, 2^{-j}x')$, alors $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+))$ pour $j \geq 1$, avec spectre tangentiel inclus dans l'anneau $\{\frac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2\}$.

On a

$$\begin{cases} (L^0u)_j &=& 2^{j(2m-k)}L^0u_j \\ (\gamma_l u)_j &=& 2^{jl}\gamma_l u_j. \end{cases} \tag{2.4.8}$$

En appliquant l'estimation (2.4.7) à chaque u_j avec $j \geq 1$, on obtient

$$\|u_j\|^q_{L^p(B'_J;W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+))}$$
$$\lesssim \|L^0u_j\|^q_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1}\|\gamma_l u_j\|^q_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{q}{p}}\Bigg\{ \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\times \left(\|L^0u_j\|_{L^p(F'_\nu;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1}\|\gamma_l u_j\|_{L^p(F'_\nu)}\right)\Bigg\}^q$$

selon (2.4.8), on a

$$\|u_j\|^q_{L^p(B'_J;W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+))}$$
$$\lesssim 2^{-jq(2m-k)}\|(L^0u)_j\|^q_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{-jlq}\|(\gamma_l u)_j\|^q_{L^p(2B'_J)}$$
$$+ |B'_J|^{\frac{q}{p}}\Bigg\{ \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}}\Big(2^{-j(2m-k)}\|(L^0u)_j\|_{L^p(F'_\nu;L^p(\mathbb{R}_+))}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{-jl}\|(\gamma_l u)_j\|_{L^p(F'_\nu)}\Big)\Bigg\}^q$$

donc,

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)}\sum_{r=0}^{2m-h} 2^{jq(k-h-r)} \parallel t^{k-h}D^r_t\Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}B'_J)}$$
$$\lesssim 2^{-jq(2m-k)}\|\Delta'_jL^0u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j+1}B'_J)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{-jq(l+\frac{1}{p})}\|\Delta'_j\gamma_l u\|^q_{L^p(2^{-j+1}B'_J)}$$

$$+ |B'_J|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ \sum_{\nu \geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{-j(2m-k)} \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j} F'_\nu)}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{-j(l+\frac{1}{p})} \parallel \Delta'_j \gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j} F'_\nu)} \Big) \Bigg\}^q$$

en multipliant les deux côtés par $2^{jq(s+2m-k)}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} 2^{jq(s+2m-h-r)} \parallel t^{k-h} D_t^r \Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j} B'_J)} \\
&\lesssim 2^{jqs} \|\Delta'_j L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j+1} B'_J)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{jq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(2^{-j+1} B'_J)} \\
&\quad + |B'_J|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ \sum_{\nu \geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{js} \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j} F'_\nu)} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \parallel \Delta'_j \gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j} F'_\nu)} \Big) \Bigg\}^q \\
&\lesssim I''_1 + I''_2
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

où

$$I''_1 = 2^{jqs} \|\Delta'_j L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j+1} B'_J)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{jq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(2^{-j+1} B'_J)}$$

et

$$I''_2 = |B'_J|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ \sum_{\nu \geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{js} \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2^{-j} F'_\nu)}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \parallel \Delta'_j \gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j} F'_\nu)} \Big) \Bigg\}^q.$$

On met $K = J + j$ et $\mu = \nu - j$, on obtient d'une part

$$I''_1 = 2^{jqs} \|\Delta'_j L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2B'_K)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{jq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(2B'_K)}. \tag{2.4.10}$$

D'une autre part, puisque $|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \sim 2^{n\nu(1-\frac{1}{p})}$

$$I''_2 \leq |B'_J|^{\frac{q}{p}} 2^{jq(n(1-\frac{1}{p})-2N)} \Bigg\{ \sum_{\mu \geq -K+1} 2^{\mu(n(1-\frac{1}{p})-2N)} \Big(2^{js} \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_\mu)}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_\mu)} \Big) \Bigg\}^q$$

en prenant $\mu' = \mu + K$,

$$I_2'' \leq |B'_J|^{\frac{q}{p}} 2^{(j-K)q(n(1-\frac{1}{p})-2N)} 2^{-Kn\tau q} \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \times \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-K})} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \frac{2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-K})} \Big) \Bigg\}^q$$

alors,

$$I_2'' \leq 2^{(j-K)q(n-2N)} 2^{-Kn\tau q} \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \times \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-K})} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \frac{2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-K})} \Big) \Bigg\}^q . \tag{2.4.11}$$

En combinant les inégalités (2.4.9), (2.4.10) et (2.4.11), en multipliant par $\frac{1}{|B'_K|^{\tau q}}$ et en sommant sur $j \geq \max(K,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \sum_{j \geq \max(K,1)} \frac{2^{jq(s+2m-h-r)}}{|B'_K|^{\tau q}} \| t^{k-h} D_t^r \Delta'_j u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\
&\lesssim \sum_{j \geq \max(K,1)} \frac{2^{jqs}}{|B'_K|^{\tau q}} \|\Delta'_j L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2B'_K)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \sum_{j \geq \max(K,1)} \frac{2^{jq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{|B'_K|^{\tau q}} \\
&\quad \times \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(2B'_K)} + \sum_{j \geq \max(K,1)} \frac{2^{-Kn\tau q}}{|B'_K|^{\tau q}} 2^{(j-K)(n-2N)q} \\
&\quad \times \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \|\Delta'_j L^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-K})} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\chi-1} \frac{2^{j(s+2m-k-l-\frac{1}{p})}}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau}} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-K})} \Big) \Bigg\}^q
\end{aligned}$$

puisque $K^+ \leq \max(K,1)$, et grâce au Lemme 1.3.6, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \sum_{j \geq \max(K,1)} \frac{2^{jq(s+2m-h-r)}}{|B'_K|^{\tau q}} \| t^{k-h} D_t^r \Delta'_j u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\
&\lesssim \|L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|^q_{B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\mu' \geq 1} \frac{1}{|F'_{\mu'-K}|^{\tau q}} \\
&\quad \times \sum_{j \geq K^+} \Big(2^{jqs} \|\Delta'_j L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-K})} + \sum_{l=0}^{\chi-1} 2^{jq(s+2m-k-l-\frac{1}{p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(F'_{\mu'-K})} \Big).
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

On ajoute les termes associés à $j=0$, puis on remplace la condition au côté droit de (2.4.12) $j \geq K^+$ par $j \geq (K-\mu'+1)^+$, on obtient

$$\|u\|^q_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq C_K \Big\{ \|L^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{\chi-1} \|\gamma_l u\|^q_{B^{s+2m-k-l-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big\} + R_0 \tag{2.4.13}$$

où,

$$R_0 = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{r=0}^{2m-h} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^{k-h} D^r_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} .$$

Maintenant, on va estimer le "reste" R_0.

Premièrement, on écrit le terme R_0 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_0 = & \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{r \leq 2m-h \\ r \neq 2m}} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^{k-h} D^r_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\ & + \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^k D^{2m}_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} . \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

On applique le Lemme 2.2.5 au premier terme à droite de (2.4.14), on déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{r \leq 2m-h \\ r \neq 2m}} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^{k-h} D^r_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\ & \lesssim \varepsilon \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^k D^{2m}_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} + \varepsilon^{-\frac{r+h}{2m-h}} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^k \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{supp} u \subset K$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{r \leq 2m-h \\ r \neq 2m}} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^{k-h} D^r_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\ & \lesssim \varepsilon \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^k D^{2m}_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} + C_{K,\varepsilon} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{r \leq 2m-h \\ r \neq 2m}} \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^{k-h} D^r_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} \\ & \lesssim \varepsilon \frac{1}{|B'_K|^{\tau q}} \parallel t^k D^{2m}_t \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_K)} + C_{K,\varepsilon} \parallel u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Pour le second terme à droite de (2.4.14), on a

$$L^0(t,x';D_t,D_{x'}) = t^k D_t^{2m} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} a_{\alpha' j}(0,0) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j$$

alors,

$$t^k D_t^{2m} u = L^0 u - \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} a_{\alpha' j}(0,0) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

en appliquant l'opérateur Δ_0', on obtient

$$\Delta_0' t^k D_t^{2m} u = \Delta_0' L^0 u - \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \Delta_0' t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} a_{\alpha' j}(0,0) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

donc,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B_K'|^\tau} \parallel \Delta_0' t^k D_t^{2m} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \\ &\lesssim \frac{1}{|B_K'|^\tau} \parallel \Delta_0' L^0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \\ &\quad + \frac{1}{|B_K'|^\tau} \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{j\leq 2m-h \\ j\neq 2m}} \parallel \Delta_0' t^{k-h} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \end{aligned}$$

le Lemme 2.2.5 implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B_K'|^\tau} \parallel \Delta_0' t^k D_t^{2m} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \\ &\lesssim \parallel L^0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon \frac{1}{|B_K'|^\tau} \parallel t^k D_t^{2m} \Delta_0' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \\ &\quad + \varepsilon^{-\frac{j+h}{2m-h}} \parallel t^k \Delta_0' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')} \end{aligned}$$

vu que $\operatorname{supp} u \subset K$, alors

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B_K'|^{\tau q}} \parallel t^k D_t^{2m} \Delta_0' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B_K')}^q \\ &\lesssim \parallel L^0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}^q + C_{K,\varepsilon} \parallel u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+2m-k-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}^q . \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Des inégalités (2.4.13)–(2.4.16) résulte la Proposition 2.4.2 pour l'opérateur L^0.

Maintenant, on estime les termes de l'opérateur L^1, on a

$$L^1(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) D_{x'}^{\alpha'} D_t^j$$

alors,

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\neq 2m}} \| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

le Lemme 1.3.10 implique

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \| t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\quad + C \| t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \epsilon \| t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C \| t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

pour $0 \leq h \leq \min(k,2m)$, $0 \leq j \leq 2m-h$ avec $j \neq 2m$ et pour u à support inclus dans une demi-boule de centre $(0,0)$ et de rayon ϵ suffisamment petit. Ensuite, puisque selon le Lemme 1.3.8, l'opérateur $D^{\alpha'}_{x'}$ opère continûment de $L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ vers $L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, alors

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \epsilon \| t^{k-h} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C \| t^{k-h} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

on utilise le Lemme 2.2.5 pour estimer le dernier terme de l'inégalité ci-dessus, on déduit

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \epsilon \| t^{k-h} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C\Big(\varepsilon_0 \| t^k D^{2m}_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\quad + \varepsilon_0^{-\frac{j+h}{2m-j}} \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big)\end{aligned}$$

le Lemme 1.3.11 implique

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim \epsilon \| t^{k-h} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C\Big(\varepsilon_0 \| t^k D^{2m}_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \qquad (2.4.17)\\ &\quad + C_{\varepsilon_0}\varepsilon_1 \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_{\varepsilon_1,K} \| u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big).\end{aligned}$$

Enfin, pour estimer les termes de l'opérateur L^2, on applique le Lemme 2.2.5, on a

$$L^2(t,x';D_t,D_{x'}) = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{|\alpha'|+j=0}^{2m-h-1} a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j$$

puisque $a_{\alpha',j}(t,x') \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$,

$$\begin{aligned}
&\| L^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\alpha'|+j=0}^{2m-h-1} \| a_{\alpha' j}(t,x') t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\leq C_K \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\alpha'|+j\leq 2m-h-1} \| t^{k-h} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\leq C_K \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\alpha'|+j\leq 2m-h-1} \| t^{k-h} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\leq C_K \Big\{ \varepsilon \| t^k D_t^{2m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_\varepsilon \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big\}
\end{aligned}$$

le Lemme 1.3.11 entraînent

$$\begin{aligned}
&\| L^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim C_K \varepsilon \| t^k D_t^{2m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_{K,\varepsilon} \Big(\varepsilon_1 \| t^k u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + C_{\varepsilon_1} \| u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big).
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Les inégalités (2.4.17) et (2.4.18) achèvent la preuve pour l'opérateur $L = L^0 + L^1 + L^2$ et donc celle de la Proposition 2.4.2, pour des u à supports assez petits autour du point $(0,0)$ de K. De la même façon, on peut établir l'estimation au voisinage d'un point $(0,x_0)$ de K. Par ailleurs, l'hypothèse $(A0)$, entraîne une telle estimation au voisinage d'un point (t_0,x_0), $t_0 \neq 0$. Enfin, l'inégalité à priori générale est obtenue par une partition de l'unité.

Pour terminer la preuve du Théorème 2.2.3, on a besoin du lemme suivant, qui a pour objectif d'obtenir la régularité en variable normale des solutions.

Lemme 2.4.3 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p,q < +\infty$. Pour tout compact K de $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $u \in B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec* $\operatorname{supp} u \subset K$, *on ait*

$$\|u\|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$\leq C_K\Big\{\|Lu\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|u\|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\Big\}.$$

Preuve. Dans un premier temps, on se limitera au cas $0 \leq s < 1$ pour pouvoir appliquer le Lemme 1.3.9. Ensuite, on procède par un raisonnement par récurrence afin de montrer le lemme pour tout $s \geq 0$.

Cas $0 \leq s < 1$ **:**

On utilise la même décomposition de l'opérateur L que précédemment, on écrit $L = L^0 + L^1 + L^2$, et nous prouvons le lemme d'abord pour L^0. Pour cela, on estime les différents termes de la norme de u dans $B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. On sait que,

$$\| u \|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \equiv \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{|\alpha'|+j\leq 2m-h} \| t^{k-h} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s+2m-(|\alpha'|+j)-h,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

d'après le Lemme 1.3.8, puisque $D^{\alpha'}_{x'}$ opère continûment de $B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ vers $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, on obtient

$$\begin{aligned}\| u \|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} &\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j\leq 2m-h-|\alpha'|} \| t^{k-h} D^j_t u \|_{B^{s+2m-j-h,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j\leq 2m-h} \| t^{k-h} D^j_t u \|_{B^{s+2m-j-h,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .\end{aligned}$$

Puis, on décompose

$$\begin{aligned}\| u \|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \lesssim & \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j\leq 2m-h-1} \| t^{k-h} D^j_t u \|_{B^{s+2m-j-h,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &+ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D^{2m-h}_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Pour le premier terme à droite de l'inégalité (2.4.19), on se fixe à $j = 2m-h-1$ et on estime le terme : $\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D^{2m-h-1}_t u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$. Il y a deux cas à examiner.

Premièrement, on suppose que $\min(k, 2m) = k$, alors

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{k} \| t^{k-h} D^{2m-h-1}_t u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &= \| D^{2m-k-1}_t u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{h=0}^{k-1} \| t^{k-h} D^{2m-h-1}_t u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Pour borner le premier terme de (2.4.20), on écrit

$$\| D_t^{2m-k-1} u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \equiv \| D_{x'} D_t^{2m-k-1} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| D_t D_t^{2m-k-1} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

le Lemme 1.3.9 entraîne

$$\begin{aligned}
&\| D_t^{2m-k-1} u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| D_{x'} D_t^{2m-k} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \| D_{x'} D_t^{2m-k-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| D_t^{2m-k} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| D_t^{2m-k} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \| D_t^{2m-k-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| D_t^{2m-k} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| u \|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \| D_t^{2m-k} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \,.
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Pour le second terme de (2.4.20), on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{k-1} \| t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\equiv \sum_{h=0}^{k-1} \Big\{ \| D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| D_t (t^{k-h} D_t^{2m-h-1}) u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\} \\
&\lesssim \sum_{h=0}^{k-1} \Big\{ \| D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| t^{k-h-1} D_t^{2m-h-1} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\quad + \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\}
\end{aligned}$$

en appliquant une autre fois le Lemme 1.3.9, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{k-1} \| t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \sum_{h=0}^{k-1} \Big\{ \| D_t \Big(D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \Big) \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big\} + \sum_{h=0}^{k} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| u \|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{h=0}^{k} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \,.
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Les estimations (2.4.20)–(2.4.22) entraînent

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{k} \| t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\lesssim \| u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{h=0}^{k} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} .
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Maintenant, on suppose que $\min(k, 2m) = 2m$

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{2m} \| t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\equiv \sum_{h=0}^{2m-1} \left\{ \| D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| D_t (t^{k-h} D_t^{2m-h-1}) u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \right\} \\
&\lesssim \sum_{h=0}^{2m-1} \left\{ \| D_{x'} t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| t^{k-h-1} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \right. \\
&\quad \left. + \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \right\}
\end{aligned}$$

le Lemme 1.3.9, implique

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=0}^{2m} \| t^{k-h} D_t^{2m-h-1} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\lesssim \| u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{h=0}^{2m} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} .
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

D'après les inégalités (2.4.19), (2.4.23) et (2.4.24), on déduit l'estimation

$$\begin{aligned}
\| u \|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim &\| u \|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\
&+ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

pour $j = 2m - h - 1$. On procède de façon similaire pour tous les autres termes de (2.4.19).

Il reste maintenant à estimer le terme : $\displaystyle\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$ de (2.4.19). La méthode utilisée ici est analogue à celle dans [31], en effet, puisque supp $u \subset K$, on a $v \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, si et seulement si, $v \in L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$ et $v \in L^p(\mathbb{R}^n; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+))$. Alors

$$\| v \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \equiv \| v \|_{L^p(\mathbb{R}_+, B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \| v \|_{L^p(\mathbb{R}^n, B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+))} .$$

On a

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}. \tag{2.4.26}$$

En retournant à l'équation différentielle ordinaire et en utilisant le Théorème 2.4.1, on déduit que l'opérateur $\Big(L^0(0,t;e_1,D_t),\gamma\Big)$, $e_1=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$, est inversible de $V^{s+2m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ vers $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^\chi$. Alors, pour tout $v\in V^{s+2m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\|v\|_{V^{s+2m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|L^0(0,t;e_1,D_t)v\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} |D_t^l v(0)|. \tag{2.4.27}$$

On écrit

$$\begin{aligned} L^0(0,t;e_1,D_t)u =& L^0u + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{\alpha_1+j=2m-h\\ j\leq 2m-h-1}} a_{\alpha_1,j}(0,0)D_t^j u \\ &- \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\leq 2m-h-1}} a_{\alpha' j}(0,0)D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \end{aligned}$$

selon (2.4.27), on a

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} \\ &\lesssim \| L^0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \Bigg\{ \sum_{j\leq 2m-h-1} \| t^{k-h} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} \\ &\quad + \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\leq 2m-h-1}} \| t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} \Bigg\} \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} &\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} \\ &\lesssim \|L^0 u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \Bigg\{ \sum_{j\leq 2m-h-1} \| t^{k-h} D_t^j u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\quad + \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\leq 2m-h-1}} \| t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Bigg\} \end{aligned}$$

alors,

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))}$$

$$\lesssim \|L^0u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \Big\{ \sum_{j\leq 2m-h-1} \| \, t^{k-h} D_t^j u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$+ \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\leq 2m-h-1}} \| \, t^{k-h} D_t^j u \, \|_{B^{s+2m-h-j,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\}$$

ensuite,

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| \, t^{k-h} D_t^{2m-h} u \, \|_{L^p(\mathbb{R}^n; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))}$$

$$\lesssim \|L^0u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{j\leq 2m-h-1} \| \, t^{k-h} D_t^j u \, \|_{B^{s+2m-j-h,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

alors,

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| \, t^{k-h} D_t^{2m-h} u \, \|_{L^p(\mathbb{R}^n; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}_+))} \lesssim \|L^0u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}. \tag{2.4.28}$$

Ensemble (2.4.26) et (2.4.28) impliquent

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| \, t^{k-h} D_t^{2m-h} u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \lesssim \|L^0u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}. \tag{2.4.29}$$

En prenant en compte les estimations (2.4.25) et (2.4.29), on déduit le Lemme 2.4.3 pour l'opérateur L^0 et pour $s \in [0, 1[$.

Pour $L = L^0 + L^1$, on évalue les termes de l'opérateur L^1 dans $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, pour cela, on applique le Lemme 1.3.10 en supposant une autre fois que le support de u est inclus dans une demi-boule de centre $(0, 0)$ et de rayon ϵ assez petit, on en déduit alors

$$\| \, L^1 u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \| \Big(a_{\alpha' j}(t, x') - a_{\alpha' j}(0, 0)\Big) t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \| \Big(a_{\alpha' j}(t, x') - a_{\alpha' j}(0, 0)\Big) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \| \, t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$+ C \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \| \, t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \, \|_{B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$\lesssim \epsilon \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h \\ j\neq 2m}} \| \, t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$+C\sum_{h=0}^{\min(k,2m)}\sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\neq 2m}}\| t^{k-h}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

$$\lesssim \epsilon\sum_{h=0}^{\min(k,2m)}\sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\neq 2m}}\| t^{k-h}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} +C\| u\|_{B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .$$

Ainsi, le Lemme 2.4.3 est démontré pour l'opérateur $L = L^0 + L^1$.

Enfin, de la même façon, on estime les termes de L^2u dans $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, on a

$$\| L^2u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\lesssim \sum_{h=0}^{\min(k,2m)}\sum_{|\alpha'|+j\leq 2m-h-1}\| a_{\alpha' j}(t,x')t^{k-h}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)},$$

puisque $\operatorname{supp} u\subset K$

$$\begin{aligned}\| L^2u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} &\leq C_K\sum_{h=0}^{\min(k,2m)}\sum_{|\alpha'|+j\leq 2m-h-1}\| t^{k-h}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\\ &\leq C_K\| u\|_{B^{s+2m-k-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .\end{aligned}$$

Le Lemme 2.4.3 est donc prouvé pour des u à supports suffisamment petits autour du point (0,0). Comme argumenté précédemment, l'estimation à priori générale reste vraie par une partition de l'unité.

Cas : $s\geq 1$.

On pose $s = r+\sigma$, tels que r est un entier positif et $0\leq\sigma<1$. On procède par récurrence sur r. On vient de prouver que c'est vrai pour $r = 0$ (i.e. $0\leq s<1$), on suppose que l'inégalité est vraie pour tout r, (i.e. tout s) :

$$\|u\|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leq C_K\Big\{\|Lu\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+\|u\|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\} \tag{2.4.30}$$

et on prouve qu'elle reste encore vraie pour $r+1$ (*i.e.* $s+1$), c'est à dire

$$\|u\|_{B^{s+1+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leq C_K\Big\{\|Lu\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+\|u\|_{W^{2m,p}_k(\mathbb{R}_+;B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\}. \tag{2.4.31}$$

Remarquons que $u\in B^{s+1+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, si et seulement si $u\in B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec $D_{x_i}u\in B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ pour $i = 1,\cdots,n$ et $t^{k-h}D_t^{2m-h}u\in B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ pour $h = 0,1,\cdots,\min(k,2m)$, en plus on a

$$\|u\|_{B^{s+1+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leq C_K\Big\{\|u\|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+\|D_{x_i}u\|_{B^{s+2m,\tau}_{p,q,k}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \tag{2.4.32}$$

$$+ \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \Big\}.$$

Afin de montrer l'inégalité (2.4.31), on va contrôler chaque terme se trouvant à droite de l'estimation (2.4.32). Pour ce faire, afin d'estimer le second terme, on applique l'hypothèse de récurrence (2.4.30) à $D_{x_i}u$, $i = 1, \cdots, n$, on obtient

$$\|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \Big\{ \|L(D_{x_i}u)\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|D_{x_i}u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big\}. \quad (2.4.33)$$

On a

$$L(D_{x_i}u) = D_{x_i}(Lu) - [L; D_{x_i}]u \quad (2.4.34)$$

où

$$[L; D_{x_i}]u = \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} t^{k-h} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq 2m-h \\ j\neq 2m}} \Big(D_{x_i}a_{\alpha' j}\Big)(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u.$$

On applique la norme dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ à (2.4.34), on obtient par l'inégalité triangulaire

$$\| L(D_{x_i}u) \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim \| D_{x_i}(Lu) \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| [L; D_{x_i}]u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$$

on utilise ensuite le Lemme 1.3.10, pour évaluer la norme $\| [L; D_{x_i}]u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$, on déduit

$$\| L(D_{x_i}u) \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \Big\{ \| Lu \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| u \|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \Big\}. \quad (2.4.35)$$

En substituant (2.4.33) et (2.4.35), il vient

$$\begin{aligned} &\|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\ &\leq C_K \Big\{ \| Lu \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| u \|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big\} \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Pour estimer le terme $\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$ de (2.4.32), on procède de la même manière que pour le cas $0 \leq s < 1$. En effet, on utilise la même décomposition de L : $L = L^0 + L^1 + L^2$, et on considère l'opérateur L^0 en premier.

Notons que si $\operatorname{supp} v \subset K$, alors $v \in B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ si et seulement si $v \in L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))$ et $v \in L^p(\mathbb{R}^n; B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+))$. Alors, pour tout $v \in V_{p,q}^{s+1+2m,\tau}(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\|v\|_{V_{p,q}^{s+1+2m,\tau}(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|L^0(0,t;e_1,D_t)v\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+)} + \sum_{l=0}^{\chi-1} |D_t^l v(0)|.$$

Par un raisonnement similaire au précédent, on déduit

$$\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}. \tag{2.4.37}$$

Et

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+))}\\ &\lesssim \|L^0 u\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|D_{x_i} u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1}))}.\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Ensemble (2.4.37) et (2.4.38) entraînent

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\lesssim \|L^0 u\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|D_{x_i} u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1}))}\\ &\quad + \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Pour L_1, le Lemme 1.3.10 implique

$$\begin{aligned}&\| L^1 u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\lesssim \varepsilon \sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \sum_{\substack{|\alpha'|+j=2m-h\\ j\neq 2m}} \| t^{k-h} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}.\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Finalement, l'opérateur L_2 peut être majoré comme suit

$$\| L^2 u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim \|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}. \tag{2.4.41}$$

En combinant les estimations (2.4.39), (2.4.40) et (2.4.41), on conclut que

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{\min(k,2m)} \| t^{k-h} D_t^{2m-h} u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\lesssim \|Lu\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|D_{x_i} u\|_{B_{p,q,k}^{s+2m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1}))}\\ &\quad + \|u\|_{W_k^{2m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned} \tag{2.4.42}$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Tenant en compte les inégalités (2.4.30), (2.4.32), (2.4.36) et (2.4.42) on déduit le Lemme 2.4.3 pour tout $s \geq 0$.

Finalement, le Théorème 2.2.3 est une conséquence immédiate de la Proposition 2.4.2 et du Lemme 2.4.3.

2.5 Exemples

Pour éclaircir les résultats de ce chapitre, nous allons appliquer le Théorème 2.2.3 sur quelques modèles simples de l'opérateur L donnés dans $\mathbb{R}^2_+$.

(i) Comme il est mentionné dans la remarque 2.2.4, si $k = 0$, on obtient le Théorème 2.2.3 pour des problèmes aux limites elliptiques réguliers [28]. Si en plus, on ajoute $2m = 2$, on a l'exemple défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ suivant.

Si u est solution du problème

$$\begin{cases} u & \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ -\Delta u = f & \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ \gamma_0 u \ = g & \in B^{s+2-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

alors $u \in B^{s+2,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+)$.

(ii) Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}(t, x; D_t, D_x)u = t(D_t^2 + D_x^2)u + \lambda D_t u + \mu D_x u,$$

où $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Si $\mu \neq \pm(2p + i\lambda)$, $p \in \mathbb{N}$, et $\Im m(\lambda) > max(1 + \dfrac{1}{p}, s + \dfrac{1}{p})$, et si u est solution du problème

$$\begin{cases} u & \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ \mathcal{L}u \ = f & \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ \gamma_0 u = g & \in B^{s+1-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

alors $u \in B^{s+2,\tau}_{p,q,1,loc}(\mathbb{R}^2_+)$, (i.e., $u \in B^{s+1,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ tel que $tD_t^2 u$ et $tD_x^2 u \in B^{s,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$).

(iii) Si on choisit dans L, $2m = 2$ et $k = 1$, on obtient l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ défini sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &\equiv \tilde{\mathcal{L}}(t, x'; D_t, D_{x'}) \\ &= tD_t^2 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(t, x')tD_{x_j}D_{x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x')tD_{x_j}D_t + \sum_{j=1}^{n} c_j(t, x')D_{x_j} \end{aligned}$$

$$+ d(t,x')D_t + e(t,x').$$

qui est l'opérateur que nous avons étudié dans [31], ainsi, ce chapitre généralise ce résultat.

Chapitre 3

Étude de la classe d'opérateurs M

Sommaire

3.1 Introduction

Ce chapitre aborde une autre classe d'opérateurs linéaires, elliptiques et dégénérés, d'ordre supérieur, et présente un résultat de régularité des solutions des problèmes aux limites associés à cette classe dans les espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$, à partir d'une estimation à priori. On considère alors tout au long de ce chapitre, la classe d'opérateurs

M, définie comme dans (0.0.2) par :

$$M \equiv M(t, x'; D_t, D_{x'}) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m}} a_{\alpha' j}(t, x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j \rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j.$$

Les résultats montrés dans cette partie sont basés sur [26] et ils prolongent les travaux réalisés dans les espaces de Hölder C^s, de Sobolev H^s et les espaces de Besov classiques $B_{p,q}^s$ à un cadre fonctionnel plus général.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : nous consacrons la seconde section, d'abord, à la construction des espaces à poids nécessaires pour élaborer nos résultats, ensuite nous posons les hypothèses qui nous permettront d'énoncer le théorème de régularité. La troisième section sera dédiée à la définition des traces des éléments dans les espaces à poids considérés. La quatrième section fera l'objet de la preuve du théorème principal. Enfin, dans la cinquième section, nous terminons le chapitre par quelques exemples.

3.2 Définitions, hypothèses et résultats

3.2.1 Définitions

On introduit les définitions des espaces de Sobolev et de type Besov à poids, nécessaires à l'étude de l'opérateur M.

Définition 3.2.1 *On considère : $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, +\infty)$, $p, q \in [1, +\infty)$, $k, j, m \in \mathbb{N}_0$ et $\delta \in [1, +\infty)$ tels que $-m + \delta m \in \mathbb{N}_0$.*

- ***Espaces de Sobolev à poids.***
  On désigne par $W_\delta^{m,p}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $u \in W^{m,p}(\mathbb{R})$ telles que $t^{-m+\delta k+j} D_t^j u \in L^p(\mathbb{R})$, pour $0 \leq k + j \leq m$ et $-m + \delta k + j \in \mathbb{N}_0$. Cet espace est muni de sa norme naturelle :

$$\| u \|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R})} \equiv \sum_{\substack{k+j\leq m \\ -m+\delta k+j \in \mathbb{N}_0}} \| t^{-m+\delta k+j} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R})} + \sum_{j=0}^{m} \| D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R})} .$$

- ***Espaces de type Besov à poids anisotropes.***

  Comme au Chapitre 3, pour pouvoir traiter de manière séparée la régularité en toutes les variables et la régularité "presque tangentielle" des solutions, on utilisera l'espace de type Besov anisotrope avec poids suivant.

  On désigne par $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ *l'espace des fonctions* $u \in L^p(\mathbb{R}; B^{s+\frac{m}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ *telles que* $t^{-m+\delta k+j} D^j_t u \in L^p(\mathbb{R}; B^{s+k,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ *et* $D^j_t u \in L^p(\mathbb{R}; B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ *pour tout* $0 \le k + j \le m$ *et* $-m + \delta k + j \in \mathbb{N}_0$.

  Cet espace est doté de sa norme naturelle :

$$\| u \|_{W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \equiv \sum_{\substack{k+j \le m \\ -m+\delta k+j \in \mathbb{N}_0}} \| t^{-m+\delta k+j} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}; B^{s+k,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{j=0}^{m} \| D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}; B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}.$$

- ***Espaces de type Besov à poids.***

  On désigne par $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1})$ *l'espace des fonctions* $u \in B^{s+\frac{m}{\delta}}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ *telles que* $t^{\lceil -m+\delta k+j \rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ *et* $D^j_t u \in B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})$ *pour tout* $|\alpha'| + j \le m$ *et* $-m + \delta|\alpha'| + j \ge 0$. *Cet espace est muni de la norme suivante :*

$$\|u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1})} \equiv \sum_{\substack{|\alpha'|+j \le m \\ -m+\delta|\alpha'|+j \ge 0}} \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j \rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})} + \sum_{j=0}^{m} \| D^j_t u \|_{B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Remarque 3.2.2

- *On note par* $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}_+)$, *l'espace des restrictions à* $\mathbb{R}_+$ *des éléments de* $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R})$ *; De façon similaire,* $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $\Big[$*resp.* $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))\Big]$, *est l'espace des restrictions à* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *des éléments de* $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1})$ $\Big[$*resp.* $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))\Big]$.
- *Si* $s \ge 0$, *on a l'injection :*

$$B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)).$$

3.2.2 Hypothèses

Soient $m \in \mathbb{N}_0$ et δ un réel ≥ 1 tel que $-m + \delta m \in \mathbb{N}_0$.

On désigne par M^0 la “partie principale” de l'opérateur $M(t,x';D_t,D_{x'})$,

$$M^0 \equiv M^0(t,x';D_t,D_{x'}) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,x')t^{-m+\delta|\alpha'|+j}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j. \qquad (3.2.1)$$

On suppose les hypothèses fondamentales suivantes.

(A1) L'opérateur M est elliptique pour $t>0$.

(A2) L'opérateur M^0 est elliptique pour $t>0$ sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, c'est à dire que pour tout couple $x'\in\mathbb{R}^n$ et $\xi'\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, le polynôme en la variable z

$$P^+(z) = z^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,x')\xi'^{\alpha'}z^j,$$

n'admet pas de racines réelles. Soit m_+ le nombre des racines du polynôme $P^+(z)$ ayant une partie imaginaire positive.

(A3) On suppose que pour tous $x'\in\mathbb{R}^n$ et $\omega'\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $|\omega'|=1$, le problème

$$\begin{cases} M^0(t,x';D_t,\omega')u(t) &= 0 \\ D_t^j u(0) &= 0 \qquad \textit{pour} \quad j=0,\cdots,m_+-1, \end{cases}$$

n'admet que $u\equiv 0$ comme unique solution dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3.2.3 Théorème principal

Le théorème principal de ce chapitre est énoncé comme suit.

Théorème 3.2.3 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1\leq p,q<+\infty$. En supposant (A1)–(A3), pour tout compact $K\subset\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, il existe une constante $C_K>0$ telle que l'estimation*

$$\| u \|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq C_K \Big\{ \| Mu \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \| \gamma_l u \|_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \| u \|_{B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\},$$

est vraie pour tout $u\in B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $u\subset K$.

Le terme $\sum_{l=0}^{m_+-1} \| \gamma_l u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}(\mathbb{R}^n)}$ désigne les traces de l'opérateur M sur $t=0$ et est défini dans le Théorème 3.3.1.

Remarque 3.2.4 *Si $p=q$ on obtient les résultats de [26], pour $\tau=0$, on retrouve les résultats de [23, 27] prouvés dans le cadre des espaces de Besov classiques $B_{p,q}^s$. Si on pose $\tau=0$ et $m=2$, on a les résultats de [18, 19] concernant le cas du second ordre des opérateurs M dans les espaces de Hölder C^s et de Sobolev $W^{m,p}$. Si $\delta=1$, on obtient les résultats de [28] concernant les opérateurs elliptiques réguliers dans les espaces $B_{p,q}^{s,\tau}$.*

Ainsi, l'importance de travailler dans ce cadre de fonctions généralisé, relève du fait que certaines familles de fonctions comme les espaces de BMO, les espaces de Campanato, ou encore les espaces Q_α, n'appartiennent pas aux espaces classiques $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$. Par conséquent, lorsqu'on choisit de travailler dans le large cadre des espaces de type Besov $B_{p,q}^{s,\tau}$, on parvient à une très haute efficience en terme d'espaces fonctionnels atteints.

On commence tout d'abord par établir un lemme des dérivées intermédiaires nécessaire pour la preuve de nos résultats.

Lemme 3.2.5 (Lemme des dérivées intermédiaires) *Soient s et τ deux nombres réels tels que $\tau \geq 0$ et soit $1 \leq p,q \leq +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$ [resp. $u \in B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})$], on a :*

1. *Pour tout $r=0,\cdots,m-1$,*

$$\begin{aligned}\| D_t^r u \|_{L^p(\mathbb{R};B_{p,q}^{s+\frac{m-r}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim & \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(\mathbb{R};B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ & + \varepsilon^{-\frac{r}{m-r}} \| u \|_{L^p(\mathbb{R};B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

$$\Big[resp. \ \| D_t^r u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m-r}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \lesssim \varepsilon \| D_t^m u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} + \varepsilon^{-\frac{r}{m-r}} \| u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^{n+1})} \Big].$$

2. Pour tous $k, r \in \mathbb{N}_0$, avec $k + r \leq m$, $r < m$ et $-m + \delta k + r \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s+k,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \varepsilon \, \| \, D_t^m u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon^{-\frac{m-k}{k}} \, \| \, t^{-m+\delta m} u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s+m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \end{aligned}$$

3. Pour tous $k, r \in \mathbb{N}_0$ avec $k + r \leq m$, $r < m$ et $-m + \delta k + r \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\| \, t^{-m+\delta k+r-1} D_t^r u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s+k-\frac{1}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \varepsilon \, \| \, D_t^m u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon^{-\frac{m-k}{k}} \, \| \, t^{-m+\delta m} u \, \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s+m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \end{aligned}$$

Preuve: La première partie de ce lemme est prouvée dans [28, Lemma 2.8].

Pour la seconde et la troisième partie, il est classique selon [16], que si $D_t^m v \in L^p(\mathbb{R})$ et $t^{-m+\delta m} D_t^r v \in L^p(\mathbb{R})$ alors $t^{-m+\delta k+r} D_t^r v \in L^p(\mathbb{R})$ et on a :

$$\| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \| \, D_t^m v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} + \| \, t^{-m+\delta m} v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} .$$

En appliquant cette inégalité à $v(\lambda t)$, $\lambda > 0$, on déduit

$$\lambda^{m-\delta k} \, \| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \lambda^m \, \| \, D_t^m v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda^{m-\delta m} \, \| \, t^{-m+\delta m} v \, \|_{L^p(\mathbb{R})}$$

alors,

$$\| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \lambda^{\delta k} \, \| \, D_t^m v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} + \lambda^{\delta k-\delta m} \, \| \, t^{-m+\delta m} v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} .$$

En remplaçant λ par $\varepsilon^{\frac{1}{\delta k}} \lambda$, on obtient

$$\| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \varepsilon \lambda^{\delta k} \, \| \, D_t^m v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{\frac{k-m}{k}} \lambda^{\delta k-\delta m} \, \| \, t^{-m+\delta m} v \, \|_{L^p(\mathbb{R})} .$$

Soit $u \in W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, on applique l'inégalité précédente à $t \mapsto u'_j(t, x') = \Delta'_j u(t, x')$ avec $j \in \mathbb{N}_0$, $x' \in B'_J$ et on prend $\lambda = 2^{-\frac{j}{\delta}}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_j u(., x') \, \|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \varepsilon 2^{-jk} \, \| \, D_t^m \Delta'_j u(., x') \, \|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon^{-\frac{m-k}{k}} 2^{-jk+jm} \, \| \, t^{-m+\delta m} \Delta'_j u(., x') \, \|_{L^p(\mathbb{R})} . \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x' sur B'_J et en multipliant chaque côté par $\dfrac{2^{j(s+k)}}{|B'_J|^\tau}$, on obtient

$$\frac{2^{j(s+k)}}{|B'_J|^\tau} \, \| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_j u \, \|_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)}$$

$$\lesssim \varepsilon \frac{2^{js}}{|B'_J|^{\tau}} \parallel D_t^m \Delta'_j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)} + \varepsilon^{-\frac{m-k}{k}} \frac{2^{j(s+m)}}{|B'_J|^{\tau}} \parallel t^{-m+\delta m} \Delta'_j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)}$$

en sommant sur $j \geq J^+$ et en prenant la norme l^q, on déduit la seconde assertion du Lemme 3.2.5.

De façon analogue, la troisième assertion est déduite en démarrant la preuve par l'inégalité suivante

$$\parallel t^{-m+\delta k+r-1} D_t^r v \parallel_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \parallel D_t^m v \parallel_{L^p(\mathbb{R})} + \parallel t^{-m+\delta m} v \parallel_{L^p(\mathbb{R})} .$$

3.3 Les traces

Le théorème suivant caractérise les traces des éléments dans les espaces à poids considérés.

Théorème 3.3.1 *Soient s et τ deux nombres réels tels que $\tau \geq 0$ et soit $1 \leq p, q < +\infty$. Pour $u \in W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ et $l \in \{0, \cdots, m-1\}$, la série $\sum_{j\geq 0} D_t^l \Delta'_j u(0,\cdot)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et définit un élément $\gamma_l u$ qui appartient à $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*

En outre, l'application $u \mapsto \gamma_l u$ est continue et surjective de $W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ vers $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Aussi, il existe un opérateur de relèvement R_l de $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{m,p}_{\delta}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ tel que

$$\gamma_l o R_l = Id_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

En particulier, si $s \geq 0$, l'opérateur γ_l est borné et surjectif de $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ vers $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: Pour prouver ce théorème, il suffit de montrer que pour $l = 0, \cdots, m-1$, les deux assertions suivantes sont vraies.

1. L'opérateur γ_l est borné de $W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ vers $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$;
2. Il existe un opérateur de relèvement R_l borné de $B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ vers $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Prouvons en premier lieu l'assertion (1). Puisque

$$W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}_+) \subset W^{m,p}_{loc}(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow C^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$$

alors pour tout entier l tel que $0 \le l \le m-1$, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $v \in W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+)$, on a

$$|D_t^l v(0)| \lesssim \sum_{\substack{k+r\le m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r \varphi v \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+)} + \sum_{r=0}^{m} \| \, D_t^r \varphi v \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$$

en remplaçant $v(t)$ par $v(\lambda t)$, $\lambda > 0$, on obtient

$$\lambda^{\frac{1}{p}+l} |D_t^l v(0)| \lesssim \sum_{\substack{k+r\le m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \lambda^{m-\delta k} \| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r \varphi v \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+)} + \sum_{r=0}^{m} \lambda^r \| \, D_t^r \varphi v \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+)} . \tag{3.3.1}$$

Soit $u \in W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$. Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$u_j(t,x') = \Delta'_j u(t,x') \in W^{m,p}_{\delta,loc}(\mathbb{R}_+; C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

On applique l'estimation (3.3.1) à u_j, on prend $\lambda = 2^{-\frac{j}{\delta}}$, on intègre sur B'_J et on multiplie par $\dfrac{2^{j(s+\frac{m}{\delta})}}{|B'_J|\tau}$, on en déduit

$$\begin{aligned} &\frac{2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|B'_J|^\tau} \| \, D_t^l \Delta'_j u(0,\cdot) \, \|_{L^p(B'_J)} \\ &\lesssim \sum_{\substack{k+r\le m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \frac{2^{j(s+k)}}{|B'_J|^\tau} \| \, t^{-m+\delta k+r} D_t^r \varphi \Delta'_j u \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_J)} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{m} \frac{2^{j(s+\frac{m-r}{\delta})}}{|B'_J|^\tau} \| \, D_t^r \varphi \Delta'_j u \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_J)} . \end{aligned}$$

Puisque φ et Δ'_j permutent, en sommant sur $j \ge J^+$ et en prenant la norme l^q à chaque côté, on déduit l'affirmation (1).

Maintenant, soit $u \in B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le l \le m-1$. Soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0, avec $\varphi_l(t) = \dfrac{t^l}{l!}\varphi_0(t)$, alors $\partial_t^l \varphi_l(0) = 1$ et $\partial_t^k \varphi_l(0) = 0$ pour $k \ne l$, $0 \le k \le m-1$. Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on construit

$$\tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\frac{jl}{\delta}} \varphi_l(2^{\frac{j}{\delta}} t) \Delta'_j u(0,x').$$

La deuxième assertion (2) se déduit de l'estimation suivante

$$\| \tilde{R}_l u \|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \| u \|_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} . \tag{3.3.2}$$

On a

$$\tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\frac{jl}{\delta}} \varphi_l(2^{\frac{j}{\delta}} t) \Delta'_j u(0,x')$$

alors,

$$t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\frac{jl}{\delta}} \times 2^{\frac{jr}{\delta}} \times t^{-m+\delta k+r} (D^r_t \varphi_l)(2^{\frac{j}{\delta}} t) \Delta'_j u(0,x')$$

puis,

$$\Delta'_i t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u(t,x') = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\frac{jl}{\delta}} \times 2^{\frac{jr}{\delta}} \times t^{-m+\delta k+r} (D^r_t \varphi_l)(2^{\frac{j}{\delta}} t) \Delta'_i \Delta'_j u(0,x')$$

en intégrant par rapport à $t \in \mathbb{R}$, ensuite par rapport à $x' \in B'_J$, il s'ensuit

$$\| \Delta'_i t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)} \lesssim 2^{i(\frac{m-l}{\delta}-k-\frac{1}{\delta p})} \sum_{j\sim i} \| \Delta'_i \Delta'_j u \|_{L^p(B'_J)}$$

maintenant le Lemme 1.3.7 implique

$$\begin{aligned} &\| \Delta'_i t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)} \\ &\le C_M 2^{i(\frac{m-l}{\delta}-k-\frac{1}{\delta p})} \Big\{ \| \Delta'_i u \|_{L^p(2B'_J)} + \sum_{\nu \ge -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_\nu)} \Big\} \end{aligned}$$

en multipliant les deux côtés de l'estimation ci-dessus par $\dfrac{2^{i(s+k)}}{|B'_J|^\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{2^{i(s+k)}}{|B'_J|^\tau} \| \Delta'_i t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)} \\ &\le C_M \frac{2^{i(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|B'_J|^\tau} \Big\{ \| \Delta'_i u \|_{L^p(2B'_J)} + \sum_{\nu \ge -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \| \Delta'_i u \|_{L^p(F'_\nu)} \Big\} \end{aligned}$$

en sommant sur $i \ge J^+$ et en prenant la norme l^q, on déduit

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k+r\le m \\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \| t^{-m+\delta k+r} D^r_t \tilde{R}_l u \|_{L^p(\mathbb{R};B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \frac{1}{|B'_J|^\tau} \Big\{ \sum_{i\ge J^+} 2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \| \Delta'_i u \|^q_{L^p(2B'_J)} \Big\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$+\frac{1}{|B'_J|^\tau}\Big\{\sum_{i\geq J^+}2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\Big(\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-(\nu+i)M}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_\nu)}\Big)^q\Big\}^{\frac{1}{q}}.$$

De façon similaire,

$$\tilde{R}_l u(t,x')=\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-\frac{jl}{\delta}}\varphi_l(2^{\frac{j}{\delta}}t)\Delta'_j u(0,x')$$

alors,

$$D_t^r\tilde{R}_l u(t,x')=\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-\frac{jl}{\delta}}\times 2^{\frac{jr}{\delta}}(D_t^r\varphi_l)(2^{\frac{j}{\delta}})\Delta'_j u(0,x')$$

ensuite,

$$\Delta'_i D_t^r\tilde{R}_l u(t,x')=\sum_{j\sim i}2^{-\frac{jl}{\delta}}\times 2^{\frac{jr}{\delta}}(D_t^r\varphi_l)(2^{\frac{j}{\delta}})\Delta'_i\Delta'_j u(0,x')$$

en intégrant successivement par rapport à $t\in\mathbb{R}$, ensuite par rapport à $x'\in B'_J$, il s'ensuit

$$\parallel \Delta'_i D_t^r\tilde{R}_l u\parallel_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)}\lesssim\sum_{j\sim i}2^{j(\frac{-l+r}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\parallel \Delta'_i\Delta'_j u\parallel_{L^p(B'_J)}$$

le Lemme 1.3.7 entraîne

$$\begin{aligned}&\parallel \Delta'_i D_t^r\tilde{R}_l u\parallel_{L^p(\mathbb{R}\times B'_J)}\\&\leq C_M 2^{i(\frac{-l+r}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\Big\{\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(2B'_J)}+\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-(\nu+i)M}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_\nu)}\Big\}\end{aligned}$$

en multipliant par $\dfrac{2^{i(s+\frac{m-r}{\delta})}}{|B'_J|^\tau}$, puis en sommant sur $i\geq J^+$ et en prenant la norme l^q, on déduit

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{m}\parallel D_t^r\tilde{R}_l u\parallel_{L^p(\mathbb{R};B_{p,q}^{s+\frac{m-r}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))}\\&\lesssim\frac{1}{|B'_J|^\tau}\Big\{\sum_{i\geq J^+}2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\parallel \Delta'_i u\parallel^q_{L^p(2B'_J)}\Big\}^{\frac{1}{q}}\\&\quad+\frac{1}{|B'_J|^\tau}\Big\{\sum_{i\geq J^+}2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\Big(\sum_{\nu\geq -J+1}2^{-(\nu+i)M}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_\nu)}\Big)^q\Big\}^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Ensemble (3.3.3) et (3.3.4) entraînent

$$\parallel \tilde{R}_l u\parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R};B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{|B'_J|^{\tau}}\Big\{\sum_{i\geq J^+} 2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \parallel \Delta'_i u \parallel^q_{L^p(2B'_J)}\Big\}^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\frac{1}{|B'_J|^{\tau}}\Big\{\sum_{i\geq J^+} 2^{iq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\Big(\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-(\nu+i)M} \parallel \Delta'_i u \parallel_{L^p(F'_\nu)}\Big)^q\Big\}^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que I_1 peut être majoré par $\parallel u \parallel_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

D'autre part, pour I_2, on pose $\mu=\nu+J$. Puisque $|F'_{\mu-J}|\sim 2^{n(\mu-J)}$, on a

$$
\begin{aligned}
I_2^q &\lesssim \frac{1}{\mid B'_J\mid^{\tau q}}\sum_{i\geq J^+}\Bigg(\sum_{\mu\geq 1} 2^{n\tau(\mu-J)}\times 2^{-(\mu-J+i)M}\\
&\quad\times\frac{2^{i(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{\mid F'_{\mu-J}\mid^{\tau}}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_{\mu-J})}\Bigg)^q\\
&\lesssim \sum_{i\geq J^+} 2^{(J-i)Mq}\sum_{\mu\geq 1}\Bigg(2^{\mu(n\tau-M)}\times\frac{2^{i(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{\mid F'_{\mu-J}\mid^{\tau}}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_{\mu-J})}\Bigg)^q
\end{aligned}
$$

pour M suffisamment grand, on applique le Lemme 1.3.6, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2^q &\lesssim \sup_{\mu\geq 1}\frac{1}{\mid F'_{\mu-J}\mid^{\tau q}}\sum_{i\geq J^+}\Big(2^{i(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_{\mu-J})}\Big)^q\\
&\lesssim \sup_{\mu\geq 1}\frac{1}{\mid F'_{\mu-J}\mid^{\tau q}}\sum_{i\geq (J-\mu+1)^+}\Big(2^{i(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}\parallel \Delta'_i u\parallel_{L^p(F'_{\mu-J})}\Big)^q
\end{aligned}
$$

ainsi,

$$
I_2 \lesssim \parallel u \parallel_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}
$$

d'où l'inégalité (3.3.2).

En plus, il est aisé de voir que

$$
\gamma_l o\tilde{R}_l = Id_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}
$$

pour $l\in\{0,\cdots,m-1\}$.

En mettant $R_l u=\tilde{R}_l u|_{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, on déduit l'assertion (2).

3.4 Preuve du théorème

La preuve du Théorème 2.2.3 se déroulera en deux étapes : la première consiste à estimer les dérivées “presque tangentielles” via la Proposition 3.4.3, tandis que dans la deuxième, on va prouver le Lemme 3.4.4 pour contrôler les dérivées normales.

Sur une classe d'équations différentielles ordinaires.

On considère la classe d'opérateurs différentiels ordinaires définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$M = M(t, D_t) \equiv \sum_{\substack{k+j\leq m \\ -m+\delta k+j\in\mathbb{N}_0}} a_{kj} t^{-m+\delta k+j} D_t^j$$

où $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $\delta \geq 1$ avec $-m + \delta m \in \mathbb{N}_0$. On suppose que :

(H) Pour tous $\tau \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\sum_{\substack{k+j=m \\ -m+\delta k+j\in\mathbb{N}_0}} a_{kj} t^{-m+\delta k+j} \tau^j \neq 0.$$

L'hypothèse (H) est équivalente à dire que le polynôme

$$P^+(\tau) = \sum_{\substack{k+j=m \\ -m+\delta k+j\in\mathbb{N}_0}} a_{kj} \tau^j$$

ne s'annule pas sur la droite $\mathbb{R}$. Soit m_+ le nombre des racines du polynôme $P^+(\tau)$ ayant une partie imaginaire positive.

Théorème 3.4.1 ([23, 27]) *En supposant (H), l'opérateur M est un opérateur à indice de $W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ vers $L^p(\mathbb{R}_+)$, et son indice est égale à m_+.*

Corollaire 3.4.2 ([23, 27]) *On a*

$$\operatorname{Ker} M \cap W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+) = \operatorname{Ker} M \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$$

où $\operatorname{Ker} M = \{u \in D'(\mathbb{R}_+) \quad : \quad Mu = 0\}$.

La preuve de ces résultats est donnée pour le cas $p = 2$ dans [10]. On procède de la même manière dans [23] pour $p \neq 2$.

Proposition 3.4.3 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p, q < +\infty$. En supposant (A1)–(A3), pour tout compact $K \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que l'estimation*

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq & C_K \Big\{ \|Mu\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ & + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big\}\end{aligned}$$

est vraie pour tout $u \in W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ avec $\operatorname{supp} u \subset K$.

Preuve: Pour prouver cette proposition, on est amené à appliquer une transformation de Fourier partielle en x' pour obtenir une équation différentielle ordinaire sur laquelle on applique un résultat d'isomorphisme. Cette démarche nécessite donc d'avoir un opérateur à coefficients constants. On procède alors à la décomposition suivante.

$$M = M^0 + M^1 + M^2 + M^3,$$

où

$$\begin{aligned}
M^0 &= D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,0) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j,\\
M^1 &= \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j,\\
M^2 &= \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j<0}} a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j,\\
M^3 &= \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\notin\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(t,x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j.
\end{aligned}$$

On va se restreindre d'abord à montrer la proposition pour l'opérateur M^0 puisqu'il est à coefficients constants. Selon [11, 27], on a le résultat d'isomorphisme suivant qui est basé sur le Théorème 3.4.1 :

Soit $\gamma = (\gamma_l)_{0\leq l\leq m_+-1}$. En gardant les hypothèses (A1)–(A3), pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'opérateur $(M^0(t,0;D_t,\xi'),\gamma)$ est inversible de $W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+)$ vers $L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$. Si $K_{\xi'}$

désigne son inverse, alors l'application $\xi' \mapsto K_{\xi'}$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vers $\mathcal{L}\Big(L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}; W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+)\Big)$ et pour tout multi-indice α', il existe $C_{\alpha'} > 0$ tel que pour chaque ξ' avec $\dfrac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$ et pour tout $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m_+}$, on ait

$$\|D^{\alpha'}_{\xi'} K_{\xi'}(f,g)\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+)} \leq C_{\alpha'} \|(f,g)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}. \tag{3.4.1}$$

On prouve d'abord que pour tout $N \geq 1$ suffisamment grand, et pour toute boule B'_J de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))} \qquad\qquad (3.4.2)\\
&\lesssim \|M^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{1}{p}} \sum_{\nu \geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}}\\
&\quad \times \Big(\|M^0u\|_{L^p(F'_\nu;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|_{L^p(F'_\nu)} \Big)
\end{aligned}$$

est vraie pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))$ à spectre tangentiel inclus dans l'anneau $\dfrac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$.

On applique l'opérateur $(M^0(t,0;D_t,\xi'), \gamma(\xi'))$ à la relation

$$\widehat{u}(\cdot,\xi') = \int_{y'\in\mathbb{R}^n} e^{-iy'\cdot\xi'} u(\cdot,y')dy'$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccc}
M^0(t,0;D_t,\xi')\widehat{u}(\cdot,\xi') & = & \widehat{M^0u}(\cdot,\xi') = \displaystyle\int e^{-iy'\cdot\xi'} M^0u(\cdot,y')dy' \\
\gamma_l \widehat{u}(\xi') & = & \widehat{\gamma_l u}(\xi') \ = \displaystyle\int e^{-iy'\cdot\xi'} \gamma_l u(y')dy',
\end{array}\right. \tag{3.4.3}$$

pour $l \in \{0,1,\cdots,m_+-1\}$.

En appliquant $K_{\xi'}$ au système (3.4.3), il s'ensuit

$$\widehat{u}(\cdot,\xi') = \int e^{-iy'\cdot\xi'} K_{\xi'}\Big(M^0u(\cdot,y'), \gamma u(y')\Big)dy'.$$

Soit $\phi(\xi') \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur $\dfrac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2$ et à support dans un anneau, alors

$$\begin{aligned}
&u(\cdot,x')\\
&= \int e^{ix'\cdot\xi'} \phi(\xi') \widehat{u}(\cdot,\xi') \frac{d\xi'}{(2\pi)^n}\\
&= \int\int e^{i(x'-y')\cdot\xi'} \Big\{ \phi(\xi') K_{\xi'}\Big(M^0u(\cdot,y'), \gamma u(y')\Big)\Big\} dy' \frac{d\xi'}{(2\pi)^n}\\
&= \int\int \frac{e^{i(x'-y')\cdot\xi'}}{\Big(1+|x'-y'|^2\Big)^N} \Big(I - \Delta_{\xi'}\Big)^N \Big\{ \phi(\xi') K_{\xi'}\Big(M^0u(\cdot,y'), \gamma u(y')\Big)\Big\} dy' \frac{d\xi'}{(2\pi)^n}
\end{aligned}$$

en appliquant le résultat (3.4.1), on déduit

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,x')\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+)}\\ &\le C_N\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'\end{aligned}$$

en intégrant par rapport à x' sur B'_J, on obtient

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))}\\ &\le C_N\bigg\{\int_{B'_J}\Big(\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'\Big)^p dx'\bigg\}^{\frac1p}.\end{aligned}$$

Maintenant, on décompose $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = 2B'_J\cup\bigcup_{\nu\ge -J+1}F'_\nu.$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))}\\ &\lesssim\bigg\{\int_{B'_J}\Big(\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\chi_{2B'_J}(y')\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'\Big)^p dx'\bigg\}^{\frac1p}\\ &\quad+\bigg\{\int_{B'_J}\Big(\sum_{\nu\ge -J+1}\int_{y'\in F'_\nu}\frac{1}{1+|x'-y'|^{2N}}\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'\Big)^p dx'\bigg\}^{\frac1p}\\ &\lesssim I'_1+I'_2.\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

Le terme I'_1 est la norme L^p du produit de convolution d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^n)$ (pour N large) et une fonction $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors l'inégalité de Young entraîne

$$I'_1\le C_N\Big\{\|M^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))}+\|\gamma u\|_{L^p(2B'_J)}\Big\}.\tag{3.4.5}$$

Pour I'_2, puisque $x'\in B'_J$ et $y'\in F'_\nu$, alors $|x'-y'|\sim 2^\nu$, donc

$$I'_2\lesssim |B'_J|^{\frac1p}\sum_{\nu\ge -J+1}2^{-2\nu N}\int_{y'\in F'_\nu}\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$I'_2\lesssim |B'_J|^{\frac1p}\sum_{\nu\ge -J+1}2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac1p}\Big(\int_{y'\in F'_\nu}\Big\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\Big\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}}dy'\Big)^{\frac1p}.\tag{3.4.6}$$

Les inégalités (3.4.4), (3.4.5) et (3.4.6) impliquent

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))} \\
\lesssim&\|M^0u\|_{L^p(2B'_J;L^p(\mathbb{R}_+))} + \sum_{l=0}^{m_+-1}\|\gamma_l u\|_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{1}{p}} \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \qquad (3.4.7)\\
&\times \left(\int_{y'\in F'_\nu} \left\|\Big(M^0u(\cdot,y'),\gamma u(y')\Big)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m_+}} dy'\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Soit $u \in W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ avec $\operatorname{supp} u \subset K$, où K est un compact dans $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on met $u_j(t,x') = \Delta'_j u(2^{-\frac{j}{\delta}}t, 2^{-j}x')$ alors $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))$ pour $j \geq 1$ avec spectre tangentiel dans l'anneau $\{\dfrac{1}{2} \leq |\xi'| \leq 2\}$. Puisque

$$\begin{cases} (M^0u)_j = 2^{\frac{jm}{\delta}} M^0 u_j \\ (\gamma_l u)_j = 2^{\frac{jl}{\delta}}\gamma_l u_j, \qquad 0 \leq l \leq m_+ - 1. \end{cases} \qquad (3.4.8)$$

En appliquant l'inégalité (3.4.7) à chaque u_j avec $j \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u_j\|^q_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))} \\
&\lesssim \|M^0u_j\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2B'_J)} + \sum_{l=0}^{m_+-1}\|\gamma_l u_j\|^q_{L^p(2B'_J)} + |B'_J|^{\frac{q}{p}}\Bigg\{\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad\times\left(\|M^0u_j\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times F'_\nu)} + \sum_{l=0}^{m_+-1}\|\gamma_l u_j\|_{L^p(F'_\nu)}\right)\Bigg\}^q
\end{aligned}$$

d'après (3.4.8), on a

$$\begin{aligned}
\|u_j\|^q_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))} \lesssim& 2^{-\frac{jmq}{\delta}}\|(M^0u)_j\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2B'_J)} + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{-\frac{jlq}{\delta}}\|(\gamma_l u)_j\|^q_{L^p(2B'_J)} \\
&+ |B'_J|^{\frac{q}{p}}\Bigg\{\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N}|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}}\bigg(2^{-\frac{jm}{\delta}}\|(M^0u)_j\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times F'_\nu)} \\
&+ \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{-\frac{jl}{\delta}}\|(\gamma_l u)_j\|_{L^p(F'_\nu)}\bigg)\Bigg\}^q
\end{aligned}$$

or,

$$\|u_j\|_{L^p(B'_J;W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+))} \equiv \sum_{\substack{k+r\leq m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \| \, t^{-m+\delta k+r} D^r_t u_j \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_J)} + \sum_{r=0}^{m} \| \, D^r_t u_j \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_J)}$$

donc, en remplaçant u_j par $\Delta'_j u(2^{-\frac{j}{\delta}}t, 2^{-j}x')$, on déduit

$$\sum_{\substack{k+r\leq m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} 2^{\frac{jq(-m+\delta k)}{\delta}} \, \| \, t^{-m+\delta k+r} D^r_t \Delta'_j u \, \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}B'_J)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{r=0}^{m} 2^{-\frac{jqr}{\delta}} \parallel D_t^r \Delta_j' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}B_J')}^q \\
&\lesssim 2^{-\frac{jmq}{\delta}} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j+1}B_J')}^q + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{jq(\frac{-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta_j'\gamma_l u\|_{L^p(2^{-j+1}B_J')}^q \\
&+ |B_J'|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F_\nu'|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{-\frac{jm}{\delta}} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}F_\nu')} \\
&+ \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{j(-l-\frac{1}{\delta p})} \parallel \Delta_j'\gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j}F_\nu')} \Big) \Bigg\}^q
\end{aligned}
$$

en multipliant par $2^{jq(s+\frac{m}{\delta})}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k+r\leq m \\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} 2^{jq(s+k)} \parallel t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta_j' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}B_J')}^q \\
&+\sum_{r=0}^{m} 2^{jq(s+\frac{m-r}{\delta})} \parallel D_t^r \Delta_j' u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}B_J')}^q \\
&\lesssim 2^{jqs} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j+1}B_J')}^q + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{jq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta_j'\gamma_l u\|_{L^p(2^{-j+1}B_J')}^q \\
&+ |B_J'|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ \sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F_\nu'|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{js} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}F_\nu')} \\
&+ \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \parallel \Delta_j'\gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j}F_\nu')} \Big) \Bigg\}^q \\
&\lesssim I_1'' + I_2'' \qquad (3.4.9)
\end{aligned}
$$

où

$$
I_1'' = 2^{jqs} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j+1}B_J')}^q + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{jq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta_j'\gamma_l u\|_{L^p(2^{-j+1}B_J')}^q
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2'' = |B_J'|^{\frac{q}{p}} \Bigg\{ &\sum_{\nu\geq -J+1} 2^{-2\nu N} |F_\nu'|^{1-\frac{1}{p}} \Big(2^{js} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2^{-j}F_\nu')} \\
&+ \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \parallel \Delta_j'\gamma_l u \parallel_{L^p(2^{-j}F_\nu')} \Big) \Bigg\}^q .
\end{aligned}
$$

On pose $\tilde{J} = J + j$ et $\mu = \nu - j$. Alors

$$
I_1'' = 2^{jqs} \|\Delta_j' M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times 2B_{\tilde{J}}')}^q + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{jq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta_j'\gamma_l u\|_{L^p(2B_{\tilde{J}}')}^q . \qquad (3.4.10)
$$

D'un autre côté, vu que $|F'_\nu|^{1-\frac{1}{p}} \sim 2^{n\nu(1-\frac{1}{p})}$, alors

$$
\begin{aligned}
I''_2 \leq & |B'_J|^{\frac{q}{p}} 2^{jq(n(1-\frac{1}{p})-2N)} \Bigg\{ \sum_{\mu \geq -\tilde{J}+1} 2^{\mu(n(1-\frac{1}{p})-2N)} \Big(2^{js} \|\Delta'_j M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_\mu)} \\
& + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_\mu)} \Big) \Bigg\}^q .
\end{aligned}
$$

En posant $\mu' = \mu + \tilde{J}$, il vient

$$
\begin{aligned}
I''_2 \leq & |B'_J|^{\frac{q}{p}} 2^{(j-\tilde{J})q(n(1-\frac{1}{p})-2N)} 2^{-\tilde{J}n\tau q} \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \\
& \times \|\Delta'_j M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-\tilde{J}})} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \frac{2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-\tilde{J}})} \Big) \Bigg\}^q
\end{aligned}
$$

alors,

$$
\begin{aligned}
I''_2 \leq & 2^{(j-\tilde{J})q(n-2N)} 2^{-\tilde{J}n\tau q} \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \\
& \times \|\Delta'_j M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-\tilde{J}})} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \frac{2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-\tilde{J}})} \Big) \Bigg\}^q .
\end{aligned}
\tag{3.4.11}
$$

En prenant en compte les estimations (3.4.9)–(3.4.11), en multipliant par $\dfrac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}}$ et en sommant sur $j \geq \max(\tilde{J}, 1)$, on déduit

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k+r \leq m \\ -m+\delta k+r \in \mathbb{N}_0}} \sum_{j \geq \max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jq(s+k)}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_{\tilde{J}})} \\
& + \sum_{r=0}^{m} \sum_{j \geq \max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jq(s+\frac{m-r}{\delta})}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel D_t^r \Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times B'_{\tilde{J}})} \\
\lesssim & \sum_{j \geq \max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jqs}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \|\Delta'_j M^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+ \times 2B'_{\tilde{J}})} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \sum_{j \geq \max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \\
& \times \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(2B'_{\tilde{J}})} + \sum_{j \geq \max(\tilde{J},1)} \frac{2^{-\tilde{J}n\tau q}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} 2^{(j-\tilde{J})(n-2N)q} \\
& \times \Bigg\{ \sum_{\mu' \geq 1} 2^{\mu'(n(1-\frac{1}{p})+n\tau-2N)} \Big(\frac{2^{js}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \|\Delta'_j M^0 u\|_{L^p(\mathbb{R}_+ \times F'_{\mu'-\tilde{J}})} \\
& + \sum_{l=0}^{m_+-1} \frac{2^{j(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})}}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^\tau} \|\Delta'_j \gamma_l u\|_{L^p(F'_{\mu'-\tilde{J}})} \Big) \Bigg\}^q
\end{aligned}
$$

comme $\tilde{J}^+ \leq \max(\tilde{J}, 1)$, et d'après le Lemme 1.3.6, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k+r\leq m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \sum_{j\geq\max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jq(s+k)}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} \\
&+\sum_{r=0}^{m} \sum_{j\geq\max(\tilde{J},1)} \frac{2^{jq(s+\frac{m-r}{\delta})}}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel D_t^r \Delta'_j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} \\
&\lesssim \|M^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|^q_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{\mu'\geq 1} \frac{1}{|F'_{\mu'-\tilde{J}}|^{\tau q}} \qquad (3.4.12)\\
&\times \sum_{j\geq\tilde{J}^+} \Big(2^{jqs} \|\Delta'_j M^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times F'_{\mu'-\tilde{J}})} + \sum_{l=0}^{m_+-1} 2^{jq(s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p})} \|\Delta'_j \gamma_l u\|^q_{L^p(F'_{\mu'-\tilde{J}})} \Big).
\end{aligned}
$$

On ajoute les termes correspondant à $j = 0$ et on met à la place de la condition $j \geq \tilde{J}^+$ au côté droit de (3.4.12), la condition $j \geq (\tilde{J} - \mu' + 1)^+$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\|u\|^q_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq & C_K \Big\{ \|M^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|^q_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big\} \qquad (3.4.13)\\
& + R_0
\end{aligned}
$$

où

$$
R_0 = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel D_t^r \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} + \sum_{\substack{k+r\leq m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})}
$$

que l'on estime par la suite.

D'abord, on écrit

$$
\begin{aligned}
R_0 = & \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel D_t^r \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} \qquad (3.4.14)\\
& + \sum_{\substack{k+r\leq m\\ r<m\\ -m+\delta k+r\in\mathbb{N}_0}} \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel t^{-m+\delta k+r} D_t^r \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} \\
& + \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel D_t^m \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} .
\end{aligned}
$$

On applique la première assertion du Lemme 3.2.5 pour estimer le premier terme à droite de (3.4.14) et la deuxième assertion pour estimer le second,

$$
R_0 \lesssim \varepsilon \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 D_t^m u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})} + \varepsilon^{-\frac{r}{m-r}} \frac{1}{|B'_{\tilde{J}}|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{J}})}
$$

$$+\,\varepsilon^{-\frac{m-k}{k}}\frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel t^{-m+\delta m}\Delta'_0 u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})}$$
$$+\,\frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel D_t^m\Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})}$$

puisque supp $u \subset K$, on déduit

$$\begin{aligned} R_0 \lesssim\; & \varepsilon \parallel D_t^m u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_{K,\varepsilon} \parallel u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\ & + \frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel D_t^m \Delta'_0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})}\,. \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Maintenant, pour évaluer le terme $\frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 D_t^m u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})}$ de (3.4.14), on écrit

$$M^0 u = D_t^m u + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,0)t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

alors,

$$\Delta'_0 M^0 u = \Delta'_0 D_t^m u + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,0)t^{-m+\delta|\alpha'|+j} \Delta'_0 D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

donc,

$$\Delta'_0 D_t^m u = \Delta'_0 M^0 u - \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} a_{\alpha' j}(0,0)t^{-m+\delta|\alpha'|+j} \Delta'_0 D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u.$$

Puisque u est à support compact dans K et $D_{x'}^{\alpha'} : L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \to L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 D_t^m u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})} \\ \lesssim\; & \frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \parallel \Delta'_0 M^0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})} \\ & + \frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\in\mathbb{N}_0}} \parallel a_{\alpha' j}(0,0)t^{-m+\delta|\alpha'|+j} \Delta'_0 D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})} \\ \lesssim\; & \parallel M^0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_K \frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m}} \parallel \Delta'_0 D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})} \\ \lesssim\; & \parallel M^0 u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_K \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m}} \parallel D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m-j}{\delta}-1-|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

$$\lesssim \| M^0 u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_K \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m}} \| D^j_t u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

la première assertion du Lemme 3.2.5 implique

$$\frac{1}{|B'_{\tilde{j}}|^{\tau q}} \| \Delta'_0 D^m_t u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+\times B'_{\tilde{j}})} \lesssim \| M^0 u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_K \varepsilon \| D^m_t u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$+ C_{K,\varepsilon} \| u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \tag{3.4.16}$$

Les inégalités (3.4.15) et (3.4.16) entraînent

$$R_0 \lesssim \| M^0 u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + C_K \varepsilon \| D^m_t u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$+ C_{K,\varepsilon} \| u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \tag{3.4.17}$$

En prenant ε assez petit, il découle des inégalités (3.4.13) et (3.4.17) la Proposition 3.4.3 pour l'opérateur M^0

$$\|u\|^q_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq C_K \Big\{ \|M^0 u\|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \|\gamma_l u\|^q_{B^{s+\frac{m-l}{\delta}-\frac{1}{\delta p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \| u \|^q_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big\}. \tag{3.4.18}$$

Pour l'opérateur $M^0 + M^1$, on doit estimer les termes de la forme

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0) \Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

où $|\alpha'| + j \leq m$, $j < m$ et $-m + \delta|\alpha'| + j \in \mathbb{N}_0$.

Le Lemme 1.3.10 implique

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0) \Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$\lesssim \| a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$+ \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} .$$

En supposant que le support de u est inclus dans la demi-boule de centre $(0,0)$ et de rayon ϵ suffisamment petit, il s'ensuit

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0) \Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$\lesssim \epsilon \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}$$

$$+ \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$\lesssim \epsilon \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$+ \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

le Lemme 3.2.5, assertion (2), entraîne

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$\lesssim \epsilon \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$+ \varepsilon^{-\frac{m-|\alpha'|}{|\alpha'|}} \| t^{-m+\delta m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+m-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} .$$

Pour le dernier terme à droite de l'inégalité ci-dessus, puisque $s + \dfrac{m}{\delta} - 1 \leq s + m - 1 < s + m$, le Lemme 1.3.11 implique

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$\lesssim \epsilon \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$+ C_\varepsilon \varepsilon_0 \| t^{-m+\delta m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_{\varepsilon,\varepsilon_0} \| t^{-m+\delta m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

puisque supp $u \subset K$,

$$\| \Big(a_{\alpha' j}(t,x') - a_{\alpha' j}(0,0)\Big) t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \tag{3.4.19}$$
$$\lesssim \epsilon \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$+ C_\varepsilon \varepsilon_0 \| t^{-m+\delta m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_{\varepsilon,\varepsilon_0,K} \| u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

où $|\alpha'| + j \leq m$, $j < m$ et $-m + \delta|\alpha'| + j \in \mathbb{N}_0$.

La preuve de la Proposition 3.4.3 est terminée pour l'opérateur $M^0 + M^1$ pour u à support inclus dans une demi-boule de centre $(0,0)$ suffisamment petite.

Maintenant, pour l'opérateur $M^0 + M^1 + M^2$, on doit estimer les termes de la forme

$$\| a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

où $|\alpha'| + j \leq m$, $j < m$ et $-m + \delta|\alpha'| + j < 0$.

Puisque les fonctions $a_{\alpha',j}(t,x')$ sont continues sur le compact K, on a

$$\| a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \leq C_K \| D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

$$\leq C_K \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))} .$$

♦ Si $s+\dfrac{m-j}{\delta}-1 \leq s+|\alpha'| < s+\dfrac{m-j}{\delta}$, il en résulte du Lemme 1.3.11 que

$$\begin{aligned}&\parallel a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\leq C_K\Big\{\varepsilon \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_\varepsilon \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\Big\}\end{aligned}$$

grâce à la première assertion du Lemme 3.2.5, on obtient

$$\begin{aligned}&\parallel a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim C_K\varepsilon \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_{K,\varepsilon}\varepsilon_0 \parallel D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\quad + C_{K,\varepsilon,\varepsilon_0} \parallel u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} .\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

♦ Si $s+|\alpha'| < s+\dfrac{m-j}{\delta}-1$, on a

$$\begin{aligned}\parallel a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} &\leq C_K \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\leq C_K \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

ensuite, on applique le Lemme 3.2.5, on obtient

$$\begin{aligned}&\parallel a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\leq C_K\Big\{\varepsilon \parallel D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_\varepsilon \parallel u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

De (3.4.20) et (3.4.21), on déduit

$$\begin{aligned}&\parallel a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\lesssim C_K\varepsilon \parallel D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_{K,\varepsilon}\varepsilon_0 \parallel D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}\\ &\quad + C_{K,\varepsilon,\varepsilon_0} \parallel u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

où $|\alpha'|+j \leq m$, $j < m$ et $-m+\delta|\alpha'|+j < 0$.

En prenant ε et ε_0 assez petits, on déduit la preuve de la Proposition 3.4.3 pour l'opérateur $M^0+M^1+M^2$.

Finalement, pour $M^0+M^1+M^2+M^3$, il faut estimer les termes

$$\parallel a_{\alpha' j}(t,x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j \rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

où $|\alpha'|+j\leq m$, $j<m$, $-m+\delta|\alpha'|+j>0$ et $-m+\delta|\alpha'|+j\notin\mathbb{N}_0$.

Puisque supp $u\subset K$ et les fonctions $a_{\alpha' j}(t,x')$ sont continues sur K,

$$\begin{aligned}&\| a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\&\qquad\leq C_K\| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}.\end{aligned}$$

On pose $-m+\delta|\alpha'|+j=k+\mu$ où $k\in\mathbb{N}_0$ et $0<\mu<1$, alors

$$\| a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\leq C_K\| t^{k+1}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}.$$

En supposant que le support de u est inclus dans une demi-boule assez petite de centre $(0,0)$ et de rayon ϵ, on obtient

$$\begin{aligned}&\| a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\&\lesssim \epsilon^{1-\mu}\| t^{k+\mu}D_t^j u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+|\alpha'|,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\\&\lesssim \epsilon^{1-\mu}\Big\{\| D_t^m u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}+\| t^{-m+\delta m}u\|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\}.\end{aligned}\tag{3.4.23}$$

Ainsi, les estimations (3.4.18), (3.4.19), (3.4.22) et (3.4.23) achèvent la preuve de la Proposition 3.4.3 pour des u à supports suffisamment petits autour du point $(0,0)$. De la même façon, on peut la montrer au voisinage d'un point $(0,x_0')$ de K. D'un autre côté, l'hypothèse $(A1)$ fournit une telle estimation autour du point (t_0,x_0') avec $t_0\neq 0$ dans K. Enfin, l'inégalité à priori générale est obtenue par partition de l'unité.

Le lemme suivant nous permet d'obtenir l'estimation à priori dans l'espace $B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Lemme 3.4.4 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1\leq p,q<+\infty$. Pour tout compact K de $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, il existe une constante $C_K>0$ telle que l'estimation*

$$\|u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\leq C_K\Big\{\|Mu\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}+\|u\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\}$$

est vraie pour tout $u\in B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec $\operatorname{supp} u\subset K$.

Preuve: Pour prouver ce lemme, on décompose l'opérateur M comme suit : $M=\tilde{M}^0+\tilde{M}^1$, où

$$\tilde{M}^0u=D_t^m u+\sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}}a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil}D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u$$

$$\tilde{M}^1 u = \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j<0}} a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u.$$

Il y a deux cas à étudier.

Cas : $0 \leq s < 1$

Rappelons d'abord que

$$\|u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \equiv \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \tag{3.4.24}$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \| D_t^j u \|_{B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| D_t^m u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} .$$

Pour estimer le premier terme à droite de (3.4.24), nous procédons cas par cas.

(i) Si $-m+\delta|\alpha'|+j=0$ (i.e., $|\alpha'| = \dfrac{m-j}{\delta}$).

Le Lemme 1.3.9 implique

$$\begin{aligned}
&\| D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \| D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim \| D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} + \| D_t^{j+1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim \| u \|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} .
\end{aligned}$$

(ii) Si $-m+\delta|\alpha'|+j \in \mathbb{N}$.

- Quand $j=0,\cdots,m-2$, le Lemme 1.3.9 nous donne

$$\begin{aligned}
&\| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\
&\lesssim \| D_t\Big(t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u\Big) \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\lesssim \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j-1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \\
&\quad + \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+;B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} .
\end{aligned}$$

Puisque $D_{x'}^{\alpha'}$ opère continûment de $L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))$ vers $L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))$, on obtient

$$\begin{aligned}\| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim & \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j-1} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ & + \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_t^{j+1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ & + \| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

puisque $\delta \geq 1$ et en appliquant l'assertion (3) du Lemme 3.2.5 au premier terme à droite de l'inégalité précédente, on en déduit

$$\| t^{-m+\delta|\alpha'|+j} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim \| u \|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} .$$

- Quand $j = m-1$ (i.e., $|\alpha'| = 1$ et $\delta \geq 2$), le Lemme 1.3.9 implique

$$\begin{aligned}&\| t^{\delta-1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{m-1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\ &\lesssim \| t^{\delta-2} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \| t^{\delta-1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\quad + \| t^{\delta-1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \| t^{\delta-2} D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \| t^{\delta-1} D_t^{m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\quad + \| t^{\delta-1} D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

vu que $\operatorname{supp} u \subset K$, on obtient

$$\begin{aligned}&\| t^{\delta-1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{m-1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\ &\lesssim C_K \| D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+\frac{1}{\delta},\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_K \| D_t^{m} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\quad + \| t^{\delta-1} D_t^{m-1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq C_K \| u \|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} .\end{aligned}$$

(iii) Si $-m+\delta|\alpha'|+j > 0$ avec $-m+\delta|\alpha'|+j \notin \mathbb{N}_0$.

On pose $-m+\delta|\alpha'|+j = k+\sigma$ où k est un entier et $0 < \sigma < 1$, alors $\lceil -m+\delta|\alpha'|+j \rceil = k+1$. Donc, par le Lemme 1.3.9, on déduit

$$\begin{aligned}&\| t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\ &\lesssim \| t^{k} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} + \| t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \|_{L^p(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \quad (3.4.25)\end{aligned}$$

$$+ \parallel t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} .$$

On estime chaque terme au côté droit de l'inégalité (3.4.25). Pour le premier, on a

$$\begin{aligned}\parallel t^k D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} &= \parallel t^{-m+\delta|\alpha'|+j-\sigma} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \parallel t^{-m+\delta|\alpha'|+j-\sigma} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

puisque $\delta > \sigma$, par une inégalité analogue à l'assertion (3) du Lemme 3.2.5, on déduit

$$\begin{aligned}&\parallel t^k D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \varepsilon \parallel D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} + C_\varepsilon \parallel t^{-m+\delta m} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} .\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Pour le second terme de (3.4.25), on a

$$\begin{aligned}&\parallel t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \parallel t^{k+1} D_t^{j+1} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\lesssim \parallel t^{-m+\delta|\alpha'|+j-\sigma+1} D_t^{j+1} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

- Quand $j = m - 1$,

$$\begin{aligned}\parallel t^{\delta-\sigma} D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} &\leq C_K \parallel D_t^m u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq C_K \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} .\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

- Quand $j \leq m - 2$, pareillement que pour le premier terme, on a

$$\parallel t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} . \tag{3.4.29}$$

Alors, en combinant (3.4.27), (3.4.28) and (3.4.29), on obtient

$$\parallel t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{j+1} u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} . \tag{3.4.30}$$

Enfin, pour le dernier terme de (3.4.25), on a

$$\parallel t^{k+1} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \parallel t^{k+1} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

$$\leq C_K \parallel t^{k+\sigma} D_t^j u \parallel_{L^p(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$
$$\leq C_K \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \cdot \qquad (3.4.31)$$

Les inégalités (3.4.25), (3.4.26), (3.4.30) et (3.4.31) impliquent

$$\parallel t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \lesssim \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))}$$

pour $|\alpha'|+j\leq m$, $j<m$, $-m+\delta|\alpha'|+j>0$ et $-m+\delta|\alpha'|+j\notin\mathbb{N}_0$.

Donc, de (i),(ii) et (iii), on conclut que

$$\sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \parallel t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \parallel u \parallel_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \cdot \qquad (3.4.32)$$

D'autre part, pour le second terme de (3.4.24), la première assertion du Lemme 3.2.5 implique

$$\sum_{j=0}^{m-1} \parallel D_t^j u \parallel_{B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim \varepsilon \parallel D_t^m u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} \parallel u \parallel_{B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$$

en remplaçant ε par $\varepsilon'^{-\frac{m-j}{j}}$, on déduit

$$\sum_{j=0}^{m-1} \parallel D_t^j u \parallel_{B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \lesssim \varepsilon'^{-\frac{m-j}{j}} \parallel D_t^m u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \varepsilon' \parallel u \parallel_{B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \cdot \qquad (3.4.33)$$

Il nous reste maintenant à estimer le terme $\parallel D_t^m u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$ de (3.4.24), puisque $\tilde{M}^0 u = f$, on a

$$\tilde{M}^0 u = D_t^m u + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} a_{\alpha' j}(t,x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

alors,

$$D_t^m u = \tilde{M}^0 u - \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m\\ j<m\\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} a_{\alpha' j}(t,x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u$$

on applique la norme $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, puis, on obtient par l'inégalité triangulaire

$$\parallel D_t^m u \parallel_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$$

$$\lesssim \| \tilde{M}^0 u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \| a_{\alpha' j}(t,x') t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

puisque u est à support compact dans K le Lemme 1.3.10, implique

$$\begin{aligned} &\| D^m_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\lesssim \| \tilde{M}^0 u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \sup_{(t,x')\in K} |a_{\alpha' j}(t,x')| \, \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\quad + C \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \end{aligned}$$

puisque $a_{\alpha' j}(t,x') \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ et d'après (3.4.32),

$$\begin{aligned} &\| D^m_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\lesssim \| \tilde{M}^0 u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C_K \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m \\ -m+\delta|\alpha'|+j\geq 0}} \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\lesssim \| \tilde{M}^0 u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C_K \| u \|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))} . \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

Ainsi, en combinant les estimations (3.4.32), (3.4.33) et (3.4.34) on déduit la preuve du Lemme 3.4.4 pour l'opérateur $\tilde{M}^0$ et pour $0 \leq s < 1$.

Maintenant, on va estimer les termes restants de la forme $\| a_{\alpha' j}(t,x') D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$ avec $|\alpha'| + j \leq m$, $j < m$ et $-m + \delta|\alpha'| + j < 0$.

Encore une fois, il y a deux cas à considérer.

(iv) Quand $|\alpha'| \geq \dfrac{m-j}{\delta} - 1$.

Puisque $s + \dfrac{m-j}{\delta} - 1 \leq s + |\alpha'| < s + \dfrac{m-j}{\delta}$, le Lemme 1.3.10 avec le Lemme 1.3.11 entraînent

$$\begin{aligned} &\| a_{\alpha' j}(t,x') D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ &\leq C_K \Big\{ \varepsilon \| D^j_t u \|_{B^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C_\varepsilon \| D^j_t u \|_{B^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\} \end{aligned}$$

ensuite, on applique le Lemme 3.2.5 pour contrôler le second terme à droite de l'inégalité ci-dessus,

$$\begin{aligned}
&\| a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\leq C_K \Big\{ \varepsilon \| D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + C_\varepsilon \varepsilon_0 \| D_t^m u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\quad + C_{\varepsilon,\varepsilon_0} \| u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \Big\}.
\end{aligned}$$

(v) Quand $|\alpha'| < \dfrac{m-j}{\delta} - 1$.

On a

$$\begin{aligned}
\| a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} &\leq C_K \| D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+|\alpha'|,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\leq C_K \| D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m-j}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}
\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 3.2.5, on obtient

$$\begin{aligned}
&\| a_{\alpha' j}(t,x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\
&\leq C_K \Big\{ \varepsilon \| D_t^m u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + C_\varepsilon \| u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m}{\delta}-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \Big\}.
\end{aligned}$$

Alors, de (iv) et (v) découle l'estimation pour l'opérateur $\tilde{M}^1$. Par conséquent, le Lemme 3.4.4 est prouvé pour l'opérateur M et pour $0 \leq s < 1$.

Cas : $s \geq 1$.

On pose $s = \tilde{s} + r$ tel que $\tilde{s} \in \mathbb{N}_0$ et $0 \leq r < 1$, alors, on procède par récurrence sur $\tilde{s}$. Il est clair que le lemme est vrai pour $\tilde{s} = 0$ (i.e., $0 \leq s < 1$). Alors, on suppose que ça reste vrai pour $\tilde{s}$, i.e.,

$$\|u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \Big\{ \|Mu\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big\} \tag{3.4.35}$$

et on le montre pour $\tilde{s} + 1$, i.e.,

$$\|u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+1+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \Big\{ \|Mu\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+; B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))} \Big\}. \tag{3.4.36}$$

D'abord, notons que si supp $u \subset K$, alors $u \in B_{p,q,\delta}^{s+1+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ si et seulement si $u \in B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $D_{x_i} u \in B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $i = 1, \cdots, n$, et $D_t^m u \in B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})$. En outre, on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{B^{s+1+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq & C_K\Big\{\|u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{i=1}^{n}\|D_{x_i}u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ & + \|D_t^m u\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Par l'hypothèse de récurrence (3.4.35), pour $i = 1, \cdots, n$, on a

$$\begin{aligned}\|D_{x_i}u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq & C_K\Big\{\|Mu\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| \, [M; D_{x_i}]u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ & + \|u\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\}\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

où

$$[M; D_{x_i}]u = \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m}} \Big(D_{x_i}a_{\alpha' j}(t,x')\Big)t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u.$$

En appliquant la norme $B^{s,\tau}_{p,q}$ et en utilisant le Lemme 1.3.10, on obtient

$$\| \, [M, D_{x_i}]u \, \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq C_K \|u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}. \tag{3.4.39}$$

Ensemble (3.4.38), (3.4.39) et (3.4.35) impliquent

$$\|D_{x_i}u\|_{B^{s+m,\tau}_{p,q,\delta}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq C_K\Big\{\|Mu\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \|u\|_{W^{m,p}_\delta(\mathbb{R}_+; B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\Big\} \tag{3.4.40}$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Enfin, on estime le terme $\|D_t^m u\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$ de (3.4.37).

En retournant à l'équation $Mu = f$, on a

$$\begin{aligned}\| \, D_t^m u \, \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \lesssim & \| \, Mu \, \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m}} \| \, a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \, \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \, .\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

On évalue le terme

$$\sum_{\substack{|\alpha'|+j\leq m \\ j<m}} \| \, a_{\alpha' j}(t,x')t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D^{\alpha'}_{x'} D^j_t u \, \|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \, .$$

Si $-m+\delta|\alpha'|+j\le 0$, $j<m$ et $|\alpha'|+j\le m$, on a

$$\begin{aligned}\| D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} &\equiv \sum_{i=1}^n \| D_{x'}^{\alpha'}D_t^j D_{x_i}u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| D_{x'}^{\alpha'}D_t^{j+1}u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\lesssim \sum_{i=1}^n \|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \sum_{i=1}^n \| D_t^{j+1}D_{x_i}u \|_{B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\end{aligned}$$

puisque $\delta\ge 1$ et $|\alpha'|\le \dfrac{m-j}{\delta}$, on obtient

$$\begin{aligned}\| \sum_{i=1}^n D_t^{j+1}D_{x_i}u \|_{B_{p,q}^{s+|\alpha'|-1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} &\lesssim \| D_t^{j+1}D_{x_i}u \|_{B_{p,q}^{s+\frac{m-(j+1)}{\delta},\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\lesssim \|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}.\end{aligned}$$

Grâce à (3.4.40), on déduit

$$\| D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\le C_K\Big\{\|Mu\|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\Big\} \tag{3.4.42}$$

pour $-m+\delta|\alpha'|+j\le 0$, $j<m$ et $|\alpha'|+j\le m$.

Si $-m+\delta|\alpha'|+j> 0$, $j<m$ et $|\alpha'|+j\le m$, on a

$$\begin{aligned}&\| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\equiv \sum_{i=1}^n \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'}D_t^j D_{x_i}u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil-1} D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\\ &\quad + \| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'}D_t^{j+1} u \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\ .\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

Le premier terme à droite de (3.4.43) est contrôlé par $\sum_{i=0}^n \|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$, cependant, en mettant $|\alpha''|=|\alpha'|-1$ et puisque $\delta\ge 1$, les autres restants peuvent être bornés par $C_K\sum_{i=0}^n \|D_{x_i}u\|_{B_{p,q,\delta}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}$. Alors, on conclut

$$\| t^{\lceil -m+\delta|\alpha'|+j\rceil} D_{x'}^{\alpha'}D_t^j u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\le C_K\Big\{ \| Mu \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\Big\} \tag{3.4.44}$$

pour $-m+\delta|\alpha'|+j> 0$, $j<m$ et $|\alpha'|+j\le m$.

Par conséquent, les inégalités (3.4.41), (3.4.42) et (3.4.44) impliquent,

$$\| D_t^m u \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})}\le C_K\Big\{ \| Mu \|_{B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \|u\|_{W_\delta^{m,p}(\mathbb{R}_+;B_{p,q}^{s+1,\tau}(\mathbb{R}^n))}\Big\}. \tag{3.4.45}$$

Des estimations (3.4.35), (3.4.37), (3.4.40) et (3.4.45) s'ensuit (3.4.36). Donc, le Lemme 3.4.4 est vrai pour tout $s \geq 0$.

Le Théorème 3.2.3 résulte de la Proposition 3.4.3 et du Lemme 3.4.4.

3.5 Exemples

Dans cette section, nous donnons quelques exemples pour illustrer les résultats de ce chapitre.

3.5.1 Les opérateurs elliptiques réguliers

Si dans la classe M, on met $\delta = 1$, on obtient l'opérateur différentiel suivant :

$$M = M(t, x'; D_t, D_{x'}) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j \leq m \\ j<m}} a_{\alpha' j}(t, x') D_{x'}^{\alpha'} D_t^j$$

où $(t, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ et à coefficients $a_{\alpha' j}(t, x') \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$.

On suppose que :

(L1) L'opérateur M est elliptique pour $t > 0$.

(L2) Pour tout couple $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\xi' \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, le polynôme en la variable z

$$P^+(z) = z^m + \sum_{\substack{|\alpha'|+j=m \\ j<m}} a_{\alpha' j}(0, x') \xi'^{\alpha'} z^j$$

n'admet pas de racines réelles. Soit m_+ le nombre des racines du polynôme $P^+(z)$ ayant une partie imaginaire positive.

Alors, le Théorème 3.2.3 est donné comme suit.

Théorème 3.5.1 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p, q < +\infty$. En supposant (L1) et (L2), pour tout compact $K \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, l'estimation*

$$\| u \|_{B_{p,q}^{s+m,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leq C_K \Big\{ \| Mu \|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}_+^{n+1})} + \sum_{l=0}^{m_+-1} \| \gamma_l u \|_{B_{p,q}^{s+m-l-\frac{1}{p},\tau}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \| u \|_{B^{s+m-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\},$$

est vraie pour tout $u \in B^{s+m,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *avec* supp $u \subset K$.

On obtient l'estimation à priori pour les solutions de la classe des problèmes aux limites elliptiques réguliers prouvée dans [28, Theorem 1.7].

En outre, si $s = 0$, $m = 2$, $\tau = \dfrac{\lambda}{2(n+1)}$ et $p = q = 2$, le Theoreme 3.5.1 ci-dessus prolonge les résultats de S. Campanato [15] concernant la régularité des solutions des opérateurs elliptiques réguliers du second ordre prouvée dans les espaces de BMO et de Campanato.

Un exemple plus simple de cette classe est lorsque $m = 2$ et $n = 1$, si u est une solution du problème

$$\begin{cases} u & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ -\Delta u = f & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ \gamma_0 u \ = g & \in & B^{s+2-\frac{1}{p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

alors $u \in B^{s+2,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+)$.

3.5.2 Les opérateurs de type Tricomi

Si dans la classe M on met $m = 2$ et $\delta = \dfrac{3}{2}$, on obtient la classe d'opérateurs de type Tricomi définie dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$\begin{aligned} M = M(t, x'; D_t, D_{x'}) = & D_t^2 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(t, x') t D_{x_j} D_{x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x') t D_{x_j} D_t \\ & + \sum_{j=1}^{n} c_j(t, x') D_{x_j} + d(t, x') D_t + e(t, x') \end{aligned}$$

où les coefficients sont dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

On suppose que :

(M1) L'opérateur M est elliptique pour $t > 0$.

(M2) Pour tout couple $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\xi' \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, le polynôme en la variable z

$$P^+(z) = z^2 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(0, x') \xi_j \xi_k$$

admet exactement deux racines complexes : $z^+(x',\xi')$ et $z^-(x',\xi')$ telles que $\Im m(z^+(x',\xi'))>0$ et $\Im m(z^-(x',\xi'))<0$.

(M3) On suppose que pour tout $x'\in\mathbb{R}^n$ et $\omega'\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $|\omega'|=1$, le problème

$$\begin{cases} M^0(t,x';D_t,\omega')u(t) &= 0\\ \quad u(0) &= 0 \end{cases},$$

n'admet que $u\equiv 0$ comme unique solution dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Pour cette classe d'opérateurs, le Théorème 3.2.3 est formulé comme suit.

Théorème 3.5.2 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1\le p,q<+\infty$. En supposant (M1)–(M3), pour tout compact $K\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, l'estimation*

$$\| u \|_{B^{s+2,\tau}_{p,q,\frac{2}{3}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\le C_K\Big\{ \| Mu \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| \gamma_0 u \|_{B^{s+\frac{4}{3}-\frac{2}{3p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \| u \|_{B^{s+\frac{1}{3},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\},$$

est vraie pour tout $u\in B^{s+2,\tau}_{p,q,\frac{2}{3}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $u\subset K$.

Un exemple plus simple de ces opérateurs est donné dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ comme suit.

Si u est une solution du problème

$$\begin{cases} \quad u & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+)\\ D_t^2u+tD^2_{x'}=f & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+)\\ \gamma_0 u \;=g & \in & B^{s+\frac{4}{3}-\frac{2}{3p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

alors u appartient à $B^{s+2,\tau}_{p,q,\frac{3}{2},loc}(\mathbb{R}^2_+)=\Big\{u\in B^{s+\frac{4}{3},\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+) \quad : \quad D_t^2u, tD^2_{x'}u\in B^{s,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+)\Big\}$.

3.5.3 Les opérateurs de type Grushin

Si on met $m=\delta=2$, on obtient la classe d'opérateurs de type Grushin définie dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$\begin{aligned} M=M(t,x';D_t,D_{x'}) =& D_t^2+\sum_{j=1}^n a_j(t,x')tD_{x_j}D_t+\sum_{j,k=1}^n b_{j,k}(t,x')t^2D_{x_j}D_{x_k}\\ &+\sum_{j=1}^n c_j(t,x')D_{x_j}+d(t,x')D_t+e(t,x') \end{aligned}$$

où les coefficients appartiennent à $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

On suppose que :

(N1) L'opérateur M est elliptique pour $t > 0$.

(N2) Pour tout couple $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\xi' \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, le polynôme en la variable z

$$P^+(z) = z^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j(0, x')\xi_j z + \sum_{j,k=1}^{n} b_{j,k}(0, x')\xi_j\xi_k$$

admet exactement deux racines complexes : $z^+(x', \xi')$ et $z^-(x', \xi')$ telles que $\Im m(z^+(x', \xi')) > 0$ et $\Im m(z^-(x', \xi')) < 0$.

(N3) On suppose que pour tous $x' \in \mathbb{R}^n$ et $\omega' \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $|\omega'| = 1$, le problème :

$$\begin{cases} M^0(t, x'; D_t, \omega')u(t) & = 0 \\ u(0) & = 0 \end{cases} ,$$

n'admet que $u \equiv 0$ comme unique solution dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Pour ce cas, le Théorème 3.2.3 peut être formulé comme suit.

Théorème 3.5.3 *Soient s et τ deux réels positifs et soit $1 \leq p, q < +\infty$. En supposant (N1)–(N3), pour tout compact $K \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, l'estimation*

$$\| u \|_{B^{s+2,\tau}_{p,q,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leq C_K \Big\{ \| Mu \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \| \gamma_0 u \|_{B^{s+1-\frac{1}{2p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \| u \|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \Big\},$$

est vraie pour tout $u \in B^{s+2,\tau}_{p,q,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $u \subset K$.

Un exemple plus particulier peut être donné dans $\mathbb{R}^2_+$ comme suit.

Si u est solution du problème :

$$\begin{cases} u & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ D_t^2 u + t^2 D_{x'}^2 u = f & \in & B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^2_+) \\ \gamma_0 u \quad = g & \in & B^{s+1-\frac{1}{2p},\tau}_{p,q}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

alors u appartient à $B^{s+2,\tau}_{p,q,2,loc}(\mathbb{R}^2_+) = \Big\{ u \in B^{s+1,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+) \ : \ D_t^2 u,\ t^2 D_{x'}^2 u \in B^{s,\tau}_{p,q,loc}(\mathbb{R}^2_+) \Big\}$.

Dans les Théorèmes 3.5.2 et 3.5.3, si on prend $\tau = 0$, on obtient l'estimation à-priori pour les solutions des problèmes aux limites associés à l'opérateur M dans les espaces de Besov classiques $B^s_{p,q}$, généralisant ainsi les résultats de [27]. D'un autre côté, si $\tau = 1$ et $p = q$, on obtient la régularité dans les espaces de Goldberg bmo^s_p. Il est important aussi de noter que ces théorèmes prolongent les résultats de O. Debbaj [18, 19] de l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ et de Hölder C^s, à un cadre de fonctions plus large qui est celui des espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$.

Conclusion

Dans cette thèse on s'est intéressé principalement à l'étude de la régularité des solutions pour deux classes d'opérateurs linéaires elliptiques et dégénérés L et M dans les espaces de type Besov $B^{s,\tau}_{p,q}$. Ce travail nous a donc permis de généraliser plusieurs résultats, que ce soit en terme d'opérateurs ou de cadre fonctionnel.

Néanmoins, d'autres pistes peuvent être explorées, comme des théorèmes de régularité pour d'autres opérateurs différentiels, on peut citer à titre d'exemple l'opérateur de Triebel défini sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(t, x'; D_{x'}, D_t) =& tD_t^2 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t, x') D_{x_j} D_{x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x') t D_{x_j} D_t \\ &+ \sum_{j=1}^{n} c_j(t, x') D_{x_j} + d(t, x') D_t + e(t, x')\end{aligned}$$

où les coefficients sont dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

D'un autre côté, à l'instar de [29], ce travail pourrait être étendu au cas des systèmes d'équations associées aux opérateurs L et M et fournir d'une façon analogue, des inégalités de régularité pour ces problèmes.

De plus, comme il a été mentionné précédemment, ces résultats peuvent être exploités pour prouver la régularité des solutions pour des opérateurs non linéaires et dont les opérateurs linéarisés sont dans la classe L ou M, des travaux peuvent donc s'ensuivre dans cette optique.

Enfin, malgré la largeur des classes d'opérateurs traitées, peu d'applications sont présentes dans la littérature [13, 37, 53], par conséquent, des pistes intéressantes peuvent s'ouvrir dans ce sens.

Bibliographie

[1] R. A. Adams et J. J. Fournier, *Sobolev spaces.* Elsevier, Vol. 140 (2003).

[2] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.* Communications on pure and applied mathematics, XII, 623-727 (1959).

[3] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Communications on pure and applied mathematics, 17, 1, 35-92 (1964).

[4] N. Aronszajn, *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral.* Techn. Report 14, Univ. of Kansas, 1955, 77–94.

[5] M. S. Baouendi, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.* Bulletin de la Société Mathématique de France, 95, 45-87 (1967).

[6] O.V. Besov, *On a family of function spaces. Embedding theorems and extensions (Russian).* Doklady Akademii Nauk SSSR 126, 1163–1165 (1959).

[7] O.V. Besov, *On a family of function spaces in connection with embeddings and extensions (Russian).* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova, 60, 42–81 (1961).

[8] P. Bolley et J. Camus, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables.* Mémoires de la S.M.F, t. 34, 55-140 (1973).

[9] P. Bolley et J. Camus, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable.* Publications mathématiques et informatique de Rennes, 1, 1-24 (1972).

[10] P. Bolley, J. Camus et B. Helffer, *Sur une classe d'opérateurs partiellement hypo-elliptiques.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 55, 131-171 (1976).

[11] P. Bolley, J. Camus et G. Métivier, *Estimations de Schauder et régularité Höldérienne pour une classe de problèmes aux limites elliptiques singuliers.* Communications in Partial Differential Equations, 11, 1135-1203 (1986).

[12] P. Bolley, J. Camus et TL. Pham, *Estimation de la résolvante du problème de Dirichlet dans les espaces de Hölder.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Paris, t. 306, Series I 253-256 (1987).

[13] D. Bresh et G. Métivier, *Global existence and uniqueness for the lake equations with vanishing topography : elliptic estimates for degenerate equations.* Nonlinearity, 19, 3, 591-610 (2006).

[14] D. Bresch, B. Desjardins et G. Métivier, *Recent mathematical results and open problems about shallow water equations.* Analysis and simulation of fluid dynamics. Birkhäuser Basel, 15-31 (2006).

[15] S. Campanato, *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi* $L^{2,\lambda}$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 69, 1, 321–381 (1965).

[16] J. Camus, *On a class of weighted Sobolev spaces.* Function Spaces and Applications, 1, 4-22 (1979).

[17] S. Dahlke et R. A. Devore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems.* Communications in Partial Differential Equations, 22, no 1-2, pp 1-16 (1997).

[18] O. Debbaj, *Régularité höldérienne maximale de certains problèmes aux limites elliptiques singuliers.* Communications in Partial Differential Equations, 11, 8, 795-850 (1986).

[19] O. Debbaj, *Régularité* L_p *Des Problèmes Aux Limites De Type Hermite Et Tricomi.* Communications in Partial Differential Equations, 16, 1, 1-29 (1991).

[20] D. Drihem, *Some embeddings and equivalent norms of the* $\mathcal{L}^{\lambda,s}_{p,q}$ *spaces.* Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, 41, 1, 15-40 (2009).

[21] D. Drihem, *Atomic decomposition of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces.* Science China Mathematics, 56, 5, 1073–1086 (2013).

[22] D. Drihem, *Some properties of variable Besov-type spaces.* Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, 52, 2, 193-221 (2015).

[23] A. El Baraka, *Estimations höldériennes et L^p pour une classe de problèmes aux limites linéaires singuliers. Application à la régularité des solutions de problèmes aux limites singuliers non linéaires.* Thèse 3éme cycle. Rennes (1987).

[24] A. El Baraka, *An embedding theorem for Campanato spaces.* Electronic Journal of Differential Equations, 2002, 66, 1-17 (2002).

[25] A. El Baraka, *Function spaces of BMO and Campanato type.* Proceedings of the 2002 Fez Conference on Partial Differential Equations, Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 9, Southwest Texas State Univ, San Marcos, TX, 109–115 (2002).

[26] A. El Baraka, *Optimal BMO and $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ estimates near the boundary for solutions of a class of degenerate elliptic problems.* Proc. Conf. Fes (Morocco 1999). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 229, New York, Marcel Dekker, 183-193, (2002).

[27] A. El Baraka, *Estimates near the boundary for solutions of PDE and interpolation inequalities.* Annales des sciences mathématiques du Québec. Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques et informatique, 27, 1, 13-45 (2003).

[28] A. El Baraka, *Optimal BMO and $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ estimates for solutions of elliptic boundary value problems.* Arabian Journal for Science and Engineering, 30, 1A, 85-116 (2005).

[29] A. El Baraka, *BMO estimates near the boundary for solutions of elliptic systems.* Electronic Journal of Differential Equations, 2006, 11, 1-21 (2006).

[30] A. El Baraka, *Littlewood-Paley characterization for Campanato spaces.* Journal of Function Spaces and Applications, 4, 2, 193-220 (2006).

[31] A. El Baraka et M. Masrour, *A-priori Estimates Near the Boundary for Solutions of a class of Degenerate Elliptic Problems in Besov-type Spaces.* Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, 3, 2, 149-172 (2017).

[32] A. El Baraka et M. Masrour, *Estimates for Solutions of a class of Linear Elliptic Degenerate Operators in Besov-type Spaces.* Arabian Journal of Mathematics, https ://doi.org/10.1007/s40065-020-00278-x (2020).

[33] A. El Baraka et M. Masrour, *Estimates for Solutions of a class of Linear Elliptic Degenerate Operators in Besov-type Spaces.* Advances in Operator Theory, https ://doi.org/10.1007/s43036-020-00064-8 (2020).

[34] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche Mat, 7, 102–137 (1958).

[35] C. Goulaouic and N. Shimakura, *Régularité Höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés.* Journées Équations aux dérivées partielles, 10, 1, 1-6 (1981).

[36] C. Goulaouic et N. Shimakura, *Régularité Höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 10, 1, 79-108 (1983).

[37] C. Laurent et M. Léautaud, *Tunneling estimates and approximate controllability for hypoelliptic equations.* hal-01717587 (2018).

[38] J.L. Lions et E. Magene, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Volume I (1968).

[39] S.M. Nikol'skij, *Inequalities for entire functions of finite order and their application in the theory of differentiable functions of several variables (Russian).* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova, 38, 244–278 (1951).

[40] J. Peetre, *Sur les espaces de Besov.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série. A-B, 264, 281–283 (1967).

[41] D. Prévosto et J. Rolland, *Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés.* Publications mathématiques et informatique de Rennes, 1, 1-36 (1974).

[42] J. Rolland, *Théorème d'indice pour une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière.* Journées équations aux dérivées partielles, 311-340 (1975).

[43] J. Rolland, *Regularity in Besov spaces for a class of singular elliptic operators.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I, 304, 17, 543-546 (1987).

[44] N. Shimakura, *Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré.* Journal of Mathematics of Kyoto University, 9, 2, 275-335 (1969).

[45] C. Shou lin, *Interpolation inequalities with weights.* Communications in Partial Differential Equations, 11, 14, 1515-1538 (1986).

[46] W. Sickel, *Smoothness spaces related to Morrey spaces–a survey I.* Eurasian Mathematical Journal, 3, 3, 110-149 (2012).

[47] L.N. Slobodeckij, *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations (Russian).* Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucep. Zap. 197, 54–112 (1958).

[48] S.L. Sobolev, *The cauchy problem in a function space (Russian).* Doklady Akademii Nauk SSSR, 3, 291–294 (1935).

[49] S.L. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales.* Matematicheskii Sbornik, 1, 39–72 (1936).

[50] S.L. Sobolev, *On a theorem of functional analysis (Russian).* Matematicheskii Sbornik, 4, 471–497 (1938).

[51] S.L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik.* Berlin, Akademie Verlag 1964. (Translation from Russian, Leningrad 1950).

[52] R.S. Strichartz, *Traces of BMO-Sobolev Spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, 83, 3, 509-513 (1982).

[53] S. Thangavelu et V.N. Dogga, L^p-L^2 *estimates for solutions of the wave equation associated to the Grushin operator.* Advances in Pure and Applied Mathematics, 9, 2, 85-92 (2018).

[54] H. Triebel, *Theory of Function Spaces.* Basel : Birkhäuser (1983).

[55] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II.* Basel : Birkhäuser (1992).

[56] H. Triebel, *Theory of Function Spaces III.* Basel : Birkhäuser (2006).

[57] H. Triebel, *Hybrid function spaces, heat and Navier-Stokes equations.* EMS Tracts in Mathematics 24, European Mathematical Society (EMS), Zürich (2015).

[58] M.I. Vishik et V.V. Grushin, *Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain.* Mathematics of the USSR-Sbornik, 9, 4, 423-454 (1969).

[59] D. Yang et W. Yuan, *Relations among Besov-type spaces, Triebel–Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces.* Applicable Analysis, 92, 3, 549-561 (2013).

[60] W. Yuan, W. Sickel et D. Yang, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel.* Springer (2010).

[61] W. Yuan, D. D. Haroske, L. Skrzypczak et D. Yang, *Embedding properties of Besov-type spaces.* Applicable Analysis, 94(2), 318-340 (2015).