Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès

Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications

THESE

Présentée par

Mbark ABKARI

Pour l'obtention du

Doctorat en Mathématiques

FD : Mathématiques et Applications

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Intitulée :

Etude spectrale de certaines classes d'opérateurs à travers la propriété de l'extension unique

Soutenue le........... 2018

Devant le jury composé de

Pr.............	*Faculté ....*	....
Pr. Abdelaziz Tajmouati	*Faculté des Sciences D.M-Fès*	Directeur de Thèse
Pr............		....
Pr..........	*Faculté ....*	....
Pr...........	*Faculté ....*	....
Pr..........	*Ecole Normale Supérieure-Fès*	....
Pr...........	*Faculté ....*	....
Pr...........	*Faculté ....*	....

À ma famille,

et plus particulièrement à mes parents.

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps, mon directeur de thèse **Abdelaziz Tajmouati**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Sidi Mohammed Ben Abdellah pour m'avoir fait confiance quand il m'a accepté en thèse. Il n'a épargné aucun effort à me transmettre son savoir faire et ses connaissances scientifiques avec toute générosité. Ses qualités humaines, scientifiques et sa grande disponibilité m'ont beaucoup aidé à mener à bien ce travail. Je le remercie chaleureusement pour m'avoir orienté et encouragé pendant ces années de thèse.

Je remercie vivement Monsieur **Rachid Améziane Hassani**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Sidi Mohammed Ben Abdellah pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

J'exprime mes sincères remerciements tout particulièrement à Monsieur **Abelkhalek Faouzi**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaib Doukkali et à Monsieur **Hassan Zariouh**, Professeur de l'enseignement supérieur à CRMF de l'Oriental-Oujda pour avoir accepté d'une part de rapporter cette thèse et d'autre part d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse tout en se déplaçant de loin.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Hassane Zguitti**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Sidi Mohammed Ben Abdellah pour avoir accepté de rapporter cette thèse et de prendre part au jury.

Je n'oublie pas de remercier tous les rapporteurs de cette thèse pour leur lecture minutieuse et attentive de ce manuscrit et pour leurs remarques pertinentes.

Mes vifs remerciements vont à Monsieur **Aziz Blali**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Ecole Normale Supérieure-Fès, à Monsieur **Mustapha Ech-Chérif Elkettani**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Sidi Mohammed Ben Abdellah et à Monsieur **Mohamed Ouzahra**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Ecole Normale Supérieure-Fès pour avoir accepté d'examiner cette thèse et pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury, qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes plus sincères remerciements vont à **Abdessalam El bakkali**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaib Doukkali, pour m'avoir aidé et soutenu pendant la préparation de cette thèse et pour ses conseils judicieux et ses encouragements qui m'a accordés durant ce travail.

J'ai eu le plaisir de collaborer pendant ma thèse avec **Mohammed Karmouni**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Cadi Ayyad. Je le remercie pour sa collaboration fructueuse, et aussi pour sa gentillesse qu'il a prouvé durant la préparation de cette Thèse.

Je dois beaucoup à tous mes amis de l'équipe d'analyse fonctionnelle avec qui j'ai passé de très beaux moments et dont leur présence est un grand soutien pour moi.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans la partience et le soutien de ma famille.
Enfin, je tiens à remercier la faculté des sciences Dhar El Mahraz, Professeurs et administratifs, pour m'avoir accueillie pendant mes premières études universitaires et pendant mes études du Master et de Doctorat.

Table des matières

Résumé

Dans cette thèse, nous procédons dans un premier temps, à généraliser la classe des opérateurs pseudo B-Fredholm en introduisant les opérateurs pseudo semi B-Fredholm supérieurs et inférieurs. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, où $\mathcal{B}(X)$ est l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X.
T est dit pseudo semi B-Fredholm supérieur(resp, pseudo semi B-Fredholm inférieur) s'il existe deux sous-espaces fermés dans X, X_1 et X_2 invariants par T tels que $X = X_1 \oplus X_2$, $T_{|X_1}$ est un opérateur semi Fredholm supérieur(resp, semi Fredholm inférieur) et $T_{|X_2}$ est un opérateur quasi-nilpotent.
T est dit pseudo semi B-Fredholm si T est pseudo semi B-Fredholm inférieur ou pseudo semi B-Fredholm supérieur.
D'autre part, nous étudions la notion de l'inversibilité dans l'algèbre $B(X)$ en se focalisant sur les opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement et opérateurs de Drazin généralisés surjectifs.
En deuxième lieu, nous faisons une étude spectrale de l'opérateur matrice de type $M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ en répondant aux questions suivantes :

1. Sous quelles conditions sur A et B nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$ pour $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ arbitraire ?
2. Etant donnés A et B, pour quels opérateurs $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$?
3. Comment décrire le passage de $\Omega_*(M_0)$ à $\Omega_*(M_C)$?

Où $\Omega_* \in \{\Omega_{ap}, \Omega_{su}\}$. Avec $\Omega_{ap}(.) := acc(\sigma_{ap}(.))$ et $\Omega_{su}(.) := acc(\sigma_{su}(.))$.

Mots clés : Opérateurs pseudo-Fredholm, opérateurs pseudo B-Fredholm, opérateurs de Drazin généralisés, opérateurs de Drazin-Riesz généralisés, opérateur matrices.

Abstract

In this thesis, at first, we proceed to generalize the class of pseudo B-Fredholm operators by introducing the pseudo upper(resp, lower) semi B-Fredholm operators.

Let $T \in \mathcal{B}(X)$, where $\mathcal{B}(X)$ is the algebra of all bounded linear operators acting on Banach space X. T is called pseudo upper semi B-Fredholm(resp, pseudo lower semi B-Fredholm) if there exists two closed subspaces X_1 and X_2 in X, T-invariant such that $X = X_1 \oplus X_2$, $T_{|X_1}$ is a upper semi Fredholm operator (resp, lower semi Fredholm) and $T_{|X_2}$ is a quasi-nilpotent operator. Moreover, T is pseudo semi B-Fredholm if T is pseudo upper semi B-Fredholm or pseudo lower semi B-Fredholm. On the other hand, we study the notion of the invertibility in $B(X)$ focusing the generalized Drazin bounded below and generalized Drazin surjective operators. Secondly, we give some spectral study of the matrices operator $M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ by giving the answers to the following questions :

1. Under what conditions on A and B we have $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$ for $C \in \mathcal{B}(Y,X) arbitrary$?

2. Given A and B, for which operators $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ we have $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$?

3. How to describe the passage from $\Omega_*(M_0)$ to $\Omega_*(M_C)$?

Where $\Omega_* \in \{\Omega_{ap}, \Omega_{su}\}$. With $\Omega_{ap}(.) := acc(\sigma_{ap}(.))$ and $\Omega_{su}(.) := acc(\sigma_{su}(.))$

Key words : Pseudo-Fredholm operators, pseudo B-Fredholm operators, ,Drazin operators, generalized Drazin operators, generalized Drazin-Riesz operators, operator matrices.

Introduction Générale

L'événement le plus remarquable dans les mathématiques au début du vingtième siècle était l'apparition de la théorie de Fredholm liée aux équations intégrales. Dans un rapport préliminaire en 1900, et dans un article publié dans la revue Acta Mathematica en 1903, Fredholm a donné une analyse complète des équations intégrales du second type, connue aujourd'hui comme équation de Fredholm. L'équation classique de Fredholm est l'équation :

$$\lambda f(s) - \int_a^b k(s,t)f(t)dt = g(s), \lambda \neq 0, a \leq s \leq b$$

avec $g \in F$ où $F = ((C[a,b],\mathbb{C}); ||.||_\infty)$ le noyau $k \in C([a,b]\times[a,b],\mathbb{C})$, λ un paramètre et la fonction f est l'inconnu dans cette équation. Cette dernière peut se formuler par : $(\lambda I - T)f = g$ où T est un opérateur compact défini par : $(Tf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt$. La résolution de cette équation mène à l'étude de l'opérateur $(\lambda I - T)$ dans un espace de Banach où $\lambda \neq 0$ et T un opérateur compact. D'où l'émergence de la notion de la théorie spectrale. Notons que les opérateurs $(\lambda I - T)$ sont des cas spéciaux d'opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm. La naissance des opérateurs de Fredholm est liée étroitement à la résolution des équations intégrales d'une part, et d'autre part, la recherche des solutions de ces équations, qui consiste notamment à inverser l'opérateur $(\lambda I - T)$, avait motivé de nombreux chercheurs à considérer de nouveaux concepts d'inversibilité moins faibles que ceux d'inversibilité ordinaire. Parmi ces versions d'inversibilité, nous citons l'inversibilité généralisée appelée aussi pseudo-inversibilité.

Ainsi, en 1958, M.P.Drazin a généralisé le concept d'inverse de Moore-Penrose pour les matrices apparut en 1920 pour faire son concept de Drazin-inverse. En fait, soit A une algèbre unitaire d'unité e. Un élément x de A est dit inversible au sens de Drazin s'il existe un élément a de A et un entier n tels que $x^n ax = x^n$, $axa = a$ et $xa = ax$. La condition $x^n ax = x^n$ est équivalente à $x - xax$ est nilpotent.

Dans [66], J.J Koliha a remplacé la nilpotence de $x - xax$ par la quasi-nilpotence pour généraliser l'inversibilité au sens de Drazin.

Plus tard, dans[111], les auteurs ont remplacé la quasi-nilpotence de $x - xax$ par le fait que $x - xax$ soit un opérateur de Riesz dans le cas de l'algèbre des opérateurs linéaires bornés. D'autre part, les opérateurs semi-Fredholm ainsi que tous les concepts qui ont pour origine la théorie de Fredholm avaient été étudié par de nombreux chercheurs. Parmi les meilleurs références dans ce domaine, nous citons les ouvrages de, T. Kato[65], V.Muller[84] et P.Aiena[2, 3]. Dans son célèbre papier[64], T.Kato a montré que tout opérateur semi-Fredholm sur un espace de Hilbert admet une propriété importante dite de décomposition, à savoir que si T est un opérateur semi-Fredholm alors il existe une décomposition de l'espace X, $X = M \oplus N$ telle que :

1. M et N sont deux sous espaces invariants par T ;
2. $T_{|M}$ la restriction de T à M est un opérateur semi-régulier c'est à dire l'image de $T_{|M}$ noté $R(T_{|M})$ est fermée et contient tous les noyaux itérés de $T_{|M}$, c'est à dire : $N(T^n_{|M}) \subset R(T_{|M})$;
3. $T_{|N}$ est nilpotent.

Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Kato. Plus tard, en 1986, M.Mbekhta dans [74] avait généralisé la décomposition de Kato en remplaçant la condition de nilpotence de $T_{|N}$ par la quasi-nilpotent de $T_{|N}$ pour obtenir la décomposition de Kato généralisée (GKD).

En 2016, dans [111], les auteurs ont généralisé cette décomposition (GKD) en remplaçant la condition : $T_{|N}$ est quasi-nilpotent par la condition : l'opérateur $T_{|N}$ est un opérateur de Riesz. Dans ce cas la décomposition est appelée la décomposition de Kato-Riesz généralisée.

En 1998, M.Berkani, dans [22, 21, 20] a défini une nouvelle classe d'opérateurs, appelée classe d'opérateurs B-Fredholm. En fait, pour un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ et pour tout entier n, l'auteur a défini T_n comme restriction de T à $R(T^n)$ vue comme une application de $R(T^n)$ dans $R(T^n)$ (en particulier $T_0 = T$). S'il existe un entier n tel que l'espace $R(T^n)$ est fermé et T_n un opérateur de Fredholm (resp, semi-Fredholm) alors T est appelé opérateur B-Fredholm (resp, semi B-Fredholm). Dans ce cas, T_m est un opérateur de Fredholm et ind(T_m)= ind(T_n) pour tout $m \geq n$. Ceci a permis de définir l'indice d'un opérateur B-Fredholm T comme étant l'indice de l'opérateur T_n où n est n'importe quel entier tel que $R(T^n)$ est fermé et T_n est un opérateur de Fredholm.

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit B-Weyl s'il est B-Fredholm d'indice 0.

Récemment, les opérateurs B-Fredholm ont été généralisé par E.Boasso, [28], aux opérateurs pseudo B-Fredholm. En effet, un opérateur linéaire borné T est appelé pseudo B-Fredholm s'il existe deux sous espaces fermés M et N invariants par T tels que $X = M \oplus N$ avec $T_1 = T_{|M}$ est un opérateur de Fredholm et $T_2 = T_{|N}$ est un opérateur quasi-nilpotent. Dans le même contexte, les auteurs H. Zariouh et H. Zguitti, dans[100], introduisent la nouvelle classe d'opérateurs appelés opérateurs pseudo B-Weyl comme généralisation des opérateurs B-Weyl. En fait, un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit pseudo B-Weyl s'il existe deux sous espaces M et N de X, invariants par T tels que $X = M \oplus N$ avec $T_1 = T_{|M}$ est un opérateur de Weyl et $T_2 = T_{|N}$ est un opérateur quasi-nilpotent. Les spectres associés à ces opérateurs sont définis par :

$$\sigma_{pBF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas pseudo B-Fredholm }\}$$

$$\sigma_{pBW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas pseudo B-Weyl }\}$$

Toutes ces observations et considérations nous avaient motivé d'une part à généraliser la classe des opérateurs semi B-Fredholm et d'autre part à considérer une situation plus générale d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ admettant une décomposition $T = T_1 \oplus T_2$ avec T_1 appartient à R où R parcourt les classes d'opérateurs suivantes : Opérateurs semi-Fredholm supérieurs (inférieurs), opérateurs de Fredholm, opérateurs semi-Weyl supérieurs (inférieurs), opérateurs de Weyl, opérateur semi-Browder supérieurs (inférieurs), opérateurs de Browder, opérateurs bornés inférieurement, opérateurs surjectifs et opérateurs inversibles et T_2 soit nilpotent, quasi-nilpotent ou opérateur de Riesz. Voir [111]
Cette thèse est structurée en cinq chapitres. Le thème principal de notre travail porte essentiellement, sur l'étude spectrale des opérateurs pseudo semi B-Fredholm, opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement et opérateurs de Drazin généralisés surjectifs, à travers la propriété de l'extension unique (SVEP) d'une part, et d'autre part, sur l'étude spectrale d'une matrice carrée triangulaire supérieure d'opérateurs de type $M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, notamment les points d'accumulations des spectres à droite et à gauche de l'opérateur matrice M_C.

Le premier chapitre de ce manuscrit est introductif, réservé aux rappels des définitions et propriétés élémentaires ainsi qu'aux résultats connus dans la littératures dont nous aurons besoins dans la suite.

Dans la première section du deuxième chapitre, nous généralisons la classe des opérateurs pseudo B-Fredholm en introduisant le concept d'opérateurs pseudo semi B-Fredholm. Ainsi nous donnons les définitions d'opérateurs pseudo semi B-Fredholm supérieurs, pseudo semi B-Fredholm inférieurs et pseudo semi B-Fredholm. Les résultats essentiels de cette section consistent à montrer que si $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur pseudo semi B-Fredholm, alors il existe une constante $\varepsilon > 0$, tel que

$\lambda I-T$ est semi-Fredholm pour tout $\lambda \in D^*(0,\varepsilon)$ et qu'il existe une constante $\mu > 0$, tel que $\lambda I-T$ est semi régulier pour tout $\lambda \in D^*(0,\mu)$, où $D^*(0,\mu)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon μ.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous donnons la définition du concept d'opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement, et celle du concept d'opérateurs de Drazin généralisés surjectifs. Puis, nous donnons les théorèmes caractérisant les deux classes d'opérateurs, la classe d'opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement et celle d'opérateurs de Drazin généralisés surjectifs.

La troisième section est consacrée à l'étude spectrale des opérateurs pseudo semi B-Fredholm, opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement et opérateurs de Drazin généralisés surjectifs, en donnant les résultats liant les spectres de ces opérateurs à travers la propriété de l'extension unique (SVEP) en montrant que $\sigma_{gDB}(T) = \sigma_{pBuF}(T) \cup S(T) = \sigma_{pBuW}(T) \cup S(T)$ et $\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{pBlF}(T) \cup S(T^*) = \sigma_{pBlW}(T) \cup S(T^*)$. Quelques applications sont données dans la quatrième section, tandis qu'en cinquième section nous donnons quelques résultats concernant les perturbations des spectres étudiés dans ce chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des classes d'opérateurs $DR_i(X)$, $gDR_i(X)$ et $gDRR_i(X)$ définies par :

$$DR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est nilpotent }\},$$

$$gDR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est quasi nilpotent }\},$$

$$gDRR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est de Riesz }\}.$$

où $R_i(X)$ est l'une des classes d'opérateurs suivantes : opérateurs semi Fredholm supérieurs, opérateurs semi Fredholm inférieurs, opérateurs de Fredholm, opérateurs semi Weyl supérieurs, opérateurs semi Weyl inférieurs, opérateurs de Weyl, opérateurs semi Browder supérieurs, opérateurs semi Browder inférieurs, opérateurs de Browder, opérateurs bornés inférieurement, opérateurs surjectifs et opérateurs inversibles. La première section de ce chapitre consiste à prouver quelques résultats sur la relation spectrale entre certaines classes d'opérateurs définies ci-dessus, et sur les perturbations de ces classes. Parmi ces résultats nous prouvons que si $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_{gDR}(T) = \sigma_{gDRW}(T) \cup (S(T) \cap S(T^*))$, et si $T \in \mathcal{B}(H)$ où H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est dans la fermeture en norme de $gDR_i(H)$.

2. T est dans la fermeture en norme de $DR_i(H)$.

Nous montrons aussi que si $T \in gDRR_i(X)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T+S \in R_i(X)$, TS est de Riesz et $[T,S]=0$, et que si $\mathcal{F}(X)$ est l'idéal des opérateurs de rang fini de $\mathcal{B}(X)$ et $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}(X)} \sigma_{gDR}(T+F) \subset \sigma_{gDRW}(T)$.

Dans la deuxième section, nous donnons certains résultats qui découlent de l'application des résultats de la première section.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'opérateur matrice $M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ en s'intéressant tout particulièrement à l'étude des points d'accumulations du spectre approximatif et du spectre surjectif de la matrice M_C. Ainsi notre étude consiste à répondre aux questions suivantes :

1. Sous quelles conditions sur A et B nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$ pour $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ arbitraire ?
2. Étant donnés A et B, pour quels opérateurs $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$?
3. Comment décrire le passage de $\Omega_*(M_0)$ à $\Omega_*(M_C)$?

où $\Omega_* \in \{\Omega_{ap}, \Omega_{su}\}$.

En première section, nous répondons à la question 1) en prouvant les résultats principaux permettant d'exprimer l'ensemble des points d'accumulations du spectre approximatif et surjectif de l'opérateur matrice M_C en fonction des points d'accumulations des spectres approximatifs et surjectifs des opérateurs A et B éléments diagonaux de la matrice M_C. Il s'agit essentiellement des résultats suivants : Si $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, alors : $\Omega_{ap}(M_C) \cup S(A^*) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B) \cup S(A^*)$ et $\Omega_{su}(M_C) \cup S(B) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B) \cup S(B)$.

Le but essentiel de la deuxième section de ce chapitre est d'apporter une réponse à la question 2) tout en prouvant que si $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, alors $\Omega_{ap}(M_0) = \Omega_{ap}(M_C)$; $\Omega_{su}(M_0) = \sigma_{su}(M_C)$, pour tout $C \in cl[R(\delta_{A,B}) + N(\delta_{A,B}) + \bigcup\limits_{\lambda,\mu \in \mathbb{C}} [N^\infty(L_{A-\lambda}) \cap N^\infty(R_{B-\mu})]$ où $cl(\Omega)$ désigne la fermeture de l'ensemble Ω.

La réponse à la question 3) est le but de la dernière section de ce chapitre. Ainsi nous voulons décrire le passage de $\Omega_{ap}(M_0)$ (resp, $\Omega_{su}(M_0)$) à $\Omega_{ap}(M_C)$ (resp,$\Omega_{su}(M_C)$) en prouvant que si $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, alors $\Omega_{ap}(M_C) \cup W = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$ où W est l'union de certains trous dans $\Omega_{ap}(M_C)$, qui se trouvent dans $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$. De même que si $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, nous prouvons que $\Omega_{su}(M_C) \cup W = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$ où W est l'union de certains trous dans $\Omega_{su}(M_C)$, qui se trouvent dans $\Omega_{ap}(B)\cap\Omega_{su}(A)$.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les spectres à droite et à gauche d'opérateurs matrices triangulaires supérieurs de type $M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, en s'intéressant aux points d'accumulation de ces spectres.

La première section est introductive, dans laquelle nous exposons les résultats existants dans la littérature en sujet des spectres à droite et à gauche de l'opérateur matrice M_C.

Dans la deuxième section, nous exprimons l'ensemble des points d'accumulations du spectre à gauche (resp, à droite) de M_C en fonction des ensembles des points d'accumulations des spectres à gauche (resp, à droite) des opérateurs A et B. Nous prouvons à cet effet les résultats suivants : Si $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, alors $acc\sigma_l(M_C)\cup S(A^*) = acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B)\cup S(A^*)$ et $acc\sigma_r(M_C)\cup S(B) = acc\sigma_r(A)\cup acc\sigma_r(B)\cup S(B)$.

La dernière section est réservée à l'étude de la différence $(acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B))\setminus acc\sigma_l(M_C)$ et $(acc\sigma_r(A)\cup acc\sigma_r(B))\setminus acc\sigma_r(M_C)$ en montrant que $acc\sigma_l(M_C)\cup W_{acc\sigma_l} = acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B)$ où $W_{acc\sigma_l}$ est l'union de certains trous dans $acc\sigma_l(M_C)$, qui se trouvent dans $acc\sigma_r(B)\cap acc\sigma_l(A)$; et $acc\sigma_r(M_C)\cup W_{acc\sigma_r} = acc\sigma_r(A)\cup acc\sigma_r(B)$ où $W_{acc\sigma_r}$ est l'union de certains trous dans $acc\sigma_r(M_C)$, qui se trouvent dans $acc\sigma_l(B)\cap acc\sigma_r(A)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre présente quelques préliminaires et notations utilisés le long de ce manuscrit, concernant la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Banach. Les définitions et les résultats présentés portent sur la théorie des opérateurs et en particulier, la théorie de Fredholm, qui seront nécessaires dans toute la suite. Ces résultats sont bien connus dans la littérature. Pour de nombreuses citations, nous documentons leurs sources mais elles ne sont pas toujours des sources originales. En outre, certaines démonstrations sont introduites là où nous trouvons que cela améliore notre exposé. Dans tout ce qui suit, X est un espace de Banach complexe, $\mathcal{B}(X)$ désigne l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur X.

1.1 Opérateurs de Fredholm

Désignons par T^*, $N(T)$, $N^\infty(T) = \bigcup\limits_{n\geq 0} N(T^n)$, $R(T)$, $R^\infty(T) = \bigcap\limits_{n\geq 0} R(T^n)$, $\rho(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{su}(T)$, $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$, respectivement l'adjoint, le noyau, le noyau généralisé, l'image, l'image généralisé, l'ensemble résolvant, le spectre approximatif, le spectre surjectif, le spectre ponctuel et le spectre de T.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'est pas inversible sur X }\};$$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'est pas injectif }\};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ap}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists (x_n)_n \subset X \text{ tel que } ||x_n|| = 1 \text{ et } (T-\lambda I)x_n \to 0 \text{ qd } n \to \infty\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, T-\lambda I \text{ n'est pas borné inférieurement }\}\end{aligned}$$

$$\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T-\lambda I \text{ n'est pas surjectif }\}.$$

Le rayon spectral $r(T)$ de T est donné par : $r(T) = sup\{|\lambda| \in \mathbb{C}, \lambda \in \sigma(T)\}$, et vérifie : $r(T) = \lim\limits_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$. Le résolvant $\rho(T)$ de T est le complémentaire de $\sigma(T)$: $\rho(T)$=$\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Définition 1.1.1. *[2, définition 1.52] Un opérateur linéaire borné T est dit semi-Fredholm supérieur (resp, semi-Fredholm inférieur) si $dimN(T) < \infty$ et $R(T)$ fermé (resp, $codimR(T) < \infty$).*

Définition 1.1.2. *[2, définition 1.52] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, T est dit semi-Fredholm s'il est semi-Fredholm inférieur ou semi-Fredholm supérieur, tandis que T est dit de Fredholm s'il est semi-Fredholm supérieur et inférieur.*

Notons que l'indice d'un opérateur semi-Fredholm est défini par $ind(T) = dimN(T) - codimR(T)$.

Définition 1.1.3. *[3, définition 2.58] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, T est dit semi-Weyl supérieur (resp, inférieur) si T est semi-Fredholm supérieur (resp, inférieur) et $ind(T) \leq 0$ (resp, $ind(T) \geq 0$). En plus T est dit opérateur de Weyl s'il est de Fredholm d'indice zéro.*

Les spectres semi-Fredholm supérieur, semi-Fredholm inférieur, semi-Weyl supérieur, semi-Weyl inférieur et semi-Fredholm de T sont fermés et définis par :

$$\sigma_{uF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur semi-Fredholm supérieur}\}$$

$$\sigma_{lF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur semi-Fredholm inférieur}\}$$

$$\sigma_{uW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur semi-Weyl supérieur}\}$$

$$\sigma_{lW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur semi-Weyl inférieur}\}$$

$$\sigma_{sF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur semi-Fredholm }\}$$

Les spectres essentiels et Weyl de T sont fermés et définis par :

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm}\}$$

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas un opérateur de Weyl}\}$$

1.2 Décomposition de type Kato

Lemme 1.2.1. *[2, Théorème 1.5, Corollaire 1.6]*
Pour un opérateur linéaire T défini sur un espace vectoriel E, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $N(T) \subseteq R(T^m)$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.
2. $N(T^n) \subseteq R(T)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. $N(T^n) \subseteq R(T^m)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}$.
4. $N(T^n) = T^m(N(T^{m+n})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}$.
5. $N^\infty(T) \subseteq R(T)$
6. $N(T) \subseteq R^\infty(T)$
7. $N^\infty(T) \subseteq R^\infty(T)$

Définition 1.2.1. *[2, définition 1.11] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. T est dit semi-régulier ou encore dit opérateur de Kato si $R(T)$ est fermée et T vérifie l'une des équivalences du lemme 1.2.1.*

Rappelons qu'un opérateur linéaire borné est dit nilpotent si $T^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, tandis que T est dit quasi-nilpotent si $\|T^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$, c'est à dire $T - \lambda$ est inversible pour tout complexe $\lambda \neq 0$.
D'autre part, On dit que M est T-invariant si M est un sous-espace de X tel que $T(M) \subset M$. Nous définissons $T_M : M \to M$ par $T_M x = Tx$, $x \in M$. Si M et N sont deux sous-espaces T-invariants fermés de X tels que $X = M \oplus N$, on dit que T est complètement réduit par le couple (M,N) et il est noté $(M,N) \in Red(T)$. Dans ce cas, nous écrivons $T = T_M \oplus T_N$.
Rappelons aussi la définition d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$, admettant la décomposition de Kato généralisée, appelé opérateur pseudo-Fredholm introduit pour la première fois par M.Mbekhta dans [75].

Définition 1.2.2. *[38] Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit, admet la décomposition de Kato généralisée (GKD), s'il existe une paire $(M,N) \in Red(T)$ telle que T_M est de Kato et T_N est quasi-nilpotent. En particulier, si T_N est nilpotent, on dit que T est de type Kato. Le couple (M,N) est appelé décomposition de Kato généralisée (GKD).*

Dans la décomposition de Kato généralisée (M,N) ci-dessus, si $dim(N) < \infty$ alors l'opérateur T est dit opérateur essentiellement Kato.

Remarque 1. *Si T est essentiellement Kato, alors T_N est nilpotent puisque tout opérateur quasi nilpotent sur un espace de dimension finie est nilpotent.*

Pour $T \in \mathcal{B}(X)$, le spectre de Kato, le spectre essentiellement Kato, le spectre de type Kato et le spectre de Kato généralisé sont définis respectivement par :

$$\sigma_K(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas de Kato }\}$$

$$\sigma_{eK}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas essentiellement Kato }\}$$

$$\sigma_{Kt}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'est pas de type Kato }\}$$

$$\sigma_{gK}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ n'admet pas la décomposition GKD }\}.$$

1.3 Opérateurs B-Fredholm

Maintenant, considérons une classe d'opérateurs, introduite et étudiée par Berkani et d'autres dans une série de papiers, qui étende la classe des opérateurs semi-Fredholm [20, 22, 21, 10]. Pour tout $T \in \mathcal{B}(X)$ et un entier naturel n, désignons par T_n la restriction de T à $R(T^n)$ vue comme application de l'espace $R(T^n)$ dans lui même (nous posons $T_0 = T$).

Définition 1.3.1. *[25] Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit semi B-Fredholm supérieur (resp, inférieur), si pour un entier $n \geq 0$, l'image $R(T^n)$ est fermée et T_n est un opérateur semi-Fredholm supérieur (resp, inférieur)*

De plus, si T_n est un opérateur de Fredholm, alors T est appelé opérateur B-Fredholm . Un opérateur est dit semi B-Fredholm s'il est un opérateur semi B-Fredholm supérieur ou inférieur . Il est facile de voir que tout opérateur nilpotent, ainsi que tout opérateur linéaire borné idempotent est un opérateur B-Fredholm. La classe des opérateurs B-Fredholm contient la classe des opérateurs de Fredholm comme sous-classe propre.
Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, d'après [20, Proposition 2.6], T est un opérateur B-Fredholm si et seulement si il existe une paire (X_1, X_2) de T- invariants sous espaces de X, telle que $X = X_1 \oplus X_2$ et $T = T_1 \oplus T_2$ où T_1 est Fredholm et T_2 est nilpotent. Les spectres semi B-Fredholm supérieur, inférieur et B-Fredholm sont définis par :

$$\sigma_{uBF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas semi B-Fredholm supérieur}\}.$$

$$\sigma_{lBF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas semi B-Fredholm inférieur}\}.$$

$$\sigma_{BF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas B-Fredholm}\}.$$

Aussi $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit opérateur B-Weyl s'il existe une paire (X_1, X_2) de T- invariants sous espaces de X, telle que $X = X_1 \oplus X_2$ et $T = T_1 \oplus T_2$ où T_1 est un opérateur de Weyl et T_2 est nilpotent. Le spectre B-Weyl est défini par :

$$\sigma_{BW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas B-Weyl}\}.$$

Récemment, les opérateurs B-Fredholm et B-Weyl ont été généralisé aux opérateurs pseudo B-Fredholm et aux opérateurs pseudo B-Weyl [28], [100]. Précisément, T est un opérateur pseudo B-Fredholm s'il existe une paire (X_1, X_2) de T- invariants sous-espaces fermés de X, telle que $X = X_1 \oplus X_2$ et $T = T_1 \oplus T_2$ où $T_1 = T_{|X_1}$ est un opérateur de Fredholm et $T_2 = T_{|X_2}$ est quasi-nilpotent. Le spectre pseudo B-Fredholm est défini par :

$$\sigma_{pBF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas pseudo B-Fredholm}\}.$$

Un opérateur T est un opérateur pseudo B-Weyl s'il existe une paire (X_1, X_2) de T- invariants sous espaces fermés de X, telle que $X = X_1 \oplus X_2$ et $T = T_1 \oplus T_2$ où $T_1 = T_{|X_1}$ est un opérateur de Weyl et $T_2 = T_{|X_2}$ est un opérateur quasi-nilpotent. Le spectre pseudo B-Weyl est défini par :

$$\sigma_{pBW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas pseudo B-Weyl}\}.$$

$\sigma_{pBW}(T)$ et $\sigma_{pBF}(T)$ n'est pas nécéssairement non vide. Par exemple, un opérateur quasi- nilpotent a un spectre pseudo B-Weyl vide et aussi un spectre B-Fredholm vide. Il est claire que $\sigma_{pBF}(T) \subset \sigma_{pBW}(T) \subset \sigma(T)$.

1.4 Inversibilité au sens de Drazin

1.4.1 Ascente et descente d'un opérateur

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, l'acsente de T est définie par $a(T) = min\{p \in \mathbb{N} : N(T^p) = N(T^{p+1})\}$, si un tel p n'existe pas, on pose par convention $a(T) = \infty$. De façons analogue, la descente de T est $d(T) = min\{q \in \mathbb{N} : R(T^q) = R(T^{q+1})\}$, si un tel q n'existe pas, on pose par convention que $d(T) = \infty$ [73]. Il est bien connu que si $a(T)$ et $d(T)$ sont à la fois finies alors $a(T) = d(T)$ et nous avons la décomposition $X = R(T^p) \oplus N(T^p)$ où $p = a(T) = d(T)$.

Les spectres de descente et celui de l'ascente de $T \in \mathcal{B}(X)$ sont définis par :

$$\sigma_{des}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'a pas de descente finie } \}$$

$$\sigma_{ac}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'a pas d'ascente finie}\}$$

Définition 1.4.1. *[84, définition 6] Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit semi-Browder supérieur (resp, inférieur) s'il est semi-Fredholm supérieur(resp, inférieur) d'ascente (resp, de descente) finie. T est dit opérateur de Browder s'il est de Fredholm d'ascente et descente finies.*

1.4.2 Inverse de Drazin

Définition 1.4.2. *[42] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, T est dit inversible au sens de Drazin ou encore dit opérateur de Drazin s'il existe un entier positif k et un opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ tels que*

$$ST = TS,\ T^{k+1}S = T^k \ \textit{et}\ S^2T = S.$$

L'opérateur S est appelé l'inverse de Drazin de T.

Ce qui est équivalent au fait que $T = T_1 \oplus T_2$; où T_1 est inversible et T_2 est nilpotent. Il est bien connu que T est inversible au sens de Drazin si son ascente et sa descente sont finies à la fois. Définissons deux ensembles $LD(X)$ et $RD(X)$ comme dans [80] :

$$LD(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : a(T) < \infty \text{ et } R(T^{a(T)+1}) \text{ est fermée } \};$$

$$RD(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : d(T) < \infty \text{ et } R(T^{d(T)+1}) \text{ est fermée } \}.$$

Définition 1.4.3. *[3, définition 2.88] Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit inversible à gauche au sens de Drazin ou encore dit opérateur de Drazin à gauche (resp. à droite) si $T \in LD(X)$ (resp. $T \in RD(X)$)*

les spectres de Drazin à gauche et à droite sont définis par :

$$\sigma_{lD}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \notin LD(X)\}$$

$$\sigma_{rD}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \notin RD(X)\}$$

et nous avons [80, 84, 10] :

$$\sigma_D(T) = \sigma_{lD}(T) \cup \sigma_{rD}(T)$$

1.4.3 Inverse de Drazin généralisé

Le concept d'opérateurs inversibles au sens de Drazin a été généralisé par Koliha [66].

Définition 1.4.4. *[66] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, T est dit inversible au sens de Koliha ou encore dit opérateur de Drazin généralisé s'il existe un opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST$, $STS = S$ et $TST - T$ est quasi-nilpotent. L'opérateur S est appelé l'inverse de Drazin généralisé de T.*

Cette inversibilité est caractérisée par le fait que, $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur de Drazin généralisé si, et seulement si $0 \notin acc(\sigma(T))$ ($acc(\sigma(T))$ est l'ensemble de tous les points d'accumulations de $\sigma(T)$), ce qui est équivalent aussi au fait que $T = T_1 \oplus T_2$ où T_1 est inversible et T_2 est quasi-nilpotent. Le spectre de Drazin généralisé est défini par :

$$\sigma_{gD}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas inversible au sens de Drain généralisé}\}$$

1.5 Propriété de l'extension unique

La propriété de l'extension unique (SVEP) est parmi les propriétés les plus importantes pour les opérateurs linéaires bornés définis sur les espaces de Banach complexes. Cette propriété remonte au début de la théorie spectrale locale, et est apparue en premier à Dunford, [44] et [45]. Par la suite la propriété a reçu des traitements systématiques dans le livre classique de Dunford et Schwartz, [47], Ceux de Colojoar*à* et Foias, [36] et récemment dans les livres de Laursen, Neumann, [71] et Aiena, [2]. Avant de donner la définition de ce concept (SVEP), nous introduisons quelques outils et considérations de la théorie spectrale constituant les premières motivations à introduire cette propriété. Nous savons que l'application dite résolvante $R(\lambda, T) := (T - \lambda I)^{-1}$ de $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur analytique défini sur l'ensemble résolvant $\rho(T)$. Si nous posons $f_x(\lambda) = R(T, \lambda)x$, $\forall x \in X$, alors $f_x : \rho(T) \to X$ vérifie l'équation

$$(T - \lambda I) f_x(\lambda) \quad = \quad x, \ \forall \ \lambda \in \rho(T) \tag{1.1}$$

Notons que l'équation $(T - \lambda I) f_x(\lambda) = x$ peut avoir des solutions analytiques pour certain $\lambda \in \sigma(T)$ c'est à dire pour des λ hors $\rho(T)$. En effet, soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur dont le spectre $\sigma(T)$ admet un sous ensemble $\sigma \neq \sigma(T)$. Notons par $P_\sigma := P(\sigma, T)$ la projection spectrale de T associée à σ, on sait que $\sigma(T_{|P_\sigma(X)}) = \sigma$, et donc la restriction $(T - \lambda I)_{|P_\sigma(X)}$ est inversible pour tout $\lambda \notin \sigma$.
Soit $x \in P_\sigma(X)$, l'équation (1.1) admet une solution analytique

$$h_x(\lambda) := (T-\lambda I)^{-1}_{|P_\sigma(X)}x, \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma.$$

D'où l'idée de l'extension des solutions analytiques f_x à un domaine plus grand que $\rho(T)$.

Ainsi le concept de l'ensemble résolvent local d'un opérateur a été défini :

Définition 1.5.1. *[2, 71] Soit un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$, l'ensemble $\rho_T(x)$ résolvant local de T au point x, est l'union de tous les sous-ensembles ouverts U de $\mathbb{C}$, pour lesquels il existe une fonction analytique $f : U \to X$ satisfaisante : $(T-\mu I)f(\mu) = x, \ \forall\mu \in U$*

Remarque 2. *Si on prend $\rho_T(x) = \cup_i U_i$, où les U_i sont des ouverts dans $\mathbb{C}$, alors par définition on a pour chaque i, il existe une fonction analytique $x_i(.)$ sur U_i à valeur dans X, qui satisfait l'équation $(T-\mu I)x_i(\mu) = x$ pour tout $\mu \in U_i$.*
Sur $U_i \cap U_j$ nous avons $(T-\mu I)(x_i(\mu)-x_j(\mu)) = 0$. Mais les solutions $x_i(.)$ ne sont pas uniques, et l'unicité n'est pas triviale, elle est abordée dans la suite.

Définition 1.5.2. *[50] Étant donné un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$, on dit que T admet la propriété de l'extension unique en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (SVEP) si pour tout voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ de λ_0, la seule fonction analytique $f : U \longrightarrow X$ vérifiant l'équation $(T-\mu I)f(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in U$ est la fonction $f \equiv 0$. T est dit admet la (SVEP) si T admet la (SVEP) en tout point $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Il s'ensuit que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ admet la (SVEP) en tout $\lambda \in \rho(T)$, alors T et son adjoint T^* admettent la (SVEP) en tout point de la frontière $\partial(\sigma(T))$ du spectre. En particulier, T et T^* admettent la (SVEP) en tout point isolé du spectre. Nous désignons par $S(T)$ l'ensemble ouvert des $\lambda \in \mathbb{C}$ où T n'admet pas la (SVEP) en λ, et nous avons T admet la (SVEP) si $S(T) = \emptyset$. Notons que : $S(T) \subset \sigma_p(T)$ et $\sigma(T) = S(T) \cup \sigma_{su}(T)$, voir [2, 71] et $\partial S(T) \subset \sigma_{su}(T)$, voir [70].
Par suite, si $int(\sigma_p(T)) = \emptyset$ alors T possède la SVEP, en particulier tout opérateur de spectre discret possède la SVEP, d'où les opérateurs compacts, algébriques et opérateurs de Riesz possèdent la SVEP.

Maintenant, rappelons quelques concepts et résultats liés à la propriété de l'extension unique (SVEP), et qui sont utiles à la caractérisation de cette propriété.
Parmi les sous-espaces importants, rappelons celui introduit par M. Mbekhta, noté $H_0(T)$ et appelé la partie quasi-nilpotente de T, est définie par : $H_0(T) := \{x \in X : \lim\limits_{n\to\infty} ||T^n x||^{\frac{1}{n}} = 0\}$ et celui introduit par Vrbovà appelé coeur analytique de T, et étudié par Mbekhta, défini par :

$$K(T) = \{x \in X \text{ tq } \exists(x_n) \subset X \text{ et } \delta > 0, x_0 = x; Tx_{n+1} = x_n; \|x_n\| \leq (\delta)^n \|x\|, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Les deux théorèmes suivants donnent une condition suffisante pour avoir la (SVEP) en un point.

Théorème 1.5.1. *[2] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, si $H_0(T-\lambda_0 I)$ ou $H_0(T-\lambda_0 I) \cap K(T-\lambda_0 I)$ est fermé, alors, $H_0(T-\lambda_0 I) \cap K(T-\lambda_0 I) = \{0\}$, donc T admet la SVEP en λ_0.*

Théorème 1.5.2. *[2] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, si $H_0(T-\lambda_0 I) + R(T-\lambda_0 I)$ est dense dans X, alors T^* admet la SVEP en λ_0.*

Chapitre 2

Opérateurs pseudo semi B-Fredholm et inverse de Drazin généralisé à travers la (SVEP)

Dans ce chapitre, nous définissons d'une part, les nouveaux concepts d'opérateurs pseudo semi-B-Fredholm supérieurs, pseudo semi B-Fredholm inférieurs et les pseudo semi B-Fredholm comme une généralisation des opérateurs semi B-Fredholm et d'autre part, nous définissons les concepts d'opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement, ceux d'opérateurs de Drazin généralisés surjectifs comme généralisation de l'inverse de Drazin généralisé. En suite nous donnons quelques résultats fondamentaux concernant ces classes d'opérateurs.

2.1 Opérateurs pseudo semi B-Fredholm

Définition 2.1.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit pseudo semi-B-Fredholm supérieur s'il existe deux sous-espaces fermés dans X, X_1 et X_2, T-invariants tel que $X = X_1 \oplus X_2$, $T_{|X_1}$ est un opérateur semi Fredholm supérieur et $T_{|X_2}$ est un opérateur quasi-nilpotent.*

Définition 2.1.2. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit pseudo semi-B-Fredholm inférieur s'il existe deux sous-espaces fermés dans X, X_1 et X_2, T-invariants tel que $X = X_1 \oplus X_2$, $T_{|X_1}$ est un opérateur semi Fredholm inférieur et $T_{|X_2}$ est un opérateur quasi-nilpotent.*

Définition 2.1.3. *Nous disons que $T \in \mathcal{B}(X)$ est pseudo semi B-Fredholm si T est pseudo semi B-Fredholm inférieur ou pseudo semi B-Fredholm supérieur.*

Définissons, respectivement, le spectre pseudo semi B-Fredholm supérieur, le spectre pseudo semi B-Fredholm inférieur et le spectre pseudo semi B-Fredholm comme suit :

$$\sigma_{pBuF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas pseudo semi B-Fredholm supérieur}\}$$

$$\sigma_{pBlF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas pseudo semi B-Fredholm inférieur}\}$$

$$\sigma_{pBsF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ T - \lambda I \text{ n'est pas pseudo semi B-Fredholm }\}$$

Donc,

$$\sigma_{pBF}(T) = \sigma_{pBuF}(T) \cup \sigma_{pBlF}(T)$$

et

$$\sigma_{pBsF}(T) = \sigma_{pBuF}(T) \cap \sigma_{pBlF}(T)$$

Notons que T est pseudo semi B-Fredholm supérieur si, et seulement si T^* est pseudo semi B-Fredholm inférieur. Alors :

$$\sigma_{pBuF}(T) = \sigma_{pBlF}(T^*) \text{ et } \sigma_{pBF}(T) = \sigma_{pBF}(T^*)$$

$\sigma_{pBsF}(T)$ n'est pas nécessairement non vide. Par exemple, un opérateur quasi-nilpotent a un spectre pseudo semi B-Fredholm vide. De même pour $\sigma_{pBuF}(T)$et $\sigma_{pBlF}(T)$.

Exemple 1. *Soit T_0 l'opérateur Shift sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par :*

$$T_0(x_1, x_2, ...) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$$

T_0 est injectif à image fermée et la codimension de $R(T_0)$ est infinie.
Considérons l'opérateur T_2 défini sur $l^2(\mathbb{N})$ par : $T_2(x_1, x_2, ...) = (x_2/2, x_3/3, ...)$.
T_2 est un opérateur quasi-nilpotent. Nous avons $T = T_0 \oplus T_2$ est un opérateur pseudo semi B-Fredholm inférieur. Notons que $0 \in \sigma_{pBuF}(T_0)$, mais $0 \notin \sigma_{pBlF}(T_0)$.

Exemple 2. *Soit T_1 l'opérateur sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par :*

$$T_1(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

T_1 est surjectif mais non injectif, donc c'est un opérateur semi-Fredholm inférieur. Soit $T = T_1 \oplus T_2$, où T_2 est l'opérateur défini dans l'exemple 1. Alors T est un opérateur pseudo semi B-Fredholm inférieur.

Le théorème suivant établit que si T est un opérateur pseudo semi B-Fredholm, alors $\lambda I - T$ est un opérateur semi-Fredholm dans un voisinage ouvert de 0.

Théorème 2.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur pseudo semi B-Fredholm. Alors il existe une constante $\varepsilon > 0$, tel que $\lambda I - T$ est semi-Fredholm pour tout $\lambda \in D^*(0,\varepsilon)$, où $D^*(0,\varepsilon)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon ε.*

Démonstration. Si T est un opérateur pseudo semi B-Fredholm, alors il existe deux sous-espaces fermés invariants par T, X_1 et X_2 tel que $X = X_1 \oplus X_2; T_{|X_1}$ est semi Fredholm, $T_{|X_2}$ est quasi-nilpotent et $T = T_{|X_1} \oplus T_{|X_2}$.
Si $X_1 = \{0\}$, donc T est quasi-nilpotent, donc pour tout $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ est inversible, d'où $T - \lambda I$ est semi Fredholm pour tout $\lambda \neq 0$.
Si $X_1 \neq \{0\}$, on a $T_{|X_1}$ est semi Fredholm, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(T - \lambda I)_{|X_1}$ est semi Fredholm pour tout $\lambda \in D(0,\varepsilon)$. Comme $T_{|X_2}$ est un quasi-nilpotent, alors $(T - \lambda I)_{|X_2}$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$, donc $(T - \lambda I)_{|X_2}$ est semi Fredholm. Donc, $(T - \lambda I)_{|X_1}$ est semi Fredholm pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0,\varepsilon)$ et $(T - \lambda I)_{|X_2}$ est semi Fredholm pour $\lambda \neq 0$, d'où $(T - \lambda I)$ est semi Fredholm pour tout $\lambda \in \mathbb{D}^*(0,\varepsilon)$. □

Par conséquent, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_{pBuF}(T), \sigma_{pBlF}(T)$ et $\sigma_{pBsF}(T)$ sont des compacts de $\mathbb{C}$. De plus, $\sigma_{uF}(T) \setminus \sigma_{pBuF}(T)$, $\sigma_{lF}(T) \setminus \sigma_{pBlF}(T)$ et $\sigma_{sF}(T) \setminus \sigma_{pBsF}(T)$ sont au plus dénombrables.*

Puisque, $\sigma_{pBuF}(T) \subset \sigma_{uBF}(T) \subset \sigma_{uF}(T)$ et $\sigma_{pBlF}(T) \subset \sigma_{lBF}(T) \subset \sigma_{lF}(T)$ on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_{uBF}(T) \setminus \sigma_{pBuF}(T)$ et $\sigma_{lBF}(T) \setminus \sigma_{pBlF}(T)$ sont au plus dénombrables*

Lemme 2.1.1. *[80] Si $X = M \oplus N$, $T = T_1 \oplus T_2$, alors T est un opérateur semi-régulier si, et seulement si T_1 et T_2 sont semi-réguliers.*

On sait que pour tout opérateur T de Fredholm, il existe un $\tau > 0$ pour lequel nous avons $T - \mu I$ est un opérateur semi-régulier quelque soit $\mu \in D(0,\tau)$[71, Proposition 3.7.2]. Dans le théorème suivant, nous généralisons ce résultats aux opérateurs pseudo semi B-Fredholm.

Théorème 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur pseudo semi B-Fredholm. Alors il existe une constante $\varepsilon > 0$, tel que $\lambda I - T$ est semi régulier pour tout $\lambda \in D^*(0, \varepsilon)$.*

Démonstration. Si T est un opérateur pseudo semi B-Fredholm, alors il existe deux sous-espaces fermés invariants par T, X_1 ,$X_2 \subset X$ tel que $X = X_1 \oplus X_2$; $T_{|X_1}$ est un semi Fredholm supérieur ou un semi Fredholm inférieur, $T_{|X_2}$ est un quasi-nilpotent et $T = T_{|X_1} \oplus T_{|X_2}$.
Si $X_1 = \{0\}$, T est un quasi-nilpotent, alors pour tous $\lambda \neq 0$, $\lambda I - T$ est inversible, donc $\lambda I - T$ est semi-régulier.
Si $X_1 \neq \{0\}$, alors $T_{|X_1}$ est un semi Fredholm supérieur ou inférieur, donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(\lambda I - T)_{|X_1}$ est un semi-régulier pour tout $\lambda \in D^*(0, \varepsilon)$. Comme $T_{|X_2}$ est un quasi-nilpotent, ce qui implique que pour tout $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - T)_{|X_2}$ est inversible, donc $(\lambda I - T)_{|X_2}$ est un semi-régulier pour tout $\lambda \in D^*(0, \varepsilon)$. Comme $(\lambda I - T)_{|X_2}$ et $(\lambda I - T)_{|X_1}$ sont des opérateurs semi-réguliers pour tout $\lambda \in D^*(0, \varepsilon)$, par le lemme 2.1.1, $\lambda I - T$ est un opérateur semi-régulier pour tout $\lambda \in D^*(0, \varepsilon)$. □

Comme conséquence directe du théorème 2.1.2, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_K(T) \setminus \sigma_{pBsF}(T)$ est au plus dénombrable*

Définissons $pBuW(X)$ et $pBlW(X)$ par :
$T \in pBuW(X)$ s'il existe deux sous-espaces fermés invariants par T, X_1 et X_2 tel que $X = X_1 \oplus X_2; T_{|X_1}$ est semi Fredholm supérieur avec $ind(T_{|X_1}) \leq 0$, et $T_{|X_2}$ est quasi-nilpotent.
$T \in pBlW(X)$ s'il existe deux sous-espaces fermés invariant par T, X_1 et X_2 tel que $X = X_1 \oplus X_2; T_{|X_1}$ est semi Fredholm inférieur avec $ind(T_{|X_1}) \geq 0$, et $T_{|X_2}$ est quasi-nilpotent. Les spectres associés à ces deux classes sont définis par :

$$\sigma_{pBuW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \notin pBuW(X)\}$$

$$\sigma_{pBlW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \notin pBlW(X)\}$$

Évidemment, nous avons : $\sigma_{pBuF}(T) \subseteq \sigma_{pBuW}(T)$ et $\sigma_{pBlF}(T) \subseteq \sigma_{pBlW}(T)$.

2.2 Opérateurs de Drazin généralisé borné inférieurement et opérateur de Drazin généralisé surjectif

Le concept d'opérateurs de Drazin généralisés inversibles a été généralisé aux concepts d'opérateurs de Drazin généralisés surjectifs et à celui de Drazin généralisés bornés inférieurement [38].

Définition 2.2.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit opérateur de Drazin généralisé borné inférieurement si $H_0(T)$ est fermé et admet un supplémentaire topologique M dans X tel que $T(M)$ est fermé où $H_0(T)$ est la partie quasi-nilpotente de l'opérateur T.*

Le théorème suivant caractérise les opérateurs de Drazin généralisés bornés inférieurement :

Théorème 2.2.1. *[38, Théorème 3.6] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$H_0(T)$ est fermée et il existe un sous espace fermé M de X tel que $(M, H_0(T)) \in Red(T)$ et $T(M)$ est fermé ;*
2. *Il existe $(M,N) \in Red(T)$ tel que T_M est borné inférieurement et T_N est quasi-nilpotent, c'est à dire $T \in \boldsymbol{gD\mathcal{M}}(X)$,*
   avec $\boldsymbol{gD\mathcal{M}}(X)$ est la classe de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(X)$ tel qu'il existe $(M,N) \in Red(T)$, avec T_M est borné inférieurement et T_N est quasi-nilpotent.
3. *T admet la décomposition de Kato généralisée GKD et $0 \notin acc\,\sigma_{ap}(T)$;*
4. *T admet la décomposition de Kato généralisée GKD et $0 \notin int\,\sigma_{ap}(T)$;*
5. *Il existe une projection bornée P sur X qui commute avec T tel que $T+P$ est borné inférieurement et TP est quasi-nilpotent ;*
6. *Il existe $(M,N) \in Red(T)$ tel que T_M est semi-Browder supérieur et T_N est quasi-nilpotent, c'est à dire $T \in \boldsymbol{gD\mathcal{B}_+}(X)$.*
   avec $\boldsymbol{gD\mathcal{B}_+}(X)$ la classe de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(X)$ tel qu'il existe $(M,N) \in Red(T)$, avec T_M est semi-Browder supérieur et T_N est quasi-nilpotent.
7. *T admet la décomposition de Kato généralisée GKD et $0 \notin \boldsymbol{acc}\,\sigma_{\mathcal{B}_+}(T)$;*
8. *T admet la décomposition de Kato généralisée GKD et $0 \notin \boldsymbol{int}\,\sigma_{\mathcal{B}_+}(T)$;*
9. *Il existe une projection bornée P sur X qui commute avec T tel que $T+P$ est semi-Browder supérieur et TP est quasi-nilpotent. En particulier, si T satisfait l'une des conditions (1)-(9), alors le sous espace N dans (2) est déterminé de façon unique et $N = H_0(T)$.*

Définition 2.2.2. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit opérateur de Drazin généralisé surjectif si $K(T)$ est fermé et admet un supplémentaire topologique N dans X tel que $N \subset H_0(T)$*

où $K(T)$ est le coeur analytique de l'opérateur T. Le théorème suivant caractérise les opérateurs de Drazin généralisés surjectifs :

Théorème 2.2.2. *[38, Théorème 3.7] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$K(T)$ est fermée et il existe un sous espace fermé N de X tel que $(N, K(T)) \in \boldsymbol{Red}(T)$ et $N \subset H_0(T)$;*
2. *Il existe $(M,N) \in Red(T)$ tel que T_M est surjectif et T_N est quasi-nilpotent, c'est à dire $T \in \boldsymbol{gDQ}(X)$, avec $\boldsymbol{gDQ}(X)$ la classe de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(X)$ tel qu'il existe $(M,N) \in Red(T)$ avec T_M est surjectif et T_N est quasi-nilpotent.*
3. *T admet la décomposition de Kato généralisée $\boldsymbol{GKD}$ et $0 \notin acc\,\sigma_{su}(T)$;*
4. *T admet la décomposition de Kato généralisée $\boldsymbol{GKD}$ et $0 \notin int\,\sigma_{su}(T)$;*
5. *Il existe une projection bornée P sur X qui commute avec T tel que $T+P$ est surjectif et TP est quasi-nilpotent ;*
6. *Il existe $(M,N) \in Red(T)$ tel que T_M est semi-Browder inférieur et T_N est quasi-nilpotent, c'est à dire $T \in \boldsymbol{gD}\mathcal{B}_-(X)$, avec $\boldsymbol{gD}\mathcal{B}_-(X)$ est la classe de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(X)$ tel qu'il existe $(M,N) \in Red(T)$ avec T_M est semi-Browder inférieur et T_N est quasi-nilpotent.*
7. *T admet la décomposition de Kato généralisée $\boldsymbol{GKD}$ et $0 \notin acc\,\sigma_{\mathcal{B}_-}(T)$;*
8. *T admet la décomposition de Kato généralisée $\boldsymbol{GKD}$ et $0 \notin int\,\sigma_{\mathcal{B}_-}(T)$;*
9. *Il existe une projection bornée P sur X qui commute avec T tel que $T+P$ est semi-Browder inférieur et TP est quasinilpotent. En particulier, si T satisfait l'une des conditions (1)-(9), alors le sous espace M dans (2) est déterminé de façon unique et $M = K(T)$.*

Les spectres de Drazin généralisé borné inférieurement et celui de Drazin généralisé surjectif de $T \in \mathcal{B}(X)$ sont définis :

$$\sigma_{gDB}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \text{ n'est pas de Drazin généralisé borné inférieurement }\}$$

$$\sigma_{gDS}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \text{ n'est pas de Drazin généralisé surjectif}\}$$

Il est claire que :

$$\sigma_{pBuF}(T) \subseteq \sigma_{pBuW}(T) \subseteq \sigma_{gDB}(T)$$

et

$$\sigma_{pBlF}(T) \subseteq \sigma_{pBlW}(T) \subseteq \sigma_{gDS}(T).$$

Remarque 3. *Nous avons* $\sigma_{pBuF}(.) \subset \sigma_{gDB}(.)$*, cette inclusion est stricte. En effet : soit* L *l'opérateur shift à gauche défini sur le Hilbert* $l^2(\mathbb{N})$ *par :*

$$L(x_1, x_2, \ldots.) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Comme $\sigma_{ap}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$*, alors* $acc(\sigma_{ap}(L)) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$*, ainsi* $\sigma_{gDB}(L) = acc(\sigma_{ap}(L))$*. Notons que* L *est semi-Fredholm supérieur, donc* $0 \notin \sigma_{pBuF}(T)$*. Ce qui montre que l'inclusion* $\sigma_{pBuF}(.) \subset \sigma_{gDB}(.)$ *est stricte. Il est donc naturel d'étudier la différence :* $\sigma_{gDM}(T) \backslash \sigma_{pBuF}(T)$*, dans le cas où* T *est un opérateur linéaire borné.*

2.3 Spectres de Drazin généralisé surjectif et de Drazin généralisé borné inférieurement

Le lemme suivant est utile dans la suite.

Lemme 2.3.1. *[60, Théorème 3.5] Supposons que* $(\lambda_0 I - T) \in \mathcal{B}(X)$ *admet une décomposition de Kato généralisée* (M, N)*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. T *admet la SVEP en* λ_0*,*
2. λ_0 *n'est pas un point d'accumulation de* $\sigma_{ap}(T)$*,*
3. λ_0 *n'est pas un point de l'intérieur de* $\sigma_{ap}(T)$*.*

Dans le théorème suivant, nous caractérisons la différence $\sigma_{gDM}(T) \backslash \sigma_{pBuF}(T)$.

Théorème 2.3.1. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors :*

$$\sigma_{gDB}(T) = \sigma_{pBuF}(T) \cup S(T) = \sigma_{pBuW}(T) \cup S(T)$$

Démonstration. $S(T) \subseteq \sigma_{gDB}(T)$ et $\sigma_{pBuF}(T) \subseteq \sigma_{gDB}(T)$, donc $\sigma_{pBuF}(T) \cup S(T) \subseteq \sigma_{gDB}(T)$. En effet : Soit $\lambda \notin \sigma_{gDB}(T)$ alors $T - \lambda I$ est de Drazin généralisé borné inférieurement, alors $H_0(T - \lambda I)$ est fermé, et d'après le théorème 1.5.1, T admet la SVEP en λ, d'où $S(T) \subseteq \sigma_{gDB}(T)$. Inversement : Soit $\lambda \notin \sigma_{pBuF}(T) \cup S(T)$, donc $T - \lambda I$ est un opérateur pseudo semi B-Fredholm supérieur, alors il existe deux sous-espaces fermés invariants par T, X_1 et X_2 tels que $X = X_1 \oplus X_2$; $T_{|X_1}$ est semi Fredholm supérieur, $T_{|X_2}$ est quasi-nilpotent. Comme T possède la SVEP en λ, donc $T_{|X_1}$ et $T_{|X_2}$ possèdent la SVEP en λ. Puisque $(T-\lambda I)_{|X_1}$ est un opérateur semi Fredholm supérieur, alors $(T-\lambda I)_{|X_1}$ admet une décomposition de Kato généralisé (GKD), comme $T_{|X_1}$ possède la SVEP en λ, par le lemme2.3.1, nous avons $\lambda \notin acc(\sigma_{ap}(T_{|X_1}))$. Puisque $(T-\lambda I)_{|X_1}$ admet une décomposition de Kato généralisé (GKD), alors d'après le théorème 2.2.1, nous obtenons $\lambda \notin acc(\sigma_{ap}(T_{|X_1})) = \sigma_{gDB}(T_{|X_1})$, alors $(T-\lambda I)_{|X_1}$ est de Drazin généralisé borné inférieurement, donc $X_1 = X_1^{'} \oplus X_1^{''}$ avec $(T-\lambda I)_{|X_1'}$ est borné inférieurement et $(T-\lambda I)_{|X_1''}$ est quasi-nilpotent, donc $X = X_1^{'} \oplus X_1^{''} \oplus X_2$ et $(T-\lambda I)_{|X_1'}$ est borné inférieurement et $(T-\lambda I)_{|X_1''\oplus X_2}$ est quasi-nilpotent, d'où $T-\lambda I$ est de Drazin généralisé borné inférieurement. □

Par dualité, nous obtenons un résultat similaire pour le spectre de Drazin généralisé surjectif.

Théorème 2.3.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors :*

$$\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{pBlF}(T) \cup S(T^*) = \sigma_{pBlW}(T) \cup S(T^*)$$

Démonstration. $\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{gDB}(T^*) = \sigma_{pBlF}(T^*) \cup S(T^*) = \sigma_{pBuF}(T) \cup S(T^*)$, donc $\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{pBlF}(T) \cup S(T^*)$ □

Corollaire 2.3.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors*

$$\sigma_{gD}(T) = \sigma_{pBF}(T) \cup S(T) \cup S(T^*)$$

Corollaire 2.3.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$.*
Si T admet la SVEP, alors :

$$\sigma_{gDB}(T) = \sigma_{pBuF}(T) = \sigma_{pBuW}(T) \ : (1)$$

Si T^* admet la SVEP, alors :

$$\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{pBlF}(T) = \sigma_{pBlW}(T) \ : (2)$$

Si T et T^* possèdent la SVEP, alors tous les spectres dans (1) et (2) coïncident et sont égaux aux spectres pseudo B-Fredholm, pseudo B-Weyl et Drazin généralisé.

Exemple 3. *Soit T l'opérateur shift sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par :*

$$Te_n = \begin{cases} 0, & si\, n = p! \text{ pour certains } p \in \mathbb{N} \\ e_{n+1} & \text{autrement.} \end{cases}$$

l'adjoint de T défini par :

$$T^* e_n = \begin{cases} 0 & si\, n = 0 \, ou \, n = p! + 1 \text{ pour certains } p \in \mathbb{N} \\ e_{n-1} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Nous avons $\sigma(T) = \overline{D(0,1)}$ le disque fermé. Les spectres ponctuels de T et T^* sont : $\sigma_p(T) = \sigma_p(T^*) = \{0\}$, d'où T et T^* admettent la SVEP. Alors, $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T) = \sigma(T)$, donc $\sigma_{gD}(T) = \sigma_{lgD}(T) = \sigma_{rgD}(T) = \overline{D(0,1)}$ D'après le corollaire 2.3.2, on a :

$$\sigma_{pBuF}(T) = \sigma_{pBlF}(T) = \sigma_{pBF}(T) = \sigma_{gD}(T) = \sigma_{lgD}(T) = \sigma_{rgD}(T) = \overline{D(0,1)}$$

2.4 Applications

Un opérateur linéaire borné T est dit supercyclique s'il existe $x \in X$ tel que l'ensemble $\{\lambda T^n x,\, \lambda \in \mathbb{C}\,, n = 0, 1, 2, ..\}$ est dense dans X. Notons que si T est supercyclique alors $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ou $\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul. Puisque tout opérateur dont le spectre ponctuel est dénombrable admet la SVEP, alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, un opérateur supercyclique . Alors :*

$$\sigma_{gDS}(T) = \sigma_{pBlF}(T)$$

On sait que tout opérateur hyponormal T sur un espace d'Hilbert admet la propriété de l'extension unique (SVEP), et donc nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.2. *Soit T un opérateur hyponormal sur un espace d'Hilbert, alors :*

$$\sigma_{gDB}(T) = \sigma_{pBuF}(T)$$

En particulier, Si T est auto-adjoint alors : $\sigma_{gD}(T) = \sigma_{pBF}(T)$

Soit A une algèbre de Banach semi-simple et commutative .

L'application $T : A \longrightarrow A$ est dite multiplicateur sur A si $T(x)y = xT(y)$ pour tous $x, y \in A$.

Notons que tout multiplicateur sur A est un opérateur linéaire continu et que l'ensemble de tous les multiplicateurs sur A est une sous algèbre unitaire fermée commutative de $B(A)$ [71, Proposition 4.1.1]. Aussi la semi-simplicité de A implique que tout multiplicateur admet la SVEP ([71, Proposition 2.2.1]). D'après le corollaire 2.3.2, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.3. *Soit T un multiplicateur sur une algèbre de Banach A semi-simple commutative, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *T est pseudo semi B-Fredholm supérieur .*
2. *T est de Drazin généralisé borné inférieurement .*

Maintenant, si en plus nous supposons que A est régulière et Tauberiènne [104], alors pour tout multiplicateur T sur A, on a T^* admet la SVEP. Ainsi, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.4. *Soit T un multiplicateur sur une algèbre de Banach A semi-simple, régulière, tauberiènne et commutative, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *T est pseudo B-Fredholm .*
2. *T est de Drazin généralisé .*

Soit G un groupe abélien localement compact, avec l'opération $+$ du groupe et la mesure de Haar μ, soit $L^1(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions sur G à valeur dans $\mathbb{C}$, intégrables par rapport à la mesure de Haar et $M(G)$ l'algèbre de Banach des mesures complexes de Borel régulières définies sur G . Nous rappelons que $L^1(G)$ est une algèbre de Banach semi-simple, tauberiènne et commutative. Alors nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.1. *Soit G un groupe abélien localement compact, $\mu \in M(G)$. Alors tout opérateur de convolution $T_\mu : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, $T_\mu(k) = \mu \star k$ est pseudo B-Fredholm si, et seulement si est un opérateur de Drazin généralisé .*

Remarque 4. *La proposition 2.4.4 et le corollaire 2.4.1 généralisent [10, Proposition 3.4] et [10, Corollaire 3.4]. Ces résultats généralisent aussi quelques résultats dans [21]*

Chapitre 3

Inverse généralisé dans $\mathcal{B}(X)$

En s'inspirant de quelques décompositions, à l'instar de, la décomposition de Kato ($T = T_1 \oplus T_2$ tels que T_1 est Kato et T_2 est nilpotent), la décomposition de Kato généralisée ($T = T_1 \oplus T_2$ tels que T_1 est Kato et T_2 est quasi-nilpotent),...il est naturel d'étudier différents types de sommes directes en moyennant plus de classes d'opérateurs, à savoir les classes des opérateurs, semi Fredholm supérieur, semi Fredholm inférieur, Fredholm, semi Weyl supérieur, semi Weyl inférieur, Weyl, semi Browder supérieur, semi Browder inférieur, Browder, borné inférieurement, surjectif et inversible, notés respectivement par $R_1(X)$, $R_2(X)$, $R_3(X)$, $R_4(X)$, $R_5(X)$, $R_6(X)$, $R_7(X)$, $R_8(X)$, $R_9(X)$, $R_{10}(X)$,$R_{11}(X)$ et $R_{12}(X)$.

Dans ce chapitre, nous étudions les nouvelles classes d'opérateurs introduites dans [38] et [111] comme la classe des opérateurs de Drazin-Riesz généralisé. Nous donnons quelques résultats pour ces classes à travers la propriété de l'extension unique (SVEP). Enfin, certaines applications sont données.

3.1 Les classes d'opérateurs $DR(i)(X)$, $gDR(i)(X)$ et $gDRR(i)(X)$

Définition 3.1.1. *Pour $1 \leq i \leq 12$, on définit les classes suivantes :*

$$DR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est nilpotent }\},$$

$$gDR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est quasi-nilpotent }\},$$

$$gDRR_i(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \text{ il existe } (M,N) \in Red(T) \text{ tels que } T_M \in R_i(X) \text{ et } T_N \text{ est de Riesz }\}.$$

Remarque 5. *1. $DR_i(X) \subset gDR_i(X)$ pour tout $1 \leq i \leq 12$.*

2. La classe $gDR_i(X)$ généralise la classe des opérateurs inversibles au sens de Drazin généralisé.

3. La classe $gDRR_{12}(X)$ est appelée la classe de Drazin-Riesz inversible généralisé, voir [111].

Lemme 3.1.1 (théorème 2.3)**.** *[10] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ alors $\sigma_D(T) = \sigma_{BW}(T) \cup [S(T) \cap S(T^*)]$*

Démonstration. Puisque $\sigma_{BW}(T) \cup [S(T) \cap S(T^*] \subseteq \sigma_D(T)$ est vérifié toujours, soit $\lambda \notin \sigma_{BW}(T) \cup [S(T) \cap S(T^*]$. On peut supposer que $\lambda = 0$. Alors T est un opérateur B-Fredholm d'indice 0.
Cas 1. Si $0 \notin S(T)$: Puisque T st un opérateur B-Fredholm d'indice 0, il s'ensuit de lemme [22][lemme 4.1] qu'il existe un opérateur Fredholm F d'indice 0 et un opérateur nilpotent N tels que $T = F \oplus N$. Si $0 \notin \sigma(F)$, alors F est inversible et donc T est Drazin inversible. Maintenant supposons que $0 \in \sigma(F)$. Puisque T admet la SVEP en 0, F admet aussi la SVEP en 0. D'où il s'ensuit de [2][théorème 3.16] que $a(F)$ est finie. F est un opérateur de Fredholm d'indice 0, donc par application du théorème [2][théorème3.4], on a $d(F)$ est aussi finie. Alors $a(F) = d(F) < \infty$ ce qui implique que 0 est un pole de F et donc un point isolé de $\sigma(F)$. N est un opérateur nilpotent, donc 0 est un point isolé de $\sigma(T)$. Par le théorème [22][théorème 4.2] nous avons $0 \notin \sigma_D(T)$.
Cas 2. Si $0 \notin S(T^*)$, la preuve est similaire. □

Posons

$$\sigma_{gDRW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \notin gDRR_6(X)\},$$

$$\sigma_{gDR}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \notin gDRR_{12}(X)\}.$$

Alors, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors*

$$\sigma_{gDR}(T) = \sigma_{gDRW}(T) \cup (S(T) \cap S(T^*)).$$

Démonstration. Nous montrons d'abord que $\sigma_{gDRW}(T) \cup (S(T) \cap S(T^*) \subset \sigma_{gDR}(T)$.
En effet : Nous avons (S(T)$\cap$ $S(T^*) \subset \sigma_{gDR}(T)$ d'après [111, Theorem 2.3].
Puisque $\sigma_{gDRW}(T) \subset \sigma_{gDR}(T)$, donc $\sigma_{gDRW}(T) \cup (S(T) \cap S(T^*) \subset \sigma_{gDR}(T)$.
Montrons maintenant que $\sigma_{gDR}(T) \subset \sigma_{gDRW}(T) \cup (S(T) \cap S(T^*)$.
Il suffit de montrer que $\sigma_{gDR}(T) \setminus \sigma_{gDRW}(T) \subset (S(T) \cap S(T^*)$.
Soit $\lambda \in \sigma_{gDR}(T) \setminus \sigma_{gDRW}(T)$ et sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $\lambda = 0$.

Supposons que $0 \notin (S(T) \cap S(T^*))$.

Deux cas à envisager :

Cas 1 : 0 $\notin$ S(T).

Puisque $0 \notin \sigma_{gDRW}(T)$ alors $T = T_1 \oplus T_2$ avec T_1 est un opérateur de Weyl et T_2 est un opérateur de Riesz. Puisque T admet la SVEP en 0 alors T_1 et T_2 admettent la SVEP en 0 . En d'autre part, T_1 est un opérateur de Weyl alors il est B-Weyl , et T_1 admet la SVEP en 0 . Donc d'après le lemme 3.1.1 nous avons T_1 est un opérateur de Drazin inversible. Ceci implique qu'il existe (E,F) $\in Red(T_1)$ tels que $T_1 = T_E \oplus T_F$ où T_E est un opérateur inversible et T_F est un opérateur nilpotent. D'où $T = T_E \oplus T_F \oplus T_2$ où T_E est un opérateur inversible et d'après [111, lemma 2.2], il s'ensuit que $T_F \oplus T_2$ est un opérateur de Riesz . Par conséquent, T est un opérateur de Drazin-Riesz inversible généralisé .C'est une contradiction.

Cas 2 : $0 \notin S(T^*)$. La preuve est similaire à celle du premier cas . □

Corollaire 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si T ou T^* admet la SVEP, alors*

$$\sigma_{gDR}(T) = \sigma_{gDRW}(T).$$

Théorème 3.1.2. *Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. Alors pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est dans la fermeture en norme de $gDR_i(H)$.*
2. *T est dans la fermeture en norme de $DR_i(H)$.*
   C'est à dire $\overline{gDR_i(H)}^{\|\|\|} = \overline{DR_i(H)}^{\|\|\|}$.

Démonstration. 2) $\Longrightarrow$ 1) Car $DR_i(H) \subset gDR_i(H)$.

Montrons que 1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit $T \in gDR_i(H)$, alors il existe (M,N) $\in Red(T)$ tels que $T = T_{|M} \oplus T_{|N}$ avec $T_1 = T_{|M} \in R_i$ et $T_2 = T_{|N}$ est quasi nilpotent.

D'après [13], il existe une suite d'opérateurs nilpotents $(T_{2,n})_n$ qui converge en norme vers T_2.

Par conséquent, la suite des opérateurs $T_1 \oplus T_{2,n}$ de $DR_i(H)$ converge en norme vers

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Enfin T est dans la fermeture en norme de $DR_i(H)$. D'où, si T est dans la fermeture en norme de $gDR_i(H)$, alors T est dans la fermeture en norme de $DR_i(H)$. □

Théorème 3.1.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $T \in gDRR_i(X)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T+S \in R_i(X)$, TS est de Riesz et $[T,S]=0$. Avec $[T,S]=TS-ST$*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si T $\in gDRR_i(X)$, alors il existe (M,N) $\in Red(T)$ tels que $T_1 = T_{|M} \in R_i(X)$ et $T_2 = T_{|N}$ est de Riesz.
Soit $S \in \mathcal{B}$ tel que $S = 0 \oplus (I_N - T_{|N})$. Comme $T_{|N} \in R_i(X)$, alors

$$T+S = T_{|M} \oplus I_N = \begin{pmatrix} T_{|M} & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \in R_i(X).$$

Nous avons

$$TS = [T_1 \oplus T_2][0 \oplus (I_2 - T_2)] = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 - T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2(I_2 - T_2) \end{pmatrix}$$

et aussi nous avons

$$ST = [T_1 \oplus T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 - T_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I_2 - T_2)T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2(I_2 - T_2). \end{pmatrix}$$

D'où

$$TS = ST.$$

Comme $I_2 - T_2$ commute avec T_2, alors $I_2 - T_2$ est de Riesz.
Par conséquent TS est de Riesz et $[T,S]=0$. □

De façon analogue, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1.4. *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $T \in gDR_i(X)$, alors il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T+S \in R_i(X)$, TS est quasi-nilpotent et $[T,S]=0$.*

Théorème 3.1.5. *Soient $\mathcal{F}(X)$ l'idéal des opérateurs de rang fini de $\mathcal{B}(X)$ et $T \in \mathcal{B}(X)$. Alors*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(X)} \sigma_{gDR}(T+F) \subset \sigma_{gDRW}(T).$$

Démonstration. Soit $\lambda \notin \sigma_{gDRW}(T)$. Nous pouvons supposons que $\lambda = 0$.
Si $0 \notin \sigma_{gDRW}(T)$, alors il existe $(M,N) \in Red(T)$ tels que $T = T_1 \oplus T_2$ avec $T_1 = T_{|M} \in \mathcal{W}(X)$ et T_2

$= T_N$ est de Riesz. D'après [56, Théorème 6.5.2], il existe $F_1 \in \mathcal{F}(X)$ tel que $T_1 + F_1$ est inversible. Soit $F = F_1 \oplus 0$. Alors

$$T + F = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 + F_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = (T_1 + F_1) \oplus T_2.$$

Par conséquent $T + F$ est dans $gDR(X)$. Ce qui implique que

$$0 \in \rho_{gDR}(T + F).$$

Enfin, on obtient

$$0 \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}(X)} \sigma(T + F).$$

$\square$

3.2 Applications

Par application du théorème 3.1.1, si nous reprenons les opérateurs T considerés dans les deux propositions 2.4.1, 2.4.2, alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$.

1. *Si* T *un opérateur supercyclique, alors* $\sigma_{gDR}(T) = \sigma_{gDRW}(T)$.
2. *Si* T *un opérateur hypernormal et en particulier si* T *est auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors* $\sigma_{gDR}(T) = \sigma_{gDRW}(T)$.

Soit T un multiplicateur sur une algèbre de Banach commutative, régulière, semi simple et Tauberiènne, comme dans la proposition 5.2.1. Alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Soit* T *un multiplicateur sur une algèbre de Banach commutative, régulière, semi simple et Tauberiènne, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $T \in gDRW(X)$.
2. T *est de Drazin-Riesz inversible généralisé.*

Soit G un groupe additif, abélien localement compact menu de la mesure de Haar μ comme dans la proposition 2.4.1. Alors nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1. *Soient G un groupe abélien localement compact et $\mu \in M(G)$. Alors tout opérateur de convolution $T_\mu : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$, $T_\mu(k) = \mu \star k \in gDRW(X)$ si, et seulement si est de Drazin- Riesz inversible généralisé.*

Chapitre 4

Spectres approximatif et surjectif d'opérateurs matrice

4.1 Introduction et notations

Soient X, Y deux espaces de Banach et $\mathcal{B}(X,Y)$ désigne l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés de X vers Y. Pour $Y = X$ nous écrivons $\mathcal{B}(X,X) = \mathcal{B}(X)$. Pour un sous ensemble K de $\mathbb{C}$, Soient $accK$, $intK$, $isoK$, ∂K et $\eta(K)$ est l'ensemble de tous les points d'accumulations de K, l'intérieur de K, les points isolés de K, la frontière de K et le cône polynomiallement convexe de K respectivement. Rappelons que le cône polynomiallement convexe de K est défini par :

$\eta(K) = \{w : |P(w)| \leq max\{|P(z)| : z \in K\}, pour tout polynome P\}.$

Maintenant, posons

$$\Omega_{ap}(T) = acc(\sigma_{ap}(T)).$$

$$\Omega_{su}(T) = acc(\sigma_{su}(T)).$$

Ainsi $\sigma_{gD}(T) = \Omega_{ap}(T) \cup \Omega_{su}(T)$.

Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$, notons par $M_C \in \mathcal{B}(X \oplus Y)$ l'opérateur sur $X \oplus Y$ par :

$$M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre, nous étudions l'ensemble des points d'accumulation du spectre approximatif et celui du spectre surjectif de l'opérateur M_C. En particulier, nous donnons des conditions pour lesquelles nous avons :

$$\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$$

où $\Omega_* \in \{\Omega_{ap}, \Omega_{su}\}$.

On sait que, dans le cas de dimension infinie, l'inclusion $\sigma(M_C) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)$, peut être stricte. Ceci a motivé de nombreux chercheurs à étudier la différence $(\sigma_*(A) \cup \sigma_*(B)) \setminus \sigma_*(M_C)$ où σ_* parcourt les différents types du spectre [19], [58], [100], [103], [107].

D'une façon naturelle, les questions suivantes se posent :

1. Sous quelles conditions sur A et B nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$ pour $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ arbitraire ?
2. Etant donnés A et B, pour quels opérateurs $C \in \mathcal{B}(Y,X)$ nous avons $\Omega_*(M_C) = \Omega_*(A) \cup \Omega_*(B)$?
3. Comment décrire le passage de $\Omega_*(M_0)$ à $\Omega_*(M_C)$?

Où $\Omega_* \in \{\Omega_{ap}, \Omega_{su}\}$.

4.2 Points d'accumulations des spectres approximatif et surjectif de l'opérateur matrice M_C

Nous commençons cette section en prouvant que l'ensemble des points d'accumulations du spectre approximatif de la somme directe de deux opérateurs, est l'union des ensembles des points d'accumulations des spectres approximatifs de ces deux opérateurs.

Proposition 4.2.1. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *alors :*

$$\Omega_{ap}(M_0) = \sigma_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$$

Démonstration. $\lambda \in \Omega_{ap}(M_0)$ si, et seulement si $\lambda \in acc(\sigma_{ap}(M_0))$ si, et seulement si $\lambda \in acc(\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(B)) = acc(\sigma_{ap}(A)) \cup acc(\sigma_{ap}(B))$ si, et seulement si $\lambda \in \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$. □

Par dualité, nous avons :

Proposition 4.2.2. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *alors :*

$$\Omega_{su}(M_0) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$$

Comme conséquence directe, nous avons le résultat de H.Zariouh et H. Zguitti [100].

Corollaire 4.2.1. *[100] Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, alors :*

$$\sigma_{gD}(M_0) = \sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B)$$

Théorème 4.2.1. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, alors :*

$$\Omega_{ap}(A) \subseteq \Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(M_0) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B) \subseteq \Omega_{ap}(M_C) \cup \Omega_{ap}(B)$$

Démonstration. Sans perte de généralité, soit $\lambda = 0 \notin \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$, alors $0 \notin acc(\sigma_{ap}(A)) \cup acc(\sigma_{ap}(B))$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, on a $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ sont injectifs à image fermée. Selon [103, Théorème 3.5], on a $M_C - \lambda I$ est injectif à image fermée, pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, donc $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C)) = \Omega_{ap}(M_C)$. D'où $\Omega_{ap}(M_C) \subseteq \sigma_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$.
Si $0 \notin \Omega_{ap}(M_C)$, alors $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C))$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, on a $M_C - \lambda I$ est injectif à image fermée, d'où $A - \lambda I$ est injectif à image fermée pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$ par [103, Théorème 3.5], on a $0 \notin \Omega_{ap}(A)$. Donc $\Omega_{ap}(A) \subseteq \Omega_{ap}(M_C)$.
Soit $\lambda = 0 \notin \Omega_{ap}(M_C) \cup \Omega_{ap}(B)$, alors $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C)) \cup acc(\sigma_{ap}(B))$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, on a $M_C - \lambda I$ et $B - \lambda I$ sont injectifs à image fermée. D'après [103, Théorème 3.5], on a $A - \lambda I$ est injectif à image fermée pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, ainsi $0 \notin acc(\sigma_{ap}(A)) = \Omega_{ap}(A)$. D'où $\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B) \subseteq \Omega_{ap}(M_C) \cup \Omega_{ap}(B)$. $\square$

Par dualité, nous pouvons prouver le théorème suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, alors :*

$$\Omega_{su}(B) \subseteq \Omega_{su}(M_C) \subseteq \Omega_{su}(M_0) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B) \subseteq \Omega_{su}(M_C) \cup \Omega_{su}(A)$$

L'inclusion, $\Omega_{su}(M_C) \subseteq \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$, peut être stricte que nous pouvons voir dans l'exemple suivant.

Exemple 4. *Soient* $A,B,C \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$ *définis par :*

$$Ae_n = e_{n+1}.$$

$$B = A^*.$$

$$C = e_0 \otimes e_0.$$

avec $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une base orthonormale de* $l^2(\mathbb{N})$. *On a* $\sigma_{su}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$, *alors* $\Omega_{su}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$. *Puisque* M_C *est unitaire, donc* $\Omega_{su}(M_C) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$. *Alors* $0 \notin \Omega_{su}(M_C)$, *mais* $0 \in \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$. *Notons que* $A^* = B$ *ne possède pas la SVEP. De plus, nous pouvons montrer que l'inclusion* $\Omega_{ap}(M_C) \subset \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$ *est stricte. Cela nous conduit à une condition suffisante qui assure l'égalité souhaitée.*

Lemme 4.2.1. *[107, lemme 2.7] Pour* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *nous avons :*

- *Si* A *est Drazin inversible, alors* $a(M_C) < \infty (d(M_C) < \infty)$ *si, et seulement si* $a(B) < \infty (d(B) < \infty)$,
- *Si* B *est Drazin inversible, alors* $d(M_C) < \infty (a(M_C) < \infty)$ *si, et seulement si* $d(A) < \infty (a(A) < \infty)$,
- *Si* A *est un operateur de Browder, alors* M_C *est un opérateur semi-Browder à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* B *est un opérateur semi Browder à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* B *est un operateur de Browder, alors* M_C *est un opérateur semi-Browder à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* A *est un opérateur semi Browder à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* A *est un operateur de Fredholm, alors* M_C *est un opérateur semi-Fredholm à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* B *est un opérateur semi-Fredholm à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* B *est un operateur de Fredholm, alors* M_C *est un opérateur semi-Fredholm à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* A *est un opérateur semi-Fredholm à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* A *est un operateur de Weyl, alors* M_C *est un opérateur semi-Weyl à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* B *est un opérateur semi-Wey à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* B *est un operateur de Weyl, alors* M_C *est un opérateur semi-Weyl à gauche (à droite, supérieur, inférieur) si , et seulement si* A *est un opérateur semi-Wey à gauche (à droite, supérieur, lower),*
- *Si* A *est un operateur inversible, alors* M_C *est un opérateur inversible à gauche (à droite) si , et seulement si* B *est un opérateur inversible à gauche (à droite),*
- *Si* B *est un operateur inversible, alors* M_C *est un opérateur inversible à gauche si , et seulement*

si A est un opérateur inversible à gauche (à droite),

- *Si A est un operateur inversible, alors M_C est un opérateur borné inférieurement si , et seulement si B est un opérateur borné inférieurement,*
- *Si B est un operateur inversible, alors M_C est un opérateur surjectif si , et seulement si A est un opérateur surjectif,*

La proposition suivante sera nécessaire dans la suite.

Proposition 4.2.3. *Soit $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$.*

1. *Si A est inversible, alors $0 \notin \Omega_{ap}(M_C)$ si, et seulement si $0 \notin \Omega_{ap}(B)$.*
2. *Si B est inversible, alors $0 \notin \Omega_{su}(M_C)$ si, et seulement si $0 \notin \Omega_{su}(B)$.*

Démonstration. 1) Supposons que $0 \notin \Omega_{ap}(M_C)$, alors $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C))$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M_C - \lambda I$ est injectif à image fermée pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \varepsilon$. Puisque A est inversible, alors il existe $\beta > 0$ tel que $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda, |\lambda| < \beta$. Soit $\eta = min(\varepsilon, \beta)$, alors $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda, |\lambda| < \eta$ et $M_C - \lambda I$ est injectif à image fermée pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \eta$. Donc $B - \lambda I$ est injectif à image fermée pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \eta$, par le lemme4.2.1, l'autre sens est similaire.
Par dualité, nous avons 2). □

Théorème 4.2.3. *Soit $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, alors :*

$$\Omega_{ap}(M_C) \cup S(A^*) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B) \cup S(A^*)$$

Démonstration. Puisque $\Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$, alors $\Omega_{ap}(M_C) \cup S(A^*) \subseteq \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B) \cup S(A^*)$. Inversement, Soit $\lambda \in (\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \backslash \Omega_{ap}(M_C)$, on peut supposer sans perte de généralité que $\lambda = 0$. Donc $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C))$, comme $\Omega_{ap}(A) \subseteq \Omega_{ap}(M_C)$, alors $0 \notin acc(\sigma_{ap}(A))$. Supposons que $0 \notin S(A^*)$:
- Si $0 \in \sigma(A)$, puisque $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup S(A^*)$ donc $0 \in \sigma_{ap}(A)$. Comme $0 \notin acc(\sigma_{ap}(A))$ alors $0 \in iso(\sigma_{ap}(A))$, d'où $0 \in iso(\sigma(A))$, ce qui implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda - A$ est inversible pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, comme $0 \notin acc(\sigma_{ap}(M_C))$, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\lambda - M_C$ est injectif à image fermée pour tout $0 < |\lambda| < \beta$. Soit $\alpha = min(\beta, \varepsilon)$, donc $\lambda I - A$ est inversible et $\lambda I - M_C$ est injectif à image fermée pour tout $0 < |\lambda| < \alpha$, par le lemme 4.2.1, on a $\lambda I - B$ est injectif à image fermée pour tout λ, $0 < |\lambda| < \alpha$, d'où $0 \notin acc(\sigma_{ap}(B))$, donc $0 \notin \Omega_{ap}(B)$. D'où, nous avons $0 \notin \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$, contradiction.

- Si $0 \notin \sigma(A)$ alors A est inversible et comme $0 \notin \Omega_{ap}(M_C)$, d'après la proposition 5.2.3, on a $0 \notin \Omega_{ap}(B)$, d'où $0 \notin \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$, contradiction. Enfin, $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \backslash \Omega_{ap}(M_C) \subseteq S(A^*)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 4.2.4. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*. Alors :*

$$\Omega_{su}(M_C) \cup S(B) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B) \cup S(B)$$

Démonstration. Comme $\Omega_{su}(M_C) \subseteq \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$, alors $\Omega_{su}(M_C) \cup S(B) \subseteq \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B) \cup S(B)$. Inversement, soit $\lambda \in (\Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)) \backslash \Omega_{su}(M_C)$, on peut supposer que $\lambda = 0$. Alors $0 \notin acc(\sigma_{su}(M_C))$, puisque $\Omega_{su}(B) \subseteq \Omega_{su}(M_C)$, donc $0 \notin acc(\sigma_{su}(B))$. Supposons que $0 \notin S(B)$:
- Si $0 \in \sigma(B)$, comme $\sigma(B) = \sigma_{su}(B) \cup S(B)$, donc $0 \in \sigma_{su}(B)$. Puisque $0 \notin acc(\sigma_{su}(B))$ donc $0 \in iso(\sigma_{su}(B))$, d'où $0 \in iso(\sigma(B))$, ce qui implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda I - B$ est inversible pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, comme $0 \notin acc(\sigma_{su}(M_C))$, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\lambda I - M_C$ est surjective pour tout λ, $0 < |\lambda| < \beta$. Soit $\alpha = min(\beta, \varepsilon)$, alors $\lambda I - B$ est inversible et $\lambda I - M_C$ est surjective pour tout λ, $0 < |\lambda| < \alpha$, par le lemme 4.2.1, on a $\lambda I - B$ est surjectif pour tout λ, $0 < |\lambda| < \alpha$, donc $0 \notin acc(\sigma_{su}(A))$, d'où $0 \notin \Omega_{su}(A)$. Nous avons donc $0 \notin \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$, contradiction.
- Si $0 \notin \sigma(B)$ alors B est inversible et comme $0 \notin \Omega_{su}(M_C)$, d'après la proposition 5.2.3, nous avons $0 \notin \Omega_{su}(A)$, d'où $0 \notin \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$, contradiction. $\square$

Corollaire 4.2.2. *Soit* $A \in \mathcal{B}(X)$*. Si* $S(A^*) = \emptyset$*, alors pour tout* $B \in \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, nous avons :*

$$\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$$

Corollaire 4.2.3. *Soit* $B \in \mathcal{B}(Y)$*. Si* $S(B) = \emptyset$ *alors pour tous* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, nous avons :*

$$\Omega_{su}(M_C) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$$

Lemme 4.2.2. *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Alors :*

$$S(T) \subset \Omega_{ap}(T) \text{ et } S(T^*) \subset \Omega_{su}(T).$$

Corollaire 4.2.4. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$*, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $int(\sigma_p(A^*)) = \emptyset$,
2. $int(\Omega_{su}(A)) = \emptyset$,

3. $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A) = \emptyset$.

Alors

$$\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$$

Démonstration. Si $int(\sigma_p(A^*)) = \emptyset$. Puisque $S(A^*) \subseteq \sigma_p(A^*)$, par le corollaire 5.2.1, nous avons $\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$.
Si $int(\Omega_{su}(A)) = \emptyset$ et comme $S(A^*) \subseteq \Omega_{su}(A)$, par le corollaire 5.2.1 nous aboutissons au résultat.
D'après le théorème 5.2.2, nous avons $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(B)$ selon le théorème 5.2.1 $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq S(A^*)$, comme $S(A^*) \subseteq \Omega_{su}(A)$, alors $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$. Si $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A) = \emptyset$, d'où $\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$. □

Corollaire 4.2.5. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $int(\sigma_p(B)) = \emptyset$,
2. $int(\Omega_{ap}(B)) = \emptyset$,
3. $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A) = \emptyset$.

Alors

$$\Omega_{su}(M_C) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$$

Démonstration. Si $int(\sigma_p(B)) = \emptyset$. Comme $S(B) \subseteq \sigma_p(B)$, par le corollaire 5.2.2, nous avons $\Omega_{su}(M_C) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$.
Si $int(\Omega_{ap}(B)) = \emptyset$ et comme $S(B) \subseteq \Omega_{ap}(B)$, alors par le corollaire 5.2.2 nous aboutissons au résultat.
Selon le théorème 4.2.2, on a $(\Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)) \setminus \Omega_{su}(M_C) \subseteq \Omega_{su}(A)$ et d'après le théorème 5.2.2 on a $(\Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)) \setminus \Omega_{su}(M_C) \subseteq S(B)$ et puisque $S(B) \subseteq \Omega_{ap}(B)$, d'où $(\Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)) \setminus \Omega_{su}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$. Si $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A) = \emptyset$, alors $\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$. □

4.3 Points d'accumulations du spectre de l'opérateur matrice diagonal M_0

Soit $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. On appelle opérateur de multiplication à gauche par A (resp. à droite par B) l'opérateur L_A défini sur $\mathcal{B}(X)$ par $L_A(X) = AX$; (resp. $R_B(X) = XB$). Notons par $\delta_{A,B}$

l'opérateur de dérivation généralisée défini sur $\mathcal{B}(X)$ par $\delta_{A,B}(X) = AX - XB = L_A(X) - R_B(X)$.

Théorème 4.3.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$. Alors : $\Omega_{ap}(M_0) = \Omega_{ap}(M_C)$ et $\Omega_{su}(M_0) = \Omega_{su}(M_C)$ pour tout $C \in cl[R(\delta_{A,B}) + N(\delta_{A,B}) + \bigcup_{\lambda,\mu \in \mathbb{C}} [N^{\infty}(L_{A-\lambda}) \cap N^{\infty}(R_{B-\mu})]$ où $cl(\Omega)$ désigne la fermeture de l'ensemble Ω*

Démonstration. Si C est dans la fermeture de l'ensemble

$$R(\delta_{A,B}) + N(\delta_{A,B}) + \bigcup_{\lambda,\mu \in \mathbb{C}} [N^{\infty}(L_{A-\lambda}) \cap N^{\infty}(R_{B-\mu})]$$

alors, $\sigma_{ap}(M_C)\backslash\{0\} = \sigma_{ap}(M_0)\backslash\{0\}$ et $\sigma_{su}(M_C)\backslash\{0\} = \sigma_{su}(M_0)\backslash\{0\}$, [19, Theorem 2.2], il reste à discuter le cas de l'origine. Soit $C \in N^{\infty}(L_{A-\lambda}) \cap N^{\infty}(R_{B-\mu})$, en raison de la stabilité du spectre par translation, nous pouvons supposer que $\lambda = \mu = 0$. Si $C \in N(L_A^n)$ est un opérateur non nul, alors $0 \in \sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A) \subseteq \sigma_{ap}(M_C) \cap \sigma_{ap}(M_0)$. D'autre part, par dualité, nous utilisons la supposition $C \in N(R_B^n)$ pour obtenir $0 \in \sigma_{su}(B) \subseteq \sigma_{su}(M_C) \cap \sigma_{su}(M_0)$. Enfin $\sigma_{ap}(M_C) = \sigma_{ap}(M_0)$ et $\sigma_{su}(M_C) = \sigma_{su}(M_0)$. $\square$

4.4 Problème de remplissage des trous liés à l'opérateur M_C

4.4.1 Introduction

Si T est un opérateur sur un espace de Hilbert H et F est un sous-espace fermé et invariant par T. Alors T a la représentation suivante :

$$T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : F \oplus F^{\perp} \longrightarrow F \oplus F^{\perp}$$

Cela motive l'intérêt à étudier les matrices d'opérateurs carrées triangulaires supérieurs. Pour une paire donnée (A,B) des opérateurs, Han et al.[55] ont examiné le problème de remplissage des trous, d'une autre manière le passage de $\sigma(M_0)$ à $\sigma(M_C)$ consiste le remplissage de quelques trous dans $\sigma(M_C)$ qui se trouvent dans $\sigma(B) \cap \sigma(A)$. Leur principal résultat peut être décrit comme suit :

Théorème 4.4.1. *[55] Soient $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Alors*

$$\sigma(M_C) \cup W = \sigma(A) \cup \sigma(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma(B)\cap\sigma(A)$.

En 2001, In Sung Hwang et Woo Young Lee [57] ont montré que :

$$\sigma_a(M_C)\cup W=\sigma_a(A)\cup\sigma_a(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma_a(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma_a(B)\cap\sigma_s(A)$.
En 2008, Shifang Zhang, Huaijie Zhong et Qiaofen Jiang [108] ont donné le résultat suivant :

$$\sigma_D(M_C)\cup W=\sigma_D(A)\cup\sigma_D(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma_D(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma_D(B)\cap\sigma_D(A)$.
Dans [31] on trouve une amélioration de ce dernier résultat, à savoir :

$$\sigma_D(M_C)\cup W=\sigma_D(A)\cup\sigma_D(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma_D(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma_{ac}(B)\cap\sigma_{des}(A)$.
En 2014, Zhang Shi-fang et al., ont étudié le problème de remplissage pour le spectre de Drazin généralisé :

$$\sigma_{gD}(M_C)\cup W=\sigma_{gD}(A)\cup\sigma_{gD}(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma_{gD}(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma_{gD}(B)\cap\sigma_{gD}(A)$.
Dans ce qui suit, nous allons étudier le passage de $\Omega_{ap}(M_0)$ (resp. $\Omega_{su}(M_0)$) à $\Omega_{ap}(M_C)$ (resp. $\Omega_{su}(M_C)$).

4.4.2 Description du passage de $\Omega_{ap}(M_0)$ (resp. $\Omega_{su}(M_0)$) à $\Omega_{ap}(M_C)$ (resp. $\Omega_{su}(M_C)$)

Théorème 4.4.2. *Soient $(A,B)\in\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$ et $C\in\mathcal{B}(Y,X)$. Alors*

$$\Omega_{ap}(M_C)\cup W=\Omega_{ap}(A)\cup\Omega_{ap}(B)$$

où W est l'union de certains trous dans $\Omega_{ap}(M_C)$, qui se trouvent dans $\Omega_{ap}(B)\cap\Omega_{su}(A)$.

Démonstration. Tout d'abord, nous pouvons affirmer que, pour chaque $C\in\mathcal{B}(Y,X)$.

$$(\Omega_{ap}(A)\cup\Omega_{ap}(B))\setminus\Omega_{ap}(M_C)\subseteq\Omega_{ap}(B)\cap\Omega_{su}(A)\quad(1)$$

$$\Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$$

En effet, la deuxième inclusion découle du théorème 4.2.1. Pour la première inclusion, selon le théorème 5.2.2, on a $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(B)$ et d'après le théorème 4.2.3 $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq S(A^*)$, comme $S(A^*) \subseteq \Omega_{su}(A)$, alors $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C) \subseteq \Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$.

Ensuite, nous affirmons que, pour chaque $T \in \mathcal{B}(X)$, nous avons

$$\eta(\Omega_{ap}(T)) = \eta(\Omega_{gD}(T)) \ \ (2)$$

où $\eta(K)$ désigne le cône polynomialement convexe de la partie compacte K de $\mathbb{C}$.

Puisque $\Omega_{ap}(T) \subseteq \sigma_{gD}(T)$, il suffit de montrer que $\partial\sigma_{gD}(T) \subseteq \partial\Omega_{ap}(T)$. Comme $int(\Omega_{ap}(T)) \subseteq int(\sigma_{gD}(T))$, il suffit de montrer que $\partial\sigma_{gD}(T) \subseteq \Omega_{ap}(T)$. Sans perte de généralité, supposons que $0 \in \partial\sigma_{gD}(T)$. Il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : Si $0 \in acc(\partial\sigma_{gD}(T))$, alors il existe $(\lambda_n) \subseteq \partial(\sigma_{gD}(T))$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, or

$$\partial(\sigma_{gD}(T)) = \partial(acc\sigma(T)) \subseteq acc\sigma(T) \backslash int\sigma(T) \subseteq \partial(\sigma(T)) \subseteq \sigma_{ap}(T)$$

on a, $\lambda_n \in \sigma_{ap}(T)$, $n = 1, 2, ...$, d'où $0 \in acc(\sigma_{ap}(T)) = \Omega_{ap}(T)$.

Cas 2 : Si $0 \in iso(\partial\sigma_{gD}(T))$, puisque $\sigma_{gD}(T)$ est fermé, alors $iso(\partial\sigma_{gD}(T)) = iso(\sigma_{gD}(T))$. $0 \in iso(\sigma_{gD}(T)) = iso(acc\sigma(T))$, donc $0 \in acc\sigma(T)$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda \notin acc(\sigma(T))$ pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$. Comme $0 \in acc\sigma(T)$, il existe $(\mu_n) \subseteq \sigma(T)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$, $\mu_n \neq 0$ pour tout n, donc il existe un entier positif N tel que $0 < |\mu_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Soit $\lambda_n = \mu_{N+1+n}$, donc $\lambda_n \in iso(\sigma(T))$ $n = 1, 2, ..$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Comme $\sigma(T)$ est fermé, donc

$$iso(\sigma(T)) \subseteq \partial(\sigma(T)) \subseteq \sigma_{ap}(T)$$

Alors, $\lambda_n \in iso(\sigma(T)) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ $n = 1, 2, ...$ Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, donc $0 \in acc(\sigma_{ap}(T))$. Ainsi $0 \in \Omega_{ap}(T)$ d'où $\partial\sigma_{gD}(T) \subseteq \Omega_{ap}(T)$. Ce qui montre (2). De même, pour chaque $T \in \mathcal{B}(X)$ et $S \in \mathcal{B}(Y)$, $\eta(\Omega_{ap}(T) \cup \Omega_{ap}(S)) = \eta(\sigma_{gD}(T) \cup \sigma_{gD}(S))$. D'après [106], Si $(A, B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y, X)$, on a

$$\eta(\sigma_{gD}(M_C)) = \eta(\sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B))$$

Alors

$$\eta(\Omega_{ap}(M_C)) = \eta(\sigma_{gD}(M_C)) = \eta(\sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B)) = \eta(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B))$$

Par conséquent

$$\eta(\Omega_{ap}(M_C)) = \eta(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \quad (3)$$

(3) indique que le passage de $\Omega_{ap}(M_C)$ à $\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$ consiste à remplir certains trous dans $\Omega_{ap}(M_C)$. Or, comme $(\Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)) \setminus \Omega_{ap}(M_C)$ est contenue dans $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$, il en résulte que le remplissage de certains des trous de $\Omega_{ap}(M_C)$ se fait dans $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$. $\square$

Pour $\Omega_{su}(A)$, nous avons aussi :

Théorème 4.4.3. *Soient* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors*

$$\Omega_{su}(M_C) \cup W = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$$

où W *est l'union de certains trous dans* $\Omega_{su}(M_C)$, *qui se trouvent dans* $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$.

Théorème 4.4.4. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors*

$$\sigma_{gD}(M_C) \cup W = \sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B)$$

où W *est l'union de certains trous dans* $\sigma_{gD}(M_C)$, *qui se trouvent dans* $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$.

Corollaire 4.4.1. *Soient* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. *Si* $\Omega_{ap}(B) \cap \Omega_{su}(A)$ *n'a pas de point intérieur, alors pour tout* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *on a*

1. $\Omega_{ap}(M_C) = \Omega_{ap}(A) \cup \Omega_{ap}(B)$
2. $\Omega_{su}(M_C) = \Omega_{su}(A) \cup \Omega_{su}(B)$
3. $\sigma_{gD}(M_C) = \sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B)$

Chapitre 5

Spectres à droite et à gauche d'opérateurs matrice

5.1 Introduction et préliminaires

Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, T est dit inversible à gauche s'il existe un opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $ST = I$, ce qui est équivalent au fait que T est borné inférieurement et $R(T)$ admet un supplémentaire topologique. De même, on dit que T est inversible à droite s'il existe un opérateur $R \in \mathcal{B}(X)$, tel que $TR = I$, ce qui est équivalent au fait que T est surjectif et $N(T)$ admet supplémentaire topologique. Le spectre à gauche est défini par :

$$\sigma_l(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; T - \lambda I \text{ n'est pas inversible à gauche}\}$$

et le spectre à droite est défini par :

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; T - \lambda I \text{ n'est pas inversible à droite}\}$$

Nous avons :

$$\sigma(T) = \sigma_l(T) \cup \sigma_r(T)$$

Puisque $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_l(T)$ et $S(A)$ est ouvert, alors $S(T) \subset acc\sigma_l(T)$, donc par dualité $S(T^*) \subset acc\sigma_r(T)$. Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, désignons par $M_C \in \mathcal{B}(X \oplus Y)$ l'opérateur défini sur $X \oplus Y$ par :

$$M_C := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Notons que, dans le cas de dimension infinie, l'inclusion $\sigma(M_C) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)$, peut être stricte . Ceci a motivé plusieurs chercheurs à étudier la différence $(\sigma_*(A) \cup \sigma_*(B)) \setminus \sigma_*(M_C)$ où σ_* parcourt les différents types du spectre, voir [48, 103, 106, 107]. Ce chapitre étudie l'ensemble des points d'accumulations des spectres à droite et à gauche des opérateurs matrices triangulaires supérieurs . D'après [48, Proposition 2.1] nous avons $S(B) \subseteq \sigma_{su}(A) \cup S(M_C)$. Puisque $\sigma_{su}(A) \subseteq \sigma(A)$ et $S(M_C) \subseteq \sigma(M_C)$, alors

$$S(B) \subseteq \sigma_{su}(A) \cup S(M_C) \subseteq \sigma(A) \cup \sigma(M_C).$$

Nous avons aussi [48, Proposition 1.1] :

$$S(A) \subseteq S(M_C) \subseteq S(A) \cup S(B).$$

Dans [48], H. Elbjaoui et E. H. Zerouali montre que

$$\sigma(M_C) \cup (S(A^*) \cap S(B)) = \sigma(A) \cup \sigma(B) \quad (1.1)$$

Dans [107], les auteurs montrent que

$$\sigma_l(M_C) \cup S(A^*) = \sigma_l(A) \cup \sigma_l(B) \cup S(A^*) \quad (1.2)$$

$$\sigma_r(M_C) \cup S(B) = \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B) \cup S(B) \quad (1.3)$$

H. Zariouh et H. Zguitti prouvent que le spectre de Drazin généralisé, $\sigma_{gD}(;) = acc(\sigma(;))$, vérifie l'équation de même forme que (1.1). Dans [106], il a été montré que tout $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, le passage de $\sigma_{gD}(M_C) = acc\sigma(M_C)$ à $\sigma_{gD}(M_0) = acc\sigma(M_0)$ consiste à remplir certains trous dans $\sigma_{gD}(M_C)$, de sorte qu'il y a l'égalité

$$\eta(\sigma_{gD}(M_C)) = \eta(\sigma_{gD}(A) \cup \sigma_{gD}(B))$$

où $\eta(K)$ désigne le cône polynomialement convexe de sous ensemble compact K de $\mathbb{C}$. Plus précisément,

$$\sigma_{gD}(M_0) = \sigma_{gD}(M_C) \cup W$$

où W est l'union de certains trous dans $\sigma_{gD}(M_C)$, qui se trouvent dans $\sigma_{gD}(B) \cap \sigma_{gD}(A)$.

D'autre part, S. Zhang et al., [107] ont étudié le passage de spectre à gauche et celui de spectre à droite, leurs résultats sont :

$$\sigma_l(M_0) = \sigma_l(M_C) \cup W_{\sigma_l}$$

où $W_{\sigma_l} \subseteq (\sigma_l(B) \cap \sigma_r(A)) \backslash \sigma_l(A)$ est contenue dans l'union de tous les trous dans $\sigma_l(A)$.
et

$$\sigma_r(M_0) = \sigma_r(M_C) \cup W_{\sigma_r}$$

où $W_{\sigma_r} \subseteq (\sigma_l(B) \cap \sigma_r(A)) \backslash \sigma_r(B)$ est contenue dans l'union de tous les trous dans $\sigma_r(B)$.

Dans ce chapitre, nous somme motivés par la relation entre $acc(\sigma_*(M_C))$ et $acc(\sigma_*(A)) \cup acc(\sigma_*(B))$, où $\sigma_* \in \{\sigma_l, \sigma_r\}$. Nous prouvons que l'ensemble des points d'accumulations du spectre à gauche vérifie l'équation de même forme que l'équation équation (1.2) et l'ensemble des points d'accumulation du spectre à droite vérifie l'équation de même forme que l'équation équation (1.3) . En outre, nous montrons que le passage de $acc(\sigma_*(M_0))$ à $acc(\sigma_*(M_C))$ peut être décrit comme suit :

$$acc(\sigma_*(M_C)) \cup W_{acc\sigma_*} = acc(\sigma_*(M_0)) = acc(\sigma_*(A)) \cup acc(\sigma_*(B))$$

où $W_{acc\sigma_*}$ est l'union de certains trous dans $acc(\sigma_*(M_C))$, qui se trouvent dans $acc(\sigma_l(B)) \cap acc(\sigma_r(A))$, $\sigma_* \in \{\sigma_l, \sigma_r\}$.

5.2 Points d'accumulation des spectres à droite et à gauche de l'opérateur M_C

Nous commençons par les lemmes ci-dessous.

Lemme 5.2.1. *[107] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Alors :*

$$\sigma_r(M_C) \cup S(B) = \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B) \cup S(B)$$

$$\sigma_l(M_C) \cup S(A^*) = \sigma_l(A) \cup \sigma_l(B) \cup S(A^*)$$

Lemme 5.2.2. *Pour $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Nous avons :*

$$acc\sigma_l(A) \subseteq acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(M_0) = acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B) \subseteq acc\sigma_l(M_C) \cup acc\sigma_l(B)$$

$$acc\sigma_r(B) \subseteq acc\sigma_r(M_C) \subseteq acc\sigma_r(M_0) = acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B) \subseteq acc\sigma_r(M_C) \cup acc\sigma_r(A)$$

Démonstration. Montrons que : $acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$. Sans perdre de généralité, soit $\lambda = 0$. $0 \notin acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, nous avons $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ sont inversibles à gauche. Puisque $\sigma_l(M_C) \subseteq \sigma_l(A) \cup \sigma_l(B)$, nous avons $M_C - \lambda I$ est inversible à gauche pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, ainsi $0 \notin acc(\sigma_l(M_C))$. Par conséquent $acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$.

Puisque $\sigma_l(M_0) = \sigma_l(A) \cup \sigma_l(B)$, alors $\lambda \in acc\sigma_l(M_0)$ si et seulement si $\lambda \in acc(\sigma_l(A) \cup \sigma_l(B)) = acc(\sigma_l(A)) \cup acc(\sigma_l(B))$. Maintenant, nous montrons que $acc\sigma_l(A) \subseteq acc\sigma_l(M_C)$. Si $0 \notin acc\sigma_l(M_C)$,

alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, nous avons $M_C - \lambda I$ est inversible à gauche, comme $\sigma_l(A) \subseteq \sigma_l(M_C)$, alors $A - \lambda I$ est inversible à gauche pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, ainsi $0 \notin acc\sigma_l(A)$. Par conséquent $acc\sigma_l(A) \subseteq acc\sigma_l(M_C)$. La dernière inclusion est triviale et s'obtient directement de la première.
Par dualité, nous pouvons montrer que :

$$acc\sigma_r(B) \subseteq acc\sigma_r(M_C) \subseteq acc\sigma_r(M_0) = acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B) \subseteq acc\sigma_r(M_C) \cup acc\sigma_r(A)$$

$\square$

L'inclusion, $acc\sigma_r(M_C) \subset acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B)$, peut ètre stricte comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5. *Soient $A, B, C \in \mathcal{B}(l^2)$ définis par :*

$$Ae_n = e_{n+1}.$$

$$B = A^*.$$

$$C = e_0 \otimes e_0.$$

où $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la base orthonormée de l'espace l^2. Nous avons $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$, alors $acc\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$. Puisque M_C est unitaire, alors $acc\sigma_r(M_C) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$. Donc $0 \notin acc\sigma_r(M_C)$, or $0 \in acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B)$. Notons que $A^* = B$ n'admet pas la SVEP.

De même, l'inclusion $acc\sigma_l(M_C) \subset acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$ est stricte comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6. *Soient $R, L, T \in \mathcal{B}(l^2)$ définis par :*

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 0, 0, \ldots).$$

*Définissons les opérateurs A, B, et C par : $A = R$, $B = L \oplus 0 : l^2 \oplus l^2 \longrightarrow l^2 \oplus l^2$
et $C = (T, 0) : l^2 \oplus l^2 \longrightarrow l^2$. Alors, nous avons $\sigma_l(A) \cup \sigma_l(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ et $\sigma_l(M_C) \subseteq \sigma(M_C) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$, donc l'inclusion $acc\sigma_l(M_C) \subset acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$ est stricte.*

Le lemme suivant sera utile dans la suite.

Lemme 5.2.3. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Alors :*

1. *Si A est inversible, alors $0 \notin acc\sigma_l(M_C)$ si et seulement si $0 \notin acc\sigma_l(B)$.*
2. *Si B is inversible, alors $0 \notin acc\sigma_r(M_C)$ si et seulement si $0 \notin acc\sigma_r(A)$.*

Démonstration. 1) Supposons que $0 \notin acc\sigma_l(M_C)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M_C - \lambda I$ est inversible à gauche pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \varepsilon$. Puisque A est inversible, alors il existe $\beta > 0$ tel que $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda, |\lambda| < \beta$. Soit $\eta = min(\varepsilon, \beta)$, alors $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda, |\lambda| < \eta$ et $M_C - \lambda I$ est inversible à gauche pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \eta$. D'où $B - \lambda I$ est inversible à gauche pour tout $\lambda, 0 < |\lambda| < \eta$, d'après le lemme4.2.1, la réciproque est similaire.
Par dualité, nous obtenons (2). □

Théorème 5.2.1. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ et $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Alors :*

$$acc\sigma_l(M_C) \cup S(A^*) = acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B) \cup S(A^*)$$

Démonstration. Puisque $acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$, alors $acc\sigma_l(M_C) \cup S(A^*) \subseteq acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B) \cup S(A^*)$. Inversement, soit $\lambda \in (acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)) \backslash acc\sigma_l(M_C)$, nous pouvons supposer que $\lambda = 0$. Alors $0 \notin acc(\sigma_l(M_C))$, puisque $acc\sigma_l(A) \subseteq acc\sigma_l(M_C)$, alors $0 \notin acc(\sigma_l(A))$. Supposons que $0 \notin S(A^*)$:
- Si $0 \in \sigma(A)$, nous avons $\sigma(A) = \sigma_l(A) \cup S(A^*)$. En effet : $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup S(A^*) \subseteq \sigma_l(A) \cup S(A^*) \subseteq \sigma(A)$. Alors $0 \in \sigma_l(A)$. Comme $0 \notin acc(\sigma_l(A))$ alors $0 \in iso(\sigma_l(A))$. D'autre part et d'après [70, Lemme 3], le $\sigma_{su}(A)$ contient la frontière de $S(A)$, alors $\sigma_{ap}(A)$ contient la frontière de $S(A^*)$. Puisque $\sigma_{ap}(A) \subseteq \sigma_l(A)$, alors $\sigma_l(A)$ contient la frontière de $S(A^*)$. Comme $\sigma(A) = \sigma_l(A) \cup S(A^*)$ et $0 \in iso(\sigma_l(A))$, alors $0 \in iso(\sigma(A)$. Ce qui implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda I - A$ is inversible pour tout λ, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, puisque $0 \notin acc(\sigma_l(M_C))$, alors il existe $\beta > 0$ tel que $\lambda I - M_C$ est inversible à gauche pour tout $0 < |\lambda| < \beta$. Soit $\alpha = min(\beta, \varepsilon)$, alors $\lambda I - A$ est inversible et $\lambda I - M_C$ est inversible à gauche pour tout $0 < |\lambda| < \alpha$, d'après le lemme4.2.1, nous avons $\lambda I - B$ est inversible à gauche pour tout λ, $0 < |\lambda| < \alpha$, donc $0 \notin acc(\sigma_l(B))$. Alors nous avons $0 \notin acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$, contradiction.
-Si $0 \notin \sigma(A)$ alors A est inversible et puisque $0 \notin acc\sigma_l(M_C)$, et d'après le lemme 5.2.3, nous avons $0 \notin acc\sigma_l(B)$, d'où $0 \notin acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$, contradiction.
Alors $(acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)) \backslash acc\sigma_l(M_C) \subseteq S(A^*)$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 5.2.2. *Soient* $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors :*

$$acc\sigma_r(M_C) \cup S(B) = acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B) \cup S(B)$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 5.2.1. □

Maintenant, dans les corollaires suivant, nous donnons des conditions suffisantes pour lesquelles nous avons l'égalité $acc\sigma_*(M_C) = acc\sigma_*(A) \cup acc\sigma_*(B)$ pour tout $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. Nous notons que la condition $S(A^*) = \emptyset$ (resp. $S(B) = \emptyset$) n'est pas vérifiée pour l'opérateur A (resp. B) défini dans l'exemple 5 (resp. Exemple 6).

Corollaire 5.2.1. *Soit* $A \in \mathcal{B}(X)$. *Si* $S(A^*) = \emptyset$, *alors pour tout* $B \in \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *nous avons :*

$$acc\sigma_l(M_C) = acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$$

Corollaire 5.2.2. *Soit* $B \in \mathcal{B}(Y)$. *Si* $S(B) = \emptyset$ *alors pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$, *nous avons :*

$$acc\sigma_r(M_C) = acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B)$$

Le théorème suivant montre que le passage de $acc\sigma_l(M_0)$ à $acc\sigma_l(M_C)$ consiste à remplir certains trous dans $acc\sigma_l(M_C)$ qui se trouvent dans l'intersection $acc\sigma_l(B) \cap acc\sigma_r(A)$.

Théorème 5.2.3. *Soient* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors*

$$acc\sigma_l(M_C) \cup W_{acc\sigma_l} = acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)$$

où $W_{acc\sigma_l}$ *est l'union de certains trous dans* $acc\sigma_l(M_C)$, *qui se trouvent dans* $acc\sigma_l(B) \cap acc\sigma_r(A)$.

Démonstration. En premier lieu, nous pouvons affirmer que, pour tout $C \in \mathcal{B}(Y,X)$,

$$(acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)) \setminus acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(B) \cap acc\sigma_r(A) \quad (2.1)$$

$$acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B).$$

En effet, la deuxième inclusion se déduit par application du lemme 5.2.2. Pour la première inclusion, d'après le lemme 5.2.2, nous avons $(acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)) \setminus acc\sigma_l(M_C) \subseteq acc\sigma_l(B)$ et par application du théorème 5.2.1 nous avons $(acc\sigma_l(A) \cup acc\sigma_l(B)) \setminus acc\sigma_l(M_C) \subseteq S(A^*)$. Puisque $S(A^*) \subseteq acc\sigma_r(A)$, alors $(acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B))\setminus acc\sigma_l(M_C)\subseteq acc\sigma_l(B)\cap acc\sigma_r(A)$.

En deuxième lieu, nous affirmons que, pour tout $T\in\mathcal{B}(X)$, nous avons

$$\eta(acc\sigma_l(T))=\eta(\sigma_{gD}(T))\ \ (2.2)$$

où $\eta(K)$ désigne le cône polynomialement convexe de la partie compacte K de $\mathbb{C}$.

Puisque $acc\sigma_l(T)\subseteq\sigma_{gD}(T)$, nous devons montrer que $\partial\sigma_{gD}(T)\subseteq\partial acc\sigma_l(T)$. Or puisque $int(acc\sigma_l(T))\subseteq int(\sigma_{gD}(T))$, il suffit de montrer que $\partial\sigma_{gD}(T)\subseteq acc\sigma_l(T)$ d'après le théorème de module maximal. Sans perdre de généralité, supposons que $0\in\partial\sigma_{gD}(T)$. Deux cas à envisager.

Cas 1 : Si $0\in acc(\partial\sigma_{gD}(T))$, alors il existe $(\lambda_n)\subseteq\partial\sigma_{gD}(T)$, tel que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$, puisque

$$\partial\sigma_{gD}(T))=\partial(acc\sigma(T))\subseteq acc\sigma(T)\backslash int\sigma(T)\subseteq\partial(\sigma(T))\subseteq\sigma_l(T)$$

nous avons, $\lambda_n\in\sigma_l(T)$, $n=1,2,...$, d'où $0\in acc\sigma_l(T)$.

Cas 2 : Si $0\in iso(\partial\sigma_{gD}(T))$, alors $iso(\partial\sigma_{gD}(T))=iso(\sigma_{gD}(T))$ du fait que $\sigma_{gD}(T)$ est fermé. Ce qui implique que $0\in iso(\sigma_{gD}(T))=iso(acc\sigma(T))$, alors $0\in acc\sigma(T)$ et il existe $\varepsilon>0$ tel que $\lambda\notin acc(\sigma(T))$ pour tout λ, $0<|\lambda|<\varepsilon$. Puisque $0\in acc\sigma(T)$, il existe $(\mu_n)\subseteq\sigma(T)$ tel que $\lim_{n\to\infty}\mu_n=0$, $\mu_n\neq 0$ pour tout n, donc il existe un certain entier positif N tel que $0<|\mu_n|<\varepsilon$ pour tout $n\geq N$. Soit $\lambda_n=\mu_{N+1+n}$, alors $\lambda_n\in iso(\sigma(T))$ $n=1,2,..$ et $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$. Puisque $\sigma(T)$ est fermé, alors

$$iso(\sigma(T))\subseteq\partial(\sigma(T))\subseteq\sigma_l(T)$$

Alors, $\lambda_n\in iso(\sigma(T))\subseteq\sigma_l(T)$ $n=1,2,...$ Puisque $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$, alors $0\in acc(\sigma_l(T))$. D'où, $\partial\sigma_{gD}(T)\subseteq acc\sigma_l(T)$. Ceci prouve (2). De *même*, pour tout $T\in\mathcal{B}(X)$ et $S\in\mathcal{B}(Y)$, $\eta(acc\sigma_l(T)\cup acc\sigma_l(S))=\eta(\sigma_{gD}(T)\cup\sigma_{gD}(S))$. D'après [106], si $(A,B)\in\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$ et $C\in\mathcal{B}(Y,X)$, nous avons

$$\eta(\sigma_{gD}(M_C))=\eta(\sigma_{gD}(A)\cup\sigma_{gD}(B))$$

Alors

$$\eta(acc\sigma_l(M_C))=\eta(\sigma_{gD}(M_C))=\eta(\sigma_{gD}(A)\cup\sigma_{gD}(B))=\eta(acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B))$$

D'où

$$\eta(acc\sigma_l(M_C))=\eta(acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B))\ \ (2.3)$$

(2.3) montre que le passage de $acc\sigma_l(M_C)$ à $acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B)$ est le remplissage de certains trous dans $acc\sigma_l(M_C)$. Or puisque $(acc\sigma_l(A)\cup acc\sigma_l(B))\setminus acc\sigma_l(M_C)$ est contenue dans $acc\sigma_l(B)\cap acc\sigma_r(A)$, il s'ensuit que le remplissage de certains trous dans $acc\sigma_l(M_C)$ se produit dans $acc\sigma_l(B)\cap acc\sigma_r(A)$. $\square$

Pour le spectre à droite, nous avons aussi :

Théorème 5.2.4. *Soient* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors*

$$acc\sigma_r(M_C) \cup W_{acc\sigma_r} = acc\sigma_r(A) \cup acc\sigma_r(B)$$

où $W_{acc\sigma_r}$ *est l'union de certains trous dans* $acc\sigma_r(M_C)$, *qui se trouvent dans* $acc\sigma_l(B) \cap acc\sigma_r(A)$.

Nous donnons maintenant un autre cas dans lequel l'égalité $\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ est satisfaisante.

Proposition 5.2.1. *Soient* $(A,B) \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ *et* $C \in \mathcal{B}(Y,X)$. *Alors*

$$\sigma_*(M_C) = \sigma_*(A) \cup \sigma_*(B) \Longrightarrow \sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B).$$

Où $\sigma_* \in \{\sigma_l, \sigma_{ap}, \sigma_r, \sigma_{su}\}$.

Démonstration. Il suffit de donner la preuve pour σ_r. Supposons que $\sigma_r(M_C) = \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$. Soit $\lambda \notin \sigma(M_C)$, alors $\lambda \notin \sigma_r(M_C) = \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$.
Supposons que $\lambda \in \sigma(A)$, alors il s'ensuit de l'égalité $\sigma(A) = S(A) \cup \sigma_r(A)$ que $\lambda \in S(A) \subseteq S(M_C) \subseteq \sigma(M_C)$. Il en résulte que $\lambda \in \sigma(M_C)$. Contradiction, D'où $\lambda \notin \sigma(A)$.
Supposons que $\lambda \in \sigma(B)$. Puisque $\sigma(B) = S(B) \cup \sigma_r(B)$, alors $\lambda \in S(B) \subseteq \sigma_{su}(A) \cup S(M_C) \subseteq \sigma(A) \cup \sigma(M_C)$ voir [48, Proposition 2.1]. D'où $\lambda \in \sigma(M_C) \cup \sigma(A)$. Contradiction, ainsi $\lambda \notin \sigma(B)$.
Par conséquent, $\sigma(A) \cup \sigma(B) \subseteq \sigma(M_C)$. Puisque $\sigma(A) \cup \sigma(B) \supseteq \sigma(M_C)$ est vérifiée, alors $\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$. □

Remarque 6. *1) Dans [106] les auteurs prouvent que :*

$$\sigma(M_C) = \sigma(M_0) \Longleftrightarrow acc\sigma(M_C) = acc\sigma(M_0).$$

Ce résultat n'est pas vrai pour les spectres à droite et les spectres à gauches . Il est facile de voir que $\sigma_l(M_C) = \sigma_l(M_0) \Longrightarrow acc\sigma_l(M_C) = acc\sigma_l(M_0)$, *mais la réciproque n'est pas vraie . En effet, Soit* H *la somme directe, dénombrable de plusieurs exemplaires de* $K = l^2 := l^2(\mathbb{N})$. *Donc, les éléments de* H *sont des suites* $(x_j)_{j\geq 1}$ *avec* $x_j \in l^2$ *et* $\sum_{j\geq 1} \| x_j \| < \infty$. *Soit* V *le shift à droite sur* K,

$$V : K \longrightarrow K, \ (z_1, z_2, z_3, ...) \longrightarrow (0, z_1, z_2, ...)$$

définissons les opérateurs A, B *et* C *par*

$$A : H \longrightarrow H, \ (x_1, x_2, ...) \longrightarrow (Vx_1, Vx_2, ...) \ \ B = 0,$$

$$C : K \longrightarrow H, \ \ (y_1, y_2, ...) \longrightarrow (y_1 e_1, y_2 e_1, ...)$$

où $e_1 = (1, 0, 0, ...)$. *Alors* $\sigma_l(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$, $\sigma_l(B) = \{0\}$ *et* $\sigma_l(M_C) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ *alors* $\sigma_l(M_0) \neq \sigma_l(M_C)$ *et* $acc\sigma_l(M_0) = acc\sigma_l(M_C)$. *D'où, la réciproque n'est pas vraie . De même, cette implication n'est pas vraie pour le spectre approximatif. Par dualité, nous pouvons montrer que cette implication n'est pas vraie pour le spectre à droite et le spectre surjectif .*

2) L'implication réciproque dans la proposition 5.2.1 n'est pas vraie . En effet, nous avons $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$, $\sigma(B) = \{0\}$ *et* $\sigma(M_C) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$, *alors* $\sigma(M_0) = \sigma(M_C)$. *Or* $\sigma_l(M_0) \neq \sigma_l(M_C)$. *et donc, la réciproque n'est pas vraie.*

3) Dans [107], les auteurs prouvent que $\sigma_l(M_0) = \sigma_l(M_C) \cup W_{\sigma_l}$, *où* $W_{\sigma_l} \subseteq (\sigma_l(B) \cap \sigma_r(A)) \setminus \sigma_l(A)$ *est contenu dans l'union de tous les trous dans* $\sigma_l(A)$. *Par le même exemple, nous avons* $W_{\sigma_l} = \{0\}$, *or* $W_{acc\sigma_l} = \emptyset$. *D'où* $W_{\sigma_l} \neq W_{acc\sigma_l}$.

Bibliographie

[1] **M.Abkari, M.Karmouni and A. Tajmouati,** *Limit points for left and right spectra of operator matrices,* A.Bol.Soc.Mat.Mex.(2017).https ://doi.org/10.1007/S40590-017-0183-5

[2] **P. Aiena,** *Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers,* Kluwer.Acad.Press, 2004.

[3] **P. Aiena,** *Semi-Fredholm operator, perturbation theory and localized SVEP,* Merida, Venezuela, 2AL 7 de Septembre de 2007.

[4] **P. Aiena, T.Miller, M.Neumann,** *On a localized single-valued extension property,*

[5] **P. Aiena, E. Rosas,** *Single-valued extension property at the points of the approximate point spectrum,* J. Math. Anal. Appl. 279 (1) (2003), 180-188.

[6] **P. Aiena, E. Rosas,** *Single-valued extension property at the points of the approximate point spectrum,* J. Math. Anal. Appl. 279 (1) (2003), 180-188. Proc.R.Ir.Acad.104(1)(2004), 17-34.

[7] **P. Aiena, C. Trapani, S. Triolo,** *SVEP and local specral radius formula for unbounded operators,* Filomat 28 :2 (2014), 263-273.

[8] **E. Albrecht,** *A caracterization of spectral operators on Hilbert Spaces,* Glasgow Math. J. 23 (1982), 91-95.

[9] **M. Amouch, M. Berkani,** *On the property (gw),* Mediterr. J. Math. 5, No. 3 (2008), 371-378.

[10] **M. Amouch, H. Zguitti,** *B-Fredholm and Drazin invertible operators through localized SVEP,* Math. Bohemica 136 (2011), 39-49.

[11] **M. Amouch, H. Zguitti,** *B-Fredholm and Drazin invertible operators through localized SVEP,* Mathematica Bohemica.136(1)(2011), 39-49.

[12] **C. Apostol,** *The reduced minimum modules,* Michigan Math. J. 32(1985), 279-294.

[13] **C. Apostol and D. Voiculescu.** *on a problem of Halmos,* Rev. Roumaine Math. Pures . Appl. 19 (1974), 283-284.

[14] **F .V. Atkinson,** *The normal solvability of linear equations in normed space,* Mat. Sb Vol 28 (1951), 3-14 (en Russe).

[15] **F.V. Atkinson,** *On relatively regular operators,* Acta. Sei. Math (Szeged), 15 (1953), 38-56.

[16] **Q. Bai, J. Huang and Alatancang Chen,** *Essential, Weyl and Browder spectra of unbounded upper triangular operator matrices,* Linear and Multilinear Algebra, Volume 64, Issue 8, (2016), 1583-1594.

[17] **M. Barraa and M. Boumazgour,** *A note on the spectrum of an upper triangular operator matrix,* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 3083-3088.

[18] **O. Bel Hadj Fredj, M. Burgos, M. Oudghiri,** *Ascent spectrum and essential ascent spectrum,* Studia Math. 187 (2008), 59-73.

[19] **C. Benhida, E. H. Zerouali, H. Zguitti,** *Spectra of upper triangular operator matrices,* Proc. Am. Math. Soc. Vol 133, Num 10, (2005), 3013-3020.

[20] **M. Berkani,** *On a class of quasi-Fredholm operators,* Integral Equations Operator Theory 34 (1999) 244-249.

[21] **M. Berkani,** *Restriction of an operator to the range of its powers,* Studia Math. 140 (2), (2000), 163-175.

[22] **M. Berkani,** *Index of B-Fredholm operators and generalization of a Weyl theorem,* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 1717-1723.

[23] **M. Berkani,** *B-Weyl spectrum and poles of the resolvent,* J. Math. Anal. Applications, 272 (2002), 596-603.

[24] **M. Berkani, M. Amouch,** *Preservation of property (gw) under perturbations,* Acta Sci. Math. (Szeged) 74 (2008), 769-781.

[25] **M. Berkani, M. Sarih,** *On semi B-Fredholm operators,* Glasgow Math. J. 43 (2001), 457-465.

[26] **M. Berkani, M. Sarih,** *An Atkinson-type theorem for B-Fredholm operators,* Studia Math. 148 (2001), 251-257.

[27] **T. Bermudez and M. Gonzalez,** *On the boundedness of the local resolvent function,* Int. Eq. Operator Theory 34, (1999) 1-8.

[28] **E. Boasso,** *Isolated spectral points and Koliha-Drazin invertible elements in quotient Banach algebras and homomorphism ranges,* Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy Vol. 115A, No. 2 (2015), 1-15.

[29] **W. Bouamama,** *Opérateurs Pseudo Fredholm dans les espaces de Banach* , Rend.Circ.Mat.Parelmo, (2004) 313-324.

[30] **W. Bouamama,** *Opérateurs de Riesz dont le coeur analytique est fermé* , Studia Mathematica 162 (1) (2004), 15-23

[31] **M. Boumazgour,** *Drazin invertibility of upper triangular operator matrices,* Linear and Multilinear Algebra. (2013) :61 :627-634.

[32] **J. Brarcic, V. Müller,** *On bounded local resolvents*, Int. Eq. Operator Theory 55, (2006) 477-486.

[33] **M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta, M. Oudghiri,** *The descent spectrum and perturbations,* J. Operator Theory 56 (2006), 259-271.

[34] **J.W. Calkin,** *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces,* Ann of Math. 42 (1941), 83-873.

[35] **S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberg, B. Yood,** *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces,* Marcel Dekker, New York, 1974.

[36] **I. Colojoará, C. Foisa,** *Theory of generalized spectral operators,* Gordon an Breach, New York, 1968.

[37] **M.D.Cvetković,***On upper and lower generalized Drazin invertible operators*, Functional Analysis, Approximation and Computation, 7(3)(2015), 67-74.

[38] **M D. Cvetković, SČ. Živković-Zlatanović,** *Generalized Kato decomposition and essential spectra,* Complex Anal Oper Theory, Vol 11 (6) (2017), 1425-1449.

[39] **A. Dajic, J.J. Koliha,** *The* σ*g-Drazin inverse and the generalized Mbekhta decomposition,* Integr. equ. Oper. theory, 99 (2006), 1-26.

[40] **S.V. Djordjević and Y.M. Han,** *A note on Weyl's theorem for operator matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2003), 2543-2547.

[41] **H.R. Dowson,** *Spectral theory of linear operator,* London Academic press, 1978.

[42] **M. P. Drazin,** *Pseudoinverse in associative rings and semigroups,* Amer. Math. Monthly 65 (1958), 506-514.

[43] **H. K. Du and J. Pan,** *Perturbation of spectrums of* 2×2 *operator matrices.* Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 761-776.

[44] **N. Dunford,** *Spectral theory II.Resolution of the identity,* Pacific J.Math.Soc.64, 217-74.

[45] **N. Dunford,** *Spectral operators,* Pacific J.Math.4, 321-54.

[46] **N. Dunford et J. Schwartz,** *Linear operators. Part III : Spectral operators,* Wiley Interscience, New York, 1971.

[47] **N.Dunford, J.T. Schwartz** *Linear operators.Part I(1967), Part II(1967), Part III,* Wiley, New York(1971).

[48] **H. Elbjaoui and E.H. Zerouali,** *Local spectral theory for* 2×2 *operator matrices,* IJMMS 2003 :42, 2667-2672.

[49] **J. Eschmeier, B. Prunaru,** *Invariant subspaces and localizable spectrum,* Int. Eq. Operator Theory 42 (2002), 461-471

[50] **J.K. Finch,** *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific J.Math.58 (1975), 61-69.

[51] **I. Fredholm,** *Sur une classe d'équations fonctionnelles,* Acta Math. 27 (1903), 365-390.

[52] **M. Gonzalez,** *An example of a bounded local resolvent,* Proceedings of the 16 th Conference on Operator Theory in Timisoara, 159-162. Bucharest 1997.

[53] **S. Grabiner,** *Ranges of products of operators,* Canad. J. Math. 26, (1974), 1430-41.

[54] **S. Grabiner,** *Uniform ascent and descent of bounded operators,* J. Math. Soc. Japan 34, 2, (1982), 317-37.

[55] **J. K. Han, H.Y. Lee and W.Y. Lee,** *Invertible completions of* 2×2 *upper triangular operator matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000), 119-123.

[56] **R.Harte.** *Invertibility and singularity for bounded linear operators,* Marcel Dekker.New York, Basel, 1988

[57] **I.S. Hwang, W.Y. Lee,** *The boundedness below of* 2×2 *upper triangular operator matrices,* Integral Equations Operator Theory 39 (2001) 267-276.

[58] **M. Houmidi, H. Zguitti,** *Propriétés spectrales locales d'une matrice carrée des opérateurs,* Acta Math.Vietnam.25 (2000), 137-144

[59] **Q. Jiang and H. Zhong,** *Components of generalized Kato resolvent set and single-valued extension property,* Frontiers of Mathematics in China August 2012, Volume 7, Issue 4, pp 695-702.

[60] **Q. Jiang, H. Zhong,** *Generalized Kato decomposition, single-valued extension property and approximate point spectrum,* J. Math. Anal. Appl. 356 (2009) 322-327.

[61] **Q. Jiang and H. Zhong,** *Topological uniform descent and localized SVEP,* J. Math. Anal. Appl. 390 (2012) 355-361.

[62] **Q. Jiang, H. Zhong, S.Zhang,** *Components topological uniform descent resolvent set and local spectral theory,* linear algebra and it applications 438(2013), 1149-1158.

[63] **M. A. Kaashoek, D.C. Lay,** *Ascent, descent, and commuting perturbations,* Trans. Amer. Math. Soc. 169 1972, 35-47.

[64] **T. Kato,** *Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators,* J. Anal. Math. 6 (1958), 261-322.

[65] **T. Kato,** *Perturbation theory for linear operators,* Springer, Berlin, 1966.

[66] **J.J Koliha,** *A generalized Drazin inverse,* Glasgow Math. J. 1996,38 :367-81.

[67] **V. Kordula, V. Müller, V. Rakocevic,** *On the semi-Browder spectrum,* Studia Math. 123 (1997), 1-13.

[68] **J.P Labrousse,** *Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm,* Rend. Circ. Math. Palermo (2), XXIX (1980) 161-258.

[69] **T.J Laffey, T.T West,** *Fredholm commutators,* Proc. R. Ir. Acad., Sect. A 82A (1982), 129-140

[70] **Laursen, K.B., Vrbová,P. :***Some remarks on the surjectivity spectrum of linear operators*, Czechoslov.Math.J.39, 730-739(1989).

[71] **K.B Laursen, M.M Neumann,** *An introduction to Local Spectral Theory,* in : London Mathematical Society Monograph, New series, Vol. 20, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[72] **D.C Lay,** *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect,* Math. Ann. 184 (1970), 197-214.

[73] **D. Lay, A. Taylor,** *Introduction to functional analysis,* J. Wiley and Sons, N. York. 1980

[74] **M. Mbekhta,** *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math J, 29 (1987) 159-175.

[75] **M. Mbekhta,** *Opérateurs pseudo-Fredholm.I : Résolvant généralisé,* J. Operator Theory, 24 (1990), 255-276.

[76] **M. Mbekhta,** *Sur la théorie spectrale locale et limite des nilpotents*, Proc. Amer. Math. Soc. 110, (1990) 621-631.

[77] **M. Mbekhta,** *Local spectrum and generalized spectrum*, Proc. Amer. Math. Soc. 112, (1991) 457-63.

[78] **M. Mbekhta,** *Ascente, descente et spéctre essentiel quasi-Fredholm,* Rend. Circ. Mat. Palermo 46 (1997), 175-196

[79] **M. Mbekhta,** *On the generalized resolvent in Banacah space,* JMAA, 189(1995) 362-377.

[80] **M. Mbekhta, V. Müller,** *On the axiomatic theory of spectrum II*, Studia Mathemtica 119 (1996), 129-147.

[81] **M. Mbekhta, A. Ouahab,** *Opérateurs s-régulier dans un espace de Banach et Théorie spectrale* , Acta Sci, Math (Szeged). 59, (1994) 525-543

[82] **T.L Miller, V.G Miller, M. Neumann,** *On Operators with Closed Analytic core*, Ren del Circ.Math.Di Palermo. S2. (2002), 495-502

[83] **V. Müller,** *On the regular spectrum,* J. Oper.Theory , 31(1994) 363-380.

[84] **V. Müller,** *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras,* 2nd edition. Oper. Theory Advances and Applications. vol 139 (2007).

[85] **V. Müller,** *On the Kato decomposition of quasi-Fredholm and B-Fredholm operators,* Proc. Workshop Geometry in Functional Analysis, Erwin Schrodinger Institute, Wien (2000).

[86] **M.M. Neumman,** *On local spectral properties of operators on Banach spaces,* Rend. Circ. Math. Palermo (2) Suppl. 56, (1998) 15-25.

[87] **V. Rakočević,** *Generalized spectrum and commuting compact perturbations,* Proc. Edinb. Math. Soc. 36 (1993), 197-209.

[88] **M. Schechter, R. Withley,** *Best Fredholm perturbation theorems,* Studia Math. 90, 1, (1988), 175-190.

[89] **C. Schmoeger,** *On isolated points of the spectrum of a bounded linear operator,* Proc. Amer. Math.Soc. 117 (1993), 715-719.

[90] **Ò Searcoid M,** *Economical finite rank perturbation of semi-Fredholm operators,* Math.Z. 198, (1988), 431-434.

[91] **A. Tajmouati, M. Abkari ,** *On generalized Drazin-Riesz operators,* Bol.Soc.Paran.Mat, to appear.

[92] **A. Tajmouati, M. Abkari , M. Karmouni,** *Generalized Drazin-type spectra of Operator matrices,* Proyecciones Journal of Mathematics, vol. 37, No 1, (2018), pp. 119-131

[93] **A. Tajmouati, M. Karmouni,** *On pseudo B-Weyl and pseudo B-Fredholm operators,* International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 108 No. 3 (2016), 513-522.

[94] **A. Tajmouati, M. Karmouni, M. Abkari,** *Pseudo semi B-Fredholm and Generalized Drazin invertible operators Through Localized SVEP,* Italian journal of pure and applied mathematics, N.37,(2017), 301-314.

[95] **A. Tajmouati, M. Karmouni,** *Generalized Kato Decomposition For Operator Matrices and SVEP,* Palestine Journal of Mathematics, to appear.

[96] **A. Tajmouati, M. Amouch, M. Karmouni,** *Symmetric difference between pseudo B-Fredholm spectrum and spectra originated from Fredholm theory,* Filomat 31 :16(2017), 5057-5064.

[97] **A. Tajmouati, M. Amouch, M.R.F. Alhomidi Zakariya, M. Abkari,** *Subspace mixing and universality criterion for a sequence of operators,* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N. 37, (2016), 339-346.

[98] **A. Tajmouati, M. Amouch, M.R.F. Alhomidi Zakariya, M. Abkari,** *Universality and transitivity of semigroups of operators,* International Journal of Pure and Applied Mathematics, volume 106, No. 4, (2016), 1087-1094.

[99] **P. Vrbová,** *On local spectral properties of operators in Banach spaces*, Czechoslovak Math. J. 23(98), (1973) 483-92.

[100] **H. Zariouh, H. Zguitti,** *On pseudo B-Weyl operators and generalized drazin invertible for operator matrices,* Linear and Multilinear Algebra, Volume 64, issue 7, (2016), 1245-1257.

[101] **Q. Zeng, Q. Jiang and H. Zhong,** *Spectra originated from semi B-Fredholm theory and commuting perturbations*, Studia Math. 219, 1 (2013), 1-18.

[102] **Q. Zeng, H. Zhong and K. Yanb,** *An extension of a result of Djordjevic and its applications*, Linear and Multilinear Algebra, Volume 64, issue 2, (2016), 247-257.

[103] **E.H Zerouali, H. Zguitti,** *Perturbation of spectra of operator matrices and local spectral theory,* J Math Anal Appl, 2006, 324 : 992-1005.

[104] **E.H Zerouali, H. Zguitti,** *On the weak decomposition property* δ_w, Studia.Math.167(2005) 17-28.

[105] **H. Zguitti,** *A note on Drazin invertibility for upper triangular block operators,* Mediterr. J. Math. (2013),10 : 1497-1507.

[106] **S.Zhang, H.Zhong, L.Lin.** *Generalized Drazin Spectrum of Operator Matrices,* Appl. Math. J. Chinese Univ. 29 (2) (2014), 162-170

[107] **S F Zhang, H J Zhang, J D Wu.** *Spectra Of Upper Triangular Operator Matrices,* Acta Math Sinica (in Chinese), 2011, 54 : 41-60.

[108] **S. Zhang , H. Zhong , Q. Jiang,** *Drazin spectrum of operator matrices on the Banach space,* Linear Algebra Appl. (2008) 429 :2067-2075.

[109] **W. Zhong,** *Method of separation of variables and Hamiltonian system,* Comput. Struct. Mech. Appl. (1991),8 :229-240(Chinese).

[110] **T.T West,** *The decomposition of Riesz operators,* Proc. London Math. Soc. (3) 16 (1966), 737-752.

[111] **SČ. Živković-Zlatanović, M D. Cvetković,** *Generalized Kato Riesz decomposition and Generalized Drazin Riesz inevrtible operators,* Linear and Multilinear Algebra Vol. 65(6), (2017), 1171-1193.