

Dédicace

*À mes très chers parents
À tous mes frères et sœurs
À ma grande famille
À tous mes professeurs
À tous mes ami(e)s
je vous aime.*

Remerciement

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire Électronique, Signaux, Systèmes et Informatique (LESSI) du département de physique de la Faculté des Sciences Dhar El Mehraz Fès, sous la direction du professeur **Ismail BOUMHIDI**, à qui je témoigne toute ma gratitude pour son précieux aide et le soutien qu'il m'a accordé.

J'adresse mes sincères et profonds remerciements à mon professeur **Abdelaziz HMAMED**. Je tiens à le remercier de m'avoir accordé sa confiance en faisant toujours preuve d'une très grande disponibilité à mon égard. Sa compétence technique, son expérience, ses conseils, ses encouragements et ses remarques minutieuses m'ont été grandement profitable.

Je tiens à remercier très sincèrement le Mr. **Ahmed EL HAJJAJI**, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne, d'Amiens, France, pour m'avoir guidé durant toute l'élaboration de ce mémoire avec le sérieux et la compétence qui le caractérise. Qu'il trouve ici le témoignage de ma sincère gratitude pour ses conseils et ses encouragements et de mon profond respect pour sa rigueur scientifique et sa constante disponibilité. Qu'il trouve aussi ici l'expression de mes très vives reconnaissances.

J'associe également à ces remerciements le Mr. **Bensalem BOUKILI**, professeur à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès, qui m'a fait l'honneur d'être son étudiant et à qui je témoigne ma gratitude.

J'adresse mes profonds remerciements au Mr. **Ahmed ABBOU**, Professeur à Ecole Mohammadia d'Ingénieurs-Rabat, Mr. **Adil BROURI**, Professeur à Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers - Meknès et Mr. **EL Houssaine TISSIR**, Professeur à Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz-Fès qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs commentaires et leurs questions m'ont notamment permis d'améliorer ce manuscrit. Pour tout cela, je leur exprime ma vive reconnaissance. J'exprime ma profonde gratitude à Mr. **Ahmed EL HAJJAJI**, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne, d'Amiens, France,

pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse.

Comme je tiens à remercier Mr. **BOSCHE Jérôme**, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne, d'Amiens, France et Mr. **BENBRAHIM Mohammed**, Professeurs à la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès, pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Mes plus grands remerciements vont aussi à tous mes ami(e)s et à mes collègues du LESSI, qui ont su créer une ambiance de travail très agréable durant ces quelques années pendant lesquelles j'ai eu le plaisir de collaborer avec eux.

Enfin, je remercie les membres de ma famille (ma mère, mon père, mes frères et mes soeurs) pour leur soutien au cours de ces longues années d'études et sans lesquels je n'en serai pas là aujourd'hui.

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Electronique Signaux Systèmes et d'informatique de la faculté des Sciences Dhar El Mahraz Fès sous les directions des professeurs **Ismail BOUMHIDI** et **Abdelaziz HMAMED**. Ce travail a donné lieu aux publications et communications suivantes.

Journaux Internationaux indexés :

1. **El-Amrani, A.**, Boukili, B., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2017). *Robust H_∞ filtering for 2D continuous systems with finite frequency specifications*. International Journal of Systems Science, 49(1), 43-57, (Taylor & Francis)
DOI : <https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1391960>
2. **El-Amrani, A.**, Boukili, B., El Hajjaji, A., & Hmamed, A. (2018). *H_∞ model reduction for T-S fuzzy systems over finite frequency ranges*. Optimal Control Applications and Methods, 39(4), 1479-1496. (Wiley Online Library)
DOI : <https://doi.org/10.1002/oca.2422>
3. Berrada, Y., **El-Amrani, A.** & Boumhidi, I. (2018). *Feedback T-S fuzzy controller in finite frequency for wind turbine*. chapter in Renewable Energies (Reference RE-410), (**accepted**), (Springer).
4. **El-Amrani, A.**, Boumhidi, I., Boukili, B., & Hmamed, A. (2018). *A finite frequency range approach to H_∞ filtering for T-S fuzzy systems*. Procedia Computer Science, **accepted**, (Elsevier).
5. **El-Amrani, A.**, Hmamed, A., & Boumhidi, I. *Improved finite frequency H_∞ filtering for Takagi-Sugeno fuzzy systems*. International Journal of Systems, Control and Communications , (**révision**).

6. Lahmadi, K., **El-Amrani, A.**, Boukili, B., & Boumhidi, I. *Robust Finite Frequency H_∞ Filtering for Uncertain Continuous-Time Systems*. International Journal of Systems, Control and Communications , (**révision**).
7. **El-Amrani, A.**, Boumhidi, I., & Hmamed, A. *H_∞ Fuzzy control of T-S fuzzy continuous systems with finite frequency specifications*. International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation, soumis pour publication.

Conférences internationales indexés :

1. **El-Amrani, A.**, Hmamed, A., Boukili, B., & El Hajjaji, A. (2016, May). *H_∞ filtering of T-S fuzzy systems in Finite Frequency domain*. 5th International Conference on Systems and Control (ICSC), (pp. 306-312). Marrakesh, Morocco. IEEE. **DOI : 10.1109/ICoSC.2016.7507038**
2. **El-Amrani, A.**, Berrada, Y., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2017, March). *Finite frequency H_∞ filtering for discrete-time uncertain systems*. 14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), (pp. 580-585). Marrakesh, Morocco. IEEE. **DOI : 10.1109/SSD.2017.8166950**
3. Berrada, Y., **El-Amrani, A.**, & Boumhidi, I. (2017, March). *Finite frequency TS fuzzy control for a variable speed wind turbine*. 14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), (pp. 505-510). Marrakesh, Morocco. IEEE. **DOI : 10.1109/SSD.2017.8166951**
4. **El-Amrani, A.**, Boukili, B., Hmamed, A., & Boumhidi, I. (2017, April). *H_∞ model reduction for T-S fuzzy systems with finite frequency specifications*. 2th International Conference on Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV), (pp. 1-7). Fez, Morocco. IEEE. **DOI : 10.1109/ISACV.2017.8054975**
5. **El-Amrani, A.**, Boukili, B., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2018, April). *Positive real control for 2D continuous systems roesser models in finite frequency domains*. 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA), (pp. 1-6). Mohammedia, Morocco. IEEE. **DOI : 10.1109/ICOA.2018.8370511**

-
6. **El-Amrani, A.**, El Hajjaji, A., Boukili, B., & Hmamed, A. (2018, June). *H_∞ model reduction for two-dimensional discrete systems in finite frequency ranges*. In 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), (pp. 807-812). Zadar, Croatia. IEEE DOI : **10.1109/MED.2018.8443021**
 7. **El-Amrani, A.**, Boukili, B., El Hajjaji, A., & Hmamed, A. (2018, June). *Robust H_∞ Filter for Uncertain Continuous-Time Systems with Finite Frequency Ranges*. In 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), (pp. 807-812). Zadar, Croatia. IEEE. DOI : **10.1109/MED.2018.8442969**
 8. **El-Amrani, A.**, El Hajjaji, A., Hmamed, A., & Boumhidi, I. (2018, July). *Finite Frequency Filter Design for T-S Fuzzy Continuous Systems*. 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). Rio de Janeiro, Brazil. IEEE. DOI : **10.1109/FUZZ-IEEE.2018.8491516**
 9. **El-Amrani, A.**, Boumhidi, I., Boukili, B., & Hmamed, A. (2018). *A finite frequency range approach to H_∞ filtering for T-S fuzzy systems*. Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Computing in Data Sciences (ICDS 2018) ELSEVIER, October 03-04-05, 2018 Fez-Morocco.

Conférences nationales :

1. **El-Amrani, A.**, Hmamed, A., & BOUMHIDI, I. (2017, May). *Finite Frequency filter design for TS fuzzy discrete-time systems*. Journée de Recherche Inter-Laboratoires : At : ENSA, Fès, Maroc.
2. **El-Amrani, A.**, EL-GHAJGHAJ, A., BOUMHIDI, I., & Hmamed, A. (2017, December). *Finite Frequency to H_∞ Model Reduction with T-S Fuzzy Systems*. Journée de Recherche Inter-Laboratoires : At : ENSA, Fès, Maroc.

Table des matières

Remerciement	ii
Avant Propos	iv
Table des figures	x
Liste des tableaux	xii
Notations	xiii
Acronymes	xiv
Introduction générale	1
1 Introduction aux systèmes dynamiques	5
1.1 Introduction	5
1.2 Systèmes dynamiques 1D linéaires	5
1.3 Système dynamique 2D Roesser : cas continu	6
1.4 Système dynamique 2D Roesser : cas discret	9
1.5 Système flou : modèle Takagi-Sugeno (T-S)	10
1.6 Stabilité des systèmes dynamiques	11
1.6.1 Systèmes dynamiques 1D	12
1.6.2 Systèmes dynamiques 2D	13
1.7 Quelques résultats dans un domaine fréquentiel fini	14
1.8 Définitions et outils mathématiques	17
1.8.1 Incertitudes polytopiques	17
1.8.2 Matrice polynôme homogène	17
1.8.3 Complément de Schur	18
1.8.4 Lemme de projection	19

1.8.5	Lemme de finsler	19
1.8.6	Autre Lemme	20
1.9	Conclusion	20
2	Réduction robuste de modèle dans un domaine fréquentiel fini	21
2.1	Introduction	21
2.2	Système 1D flou modèle T-S	22
2.2.1	Analyse du modèle réduit H_∞ flou	24
2.2.2	Conception du modèle réduit H_∞ flou	28
2.2.3	Exemples de simulation	33
2.3	Système 2D discret modèle Roesser	41
2.3.1	Analyse du modèle réduit H_∞	43
2.3.2	Conception du modèle réduit H_∞	44
2.3.3	Exemple de simulation	47
2.4	Conclusion	50
3	Filtrage H_∞ des systèmes dynamiques flous T-S dans un domaine fréquentiel fini	51
3.1	Introduction	51
3.2	Formulation du problème	52
3.3	Analyse du filtre H_∞ T-S flou	56
3.3.1	Cas continu	56
3.3.2	Cas discret	58
3.4	Conception du filtre H_∞ flou	59
3.4.1	Cas continu	59
3.4.2	Cas discret	62
3.5	Exemples de simulation	64
3.5.1	Exemple 1 : cas continu	65
3.5.2	Exemple 2 : cas continu (circuit de la diode tunnel)	70
3.5.3	Exemple 3 : cas discret	72
3.6	Conclusion	75
4	Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains dans un domaine fréquentiel fini	76
4.1	Introduction	76
4.2	Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains	77
4.2.1	Formulation du problème	77
4.2.2	Analyse du filtre H_∞ robuste	79

4.2.3	Conception du filtre H_∞ robuste	82
4.2.4	Approche matrice polynôme homogène	86
4.2.5	Exemples de simulation	89
4.3	Filtrage H_∞ robuste de système 2D continu incertain	103
4.3.1	Analyse du filtre H_∞	105
4.3.2	Conception du filtre H_∞	107
4.3.3	Exemples de simulation	109
4.4	Conclusion	117
5	Commande des systèmes dynamiques dans un domaine fréquentiel fini	118
5.1	Introduction	118
5.2	Commande H_∞ du système 1D continu flou T-S	119
5.2.1	Analyse de la commande H_∞	120
5.2.2	Conception de la commande H_∞	122
5.2.3	Exemple de simulation : Pendule inversé	125
5.3	Contrôle réel positif du système 2D continu	131
5.3.1	Résultats principaux : contrôle réel positif	132
5.3.2	Exemple de simulation	135
5.4	Conclusion	138
	Conclusion générale et perspectives	139
	Bibliographie	141

Table des figures

2.1	Schéma du circuit de la diode tunnel 1	33
2.2	Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et BF	37
2.3	Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et MF	37
2.4	Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et HF	38
2.5	Schéma du circuit de la diode tunnel 2	38
2.6	Fonctions d'appartenances pour les deux ensembles flous	39
2.7	Erreurs $e(t) = y(t) - \check{y}(t)$ comparé aux différentes méthodes	40
2.8	Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.78)	49
2.9	Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.79)	49
2.10	Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.80)	50
3.1	Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas BF	68
3.2	Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas MF	68
3.3	Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas HF	69
3.4	Vérifications des performances H_∞ par $r(k)$ pour le cas HF	69
3.5	Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes	71
3.6	Vérifications des performances H_∞ par $r(t)$	72
3.7	Etats du système et filtre floue H_∞	74
3.8	Erreurs $e(k)$ soumise à une perturbation sinusoïdale par différentes méthodes	74
4.1	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.36).	93
4.2	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.39).	94
4.3	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.42).	94
4.4	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.45)	95
4.5	Erreurs $e(k)$ comparé aux différentes méthodes de la littérature	95
4.6	Vérifications des performances H_∞ par $d(k)$	96
4.7	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.50)	98
4.8	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.51)	99

4.9	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.53)	99
4.10	Vérifications des performances H_∞ par $d(k)$	100
4.11	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.55)	102
4.12	Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.57)	102
4.13	Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_1^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_1^v(t_1, t_2)$	113
4.14	Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_2^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_2^v(t_1, t_2)$	114
4.15	Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_3^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_3^v(t_1, t_2)$	114
4.16	Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_4^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_4^v(t_1, t_2)$	115
4.17	Trajectoires de l'entrée des perturbations $w(t_1, t_2)$ et d'erreur $\bar{z}(t_1, t_2)$	115
5.1	Système de pendule inversé.	126
5.2	Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($0 \leq \omega \leq +\infty$)	128
5.3	Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($0 \leq \omega \leq +\infty$)	129
5.4	Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($ \omega \leq 0.7$).	129
5.5	Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($ \omega \leq 0.7$).	130
5.6	Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($1 \leq \omega \leq 5$).	130
5.7	Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($1 \leq \omega \leq 5$).	131
5.8	$\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.50) pour K_{FF}	136
5.9	$\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.51) pour K_{EFa}	137
5.10	$\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.52) pour K_{EFb}	137

Liste des tableaux

1.1	Domaines fréquentiels utilisés (cas discret)	15
1.2	Domaines fréquentiels utilisés (cas continu)	16
2.1	Comparaison des performances H_∞ et des erreurs maximales par différentes méthodes	35
2.2	Comparaison des performances H_∞ pour différentes méthodes	40
2.3	Comparaison des valeurs minimales de performance H_∞ et les erreurs maximales .	47
2.4	Comparaison des performances H_∞ et les erreurs maximales.	48
3.1	Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ comparé aux résultats de la littérature .	66
3.2	Comparaison des résultats en terme des performances H_∞	71
3.3	Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ obtenu par la simulation de théorème 3.4.2	73
4.1	Comparaison des valeurs minimales des performances H_∞	93
4.2	Comparaison des performances H_∞ pour différentes domaines des fréquences finies	97
4.3	Comparaison des performances H_∞ pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$	98
4.4	Minimum γ de performance H_∞ obtenu pour différentes méthodes	101
4.5	Niveaux d'atténuation γ de performance H_∞ pour chaque degré g	110
4.6	Normes H_∞ aux sommets ($g = 0$)	113
4.7	Normes H_∞ aux sommets ($g = 1$)	113
4.8	Normes H_∞ aux sommets ($g = 2$)	114
4.9	Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ comparé aux résultats de la littérature .	116
5.1	Comparaison des performances H_∞ pour différentes domaines des fréquences finies	127
5.2	Comparaison des valeurs minimales des performances H_∞ pour un domaine $0 \leq \omega \leq \infty$	127
5.3	$\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ obtenu par différentes méthodes	138

Notations

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espace des matrices réelles de dimension $n \times m$.
\mathbb{H}	Ensemble des nombres hermitiennes .
$\mathbb{H}_{n \times m}$	Ensemble des nombres hermitiennes de dimension $n \times m$.
$0_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$.
I_n	Matrice identité de dimension n .
A^{-1}	Matrice inverse de A .
A^T	Matrice transposée de A .
A^\perp	Matrice orthogonale de A , telle que $AA^\perp = 0$.
$A < 0 (\leq 0)$	Matrice A est définie négative (semi-définie négative).
$A > 0 (\geq 0)$	Matrice A est définie positive (semi-définie positive).
$\text{sym}(A)$	Représente le bloc $A + A^T$.
$\text{He}(A)$	Représente le bloc $\frac{A + A^*}{2}$.
$\text{diag}\{..\}$	Matrice diagonale.
ℓ_2	L'espace des fonctions vectorielles carrées sur l'intervalle $[0, \infty)$.
$\ x\ _2$	Norme ℓ_2 du signal $x \in \ell_2[0, \infty)$ que nous pouvons noter aussi par $\ x\ $.
$\ x\ _\infty$	Norme ℓ_∞ du signal $x \in \ell_\infty[0, \infty)$.
$\bar{\sigma}(\bullet)$	Représente la valeur singulière maximale de la fonction de transfert.
g	Degré du polynôme homogène.
*	Les éléments ou blocs symétriques par rapport à la diagonale principale d'une matrice symétrique.

Acronymes

LMI	Inégalité matricielle linéaire (en anglais, Linear Matrix Inequality).
LMIs	Inégalités matricielles linéaires.
FF	Fréquence finie (en anglais Finite Frequency).
EF	Fréquence entière.
BF	Basse/faible fréquence.
MF	Moyennes fréquence.
HF	Haute fréquence.
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov.
gKYP	Kalman-Yakubovich-Popov généralisé.
T-S	Takagi-Sugeno.
1D	Unidimensionnelle (une seule dimension).
2D	Bidimensionnelle (deux dimensions).

Introduction générale

1. Introduction

L'automatique est une science pluridisciplinaire (elle inclure plusieurs sciences de l'ingénieur et les mathématiques) qui étudie les systèmes dynamiques en deux étapes : dans une première étape (analyse), elle traite le comportement des systèmes dynamiques au terme stabilité, stabilisation, performance, robustesse,... et dans une deuxième étape (synthèse), elle aborde la conception de systèmes de commande, de filtre, d'estimateur,...

Les deux étapes (analyse, synthèse) d'étude des systèmes dynamiques commencent par des travaux de modélisation qui cherchent à trouver par le biais des lois de la physique et des outils mathématiques, un modèle adapté au processus physique étudié. Cette étape (modélisation) permet obtenir plusieurs types de modèles, tels que des systèmes linéaires/non linéaires, invariants/variantes dans le temps, Systèmes 1D /2D, etc.

Historiquement, l'élaboration des systèmes dynamiques a connu trois phases principales de développement : les méthodes fréquentielles (classiques) qui se basent sur des outils mathématiques et des critères graphiques, ont été développées avant les années 60. Entre les années 60 et 80 et grâce aux travaux de Kalman [101], les techniques modernes ont été développées, telle que la commande optimale (LQR) qui est basée sur la représentation d'état dans le domaine temporel. Dans la troisième phase et à partir des années 80, la notion de robustesse est prise en compte. En effet, c'est en 1981 que nous assistons à la naissance de la commande H_∞ optimale linéaire. Elle est ensuite développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargoneker et Francis [73, 41]. Dans ces travaux, la robustesse est étudiée en utilisant la notion de la norme matricielle (norme H_∞) qui remplace celle des gains dans les systèmes multivariables.

En pratique, nous ne pouvons pas toujours modéliser de manière réaliste un processus physique par un modèle linéaire. En effet, une représentation correcte implique souvent une

prise compte de toutes les non linéarités existantes. Dans un tel cas, les correcteurs linéaires ne permettent pas d'assurer la stabilité, ni d'avoir une certaine robustesse.

L'extension de la commande H_∞ au cas non linéaire a vu le jour grâce aux travaux de Ball, Helton et Walker [7, 8, 96], Van der shaft a utilisé la norme induite 2 (L2 gain) pour remplacer la norme H_∞ dans le cas linéaire.

2. Contexte et problématique

Au cours des dernières décennies, une part importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur les problèmes de la commande, d'observation, de filtrage et réduction du modèle des différents types de systèmes dynamiques. Ceci est motivé par le fait que la recherche en automatique a été bénéficié de développement spectaculaire de technologie informatique en termes matériels et logiciels hautement développés. La plupart des travaux de recherche effectués dans l'automatique traitent les perturbations extérieures sur toute la plage des fréquences, ce qui est engendré une perte de précision aux termes de stabilité, de rejet de perturbation, de conception des filtres et de réduction du modèle pour ces systèmes. Dans la pratique, de nombreux systèmes physiques peuvent être affectés par des perturbations extérieures dans des gammes de fréquences bien précises. Cependant, le lemme Kalman-Yakubovich-Popove (KYP) traite les propriétés sur tout le domaine fréquence. Pour étudier ce problème dans une bande des fréquences précises, les chercheurs ont développé une nouvelle version du lemme Kalman-Yakubovich-Popove (KYP) généralisé.

Dans ce contexte, nous avons mené des travaux de recherche concernant les problèmes en considérant les spécificités des domaines fréquentiels, telles que les problèmes du filtrage H_∞ , de la commande H_∞ et de la réduction du modèle H_∞ des systèmes dynamiques linéaires. Pour étudier ces problèmes dans le cas des systèmes non linéaires, nous avons développé une nouvelle version du lemme Kalman-Yakubovich-Popove (KYP) généralisé. Tous nos résultats sont donnés sous forme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) afin de les résoudre par des algorithmes d'optimisation convexe.

3. Objectifs et contributions

L'objectif principale du travail mené dans cette thèse est l'amélioration des performances des systèmes dynamiques dans des domaines fréquentiels limités. Différents cas ont été traités selon la nature du temps (continu ou discret), les dimensions de propagation d'information (une, deux dimensions), le type des systèmes choisis (linéaire, non linéaire) ou les problèmes

sélectionnés (réduction de modèle, filtrage, commande).

Trois techniques ont été utilisées. Il s'agit, en premier lieu, l'amélioration et l'exploitation d'une nouvelle version de lemme Kalman-Yakubovich-Popove (KYP) généralisé permettant de traiter le cas de domaine fréquentiel fini (Basse, Moyenne et Haute fréquences). La deuxième technique concerne l'utilisation des Lemmes de Finsler, projection et autres, afin d'introduire des variables de relaxation dans le système LMI, pour générer des nouvelles conditions qui assurent des performances meilleures que celles qui existent dans les travaux de la littérature. Tandis que la troisième technique traite la résolution des LMIs par des méthodes et algorithmes d'optimisation standards.

L'organisation de ce mémoire est structurée en cinq chapitres :

Le **premier chapitre** est consacré essentiellement à une présentation de quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous fournissons au début de ce chapitre un rappel sur la représentation des systèmes linéaires et non linéaires, en temps-continu et en temps-discret. Ensuite, nous donnons quelques définitions de stabilité des systèmes étudiés. Nous allons évoquerons approches (polynômes homogènes, logique floue,..) et Lemmes (gKYP, Finsler, Projection, Schur,...).

Nous consacrons le **deuxième chapitre** au problème de réduction des modèles. Ce chapitre a deux objectifs : le premier est d'approcher les systèmes complexes sélectionnés par d'autres systèmes moins complexes qui assurent un compromis entre la précision et les contraintes de calcul (vitesse de calcul et limitation du stockage). Le deuxième est de dériver des nouvelles contraintes assurant un certain niveau de performance H_∞ dans des domaines fréquentiels finis, en utilisant des techniques et des méthodes différentes dans les deux phases d'étude (analyse et conception). Dans la phase de simulations, nous avons utilisé des exemples pratiques et des algorithmes d'optimisation modernes afin de démontrer l'efficacité et l'applicabilité des approches utilisées et des résultats trouvés.

Dans le **troisième chapitre**, nous entamons le problème de filtrage H_∞ des systèmes unidirectionnel non linéaire décrits par des modèles flous de type T-S dans un domaine fréquentiel fini. Nous supposons que les fréquences des bruits appartiennent à des domaines fréquentiels connus pour dériver des contraintes suffisantes assurant un certain niveau de performance H_∞ . Pour atteindre cet objectif, nous utilisons la fonction de Lyapunov dépendante des paramètres (la dépendance est définie vis des règles de la logique floue), lemmes

de Finsler, projection et notre version améliorée du lemme gKYP. Les conditions de synthèse obtenues sont développées et formulées sous forme LMIs dans des domaines de différentes fréquences finies (BF/MF/HF) et les matrices du filtre d'ordre plein sont représentées et résolues par un algorithme numérique.

Le **quatrième chapitre** est dédié au filtrage robuste H_∞ des systèmes linéaires incertains dans le domaine fréquentiel fini. Le but de ce chapitre est d'étudier les performances H_∞ robustes pour les systèmes dynamiques incertains (1D en temps discret/continu, 2D à temps continu) en utilisant l'approche des matrices polynomiales homogènes dépendantes des paramètres de degré arbitraire, la méthode de Lyapunov et des matrices de relaxation.

Le **cinquième chapitre** est réservé à la commande des systèmes dynamiques dans un domaine fréquentiel fini. Dans ce chapitre, nous avons étudié dans la première partie le problème du contrôle H_∞ des systèmes flous de type T-S à temps continu. L'objectif visé est de concevoir des nouvelles lois de commande robustes de type PDC pour traiter les problèmes de bruits appartenant à des domaines fréquentiels limités (BF, MF, HF). Dans la deuxième partie, nous sommes intéressés au problème de contrôle positif réel à fréquence finie pour les systèmes 2D Continus. Plus précisément, il s'agit de chercher une commande telle que le système en boucle fermée soit stable, et sa fonction de transfert est positive. Dans les deux parties, nous avons utilisé les célèbres lemmes (Finsler, Schur et gKYP) pour introduire des matrices de relaxation et pour tenir en compte des spécifications des fréquences de bruit. Des nouvelles contraintes sont formulées en LMIs.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de la stabilité, les techniques et les méthodes de base développées pour résoudre les problèmes liés aux performances des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires (en temps continu et discret). Ensuite, nous introduisons les systèmes dynamiques dans un domaine de fréquences finies. Ainsi que les techniques utilisées pour transformer l'analyse des performances et le problème de synthèse en des problèmes d'optimisation convexe incluant des LMI.

Enfin, nous terminons par la présentation des lemmes et des outils mathématiques utilisés pour étudier les systèmes considérés dans cette thèse.

1.2 Systèmes dynamiques 1D linéaires

Le système à une dimension linéaire peut être modélisé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le signal de bruit supposé de type $\ell_2[0, \infty)$, l'opérateur $\delta[x(t)]$ désigne la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps pour les systèmes continus et l'opérateur de décalage pour les systèmes discrets. A , B , C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

1.3 Système dynamique 2D Roesser : cas continu

La fonction de transfert de ce système s'écrit :

$$H(\rho) = C(\rho I - A)^{-1}B + D \quad (1.2)$$

Avec ρ désigne $j\omega$ pour les systèmes continus, et $e^{j\theta}$ pour les systèmes discrets.

La norme H_∞ de ce système est définie par :

— **Cas continu :**

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[H(j\omega)] \quad (1.3)$$

— **Cas discret :**

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \bar{\sigma}[H(e^{j\omega})] \quad (1.4)$$

1.3 Système dynamique 2D Roesser : cas continu

Le modèle Roesser est l'une des représentations dans l'espace d'état la plus connues pour décrire les systèmes discrets à deux dimensions. Il est utilisé pour étudier les problèmes de codage, décodage et de traitement d'image [27, 28, 119]. La caractéristique principale de ce modèle est que le vecteur d'état est composé de deux composantes horizontale et verticale appelées x^h , x^v respectivement. Il est introduit en 1978 sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Bw(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) &= C \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Dw(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$ est le vecteur d'état dans la direction horizontale, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ est le vecteur d'état dans le sens vertical, avec $n = n_h + n_v$, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie, $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur du signal d'entrée. A , B , C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

Soit le système 2D continu suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
 x^h(0, t_2) &= g(t_2) \quad \forall 0 \leq t_2 \leq T_2; \\
 x^h(0, t_2) &= 0 \quad \forall t_2 \geq T_2; \\
 x^v(t_1, 0) &= f(t_1) \quad \forall 0 \leq t_1 \leq T_1; \\
 x^v(t_1, 0) &= 0 \quad \forall t_1 \geq T_1
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Où $T_1 < \infty$ et $T_2 < \infty$ sont des constantes positives, $g(t_2)$ et $f(t_1)$ sont des vecteurs donnés.

Définition 1.3.1 [94] : *Le système 2D continu défini par (1.6) est asymptotiquement stable si :*

$$\lim_{t=(t_1+t_2) \rightarrow \infty} (\|x^h(t_1, t_2)\| + \|x^v(t_1, t_2)\|) = 0 \tag{1.8}$$

Définition 1.3.2 [94] : *Si on choisit*

$$V(t_1, t_2) = V^h(x^h(t_1, t_2)) + V^v(x^v(t_1, t_2)) \tag{1.9}$$

La fonction de Lyapunov du système (1.5). La dérivée unidirectionnelle de cette fonction est définie par :

$$\dot{V}_u(t_1, t_2) = \frac{\partial V^h(x^h(t_1, t_2))}{\partial t_1} + \frac{\partial V^v(x^v(t_1, t_2))}{\partial t_2} \tag{1.10}$$

Lemme 1.3.1 [53] : *Soit le système 2D continu donné par(1.6) avec les conditions aux limites (1.7). S'il existe deux scalaires positifs c_1 et c_2 tels que la fonction de Lyapunov donnée dans (1.9) et sa dérivée unidirectionnelle définie par (1.10) le long de la trajectoire du système et satisfaisant :*

$$\begin{aligned}
 c_1(\|x^h(t_1, t_2)\|^2) &\leq V^h(x^h(t_1, t_2)) \leq c_2(\|x^h(t_1, t_2)\|^2) \\
 c_1(\|x^v(t_1, t_2)\|^2) &\leq V^v(x^v(t_1, t_2)) \leq c_2(\|x^v(t_1, t_2)\|^2)
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Et

$$\dot{V}_u(t_1, t_2) < 0 \tag{1.12}$$

Alors le système (1.6) est asymptotiquement stable.

1.3 Système dynamique 2D Roesser : cas continu

Preuve 1.3.1 : Soit la ligne $t_1 + t_2 = t$ sur le plan (t_1, t_2) . En intégrant les fonctions de Lyapunov $V^h(x^h(t_1, t_2))$ et $V^v(x^v(t_1, t_2))$ le long de cette ligne, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t_1+t_2=t} V^h(x^h(t_1, t_2)) ds &= \sqrt{2} \int_0^t V^h(x^h(t-\tau, \tau)) d\tau = \sqrt{2} \int_0^t V^h(x^h(\tau, t-\tau)) d\tau \\ \int_{t_1+t_2=t} V^v(x^v(t_1, t_2)) ds &= \sqrt{2} \int_0^t V^v(x^v(t-\tau, \tau)) d\tau = \sqrt{2} \int_0^t V^v(x^v(\tau, t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (1.13)$$

En vertu de la formule de Leibniz, nous avons

$$\frac{d \left[\int_{t_1+t_2=t} V^h(x^h(t_1, t_2)) ds \right]}{dt} = \sqrt{2} \left[\int_0^t \frac{\partial V^h(x^h(t-\tau, \tau))}{\partial t} d\tau + V^h(x^h(0, t)) \right] \quad (1.14)$$

De même :

$$\frac{d \left[\int_{t_1+t_2=t} V^v(x^v(t_1, t_2)) ds \right]}{dt} = \sqrt{2} \left[\int_0^t \frac{\partial V^v(x^v(\tau, t-\tau))}{\partial t} d\tau + V^v(x^v(t, 0)) \right] \quad (1.15)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_1+t_2=t} \left[V^h(x^h(t_1, t_2)) + V^v(x^v(t_1, t_2)) \right] ds = \\ \int_{t_1+t_2=t} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} V^h(x^h(t_1, t_2)) + \frac{\partial}{\partial t_2} V^v(x^v(t_1, t_2)) \right] ds + \sqrt{2} \left[V^h(x^h(0, t)) + V^v(x^v(t, 0)) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ce qui signifie

$$W(t) = \int_{t_1+t_2=t} \left[V^h(x^h(t_1, t_2)) + V^v(x^v(t_1, t_2)) \right] ds \quad (1.17)$$

À partir de (1.10), nous avons :

$$\frac{dW(t)}{dt} < \sqrt{2} \left[V^h(x^h(0, t)) + V^v(x^v(t, 0)) \right] \quad (1.18)$$

Comme $W(0) = 0$. Il résulte de (1.16) que :

$$W(t) < \sqrt{2} \int_0^t \left[V^h(x^h(0, \tau)) + V^v(x^v(\tau, 0)) \right] d\tau \quad (1.19)$$

La combinaison des équations (1.13) avec l'équation (1.18) donne l'équation suivante :

$$\int_0^t \left[V^h(x^h(t-\tau, \tau)) + V^v(x^v(\tau, t-\tau)) \right] d\tau < \sqrt{2} \int_0^t \left[V^h(x^h(0, \tau)) + V^v(x^v(\tau, 0)) \right] d\tau \quad (1.20)$$

Considérons les conditions initiales dans (1.7), nous obtenons de l'équation (1.11) que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[V^h(x^h(t-\tau, \tau)) + V^v(x^v(\tau, t-\tau)) \right] d\tau &< \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2} \int_0^t \left[V^h(x^h(0, \tau) + V^v(x^v(\tau, 0)) \right] d\tau \leq \\ \sqrt{2}c_2 \int_0^T \left[\|x^h(0, \tau)\|^2 + \|x^v(0, \tau)\|^2 \right] d\tau &< \infty \end{aligned} \quad (1.21)$$

Avec $T = \max\{T_1, T_2\}$ et $\forall t \geq T$. T_1 et T_2 ont été introduits dans les conditions initiales (1.7).

Avec la condition (1.11) en tête, l'inégalité (1.21) ci-dessus implique que :

$$\int_{t_1+t_2=t} \left[\|x^h(t_1, t_2)\|^2 + \|x^v(t_1, t_2)\|^2 \right] ds < \infty \quad (1.22)$$

Ce qui implique nécessairement que :

$$\lim_{t=t_1+t_2 \rightarrow \infty} (\|x^h(t_1, t_2)\| + \|x^v(t_1, t_2)\|) = 0 \quad (1.23)$$

La fonction de transfert de ce système est décrite par l'équation suivante :

$$H(s_1, s_2) = \bar{C}[\text{diag}\{s_1 I_{2 \times n_h}, s_2 I_{2 \times n_v}\} - \bar{A}]^{-1} \bar{B} + \bar{D} \quad (1.24)$$

Où s_1 et s_2 , respectivement, sont les opérateurs de transformation en Z horizontal et vertical. Nous notons $H(w_h, w_v)$ comme l'expression de domaine fréquentiel de $H(s_1, s_2)$ avec $s_1 = jw_h$ et $s_2 = jw_v$.

La norme H_∞ du système (1.5) est définie par :

$$\|H(s_1, s_2)\|_\infty = \sup_{(w_h, w_v) \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[H(jw_h, jw_v)] \quad (1.25)$$

1.4 Système dynamique 2D Roesser : cas discret

Le système 2D discret modèle de Roesser est généralement introduit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Bw(i, j) \\ y(i, j) &= C \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Dw(i, j) \\ x^h(0, j) &= \varphi(j) \quad \forall j \text{ et } x^v(i, 0) = \phi(i) \quad \forall i \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.5 Système flou : modèle Takagi-Sugeno (T-S)

Où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ est le vecteur d'état dans la direction horizontale, $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ est le vecteur d'état dans le sens vertical, $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie et $w(i, j) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur du signal d'entrée. A, B, C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

Les conditions initiales choisies pour ce système sont :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (|x^h(0, k)|^2 + |x^v(0, k)|^2) < \infty \quad (1.27)$$

et sa fonction de transfert est décrite par l'équation suivante :

$$H(e^{jw_h}, e^{jw_v}) = C[\text{diag}\{e^{jw_h}I_{n_h}, e^{jw_v}I_{n_v}\} - A]^{-1}B + D \quad (1.28)$$

La norme H_∞ de ce système (1.26) est :

$$\|H(e^{jw_h}, e^{jw_v})\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \pi]} \bar{\sigma}[H(e^{jw_h}, e^{jw_v})] \quad (1.29)$$

1.5 Système flou : modèle Takagi-Sugeno (T-S)

Le modèle flou de type Takagi-Sugeno (T-S) [146] est décrit par des règles "Si-Alors" pour établir des relations qualitatives entre les variables du modèle. Ainsi, tout modèle flou T-S d'un système non linéaire est structuré comme une interpellation de systèmes linéaires. Les modèles flous T-S sont des approximateurs universels [29, 36], ils constituent une représentation mathématique très intéressante des systèmes non linéaires car ils permettent de représenter tout système non linéaire, quelle que soit sa complexité, par une structure simple en s'appuyant sur des modèles linéaires interpolés par des fonctions non linéaires positives ou nulles et bornées. Ces modèles permettent l'extension de certains résultats du domaine linéaire aux systèmes non linéaires.

La modélisation des systèmes non-linéaires et la synthèse des différents résultats (commande, filtrage, l'observation, diagnostic, contraintes ...) sont basées sur la représentation floue de type Takagi-Sugeno (T-S) [146, 148] appelée également multi-modèles [31, 138].

La formulation mathématique des modèles T-S est décrite par les règles suivantes :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= A_i x(t) + B_i w(t) \\ y(t) &= C_i x(t) + D_i w(t) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $w(t)$ est le vecteur d'entrée et $y(t)$ est le vecteur de sortie. A_i , B_i , C_i et D_i sont des matrices réelles constantes de dimensions compatibles.

Les $\sigma_1(k), \dots, \sigma_p(k)$ sont des variables de prémisse, T_j^i , $j=1,2,\dots,p$, $i=1,2,\dots,r$, sont les ensembles flous, r est le nombre de règles **Si – Alors**.

Les fonctions de base floues sont données par :

$$h_i(\sigma(t)) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\sigma_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\sigma_j(t))} \quad (1.31)$$

Où $\mu_{ij}(\sigma_j(t))$ sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous $\sigma_j(\cdot)$ dans T_j^i et $h_i(\sigma(t))$ dite fonction d'activation détermine le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local associé.

Ensuite, on constate que les fonctions d'appartenances floues normalisées satisfont :

$$h_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r h_i = 1. \quad (1.32)$$

Pour simplifier la notation, considérons $\nabla := \{1, 2, \dots, r\}$. Une présentation plus compacte du modèle flou T-S est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= A(h)x(t) + B(h)w(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) + D(h)w(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Où

$$A(h) = \sum_{i=1}^r h_i A_i, \quad B(h) = \sum_{i=1}^r h_i B_i, \quad C(h) = \sum_{i=1}^r h_i C_i, \quad D(h) = \sum_{i=1}^r h_i D_i.$$

1.6 Stabilité des systèmes dynamiques

Un système dynamique linéaire est stable si et seulement si, il est écarté de sa position d'équilibre par une sollicitation extérieure, le système revient à cette position lorsque la sollicitation cesse. La stabilité asymptotique indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre au bout d'un temps éventuellement infini, la stabilité exponentielle garantie en plus la stabilité asymptotique et la rapidité de la convergence. L'analyse de stabilité est primordiale pour étudier le fonctionnement des systèmes physiques.

Dans ce thèse, nous nous intéressons à la stabilité au sens de Lyapunov. Alexandre Lyapunov est le premier a avoir formulé mathématiquement l'idée de stabilité à la fin du 19^e

siècle. Sa méthode permet d'étudier la stabilité d'un système dynamique quelconque sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles décrivant son évolution.

1.6.1 Systèmes dynamiques 1D

Définition 1.6.1 (La stabilité du point d'équilibre) [120, 121, 149, 150] :

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable pour le système (1.1) au sens de Lyapunov si

$$\forall(\delta, t_0) > 0, \exists \varepsilon(\delta, t_0) > 0, t_0 > 0 \text{ tel que} \quad (1.34)$$
$$\text{si } \|x_0\| < \varepsilon \text{ alors } \|x(t, x_0, t_0)\| < \delta \text{ pour } t \geq t_0.$$

Quand un système est stable, cela impose que le point d'équilibre considéré est stable au sens de Lyapunov. Si le point d'équilibre n'est pas précisé, on est face à $x_e = 0$.

Définition 1.6.2 (Attractivité du point d'équilibre) [149, 120, 150, 121] :

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est attractif pour le système (1.1) au sens de Lyapunov si

$$\forall(t_0) > 0, \exists \varepsilon(t_0) > 0 \text{ tel que, si } \|x_0\| < \varepsilon \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| \rightarrow 0.$$

Définition 1.6.3 (La stabilité asymptotique du point d'équilibre) [149, 120, 150, 121] :

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable pour le système (1.1), s'il est stable au sens de Lyapunov et attractif.

Remarque 1.6.1 : Toutes les définitions ci-dessus restent valables pour les systèmes 1D discrets de la forme (1.1).

Théorème 1.6.1 (Théorème de Lyapunov pour la stabilité asymptotique locale au sens de Lyapunov) [149, 120, 150, 121] :

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable (respectivement asymptotiquement stable), s'il existe une fonction scalaire $V(x, t)$ ($V(x, k)$ cas discret), définie dans une sphère B_e , telle que :

Système continu

- $V(x, t) > 0, \forall x \neq 0$ dans B_e et $V(0, t) = 0$,
- $\dot{V}(x, t) \leq 0, \forall t > t_0, \forall x_0$ dans B_e .

Système discret

- $V(x, k) > 0, \forall x \neq 0$ dans B_e et $V(0, k) = 0$,

— $\Delta V(x, k) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0, \forall k > k_0, \forall x_0$ dans B_e .

Si en plus, $\dot{V}(x, t) < 0$ ($\Delta V(x, k) \leq 0$ cas discret), $\forall x \neq 0$, alors la stabilité est asymptotique.

1.6.2 Systèmes dynamiques 2D

A. Cas discret

La stabilité au sens de Lyapunov d'un système 2-D à temps discret repose sur l'existence d'une fonction $V(i, j)$ définie positive telle que sa variation doit être définie négative $\Delta V(i, j) \leq 0$. Il en résulte l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 1.6.2 [69] : *Le système 2D discret suivant*

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $\bar{P}_h > 0$ et $\bar{P}_v > 0$ symétriques définies positives telles que la LMI suivante est vérifiée :

$$A^T \bar{P} A - \bar{P} < 0, \quad (1.36)$$

Où $\bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_h, \bar{P}_v\}$ est une matrice de Lyapunov symétrique définie positive.

B. Cas continu

Pour les systèmes 1D, la seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction $V(t)$ définie positive, telle que sa dérivée par rapport au temps doit être définie négative $\dot{V}(t) < 0$. L'extension de cette méthode dans le cas 2D à temps continu repose sur l'existence d'une fonction de deux dimensions $V(t)$ définie positive, dont sa dérivée s'écrit sous la forme de deux dérivées partielles et doit être définie négative comme donnée par l'équation (1.10). Il en résulte l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 1.6.3 [90] : *Le système 2D continu défini par (1.6) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $\bar{P}_h > 0$ et $\bar{P}_v > 0$ symétriques définies positives telles que la LMI suivante est vérifiée :*

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A < 0, \quad (1.37)$$

avec $\bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_h, \bar{P}_v\}$ est une matrice de Lyapunov symétrique définie positive.

1.7 Quelques résultats dans un domaine fréquentiel fini

Lemme 1.7.1 (KYP généralisé : cas discret 1D) [99] :

Soit le système 1D discret décrit par (1.1), étant données des matrices A, B, C et D , supposons que $\det(e^{j\theta}I_{n_x} - A) \neq 0, \theta \in \Delta$.

Pour une matrice symétrique donnée :

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad \forall \gamma > 0, \quad (1.38)$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.

$$\begin{bmatrix} H(e^{j\theta}) & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} H(e^{j\theta})^T \\ I \end{bmatrix} < \gamma \quad \forall \theta \in \Theta, \quad (1.39)$$

2. Il existe des matrices hermitiennes $P, Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.40)$$

Où la matrice Ξ est définie comme suit :

$$\Xi = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & -P - 2\cos\theta_l Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } |\theta| \leq \theta_l \quad (1.41)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & -P - 2\cos\theta_w Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (1.42)$$

avec

$$\theta_c = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \quad \theta_w = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P & -Q \\ -Q & -P + 2\cos\theta_h Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } |\theta| \geq \theta_h \quad (1.43)$$

L'ensemble \triangle est défini dans la table 1.1.

-	Basse fréquence (BF)	Moyenne fréquence (MF)	Haute fréquence (HF)
\triangle	$ \theta \leq \theta_l$	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	$ \theta \geq \theta_h$

TABLE 1.1 Domaines fréquentiels utilisés (cas discret)

Lemme 1.7.2 : (KYP généralisé : cas continu 1D)[99] :

Soit le système 1D continu donnée par (1.1), étant données des matrices A , B , C et D , supposons que $\det(j\omega I_{n_x} - A) \neq 0$, $\omega \in \Omega$.

Pour une matrice symétrique donnée

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad \forall \gamma > 0, \quad (1.44)$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.

$$\begin{bmatrix} H(e^{j\omega}) & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} H(e^{j\omega})^T \\ I \end{bmatrix} < \gamma \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (1.45)$$

2. Il existe des matrices hermitiennes P , $Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Sigma \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.46)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \bar{\omega}_l^2 Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } |\omega| \leq \bar{\omega}_l \quad (1.47)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -Q & P + j\omega_c Q \\ P - j\omega_c Q & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } \bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2 \quad (1.48)$$

Avec $\omega_c = \frac{\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1}{2}$.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\bar{\omega}_h^2 Q \end{bmatrix}, \quad \text{pour } |\omega| \geq \bar{\omega}_h \quad (1.49)$$

1.7 Quelques résultats dans un domaine fréquentiel fini

L'ensemble Ω est défini dans la table 1.2.

-	Basse fréquence (BF)	Moyenne fréquence (MF)	Haute fréquence (HF)
Ω	$ \omega \leq \bar{\omega}_l$	$\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$	$ \omega \geq \bar{\omega}_h$

TABLE 1.2 Domaines fréquentiels utilisés (cas continu)

Lemme 1.7.3 (KYP généralisé : cas discret 2D) [157] :

Soit le système 2D discret modèle de Roesser (1.26), étant données des matrices A, B, C, D et les scalaires $\gamma > 0, \omega_{h_1}, \omega_{h_2}, \omega_{v_1}, \omega_{v_2}$, avec $\omega_{h_1} \leq \omega_{h_2}, \omega_{v_1} \leq \omega_{v_2}$, supposons que $\det(\Omega - A) \neq 0$, avec $\Omega = \text{diag}\{e^{j\omega_h} I_{n_h}, e^{j\omega_v} I_{n_v}\} \forall (\omega_h, \omega_v) \in \mathbb{R}$.

Pour une matrice symétrique donnée :

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

Il existe des matrices hermitiennes $P_h, Q_h, \in \mathbb{H}_{\bar{n}_h}, P_v, Q_v \in \mathbb{H}_{\bar{n}_v}$ tels que $Q_h > 0, Q_v > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & \Lambda^* Q \\ Q \Lambda & -P - W Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.51)$$

Où

$$P = \begin{bmatrix} P_h & 0 \\ 0 & P_v \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} Q_h & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix} > 0; \Lambda = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_h^s} I_{n_h} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega_v^s} I_{n_v} \end{bmatrix}; \omega_h^s = \frac{\omega_{h_1} + \omega_{h_2}}{2}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega_h^a) I_{n_h} & 0 \\ 0 & 2\cos(\omega_v^a) I_{n_v} \end{bmatrix}; \omega_v^s = \frac{\omega_{v_1} + \omega_{v_2}}{2}; \omega_h^a = \frac{\omega_{h_2} - \omega_{h_1}}{2}; \omega_v^a = \frac{\omega_{v_2} - \omega_{v_1}}{2}$$

Alors, l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} (\Omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} (\Omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.52)$$

est valable pour tous $-\pi \leq \omega_{h_1} \leq \omega_h \leq \omega_{h_2} \leq \pi$ et $-\pi \leq \omega_{v_1} \leq \omega_v \leq \omega_{v_2} \leq \pi$.

Lemme 1.7.4 (KYP généralisé : cas continu 2D) [49] :

Soit le système 2D continu modèle de Roesser (1.5), étant données des matrices A, B, C, D et les scalaires $\gamma > 0, \omega_{h_1}, \omega_{h_2}, \omega_{v_1}, \omega_{v_2}$, avec $\omega_{h_1} \leq \omega_{h_2}, \omega_{v_1} \leq \omega_{v_2}$, supposons que $\det(\Omega - A) \neq 0$, avec $\Omega = \text{diag}\{j\omega_h I_{n_h}, j\omega_v I_{n_v}\} \forall (\omega_h, \omega_v) \in \mathbb{R}$.

Pour une matrice symétrique donnée :

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Il existe des matrices hermitiennes $P_h, Q_h, \in \mathbb{H}_{\bar{n}_h}$ $P_v, Q_v \in \mathbb{H}_{\bar{n}_v}$ tels que $Q_h > 0, Q_v > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q_\alpha & P_\alpha + \Lambda Q_\alpha \\ P_\alpha - \Lambda Q_\alpha & W Q_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.54)$$

Où

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \begin{bmatrix} P_{h\alpha} & 0 \\ 0 & P_{v\alpha} \end{bmatrix}; \quad Q_\alpha = \begin{bmatrix} Q_{h\alpha} & 0 \\ 0 & Q_{v\alpha} \end{bmatrix} > 0; \quad \bar{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{P}_{h\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{P}_{v\alpha} \end{bmatrix} > 0; \quad w_{h_c} = \frac{w_{h_1} + w_{h_2}}{2} \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} jw_{h_c} I_{n_h} & 0 \\ 0 & jw_{v_c} I_{n_v} \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} -w_{h_1} w_{h_2} I_{n_h} & 0 \\ 0 & -w_{v_1} w_{v_2} I_{n_v} \end{bmatrix}; \quad w_{v_c} = \frac{w_{v_1} + w_{v_2}}{2} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Alors, l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} (\Omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} (\Omega - A)^{-1} B \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.56)$$

est valable pour tous $\omega_{h_1} \leq \omega_h \leq \omega_{h_2}$ et $\omega_{v_1} \leq \omega_v \leq \omega_{v_2}$.

1.8 Définitions et outils mathématiques

1.8.1 Incertitudes polytopiques

Les incertitudes polytopiques ont été traitées par Bernussou [17], ce sont des incertitudes paramétriques. Soit une matrice incertaine $A(\alpha)$ appartenant à un domaine de combinaison convexe défini par :

$$A(\alpha) \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ A(\alpha) = \sum_{i=1}^S \alpha_i A_i; \sum_{i=1}^S \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (1.57)$$

Où S étant le nombre de sommets du polyèdre et A_i étant le $i^{\text{ème}}$ sommet défini par le système.

1.8.2 Matrice polynôme homogène

L'approche des polynômes homogènes sert à passer d'une écriture matricielle polytopique ou bien affine à une présentation matricielle polynômiale. Toutefois, le terme polynôme impose que chaque solution satisfait un degré spécifique, pour plus de détails nous faisons appel à la définition suivante :

Définition 1.8.1 [129] : Soit une matrice $P(\alpha)$ est une matrice polynôme homogène de degré arbitraire g et dépendant polynômialement d'un paramètre incertain $\alpha \in \Gamma$, s'écrit comme suit :

$$P_\alpha = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_s^{k_N} P_{k_j(g)}, \quad [k_1, k_2, \dots, k_N] = K(g) \quad (1.58)$$

Où $K(g)$ l'ensemble de N -tuples obtenu par toutes les combinaisons possibles de $[k_1, k_2, \dots, k_N]$, avec k_i étant des entiers non négatifs, tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_N = g$. le $j^{\text{ème}}$ N -tuples de l'ensemble $K(g)$ qui est lexicalement ordonné, $j = 1, \dots, J(g)$. Le nombre de sommets dans le polytope Γ est égal à N , le nombre d'éléments dans $K(g)$ donné par $J(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!}$. Ces éléments définissent les indices k_1, k_2, \dots, k_N des matrices constantes : $P_{k_1, k_2, \dots, k_N} \triangleq P_{k_j(g)}$, qui sont utilisés pour construire les matrices polynômes dépendantes homogènes P_α .

Pour chaque ensemble $K(g)$, définissons aussi l'ensemble $I(g)$ avec les éléments $I_j(g)$ donnés par les sous-ensembles de i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, associé à N -tuples $K_j(g)$ dont les k_i^N sont non-nulles. Pour chaque i , avec $i = 1, \dots, N$, définissons les N -uplets $K_j^i(g)$ comme étant égaux à $K_j(g)$ mais avec $k_i > 0$ remplacé par $k_i - 1$. Notez que les N -uplets $K_j^i(g)$ sont définis seulement dans les cas où le k_i correspondant est positif.

Notons aussi que, appliqués aux éléments de $K(g+1)$, les N -uplets $K_j^i(g+1)$ définissent des indices k_1, k_2, \dots, k_N des matrices P_{k_1, k_2, \dots, k_N} associées à des matrices polynômes homogènes de degré arbitraire g . Enfin, définissez les coefficients de la constante scalaire $\beta_j^i(g+1) = \frac{g!}{(k_1! k_2! \dots k_N!)}$, avec $[k_1, k_2, \dots, k_N] \in K_j^i(g+1)$.

1.8.3 Complément de Schur

Le complément de Schur est sans doute le lemme le plus utilisé dans la théorie de l'automatique car l'usage de ce lemme permet de reformuler certaines BMI en terme des LMIs.

Lemme 1.8.1 [26] :

Soit une matrice quelconque $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deux matrices symétriques $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$, donc la condition

$$\begin{bmatrix} M & R \\ R^T & N \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.59)$$

est équivalente à

$$N > 0, \quad C_R = M - RN^{-1}R^T \geq 0 \quad (1.60)$$

Où

$$M > 0, \quad C_Q = N - R^T M^{-1}R \geq 0 \quad (1.61)$$

1.8.4 Lemme de projection

Le lemme de projection a été introduit par [85]. Il permet de transformer une BMI en LMI en éliminant certaines variables, qui correspondent généralement aux matrices d'état du correcteur que l'on cherche à optimiser.

Lemme 1.8.2 [85] :

Soient les matrices $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, et $\Sigma = \Sigma^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une matrice $Z \in \mathbb{R}^{m \times p}$ satisfaisant

$$\Sigma + \Gamma^T Z \mathcal{U} + (\Gamma^T Z \mathcal{U})^T < 0 \quad (1.62)$$

2. Les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\Gamma^{\perp T} \Sigma \Gamma^{\perp} < 0; \quad \mathcal{U}^{\perp T} \Sigma \mathcal{U}^{\perp} < 0 \quad (1.63)$$

Où Γ^{\perp} et \mathcal{U}^{\perp} respectivement, sont les compléments orthogonaux de Γ et \mathcal{U} .

1.8.5 Lemme de finsler

Ce lemme contribue à l'introduction des nouvelles variables matricielles d'optimisation permettant de réduire le conservatisme engendré par les conditions proposées au préalable.

Lemme 1.8.3 [48] :

1.9 Conclusion

Soient $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices symétriques, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tel que $\text{rank}(\mathcal{B}) = r < n$. soit $\mathcal{B}^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ le complément orthogonal de \mathcal{B} , tel que $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\zeta^T \mathcal{Q} \zeta < 0, \forall \zeta \neq 0 : \mathcal{B} \zeta = 0$
- (ii) $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$
- (iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$
- (vi) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$

1.8.6 Autre Lemme

Lemme 1.8.4 [147] : Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{aligned} \Theta_{ii} < 0; \quad 1 \leq i \leq r \\ \frac{1}{r-1} \Theta_{ii} + \frac{1}{2} [\Theta_{ij} + \Theta_{ji}] < 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq r \end{aligned} \quad (1.64)$$

Alors l'inégalité matricielle linéaire paramétrée (PLMI) suivante est vraie :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \rho_i(k) \rho_j(k) \Theta_{ij} < 0 \quad (1.65)$$

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un ensemble de définitions, des notions et quelques outils mathématiques fondamentaux nécessaires pour étudier les systèmes dynamiques 1D et 2D discrets et continus. Nous avons aussi rappelé les normes de la matrice de transfert et quelques méthodes qui serviront par la suite à l'amélioration des résultats proposés dans les prochains chapitres.

Nous essayerons, dans le chapitre suivant, de résoudre les problèmes de réduction de modèle et d'améliorer les performances H_∞ des systèmes dynamiques 1D non linéaire continu et 2D linéaire discret dans un domaine fréquentiel fini.

Chapitre 2

Réduction robuste de modèle dans un domaine fréquentiel fini

2.1 Introduction

Le problème de la réduction de modèle a reçu beaucoup d'attention au cours des dernières décennies du fait que des modèles mathématiques d'ordre élevé ou même infini bien qu'ils sont fréquemment utilisés pour décrire des systèmes physiques dans de nombreuses applications d'ingénierie, ils sont difficilement exploitables dans des problèmes d'analyse et de synthèse des lois de commandes ou des filtres. Le but de la réduction de modèle est d'obtenir un système d'ordre inférieur qui se rapproche d'un système d'ordre élevé selon certains critères donnés, tels que L_∞ , H_2 , H_∞ , etc.

En ce qui concerne les systèmes linéaires, diverses approches efficaces ont été proposées dans la littérature, comme la méthode de troncature équilibrée [125, 97, 91], la méthode de troncature modale [18], la méthode d'approximation de la norme de Hankel [87, 88, 122], la méthode d'agrégation [123], la méthode de projection de Krylov-subspace [4, 5] et les méthodes d'optimisation numérique [51]. Très récemment, la technique de l'inégalité matricielle linéaire (LMI) a également été utilisée pour résoudre le problème de Réduction de modèle pour différentes classes de systèmes [153, 86, 141].

De plus, les techniques mentionnées ci-dessus concernent tout le domaine fréquentiel. Cependant, si les domaines de fréquence des bruits sont connus à l'avance, des résultats significatifs sur la réduction de modèle à FF existent dans la littérature [58, 56, 54, 40, 38, 45].

Ce chapitre est composé de deux parties :

Dans la première partie, nous allons traiter le problème de réduction de la modèle H_∞ pour le système flou T-S dans un domaine fréquentiel fini. Plus précisément, nous dérivons des nouvelles conditions garantissant plus de performance H_∞ sur un intervalle de fréquence fini de ce système. Dans la deuxième partie, nous présenterons une nouvelle approche pour résoudre le problème de la réduction de modèle H_∞ à fréquences finies (FF) pour les systèmes 2D à temps discret décrit par le modèle de Roesser. Notre but est la conception du modèle d'ordre réduit qui stabilise le système d'erreur et garantit des performances H_∞ dans un domaine prédéfini à FF. La clé de notre approche est l'utilisation du lemme gKYP dans [157], technique basée sur les matrices additionnelles (slacks) et du lemme de Finsler. Le modèle d'ordre réduit proposé est plus raisonnable et peut obtenir une meilleure performance d'atténuation du bruit lorsque les domaines des fréquences de bruit sont connues à l'avance.

Et nous dériverons des nouvelles conditions suffisantes en termes LMIs pour différentes gammes de fréquences. Ces conditions prévoient plus de degrés de liberté dans l'optimisation de la performance H_∞ lorsque la gamme de fréquences des bruits est connue à l'avance et des exemples de simulation sont donnés pour illustrer les avantages des méthodes proposées.

2.2 Système 1D flou modèle T-S

Soit le système 1D flou modèle T-S représenté par l'ensemble des règles suivantes :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) + D_i u(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état de système, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée des perturbations extérieures appartenant à $\ell_2[0, \infty)$, avec des plages de fréquences finies et connues. A_i, B_i, C_i et D_i sont des matrices données de dimensions compatibles. Les $\sigma_1(t), \dots, \sigma_p(t)$ sont les variables de prémisses et $T_j^i, j = 1, 2, \dots, p, i = 1, 2, \dots, r$, sont des ensembles flous, avec r est le nombre des règles **Si-Alors**. L'ensemble de fonction de base doivent satisfaire les conditions données par (1.32).

On réécrit le système (2.1) sur sa forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(h)x(t) + B(h)u(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) + D(h)u(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Où

$$A(h) = \sum_{i=1}^r h_i A_i; \quad B(h) = \sum_{i=1}^r h_i B_i; \quad C(h) = \sum_{i=1}^r h_i C_i; \quad D(h) = \sum_{i=1}^r h_i D_i; \quad h := (h_1, h_2, \dots, h_r) \in \nabla \quad (2.3)$$

Le système d'ordre réduit est :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned} \dot{\check{x}}(t) &= \check{A}_i \check{x}(t) + \check{B}_i u(t) \\ \check{y}(t) &= \check{C}_i \check{x}(t) + \check{D}_i u(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où $\check{x}(t) \in \mathbb{R}^{\check{n}}$ ($\check{n} < n$) est le vecteur d'état, $\check{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $\check{A}_i, \check{B}_i, \check{C}_i$ et \check{D}_i sont des matrices à déterminer.

La forme compacte de ce système est :

$$\begin{aligned} \dot{\check{x}}(t) &= \check{A}(\check{h}) \check{x}(t) + \check{B}(\check{h}) u(t) \\ \check{y}(t) &= \check{C}(\check{h}) \check{x}(t) + \check{D}(\check{h}) u(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où

$$\begin{aligned} \check{A}(\check{h}) &= \sum_{i=1}^r \check{h}_i \check{A}_i; \quad \check{B}(\check{h}) = \sum_{i=1}^r \check{h}_i \check{B}_i; \quad \check{C}(\check{h}) = \sum_{i=1}^r \check{h}_i \check{C}_i; \\ \check{D}(\check{h}) &= \sum_{i=1}^r \check{h}_i \check{D}_i; \quad \check{h} := (\check{h}_1, \check{h}_2, \dots, \check{h}_r) \in \nabla \end{aligned} \quad (2.6)$$

A partir du système (2.2) et (2.6), on définit le système d'erreur ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \bar{A}(h, \check{h}) \xi(t) + \bar{B}(h, \check{h}) u(t) \\ e(t) &= \bar{C}(h, \check{h}) \xi(t) + \bar{D}(h, \check{h}) u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{bmatrix} x(t)^T; \check{x}(t)^T \end{bmatrix}^T; \quad e(k) = y(t) - \check{y}(t); \quad \bar{D}(h, \check{h}) = D(h) - \check{D}(\check{h}); \\ \bar{A}(h, \check{h}) &= \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ 0 & \check{A}(\check{h}) \end{bmatrix}; \quad \bar{B}(h, \check{h}) = \begin{bmatrix} B(h) \\ \check{B}(\check{h}) \end{bmatrix}; \quad \bar{C}(h, \check{h}) = \begin{bmatrix} C(h) & -\check{C}(\check{h}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les définitions suivantes présentent la performance H_∞ du système donné par (2.7) dans les domaines temporel et fréquentiel, respectivement.

Définition 2.2.1 [141] : Soit un scalaire $\gamma > 0$, le système d'erreur (2.7) a une performance H_∞ inférieure à γ , si l'inégalité suivante est satisfaite

$$\int_0^\infty e^*(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^*(t)u(t)dt \quad (2.9)$$

D'après le théorème de Parseval's [76, 134], nous pouvons donner la définition suivante :

Définition 2.2.2 [141] : Soit un scalaire $\gamma > 0$, le système d'erreur (2.7) a une performance H_∞ inférieure à γ , si l'inégalité suivante est satisfaite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \check{e}^*(\omega)\check{e}(\omega)d\omega \leq \gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \check{u}^*(\omega)\check{u}(\omega)d\omega \quad (2.10)$$

Où $\check{u}(\omega)$, $\check{e}(\omega)$ sont les transformées de Fourier du signal d'entrée $u(t)$ et système d'erreur $e(t)$, respectivement.

On peut formuler le problème de réduction de modèle H_∞ à traiter dans cette partie de thèse de la manière suivante : On cherche les paramètres optimales du modèle proposé dans (2.5), de telle sorte que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable dans le cas $\check{u}(\omega) \equiv 0$.
- Pour un réel $\gamma > 0$ donnée, les conditions initiales nulles $\xi(0) = 0$, l'indice de fréquence finie (FF) ci-dessous est vérifié :

$$\int_{\omega \in \Omega} \check{e}^*(\omega)\check{e}(\omega)d\omega \leq \gamma^2 \int_{\omega \in \Omega} \check{u}^*(\omega)\check{u}(\omega)d\omega \quad (2.11)$$

avec l'ensemble Ω est défini dans la table 1.2.

Remarque 2.2.1 : Quand $\Omega = (-\infty, +\infty)$, l'inégalité (2.11) est réduite à l'inégalité (2.10) et donc l'indice de fréquence finie (FF) des performances H_∞ est réduit à la fréquence entière (EF).

2.2.1 Analyse du modèle réduit H_∞ flou

Dans la phase d'analyse de réduction de modèle, nous dérivons les nouvelles conditions suffisantes dans un domaine fréquentiel fini de telle manière que le système d'erreur donné par (2.7) est asymptotiquement stable avec certaines contraintes de performance H_∞ . Tout d'abord, nous donnons le lemme que nous allons l'utiliser pour dériver des nouvelles résultats

Lemme 2.2.1 [54] : Le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par (2.11).

S'il existe des matrices hermitiennes $P = P^T$, $Q = Q^T > 0$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) & \bar{B}(h, \check{h}) \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \mathbb{E} \begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) & \bar{B}(h, \check{h}) \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \\ \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

Avec

• **Basse fréquence (BF)** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \bar{\omega}_1^2 Q \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

• **Moyenne fréquence (MF)** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} -Q & P + j\bar{\omega}_0 Q \\ P - j\bar{\omega}_0 Q & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

• **Haute fréquence (HF)** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\bar{\omega}_h^2 Q \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Preuve 2.2.1 : (Cas de moyenne fréquence (MF))

On suppose que l'inégalité (2.12) est vraie. On multiplie l'inégalité (2.12) à gauche par $[\xi(t)^* \quad u(t)^*]$ et à droite par son conjugué transposé, on obtient

$$\frac{d(\xi^*(t)P\xi(t))}{dt} + e^*(t)e(t) - \gamma^2 u(t)^* u(t) \leq \text{tr}[\text{He}(\bar{\omega}_1 \xi(t) + j\dot{\xi}(t))(\bar{\omega}_2 \xi(t) + j\dot{\xi}(t))^T Q] \quad (2.16)$$

D'après la propriété de la stabilité, on a

$$\int_0^\infty e^*(t)e(t)dt - \gamma^2 \int_0^\infty u(t)^* u(t)dt \leq \text{tr}(\mathbf{He}(S)Q) \quad (2.17)$$

Où

$$S = \int_0^\infty (\bar{\omega}_1 \xi(t) + j\dot{\xi}(t))(\bar{\omega}_2 \xi(t) + j\dot{\xi}(t))^* dt \quad (2.18)$$

D'après le théorème de Parseval's [76][134], on a

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\omega}_1 - \omega)(\bar{\omega}_2 - \omega) \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}(\omega)^T d\omega \quad (2.19)$$

S est Hermitien et la borne du côté droit d'inégalité (2.17) devient $\text{tr}(SQ)$, donc l'inégalité (2.17) est équivalente à

$$\int_0^\infty e^*(\omega)e(\omega)d\omega - \gamma^2 \int_0^\infty w(\omega)^*w(\omega)d\omega \leq \text{tr}(SQ) \quad (2.20)$$

Puisque $Q > 0$, la limite $\text{tr}(SQ)$ est négative chaque fois que $S \leq 0$, donc l'inégalité (2.11) est vérifiée.

Remarque 2.2.2 : Les cas basse et haute fréquences ont une preuve similaire à celle du cas moyenne fréquence donnée ci-dessus.

Remarque 2.2.3 : Si les matrices du lemme 2.2.1 sont indépendantes de h et \check{h} , donc le système donné par 2.5 devient un système linéaire et le lemme 2.2.1 devient le lemme KYP généralisé 1.7.2.

Dans le théorème ci-dessous, nous donnons les nouvelles conditions qui permettent de garantir que le système d'erreur donné par (2.7) à la fois asymptotiquement stable et a un niveau γ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini.

Théorème 2.2.1 [54] : Le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ dans un domaine fréquentiel fini donné par (2.11), S'il existe des matrices hermitiennes $P, Q > 0$, une matrice symétrique et définie positive $\bar{P} > 0$ et des matrices $G, F, H, \bar{G}, \bar{F}$ telles que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & G\bar{B}(h, \check{h}) - H^T(h) & 0 \\ * & \Phi_3 & F\bar{B}(h, \check{h}) + A^T(h, \check{h})H^T(h) & \bar{C}^T(h, \check{h}) \\ * & * & -\gamma^2 I + H\bar{B}(h, \check{h}) + \bar{B}^T(h, \check{h})H^T & \bar{D}^T(h, \check{h}) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\bar{G} - \bar{G}^T & \bar{P} + \bar{G}A(h, \check{h}) - \bar{F}^T \\ * & \bar{F}A(h, \check{h}) + A^T(h, \check{h})\bar{F}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

Où

• **Basse fréquence :** $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\Phi_1 = -Q - G - G^T; \quad \Phi_2 = P - F^T + G\bar{A}(h, \check{h}); \quad \Phi_3 = \bar{\omega}_1^2 Q + FA(h, \check{h}) + A^T(h, \check{h})F^T$$

• **Moyenne fréquence :** $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\Phi_1 = -Q - G - G^T; \quad \Phi_2 = P + j\bar{\omega}_0 Q - F^T + G\bar{A}(h, \check{h}); \quad \Phi_3 = -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q + FA(h, \check{h}) + A^T(h, \check{h})F^T$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\Phi_1 = Q - G - G^T; \quad \Phi_2 = P - F^T + G\bar{A}(h, \check{h}); \quad \Phi_3 = -\bar{\omega}_h^2 Q + FA(h, \check{h}) + A^T(h, \check{h})F^T$$

Preuve 2.2.2 : Cas de basse fréquence

Nous allons démontrer l'équivalence entre (2.12) et (2.21). On suppose que (2.21) est vraie. Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} -Q & P & 0 \\ P & \bar{\omega}_l^2 Q + \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \\ 0 & \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} G \\ F \\ H \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \\ u(t) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h, \check{h}) & \bar{B}(h, \check{h}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

D'après le complément de Schur, l'équation (2.21) est équivalente à

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T\mathcal{X}^T < 0 \quad (2.24)$$

D'après la condition (iv) du lemme de Finsler, avec les paramètres suivants

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) & \bar{B}(h, \check{h}) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

et la condition (ii) du lemme de Finsler, on trouve la relation (2.12).

Pour démontrer les cas moyenne et haute fréquence, on utilise la même démarche du cas basse fréquence avec les choix suivants :

- **Moyenne fréquence** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -Q & P + j\bar{\omega}_0 Q & 0 \\ P & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q + \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \\ 0 & \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & P & 0 \\ P & -\bar{\omega}_h^2 Q + \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & \bar{C}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \\ 0 & \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{C}(h, \check{h}) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h, \check{h})\bar{D}(h, \check{h}) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

D'après le théorème de stabilité au sens de Lyapunov, $\bar{A}(h, \check{h})$ est stable si et seulement s'il existe $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$ tel que :

$$\bar{A}^T(h, \check{h})\bar{P} + \bar{P}\bar{A}(h, \check{h}) < 0 \quad (2.27)$$

On réécrit l'inégalité (2.27) sous la forme suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

Nous choisissons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \bar{F} \end{bmatrix}; \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h, \check{h}) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h, \check{h}) \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'après le lemme de Finsler, l'inégalité (2.29) est équivalents à

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \bar{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h, \check{h}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h, \check{h}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \bar{F} \end{bmatrix}^T < 0 \quad (2.30)$$

Donc on retrouve l'expression (2.22).

2.2.2 Conception du modèle réduit H_∞ flou

Dans la phase conception de réduction de modèle, nous allons chercher les paramètres optimaux du modèle d'ordre réduit (2.5) de telle sorte que le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par l'équation (2.11).

Théorème 2.2.2 [54] : Le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par (2.11).

S'il existe des matrices hermitiennes $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0$, une matrice symétrique et définie positive $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0$ et des matrices $\hat{A}(\check{h})$, $\hat{B}(\check{h})$, $\hat{C}(\check{h})$, $\hat{D}(\check{h})$, G_1 , G_2 , F_1 , F_2 , G_3 , G_4 , F_3 , F_4 , et V , avec λ_m , ($m = 1, \dots, 4$) satisfont les LMIs suivantes :

- *Basse fréquence* : $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & \bar{\Phi}_{14} & -H_1^T + G_1 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & \bar{\Phi}_{24} & G_2 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & A^T(h)H_1^T + F_1 B(h) + \lambda_1 E \hat{B}(\check{h}) & C^T(h) \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44} & F_2 B(h) + \lambda_2 \hat{B}(\check{h}) & -\hat{C}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + H_1 B(h) + B^T(h)H_1^T & D^T(h) - \hat{D}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -Q_1 - G_1 - G_1^T; & \bar{\Phi}_{12} &= -Q_2 - EV - G_2^T; \\ \bar{\Phi}_{13} &= P_1 - F_1^T + G_1 A(h); & \bar{\Phi}_{14} &= P_2 - F_2^T + E \hat{A}(\check{h}); \\ \bar{\Phi}_{22} &= -Q_3 - V - V^T; & \bar{\Phi}_{24} &= P_3 - \lambda_2 V + \hat{A}(\check{h}); \\ \bar{\Phi}_{23} &= P_2 - \lambda_1 V^T E^T + G_2 A(h); & \bar{\Phi}_{33} &= \bar{\omega}_1^2 Q_1 + F_1 A(h) + A^T(h)F_1^T; \\ \bar{\Phi}_{34} &= \bar{\omega}_1^2 Q_2 + A^T(h)F_2^T + \lambda_1 E \hat{A}(\check{h}); & \bar{\Phi}_{44} &= \bar{\omega}_1^2 Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}(\check{h}) + \hat{A}^T(\check{h})). \end{aligned}$$

- *Moyenne fréquence* : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{11} & \bar{\Upsilon}_{12} & \bar{\Upsilon}_{13} & \bar{\Upsilon}_{14} & -H_1^T + G_1 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & \bar{\Upsilon}_{22} & \bar{\Upsilon}_{23} & \bar{\Upsilon}_{24} & G_2 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & * & \bar{\Upsilon}_{33} & \bar{\Upsilon}_{34} & A^T(h)H_1^T + F_1 B(h) + \lambda_1 E \hat{B}(\check{h}) & C^T(h) \\ * & * & * & \bar{\Upsilon}_{44} & F_2 B(h) + \lambda_2 \hat{B}(\check{h}) & -\hat{C}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + H_1 B(h) + B^T(h)H_1^T & D^T(h) - \hat{D}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_{11} &= -Q_1 - G_1 - G_1^T; & \bar{\Upsilon}_{12} &= -Q_2 - EV - G_2^T; & \bar{\omega}_0 &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2} \\ \bar{\Upsilon}_{13} &= P_1 + j\bar{\omega}_0 Q_1 - F_1^T + G_1 A(h); & \bar{\Upsilon}_{14} &= P_2 + j\bar{\omega}_0 Q_2 - F_2^T + E \hat{A}(\check{h}); \\ \bar{\Upsilon}_{22} &= -Q_3 - V - V^T; & \bar{\Upsilon}_{23} &= P_2 - j\bar{\omega}_0 Q_2 - \lambda_1 V^T E^T + G_2 A(h); \\ \bar{\Upsilon}_{24} &= P_3 + j\bar{\omega}_0 Q_3 - \lambda_2 V + \hat{A}(\check{h}); & \bar{\Upsilon}_{33} &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_1 + F_1 A(h) + A^T(h)F_1^T; \\ \bar{\Upsilon}_{34} &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_2 + A^T(h)F_2^T + \lambda_1 E \hat{A}(\check{h}); & \bar{\Upsilon}_{44} &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}(\check{h}) + \hat{A}^T(\check{h})). \end{aligned}$$

• *Haute fréquence* : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{14} & -H_1^T + G_1 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & \bar{\Omega}_{22} & \bar{\Omega}_{23} & \bar{\Omega}_{24} & G_2 B(h) + \hat{B}(\check{h}) & 0 \\ * & * & \bar{\Omega}_{33} & \bar{\Omega}_{34} & A^T(h)H_1^T + F_1 B(h) + \lambda_1 E \hat{B}(\check{h}) & C^T(h) \\ * & * & * & \bar{\Omega}_{44} & F_2 B(h) + \lambda_2 \hat{B}(\check{h}) & -\hat{C}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + H_1 B(h) + B^T(h)H_1^T & D^T(h) - \hat{D}^T(\check{h}) \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.33)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} &= Q_1 - G_1 - G_1^T; \quad \bar{\Omega}_{12} = Q_2 - EV - G_2^T; \quad \bar{\Omega}_{13} = P_1 - F_1^T + G_1 A(h); \\ \bar{\Omega}_{14} &= P_2 - F_2^T + E \hat{A}(\check{h}); \quad \bar{\Omega}_{22} = Q_3 - V - V^T; \quad \bar{\Omega}_{24} = P_3 - \lambda_2 V + \hat{A}(\check{h}); \\ \bar{\Omega}_{23} &= P_2 - \lambda_1 V^T E^T + G_2 A(h); \quad \bar{\Omega}_{33} = -\bar{\omega}_h^2 Q_1 + F_1 A(h) + A^T(h)F_1^T; \\ \bar{\Omega}_{34} &= -\bar{\omega}_h^2 Q_2 + A^T(h)F_2^T + \lambda_1 E \hat{A}(\check{h}); \quad \bar{\Omega}_{44} = -\bar{\omega}_h^2 Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}(\check{h}) + \hat{A}^T(\check{h})) \end{aligned}$$

Et

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} -G_3 - G_3^T & -EV - G_4^T & \bar{P}_1 + G_3 A(h) - F_3^T & \bar{P}_2 - F_4^T + E \hat{A}(\check{h}) \\ * & -V - V^T & \bar{P}_2 + G_4 A(h) - \lambda_3 V^T E^T & \bar{P}_3 + \hat{A}(\check{h}) - \lambda_4 V^T \\ * & * & F_3 A(h) + A^T(h)F_3^T & \lambda_3 E \hat{A}(\check{h}) + A^T(h)F_4^T \\ * & * & * & \lambda_4 (\hat{A}(\check{h}) + \hat{A}^T(\check{h})) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

Si les LMIs (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34) sont faisables, les paramètres du modèle d'ordre réduit peuvent être obtenus par :

$$\begin{aligned} \check{A}(\check{h}) &= V^{-1} \hat{A}(\check{h}); \quad \check{B}(\check{h}) = V^{-1} \hat{B}(\check{h}); \\ \check{C}(\check{h}) &= \hat{C}(\check{h}); \quad \check{D}(\check{h}) = \hat{D}(\check{h}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Preuve 2.2.3 : Avec le théorème 2.2.1 et le choix de structure particulière des matrices P , Q et \bar{P} suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0; \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.36)$$

Et les formes particulières des matrices additionnelles G, F, H, \bar{G} et \bar{F} suivantes :

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} G_1 & EV \\ G_2 & V \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} F_1 & \lambda_1 EV \\ F_2 & \lambda_2 V \end{bmatrix}; \bar{G} = \begin{bmatrix} G_3 & EV \\ G_4 & V \end{bmatrix}; \bar{F} = \begin{bmatrix} F_3 & \lambda_3 EV \\ F_4 & \lambda_4 V \end{bmatrix}; \\ H &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec V une matrice inversible, les $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ sont des scalaires donnés et on considère les changements des variables suivants :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\check{h}) &= V\check{A}(\check{h}); \quad \hat{B}(\check{h}) = V\check{B}(\check{h}); \\ \hat{C}(\check{h}) &= \check{C}(\check{h}); \quad \hat{D}(\check{h}) = \check{D}(\check{h}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

On réécrit le théorème 2.2.1 sous la forme ci-dessous :

Théorème 2.2.3 [54] : Le système d'erreur (2.7) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donnée par l'équation (2.11). S'il existe des matrices hermitiennes $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0$,

une matrice symétrique $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0$ et des matrices $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i, G_1, G_2, F_1, F_2, G_3, G_4, F_3, F_4, H_1$ et V telles que pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$

- **Basse fréquence** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\bar{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & P_2 - F_2^T + E\hat{A}_i & -H_1^T + G_1B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & P_3 - \lambda_2V + \hat{A}_i & G_2B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & A_j^T H_1^T + F_1B_j + \lambda_1E\hat{B}_i & C_j^T \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44} & F_2B_j + \lambda_2\hat{B}_i & -\hat{C}_i^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2I + H_1B_j + B_j^T H_1^T & D_i^T - \hat{D}_i^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -Q_1 - G_1 - G_1^T; \quad \bar{\Phi}_{12} = -Q_2 - EV - G_2^T; \quad \bar{\Phi}_{13} = P_1 - F_1^T + G_1A_j; \\ \bar{\Phi}_{22} &= -Q_3 - V - V^T; \quad \bar{\Phi}_{23} = P_2 - \lambda_1V^T E^T + G_2A_j; \quad \bar{\Phi}_{33} = \bar{\omega}_l^2 Q_1 + F_1A_j + A_j^T F_1^T; \\ \bar{\Phi}_{34} &= \bar{\omega}_l^2 Q_2 + A_j^T F_2^T + \lambda_1E\hat{A}_j; \quad \bar{\Phi}_{44} = \bar{\omega}_l^2 Q_3 + \lambda_2(\hat{A}_i + \hat{A}_i^T). \end{aligned}$$

- **Moyenne fréquence** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\bar{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & -Q_2 - EV - G_2^T & \bar{Y}_{13} & \bar{Y}_{14} & -H_1^T + G_1 B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & -Q_3 - V - V^T & \bar{Y}_{23} & \bar{Y}_{24} & G_2 B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & * & \bar{Y}_{33} & \bar{Y}_{34} & A_j^T H_1^T + F_1 B_j + \lambda_1 E \hat{B}_i & C_j^T \\ * & * & * & \bar{Y}_{44} & F_2 B_j + \lambda_2 \hat{B}_i & -\hat{C}_i^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + H_1 B_j + B_j^T H_1^T & D_j^T - \hat{D}_i^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} &= -Q_1 - G_1 - G_1^T; & \bar{Y}_{13} &= P_1 + j\bar{\omega}_0 Q_1 - F_1^T + G_1 A_j; & \bar{Y}_{24} &= P_3 + j\bar{\omega}_0 Q_3 - \lambda_2 V + \hat{A}_i; \\ \bar{Y}_{14} &= P_2 + j\bar{\omega}_0 Q_2 - F_2^T + E \hat{A}_i; & \bar{Y}_{23} &= P_2 - j\bar{\omega}_0 Q_2 - \lambda_1 V^T E^T + G_2 A_j; & \bar{\omega}_0 &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}; \\ \bar{Y}_{33} &= \bar{\omega}_i^2 Q_1 + F_1 A_j + A_j^T F_1^T; & \bar{Y}_{34} &= \bar{\omega}_i^2 Q_2 + A_j^T F_2^T + \lambda_1 E \hat{A}_i; & \bar{Y}_{44} &= \bar{\omega}_i^2 Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}_i + \hat{A}_i^T); \end{aligned}$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{14} & -H_1^T + G_1 B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & \bar{\Omega}_{22} & \bar{\Omega}_{23} & \bar{\Omega}_{24} & G_2 B_j + \hat{B}_i & 0 \\ * & * & \bar{\Omega}_{33} & \bar{\Omega}_{34} & A^T(h) H_1^T + F_1 B_j + \lambda_1 E \hat{B}_i & C_j^T \\ * & * & * & \bar{\Omega}_{44} & F_2 B_j + \lambda_2 \hat{B}_i & -\hat{C}_i^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + H_1 B_j + B_j^T H_1^T & D_j^T - \hat{D}_i^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} &= Q_1 - G_1 - G_1^T; & \bar{\Omega}_{12} &= Q_2 - EV - G_2^T; & \bar{\Omega}_{13} &= P_1 - F_1^T + G_1 A_j; \\ \bar{\Omega}_{14} &= P_2 - F_2^T + E \hat{A}_i; & \bar{\Omega}_{22} &= Q_3 - V - V^T; & \bar{\Omega}_{24} &= P_3 - \lambda_2 V + \hat{A}_i; \\ \bar{\Omega}_{23} &= P_2 - \lambda_1 V^T E^T + G_2 A_j; & \bar{\Omega}_{33} &= -\bar{\omega}_h^2 Q_1 + F_1 A_j + A_j^T F_1^T; \\ \bar{\Omega}_{34} &= -\bar{\omega}_h^2 Q_2 + A_j^T F_2^T + \lambda_1 E \hat{A}_i; & \bar{\Omega}_{44} &= -\bar{\omega}_h^2 Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}(\hat{h}) + \hat{A}^T(\hat{h})) \end{aligned}$$

Et

$$\bar{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} -G_3 - G_3^T & -EV - G_4^T & \bar{P}_1 + G_3 A_j - F_3^T & \bar{P}_2 - F_4^T + E \hat{A}_i \\ * & -V - V^T & \bar{P}_2 + G_4 A_j - \lambda_3 V^T E^T & \bar{P}_3 + \hat{A}_i - \lambda_4 V^T \\ * & * & F_3 A_j + A^T(h) F_3^T & \lambda_3 E \hat{A}_i + A_j^T F_4^T \\ * & * & * & \lambda_4 (\hat{A}_i + \hat{A}_i^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

Si les LMIs (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42) sont faisables, les paramètres du modèle d'ordre réduit peuvent être obtenus par

$$\check{A}_i = V^{-1}\hat{A}_i, \quad \check{B}_i = V^{-1}\hat{B}_i, \quad \check{C}_i = \hat{C}_i, \quad \check{D}_i = \hat{D}_i. \quad (2.43)$$

Preuve 2.2.4 : Nous allons appliquer la méthode de sommation suivant sur le théorème 2.2.1

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \check{h}_i h_j \check{\Phi}_{ij}; \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \check{h}_i h_j \check{\Upsilon}_{ij}; \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \check{h}_i h_j \check{\Omega}_{ij}; \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \check{h}_i h_j \check{\Psi}_{ij}. \quad (2.44)$$

pour obtenir le théorème 2.2.2.

Remarque 2.2.4 : Les scalaires $\lambda_{(s=1,\dots,4)}$ doivent être constants, pour que les inégalités (2.39), (2.40) et (2.41) soient linéaires. Ceci permet d'obtenir une optimisation convexe de telle sorte que les solutions puissent être obtenues.

2.2.3 Exemples de simulation

Pour démontrer l'impact des conditions obtenues dans les théorèmes ci-dessus, nous allons considérer deux exemples numériques pour comparer nos résultats avec ceux de la [141, 38].

Exemple 1 : Circuit de la diode tunnel 1

Soit le circuit de la diode tunnel donné par la figure 2.1 ci-dessous :

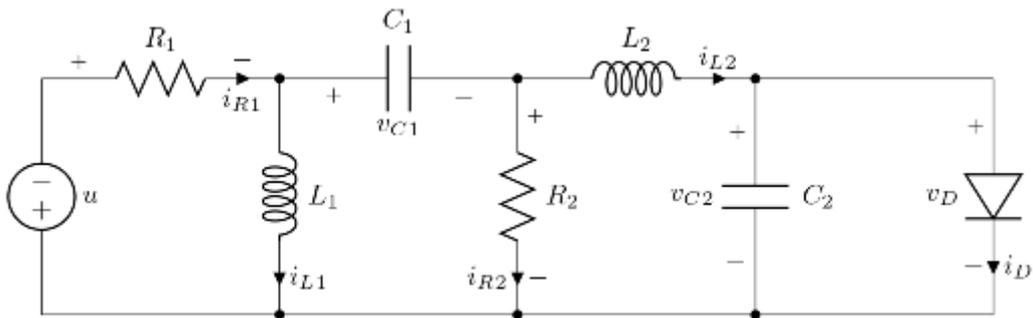


FIGURE 2.1 Schéma du circuit de la diode tunnel 1

2.2 Système 1D flou modèle T-S

La diode tunnel est caractérisée par :

$$i_D(t) = 0.002v_D(t) + 0.01v_D^3(t) \quad (2.45)$$

Les paramètres du circuit sont donnés comme suit : $R_1 = 10\Omega$, $L_1 = 200mH$, $C_1 = 20mF$, $R_2 = 20\Omega$, $L_2 = 100mH$, $C_2 = 10mF$.

On définit $x_1(t) = v_{C2}(t)$, $x_2(t) = v_{L2}(t)$, $x_3(t) = v_{C1}(t)$, $x_4(t) = v_{L1}(t)$ comme les variables d'état.

Donc, le circuit peut être décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0.2x_1(t) - x_1^3(t) + 100x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) - 66.6667x_2(t) - 3.3333x_3(t) - 66.6667x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = -33.3333x_2(t) - 1.6667x_3(t) - 16.6667x_4(t) - 1.66667u(t) \\ \dot{x}_4(t) = -33.3333x_2(t) - 1.6667x_3(t) - 33.3333x_4(t) - 3.3333u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Avec $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ et $x_1(t) \in [-3 \ 3]$.

En utilisant les techniques données dans [145], nous obtenons un modèle flou T-S à deux règles.

Quand $-3 \leq x_1(t) \leq 3$, le terme nonlinéaire $-x_1^3(t)$ peut être représenté par

$$\begin{aligned} -x_1^3(t) &= M_1(x_1(t)).0.x_1(t) + M_2(x_1(t))(-9x_1(t)) \\ 1 &= M_1(x_1(t)) + M_2(x_1(t)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où $M_1(x_1(t))$, $M_2(x_1(t))$ sont les fonctions d'appartenance. En résolvant les équations ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} M_1(x_1(t)) &= 1 - \frac{x_1^2(t)}{9}; \\ M_2(x_1(t)) &= 1 - M_1(x_1(t)) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ensuite, le système non linéaire peut être représenté par le modèle flou T-S suivant :

Règle du système 1 : Si $x_1(t)$ est $M_1(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + B_1u(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Règle du système 2 : Si $x_1(t)$ est $M_2(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2u(t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.2 & 100 & 0 & 0 \\ -10 & -66.6667 & 3.3333 & -66.6667 \\ 0 & -33.3333 & -1.6667 & -16.6667 \\ 0 & -33.3333 & -1.6667 & -33.3333 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6667 \\ -3.3333 \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -9.2 & 100 & 0 & 0 \\ -10 & -66.6667 & 3.3333 & -66.6667 \\ 0 & -33.3333 & -1.6667 & -16.6667 \\ 0 & -33.3333 & -1.6667 & -33.3333 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6667 \\ -3.3333 \end{bmatrix}; \\ C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_1 = D_2 = 0. \end{aligned}$$

D'après la simulation du théorème 2.2.3 [54], le niveau d'atténuation γ_{min} de performance H_∞ est donnée dans la table 2.1, on peut conclure que les résultats obtenus sont beaucoup plus faibles que ceux de ceux des algorithmes 1, 2 et 3 dans [38] et le corollaire donné par [141], ce qui démontre clairement l'avantage de la méthode proposée.

Domaines des fréquences	Méthodes	γ_{min}	Erreur Max
Fréquence entiere (EF)($0 \leq \omega \leq \infty$)	Corollaire 1 [141]	1.0619	0.2527
Basse fréquence (BF)($ \omega \leq 5$)	Algorithme 1 [38]	0.2194	0.0385
Basse fréquence (BF) ($ \omega \leq 5$)	Théorème 2.2.3 [54]	0.0159	0.0265
Moyenne fréquence (MF)($4 \leq \omega \leq 8$)	Algorithme 2 [38]	0.4598	0.0824
Moyenne fréquence (MF) ($4 \leq \omega \leq 8$)	Théorème 2.2.3 [54]	0.0980	0.0420
Haute fréquence (HF) ($ \omega \geq 7$)	Algorithme 3 [38]	0.7894	0.1711
Haute fréquence (HF)($ \omega \geq 7$)	Théorème 2.2.3 [54]	0.6021	0.0659

TABLE 2.1 Comparaison des performances H_∞ et des erreurs maximales par différentes méthodes

Les matrices de modèle de réduction H_∞ correspondant γ_{min} sont :

- **Basse fréquence ($|\omega| \leq 5$) :**

2.2 Système 1D flou modèle T-S

Pour $\lambda_1 = 2.7840$, $\lambda_2 = 2.9183$, $\lambda_3 = 0.8346$, $\lambda_4 = 0.0164$, $\gamma_{min} = 0.0159$ et les paramètres de modèle d'ordre réduit sont :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_1 & \check{B}_1 \\ \check{C}_1 & \check{D}_1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -14.0027 & 74.0320 & -9.5541 \\ -2.67011 & -6.1720 & -1.7257 \\ \hline -0.8078 & 1.1934 & 0.1426 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_2 & \check{B}_2 \\ \check{C}_2 & \check{D}_2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -14.0028 & 74.0322 & -9.5539 \\ -2.6709 & -6.1723 & -1.7257 \\ \hline -0.8080 & 1.1936 & 0.1429 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

• **Moyenne fréquence ($4 \leq \omega \leq 8$) :**

Pour $\lambda_1 = 1.8984$, $\lambda_2 = 2.3962$, $\lambda_3 = -0.0021$, $\lambda_4 = 0.0027$, $\gamma_{min} = 0.0980$ et les paramètres de modèle d'ordre réduit sont :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_1 & \check{B}_1 \\ \check{C}_1 & \check{D}_1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -6.575695.0532 & & -5.0214 \\ -2.8989 & -6.0322 & -1.8540 \\ \hline -0.7006 & 1.4304 & 0.2392 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_2 & \check{B}_2 \\ \check{C}_2 & \check{D}_2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -6.575095.0530 & & -5.0214 \\ -2.8991 & -6.0324 & -1.8544 \\ \hline -0.7004 & 1.4307 & 0.2396 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

• **Haute fréquence ($|\omega| \geq 7$) :**

Pour $\lambda_1 = 13.7389$, $\lambda_2 = 28.0628$, $\lambda_3 = -0.0027$, $\lambda_4 = 4.3419$, $\gamma_{min} = 0.6021$ et les paramètres de modèle d'ordre réduit sont :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_1 & \check{B}_1 \\ \check{C}_1 & \check{D}_1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -3.2335 & 88.7541 & -2.0251 \\ -3.7646 & -7.9301 & -1.9652 \\ \hline -1.4673 & 2.4819 & -0.0498 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_2 & \check{B}_2 \\ \check{C}_2 & \check{D}_2 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc|c} -3.2337 & 88.7539 & -2.0248 \\ -3.7649 & -7.9290 & -1.9655 \\ \hline -1.4675 & 2.4821 & -0.0501 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Les figures 2.2, 2.3 et 2.4 représentent les réponses de systèmes d'erreur (2.7) pour un signal d'entrée sinusoïdal $u(t) = \sin(t)$ et les conditions initiales nulles $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\check{x}(0) = [0 \ 0]^T$. Où, les lignes pleines concernant le modèle d'ordre réduit flou obtenu par l'approche fréquentiel finie, les lignes pointillées représentent les résultats trouvés par la méthode dans le domaine fréquentiel entier donné [141] et les points lignes concernent les

résultats obtenus en utilisant le modèle d'ordre réduit développé en prenant en compte le domaine de fréquences de la perturbation [38].

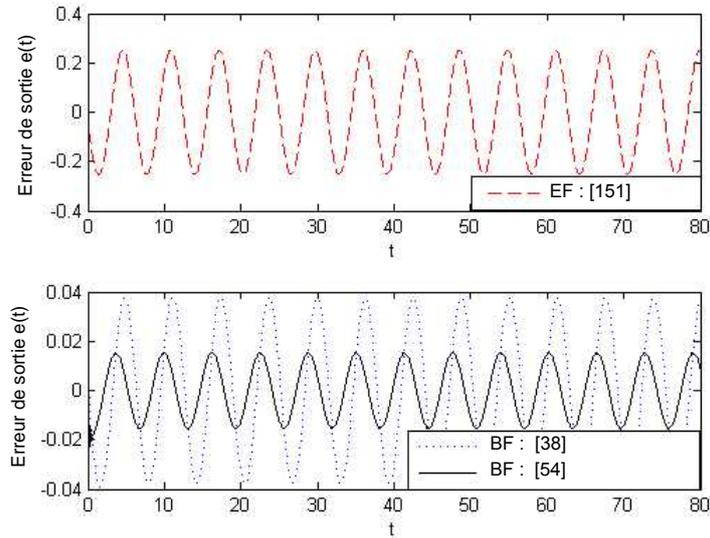


FIGURE 2.2 Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et BF

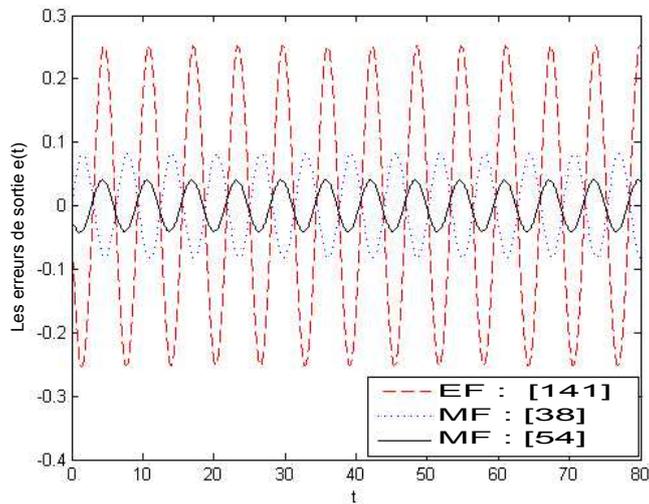


FIGURE 2.3 Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et MF

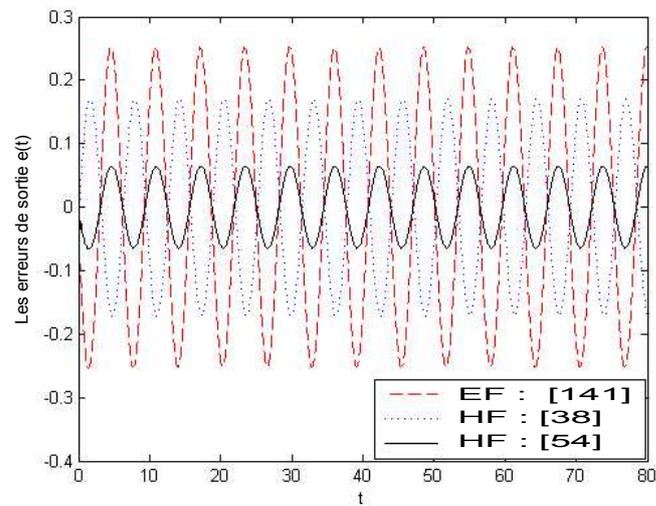


FIGURE 2.4 Erreurs $e(t)$ pour une perturbation sinusoïdale dans les cas EF et HF

On peut remarquer que l'approche fréquentiel finie et les matrices additionnelles libres utilisées dans cette partie fournissent des résultats illustrés dans le tableau et par les figures ci-dessus sont moins restrictifs par rapport aux résultats existants dans la littérature [141, 38]. Pour plus d'illustration, nous proposons l'exemple ci-dessous.

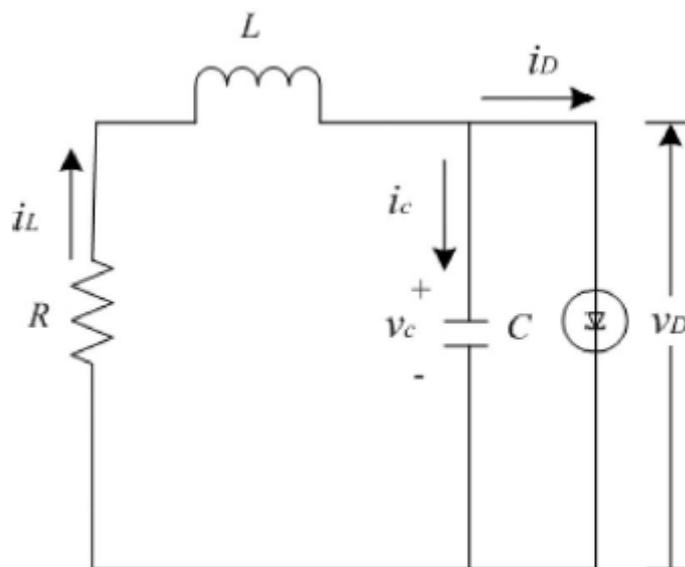


FIGURE 2.5 Schéma du circuit de la diode tunnel 2

Exemple 2 : Circuit de diode tunnel 2

Considérons maintenant un exemple correspondant au circuit de la diode tunnel illustré dans la figure 2.5 ci-dessous : Le modèle flou de ce circuit est donné par [127], où les états du système sont $x_1(t)=v_C(t)$, $x_2(t)=i_L(t)$.

Le système peut être approché par le modèle flou T-S à deux règles :

Règle du système 1 : Si $x_1(t)$ est $T_1(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + B_1u(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Règle du système 2 : Si $x_1(t)$ est $T_2(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2u(t) \end{aligned} \tag{2.54}$$

Où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 50 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -4.6 & 50 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}; B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D_1 = D_2 = 1$$

Les fonctions d'appartenance pour les règles 1 et 2 sont données par la figure 2.6 ci-dessous.

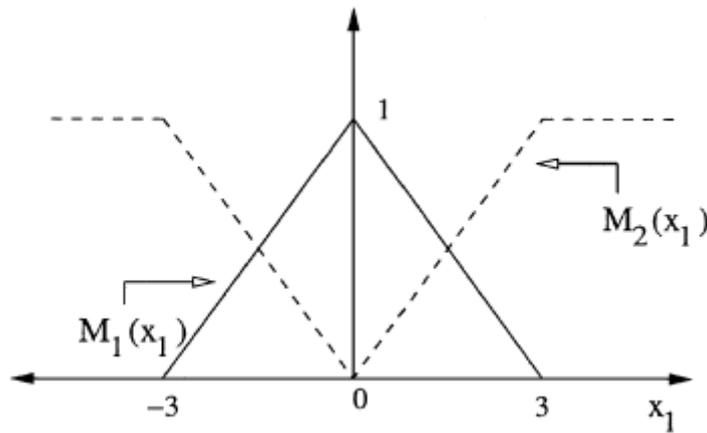


FIGURE 2.6 Fonctions d'appartenances pour les deux ensembles flous

En résolvant LMIs (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42), les résultats de simulation comparés au résultats de la littérature sont illustrés dans la table 2.2.

2.2 Système 1D flou modèle T-S

Domaines des fréquences	Méthodes	γ_{min}
Fréquence entière (EF) ($0 \leq \omega \leq \infty$)	Corollaire 1 [141]	0.7110
Fréquence finie (FF) ($1 \leq \omega \leq 4$)	Algorithme 2 [38]	0.5236
Fréquence finie (FF) ($1 \leq \omega \leq 4$)	Théorème 2.2.3 [54]	0.2470

TABLE 2.2 Comparaison des performances H_∞ pour différentes méthodes

Pour $\lambda_1 = 4.9342$, $\lambda_2 = 5.6085$, $\lambda_3 = -11.5566$, $\lambda_4 = 0.9167$, $\gamma_{min} = 0.2470$ et les paramètres du modèle d'ordre réduit sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} \check{A}_1 & \check{B}_1 \\ \check{C}_1 & \check{D}_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -6.6279 & -5.7545 \\ -1.4129 & 0.7693 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{c|c} \check{A}_2 & \check{B}_2 \\ \check{C}_2 & \check{D}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -6.6282 & -5.7547 \\ -1.4130 & 0.7695 \end{array} \right] \quad (2.55)$$

La courbe suivante représente la réponse du signal d'erreur $e(t) = y(t) - \check{y}(t)$ dans le cas où le signal d'entrée $u(t) = (2 + t^{1.3})^{-1}$ et les conditions initiales du système d'erreur nulles. Où la ligne pleine représente la méthode donnée dans le théorème 2.2.3, tandis que le point en pointillés représente la méthode donnée dans l'algorithme 2 dans [38] et la ligne de points concerne la méthode donnée au corollaire 1 dans [141].

On peut remarquer que le système d'erreur $e(t)$ converge vers zéro, et l'approche fréquentiel fini proposée donne à des résultats moins restrictifs par rapport aux résultats existants dans [38, 141].

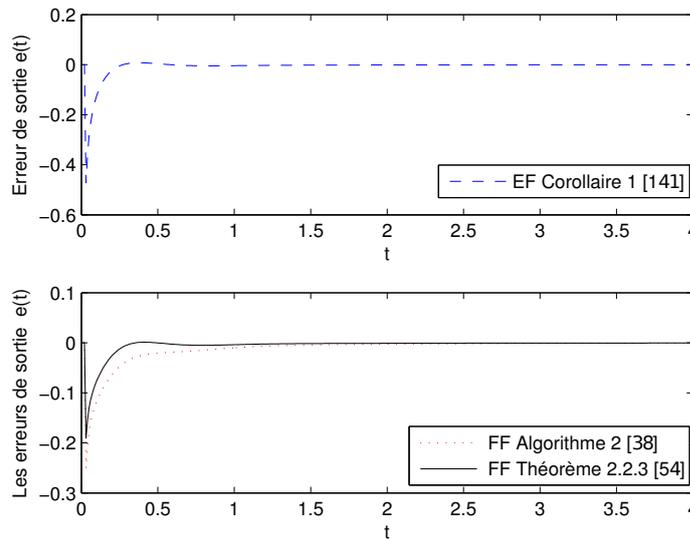


FIGURE 2.7 Erreurs $e(t) = y(t) - \check{y}(t)$ comparé aux différentes méthodes

2.3 Système 2D discret modèle Roesser

Soit le système linéaire 2D discret modèle de Roesser décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Bu(i, j) \\ y(i, j) &= C \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \\ x^h(0, j) &= \varphi(j) \quad \forall j \text{ and } x^v(i, 0) = \phi(i) \quad \forall i \end{aligned} \quad (2.56)$$

Où $x^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$, $x^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ (avec $n = n_h + n_v$) sont respectivement les vecteurs d'état horizontal et vertical du système, $y(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, A , B , C et D sont des matrices de dimensions convenables et $u(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente l'entrée des perturbations exogènes avec une énergie bornée et une fréquence horizontale u_h et une fréquence verticale u_v de $u(i, j)$ satisfaisant $(u_h, u_v) \in \Omega_h \times \Omega_v$, où

$$\begin{aligned} \Omega_h &\triangleq \{w_h \in \mathbb{R} | w_{h1} \leq w_h \leq w_{h2}; w_{h1}, w_{h2} \in [-\pi, \pi]\} \\ \Omega_v &\triangleq \{w_v \in \mathbb{R} | w_{v1} \leq w_v \leq w_{v2}; w_{v1}, w_{v2} \in [-\pi, \pi]\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec w_{h1} , w_{h2} , w_{v1} et w_{v2} sont des scalaires connus.

Notre objectif est de chercher à approximer le système 2D discret asymptotiquement stable décrit par (2.56) par un $\hat{n}^{ième}$ ordre ($\hat{n} < n$) modèle décrit par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i+1, j) \\ \hat{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= A_r \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + B_r u(i, j) \\ \hat{y}(i, j) &= C_r \begin{bmatrix} \hat{x}^h(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + D_r u(i, j) \\ \hat{x}^h(0, k) &= 0 \quad \hat{x}^v(0, k) = 0; \quad \forall k \end{aligned} \quad (2.58)$$

Où $\hat{x}^h(i, j) \in \mathbb{R}^{\hat{n}_h}$ et $\hat{x}^v(i, j) \in \mathbb{R}^{\hat{n}_v}$ (avec $\hat{n} = \hat{n}_h + \hat{n}_v$) sont respectivement les vecteurs d'état horizontal et vertical estimés et $\hat{y}(i, j) \in \mathbb{R}^{\hat{n}_y}$ est l'estimation de $y(i, j)$. A_r , B_r , C_r et D_r sont des matrices à déterminer.

2.3 Système 2D discret modèle Roesser

En augmentant le système (2.56), pour inclure les états du système (2.58), on peut obtenir le système d'erreur d'approximation qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i+1, j) \\ \bar{x}^v(i, j+1) \end{bmatrix} &= \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{B}u(i, j) \\ \bar{y}(i, j) &= \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{x}^h(i, j) \\ \bar{x}^v(i, j) \end{bmatrix} + \bar{D}u(i, j) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \Phi \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \Phi^T; \quad \bar{B} = \Phi \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & -C_r \end{bmatrix} \Phi^T; \quad \bar{D} = D - D_r; \quad \bar{n}_h = n_h + \hat{n}_h \\ \bar{x}^h(i, j) &= \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ \hat{x}^h(i, j) \end{bmatrix}; \quad \bar{x}^v(i, j) = \begin{bmatrix} x^v(i, j) \\ \hat{x}^v(i, j) \end{bmatrix}; \quad \bar{y}(i, j) = y(i, j) - \hat{y}(i, j); \quad \bar{n}_v = n_v + \hat{n}_v. \end{aligned}$$

Et

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\hat{n}_h} & 0 \\ 0 & I_{n_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\hat{n}_v} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

La fonction de transfert du système d'erreur (2.59) est :

$$\bar{T}(e^{jw_h}, ve^{jw_v}) = \bar{C}[\text{diag}\{e^{jw_h}I_{\bar{n}_h}, e^{jw_v}I_{\bar{n}_v}\} - \bar{A}]^{-1}\bar{B} + \bar{D} \quad (2.61)$$

Le problème traité dans cette partie est formulé de la façon suivante : on cherche un système de modèle réduit de la forme (2.58) pour le système 2D discret modèle de Roesser donné par (2.59) tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Le système d'erreur (2.59) est asymptotiquement stable quand $u(i, j) \equiv 0$.
- Pour un réel $\gamma > 0$ donné. L'indice de fréquence finie est donnée par :

$$\bar{\sigma}[\bar{T}(w_h, w_v)] < \gamma \quad \forall (w_h, w_v) \in \Omega_h \times \Omega_v \quad (2.62)$$

Avant d'aborder la section suivante, les résultats obtenus et affichés au cours de cette partie sont en principe des résultats qui se basent sur l'utilisation de quelques lemmes fondamentaux tels que les lemmes 1.8.1, 1.8.3 et 2.2.1.

2.3.1 Analyse du modèle réduit H_∞

Dans cette partie, nous allons chercher des nouvelles conditions qui garantissent un niveau de performances H_∞ du système d'erreur (2.59) dans un domaine fréquentiel fini définie par (2.62).

Proposition 2.3.1 [58] : *Le système d'erreur (2.59) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par (2.62). S'il existe des matrices hermitiennes $P_h, Q_h, \in \mathbb{H}_{\bar{n}_h}$, $P_v, Q_v \in \mathbb{H}_{\bar{n}_v}$, matrices symétriques $\bar{P}_h \in \mathbb{R}^{\bar{n}_h}$, $\bar{P}_v \in \mathbb{R}^{\bar{n}_v}$ et les matrices $M, S \in \mathbb{R}^{2n}$, $R \in \mathbb{R}^{n_u \times 2n}$ tel que $Q = \text{diag}\{Q_h, Q_v\} > 0$, $P = \text{diag}\{\bar{P}_v, \bar{P}_h\} > 0$ et*

$$\Psi = \begin{bmatrix} P - M - M^T & \Lambda^* Q - S^T + M\bar{A}^T & M\bar{B} - R^T & 0 \\ * & -WQ - P + S\bar{A} + \bar{A}^T S^T & S\bar{B} + \bar{A}^T R^T & \bar{C}^T \\ * & * & -\gamma^2 I + R\bar{B} + \bar{B}^T R^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \bar{P} - M - M^T & -S^T + M\bar{A} \\ * & -\bar{P} + \bar{A}S + S^T \bar{A}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

Où W et Λ sont définies par (1.52).

Preuve 2.3.1 : *Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous allons utiliser le Lemme gkYP 2.2.1, et le Lemme de Finsler 1.8.3, Nous allons démontrer tout d'abord l'équivalence entre (1.51) et (2.63). Pour cela, on suppose l'inégalité (2.63) vérifiée et on choisit les paramètres suivantes :*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} P & \Lambda^* Q & 0 \\ Q\Lambda & -WQ - P + \bar{C}^T \bar{C} & \bar{C}^T \bar{D} \\ 0 & \bar{D}^T \bar{C} & -\gamma^2 I + \bar{D}^T \bar{D} \end{bmatrix}; \mathcal{X} = \begin{bmatrix} M \\ S \\ R \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

D'autre part, nous allons chercher l'équivalence entre les inégalités (1.36) et (2.64), nous choisissons :

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \bar{P} & 0 \\ 0 & -\bar{P} \end{bmatrix}; \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{S} \end{bmatrix}; \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A} \end{bmatrix}; \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ I \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Utilisant la deuxième et la quatrième conditions du lemme de Finsler 1.8.3, On peut trouver la proposition 2.3.1.

2.3.2 Conception du modèle réduit H_∞

Dans cette partie, nous allons concevoir les paramètres du modèle réduit donné par l'équation (2.58) qui garantit la stabilité asymptotique du système d'erreur défini par l'équation (2.59) et qui assure un niveau d'atténuation γ de performance H_∞ dans le cas des domaines fréquentiels finis.

A. Cas de fréquence finie :

Théorème 2.3.1 [58] : *Le système d'erreur (2.59) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini définie par (2.62). S'il existe des matrices $\hat{A}_r \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\hat{B}_r \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\hat{C}_r \in \mathbb{R}^{n_y \times \hat{n}}$, $\hat{D}_r \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, M_u , S_u et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u = 1, 2, R_1$, matrices symétriques $\bar{P}_2 = \text{diag}\{\bar{P}_{2h}, \bar{P}_{2v}\}$, $\bar{P}_s = \text{diag}\{\bar{P}_{sh}, \bar{P}_{sv}\}$, $s = 1, 3$ et des matrices hermitiennes $P_2 = \text{diag}\{P_{2h}, P_{2v}\}$, $Q_2 = \text{diag}\{Q_{2h}, Q_{2v}\}$, $P_s = \text{diag}\{P_{sh}, P_{sv}\}$, $Q_s = \text{diag}\{Q_{sh}, Q_{sv}\}$, $s = 1, 3$ et les scalaires λ_1 , λ_2 et λ_3 satisfaisant les conditions LMIs (2.67), (2.68) et (2.69) telles que :*

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0; \quad \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.67)$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & P_2 - EV - M_2^T & \bar{\Psi}_{13} & \bar{\Psi}_{14} & -R_1^T + E\hat{B}_r & 0 \\ * & P_3 - V - V^T & \bar{\Psi}_{23} & \bar{\Psi}_{24} & M_2B + \hat{B}_r - \lambda_3V^T & 0 \\ * & * & \bar{\Psi}_{33} & \bar{\Psi}_{34} & S_1A + A^TR_1^T + \lambda_1E\hat{B}_r & C^T \\ * & * & * & \bar{\Psi}_{44} & S_2B + \lambda_2\hat{B}_r + \lambda_3\hat{A}_r & -\hat{C}_r^T \\ * & * & * & * & \bar{\Psi}_{55} & D^T - D_r^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.68)$$

$$\bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{11} & \bar{P}_2 - EV - M_2^T & M_1A - S_1^T & S_2^T + E\hat{A}_r \\ * & \bar{P}_3 - V - V^T & -\lambda_1V^TE^T + M_2A & -\lambda_2V^T + \hat{A}_r \\ * & * & -\bar{P}_1 + S_1A + A^TS_1^T & -\bar{P}_2 + A^TS_2^T + \lambda_3E\hat{A}_r \\ * & * & * & \bar{P}_3 + \lambda_2(\hat{A}_r + \hat{A}_r^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.69)$$

Où

$$\bar{\Psi}_{11} = P_1 - M_1 - M_1^T; \quad \bar{\Psi}_{13} = \Lambda^*Q_1 + M_1A - S_1^T;$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_{14} &= \Lambda^* Q_2 + E \hat{A}_r - S_2^T; \quad \bar{\Upsilon}_{11} = \bar{P}_1 - M_1 - M_1^T; \\
 \bar{\Psi}_{23} &= Q_2^T \Lambda - \lambda_1 V^T E^T + M_2 A; \quad \bar{\Psi}_{24} = \Lambda^* Q_3 - \lambda_2 V^T + \hat{A}_r; \\
 \bar{\Psi}_{33} &= -W Q_1 - P_1 + S_1 A + A^T S_1^T; \quad \bar{\Psi}_{34} = -W Q_2 - P_2 + A^T S_2^T + \lambda_1 E \hat{A}_r; \\
 \bar{\Psi}_{44} &= -W Q_3 + \lambda_2 (\hat{A}_r + \hat{A}_r^T); \quad \bar{\Psi}_{55} = -\gamma^2 I + \text{sym}(R_1 B + \lambda_3 \hat{B}_r)
 \end{aligned}$$

et W et Λ sont définies par (1.52).

Les paramètres du modèle réduit sont :

$$\begin{aligned}
 A_r &= V^{-1} \hat{A}_r; \quad B_r = V^{-1} \hat{B}_r; \\
 C_r &= \hat{C}_r; \quad D_r = \hat{D}_r
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Preuve 2.3.2 : Pour concevoir le modèle réduit H_∞ , nous sélectionnons les structures des matrices M, N, R et E comme suit :

$$\begin{aligned}
 M &= \Phi \begin{bmatrix} M_1 & EV \\ M_2 & V \end{bmatrix} \Phi^T; \quad S = \Phi \begin{bmatrix} S_1 & \lambda_1 EV \\ S_2 & \lambda_2 V \end{bmatrix} \Phi^T; \\
 R &= \begin{bmatrix} H_1 & \lambda_3 V \end{bmatrix} \Phi^T; \quad E = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

avec Φ définit dans (2.60).

En outre, pour les variables matricielles $P, Q > 0, \bar{P} > 0$ dans le théorème 1.3.1, nous définissons :

$$\begin{aligned}
 P &= \Phi \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} \Phi^T; \quad Q = \Phi \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \Phi^T; \\
 \bar{P} &= \Phi \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} \Phi^T
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

De plus, les équations suivantes sont facilement obtenues :

$$\bar{\Lambda} = \Phi \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \Phi^T; \quad \bar{W} = \Phi \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \Phi^T \tag{2.73}$$

En raison de $\Phi^T \Phi = I$, en remplaçant (2.59) dans (2.63) et (2.64) et combinant (2.67), (2.69) et (2.69), on obtient

$$\bar{\Psi} = \Pi \Psi \Pi^T; \quad \bar{\Upsilon}_\alpha = \Xi \Upsilon \Xi^T \tag{2.74}$$

Où

$$\begin{aligned}\Pi &= \text{diag}\{\Phi, \Phi, I_{n_u}, I_{n_y}\}; \quad \Xi = \text{diag}\{\Phi, \Phi\}, \quad \hat{A}_r = VA_r; \\ \hat{B}_r &= VB_r; \quad \hat{C}_r = C_r; \quad \hat{D}_r = D_r,\end{aligned}$$

avec Ψ et Υ respectivement, sont dans le théorème 2.3.1.

B. Cas de fréquence entière :

Dans cette partie, on se basant sur le théorème 2.3.1. Pour cela, on prend $Q_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$ et P est définie $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} > 0$ telle que la stabilité est également impliquée par l'inégalité donnée par (2.63).

Proposition 2.3.2 [58] : *Le système d'erreur (2.59) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ . S'il existe des matrices $\hat{A}_r \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\hat{B}_r \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\hat{C}_r \in \mathbb{R}^{n_y \times \hat{n}}$, $\hat{D}_r \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, M_u, S_u et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u = 1, 2$, R_1 , matrices symétriques $P_2 = \text{diag}\{P_{2h}, P_{2v}\}$, $P_s = \text{diag}\{P_{sh}, P_{sv}\}$, $s = 1, 3$ et les scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 , sachant que*

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.75)$$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & M_1A - S_1^T & \bar{\Omega}_{14} & -R_1^T + E\hat{B}_r & 0 \\ * & \bar{\Omega}_{22} & -\lambda_1 V^T E^T + M_2A & \bar{\Omega}_{24} & M_2B + \hat{B}_r & 0 \\ * & * & P_1 + S_1A + A^T S_1^T & \bar{\Omega}_{34} & S_1A + A^T R_1^T + \lambda_1 E\hat{B}_r & C^T \\ * & * & * & \bar{\Omega}_{44} & S_2B + \lambda_2 \hat{B}_r & -\hat{C}_r^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + R_1B + B^T R_1^T & D^T - D_r^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.76)$$

Où

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{11} &= P_1 - M_1 - M_1^T; \quad \bar{\Omega}_{12} = P_2 - EV - M_2^T; \\ \bar{\Omega}_{14} &= E\hat{A}_r - S_2^T; \quad \bar{\Omega}_{22} = P_3 - V - V^T; \\ \bar{\Omega}_{24} &= P_3 - V - V^T; \quad \bar{\Omega}_{24} = -\lambda_2 V^T + \hat{A}_r; \\ \bar{\Omega}_{34} &= P_2 + A^T S_2^T + \lambda_1 E\hat{A}_r; \quad \bar{\Omega}_{44} = P_3 + \lambda_2 (\hat{A}_r + \hat{A}_r^T).\end{aligned}$$

Les paramètres de modèle réduit sont donnés par (2.70).

Remarque 2.3.1 : L'inégalité matricielle linéaire (LMI) (2.68) a des variables complexes. Selon [89], les LMIs dans les variables complexes peuvent être converties en LMIs de plus grande dimension dans les variables réelles. Cela signifie que l'inégalité $\bar{\Psi}_1 + j\bar{\Psi}_2 < 0$ est équivalente à $\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \\ -\bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_1 \end{bmatrix} < 0$, ce qui implique que les LMIs dans (2.68) peut être adressée.

2.3.3 Exemple de simulation

Pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, dans cette section, on présentera un exemple. On montrera que les résultats proposés peuvent fournir des résultats moins conservatifs que les résultats récents proposés dans la littérature.

Nous considérons le système (2.56) avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} 0.2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Notre objectif est de chercher les matrices du système de réduction de modèle définie par (2.58) de telle sorte que le système d'erreur donné par (2.59) est asymptotiquement stable et satisfait la performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini définie dans (2.62).

En résolvant les LMIs (2.67), (2.68), (2.69), (2.75) et (2.76), la performance H_∞ et les erreurs maximales comparées au résultat [114] sont illustrées dans les tables 2.3, 2.4.

Domaines des fréquences	Méthodes	γ_{min}	Erreur Max
$\text{FF}(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right])$	Théorème 3 [114]	0.1271	0.1078
$\text{FF}(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right])$	Théorème 2.3.1 [58]	0.1199	0.1064
$\text{FF}(\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \times \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right])$	Théorème 3 [114]	0.0948	0.0821
$\text{FF}(\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \times \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right])$	Théorème 2.3.1 [58]	0.0635	0.0590

TABLE 2.3 Comparaison des valeurs minimales de performance H_∞ et les erreurs maximales

Les paramètres de réduction du modèle sont donnés comme suit :

A. Fréquence Finie : (Théorème 2.3.1 [58])

2.3 Système 2D discret modèle Roesser

des fréquences	Méthodes	γ_{min}	Erreur Max
EF $([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$	Théorème 3 [114]	Infaisable	-
EF $([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$	Proposition 2.3.2 [58]	0.3687	0.2925

TABLE 2.4 Comparaison des performances H_∞ et les erreurs maximales.

1. Pour le domaine $([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}])$, le niveau de performances H_∞ optimal est $\gamma = 0.1199$. Où $\lambda_1 = 0.0618$, $\lambda_2 = 0.0302$, $\lambda_3 = 0.1792$ et les matrices de réduction du modèle sont :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0.1817 & -0.8731 \\ -0.0076 & 0.0512 \end{bmatrix}; & B_r &= \begin{bmatrix} -1.1442 & 0.0217 \\ -0.0176 & -1.1309 \end{bmatrix}; \\ C_r &= \begin{bmatrix} -0.1480 & 0.8497 \\ -0.9270 & -0.7754 \end{bmatrix}; & D_r &= \begin{bmatrix} 0.9978 & -0.0180 \\ -0.0189 & 1.0208 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

2. Pour le domaine $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \times [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$, $\lambda_1 = 0.0618$, $\lambda_2 = 0.0302$ et $\lambda_3 = 0.1792$. On obtient $\gamma = 0.1199$. Par conséquent, les paramètres de réduction du modèle sont :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0.1943 & -0.8930 \\ -0.0115 & 0.0979 \end{bmatrix}; & B_r &= \begin{bmatrix} -1.0978 & 0.0319 \\ -0.0113 & -0.9988 \end{bmatrix}; \\ C_r &= \begin{bmatrix} -0.1687 & 0.9044 \\ -0.9210 & -0.8213 \end{bmatrix}; & D_r &= \begin{bmatrix} 1.0017 & -0.0141 \\ 0.0128 & 1.0243 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.79)$$

B. Fréquence Entière : (Proposition 2.3.2 [58])

Pour $\lambda_1 = 0.2173$, $\lambda_2 = 0.2032$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ optimal est $\gamma = 0.3687$ et les paramètres de réduction du modèle sont :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{bmatrix} 0.2118 & -1.0567 \\ 0.0872 & -0.0357 \end{bmatrix}; & B_r &= \begin{bmatrix} -0.9787 & -0.0034 \\ -0.0045 & -0.9344 \end{bmatrix}; \\ C_r &= \begin{bmatrix} -0.2031 & 1.0947 \\ -1.0193 & -1.0820 \end{bmatrix}; & D_r &= \begin{bmatrix} 1.0111 & 0.0010 \\ -0.0245 & 0.9978 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Pour démontrer l'efficacité de la conception des modèles réduits. En connectant respectivement (2.78) et (2.79), (2.80) aux systèmes dans (2.77), les réponses en fréquences du système d'erreur sont représentées sur les figures 2.8, 2.9 et 2.10.

On remarque que toutes les valeurs singulières maximales de ces figures sont inférieures au niveau d'atténuation γ des performances H_∞ . Ces figures démontrent clairement l'efficacité de la méthode proposée dans cette partie.

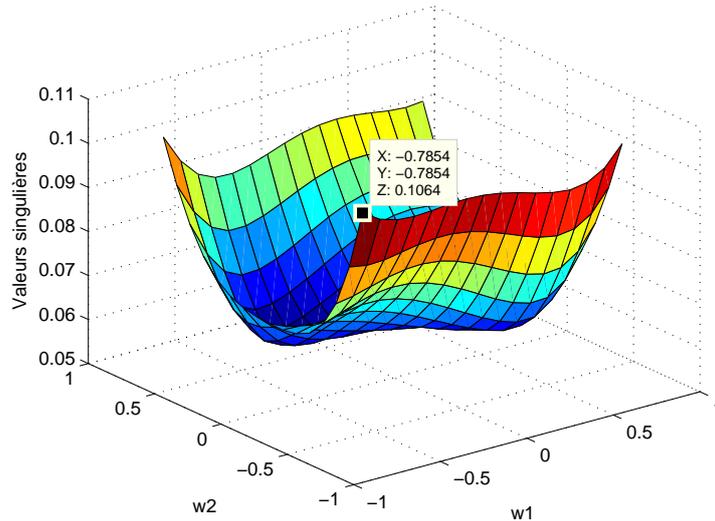


FIGURE 2.8 Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.78)

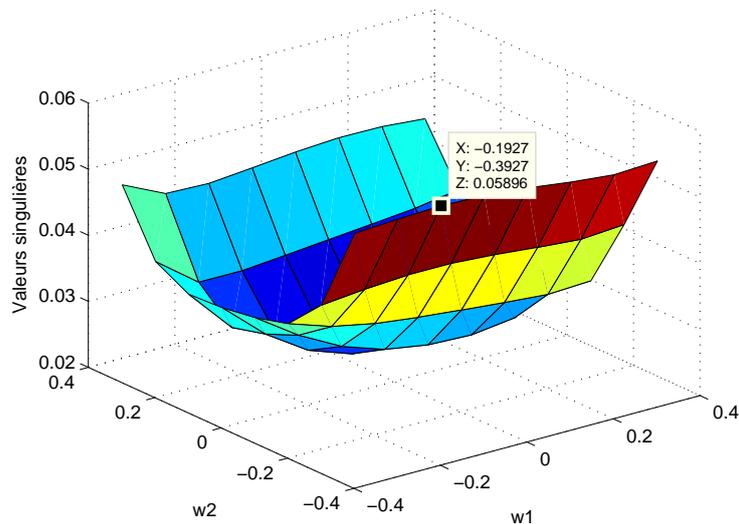


FIGURE 2.9 Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.79)

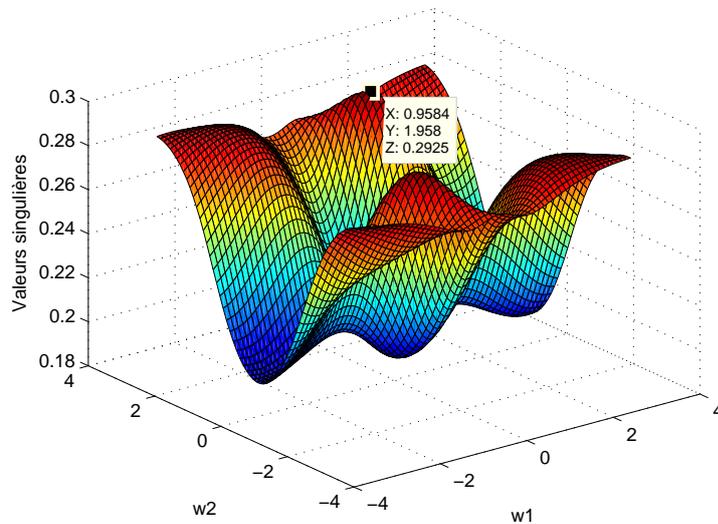


FIGURE 2.10 Courbes des valeurs singulières avec un modèle réduit dans (2.80)

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de la réduction de modèle H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les deux systèmes dynamiques (système 1D continu flou, système 2D linéaire à temps discret), avec des perturbations dans des domaines fréquents connus. En utilisant le lemme gKYP et des matrices additionnelles, des nouvelles conditions qui assurent un niveau d'atténuation de performance H_∞ restrictives dans des domaines fréquents spécifiques, ont été développées et formulées en termes des LMIs facilement résolubles par des techniques d'optimisation convexe.

En outre, l'efficacité et les avantages de la méthode FF proposée sont testés par des applications numériques et comparés à des résultats existants dans la littérature.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons au problème de filtrage H_∞ des systèmes dynamiques flous T-S dans un domaine fréquentiel fini.

Chapitre 3

Filtrage H_∞ des systèmes dynamiques flous T-S dans un domaine fréquentiel fini

3.1 Introduction

Les systèmes flous, basés sur le modèle de Takagi-Sugeno (T-S) [146] ont également attiré une grande attention car il permet de rapprocher une large classe de systèmes non linéaires complexes par certains sous-systèmes linéaires locaux, et ainsi, la plupart des théories linéaires peuvent être utilisées pour résoudre un ensemble de l'estimation, le contrôle et les problèmes du filtrage.

D'un autre côté, il est bien connu que de nombreux systèmes non linéaires peuvent être affectés par des perturbations externes avec des plages de fréquences connues. Malheureusement, les lemmes gKYP donnés dans [99] sont inapplicables aux systèmes non linéaires car il est difficile d'obtenir les représentations du système dans le domaine fréquentiel. En réalité, la plupart des systèmes physiques sont non seulement non linéaires et complexes mais aussi dans le domaine FF. Ainsi, la combinaison des modèles T-S et de conception de performance H_∞ dans le domaine fréquentiel fini est un problème très important dans la réalité. Cependant, on propose dans ce chapitre deux lemmes l'un dans le cas continu [54] et l'autre dans le cas discret [57] pour résoudre le problème de la performance H_∞ sur un intervalle de fréquences fini pour les systèmes 1D non linéaires.

Dans la littérature, plusieurs travaux visant l'amélioration des performances des systèmes dynamiques flous via l'utilisation des différentes méthodes. Parmi les travaux qui s'intéressent

3.2 Formulation du problème

au problème de filtrage T-S des systèmes dynamiques flous à temps continu et discret, ou retrouve ceux abordés dans [164, 163, 24, 60, 71, 46, 57].

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini des systèmes dynamiques 1D (modèles T-S flous continus et discrets). Les fréquences des bruits exogènes sont supposées appartenir à un domaine fréquentiel connu, Ainsi, des conditions suffisantes sont d'abord proposées via une fonction de Lyapunov à paramètres variables dépendant (la dépendance est définie vis à vis des règles floues) et l'utilisation du lemme de finsler 1.8.3, du lemme de projection 1.8.4. En proposant une structure du filtre, nous proposons des conditions de conception des matrices des filtres moins conservatives formulées en termes LMIs pour trois domaines de fréquences finies différentes (BF/MF/HF). À la fin de ce chapitre, nous proposons quelques exemples numériques pour valider les objectifs fixés par la méthode proposée.

3.2 Formulation du problème

Considérons une classe de systèmes non linéaires décrites par les règles floues T-S suivantes :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) + D_i u(t) \\ z(t) &= L_i x(t), \quad i = 1, \dots, r.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ est le signal à estimer, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur exogène de perturbations extérieures appartenant à $\ell_2[0, \infty)$, avec un domaine de fréquence connue. A_i, B_i, C_i, D_i et L_i sont des matrices réelles constantes de dimensions compatibles. L'opérateur $\delta[x(t)]$ désigne la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps pour les systèmes à temps continu et l'opérateur de décalage pour les systèmes à temps discret. $\sigma_1(t), \dots, \sigma_p(t)$ sont les variables des prémisses, $T_j^i, j=1,2,\dots,p, i=1,2,\dots,r$, est l'ensemble flou, r est le nombre de règles **Si – Alors**.

Pour simplifier la notation, considérons $\nabla := \{1, 2, \dots, r\}$ et on réécrit le système (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= A(h)x(t) + B(h)u(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) + D(h)u(t) \\ z(t) &= L(h)x(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Où

$$A(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))A_i; \quad B(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))B_i; \quad C(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))C_i; \quad D(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))D_i;$$

$$L(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))L_i; \quad \sigma(t) = \{\sigma_1(t), \dots, \sigma_p(t)\}; \quad h_i(\sigma(t)) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\sigma_j(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\sigma_j(t))}$$

avec $\mu_{ij}(\sigma_j(t))$ sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous $\sigma_j(t)$ dans T_j^i , pour tout t , $h_i(\sigma(t)) \geq 0$, $i \in \nabla$, $\sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t)) = 1$.

De même, on présente la structure du filtre flou par la formule suivante :

Règles i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i ,... et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned} \delta[x_F(t)] &= A_{Fi}x_F(t) + B_{Fi}y(t) \\ z_F(t) &= C_{Fi}x_F(t) + D_{Fi}y(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Avec $x_F(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du filtre, $z_F(t) \in \mathbb{R}^q$ est la sortie du filtre, A_{Fi} , B_{Fi} , C_{Fi} et D_{Fi} sont les paramètres du filtre à déterminer.

La forme compacte du filtre (3.3) se définit par :

$$\begin{aligned} \delta[x_F(t)] &= A_F(h)x_F(t) + B_F(h)y(t) \\ z_F(t) &= C_F(h)x_F(t) + D_F(h)y(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où

$$A_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))A_{Fi}; \quad B_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))B_{Fi}; \quad C_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))C_{Fi}; \quad D_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma(t))D_{Fi}$$

En posant $\xi(t) = [x^T(t) \quad x_F^T(t)]^T$. Le système d'erreur est décrit par la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \delta[\xi(t)] &= \bar{A}(h)\xi(t) + \bar{B}(h)u(t) \\ e(t) &= \bar{C}(h)\xi(t) + \bar{D}(h)u(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où le signal d'erreur se manifeste à travers $e(t) = z(t) - z_F(t)$ et les matrices $\bar{A}(h)$, $\bar{B}(h)$, $\bar{C}(h)$ et $\bar{D}(h)$ sont données comme suit :

$$\bar{A}(h) = \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_F(h)C(h) & A_F(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\sigma(t))h_j(\sigma(t)) \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ B_{Fi}C_j & A_{Fi} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \bar{B}(h) &= \begin{bmatrix} B(h) \\ B_F(h)D(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\sigma(t))h_j(\sigma(t)) \begin{bmatrix} B_j \\ B_{Fi}D_j \end{bmatrix}; \\
 \bar{C}(h) &= \begin{bmatrix} L(h) & -C_F(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\sigma(t))h_j(\sigma(t)) \begin{bmatrix} L_j & -C_{Fi} \end{bmatrix}; \\
 \bar{D}(h) &= -D_F(h)D(h) = -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\sigma(t))h_j(\sigma(t))D_{Fi}D_j. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Objectifs : Notre but est de développer des nouvelles conditions pour l'existence du filtre flou H_∞ pour trois domaines de fréquences finies différentes (BF/MF/HF) des perturbations $u(t)$. Plus précisément, il s'agit de construire un filtre flou de la forme (3.4) pour le système (3.2), telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le système d'erreur du filtrage (3.5) est asymptotiquement stable dans le cas $u(t) \equiv 0$.
2. Pour un réel $\gamma > 0$ donné et les conditions initiales nulles $\xi(0) = 0$, l'indice de fréquence finie est décrit par :

— **Cas continu :**

$$\int_{\omega \in \Delta} E^T(\omega)E(\omega)d\omega \leq \gamma^2 \int_{\omega \in \Delta} U^T(\omega)U(\omega)d\omega \tag{3.7}$$

avec Δ est défini dans la table 1.1.

— **Cas discret :**

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} u^T(k)u(k) \tag{3.8}$$

est valable pour toutes les solutions de (3.8) avec $u(k) \in l_2[0, \infty)$, nous avons :

(a) **Basse fréquence (BF)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\xi(k+1) - \xi(k))(\xi(k+1) - \xi(k))^T \leq (2\sin\frac{\theta_l}{2})^2 \sum_{k=0}^{\infty} \xi(k)\xi(k)^T \tag{3.9}$$

(b) **Haute fréquence (HF)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\xi(k+1) - \xi(k))(\xi(k+1) - \xi(k))^T \leq (2\sin\frac{\theta_h}{2})^2 \sum_{k=0}^{\infty} \xi(k)\xi(k)^T \tag{3.10}$$

(c) **Moyenne fréquence (MF)**

$$e^{j\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (\xi(k+1) - e^{j\theta_1}\xi(k))[\xi(k+1) - e^{j\theta_2}\xi(k)]^T \leq 0 \tag{3.11}$$

Dans le paragraphe suivante, nous présentons le lemme que nous allons l'utiliser pour développer des nouvelles résultats pour un cas à temps discret.

Lemme 3.2.1 [57] : *Le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par (3.8), s'il existe des matrices hermitiennes $P(h^+) = P(h^+)^T$ et $Q = Q^T > 0$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}^T(h)\bar{C}(h) & \bar{C}^T(h)\bar{D}(h) \\ \bar{D}^T(h)\bar{C}(h) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h)\bar{D}(h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

Où

1. **Basse fréquence (BF)** : $|\theta| \leq \theta_l$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P(h^+) & Q \\ Q & -P(h) - 2\cos\theta_l Q \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

2. **Moyenne fréquence (MF)** : $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\theta_c = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$, $\theta_w = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P(h^+) & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & -P(h) - 2\cos\theta_w Q \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3. **Haute fréquence (HF)** : $|\theta| \geq \theta_h$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P(h^+) & -Q \\ -Q & -P(h) + 2\cos\theta_h Q \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Où h^+ désigne les fonctions d'activation à l'instant $k + 1$ et peut être obtenue par (1.31), avec $\sigma_j(k)$ sont remplacées par $\sigma_j(k + 1)$.

Preuve 3.2.1 : (moyenne fréquence (MF))

On suppose que l'inégalité (3.12) est vraie. On multiplie l'inégalité (3.12) à gauche par $[\xi(k)^T \ u(k)^T]$ et à droite par son conjugué transposé, nous avons

$$\begin{aligned} & \xi^T(k+1)P(h^+)\xi(k+1) - \xi^T(k)P(h)\xi(k) + e^T(k)e(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) \\ & + \text{tr}(Q(e^{j\theta_c}\xi(k)\xi(k+1)^T + e^{-j\theta_c}\xi(k+1)\xi(k)^T - 2\cos\theta_w\xi(k)\xi(k)^T)) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

En prenant la somme de $k = 0$ à ∞ , étant donné que $\xi(0) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi(k) = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) - \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w(k)^T w(k) + \text{tr}(Qs) \leq 0 \quad (3.17)$$

3.3 Analyse du filtre H_∞ T-S flou

Où

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\theta_c} \xi(k) \xi(k+1)^T + e^{-j\theta_c} \xi(k+1) \xi(k)^T - 2\cos\theta_w \xi(k) \xi(k)^T) \quad (3.18)$$

On peut facilement vérifier que $-S$ est équivalent à l'inégalité (3.11). et donc S est semi-défini positif. Puisque $Q > 0$, le troisième terme sur l'inégalité (3.17) est non négatif quand l'inégalité (3.11) est satisfaite.

Remarque 3.2.1 : Les cas basse et haute fréquences ont une preuve similaire à celle du cas moyenne fréquences donnée ci-dessus avec le petit changement $\theta_2 = \theta_l$ et $\theta_1 = -\theta_l$ pour un domaine basse fréquences et $\theta_1 = -\theta_l$, $\theta_1 = \theta_h$ pour un domaine haute fréquences.

Remarque 3.2.2 : Lorsque nous fixons $Q = 0$ dans Ξ , par simple manipulation matricielle, la condition (3.12) se réduit à la condition de gain ℓ_2 standard dans [162]

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ \bar{C}(h) & \bar{D}(h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(h^+) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ \bar{C}(h) & \bar{D}(h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P(h) & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

où la fonction de Lyapunov est choisie comme $V(k) = \xi(k)^T P(h) \xi(k)$.

Remarque 3.2.3 : Si toutes les matrices du lemme 3.2.1 sont indépendantes de h , alors le système flou donné par (3.2) devient un système linéaire et le lemme 3.2.1 est réduit au lemme KYP généralisé 1.7.1.

3.3 Analyse du filtre H_∞ T-S flou

Dans cette partie, nous présentons de nouvelles conditions qui garantissent un niveau γ de performances H_∞ avec la spécification FF dans (3.7) et (3.8) du système d'erreur (3.5).

3.3.1 Cas continu

Proposition 3.3.1 [60] : Le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini donné par (3.7). S'il existe des matrices hermitiennes $P(h)$, $Q > 0$, une matrice symétrique et définie positive $\bar{P}(h) > 0$ et les matrices $M(h)$, $S(h)$, $\bar{M}(h)$, $\bar{S}(h)$ et $R(h)$, satisfaisant les inégalités (3.20) et (3.21) :

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(h) & \Phi_{12}(h) & M(h)\bar{B}(h) - R^T(h) & 0 \\ * & \Phi_{22}(h) & S(h)\bar{B}(h) + \bar{A}(h)^T R^T(h) & \bar{C}^T(h) \\ * & * & -\gamma^2 I + He[R(h)\bar{A}(h)] & \bar{D}^T(h) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

$$\Psi(h) = \begin{bmatrix} -\bar{M}(h) - \bar{M}^T(h) & \bar{P}(h) + \bar{M}(h)\bar{A}(h) - \bar{S}^T(h) \\ * & sym(\bar{S}(h)\bar{A}(h)) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

Où

- **Basse fréquences** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(h) &= -Q - M(h) - M^T(h); \quad \Phi_{12}(h) = P(h) - S^T(h) + M(h)\bar{A}(h); \\ \Phi_{22}(h) &= \bar{\omega}_1^2 Q + sym((S(h)\bar{A}(h))). \end{aligned}$$

- **Moyenne fréquences** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(h) &= -Q - M(h) - M^T(h); \quad \Phi_{12}(h) = P(h) + j\bar{\omega}_0 Q - S^T(h) + M\bar{A}(h); \\ \Phi_{22}(h) &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q + S(h)\bar{A}(h) + \bar{A}^T(h)S^T(h); \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}. \end{aligned}$$

- **Haute fréquences** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(h) &= Q - M(h) - M^T(h); \quad \Phi_{12}(h) = P(h) - S^T(h) + M(h)\bar{A}(h); \\ \Phi_{22}(h) &= -\bar{\omega}_h^2 Q + He((S(h)\bar{A}(h))). \end{aligned}$$

Preuve 3.3.1 : (Moyenne fréquences)

Considérons les matrices :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} -Q & P(h) + j\bar{\omega}_0 Q & 0 \\ P(h) - j\bar{\omega}_0 Q & \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q + \bar{C}^T(h)\bar{C}(h) & \bar{C}^T(h)\bar{D}(h) \\ 0 & \bar{D}^T(h)\bar{C}(h) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h)\bar{D}(h) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} M(h) \\ S(h) \\ R(h) \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \\ u(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Selon la condition (iv) du lemme de Finsler 1.8.3, la relation (3.20) est vérifiée, et par l'utilisation de la condition (ii) nous obtenons (2.12), d'où on peut remarquer l'équivalence entre (2.12) et (3.20). En outre, l'équivalence entre les inégalités (2.28) et (3.21) peut être

trouvée de la même manière en considérant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{P}(h) \\ \bar{P}(h) & 0 \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \bar{M}(h) \\ \bar{S}(h) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h) \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par conséquent, la proposition 3.3.1 est équivalente à des inégalités (2.12) et (2.28).

3.3.2 Cas discret

Proposition 3.3.2 [57] : *Le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine MF $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, s'il existe une matrice symétrique et définie positive $0 < \bar{P}(h)$, une matrice hermitienne floue $P(h)$, une matrice hermitienne définie positive $Q > 0$ et des matrices $G(h)$, $F(h)$, $\bar{F}(h)$, $\bar{G}(h)$ et $H(h)$ telles que :*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(h) & e^{j\theta_c} Q - F^T(h) + G(h)\bar{A}(h) & G(h)\bar{B}(h) - H^T(h) & 0 \\ * & \Phi_2(h) & F(h)\bar{B}(h) + \bar{A}^T(h)H^T(h) & \bar{C}^T(h) \\ * & * & -\gamma^2 I + \text{sym}(H(h)\bar{B}(h)) & \bar{D}^T(h) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \bar{P}(h^+) - \bar{F}(h) - \bar{F}^T(h) & \bar{F}(h)\bar{A}(h) - \bar{G}^T(h) \\ * & -\bar{P}(h) + \text{sym}(\bar{G}(h)\bar{A}(h)) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

Où

$$\Phi_1(h) = -P(h^+) - G(h) - G^T(h); \quad \Phi_2(h) = P(h) - 2\cos\theta_w Q + He((F(h)\bar{A}(h))$$

Preuve 3.3.2 : *Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous allons utiliser le lemme 3.2.1, le lemme de projection 1.8.4 et le lemme de complément de Schur 1.8.1. Premièrement, nous prouvons que les inégalités (2.12) et (2.14) (3.12) et (3.14) sont équivalentes à l'inégalité (3.20). En admettant que l'inégalité (3.20) est vraie et en utilisant le lemme de complément du Schur 1.8.1. Alors, (3.20) peut être écrite sous la forme suivante :*

$$\Sigma + \text{sym}(\Gamma^T Z \Lambda) < 0 \quad (3.26)$$

Où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{\theta_c} Q & 0 \\ e^{-j\theta_c} Q & P(h) - 2\cos\theta_w Q + \bar{C}^T(h)\bar{C}(h) & \bar{C}^T(h)\bar{D}(h) \\ 0 & \bar{D}^T(h)\bar{C}(h) & -\gamma^2 I + \bar{D}^T(h)\bar{D}(h) \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} G(h) \\ F(h) \\ H(h) \end{bmatrix};$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \end{bmatrix}; \quad \Gamma = I; \quad \Gamma^\perp = 0$$

Puisque, le complément orthogonal de Λ est $\Lambda^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h) & \bar{B}(h) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Donc, l'équivalence

est obtenue entre $\Lambda^{\perp T} \Sigma \Lambda^\perp < 0$ et (3.26) par l'application de Lemme projection 1.8.2 et le complément de Schur. Par conséquent, l'inégalité (3.26) est équivalente à l'inégalité (3.12).

D'autre part, construisons une inégalité de fonction de Lyapunov, nous avons $\bar{A}(h)$ stable si et seulement si il existe $\bar{P}(h) = \bar{P}(h)^T > 0$ tel que

$$\bar{A}^T(h)\bar{P}(h^+)\bar{A}(h) - \bar{P}(h) < 0 \quad (3.27)$$

Qui est réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(h) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}(h^+) & 0 \\ 0 & -\bar{P}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}(h) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.28)$$

Nous appliquons le lemme de projection 1.8.2. Alors, l'équivalence entre les inégalités (3.28) et (3.25) est obtenue avec le choix des matrices ci-dessous :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \bar{P}(h^+) & 0 \\ 0 & -\bar{P}(h) \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}(h) \end{bmatrix}; \quad \Lambda^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}(h) \\ I \end{bmatrix};$$

$$\Gamma = I; \quad \Gamma^\perp = 0; \quad Z = \begin{bmatrix} \bar{F}(h) & \bar{G}(h) \end{bmatrix}^T$$

3.4 Conception du filtre H_∞ flou

Dans cette partie, nous allons déterminer les paramètres de filtre flou dans (3.4) de telle sorte que le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ satisfait à la spécification FF dans (3.7) et (3.8).

3.4.1 Cas continu

Théorème 3.4.1 [60] : Le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini (FF) donné

3.4 Conception du filtre H_∞ flou

par (3.7), s'il existe les matrices \hat{A}_{Fi} , \hat{B}_{Fi} , \hat{C}_{Fi} , \hat{D}_{Fi} , M_{1i} , M_{2i} , S_{1i} , S_{2i} , \bar{M}_{1i} , \bar{M}_{2i} , \bar{S}_{1i} , \bar{S}_{2i} , R_{1i} et V , matrices hermitiennes $P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ * & P_{3i} \end{bmatrix}$; $Q_i = \begin{bmatrix} Q_{1i} & Q_{2i} \\ * & Q_{3i} \end{bmatrix} > 0$, une matrice symétrique et définie positive $\bar{P}_i = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i} & \bar{P}_{2i} \\ * & \bar{P}_{3i} \end{bmatrix} > 0$ et les scalaires λ_m , ($m = 1, 2$) satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}_{ii} + \tilde{\Phi}_{ii} < 0, & i \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \tilde{\Omega}_{ij} + \tilde{\Phi}_{ij} + \tilde{\Omega}_{ji} + \tilde{\Phi}_{ji} < 0, & 1 \leq i < j \leq r \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{ii} < 0, & i \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \tilde{\Psi}_{ij} + \tilde{\Psi}_{ji} < 0, & 1 \leq i < j \leq r \end{cases} \quad (3.30)$$

Où

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} -M_{1i} - M_{1i}^T & -V - M_{2i}^T & \tilde{\Phi}_{13ij} & -S_{2i}^T + \hat{A}_{Fi} & -R_{1i} + M_{1i}B_j + \hat{B}_{Fi}D_j & 0 \\ * & -V - V^T & \tilde{\Phi}_{23ij} & -\lambda_2 V^T + \hat{A}_{Fi} & M_{2i}B_j + \hat{B}_{Fi}D_j & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_{33ij} & \tilde{\Phi}_{34ij} & A_j^T R_{1i}^T + S_{1i}B_j + \lambda_1 \hat{B}_{Fi}D_j & L_j^T - C_j^T \hat{D}_{Fi}^T \\ * & * & * & \lambda_2 \{\hat{A}_{Fi} + \hat{A}_{Fi}^T\} & S_{2i}B_j + \lambda_2 \hat{B}_{Fi}D_j & -\hat{C}_{Fi}^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + R_{1i}B_j + B_j^T R_{1i}^T & -D_j^T \hat{D}_{Fi}^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} -\bar{M}_{1i} - \bar{M}_{1i}^T & -V - \bar{M}_{2i}^T & \bar{P}_{1i} + \bar{M}_{1i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j - \bar{S}_{1i}^T & \bar{P}_{2i} + \hat{A}_{Fi} - \bar{S}_{2i}^T \\ * & -V - V^T & \bar{P}_{2i}^T + \bar{M}_{2i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j - \lambda_3 V^T & \bar{P}_{3i} + \hat{A}_{Fi} - \lambda_4 V^T \\ * & * & sym\{S_{1i}A_j + \lambda_1 \hat{B}_{Fi}C_j\} & A_j^T \bar{S}_{2i}^T + \lambda_4 C_j^T \hat{B}_{Fi}^T + \lambda_3 \hat{A}_{Fi} \\ * & * & * & \lambda_4 \{\hat{A}_{Fi} + \hat{A}_{Fi}^T\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{13ij} &= -S_{1i}^T + M_{1i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j; & \tilde{\Phi}_{23ij} &= -\lambda_1 V^T + M_{2i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j; \\ \tilde{\Phi}_{33ij} &= He\{S_{1i}A_j + \lambda_1 \hat{B}_{Fi}C_j\}; & \tilde{\Phi}_{34ij} &= \lambda_1 \hat{A}_{Fi} + A_j^T S_{2i}^T + \lambda_2 C_j^T \hat{B}_{Fi}^T. \end{aligned}$$

La matrice $\tilde{\Omega}_{ij}$ est définie comme suit :

- **Basse fréquences** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_1$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} -Q_1 & -Q_2 & P_{1i} & P_{2i} & 0 & 0 \\ * & -Q_3 & P_{2i}^T & P_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\omega}_l^2 Q_1 & \bar{\omega}_l^2 Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\omega}_l^2 Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- *Moyenne fréquences* : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} -Q_1 & -Q_3 & P_{1i} + j\bar{\omega}_0 Q_1 & P_{2i} + j\bar{\omega}_0 Q_2 & 0 & 0 \\ * & -Q_3 & P_{2i}^T - j\bar{\omega}_0 Q_2^T & P_{3i} + j\bar{\omega}_0 Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_1 & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- *Haute fréquences* : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & P_{1i} & P_{2i} & 0 & 0 \\ * & Q_3 & P_{2i}^T & P_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\omega}_h^2 Q_1 & -\bar{\omega}_h^2 Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\omega}_h^2 Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Les gains des filtres s'expriment par :

$$\begin{pmatrix} A_{Fi} & B_{Fi} \\ C_{Fi} & D_{Fi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_{Fi} & \hat{B}_{Fi} \\ \hat{C}_{Fi} & \hat{D}_{Fi} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Preuve 3.4.1 À partir du théorème 3.3.1, nous supposons qu'un filtre H_∞ admissible flou s'il existe des fonctions matricielles

$$\begin{aligned} \hat{A}_F(h) &= \sum_{i=1}^r h_i \hat{A}_{Fi}; \quad \hat{B}_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i \hat{B}_{Fi}; \quad \hat{C}_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i \hat{C}_{Fi}; \quad \hat{D}_F(h) = \sum_{i=1}^r h_i \hat{D}_{Fi}; \\ P(h) &= \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i}^T & P_{3i} \end{bmatrix}; \quad \bar{P}(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i} & \bar{P}_{2i} \\ \bar{P}_{2i}^T & \bar{P}_{3i} \end{bmatrix} > 0; \quad M(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} M_{1i} & V \\ M_{2i} & V \end{bmatrix}; \\ S(h) &= \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} S_{1i} & \lambda_1 V \\ S_{2i} & \lambda_2 V \end{bmatrix}; \quad \bar{M}(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \bar{M}_{1i} & V \\ \bar{M}_{2i} & V \end{bmatrix}; \quad \bar{S}(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \bar{S}_{1i} & \lambda_3 V \\ \bar{S}_{2i} & \lambda_4 V \end{bmatrix}; \\ Q &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0; \quad R(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} R_{1i} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4 Conception du filtre H_∞ flou

Par ailleurs, en remplaçant chaque terme dans (3.20) et (3.21), on obtient la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(h) + \bar{\Phi}(h) &= \sum_{i=1}^r h_i^2 \{\tilde{\Omega}_{ii} + \tilde{\Phi}_{ii}\} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i < j}^r h_i h_j \{\tilde{\Omega}_{ij} + \tilde{\Phi}_{ij} + \tilde{\Omega}_{ji} + \tilde{\Phi}_{ji}\} < 0; \\ \bar{\Psi}(h) &= \sum_{i=1}^r h_i^2 \tilde{\Psi}_{ii} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i < j}^r h_i h_j \{\tilde{\Psi}_{ij} + \tilde{\Psi}_{ji}\} < 0\end{aligned}\quad (3.33)$$

ce qui implique que les conditions dans (3.29) et (3.30) sont vraies.

3.4.2 Cas discret

Théorème 3.4.2 [57] : *Le système d'erreur donné par (3.5) est asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ dans un domaine MF $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Ensuite, il existe des matrices \hat{A}_{Fi} , \hat{B}_{Fi} , \hat{C}_{Fi} , \hat{D}_{Fi} , V_i , F_{1i} , F_{2i} , G_{1i} , G_{2i} , H_{1i} , H_{2i} , \bar{F}_{1i} , \bar{F}_{2i} , \bar{G}_{1i} , \bar{G}_{2i} , une matrice symétrique $\bar{P}_i = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i} & \bar{P}_{2i} \\ * & \bar{P}_{3i} \end{bmatrix} > 0$ et les matrices hermitiennes $P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ * & P_{3i} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0$ telles que :*

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{iil} + M_{iil} < 0, \quad \bar{\Psi}_{iil} + N_{iil} < 0, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \\ 2\bar{\Phi}_{ijl} + M_{ijl} < 0, \quad 2\bar{\Psi}_{ijl} + N_{ijl} < 0, \quad 1 \leq i < j \leq r\end{aligned}\quad (3.34)$$

Où

$$\begin{bmatrix} M_{11l} & \dots & M_{1rl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1rl}^T & \dots & M_{rrl} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} N_{11l} & \dots & N_{1rl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1rl}^T & \dots & N_{rrl} \end{bmatrix} > 0; \quad \bar{\Phi}_{ijl} = \frac{\tilde{\Phi}_{ijl} + \tilde{\Phi}_{jil}}{2}, \quad \bar{\Psi}_{ijl} = \frac{\tilde{\Psi}_{ijl} + \tilde{\Psi}_{jil}}{2}$$

$$\bar{\Phi}_{ijl} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \bar{\Phi}_{13} & e^{j\theta_c} Q_2 - F_{2i}^T + \hat{A}_{Fi} & -H_{1i}^T + G_{1i} B_j + \hat{B}_{Fi} D_j & 0 \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & e^{j\theta_c} Q_3 + \hat{A}_{Fi} & G_{2i} B_j + \hat{B}_{Fi} D_j & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & P_{2i} - 2\cos\theta_w Q_2 + A_j^T F_{2i}^T & A_j^T H_{1i}^T + F_{1i} B_j & L_j^T - C_j^T \hat{D}_{Fi} \\ * & * & * & P_{3i} - 2\cos\theta_w Q_3 & F_{2i} B_j & -\hat{C}_{Fi}^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + \text{sym}(H_{1i} B_j) & -D_j^T \hat{D}_{Fi} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1l} - \bar{F}_{1i} - \bar{F}_{1i}^T & \bar{P}_{2l} - V_i - \bar{F}_{2i}^T & \bar{F}_{1i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j - \bar{G}_{1i}^T & \hat{A}_{Fi} - \bar{G}_{2i}^T \\ * & \bar{P}_{3l} - V_i - V_i^T & \bar{F}_{2i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j & \hat{A}_{Fi} \\ * & * & -\bar{P}_{1i} + \text{sym}(\bar{G}_{1i}A_j) & -\bar{P}_{2i} + A^T \bar{G}_{2i}^T \\ * & * & * & -\bar{P}_{3i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -P_{1l} - G_{1i} - G_{1i}^T; \quad \bar{\Phi}_{12} = -P_{2l} - V_i - G_{2i}^T; \quad \theta_c = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}; \\ \bar{\Phi}_{13} &= e^{j\theta_c} Q_1 - F_{1i}^T + G_{1i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j; \quad \bar{\Phi}_{22} = -P_{3l} - V_i - V_i^T; \quad \theta_w = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \\ \bar{\Phi}_{23} &= e^{-j\theta_c} Q_2^T + G_{2i}A_j + \hat{B}_{Fi}C_j; \quad \bar{\Phi}_{33} = P_{1i} - 2\cos\theta_w Q_1 + He(F_{1i}A_j). \end{aligned}$$

Donc, si les LMIs dans (3.34) sont faisables, alors les paramètres du filtre flou sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_F(h) &= V^{-1}(h)\hat{A}_F(h) = \left(\sum_{i=1}^r h_i V_i\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^r h_j A_{Fj}\right); \quad C_F(h) = \hat{C}_F(h) = \sum_{j=1}^r h_j C_{Fj}; \\ B_F(h) &= V^{-1}(h)\hat{B}_F(h) = \left(\sum_{i=1}^r h_i V_i\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^r h_j B_{Fj}\right); \quad D_F(h) = \hat{D}_F(h) = \sum_{j=1}^r h_j D_{Fj} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Preuve 3.4.2 : En se basant sur le théorème 3.3.2, le système d'erreur (3.5) est asymptotiquement stable avec un niveau γ de performance H_∞ , si les conditions dans (3.34) sont satisfaites. Nous supposons qu'un filtre flou H_∞ admissible flou s'il existe des fonctions matricielles :

$$P(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i}^T & P_{3i} \end{bmatrix}; \quad \bar{P}(h) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \bar{P}_{1i} & \bar{P}_{2i} \\ \bar{P}_{2i}^T & \bar{P}_{3i} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.36)$$

Pour les variables de pondération libres "slack", leurs structures sont les suivantes :

$$\begin{aligned} G(h) &= \begin{bmatrix} G_1(h) & V(h) \\ G_2(h) & V(h) \end{bmatrix}; \quad F(h) = \begin{bmatrix} F_1(h) & 0 \\ F_2(h) & 0 \end{bmatrix}; \quad H(h) = \begin{bmatrix} H_1(h) & 0 \end{bmatrix}; \\ \bar{F}(h) &= \begin{bmatrix} \bar{F}_1(h) & V(h) \\ \bar{F}_2(h) & V(h) \end{bmatrix}; \quad \bar{G}(h) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(h) & 0 \\ \bar{G}_2(h) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Avec

$$\begin{aligned} V(h) &= \sum_{i=1}^r h_i V_i; \quad F_1(h) = \sum_{i=1}^r h_i F_{1i}; \quad F_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i F_{2i}; \quad G_1(h) = \sum_{i=1}^r h_i G_{1i}; \quad G_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i G_{2i}; \\ \bar{F}_1(h) &= \sum_{i=1}^r h_i \bar{F}_{1i}; \quad \bar{F}_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i \bar{F}_{2i}; \quad \bar{G}_1(h) = \sum_{i=1}^r h_i \bar{G}_{1i}; \quad \bar{G}_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i \bar{G}_{2i} \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.5 Exemples de simulation

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(h) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r h_i h_j h_l^+ \bar{\Phi}_{ijl} = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r h_i^2 h_l^+ \bar{\Phi}_{iil} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{1 \leq i < j \leq r} \sum_{l=1}^r h_i h_j h_l^+ \frac{\bar{\Phi}_{ijl} + \bar{\Phi}_{jil}}{2} \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r h_i^2 h_l^+ \bar{\Phi}_{iil} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{1 \leq i < j \leq r} \sum_{l=1}^r h_i h_j h_l^+ \bar{\Phi}_{ijl} \\
&\leq - \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r h_i^2 h_l^+ M_{iil} - \sum_{i=1}^r \sum_{1 \leq i < j \leq r} \sum_{l=1}^r h_i h_j h_l^+ (M_{ijl} + M_{jil}) \\
&= - \sum_{l=1}^r h_l^+ \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11l} & \dots & M_{1rl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1rl}^T & \dots & M_{rrl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.39}
\end{aligned}$$

De même, on peut obtenir $\bar{\Psi}(h) < 0$. Par conséquent, toutes les conditions du théorème 3.3.2 sont vérifiées.

Remarque 3.4.1 Si nous prenons $Q = 0$, nous pouvons utiliser les théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 pour résoudre le problème de filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel entier (EF) des systèmes T-S flous.

Remarque 3.4.2 Les scalaires $\lambda_{(s=1, \dots, 4)}$ peuvent être obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation convexe soit pour le théorème 3.4.1. Nous remarquons que pour le théorème proposé, l'utilisation de la fonction "fminsearch" est indispensable afin de chercher les valeurs optimales des $\lambda_{(s=1, \dots, 4)}$ qui correspondent au minimum de γ .

3.5 Exemples de simulation

Cette section est réservée aux exemples de simulation, à travers lesquels on illustre l'efficacité des approches proposées. Ces trois exemples sont implémentés sur Matlab en utilisant Yalmip [111] et SeDumi [139].

3.5.1 Exemple 1 : cas continu

Soit le système flou T-S à temps continu suivant avec deux règles, traité dans [34]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(h)x(t) + B(h)u(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) + D(h)u(t) \\ z(t) &= L(t)x(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ -267.2906 & -97.8545 & -14.9834 \end{bmatrix}; B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -477.1594 & -173.2151 & -26.5881 \end{bmatrix}; D_1 = D_2 = 2; \\ C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance sont données comme suit :

$$T_1(x_1(t)) = \begin{cases} \left| \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} \right|; & x_1(t) \neq 0 \\ 1; & x_1(t) = 0; \end{cases} \quad T_2(x_1(t)) = 1 - T_1(x_1(t))$$

Nous supposons que les perturbations sont dans les domaines basses et moyennes fréquences, par exemple $u(t) = 6\sin(7t)$. Deuxièmement, en supposant que la fréquence du bruit $u(t)$ est supérieure à 12 Hz, c'est-à-dire, $|\omega| \geq 5$ rad/s pour $u(t)$.

Pour montrer l'avantage de l'approche proposée, nous montrons dans table 3.1 les niveaux de performance de filtrage minimum H_∞ calculés par les approches proposées dans ce chapitre et les résultats proposée dans [34] dans tous le domaine fréquentiel de la perturbation.

À partir de la table 3.1, nous constatons :

- Dans le cas de fréquences entière (EF), le théorème 3.4.1 (Q=0) est meilleur que le résultat trouvé dans le théorème 3 dans [34].
- En cas de fréquences finie (FF), il est clair que le théorème 3.4.1 fournit des résultats excellents et moins conservatifs que le cas EF, ce qui démontre clairement l'avantage de l'approche FF proposée dans cette partie.

3.5 Exemples de simulation

EF		FF (Théorème 3.4.1) [60]		
Th 3 [34]	Th 3.4.1 (Q=0)	BF ($ \omega \leq 2$)	MF ($1 \leq \omega \leq 4$)	HF ($ \omega \geq 3$)
0.1444	0.0919	0.0610	0.0553	0.0442
	$\lambda_1 = 6.8661$	$\lambda_1 = 8.4510$	$\lambda_1 = 4.3285$	$\lambda_1 = 4.8303$
	$\lambda_2 = 0.1585$	$\lambda_2 = 1.4223$	$\lambda_2 = 5.7149$	$\lambda_2 = 0.0029$
	$\lambda_3 = 2.0906$	$\lambda_3 = 1.2982$	$\lambda_3 = 2.6081$	$\lambda_3 = 0.2710$
	$\lambda_4 = 0.5121$	$\lambda_4 = 1.1064$	$\lambda_4 = 0.6032$	$\lambda_4 = 1.9067$

TABLE 3.1 Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ comparé aux résultats de la littérature

En simulant du théorème 3.4.1, nous avons obtenu les résultats suivants :

- Pour toute la domaine de fréquences entière (EF), le niveau d'atténuation de la perturbation obtenu est $\gamma = 0.0919$ et les matrices des filtres H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F1} & B_{F1} \\ \hline C_{F1} & D_{F1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1.1906 & 2.2206 & -1.0520 & -0.0137 \\ -1.0227 & -7.1874 & 2.2252 & -0.0071 \\ -5.8065 & -10.7447 & -2.5964 & 0.0141 \\ \hline 2.7588 & 11.7695 & 2.0220 & 0.0224 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F2} & B_{F2} \\ \hline C_{F2} & D_{F2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -4.4937 & -2.7686 & -0.5740 & -0.0168 \\ -3.0781 & -10.7178 & 2.0044 & -0.0078 \\ -4.1328 & -11.4310 & -3.4495 & 0.0172 \\ \hline -1.6995 & 5.9127 & 0.8585 & 0.0025 \end{array} \right] \quad (3.41)$$

- Pour un domaine BF ($|\omega| \leq 2$), le niveau d'atténuation de la perturbation obtenu est $\gamma = 0.0610$ et les matrices de filtrage H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F1} & B_{F1} \\ \hline C_{F1} & D_{F1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -0.5437 & 1.0146 & -0.0562 & -0.2922 \\ 1.2661 & -2.1543 & 0.3695 & -0.8721 \\ -42.7482 & -23.5393 & -3.4032 & 4.6669 \\ \hline -0.0465 & -0.0442 & 0.0077 & 0.0047 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{F2} & B_{F2} \\ \hline C_{F2} & D_{F2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -6.6521 & -1.0074 & -0.4164 & 0.1003 \\ 8.5928 & 0.9407 & 0.7613 & -1.5681 \\ -0.5168 & -9.1356 & -0.8710 & 2.1925 \\ \hline -0.1781 & -0.0560 & -0.0019 & 0.0066 \end{array} \right] \quad (3.42)$$

- Dans un domaine MF ($1 \leq \omega \leq 4$), le niveau d'atténuation de la perturbation obtenu est $\gamma = 0.0553$ et les matrices de filtrage H_∞ correspondant sont :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{F1} & B_{F1} \\ \hline C_{F1} & D_{F1} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1.4649 & 0.4914 & -0.0381 & -0.0469 \\ -10.9338 & -4.7673 & 0.3639 & -0.7817 \\ -26.6826 & -15.7815 & -5.0724 & 2.2081 \\ \hline -1.1219 & 0.1015 & 0.0190 & -0.0049 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{F2} & B_{F2} \\ \hline C_{F2} & D_{F2} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1.4652 & 0.4916 & -0.0381 & -0.0473 \\ -10.9342 & -4.7673 & 0.3641 & -0.7816 \\ -26.6823 & -15.7812 & -5.0726 & 2.2079 \\ \hline -1.1223 & 0.1014 & 0.0188 & -0.0052 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

- Enfin, lorsque un domaine HF ($|\omega| \geq 3$), le niveau d'atténuation de perturbation obtenu est $\gamma = 0.0442$ et les paramètres du filtre d'ordre plein sont donnés par :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{F1} & B_{F1} \\ \hline C_{F1} & D_{F1} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1.9775 & 1.5747 & 0.1472 & 0.0424 \\ -8.9296 & 0.2784 & 0.1805 & -0.3509 \\ -19.9961 & -90.0448 & -10.6439 & -9.3238 \\ \hline -0.4260 & -0.1304 & -0.0074 & 0.0010 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{F2} & B_{F2} \\ \hline C_{F2} & D_{F2} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1.7318 & 1.0410 & 0.0966 & -0.0631 \\ -7.9159 & 0.3247 & 0.2213 & -0.3649 \\ -24.6680 & -57.3966 & -8.4801 & -2.9225 \\ \hline -0.4340 & -0.1134 & -0.0069 & 0.0040 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

De plus, les figures 3.1, 3.2 et 3.3 représentent les réponses des erreurs d'estimation $e(t) = z(t) - z_F(t)$ en fonction du temps avec les matrices de filtrage H_∞ données dans (3.41), (3.42), (3.43) et (3.44). Pour cela, nous définissons les conditions initiales des états comme étant nulles ($x(0) = x_F(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$) et les perturbations exogènes $u(t)$ sont définies par $u(t) = 6\sin(7t)$ (pour les cases BF et MF) et $u(t) = 6\sin(12t)$ (pour le cas HF), où la ligne pleine est obtenue par l'approche à FF proposée dans cette partie, tandis que les courbes en pointillées est obtenus par la méthode de EF proposée dans ce chapitre, tandis que le ligne des points sont obtenues par la méthode de EF donnée dans [34]. Donc, nous pouvons conclure que l'approche de FF fournit des meilleurs résultats que l'approche de EF proposée dans ce chapitre et dans [34]. Ceci montre l'avantage de la méthode à FF.

3.5 Exemples de simulation

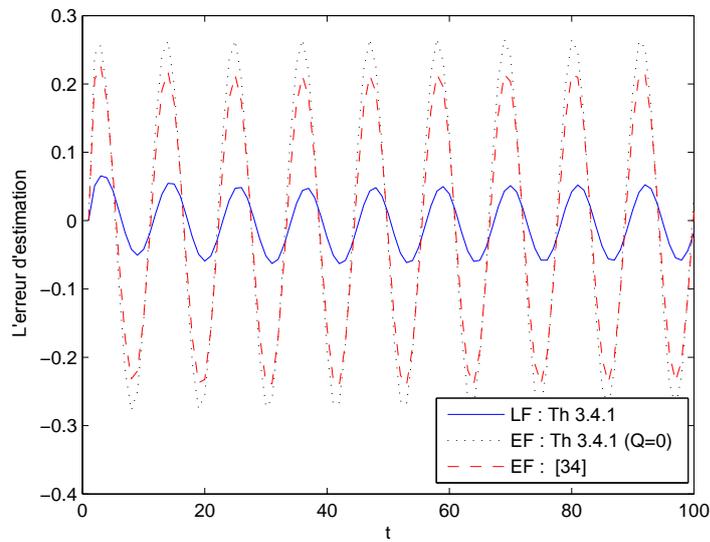


FIGURE 3.1 Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas BF

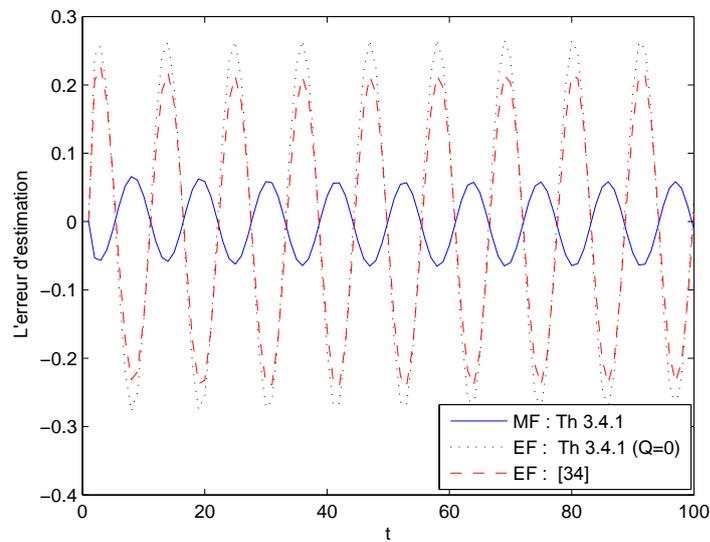


FIGURE 3.2 Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas MF

Par la suite, nous définissons le rapport $r(t)$ de $e(t)$ comme :

$$r(t) = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{\infty} e^T(t)e(t)}{\sum_{k=0}^{\infty} u^T(t)u(t)}} \quad (3.45)$$

afin de vérifier la valeur obtenue de γ .

Enfin, pour le cas HF ($|\omega| \geq 3$), nous présentons le ratio $r(k)$ par rapport à γ dans la figure 3.4. Par conséquent, la valeur obtenue des performances H_∞ est vérifiée à travers le ratio $r(k)$.

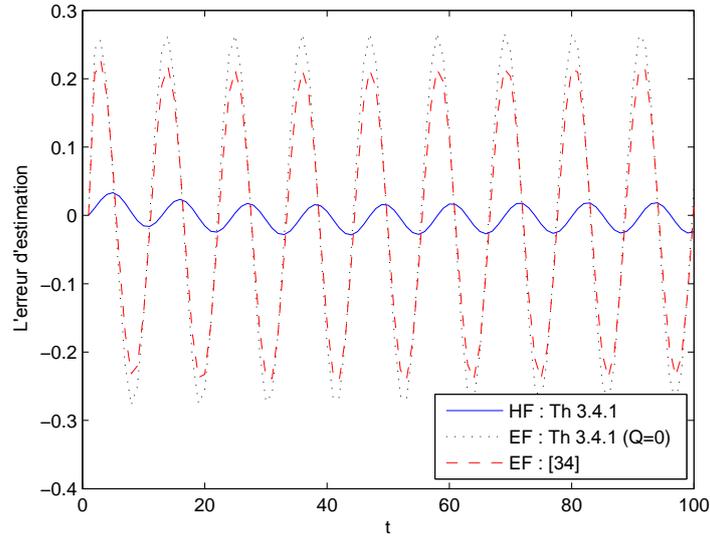


FIGURE 3.3 Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes dans le cas HF

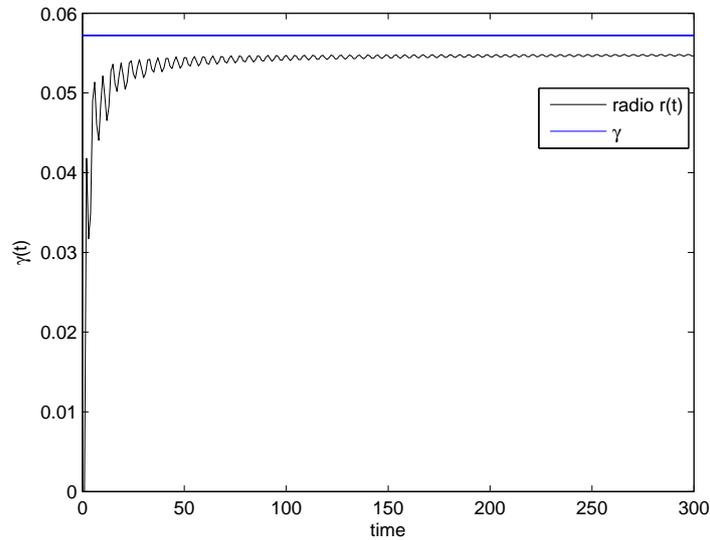


FIGURE 3.4 Vérifications des performances H_∞ par $r(k)$ pour le cas HF

Remarque 3.5.1 : Dans l'exemple 2 ci-dessous, nous choisissons les matrices $P, \bar{P}, M, S, R, \bar{M}$ et \bar{S} sont indépendantes de h et les scalaires $\lambda_{(s=1,\dots,4)} = 0$. Ainsi que $M = \bar{M}, S = \bar{S}$ et $D_f = 0$. De plus, nous supposons le cas dans un domaine moyenne fréquence ($\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$).

3.5.2 Exemple 2 : cas continu (circuit de la diode tunnel)

Considérons un circuit de la diode tunnel (Voir, figure 2.5 dans chapitre 2), dont la modélisation floue a été faite en [127], où $x_1(t) = v_C(t), x_2(t) = i_L(t)$ soit les variables d'état, $u(t)$ correspond à l'entrée de bruit de perturbation, $y(t)$ est le résultat de mesure, $z(t)$ est la sortie contrôlée.

Ensuite, le système de circuit peut être approché par le modèle flou T-S suivant :

Règle du système 1 : Si $x_1(t)$ est $T_1(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ z(t) &= L_1 x(t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Règle du système 2 : Si $x_1(t)$ est $T_2(x_1(t))$ Alors

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_2 u(t) \\ z(t) &= L_2 x(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 50 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4.6 & 50 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}; \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_1 = D_2 = 1. \end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance sont comme suit :

$$T_1(x_1(t)) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_1(t)+1}{3}, & -3 \leq x_1(t) \leq 0 \\ 0, & x_1(t) < -3 \\ \frac{-x_1(t)+3}{3}, & 0 \leq x_1(t) \leq 3 \\ 0, & x_1(t) > 3 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad T_2(x_1(t)) = 1 - T_1(x_1(t)) \quad (3.48)$$

Ici, nous supposons que les perturbations sont dans la plage de FF, par exemple, $u(t) = 0,1 \cos(6t) \exp(-0,1t)$. Etant donné que la plage de fréquence des perturbations peut être considérée comme appartenant au domaine $u(t) \in [1,5]$ rad/s.

Le but principal de cet exemple est de formuler un filtre flou sous la forme (3.4) de telle sorte que le système d'erreur de filtrage résultant dans (3.5) soit asymptotiquement stable avec H_∞ niveau d'atténuation des perturbations avec une spécification à FF dans (3.6).

En résolvant le **théorème 3.4.1 [60]**, la valeur γ_{min} est illustrée dans la table 3.2.

Les intervalles des fréquences	Les méthodes	γ
EF ($0 \leq \omega \leq \infty$)	[127]	0.5700
FF ($1 \leq \omega \leq 5$)	Théorème 3.4.1 [60]	0.1809

TABLE 3.2 Comparaison des résultats en terme des performances H_∞

A partir la table 3.2, nous concluons ensuite que la méthode proposée peut être beaucoup plus petite que celle de la méthode EF dans [127], ce qui démontre clairement l'avantage de l'approche dans un domaine fréquentiel fini.

Les matrices du filtre H_∞ flou sont :

$$\begin{aligned}
 A_{F1} &= \begin{bmatrix} -4.9437 & -7.1455 \\ -0.9940 & -6.9207 \end{bmatrix}; B_{F1} = \begin{bmatrix} -3.0089 \\ -0.5513 \end{bmatrix}; C_{F1} = \begin{bmatrix} -0.8138 & -3.5191 \end{bmatrix}; \\
 A_{F2} &= \begin{bmatrix} -4.9440 & -7.1450 \\ -0.9938 & -6.9211 \end{bmatrix}; B_{F2} = \begin{bmatrix} -3.0092 \\ -0.5521 \end{bmatrix}; C_{F2} = \begin{bmatrix} -0.8141 & -3.5192 \end{bmatrix} \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

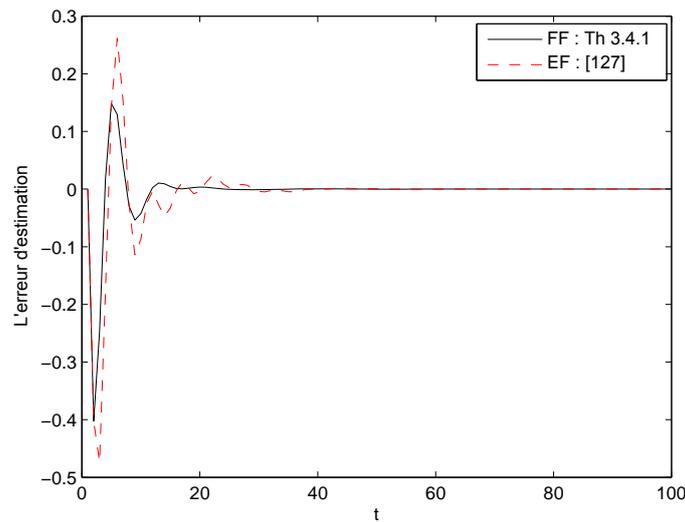


FIGURE 3.5 Erreurs $e(t)$ comparé aux différentes méthodes

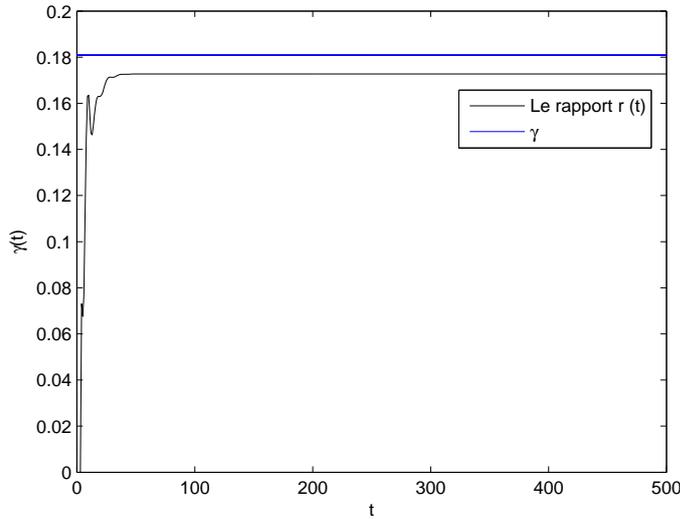


FIGURE 3.6 Vérifications des performances H_∞ par $r(t)$

Soient les conditions initiales sont choisies comme $x(0) = [0.1 \ -0.1]^T$ et $x_F(0) = [0 \ 0]^T$, nous présentons l'erreur d'estimation à travers la figure 3.5 et le ratio $r(k)$ dans la figure 3.6.

Ces figures confirment l'efficacité de notre méthode, où la valeur du pic d'erreur d'estimation est minimale par rapport à la valeur du pic donnée dans [127] (Voir figure 3.5) et converge vers 0. Puis, la valeur obtenue des performances H_∞ est vérifiée à travers le ratio $r(k)$ (Voir figure 3.6).

3.5.3 Exemple 3 : cas discret

Considérons un système discret flou T-S dans la forme (3.2) pour $r = 2$, dont les matrices s'expriment comme suit [163] :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1.05 & 0.35 \\ -0.42 & -0.07 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.792 & -0.432 \\ -0.36 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.004 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.1 \end{bmatrix}; \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 1.71 & 2.85 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 2.28 \end{bmatrix}; \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.27 \end{bmatrix}; \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}; \\
 D_1 &= D_2 = 0.005
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Les fonctions d'appartenance sont définies comme suit :

$$T_1(x_1(k)) = \begin{cases} \left| \frac{\sin(x_1(k))}{x_1(k)} \right|, & \text{pour } x_1(k) \neq 0 \\ 1, & \text{pour } x_1(k) = 0 \end{cases}; \quad \text{et } T_2(x_1(k)) = 1 - T_1(x_1(k)) \tag{3.51}$$

D'après la simulation de théorème 3.4.2, le niveau d'atténuation γ_{min} de performance H_∞ est donnée dans la table 3.3.

Domaines des fréquences	Méthodes	γ_{min}
EF ($-\pi \leq \theta \leq \pi$)	Théorème 3 [163]	1.5900
	Théorème 3 ($Q = 0$) [46]	Infaisable
	Théorème 3.4.2 ($Q = 0$) [57]	0.7129
FF ($\pi/30 \leq \theta \leq \pi/14$)	Théorème 4 [46]	0.9555
	Théorème 3.4.2 [57]	0.4374

TABLE 3.3 Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ obtenu par la simulation de théorème 3.4.2

A travers la table 3.3, nous avons :

- Dans le cas EF, notre résultat est meilleur que le résultat trouvé dans [163], et il est meilleur que le cas FF dans [46].
- Dans le cas FF, le **théorème 3.4.2 [57]** peuvent obtenir γ beaucoup plus petit que celui de l'approche dans [46] et c'est mieux que le cas EF, ce qui démontre clairement l'avantage de notre méthode.

Par la suite, les matrices du filtre flou H_∞ sont :

$$\begin{aligned}
 A_F(h) &= h_1^2 \begin{bmatrix} 1.7400 & 1.6652 \\ -0.8549 & -0.7089 \end{bmatrix} + h_1 h_2 \begin{bmatrix} 3.4801 & 3.3299 \\ -1.7102 & -1.4182 \end{bmatrix} \\
 &+ h_2^2 \begin{bmatrix} 1.7401 & 1.6647 \\ -0.8553 & -0.7093 \end{bmatrix}; \quad D_F(h) = h_1^2[0.2133] + h_2^2[0.2132]; \\
 B_F(h) &= h_1^2 \begin{bmatrix} 0.0361 \\ -0.0489 \end{bmatrix} + h_1 h_2 \begin{bmatrix} 0.0722 \\ -0.0979 \end{bmatrix} + h_2^2 \begin{bmatrix} 0.0362 \\ -0.0490 \end{bmatrix}; \\
 C_F(h) &= h_1^2 \begin{bmatrix} -1.0439 & -1.1063 \end{bmatrix} + h_2^2 \begin{bmatrix} -1.0463 & -1.1123 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Puis, nous définissons les conditions initiales comme $x(0) = x_F(0) = [0 \ 0]^T$, Les figures suivantes représentent successivement l'évolution des l'états $x(k)$ et $x_F(k)$ (Voir figure 3.7). Nous pouvons constater que d'après un certain moment les états $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_{1F}(k)$ et $x_{2F}(k)$, tendent vers 0. Alors, les paramètres du filtre obtenus sont meilleurs à savoir ses états sont asymptotiquement stables.

3.5 Exemples de simulation

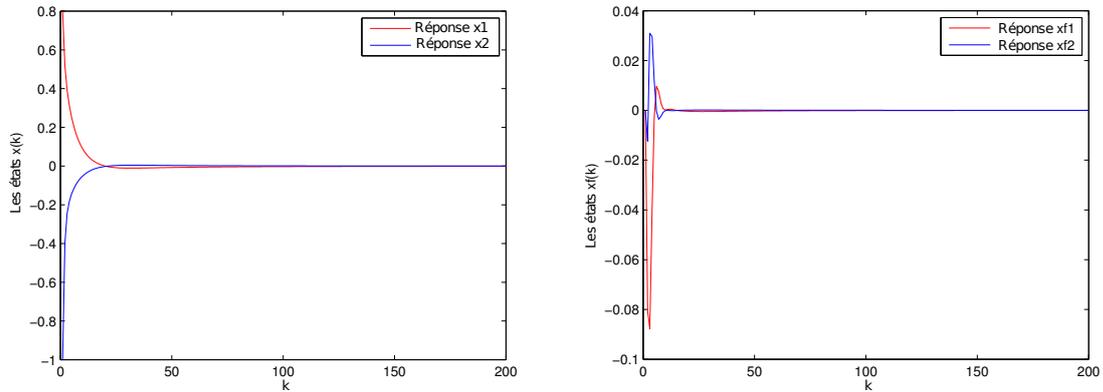


FIGURE 3.7 Etats du système et filtre flou H_∞

Ensuite, la figure 3.8 représente l'estimation erreur $e(k)$ pour le signal d'entrée sinusoïdal $w(k) = \sin(k)$, avec la courbe pointillée indique le résultat de [46], la courbe de point indique le résultat de [163] et la courbe en trait plein est obtenue par le théorème 3.4.2. Ainsi, on peut donc en conclure que la méthode de conception développée dans le théorème 3.4.2 conduit à des résultats moins conservateurs par rapport à [46] et [163].

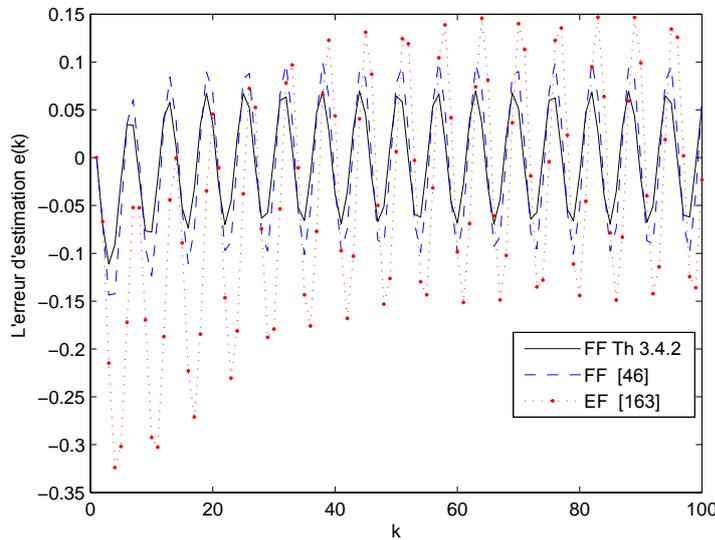


FIGURE 3.8 Erreurs $e(k)$ soumise à une perturbation sinusoïdale par différentes méthodes

3.6 Conclusion

Des conditions moins conservatives, ont été présentées pour la synthèse de filtrage H_∞ pour les systèmes dynamiques 1D T-S flou dans des domaines à FF spécifiques, en utilisant la méthode du lemme gKYP, la méthode de Lyapunov, et des matrices additionnelles. Toutes les conditions d'analyse et de synthèse se présentent sous forme de LMIs qui peuvent être facilement résolues par des techniques d'optimisation convexe. En outre, l'efficacité et les avantages de la méthode FF proposée sont testées par des applications numériques et comparés aux résultats existants dans la littérature.

Dans le chapitre 4 et toujours sur le même axe, à savoir le filtrage H_∞ , nous abordons le problème du filtrage H_∞ robuste pour les systèmes incertains dans un domaine fréquentiel fini.

Chapitre 4

Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains dans un domaine fréquentiel fini

4.1 Introduction

Durant les dernières années, le problème du filtrage a été largement étudié puis appliqué aux nombreuses applications dans les domaines d'ingénierie tels que la théorie de commande, le traitement du signal et la communication en réseaux. En raison de ses avantages, la théorie du filtrage H_∞ a fait l'objet de recherches croissantes dans diverses situations pratiques, telles que le filtrage H_∞ pour les systèmes linéaires incertains [72, 78, 124, 81, 42, 75, 117], les systèmes stochastiques [159, 82, 20], le problème de filtrage H_∞ d'ordre réduit [107], filtrage H_∞ robuste [113, 160, 67], filtrage mixte H_2/H_∞ [131, 137], l'approche polynomiale présentée dans [77, 72, 79, 80, 23, 161], et les systèmes dynamiques de performance H_∞ à paramètres dépendants de paramètre avec et sans retard dans [108, 43, 156, 132].

De plus, depuis les années soixante-dix, des modèles de systèmes 2-D linéaires ont été introduits par Roesser [136] et Fornasini-Marchesini [74]. Des recherches approfondies sur les systèmes bidimensionnels (2D) ont été menées en raison de leur importance dans les applications théoriques et pratiques telles que le filtrage numérique multidimensionnel, le traitement des images, le contrôle des processus répétitifs, le traitement de données géo-physique, les processus thermiques, le traitement du signal ainsi que le contrôle du processus. Pour ces modèles, ces dernières années, on s'est beaucoup intéressé aux problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes 2D, et de nombreux résultats impor-

tants sont disponibles dans la littérature. Par exemple, le problème de l'analyse de stabilité peut être trouvé dans [1, 3, 2, 92, 30, 93, 14, 13, 16, 95], les systèmes incertains [21, 22, 19, 63, 64, 25, 9, 66, 91, 155], les systèmes singuliers [105, 104, 106] et les problèmes de contrôlabilité et d'observabilité sont étudiés dans [50, 135], ect.

En outre, les techniques mentionnées ci-dessus concernent le domaine fréquentiel complet, cependant, de nombreux systèmes physiques existants sont affectés par des perturbations externes avec des gammes de fréquences connues. Ainsi, il est bien connu que pour obtenir des conditions moins conservatrices, il serait très utile de prendre en compte le domaine fréquentiel des perturbations dans l'analyse et la conception du filtrage des systèmes dynamiques incertains. Les résultats de la littérature traitant ce problème sont donnés pour systèmes 1D incertains (voir, par exemple, [70, 112, 52, 55, 59]) et systèmes 2D incertains [49, 61, 53, 157, 115, 118, 116, 38, 58].

Dans ce chapitre, nous discuterons le problème de filtrage robuste H_∞ pour les systèmes incertains (1D en temps discret et continu, 2D à temps continu décrits par le modèle de Roesser). Notre objectif est de proposer une nouvelle technique de conception du filtre garantissant une performance H_∞ lorsque les domaines de fréquence des bruits sont connus à l'avance. Nous utilisons les lemmes gKYP [99], Finsler [99], projection [99], les matrices polynomiales homogènes dépendantes des paramètres de degré arbitraire, la méthode de Lyapunov et des matrices additionnelles pour dériver des nouvelles conditions qui assurent un niveau d'atténuation γ de performance H_∞ moins conservatifs.

Enfin, nous soulignons que les résultats théoriques sont donnés sous la forme des LMIs, qui peuvent être résolus par un logiciel numérique standard, fournissant ainsi une méthodologie simple. À la fin de ce chapitre, nous proposons quelques exemples numériques pour illustrer les avantages des méthodes choisies.

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

4.2.1 Formulation du problème

Considérons un système incertain décrit par le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= A_\alpha x(t) + B_\alpha w(t) \\ y(t) &= C_\alpha x(t) + D_\alpha w(t) \\ z(t) &= L_\alpha x(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

Où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur exogène des perturbations externes appartenant à $\ell_2[0, \infty)$, avec un domaine de fréquence connu. L'opérateur $\delta[x(t)]$ désigne la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps pour le système continu et l'opérateur de décalage pour le système discret et les matrices $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ et L_α sont de dimensions convenables.

Les matrices du système (4.1) sont données par

$$\mathcal{M}_\alpha = \{A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha, L_\alpha\} \quad (4.2)$$

appartiennent à un domaine polyédrique borné convexe, décrit par

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{M}_\alpha \mid \mathcal{M}_\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathcal{M}_i; \alpha \in \Gamma\} \quad (4.3)$$

Avec Γ indique l'unité de simplexe donnée dans (1.57) et $\mathcal{M}_i := \{A_i, B_i, C_i, D_i, L_i\}$ dénote le $i^{\text{ème}}$ sommet du polytope.

Le filtre proposé se décrit par la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta[x_f(t)] &= A_f x_f(t) + B_f y(t) \quad x_f(0) = 0 \\ z_f(t) &= C_f x_f(t) + D_f y(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Où $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état du filtre, $z_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est la sortie du filtre. les matrices A_f, B_f, C_f et D_f sont les paramètres du filtre à dimension appropriée.

Soit le signal d'erreur de filtrage $e(t) = z(t) - z_f(t)$ et le vecteur d'état augmenté $\xi(t) = [x(t)^T \quad x_f(t)^T]^T$. A partir de filtre (4.4) et le système (4.1), on obtient le système augmenté :

$$\begin{aligned} \delta[\xi(t)] &= \bar{A}_\alpha \xi(t) + \bar{B}_\alpha w(t) \\ e(t) &= \bar{C}_\alpha \xi(t) + \bar{D}_\alpha w(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où

$$\bar{A}_\alpha = \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ B_f C_\alpha & A_f \end{bmatrix}; \bar{B}_\alpha = \begin{bmatrix} B_\alpha \\ B_f D_\alpha \end{bmatrix}; \bar{C}_\alpha = [L_\alpha - D_f C_\alpha \quad -C_f]; \bar{D}_\alpha = -D_f D_\alpha \quad (4.6)$$

Nous définissons la fonction de transfert à partir de l'entrée $w(t)$ vers l'erreur du filtrage $e(t)$ par l'équation suivante :

$$G(\rho) = \bar{C}_\alpha [\rho I_{2n_x} - \bar{A}_\alpha]^{-1} \bar{B}_\alpha + \bar{D}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma \quad (4.7)$$

Avec ρ désigne $j\omega$ pour le système à temps continu, et $e^{j\theta}$ pour le système à temps discret.

Le but principal de cette partie est de résoudre le problème suivant :

Problème de filtrage H_∞ robuste : Soit le système linéaire (4.1), des paramètres incertains donnés par (4.2). Le problème de cette partie est de trouver un filtre adéquat (4.4), sachant que le système augmenté (4.5) est robuste asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in \Gamma$ et vérifient la performance H_∞ à fréquence finie suivante :

— **Cas continu :**

$$\bar{\sigma}\{G(j\omega)\} < \gamma, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (4.8)$$

— **Cas discret :**

$$\bar{\sigma}\{G(e^{j\theta})\} < \gamma, \quad \forall \theta \in \Delta \quad (4.9)$$

Où Ω et Δ sont respectivement, définis dans les tables 1.1 et 1.2.

4.2.2 Analyse du filtre H_∞ robuste

Cette partie présente les résultats d'analyse de stabilité et de performance H_∞ , qui seront utilisés dans l'étape de conception du filtre H_∞ .

Proposition 4.2.1 : *Le système augmenté (4.5) est asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ satisfait à la spécification FF dans (4.8) et (4.9), s'il existe une matrice de Lyapunov dépendante de paramètre $\bar{P}_\alpha > 0$, des matrices hermitiennes dépendantes de paramètres $P_\alpha, Q_\alpha > 0$ et les matrices dépendantes de paramètres $M_\alpha, S_\alpha, \bar{M}_\alpha, \bar{S}_\alpha$ et R_α , telles que :*

$$\Phi_\alpha = \begin{bmatrix} \Phi_{1\alpha} & \Phi_{2\alpha} & M_\alpha \bar{B}_\alpha - R_\alpha^T & 0 \\ * & \Phi_{3\alpha} & S_\alpha \bar{B}_\alpha + \bar{A}_\alpha^T R_\alpha^T & \bar{C}_\alpha^T \\ * & * & -\gamma^2 I + R_\alpha \bar{B}_\alpha + \bar{B}_\alpha^T R_\alpha^T & \bar{D}_\alpha^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

$$\Psi_\alpha = \begin{bmatrix} \Psi_{1\alpha} & \Psi_{2\alpha} \\ * & \Psi_{3\alpha} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

— **Cas discret :**

- **Basse fréquence :** $|\theta| \leq \theta_l$

$$\Phi_{1\alpha} = P_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \Phi_{2\alpha} = Q_\alpha - S_\alpha^T + M_\alpha \bar{A}_\alpha; \Phi_{3\alpha} = -P_\alpha - 2\cos\theta_l Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

- **Moyenne fréquence** : $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\begin{aligned}\Phi_{1\alpha} &= P_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \quad \Phi_{2\alpha} = e^{j\theta_c} Q_\alpha - S_\alpha^T + M_\alpha \bar{A}_\alpha; \\ \Phi_{3\alpha} &= -P_\alpha - 2\cos\theta_w Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha); \quad \theta_c = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}; \quad \theta_w = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}\end{aligned}$$

- **Haute fréquence** : $|\theta| \geq \theta_h$

$$\Phi_{1\alpha} = P_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \quad \Phi_{2\alpha} = -Q_\alpha - S_\alpha^T + M_\alpha \bar{A}_\alpha; \quad \Phi_{3\alpha} = -P_\alpha + 2\cos\theta_h Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

Et

$$\Psi_{1\alpha} = \bar{P}_\alpha - \text{Sym}(\bar{M}_\alpha); \quad \Psi_{2\alpha} = \bar{M}_\alpha \bar{A}_\alpha - \bar{S}_\alpha^T; \quad \Psi_{3\alpha} = -\bar{P}_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

— **Cas continu** :

- **Basse fréquence** : $|\omega| \leq \omega_1$

$$\Phi_{11\alpha} = -Q_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \quad \Phi_{12\alpha} = P_\alpha + M_\alpha \bar{A}_\alpha - S_\alpha^T; \quad \Phi_{22\alpha} = \omega_l^2 Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

- **Moyenne fréquence** : $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$\begin{aligned}\Phi_{11\alpha} &= -Q_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \quad \Phi_{12\alpha} = P_\alpha + j\omega_c Q_\alpha + M_\alpha \bar{A}_\alpha - S_\alpha^T; \\ \Phi_{22\alpha} &= -\omega_1 \omega_2 Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha); \quad \omega_c = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}\end{aligned}$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \omega_h$

$$\Phi_{11\alpha} = Q_\alpha - \text{Sym}(M_\alpha); \quad \Phi_{12\alpha} = P_\alpha + G_\alpha \bar{A}_\alpha - S_\alpha^T; \quad \Phi_{22\alpha} = -\omega_h^2 Q_\alpha + \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

Et

$$\Psi_{1\alpha} = -M_\alpha - M_\alpha^T; \quad \Psi_{2\alpha} = \bar{P}_\alpha + M_\alpha \bar{A}_\alpha - S_\alpha^T; \quad \Psi_{3\alpha} = \text{Sym}(S_\alpha \bar{A}_\alpha)$$

Preuve 4.2.1 : Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous allons appliquer le lemme de finsler. Premièrement, nous démontrons que (1.46), (1.47), (1.48) et (1.46) sont équivalents à (4.10). Admettons que les inégalités dans (4.10) et (4.11) vraies. Alors, (4.10) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0 \tag{4.12}$$

Où

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{1\alpha} & \mathcal{Q}_{1\alpha} & 0 \\ * & \mathcal{Q}_{2\alpha} & \bar{C}_\alpha^T \bar{D}_\alpha \\ * & * & -\gamma^2 I + \bar{D}_\alpha^T \bar{D}_\alpha \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \delta[\xi(t)] \\ \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} M_\alpha \\ S_\alpha \\ R_\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Avec

— **Cas continu : moyenne fréquence** ($\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$; $\omega_c = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$)

$$\mathcal{Q}_{1\alpha} = -Q_\alpha; \quad \mathcal{Q}_{2\alpha} = P_\alpha + j\bar{\omega}_c Q_\alpha; \quad \mathcal{Q}_{3\alpha} = -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q_\alpha$$

— **Cas discret : moyenne fréquence** ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; $\theta_c = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$; $\theta_w = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}$)

$$\mathcal{Q}_{1\alpha} = P_\alpha; \quad \mathcal{Q}_{2\alpha} = e^{j\theta_c} Q_\alpha; \quad \mathcal{Q}_{3\alpha} = -P_\alpha - 2\cos\theta_w Q_\alpha$$

Qui, en utilisant la condition (ii) du lemme de finsler et le lemme de complément de Schur, on trouve (1.40) et (1.46).

D'autre part, \bar{A}_α est stable si et seulement s'il existe $\bar{P}_\alpha = \bar{P}_\alpha^T > 0$ tels que :

— **Cas continu :**

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \bar{P}_\alpha \\ \bar{P}_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

— **Cas discret :**

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_\alpha & 0 \\ 0 & -\bar{P}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

Nous définissons

$$\zeta = \begin{bmatrix} \delta[\xi(t)] \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Et

— **Cas continu :**

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{P}_\alpha \\ \bar{P}_\alpha & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} M_\alpha \\ S_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

— *Cas discret :*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\alpha & 0 \\ 0 & -\bar{P}_\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \bar{M}_\alpha \\ \bar{S}_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Par le lemme de finsler 1.8.3, alors, les expressions (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) et (4.18) sont équivalentes à :

— *Cas continu :*

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{P}_\alpha \\ \bar{P}_\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_\alpha \\ S_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_\alpha \\ S_\alpha \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.19)$$

— *Cas discret :*

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_\alpha & 0 \\ 0 & -\bar{P}_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_\alpha \\ \bar{G}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F}_\alpha \\ \bar{G}_\alpha \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.20)$$

Donc, on trouve l'expression (4.11).

Remarque 4.2.1 : Pour démontrer les cas basse et haute fréquence, on utilise la même démarche du cas moyenne fréquence.

4.2.3 Conception du filtre H_∞ robuste

Dans cette section, nous proposons une structure spéciale pour les matrices dépendantes de paramètre utilisées dans l'étape d'analyse, pour concevoir le filtre H_∞ (4.4), de tel sort que le système augmenté (4.5) est robuste asymptotiquement stable garantissant un niveau $\gamma > 0$ de performance H_∞ et satisfait à la spécification de FF dans (4.8) et (4.9).

Nous choisissons les structures des matrices dépendantes de paramètre M_α , S_α , R_α , \bar{M}_α et \bar{S}_α suivantes :

— **Cas discret :**

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \begin{bmatrix} M_{1\alpha} & U \\ M_{2\alpha} & U \end{bmatrix}; \quad S_\alpha = \begin{bmatrix} S_{1\alpha} & \lambda_1 U \\ S_{2\alpha} & \lambda_2 U \end{bmatrix}; \quad R_\alpha = \begin{bmatrix} R_{1\alpha} & \lambda_3 U \end{bmatrix}; \\ \bar{M}_\alpha &= \begin{bmatrix} \bar{M}_{1\alpha} & U \\ \bar{M}_{2\alpha} & U \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{S}_{1\alpha} & 0 \\ \bar{S}_{2\alpha} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

— **Cas continu :**

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} M_{1\alpha} & U \\ M_{2\alpha} & U \end{bmatrix}; \quad S_\alpha = \begin{bmatrix} S_{1\alpha} & \lambda_1 U \\ S_{2\alpha} & \lambda_2 U \end{bmatrix}; \quad R_\alpha = \begin{bmatrix} R_{1\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Avec U une matrice inversible. $\lambda_i, i = 1, \dots, 3$ sont des variables scalaires d'optimisation à déterminer et les matrices dépendantes de paramètre P_α, Q_α et \bar{P}_α sont partitionnées comme :

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{2\alpha} \\ * & P_{3\alpha} \end{bmatrix}; \quad Q_\alpha = \begin{bmatrix} Q_{1\alpha} & Q_{2\alpha} \\ * & Q_{3\alpha} \end{bmatrix}; \quad \bar{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\alpha} & \bar{P}_{2\alpha} \\ * & \bar{P}_{3\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Ensuite, Nous avons adopté le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_f & \hat{B}_f \\ \hat{C}_f & \hat{D}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

La théorème 4.2.1, avec ce choix des matrices variables et les changements de variables ci-dessus sera développé comme suit :

Théorème 4.2.1 [52] (*Cas discret*) : *Le système augmenté (4.5) est robuste asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ , s'il existe des variables dépendantes des paramètres $P_{1\alpha}, P_{2\alpha}, P_{3\alpha}, Q_{1\alpha} > 0, Q_{2\alpha}, Q_{3\alpha} > 0, \bar{P}_{1\alpha} > 0, \bar{P}_{2\alpha}, \bar{P}_{3\alpha} > 0, M_{1\alpha}, M_{2\alpha}, \bar{M}_{1\alpha}, \bar{M}_{2\alpha}, S_{1\alpha}, S_{2\alpha}, \bar{S}_{1\alpha}, \bar{S}_{2\alpha}, U$ et $R_{1\alpha}$, les matrices $\hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f, \hat{D}_f$ et les scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 , telles que :*

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_\alpha + \bar{\Phi}_\alpha < 0 \\ \bar{\Psi}_\alpha < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Où

$$\bar{\Phi}_\alpha = \begin{bmatrix} -M_{1\alpha} - M_{1\alpha}^T & -U - M_{2\alpha}^T & \bar{\Phi}_{13\alpha} & -S_{2\alpha}^T + \hat{A}_f & \bar{\Phi}_{15\alpha} & 0 \\ * & -M - M^T & \bar{\Phi}_{23\alpha} & -\lambda_2 U^T + \hat{A}_f & \bar{\Phi}_{25\alpha} & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33\alpha} & \lambda_1 \hat{A}_f + A_\alpha^T S_{2\alpha}^T + \lambda_2 C_\alpha^T \hat{B}_f & \bar{\Phi}_{35\alpha} & L_\alpha^T - C_\alpha^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & \lambda_2 (A_f + A_f^T) & \bar{\Phi}_{45\alpha} & -\hat{C}_f^T \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55\alpha} & -D_\alpha^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\alpha} - \bar{M}_{1\alpha} - \bar{M}_{1\alpha}^T & \bar{P}_{2\alpha} - U - \bar{M}_{2\alpha}^T & \bar{M}_{1\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha - \bar{S}_{1\alpha}^T & \hat{A}_f - \bar{S}_{2\alpha}^T \\ * & \bar{P}_{3\alpha} - U - U^T & \bar{M}_{2\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha & \hat{A}_f \\ * & * & -\bar{P}_{3\alpha} + \text{Sym}(\bar{S}_{1\alpha} A_\alpha) & -\bar{P}_{2\alpha} + A_\alpha^T \bar{S}_{2\alpha}^T \\ * & * & * & -\bar{P}_{3\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_{13\alpha} = -S_{1\alpha}^T + M_{1\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; \quad \bar{\Phi}_{15\alpha} = -R_{1\alpha}^T + M_{1\alpha} B_\alpha + \hat{B}_f D_\alpha;$$

$$\bar{\Phi}_{23\alpha} = -\lambda_1 U^T + M_{2\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; \quad \bar{\Phi}_{25\alpha} = M_{2\alpha} B_\alpha + \hat{B}_f D_\alpha - \lambda_3 U^T;$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{33\alpha} &= \text{sym}(S_{1\alpha}A_\alpha + \lambda_1\hat{B}_fC_\alpha); & \bar{\Phi}_{35\alpha} &= A_\alpha^T R_{1\alpha}^T + \lambda_3 C_\alpha^T \hat{B}_f^T + S_{1\alpha}B_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f D_\alpha; \\ \bar{\Phi}_{45\alpha} &= \lambda_3 \hat{A}_f^T + S_{2\alpha}B_\alpha + \lambda_2 \hat{B}_f D_\alpha; & \bar{\Phi}_{55\alpha} &= -\gamma^2 I + \text{sym}(R_{1\alpha}B_\alpha + \lambda_3 \hat{B}_f D_\alpha).\end{aligned}$$

La matrice $\bar{\Omega}_\alpha$ est définie comme suit :

- **Basse fréquence (BF) :** $|\theta| \leq \theta_1$

$$\bar{\Omega}_\alpha = \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{2\alpha} & Q_{1\alpha} & Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & P_{3\alpha} & Q_{2\alpha}^T & Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1\alpha} - 2\cos\theta_1 Q_{1\alpha} & -P_{2\alpha} - 2\cos\theta_1 Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3\alpha} - 2\cos\theta_1 Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- **Moyenne fréquence (MF) :** $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; $\theta_c = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$; $\theta_w = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}$

$$\bar{\Omega}_\alpha = \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{2\alpha} & e^{j\theta_c} Q_{1\alpha} & e^{j\theta_c} Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & P_{3\alpha} & e^{-j\theta_c} Q_{2\alpha}^T & e^{j\theta_c} Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1\alpha} - 2\cos\theta_w Q_{1\alpha} & -P_{2\alpha} - 2\cos\theta_w Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3\alpha} - 2\cos\theta_w Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- **Haute fréquence (HF) :** $|\theta| \geq \theta_h$

$$\bar{\Omega}_\alpha = \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{2\alpha} & -Q_{1\alpha} & -Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & P_{3\alpha} & -Q_{2\alpha}^T & -Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1\alpha} + 2\cos\theta_h Q_{1\alpha} & -P_{2\alpha} + 2\cos\theta_h Q_{2\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3\alpha} + 2\cos\theta_h Q_{3\alpha} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Les paramètres du filtre conçus se présentent comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_f & \hat{B}_f \\ \hat{C}_f & \hat{D}_f \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Théorème 4.2.2 [58] (*Cas continu*) : Le système augmenté (4.5) est robuste asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ . s'il existe des variables dépendantes des paramètres $\bar{P}_{1\alpha} > 0, \bar{P}_{2\alpha}, \bar{P}_{3\alpha} > 0, Q_{1\alpha} > 0, Q_{2\alpha}, Q_{3\alpha} > 0, P_{1\alpha}, P_{2\alpha}, P_{3\alpha}, M_{2\alpha}, S_{1\alpha}, S_{2\alpha}, U$ et $R_{1\alpha}$, les matrices $\hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f, \hat{D}_f$, et les scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 λ_1, λ_2 , telles que :

$$\bar{\Upsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{11\alpha} & \bar{\Upsilon}_{12\alpha} & \bar{\Upsilon}_{13\alpha} & \bar{\Upsilon}_{14\alpha} & -R_{1\alpha}^T + M_{1\alpha}B_\alpha + \hat{B}_f D_\alpha & 0 \\ * & \bar{\Upsilon}_{22\alpha} & \bar{\Upsilon}_{23\alpha} & \bar{\Upsilon}_{24\alpha} & M_{2\alpha}B_\alpha + \hat{B}_f D_\alpha & 0 \\ * & * & \bar{\Upsilon}_{33\alpha} & \bar{\Upsilon}_{34\alpha} & A_\alpha^T R_{1\alpha}^T + S_{1\alpha}B_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f D_\alpha & L_\alpha^T - C_\alpha^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & \bar{\Upsilon}_{44\alpha} & S_{2\alpha}B_\alpha + \lambda_2 \hat{B}_f D_\alpha & -\hat{C}_f^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + \text{sym}[R_{1\alpha}B_\alpha] & -D_\alpha^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

$$\bar{\Xi}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11\alpha} & \bar{\Xi}_{12\alpha} & \bar{P}_{1\alpha} + M_{1\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha - S_{1\alpha}^T & \bar{P}_{2\alpha} - S_{2\alpha}^T + \hat{A}_f \\ * & \bar{\Xi}_{22\alpha} & \bar{P}_{2\alpha}^T - \lambda_1 U^T + M_{2\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha & \bar{P}_{3\alpha} - \lambda_2 U^T + \hat{A}_f \\ * & * & \text{sym}(S_{1\alpha}A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_\alpha) & \lambda_1 \hat{A}_f + A_\alpha^T S_{2\alpha}^T + \lambda_2 C_\alpha^T \hat{B}_f^T \\ * & * & * & \lambda_2 (\hat{A}_f + \hat{A}_f^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

Où

$$\bar{\Xi}_{11\alpha} = -M_{1\alpha} - M_{1\alpha}^T; \quad \bar{\Xi}_{12\alpha} = -U - M_{2\alpha}^T; \quad \bar{\Xi}_{12\alpha} = -U - U^T.$$

Et

- **Basse fréquence (BF)** : $|\omega| \leq \omega_1$

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_{11\alpha} &= -Q_{1\alpha} - M_{1\alpha} - M_{1\alpha}^T; & \bar{\Upsilon}_{12\alpha} &= -Q_{2\alpha} - U - M_{2\alpha}^T; \\ \bar{\Upsilon}_{13\alpha} &= P_{1\alpha} + S_{1\alpha}^T + M_{1\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; & \bar{\Upsilon}_{14\alpha} &= P_{2\alpha} - S_{2\alpha}^T + \hat{A}_f; \\ \bar{\Upsilon}_{22\alpha} &= -Q_{3\alpha} - \lambda_1 U - \lambda_1 U^T; & \bar{\Upsilon}_{23\alpha} &= P_{2\alpha} - \lambda_1 U^T + M_{2\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; \\ \bar{\Upsilon}_{24\alpha} &= P_{3\alpha} - \lambda_2 U^T + \hat{A}_f; & \bar{\Upsilon}_{33\alpha} &= \omega_f^2 Q_{1\alpha} + \text{sym}[S_{1\alpha}A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_\alpha]; \\ \bar{\Upsilon}_{34\alpha} &= \omega_f^2 Q_{2\alpha} + \lambda_1 \hat{A}_f + A_\alpha^T S_{2\alpha}^T + \lambda_2 C_\alpha^T \hat{B}_f^T; & \bar{\Upsilon}_{44\alpha} &= \omega_f^2 Q_{3\alpha} + \lambda_2 (\hat{A}_f + \hat{A}_f^T). \end{aligned}$$

- **Moyenne fréquence (MF)** : $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_{11\alpha} &= -Q_{1\alpha} - M_{1\alpha} - M_{1\alpha}^T; & \bar{\Upsilon}_{12\alpha} &= -Q_{2\alpha} - U - M_{2\alpha}^T; \\ \bar{\Upsilon}_{13\alpha} &= P_{1\alpha} + j\omega_c Q_{1\alpha} + S_{1\alpha}^T + M_{1\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; & \bar{\Upsilon}_{14\alpha} &= P_{2\alpha} + j\omega_c Q_{2\alpha} - S_{2\alpha}^T + \hat{A}_f; \\ \bar{\Upsilon}_{22\alpha} &= -Q_{3\alpha} - \lambda_1 U - \lambda_1 U^T; & \bar{\Upsilon}_{23\alpha} &= P_{2\alpha} - j\omega_c Q_{2\alpha} - \lambda_1 U^T + M_{2\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; \\ \bar{\Upsilon}_{24\alpha} &= P_{3\alpha} + j\omega_c Q_{3\alpha} - \lambda_2 U^T + \hat{A}_f; & \bar{\Upsilon}_{33\alpha} &= -\omega_1 \omega_2 Q_{1\alpha} + \text{sym}[S_{1\alpha}A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_\alpha]; \\ \bar{\Upsilon}_{34\alpha} &= -\omega_1 \omega_2 Q_{2\alpha} + \lambda_1 \hat{A}_f + A_\alpha^T S_{2\alpha}^T + \lambda_2 C_\alpha^T \hat{B}_f^T; & \bar{\Upsilon}_{44\alpha} &= -\omega_1 \omega_2 Q_{3\alpha} + \lambda_2 (\hat{A}_f + \hat{A}_f^T). \end{aligned}$$

- **Haute fréquence (HF) :** $|\omega| \geq \omega_h$

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_{11\alpha} &= Q_{1\alpha} - M_{1\alpha} - M_{1\alpha}^T; & \tilde{Y}_{12\alpha} &= Q_{2\alpha} - U - M_{2\alpha}^T; \\
 \tilde{Y}_{13\alpha} &= P_{1\alpha} + S_{1\alpha}^T + M_{1\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; & \tilde{Y}_{14\alpha} &= P_{2\alpha} - S_{2\alpha}^T + \hat{A}_f; \\
 \tilde{Y}_{22\alpha} &= Q_{3\alpha} - \lambda_1 U - \lambda_1 U^T; & \tilde{Y}_{23\alpha} &= P_{2\alpha} - \lambda_1 U^T + M_{2\alpha}A_\alpha + \hat{B}_f C_\alpha; \\
 \tilde{Y}_{24\alpha} &= P_{3\alpha} - \lambda_2 U^T + \hat{A}_f; & \tilde{Y}_{33\alpha} &= -\omega_h^2 Q_{1\alpha} + \text{sym}[S_1 A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_\alpha]; \\
 \tilde{Y}_{34\alpha} &= -\omega_h^2 Q_{2\alpha} + \lambda_1 \hat{A}_F + A_\alpha^T S_{2\alpha}^T + \lambda_2 C_\alpha^T \hat{B}_f^T; & \tilde{Y}_{44\alpha} &= -\omega_h^2 Q_{3\alpha} + \lambda_2 (\hat{A}_f + \hat{A}_f^T).
 \end{aligned}$$

Les paramètres du filtre sont exprimés par :

$$\begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_F & \hat{B}_F \\ \hat{C}_F & \hat{D}_F \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Par la suite, nous étendons ces résultats au cas polynômes homogènes.

4.2.4 Approche matrice polynôme homogène

Dans cette partie, nous considérons les notations $K(s, g)$, $\mathcal{K}_j(g)$, $J(g)$, $I(g)$, et $\beta_j^i(g+1)$ données par la définition (1.8.1) et les matrices dépendantes de variable α dans les théorèmes 4.2.1 et 4.2.2, $\bar{P}_{v\alpha}$, $P_{v\alpha}$, $Q_{v\alpha}$, $M_{t\alpha}$, $\bar{M}_{t\alpha}$, $S_{t\alpha}$, $\bar{S}_{t\alpha}$ (avec $v = 1, 2, 3$ et $t = 1, 2$) et $R_{1\alpha}$ comme des matrices polynômes homogènes de degré arbitraire g et dépendant polynômialement avec un paramètre incertain α_i , $i = 1, 2, \dots, s$. et s'écrivent sous la forme suivante

$$\bar{P}_{1\alpha} = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_s^{k_N} \bar{P}_{1k_j(g)}, [k_1, k_2, \dots, k_N] = K_j(g) \quad (4.30)$$

Alors, le résultat principal dans cette partie est donné dans le théorème 4.2.3 suivant :

Théorème 4.2.3 [52] (*Cas discret*) : *Le système augmenté (4.5) est robuste asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ , s'il existe des variables dépendantes des paramètres $P_{1k_j(g)} > 0$, $P_{2k_j(g)}$, $P_{3k_j(g)} > 0$, $Q_{1k_j(g)} > 0$, $Q_{2k_j(g)}$, $Q_{3k_j(g)} > 0$, $\bar{P}_{1k_j(g)} > 0$, $\bar{P}_{2k_j(g)}$, $\bar{P}_{3k_j(g)} > 0$, $M_{tk_j(g)}$, $S_{tk_j(g)}$, $\bar{M}_{tk_j(g)}$, $\bar{S}_{tk_j(g)}$ (avec $t = 1, 2$), $R_{1k_j(g)}$, U , $K_j(g) \in K(g)$, $j = 1, \dots, J(g)$ les matrices \hat{A}_f , \hat{B}_f , \hat{C}_f , \hat{D}_f et λ_1 , λ_2 et λ_3 sont des scalaires réels. LMIs suivantes soient vérifiées pour tout $K_l(g+1) \in K(g+1)$, $l = 1, \dots, J(g+1)$:*

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in I(g+1)} [\bar{\Omega}_k + \bar{\Phi}_k] &< 0 \\
 \sum_{i \in I(g+1)} \bar{\Psi}_k &< 0
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Avec, la matrice $\bar{\Omega}_k$ est définie comme suit :

- **Basse fréquence (BF) :** $|\theta| \leq \theta_l$

$$\bar{\Omega}_k = \begin{bmatrix} P_{1k_j(g)} & P_{2k_j(g)} & Q_{1k_j(g)} & Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & P_{3k_j(g)} & Q_{2k_j(g)}^T & Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1k_j(g)} - 2\cos\theta_l Q_{1k_j(g)} & -P_{2k_j(g)} - 2\cos\theta_l Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3k_j(g)} - 2\cos\theta_l Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- **Moyenne fréquence (MF) :** $\theta_l \leq \theta \leq \theta_2$; $\theta_c = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$; $\theta_w = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}$

$$\bar{\Omega}_k = \begin{bmatrix} P_{1k_j(g)} & P_{2k_j(g)} & e^{j\theta_c} Q_{1k_j(g)} & Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & P_{3k_j(g)} & e^{-j\theta_c} Q_{2k_j(g)}^T & e^{j\theta_c} Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1k_j(g)} - 2\cos\theta_w Q_{1k_j(g)} & -P_{2k_j(g)} - 2\cos\theta_w Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3k_j(g)} - 2\cos\theta_w Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

- **Haute fréquence (HF) :** $|\theta| \geq \theta_h$

$$\bar{\Omega}_k = \begin{bmatrix} P_{1k_j(g)} & P_{2k_j(g)} & -Q_{1k_j(g)} & Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & P_{3k_j(g)} & -Q_{2k_j(g)}^T & -Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & -P_{1k_j(g)} + 2\cos\theta_h Q_{1k_j(g)} & -P_{2k_j(g)} + 2\cos\theta_h Q_{2k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & -P_{3k_j(g)} + 2\cos\theta_h Q_{3k_j(g)} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$\bar{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11k} & \bar{\Phi}_{12k} & \bar{\Phi}_{13k} & \bar{\Phi}_{14k} & \bar{\Phi}_{15k} & 0 \\ * & \bar{\Phi}_{22k} & \bar{\Phi}_{23k} & \bar{\Phi}_{24k} & \bar{\Phi}_{25k} & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33k} & \bar{\Phi}_{34k} & \bar{\Phi}_{35k} & \beta_j^i(g+1)L_i^T - \beta_j^i(g+1)C_i^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44k} & \bar{\Phi}_{45k} & -\beta_j^i(g+1)\hat{C}_f^T \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55k} & -\beta_j^i(g+1)D_i^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & * & * & -\beta_j^i(g+1)I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11k} & \bar{P}_{2k_j(g)} - \beta_j^i(g+1)U - \bar{M}_{2k_j(g)}^T & \bar{\Psi}_{13k} & \beta_j^i(g+1)\hat{A}_f - \bar{S}_{2k_j(g)}^T \\ * & \bar{P}_{3k_j(g)} - \beta_j^i(g+1)U - \beta_j^i(g+1)U^T & \bar{\Psi}_{3k} & \beta_j^i(g+1)\hat{A}_f \\ * & * & \bar{\Psi}_{4k} & -\bar{P}_{2k_j(g)} + A_i^T \bar{S}_{2k_j(g)}^T \\ * & * & * & -\bar{P}_{3k_j(g)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{11k} &= -M_{1k_j(g)} - M_{1k_j(g)}^T; & \bar{\Phi}_{12k} &= -\beta_j^i(g+1)U - M_{2k_j(g)}^T; \\
 \bar{\Phi}_{13k} &= -M_{1k_j(g)}^T + M_{1k_j(g)}A_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fC_i; & \bar{\Phi}_{14k} &= -S_{2k_j(g)}^T + \beta_j^i(g+1)\hat{A}_f; \\
 \bar{\Phi}_{15k} &= -R_{1k_j(g)}^T + M_{1k_j(g)}B_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fD_i; \\
 \bar{\Phi}_{23k} &= -\lambda_1\beta_j^i(g+1)U^T + M_{2k_j(g)}A_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fC_i; \\
 \bar{\Phi}_{24k} &= -\lambda_2\beta_j^i(g+1)U^T + \beta_j^i(g+1)\hat{A}_f; & \bar{\Phi}_{44k} &= \lambda_2\beta_j^i(g+1)A_f + \lambda_2\beta_j^i(g+1)A_f^T; \\
 \bar{\Phi}_{25k} &= M_{2k_j(g)}B_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fD_i - \lambda_3\beta_j^i(g+1)U^T; \\
 \bar{\Phi}_{33k} &= \text{sym}(M_{1k_j(g)}A_i + \lambda_1\beta_j^i(g+1)\hat{B}_fC_i); & \bar{\Phi}_{56k} &= -\beta_j^i(g+1)D_i^T\hat{D}_f^T; \\
 \bar{\Phi}_{34k} &= \lambda_1\beta_j^i(g+1)\hat{A}_f + A_i^T F_{2k_j(g)}^T + \lambda_2\beta_j^i(g+1)C_i^T\hat{B}_f; \\
 \bar{\Phi}_{35k} &= A_i^T R_{1k_j(g)}^T + \lambda_3\beta_j^i(g+1)C_i^T\hat{B}_f^T + S_{1k_j(g)}B_i + \lambda_1\beta_j^i(g+1)\hat{B}_fD_i; \\
 \bar{\Phi}_{45k} &= \lambda_3\beta_j^i(g+1)\hat{A}_f^T + S_{2k_j(g)}B_i + \lambda_2\beta_j^i(g+1)\hat{B}_fD_i; \\
 \bar{\Phi}_{55k} &= -\beta_j^i(g+1)\gamma^2 I + \text{sym}(R_{1k_j(g)}B_i + \lambda_3\beta_j^i(g+1)\hat{B}_fD_i); \\
 \bar{\Psi}_{11k} &= \bar{P}_{1k_j(g)} - \bar{M}_{1k_j(g)} - \bar{M}_{1k_j(g)}^T; & \bar{\Psi}_{13k} &= \bar{M}_{1k_j(g)}A_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fC_i - \bar{S}_{1k_j(g)}^T; \\
 \bar{\Psi}_{23k} &= \bar{M}_{2k_j(g)}A_i + \beta_j^i(g+1)\hat{B}_fC_i; & \bar{\Psi}_{33k} &= -\bar{P}_{3k_j(g)} + \text{sym}(\bar{S}_{1k_j(g)}A_i).
 \end{aligned}$$

Ensuite, si les LMIs dans (4.31) sont vérifiés pour un certain degré donné g , alors les LMIs correspondantes à n'importe quel degré $g > \bar{g}$ sont également satisfaits. Les matrices de filtre H_∞ sont données dans (4.26).

Preuve 4.2.2 : Notez que (4.25) pour $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha, L_\alpha, E_\alpha) \in \mathcal{P}_\alpha$ et $\bar{P}_{s\alpha}, P_{s\alpha}, Q_{s\alpha}, s = 1, 2, 3, M_{u\alpha}, S_{u\alpha}, \bar{M}_{u\alpha}, \bar{S}_{u\alpha}, u = 1, 2$, et $R_{1\alpha}$ donnée par (4.30) sont des matrices polynômes homogènes de degré $g+1$, donc, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(\alpha) + \bar{\Omega}(\alpha) &= \sum_{l=1}^{J(g+1)} \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2} \dots \tau_s^{k_s} [\bar{\Psi}_k + \bar{\Phi}(\alpha) + \bar{\Omega}(\alpha)]; \\
 \bar{\Psi}(\alpha) &= \sum_{l=1}^{J(g+1)} \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2} \dots \tau_s^{k_s} \bar{\Psi}_k.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Les conditions dans (4.31) imposée pour tout $l, l = 1, \dots, J(g+1)$ assure que (4.25) pour tout $\alpha \in \Gamma$. La 1^{ère} partie de la preuve est réalisée.

Dans la 2^{ème} partie, nous supposons que (4.31) et (4.33) est vérifiée pour un certain degré \hat{g} , c-à-d, il existe $J(\hat{g})$ matrices définies positives $P_{sK_j(\hat{g})}, Q_{sK_j(\hat{g})}, s = 1, 2, 3$, et les matrices $\bar{P}_{sK_j(\hat{g})}, M_{uK_j(\hat{g})}, S_{uK_j(\hat{g})}, \bar{M}_{uK_j(\hat{g})}, \bar{S}_{uK_j(\hat{g})}, u = 1, 2$, et $R_{1K_j(\hat{g})}, j = 1, \dots, J(\hat{g})$ telle que $P_{s\alpha}, Q_{s\alpha}, \bar{P}_{s\alpha}, s = 1, 2, 3, M_{u\alpha}, S_{u\alpha}, u = 1, 2$, et $R_{1\alpha}$ sont définis dans (4.23) et (4.21) sont

des matrices polynomiales dépendantes des paramètres homogènes assurant les conditions (4.25).

Ensuite, les termes des matrices polynômes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{s\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)P_{s\alpha}; & \tilde{Q}_{s\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)Q_{s\alpha}; & \tilde{\tilde{P}}_{s\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)\tilde{\tilde{P}}_{s\alpha}; \\
 \tilde{M}_{u\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)M_{u\alpha}; & \tilde{\tilde{S}}_{u\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)S_{u\alpha}; & \tilde{M}_{u\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)\tilde{M}_{u\alpha}; \\
 \tilde{S}_{u\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)\tilde{S}_{u\alpha}; & \tilde{R}_{1\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)R_{1\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

avec $s = 1, 2, 3$ et $u = 1, 2$, satisfaire les inégalités du théorème 4.2.1 correspondant au degré $\hat{g} + 1$, qui peut être obtenue dans ce cas par combinaison linéaire des LMIs du théorème 4.2.1 pour degré \hat{g} .

Remarque 4.2.2 : Dans le théorème 4.2.2 (*cas continu*), le paramètre α qui réfère aux incertitudes polytopiques, nous a permis l'usage de l'approche polynomiale définie dans la définition (1.8.1), celle-ci se base sur la technique donnée dans le théorème 4.2.3 ci-dessus afin de résoudre ce problème. Cela aide à minimiser le conservatisme en augmentant le degré du polynôme à résoudre comme c'est expliqué dans la définition (1.8.1).

Remarque 4.2.3 : Lorsque les scalaires λ_m , ($m = 1, 2, 3$) dans le théorèmes 4.2.3 sont fixes. Alors, les conditions (4.27), (4.28), (4.31) sont des LMIs qui sont effectivement linéaires dans les variables. Pour sélectionner des valeurs pour ces scalaires, l'optimisation peut être utilisée pour optimiser certaines mesures de performance.

Remarque 4.2.4 : Il est important de mentionner que les théorèmes 4.2.2 et 4.2.3 présentent une méthode de conception qui se base sur l'utilisation des paramètres à polynômes homogènes. Cette approche joue un rôle important dans la réduction du conservatisme en augmentant les degrés polynômiaux.

Remarque 4.2.5 : Si nous prenons $Q = 0$, nous pouvons utiliser les théorèmes 4.2.2 et 4.2.3. Pour résoudre le problème filtrage H_∞ dans une domaine à fréquence entière (EF) pour les systèmes 1D incertain (continu et discret).

4.2.5 Exemples de simulation

Afin de comparer la méthode proposée dans cette partie avec d'autres résultats existants dans la littérature, nous proposons trois exemples démonstratifs dont le but est de confirmer l'efficacité de la méthode proposée. Pour toutes les simulations proposées, nous utilisons Yalmip [111] et SeDumi [139] sur Matlab comme interfaces numériques pour résoudre le problème de conception du filtre.

A. Exemple 1 : (cas discret)

Considérons le système discret donné dans [75] :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \delta & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(k) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Où le paramètre incertain δ est décrit par $|\delta| \leq \bar{\delta}$ tel que $\bar{\delta} = 0.25$.

Pour cet exemple, en utilisant le résultat donné dans le théorème 4.2.3 (**Th 4.2.3 [52]**) pour les différentes valeurs des degrés polynomiaux ($g = 0, g = 1, g = 2$).

Nous présentons dans la table 4.1 dont le but est de comparer les valeurs optimales obtenues des performances H_∞ avec un niveau d'atténuation du bruit γ et leurs valeurs correspondantes $\lambda_{i=1,2,3}$ trouvées via l'utilisation d'une fonction simplexe nommée "fminsearch", ces valeurs se présentent pour plusieurs degrés polynomiaux. Donc, à partir de la table 4.1, il est bien évident que l'approche proposée fournit des résultats excellents et moins conservatifs que certains travaux récents dans la littérature.

Les matrices de filtre H_∞ sont :

1. Fréquence entière (EF)

Pour le degré $g = 0$, le niveau d'atténuation de perturbation obtenu est $\gamma_{min} = 1.0494$ et les matrices de filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.2093 & -0.7442 & 0.0044 \\ 0.5058 & 1.1290 & 0.0045 \\ \hline -0.0430 & -0.0956 & -0.0096 \end{array} \right] \quad (4.35)$$

D'autre part, lorsque le degré $g = 1$, $\gamma = 0.2815$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8046 & 0.0069 & 0.0542 \\ 0.8335 & 0.8632 & -0.0151 \\ \hline -0.0134 & -0.0012 & -0.0096 \end{array} \right] \quad (4.36)$$

Enfin, quand le degré $g = 2$, $\gamma = 0.2558$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.7178 & -0.5175 & 0.0114 \\ 0.5500 & 1.0740 & 0.0035 \\ \hline -0.0329 & -0.0967 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.37)$$

2. Fréquence finie (FF)

— **Basse fréquence** : $|\theta| \leq \frac{\pi}{8}$

Pour le degré $g = 0$, $\gamma = 0.4579$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.6520 & -0.0023 & 0.0447 \\ 0.9481 & 0.8836 & -0.0201 \\ \hline -0.0161 & -0.0050 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.38)$$

En outre, quand le degré $g = 1$, $\gamma = 0.1862$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.7468 & -0.0034 & 0.0356 \\ 0.8791 & 0.9213 & -0.0085 \\ \hline -0.0202 & -0.0035 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.39)$$

Enfin, lorsque $g = 2$, $\gamma = 0.1688$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8393 & 0.0010 & 0.0377 \\ 0.7943 & 0.8951 & -0.0080 \\ \hline -0.0183 & -0.0014 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.40)$$

— **Moyenne fréquence** : $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$:

Pour le degré $g = 0$, le niveau d'atténuation de perturbation obtenu est $\gamma = 0.7626$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.6308 & 0.0781 & 0.0855 \\ 1.2732 & 0.7919 & -0.0316 \\ \hline -0.0155 & -0.0160 & -0.0095 \end{array} \right] \quad (4.41)$$

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

En outre, lorsque le degré $g = 1$, $\gamma = 0.2389$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.7392 & -0.2984 & 0.0138 \\ 0.5224 & 0.9946 & 0.0028 \\ \hline -0.0302 & -0.0978 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.42)$$

De plus, quand $g = 2$, $\gamma = 0.2268$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.7566 & -0.2896 & 0.0145 \\ 0.5070 & 0.9901 & 0.0027 \\ \hline -0.0310 & -0.0984 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.43)$$

— **Haute fréquence** : $|\theta| \geq \frac{\pi}{6}$

Pour le degré $g = 0$, $\gamma = 0.2000$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.9482 & 0.0222 & 0.0297 \\ 0.4485 & 0.4018 & -0.0255 \\ \hline -0.0262 & -0.0010 & -0.0098 \end{array} \right] \quad (4.44)$$

De plus, quand le degré $g = 1$, $\gamma = 0.1453$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

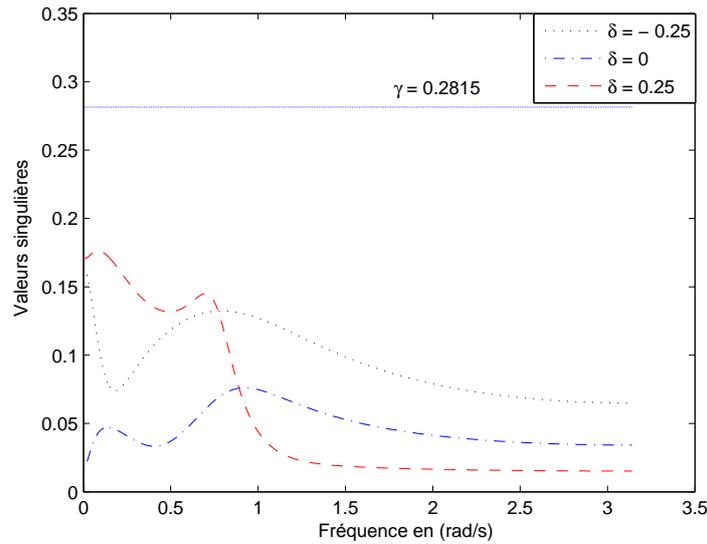
$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8348 & -0.0011 & 0.0305 \\ 0.8859 & 0.8745 & -0.0082 \\ \hline -0.0235 & -0.0015 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.45)$$

Finalement, quand $g = 2$, $\gamma = 0.1453$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8166 & -0.0089 & 0.0352 \\ 0.9459 & 0.9833 & -0.0028 \\ \hline -0.0200 & -0.0013 & -0.0096 \end{array} \right] \quad (4.46)$$

Pour illustrer l'efficacité de ces filtres conçus. Nous considérons le cas polytopique (degré $g = 1$), en connectant respectivement (4.36), (4.39), (4.42) et (4.45), les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert du système augmenté sont représentées dans les figures 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4. Alors, toutes les valeurs singulières de ces figures sont inférieures au niveau d'atténuation γ des perturbations de performance H_∞ , ce qui démontre l'efficacité de notre méthode proposée dans cette partie.

Degré	EF Th 4.2.3 ($Q_\alpha = 0$) [52]		FF Th 4.2.3 [52]		
	[75]	Th 4.2.3 ($Q_\alpha = 0$)	$ \theta \leq \frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$	$ \theta \geq \frac{\pi}{6}$
$g = 0$	—	1.0494 $\lambda_1 = -0.4859$ $\lambda_2 = -0.4999$ $\lambda_3 = -0.0393$	0.4579 $\lambda_1 = 4.4769$ $\lambda_2 = 0.6600$ $\lambda_3 = 6.4018$	0.7626 $\lambda_1 = 7.9212$ $\lambda_2 = 0.6948$ $\lambda_3 = -1.4692$	0.2000 $\lambda_1 = 2.7229$ $\lambda_2 = -0.9996$ $\lambda_3 = 6.2135$
$g = 1$	1.2492	0.2815 $\lambda_1 = 5.1468$ $\lambda_2 = -0.8016$ $\lambda_3 = 4.1215$	0.1862 $\lambda_1 = 3.6661$ $\lambda_2 = -0.7709$ $\lambda_3 = 5.3333$	0.2389 $\lambda_1 = -0.5685$ $\lambda_2 = -0.5539$ $\lambda_3 = -0.0136$	0.1453 $\lambda_1 = 2.8207$ $\lambda_2 = -0.8827$ $\lambda_3 = 5.6638$
$g = 2$	—	0.2558 $\lambda_1 = -0.4138$ $\lambda_2 = -0.4121$ $\lambda_3 = -0.1113$	0.1688 $\lambda_1 = 3.3936$ $\lambda_2 = -0.8342$ $\lambda_3 = 3.8570$	0.2268 $\lambda_1 = -0.5337$ $\lambda_2 = -0.5149$ $\lambda_3 = 0.0000$	0.1453 $\lambda_1 = 3.3539$ $\lambda_2 = -0.8539$ $\lambda_3 = 5.6793$

 TABLE 4.1 Comparaison des valeurs minimales des performances H_∞

 FIGURE 4.1 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.36).

Nous définissons les conditions initiales sont choisies $x(0) = [-0.1 \ 0.1]^T$ et $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$, le paramètre incertain $\delta = -0.25$, le degré $g = 1$, le domaine BF ($|\theta| \leq \frac{\pi}{8}$), et les perturbations exogènes $w(k)$ sont définies par :

$$w(k) = \sin(k) \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2+1} & \frac{1}{k^3+1} \end{bmatrix}^T \quad (4.47)$$

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

Cependant, dans la figure 4.5 nous donnons l'allure des erreurs du filtrage $e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ correspondantes aux les matrices du filtrage (4.36) et (4.39). Cette figure démontre que l'erreur du filtrage $e(k)$ tend à zéro, ce qui signifie que l'estimation $\hat{z}(k)$ suit $z(k)$ bien.

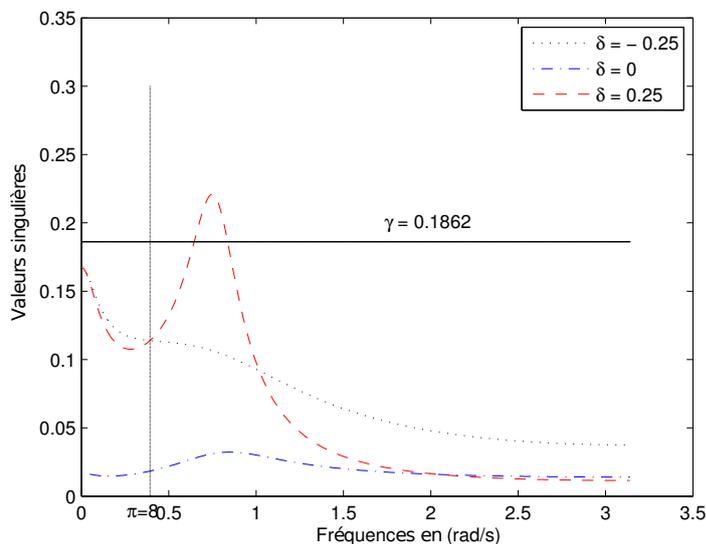


FIGURE 4.2 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.39).

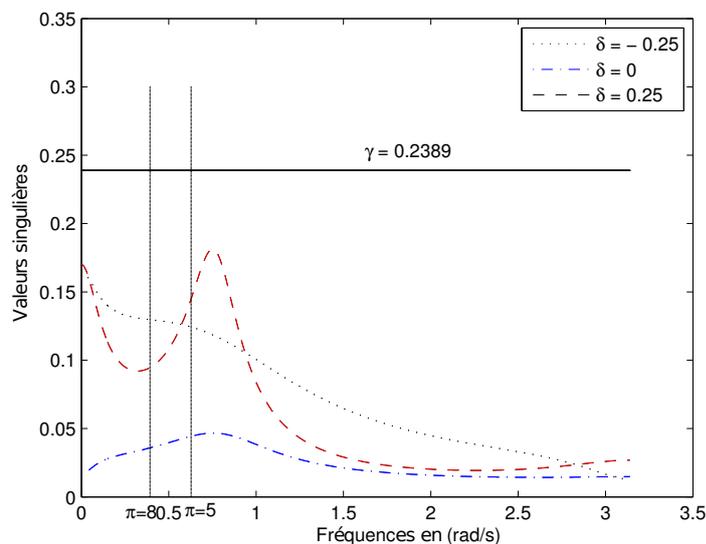


FIGURE 4.3 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.42).

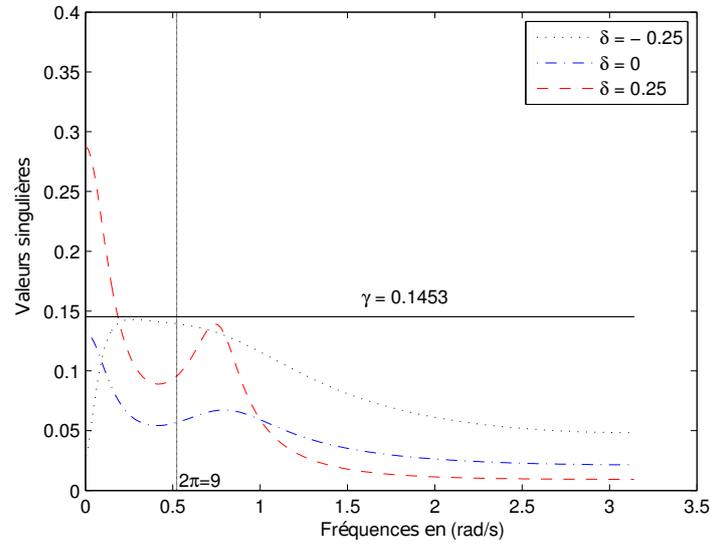


FIGURE 4.4 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.45)

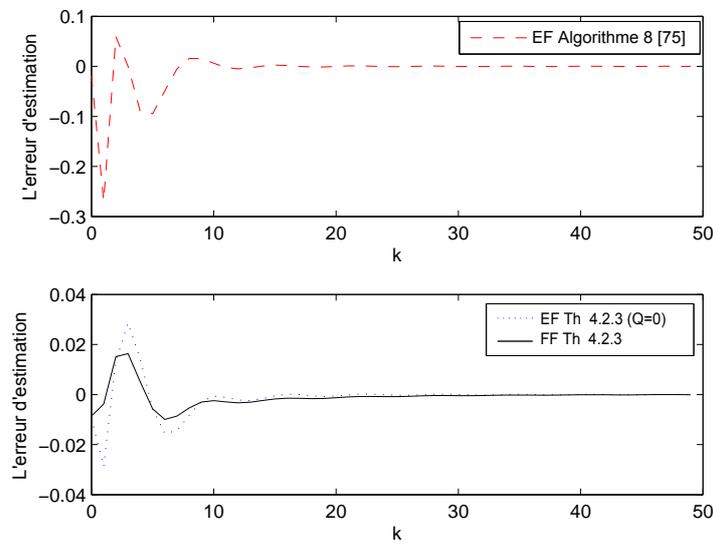


FIGURE 4.5 Erreurs $e(k)$ comparé aux différentes méthodes de la littérature

Par la suite, nous définissons le ratio $d(k)$ par le rapport suivant :

$$d(k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}} \quad (4.48)$$

On peut voir que la valeur obtenue des performances H_∞ est vérifiée à travers le ratio $d(k)$.

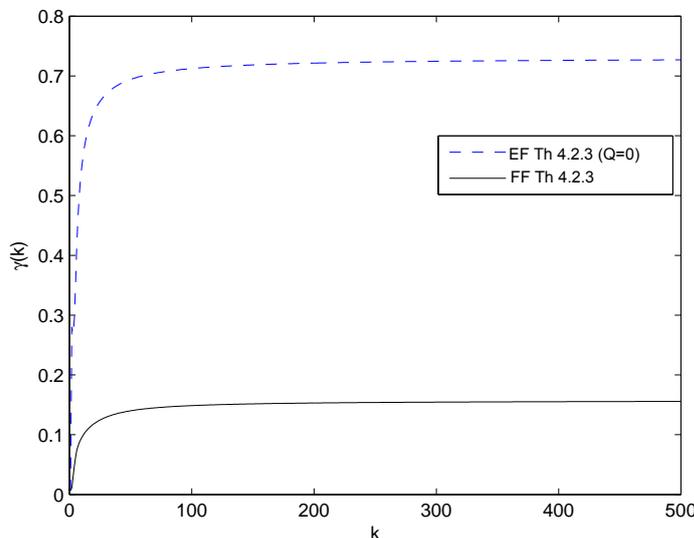


FIGURE 4.6 Vérifications des performances H_∞ par $d(k)$

B. Exemple 2 : (cas discret)

Soit le système discret [108, 112] :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1+\delta \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(k) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k) \\
 z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(k)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Où δ est un paramètre réel incertain satisfaisant $|\delta| \leq 0.45$.

Notre objectif est de concevoir un filtre sous la forme (4.4) tel que le système augmenté (4.5) soit asymptotiquement stable avec un niveau γ de performance H_∞ .

En utilisant le **théorème 4.2.3** [52] dans différentes gammes de fréquences. Soit $g = 1$ (polynôme linéaire dépendant des paramètres), nous obtenons les paramètres du filtre H_∞ robustes suivants :

— Pour un domaine EF, avec un indice de performance H_∞ est $\gamma = \mathbf{1.6398}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.2488 & -1.4571 & 0.0070 \\ 0.2415 & -0.0248 & 0.0100 \\ \hline -0.0073 & -0.0675 & -0.0079 \end{array} \right] \tag{4.50}$$

Degré	BF ($ \theta \leq \frac{\pi}{6}$)		MF ($\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$)		HF ($ \theta \geq \frac{5\pi}{6}$)	
	[112]	Th 4.2.3 [52]	[112]	Th 4.2.3 [52]	[112]	Th 4.2.3 [52]
$g = 1$	1.1775	1.1401 $\lambda_1 = 2.2964$ $\lambda_2 = 14.7079$ $\lambda_3 = -3.6695$	0.7487	0.7173 $\lambda_1 = 1.4778$ $\lambda_2 = 0.3222$ $\lambda_3 = 0.1194$	1.0069	0.1023 $\lambda_1 = 1.2679$ $\lambda_2 = 2.0427$ $\lambda_3 = 1.0079$
$g = 2$	—	1.1398 $\lambda_1 = 1.6140$ $\lambda_2 = 63.2721$ $\lambda_3 = 0.0356$	—	0.6881 $\lambda_1 = 0.5514$ $\lambda_2 = 0.7101$ $\lambda_3 = 0.6217$	—	0.0827 $\lambda_1 = -1.2717$ $\lambda_2 = 0.4402$ $\lambda_3 = -0.8744$

 TABLE 4.2 Comparaison des performances H_∞ pour différents domaines des fréquences finies

— Pour un domaine BF ($|\theta| \leq \frac{\pi}{6}$), quand $\gamma = \mathbf{1.1401}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2.0883 & -0.5473 & 0.0035 \\ 9.8404 & 2.4640 & -0.0119 \\ \hline -1.9145 & -0.3663 & -0.0063 \end{array} \right] \quad (4.51)$$

— Pour un domaine MF ($\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$), lorsque $\gamma = \mathbf{0.7173}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.7519 & -0.1214 & 0.0255 \\ 1.8593 & 0.9560 & -0.0202 \\ \hline -0.0552 & -0.0305 & -0.0089 \end{array} \right] \quad (4.52)$$

— Pour un domaine HF ($|\theta| \geq \frac{5\pi}{6}$), avec $\gamma = \mathbf{0.1023}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.0556 & -0.0807 & 0.6321 \\ 0.0394 & -0.9452 & 0.4902 \\ \hline -0.0879 & -0.1235 & -0.0093 \end{array} \right] \quad (4.53)$$

Tables 4.2 et 4.3 fournit une comparaison détaillée avec les méthodes existantes dans la littérature sur les performances H_∞ . A travers ces tables, nous montrons les valeurs atteintes en utilisant le **théorème 4.2.3 [52]** et les approches proposées par [108][112]. Donc, Il est clairement montré que le **théorème 4.2.3 [52]** donne des résultats moins conservateurs que la méthode FF proposé dans [112], ainsi que les méthodes EF dans le théorème 4.2.3 (Q=0) et [108].

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

Degré	Théorème 2 [112]	Théorème 4 [108]	Théorème 4.2.3 (Q=0) [52]
$g = 1$	$\gamma = \mathbf{1.8199}$	$\gamma = \mathbf{1.6577}$ $\lambda_1 = 1.43$ $\lambda_2 = 0.08$	$\gamma = \mathbf{1.6368}$ $\lambda_1 = -1.3593$ $\lambda_2 = -0.2099$ $\lambda_3 = -4.5841$
$g = 2$	—	—	$\gamma = \mathbf{1.6338}$ $\lambda_1 = -1.3552$ $\lambda_2 = -0.2133$ $\lambda_3 = -4.6346$

TABLE 4.3 Comparaison des performances H_∞ pour $-\pi \leq |\theta| \leq \pi$

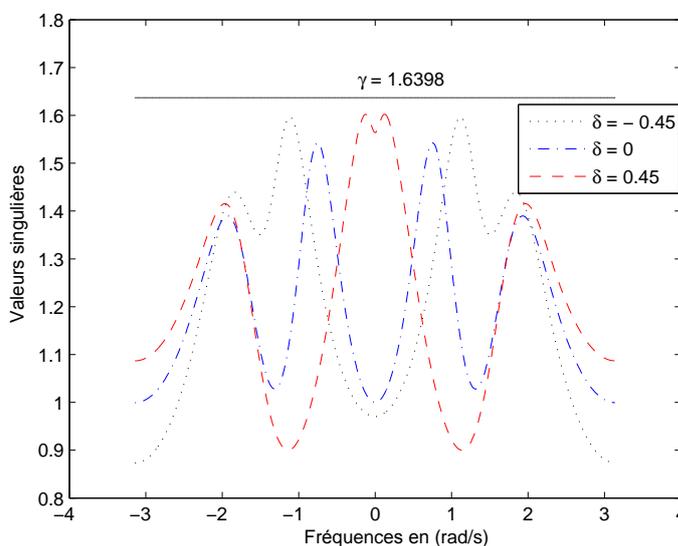


FIGURE 4.7 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.50)

De même, nous continuons à démontrer l'efficacité de ces filtres proposées. Nous considérons un cas polytopique (degré $g = 1$), en connectant respectivement (4.50), (4.51) et (4.53) aux systèmes dans (4.49), les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert du système augmenté sont représentées sur les figures 4.7, 4.8, 4.9. D'après les résultats, il est clair que toutes les valeurs singulières de ces figures sont inférieures au niveau d'atténuation γ des perturbations de performance du filtrage H_∞ . Cela montre l'efficacité de notre méthode proposée par **théorème 4.2.3 [52]**.

Finalement, nous supposons que $\frac{\pi}{6} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{4}$, degré $g = 1$ et les conditions initiales sont choisies comme $x(0) = [0 \ 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$. Le rapport $r(t)$ dans (4.48) peut montrer

l'influence de la perturbation $w(k)$ dans (4.47) sur l'erreur de filtrage $e(k)$, et le graphique du rapport est montré dans la figure 4.10.

A partir de la figure 4.10, nous démontrons que les valeurs du ratio obtenues sont inférieures aux valeurs obtenues des performances H_∞ de niveau γ .

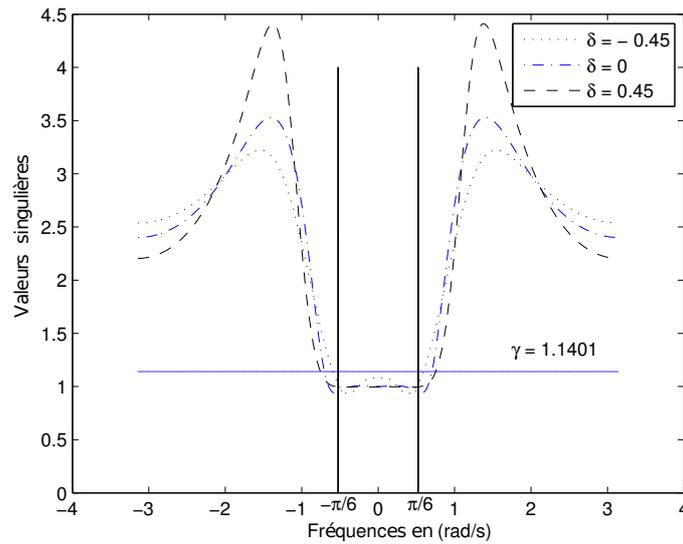


FIGURE 4.8 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.51)

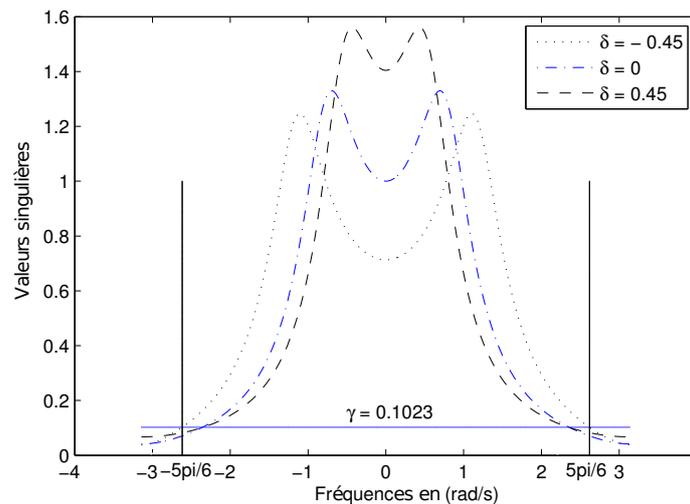


FIGURE 4.9 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.53)

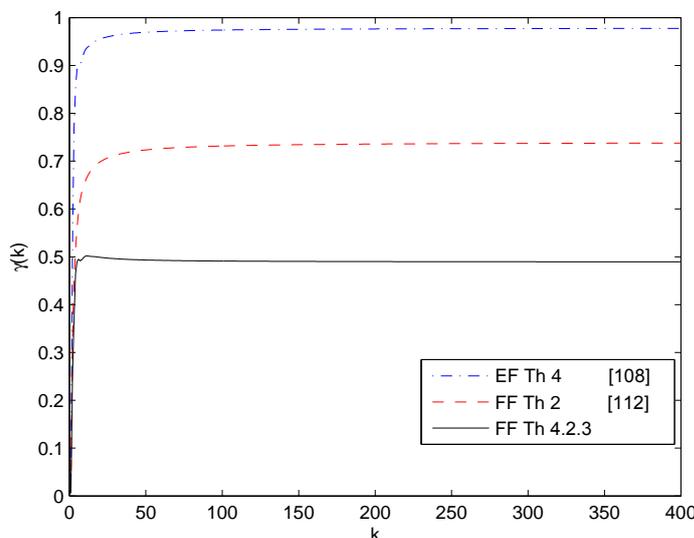


FIGURE 4.10 Vérifications des performances H_∞ par $d(k)$

C. Exemple 3 : (cas continu)

Considérons l'exemple académique donné dans [70] d'un système continu similaire au système (4.1) dont ses paramètres matriciels s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\beta \\ 0.01 + 0.05\delta & 0.9 \end{bmatrix}; \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ C_\alpha &= \begin{bmatrix} -100 + 10\delta & 100 \end{bmatrix}; \quad D_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Où β et δ sont des constantes appartenant aux intervalles d'incertitudes telles que $|\beta| \leq 1$, $\delta = \beta$.

Le but est de concevoir des filtres optimaux qui garantissent une valeur minimale des performances H_∞ du système augmenté (4.5) avec une spécification à FF dans (4.8). Cette valeur peut être obtenue par la résolution d'une optimisation convexe soit pour le **théorème 4.2.2 [59]**.

Nous remarquons que pour le théorème proposé, l'utilisation de la fonction "fminsearch" est indispensable afin de chercher les valeurs optimales des λ_1 et λ_2 qui correspondent au minimum local obtenu γ des performances H_∞ dans un domaine fréquentiel finie.

Les résultats obtenus comparés avec [70], sont donnés dans la table 4.4. Notez qu'il est clair que l'approche proposée par le théorème 4.2.2 est meilleure que celle proposée par [70].

Degré	Les fréquences entières (EF)		Les fréquences finies (FF)	
	[70]	Th 4.2.2 (avec $Q_\alpha = 0$) [59]	[70]	Th 4.2.2 ($ \omega \leq 20$) [59]
$g = 1$	$\gamma = 1.1511$	$\gamma = 1.1185$ $\lambda_1 = 0.8945$ $\lambda_2 = 0.3723$	$\gamma = 1.1402$	$\gamma = 1.0088$ $\lambda_1 = 10.8554$ $\lambda_2 = 1.3558$
$g = 2$	–	$\gamma = 1.0913$ $\lambda_1 = 0.8050$ $\lambda_2 = 0.4732$	–	$\gamma = 0.9523$ $\lambda_1 = 0.2847$ $\lambda_2 = 0.4382$

TABLE 4.4 Minimum γ de performance H_∞ obtenu pour différentes méthodes

Commençons par la simulation du **théorème 4.2.2 (avec $Q_\alpha = 0$) [59]**, nous avons obtenus les matrices de filtre H_∞ correspondant γ_{min} qui sont :

- Pour degré $g = 1$, le niveau de performance H_∞ obtenu $\gamma = 1.1185$ et les matrices de filtre sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.4698 & -3.5690 & 0.0111 \\ 0.1278 & -3.0759 & -0.0030 \\ \hline 0.0441 & -0.2786 & -0.0108 \end{array} \right] \quad (4.55)$$

- Pour degré $g = 2$, $\gamma = 1.0913$ et les paramètres du filtre d'ordre plein sont donnés par :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.5402 & 0.5849 & 0.0257 \\ -0.0813 & -1.4089 & 0.0014 \\ \hline 0.1439 & -0.4503 & -0.0122 \end{array} \right] \quad (4.56)$$

Maintenant, en utilisant le **théorème 4.2.2 [59]**, nous avons obtenus les paramètres du filtres robustes correspondant γ_{min} suivants :

- Pour degré $g = 1$, On obtient $\gamma = 1.0088$ et les matrices de filtre sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2.9842 & -1.0490 & 0.2342 \\ -1.8046 & -3.4523 & 0.1418 \\ \hline 0.0085 & -0.0731 & -0.0102 \end{array} \right] \quad (4.57)$$

- Pour degré $g = 2$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ est $\gamma = 0.9523$ et les paramètres de filtre sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1.2394 & -1.4694 & 0.1553 \\ -0.2101 & -2.3163 & 0.0264 \\ \hline 0.0031 & -0.0520 & -0.0097 \end{array} \right] \quad (4.58)$$

4.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes 1D incertains

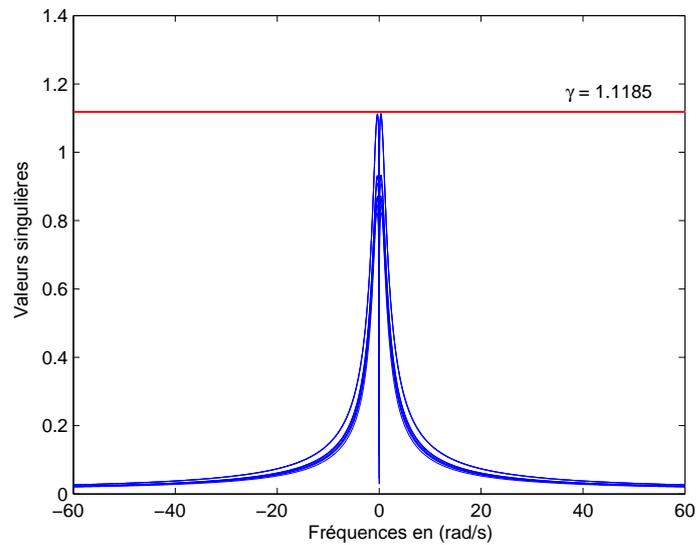


FIGURE 4.11 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.55)

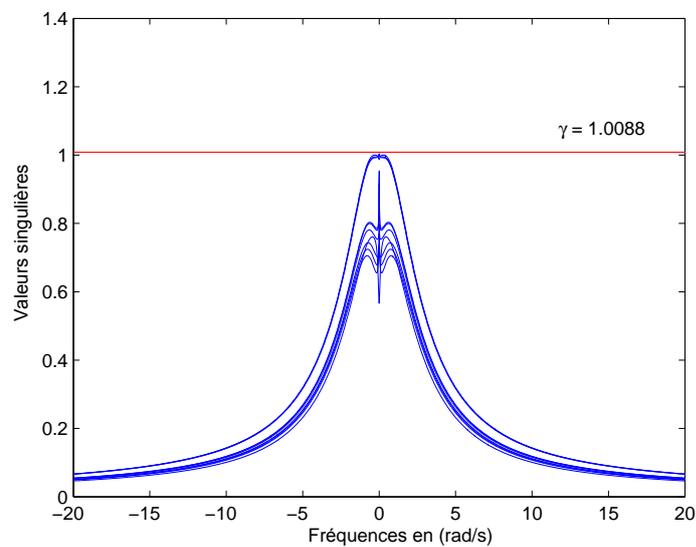


FIGURE 4.12 Valeur $\bar{\sigma}$ de la fonction de transfert de système augmenté avec un filtre (4.57)

Pour démontrer l'efficacité de ces filtres conçus. Nous considérons le cas polytopique (degré $g = 1$), en connectant respectivement (4.57) et (4.58) aux systèmes dans (4.54), les réponses en fréquence du système augmenté sont représentées sur les figures 4.12 et 4.11.

On remarque que toutes les valeurs singulières maximales de ces figures sont inférieures au niveau d'atténuation γ_{min} des performance H_∞ , ce qui démontre l'efficacité de notre méthode proposée dans cette partie.

4.3 Filtrage H_∞ robuste de système 2D continu incertain

Considérons le système 2D en temps continu incertain, décrit par le modèle Roesser :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A_\alpha \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + B_\alpha w(t_1, t_2) \\
 y(t_1, t_2) &= C_{1\alpha} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + D_{1\alpha} w(t_1, t_2) \\
 z(t_1, t_2) &= C_\alpha \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + D_\alpha w(t_1, t_2)
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$ est le vecteur d'état dans la direction horizontale, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ le vecteur d'état dans le sens verticale, avec $n = n_h + n_v$, $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de signal mesuré, $z(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le vecteur de signal à estimer et $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est l'entrée exogène avec l'énergie limitée et la fréquence horizontale w_h et la fréquence verticale w_v en $w(t_1, t_2)$ satisfait $(w_h, w_v) \in \Omega_h \times \Omega_v$, avec

$$\begin{aligned}
 \Omega_h &\triangleq \{w_h \in \mathbb{R} | w_{h1} \leq w_h \leq w_{h2} \quad w_{h1}, w_{h2} \in [0, +\infty]\} \\
 \Omega_v &\triangleq \{w_v \in \mathbb{R} | w_{v1} \leq w_v \leq w_{v2} \quad w_{v1}, w_{v2} \in [0, +\infty]\}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Les matrices de système (4.59) sont supposées incertaines et elles appartiennent à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P}_\alpha \triangleq (A_\alpha, B_\alpha, C_{1\alpha}, D_{1\alpha}, C_\alpha, D_\alpha) \in \mathcal{R} \tag{4.61}$$

Où \mathcal{R} est un domaine convexe polyédrique donné et délimité par N sommets :

$$\mathcal{R} \triangleq \{ \mathcal{P}_\alpha | \mathcal{P}_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{P}_i; \alpha \in \Gamma \} \tag{4.62}$$

4.3 Filtrage H_∞ robuste de système 2D continu incertain

Avec $\mathcal{P}_i \triangleq (A_i, B_i, C_{1i}, D_{1i}, C_i, D_i)$ désigne les sommets du polytope, et Γ indique l'unité de simplexe donnée dans (1.57).

Considérons le filtre représenté par modèle de Roesser :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x_f^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x_f^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A_f \begin{bmatrix} x_f^h(t_1, t_2) \\ x_f^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + B_f y(t_1, t_2) \\ z_f(t_1, t_2) &= C_f \begin{bmatrix} x_f^h(t_1, t_2) \\ x_f^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + D_f y(t_1, t_2) \\ x_f^h(0, t_2) &= 0 \quad x_f^v(t_1, 0) = 0; \quad \forall t_1, t_2 > 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Où $x_f^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$ et $x_f^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$, sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal et vertical, $z_f(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est l'estimation de $z(t_1, t_2)$, A_f , B_f , C_f et D_f sont des matrices à déterminer de dimensions appropriés.

Soit les vecteurs augmentés de l'état

$$\bar{x}^h(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x_f^h(t_1, t_2) \end{bmatrix}; \quad \bar{x}^v(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x^v(t_1, t_2) \\ x_f^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}; \quad (4.64)$$

Et l'estimation d'erreur :

$$\bar{z}(t_1, t_2) = z(t_1, t_2) - z_f(t_1, t_2) \quad (4.65)$$

Donc, le système d'erreur du filtrage s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \bar{A}_\alpha \begin{bmatrix} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \bar{B}_\alpha w(t_1, t_2) \\ \bar{z}(t_1, t_2) &= \bar{C}_\alpha \begin{bmatrix} \bar{x}^h(t_1, t_2) \\ \bar{x}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \bar{D}_\alpha w(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{A}_\alpha &= \Phi \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ B_f C_{1\alpha} & A_f \end{bmatrix} \Phi^T; \quad \bar{B}_\alpha = \Phi \begin{bmatrix} B_\alpha \\ B_f D_{1\alpha} \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} I_{n_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_h} & 0 \\ 0 & I_{n_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_v} \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_\alpha &= \begin{bmatrix} C_\alpha - D_f C_{1\alpha} & -C_f \end{bmatrix} \Phi^T; \quad \bar{D}_\alpha = D_\alpha - D_f D_{1\alpha} \end{aligned} \quad (4.67)$$

La matrice de transfert du système augmenté (4.67) s'écrit de la façon suivante :

$$G_\alpha(s_1, s_2) = \bar{C}_\alpha [\text{diag}\{s_1 I_{2 \times n_h}, s_2 I_{2 \times n_v}\} - \bar{A}_\alpha]^{-1} \bar{B}_\alpha + \bar{D}_\alpha \quad \alpha \in \Gamma \quad (4.68)$$

Où s_1 et s_2 , respectivement, sont les opérateurs de transformation Z horizontaux et verticaux. Nous donnons $G(w_h, w_v)$ comme l'expression du domaine fréquentiel en $G(s_1, s_2)$ avec $s_1 = jw_h$ et $s_2 = jw_v$.

L'objectif de cette partie est de concevoir un filtre d'ordre plein (4.63), sachant que le système augmenté (4.66) est robuste asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in \Gamma$ et vérifie la performance H_∞ avec des spécifications de fréquence finie (FF) suivante :

$$\bar{\sigma}[G(w_h, w_v)] < \gamma \quad \forall (w_h, w_v) \in \Omega_h \times \Omega_v \quad (4.69)$$

4.3.1 Analyse du filtre H_∞

Dans cette section, nous présentons des conditions suffisantes pour l'analyse des performances H_∞ du système augmenté (4.66) est asymptotiquement stable avec une borne γ de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini (4.69).

Théorème 4.3.1 [53] : *Le système augmenté (4.66) est robuste asymptotiquement stable avec des performances H_∞ de niveau d'atténuation du bruit γ dans un domaine fréquentiel fini (4.69) pour $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}$, s'il existe des matrices hermitiennes dépendantes des paramètres $P_{h\alpha}, Q_{h\alpha} \in \mathbb{H}_{2n_h}$, $P_{v\alpha}, Q_{v\alpha} \in \mathbb{H}_{2n_v}$, matrices de Lyapunov dépendantes des paramètres, symétriques $\bar{P}_{h\alpha} \in \mathbb{R}^{2n_h}$, $\bar{P}_{v\alpha} \in \mathbb{R}^{2n_v}$ et matrices générales dépendantes des paramètres $F_\alpha, G_\alpha \in \mathbb{R}^{2n_x}$, $H_\alpha \in \mathbb{R}^{n_w \times 2n_x}$, telles que :*

$$Q_\alpha = \text{diag}\{Q_{h\alpha}, Q_{v\alpha}\} > 0, \quad \bar{P}_\alpha = \text{diag}\{\bar{P}_{h\alpha}, \bar{P}_{v\alpha}\} > 0 \quad (4.70)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -Q_\alpha - F_\alpha - F_\alpha^T & P_\alpha + \Lambda Q_\alpha - G_\alpha + F_\alpha \bar{A}_\alpha & F_\alpha \bar{B}_\alpha - H_\alpha^T & 0 \\ * & \Psi_2 = -W Q_\alpha + \text{sym}(G_\alpha \bar{A}_\alpha) & G_\alpha \bar{B}_\alpha + \bar{A}_\alpha^T H_\alpha^T & \bar{C}_\alpha^T \\ * & * & -\gamma^2 I + \text{sym}(H_\alpha \bar{B}_\alpha) & \bar{D}_\alpha^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.71)$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -F_\alpha - F_\alpha^T & P_\alpha + F_\alpha \bar{A}_\alpha - G_\alpha^T \\ * & G_\alpha \bar{A}_\alpha + \bar{A}_\alpha^T G_\alpha^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.72)$$

Où Λ et W sont définies dans (1.55).

Preuve 4.3.1 : *Premièrement, nous prouvons que l'inégalité (1.54) est équivalent à (4.71). On a, l'inégalité (1.55) peut être écrite sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_\alpha & P_\alpha + \Lambda Q_\alpha \\ P_\alpha - \Lambda Q_\alpha & WQ_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_\alpha & \bar{D}_\alpha \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_\alpha & \bar{D}_\alpha \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Nous supposons

$$Z = \begin{bmatrix} F_\alpha^T & G_\alpha^T & H_\alpha^T \end{bmatrix}^T; \quad \Gamma = I_{4n+n_w}; \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

D'après le lemme de projection 1.8.1, alors (4.73) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_\alpha & P_\alpha + \Lambda Q_\alpha \\ P_\alpha - \Lambda Q_\alpha & WQ_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_\alpha & \bar{D}_\alpha \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_\alpha & \bar{D}_\alpha \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \Gamma^T Z \mathcal{U} + \mathcal{U}^T Z^T \Gamma < 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Puisque, le complément orthogonal de \mathcal{U} est \mathcal{U}^\perp peut être choisi comme $\mathcal{U}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha & \bar{B}_\alpha \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Donc, nous pouvons obtenir l'équivalence entre les équations (4.75) et (4.71). Par conséquent, l'équation (1.55) est équivalente à l'équation (4.72).

D'autre part, nous prouvons que l'équation (1.37) est équivalente à l'équation (4.72).

Nous supposons que l'équation (1.37) s'écrit sous une autre forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \bar{P}_\alpha \\ \bar{P}_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.76)$$

Nous définissons :

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} -I & \bar{A}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \Gamma = I_{4n}, \quad Z = \begin{bmatrix} F_\alpha \\ G_\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathcal{U}^\perp = \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha \\ I \end{bmatrix}; \quad \Gamma^\perp = 0 \quad (4.77)$$

D'après le lemme de projection 1.8.1, (4.76) et (4.77) sont équivalents à

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{P}_\alpha \\ \bar{P}_\alpha & 0 \end{bmatrix} + \Gamma^T Z \mathcal{U} + \mathcal{U}^T Z^T \Gamma < 0 \quad (4.78)$$

Alors, on trouve l'expression (4.72).

4.3.2 Conception du filtre H_∞

Dans cette partie, nous allons déterminer les paramètres de filtre dans (4.63) de telle sorte que le système augmenté (4.66) est robuste asymptotiquement stable avec un niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ satisfait à la spécification FF dans (4.69).

Théorème 4.3.2 [53] : *Le système augmenté (4.66) est robuste asymptotiquement stable avec des performances H_∞ de niveau d'atténuation du bruit γ (4.69) pour $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}$, s'il existe des matrices hermitiennes dépendantes des paramètres $P_{2\alpha} = \text{diag}\{P_{h2\alpha}, P_{v2\alpha}\}$, $Q_{2\alpha} = \text{diag}\{Q_{h2\alpha}, Q_{v2\alpha}\}$, $P_{s\alpha} = \text{diag}\{P_{hs\alpha}, P_{vs\alpha}\}$, $Q_{s\alpha} = \text{diag}\{Q_{hs\alpha}, Q_{vs\alpha}\}$, $s = 1, 3$, matrices symétriques dépendantes des paramètres $\bar{P}_{2\alpha} = \text{diag}\{\bar{P}_{h2\alpha}, \bar{P}_{v2\alpha}\}$, $\bar{P}_{s\alpha} = \text{diag}\{\bar{P}_{hs\alpha}, \bar{P}_{vs\alpha}\}$, $s = 1, 3$, et les matrices générales dépendantes des paramètres $\hat{A}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $\hat{C}_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $\hat{D}_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $F_{u\alpha}$, $G_{u\alpha}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u = 1, 2$, $H_{1\alpha} \in \mathbb{R}^{n_w \times n}$ et les scalaires λ_1 et λ_2 , sachant que :*

$$\begin{bmatrix} Q_{1\alpha} & Q_{2\alpha} \\ * & Q_{3\alpha} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\alpha} & \bar{P}_{2\alpha} \\ * & \bar{P}_{3\alpha} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.79)$$

$$\bar{\Psi}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11\alpha} & \bar{\Psi}_{12\alpha} & \bar{\Psi}_{13\alpha} & \bar{\Psi}_{14\alpha} & -H_{1\alpha}^T + F_{1\alpha}B_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f D_{1\alpha} & 0 \\ * & \bar{\Psi}_{22\alpha} & \bar{\Psi}_{23\alpha} & \bar{\Psi}_{24\alpha} & F_{2\alpha}B_\alpha + \lambda_2 \hat{B}_f D_{1\alpha} & 0 \\ * & * & \bar{\Psi}_{33\alpha} & \bar{\Psi}_{34\alpha} & A_\alpha^T H_{1\alpha}^T + G_{1\alpha}B_\alpha + \hat{B}_f D_{1\alpha} & C_\alpha^T - C_{1\alpha}^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & \bar{\Psi}_{44\alpha} & G_{2\alpha}B_\alpha + \hat{B}_f D_{1\alpha} & -\hat{C}_f^T \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I + \text{sym}(H_{1\alpha}B_\alpha) & D_\alpha^T - D_{1\alpha}^T \hat{D}_f^T \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.80)$$

$$\tilde{Y}_\alpha = \begin{bmatrix} -F_{1\alpha} - F_{1\alpha}^T & -\lambda_1 V - F_{2\alpha}^T & \tilde{Y}_{1\alpha} & \bar{P}_{2\alpha} + \lambda_1 \hat{A}_f - G_{2\alpha}^T \\ * & -\lambda_2 V - \lambda_2 V^T & \tilde{Y}_{2\alpha} & \bar{P}_{3\alpha} + \lambda_2 \hat{A}_f - V^T \\ * & * & \tilde{Y}_{3\alpha} & \tilde{Y}_{4\alpha} \\ * & * & * & \hat{A}_f + \hat{A}_f^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.81)$$

Où

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_{11\alpha} &= -Q_{1\alpha} - F_{1\alpha} - F_{1\alpha}^T; \quad \bar{\Psi}_{12\alpha} = -Q_{2\alpha} - \lambda_1 V - F_{2\alpha}^T; \\
 \bar{\Psi}_{13\alpha} &= P_{1\alpha} + \Lambda Q_{1\alpha} + F_{1\alpha} A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_{1\alpha} - G_{1\alpha}^T; \quad \bar{\Psi}_{14\alpha} = P_{2\alpha} + \Lambda Q_{2\alpha} + \lambda_1 \hat{A}_f - G_{2\alpha}^T; \\
 \bar{\Psi}_{22\alpha} &= -Q_{3\alpha} - \lambda_2 V - \lambda_2 V^T; \quad \bar{\Psi}_{23\alpha} = P_{2\alpha} - \Lambda Q_{2\alpha} - V^T + F_{2\alpha} A_\alpha + \lambda_2 \hat{B}_f C_{1\alpha}; \\
 \bar{\Psi}_{24\alpha} &= P_{3\alpha} + \Lambda Q_{3\alpha} - V^T + \lambda_2 \hat{A}_f; \quad \bar{\Psi}_{33\alpha} = W Q_{1\alpha} + \text{sym}(G_{1\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_{1\alpha}); \\
 \bar{\Psi}_{34\alpha} &= W Q_{2\alpha} + \hat{A}_f + A_\alpha^T G_{2\alpha}^T + C_{1\alpha}^T \hat{B}_f; \quad \bar{\Psi}_{44\alpha} = W Q_{3\alpha} + A_f + A_f^T; \\
 \bar{\Upsilon}_{1\alpha} &= \bar{P}_{1\alpha} + F_{1\alpha} A_\alpha + \lambda_1 \hat{B}_f C_{1\alpha} - G_{1\alpha}^T; \quad \bar{\Upsilon}_{2\alpha} = \bar{P}_{2\alpha} + F_{2\alpha} A_\alpha + \lambda_2 \hat{B}_f C_{1\alpha} - V^T; \\
 \bar{\Upsilon}_{3\alpha} &= \text{sym}(G_{1\alpha} A_\alpha + \hat{B}_f C_{1\alpha}); \quad \bar{\Upsilon}_{4\alpha} = A_\alpha^T G_{2\alpha}^T + C_{1\alpha}^T \hat{B}_f + \hat{A}_f.
 \end{aligned}$$

Les paramètres du filtre sont exprimés par :

$$\begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_f & \hat{B}_f \\ \hat{C}_f & \hat{D}_f \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Preuve 4.3.2 : *En se basant sur le théorème 2.3.1, tant que les matrices du système et les variables tiennent compte des incertitudes polytopiques, la structure des variables dépendantes des paramètres est comme suit*

$$\begin{aligned}
 Q_\alpha &= \Phi \begin{bmatrix} Q_{1\alpha} & Q_{2\alpha} \\ * & Q_{3\alpha} \end{bmatrix} \Phi^T > 0; \quad \bar{P}_\alpha = \Phi \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\alpha} & \bar{P}_{2\alpha} \\ * & \bar{P}_{3\alpha} \end{bmatrix} \Phi^T > 0; \quad P_\alpha = \Phi \begin{bmatrix} P_{1\alpha} & P_{2\alpha} \\ * & P_{3\alpha} \end{bmatrix} \Phi^T; \\
 F_\alpha &= \Phi \begin{bmatrix} F_{1\alpha} & \lambda_1 V \\ F_{2\alpha} & \lambda_2 V \end{bmatrix} \Phi^T; \quad G_\alpha = \Phi \begin{bmatrix} G_{1\alpha} & V \\ G_{2\alpha} & V \end{bmatrix} \Phi^T; \quad H_\alpha = \begin{bmatrix} H_{1\alpha} & 0 \end{bmatrix} \Phi^T
 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Où Φ dans (4.67).

En outre, les équations suivantes sont facilement obtenues :

$$\bar{\Lambda} = \Phi \text{diag}\{\Lambda, \Lambda\} \Phi^T; \quad \bar{W} = \Phi \text{diag}\{W, W\} \Phi^T \quad (4.84)$$

En raison de $\Phi^T \Phi = I$, en remplaçant l'équation (4.66) par des équations (4.71) et (4.72) et combinant des équations (4.79), (4.80) et (2.69), nous avons :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_\alpha &= \text{diag}\{\Phi, \Phi, I_{n_w}, I_{n_z}\} \Psi_\alpha \text{diag}\{\Phi, \Phi, I_{n_w}, I_{n_z}\}^T; \\
 \bar{\Upsilon}_\alpha &= \text{diag}\{\Phi, \Phi\} \Psi_\alpha \text{diag}\{\Phi, \Phi\}^T
 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Où $\hat{A}_f = VA_f$, $\hat{B}_f = VB_f$, $\hat{C}_f = C_f$, $\hat{D}_f = D_f$, et $\Psi_\alpha, \Upsilon_\alpha$ sont dans le théorème 4.3.1.

Remarque 4.3.1 : Pour résoudre les LMIs du théorème 4.3.2, nous a permis l'usage de l'approche polynomiale définie dans la définition (1.8.1), celle-ci se base sur la technique donnée dans le théorème 4.2.3 [52] afin de résoudre ce problème. Pour cela, les matrices polynomiales (variables de décision dans les LMI dépendantes des paramètres, à savoir $\bar{P}_{v\alpha}$, $P_{v\alpha}$, $Q_{v\alpha}$, $v = 1, 2, 3$, $M_{t\alpha}$, $S_{t\alpha}$, $t = 1, 2$ et $R_{1\alpha}$) sont traitées comme des polynômes homogènes de degré arbitraire g et des LMIs suffisantes.

De plus, pour λ_1 et λ_2 des scalaires donnés, les inégalités (4.79), (4.80) et (4.81) sont linéaires et le problème de conception peut être résolu facilement en utilisant les environnements numériques Yalmip [111] et SeDumi [139]. Donc, pour trouver les valeurs optimales de λ_1 et λ_2 qui aident à minimiser l'erreur du filtrage, nous utilisons un algorithme d'optimisation convexe de telle sorte que les solutions puissent être résolues.

Remarque 4.3.2 : Lorsque le degré g du polynôme augmente, les conditions deviennent moins conservatrices puisque de nouvelles variables libres sont ajoutées aux LMIs. Bien que le nombre des LMIs soit également augmenté, chaque LMI devient plus facile à remplir en raison des degrés de liberté supplémentaires fournis par les nouvelles variables libres ; par conséquent, de meilleurs coûts garantis H_∞ peuvent être obtenus.

Remarque 4.3.3 : Si nous prenons $Q = 0$, nous pouvons utiliser le théorème 4.3.2. pour résoudre le problème filtrage H_∞ dans un domaine de fréquence entière (EF) de système 2D à temps continu incertain, décrit par le modèle Roesser.

Remarque 4.3.4 : Le théorème 4.3.2 fournit des conditions suffisantes pour le filtrage à fréquence finie (FF) H_∞ pour des systèmes 2D linéaires à temps continu incertain dans différents domaines de fréquences. Les exemples numériques proposés montrent que l'approche FF propose les meilleures performances que les fréquences complètes existantes lorsque les domaines de fréquences des bruits sont connus.

4.3.3 Exemples de simulation

Dans cette section, nous utilisons deux exemples afin d'illustrer les avantages, et pour montrer l'efficacité de nos approches développés dans cette partie.

A. Exemple 1

Nous considérons le système (4.59) avec les matrices suivants [155] :

4.3 Filtrage H_∞ robuste de système 2D continu incertain

Degré	Fréquence Entière		Fréquence Finie
	Théorème 3 [65]	Théorème 4.3.2 (avec Q=0) [53]	Théorème 4.3.2 [53]
g=0	$\gamma = \mathbf{1.5033}$ $\lambda_1 = 0.0129$ $\lambda_2 = 0.0100$	$\gamma = \mathbf{0.9234}$ $\lambda_1 = 0.6484$ $\lambda_2 = 1.3128$	$\gamma = \mathbf{0.8796}$ $\lambda_1 = 0.6271$ $\lambda_2 = 1.3979$
g=1	$\gamma = \mathbf{0.8443}$ $\lambda_1 = 0.2373$ $\lambda_2 = 0.0976$	$\gamma = \mathbf{0.8107}$ $\lambda_1 = 0.8365$ $\lambda_2 = 0.8745$	$\gamma = \mathbf{0.7440}$ $\lambda_1 = -0.0844$ $\lambda_2 = 0.2043$
g=2	$\gamma = \mathbf{0.7953}$ $\lambda_1 = 0.2847$ $\lambda_2 = 0.4382$	$\gamma = \mathbf{0.7640}$ $\lambda_1 = 0.1066$ $\lambda_2 = 0.3144$	$\gamma = \mathbf{0.7317}$ $\lambda_1 = 0.5488$ $\lambda_2 = 0.0239$

TABLE 4.5 Niveaux d'atténuation γ de performance H_∞ pour chaque degré g

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0.2 + a_2 & -0.5 & 0.3 + a_1 \\ 0.6 & -2 & 0.2 & 0 \\ \hline -0.3 & 0.7 & -2.3 + a_2 & 0.6 \\ -0.1 & 0.2 & 0.1 + a_1 & -1.8 \end{array} \right]; \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5 + a_2 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}; \\
 C_1 &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.8 & -0.9 & 0.2 & -0.1 \\ 0.5 & -0.3 & 0 & 0.5 \end{array} \right]; \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \\
 C &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.6 & 0.1 & -0.8 & 0.5 \end{array} \right]; \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix} \tag{4.86}
 \end{aligned}$$

Où les paramètres incertains a_1 et a_2 sont bornés par $|a_1| \leq 1.35$ et $|a_2| \leq 0.90$, donc le système est décrit par un système polytopique de quatre sommets.

Supposons que la région à fréquence finie (FF) $0 \leq w_h \leq 5$, $0 \leq w_v \leq 5$.

Par résolution des LMIs (4.79), (4.80) et (4.81), les résultats obtenus comparés avec [65], sont donnés dans la table 4.5.

À partir de la table 4.5 nous avons les observations suivantes :

- Dans le cas de la fréquence entière (EF), il est évident que l'approche proposée via le **théorème 4.3.2 (avec Q=0) [53]** est meilleure que celles proposées dans [65].

— En cas fréquence finie (FF), on peut constater que le minimum de γ obtenu par notre méthode est plus petit que celui donné par d'autres méthodes dans le cas EF, ce qui démontre clairement l'efficacité de l'approche dans un domaine fréquentiel fini.

Les matrices de filtre H_∞ correspondant γ_{min} sont :

A. Fréquence entière (EF) : $[0,+\infty] \times [0,+\infty]$: (Th 4.3.2 (avec $Q = 0$) [53])

Pour le degré $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, le niveau d'atténuation de perturbation obtenu est $\gamma = \mathbf{0.9234}$ et les matrices de filtrage correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -1.2159 & 0.6514 & 0.1522 & -0.2884 & -0.4735 & -1.9176 \\ 0.2280 & -1.4046 & 0.0994 & 0.2636 & -1.1500 & 1.0344 \\ 0.0258 & -0.2666 & -0.6778 & -0.2038 & 0.4216 & -0.5199 \\ -0.5643 & -7.3361 & 1.4614 & -4.4898 & 0.2432 & -6.9471 \\ \hline -0.1377 & -0.1941 & 0.8158 & -0.0391 & -0.2787 & 1.4161 \end{array} \right] \quad (4.87)$$

D'autre part, lorsque le degré $\mathbf{g} = \mathbf{1}$, $\gamma = \mathbf{0.8107}$ et les matrices de filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -4.6085 & 4.7438 & -0.8033 & 0.1373 & -4.4705 & -1.9851 \\ 4.9312 & -6.5010 & 1.0240 & -0.2921 & 4.4390 & 1.5438 \\ -0.8070 & 1.3762 & -1.2051 & 0.0920 & -0.2416 & -0.4388 \\ -1.2218 & 0.7630 & 0.2931 & -1.1939 & -0.2237 & -2.1667 \\ \hline -0.2810 & -0.1488 & 0.7147 & 0.1734 & -0.7669 & 1.7362 \end{array} \right] \quad (4.88)$$

Enfin, quand le degré $\mathbf{g} = \mathbf{2}$, le niveau de performance H_∞ obtenu $\gamma = \mathbf{0.7640}$ et les paramètres de filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -2.9137 & 2.8082 & -0.3840 & 0.2083 & -4.1466 & 0.2683 \\ 1.9631 & -3.0040 & 0.7433 & -0.4353 & 2.9751 & -1.2718 \\ -0.0628 & 0.1963 & -0.5942 & -0.0788 & -0.0118 & 0.1255 \\ -0.3627 & 0.5525 & -0.2956 & -1.0413 & -0.1046 & -0.2716 \\ \hline -0.1309 & -0.1892 & 0.9731 & 0.8646 & -0.7218 & 1.9413 \end{array} \right] \quad (4.89)$$

B. Fréquence finie (FF) : $[0 \ 5] \times [0 \ 5]$: (Th 4.3.2 [53])

Pour le degré $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, le niveau d'atténuation γ de performance H_∞ est $\gamma = \mathbf{0.8796}$ et les paramètres du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -1.8828 & 1.3486 & -0.0812 & -0.0571 & -1.4337 & -1.7719 \\ 0.4556 & -1.7251 & 0.2303 & -0.2208 & -0.5408 & 0.5608 \\ 0.0363 & -0.0157 & -0.5732 & -0.4011 & 0.6804 & -0.6620 \\ 0.4121 & -2.5870 & 1.5115 & -4.6649 & 3.4066 & -5.3172 \\ \hline -0.1348 & -0.2294 & 0.8144 & -0.0737 & -0.3054 & 1.4339 \end{array} \right] \quad (4.90)$$

En outre, pour le degré $\mathbf{g} = \mathbf{1}$, le niveau d'atténuation γ de performance H_∞ est $\gamma = \mathbf{0.7440}$ et les matrices du filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -2.2649 & 2.2096 & -0.3553 & 0.3221 & -3.0777 & 0.0487 \\ 1.4726 & -2.0435 & 0.5520 & -0.9415 & 2.6057 & -1.2688 \\ 0.0187 & 0.6363 & -1.2871 & 2.1829 & -1.6131 & 2.7522 \\ 0.3082 & -1.3322 & 1.0427 & -5.1277 & 4.3877 & -5.8523 \\ \hline -0.1588 & 0.0014 & 0.3410 & 0.0900 & -0.3021 & 1.6230 \end{array} \right] \quad (4.91)$$

Finalement, lorsque $\mathbf{g} = \mathbf{2}$, le niveau de performance H_∞ obtenu $\gamma = \mathbf{0.7317}$ et les paramètres de filtre H_∞ correspondant sont :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -1.6788 & 1.6214 & -0.3461 & -0.0938 & -2.0594 & -0.2318 \\ 1.5835 & -2.2013 & 0.5033 & -0.3618 & 2.3391 & -0.7752 \\ 0.2467 & 0.2834 & -1.1081 & 0.7779 & -0.0925 & 1.1210 \\ -0.1596 & 0.0847 & -0.0255 & -1.0835 & 0.5421 & -0.9838 \\ \hline -0.2778 & 0.0362 & 0.7241 & 0.5448 & -0.8391 & 1.9519 \end{array} \right] \quad (4.92)$$

Pour illustrer l'efficacité de ces filtres conçus, les normes H_∞ calculées aux quatre sommets et dans les degrés $g = 0, 1, 2$ sont présentés dans les tables 4.6, 4.7 et 4.8, elles sont toutes en dessous aux niveaux γ de performance H_∞ dans différentes bandes de fréquences.

Ensuite, nous considérons le cas polytopique (degré $g = 1$), les figures 4.13, 4.14, 4.15 et 4.16 présentent successivement l'évolution des l'états horizontal et vertical du système augmenté. Nous pouvons constater que les états $\bar{x}_1^h(t_1, t_2)$, $\bar{x}_1^v(t_1, t_2)$, $\bar{x}_2^h(t_1, t_2)$, $\bar{x}_2^v(t_1, t_2)$, $\bar{x}_3^h(t_1, t_2)$,

a_1	-1.35	-1.35	1.35	1.35
a_2	-0.90	0.90	-0.90	0.90
$\gamma(EF)$	0.4839	0.4854	0.4838	0.8277
$\gamma(FF)$	0.4686	0.3990	0.4534	0.8080

TABLE 4.6 Normes H_∞ aux sommets ($g = 0$)

a_1	-1.35	-1.35	1.35	1.35
a_2	-0.90	0.90	-0.90	0.90
$\gamma(EF)$	0.4039	0.4927	0.4386	0.7952
$\gamma(FF)$	0.5854	0.4022	0.3093	0.7346

TABLE 4.7 Normes H_∞ aux sommets ($g = 1$)

$\bar{x}_3^v(t_1, t_2)$, $\bar{x}_4^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_4^v(t_1, t_2)$ tendent vers 0. Donc, les paramètres du filtre obtenus sont meilleurs à savoir ses états sont asymptotiquement stables.

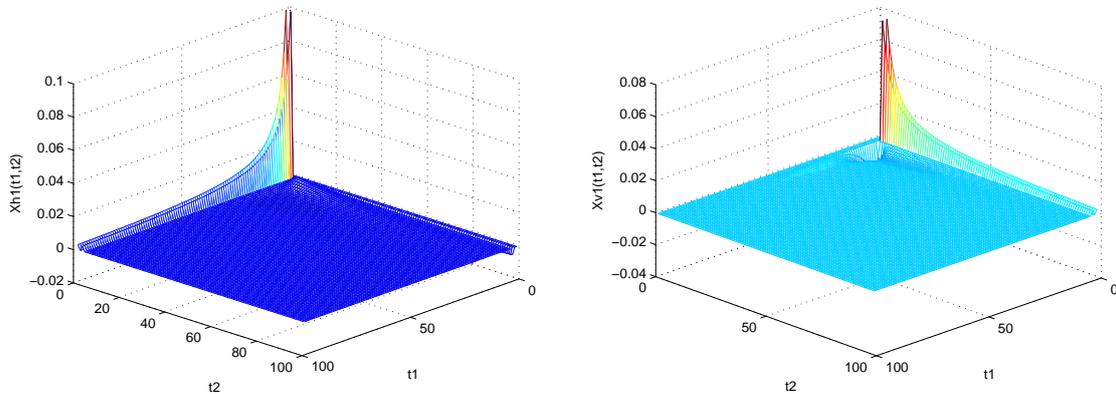


FIGURE 4.13 Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_1^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_1^v(t_1, t_2)$

Finalement, nous définissons la perturbation exogène $w(t_1, t_2)$ par la forme suivante :

$$w(t_1, t_2) = 0.35 \exp(0.10((t_1 - 6)^2 + 2(t_2 - t_1)^2)). \quad (4.93)$$

4.3 Filtrage H_∞ robuste de système 2D continu incertain

a_1	-1.35	-1.35	1.35	1.35
a_2	-0.90	0.90	-0.90	0.90
$\gamma(EF)$	0.4053	0.6780	0.2343	0.7339
$\gamma(FE)$	0.6471	0.3917	0.3073	0.7205

TABLE 4.8 Normes H_∞ aux sommets ($g = 2$)

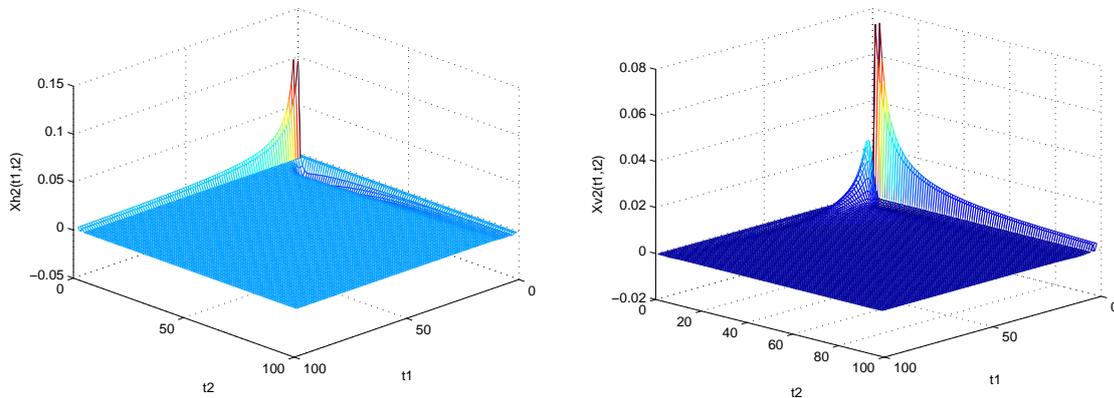


FIGURE 4.14 Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_2^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_2^v(t_1, t_2)$

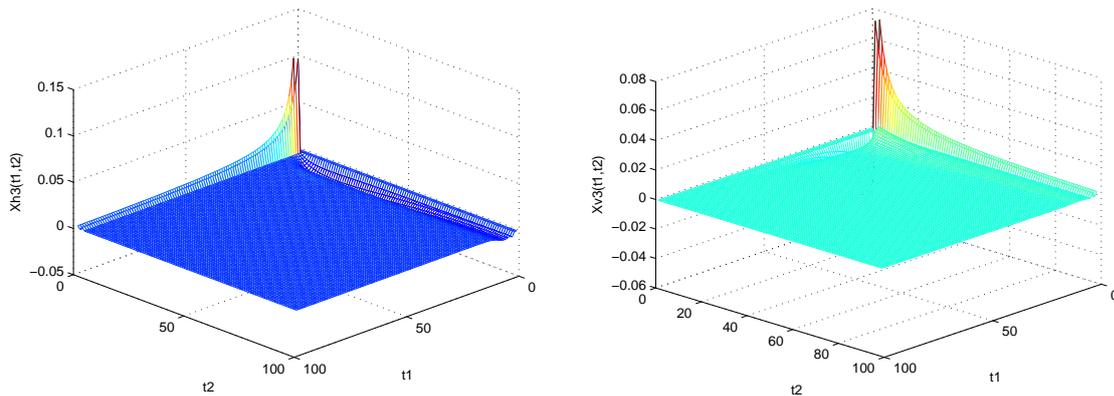


FIGURE 4.15 Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_3^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_3^v(t_1, t_2)$

La figure 4.17 représentée l'entrée de perturbation $w(t_1, t_2)$ et la réponse fréquentielle du système augmenté $\bar{z}(t_1, t_2)$, où les conditions initiales sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 x^h(0, t_2) &= [0.3 \ 0.3]^T \quad \forall 0 \leq t_2 \leq 1; \\
 x^h(0, t_2) &= 0 \quad \forall t_2 \geq 1; \\
 x^v(t_1, 0) &= [0.3 \ 0.3]^T \quad \forall 0 \leq t_1 \leq 1; \\
 x^v(t_1, 0) &= 0 \quad \forall t_1 \geq 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.94}$$

Il est clair que le système augmenté est asymptotiquement stable et converge vers zéro.

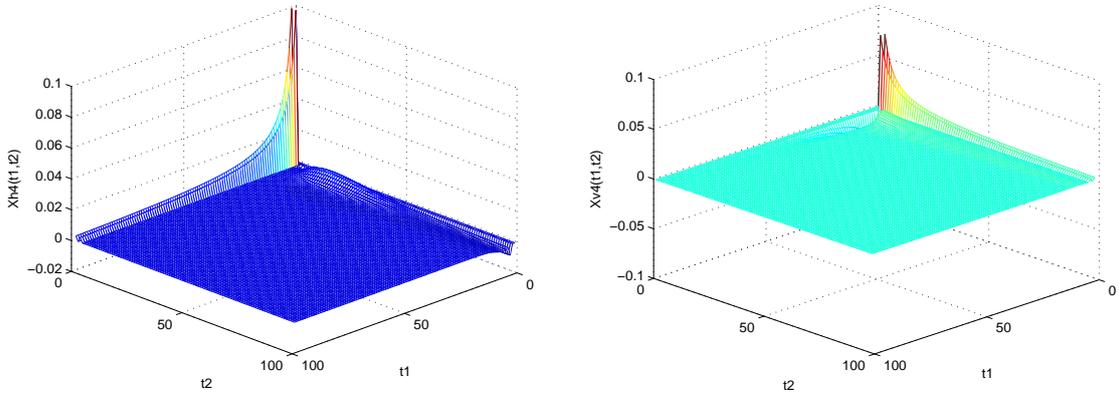


FIGURE 4.16 Trajectoires des états horizontal et vertical $\bar{x}_4^h(t_1, t_2)$ et $\bar{x}_4^v(t_1, t_2)$

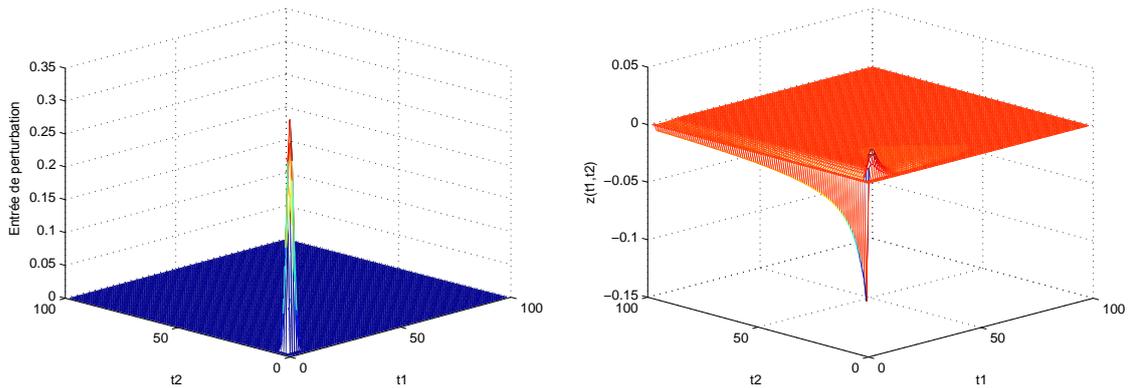


FIGURE 4.17 Trajectoires de l'entrée des perturbations $w(t_1, t_2)$ et d'erreur $\bar{z}(t_1, t_2)$

B. Exemple 2

Considérons les processus dynamiques d'absorption de gaz, chauffage à la vapeur d'eau, séchage à l'air, qui peuvent être décrit par l'équation de Darboux suivante [44] :

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + a_0 S(x,t) + b f(x,t) \quad (4.95)$$

Où $S(x,t)$ est une fonction inconnue, à l'abscisse $x(\text{espace}) \in [0, x_f]$ et au temps $t(\text{temps}) \in [0, \infty]$, a_0, a_1, a_2 et b sont des coefficients réels, et $f(x,t)$ est une fonction d'entrée.

En définissant

$$r(x,t) = \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} - a_2 S(x,t) \quad (4.96)$$

Alors, l'équation (4.95) peut se transformer au modèle de Roesser de la forme (2.56) avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_1 & a_0 + a_1 a_2 \\ 1 & a_2 + \rho \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}; \quad D_1 = 0.8; \quad D = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Où $a_0 = 0.2$, $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, et $b = 0$.

Supposons que ρ est un paramètre incertain vérifiant $|\rho| \leq 0.15$, donc le système est décrit par un système polytopique à deux sommets. Nous considérons que la région à fréquence finie (FF) $0 \leq w_h \leq 10$, $0 \leq w_v \leq 10$.

En résolvant le **théorème 4.3.2** [53], les résultats de simulation sont illustrés dans la table 4.9. Nous avons obtenu des résultats moins conservatifs par rapport aux résultats de la littérature.

EF		FF
Théorème 3 [65]	Théorème 4.3.2 (avec Q=0) [53]	Théorème 4.3.2 [53]
$\gamma = \mathbf{2.6698}$	$\gamma = \mathbf{1.3801}$	$\gamma = \mathbf{1.2513}$
$\lambda_1 = 0.1547$	$\lambda_1 = 0.1676$	$\lambda_1 = 0.1230$
$\lambda_2 = 0.1550$	$\lambda_2 = 0.4239$	$\lambda_2 = 0.5514$

TABLE 4.9 Niveau d'atténuation γ de performance H_∞ comparé aux résultats de la littérature

Les matrices du filtre H_∞ correspondant le niveau d'atténuation γ de performance H_∞ sont :

— **Fréquence entière (EF) : (Théorème 4.3.2 avec $Q=0$ [53])**

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} -10.7891 & 9.0005 \\ 1.3966 & -1.3760 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -4.8216 \\ 0.2186 \end{bmatrix}, \\ C_f &= \begin{bmatrix} -0.0639 & -0.6114 \end{bmatrix}, \quad D_f = 0.2572 \end{aligned} \quad (4.98)$$

— **Fréquence finie (FF), $0 \leq w_h \leq 10, 0 \leq w_v \leq 10$: (Théorème 4.3.2 [53])**

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} -1.8085 & -0.0278 \\ -0.1809 & -1.0377 \end{bmatrix}; \quad B_f = \begin{bmatrix} -3.7617 \\ -2.4540 \end{bmatrix}; \\ C_f &= \begin{bmatrix} -0.2023 & -0.0064 \end{bmatrix}; \quad D_f = 1.1366 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Les résultats obtenus pour différents bandes de fréquences du filtre H_∞ sont moins conservatifs par rapport aux résultats de la littérature. Ce qui montre l'amélioration apportée par notre approche.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés au problème de filtrage H_∞ robuste dans les cas des systèmes dynamiques incertains (1D discrets, 1D et 2D continu) en se basant sur l'approche des polynômes homogènes. Nous avons dérivé des nouvelles conditions d'analyse de filtre robuste H_∞ qui garantissent un niveau d'atténuation γ de performance H_∞ moins conservative avec la spécification FF et dans l'étape de synthèse, nous avons utilisé des méthodes et des algorithmes mathématiques pour résoudre le problème de non linéarité et de synthétiser les paramètres des filtres H_∞ . Ainsi, tous les résultats obtenus sont donnés sous formes de LMIs strictes et les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux existants dans la littérature. Enfin, nous soulignons que l'utilisation des exemples numériques s'avère intéressante pour démontrer l'efficacité des méthodes proposées. Dans la partie restante de cette thèse, nous procédons à l'étude du problème de commande pour les systèmes dynamiques dans un domaine fréquentiel fini.

Chapitre 5

Commande des systèmes dynamiques dans un domaine fréquentiel fini

5.1 Introduction

Dans la littérature, le contrôle d'un système nécessite souvent la connaissance de l'état complet d'un système alors qu'en pratique la mesure de l'ensemble des variables est difficile. Ces limites proviennent de considérations technologiques, lorsque la précision de la mesure d'un capteur est nécessaire, le prix devient souvent élevé, ou pratiques, sensibilité au bruit, etc... De manière générale, on ne dispose que d'une partie de l'état, que l'on appelle la sortie. On confondra ici sorties mesurées et variables à commander. Il est souvent difficile de commander un système en utilisant seulement des sorties mesurables.

Notre objectif dans ce chapitre est présenté en deux parties : Dans la première partie, nous allons étudier le problème du contrôle d'état H_∞ de système dynamique 1D T-S flou à temps continu. L'idée principale est de concevoir un nouveau contrôle à retour d'état basé sur la structure de compensation distribuée parallèle (PDC), pour traiter les bruits appartenant à des domaines basses, moyennes et hautes fréquences (BF, MF, HF). Dans la deuxième partie, nous considérons le problème du contrôle positif réel à fréquence finie pour le système continu 2D. Plus précisément, il s'agit de chercher une commande telle que le système en boucle fermée soit stable, et sa fonction de transfert soit positive.

Dans la littérature, plusieurs travaux visent l'amélioration de la commande H_∞ des systèmes dynamiques flous via l'utilisation des différentes méthodes. Parmi ces travaux qui s'intéressent au problème de contrôle d'état des systèmes dynamiques flous est traité dans (par exemple, [6, 10–12, 126, 15, 32, 62, 100, 102, 128]).

5.2 Commande H_∞ du système 1D continu flou T-S

Le modèle dynamique flou, proposé par Takagi et Sugeno [146] est décrit par des règles Si-Alors floues, qui représentent localement les relations d'entrée/sortie linéaires d'un système. Le modèle flou T-S en temps continu est de la forme suivante :

Règle du système i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + L_i u(t) + B_i v(t) \\ y(t) &= C_i x(t) + E_i u(t) + D_i v(t)\end{aligned}\quad (5.1)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état ; $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée de contrôle ; $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie contrôlé ; $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ est l'entrée délimitée par l'énergie avec des plages de fréquences finies connues ; A_i, L_i, B_i, C_i, E_i et D_i sont des matrices réelles constantes de dimensions compatibles. Les $\sigma_1(t), \dots, \sigma_p(t)$ sont les variables des prémisses qui peuvent être les fonctions des variables d'état et $T_j^i, j = 1, 2, \dots, p, i = 1, 2, \dots, r$ est l'ensemble flous, avec r est le nombre des règles **Si-Alors**.

Pour simplifier la notation, considérons $\nabla := \{1, 2, \dots, r\}$ et on réécrit le système (5.1) comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(h)x(t) + L(h)u(t) + B(h)v(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) + E(h)u(t) + D(h)v(t)\end{aligned}\quad (5.2)$$

Où

$$A(h) = \sum_{i=1}^r h_i A_i; L(h) = \sum_{i=1}^r h_i L_i; B(h) = \sum_{i=1}^r h_i B_i; C(h) = \sum_{i=1}^r h_i C_i; E(h) = \sum_{i=1}^r h_i E_i; D(h) = \sum_{i=1}^r h_i D_i$$

La structure classique de PDC basée sur le contrôle par rétroaction d'état pour le modèle T-S est considérée dans cette partie, avec la règle d'installation de $i^{\text{ème}}$ est similaire à celle donnée dans (5.1) et est décrite comme suit :

Règle i : Si $\sigma_1(t)$ est T_1^i, \dots et $\sigma_p(t)$ est T_p^i Alors

$$u(t) = K_i x(t)\quad (5.3)$$

Le contrôle flou globale est représenté par :

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j K_j x(t)\quad (5.4)$$

5.2 Commande H_∞ du système 1D continu flou T-S

En combinant (5.2) et (5.4), nous pouvons obtenir le système flou en boucle fermée suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c(h)x(t) + B(h)v(t) \\ y(t) &= C_c(h)x(t) + D(h)v(t)\end{aligned}\quad (5.5)$$

Où

$$A_c(h) = A(h) + L(h)K(h); \quad C_c(h) = C(h) + E(h)K(h) \quad (5.6)$$

Notre objectif est de concevoir un contrôleur par retour d'état (5.4) de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le système flou en boucle fermée (5.5) est asymptotiquement stable.
2. Soit γ un scalaire positif, le système (5.5) possède une performance H_∞ en fréquences finies, si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\int_{\omega \in \Omega} Y^*(\omega)Y(\omega)d\omega \leq \gamma^2 \int_{\omega \in \Omega} V^*(\omega)V(\omega)d\omega \quad (5.7)$$

Où l'ensemble Ω est défini dans la table 1.2.

5.2.1 Analyse de la commande H_∞

Basé sur les lemmes 1.8.1, 1.8.3 et 3.2.1, nous donnons la proposition suivante, présentant des conditions suffisantes pour la résolution de l'analyse du contrôleur PDC, H_∞ satisfaisant la spécification FF dans (5.7).

Proposition 5.2.1 : Soit un scalaire $\gamma > 0$, le système en boucle fermée (5.5) est asymptotiquement stable et satisfait la spécification FF dans (5.7). S'il existe des matrices hermitiennes $P(h) \in \mathbb{H}_n$, $0 < Q = Q^* \in \mathbb{H}_n$, une matrice de Lyapunov, symétrique, définie positive $0 < W(h) = W^T(h) \in \mathbb{H}_n$ et les matrices $F(h) \in \mathbb{H}_n$, $G(h) \in \mathbb{H}_n$ telles que :

$$\Upsilon(h) = \begin{bmatrix} -F(h) - F^T(h) & W(h) + F(h)A(h) - G^T(h) \\ * & \text{sym}[G(h)A_c(h)] \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8)$$

$$\Psi(h) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(h) & \Psi_{12}(h) & F(h)B(h) & 0 \\ * & \Psi_{22}(h) & G(h)B(h) & C_c^T(h) \\ * & * & -\gamma^2 I & D^T(h) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.9)$$

Où

— *Basse fréquence* : $|\omega| \leq \bar{\omega}_l$

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(h) &= -Q - F(h) - F^T(h); \quad \Psi_{12}(h) = P(h) + F(h)A_c(h) - G^T(h); \\ \Psi_{22}(h) &= \bar{\omega}_l^2 Q + \text{sym}[G(h)A_c(h)]\end{aligned}$$

— *Moyenne fréquence* : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(h) &= -Q - F(h) - F^T(h); \quad \Psi_{12}(h) = P(h) + j\bar{\omega}_0 Q + F(h)A_c(h) - G^T(h); \\ \Psi_{22}(h) &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q + \text{sym}[G(h)A_c(h)]\end{aligned}$$

— *Haute fréquence* : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(h) &= Q - F(h) - F^T(h); \quad \Psi_{12}(h) = P(h) + F(h)A_c(\rho(t)) - G^T(h); \\ \Psi_{22}(h) &= -\bar{\omega}_h^2 Q + \text{sym}[G(h)A_c(h)]\end{aligned}$$

Preuve 5.2.1 : Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous allons appliquer le lemme de finsler 1.8.3 : Premièrement, nous avons $\bar{A}(h)$ est stable si et seulement s'il existe $W(h) = W(h)^T > 0$ tels que

$$A_c^T(h)W(h) + W(h)A_c(h) < 0 \quad (5.10)$$

Qui peut être écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_c(h) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W(h) \\ W(h) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c(h) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

Nous définissons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & W(h) \\ W(h) & 0 \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F(h) \\ G(h) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} -I & A_c(h) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} A_c(h) \\ I \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (5.12)$$

D'après lemme de finsler 1.8.3, les équations (5.11) et (5.12) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} 0 & W(h) \\ W(h) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(h) \\ G(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A_c(h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & A_c(h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F(h) \\ G(h) \end{bmatrix}^T < 0 \quad (5.13)$$

Alors, on retrouve l'expression (5.8).

De plus, nous prouvons que les expressions (2.12), (2.13) et (2.14) sont équivalents à l'expression (5.9).

Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} & 0 \\ * & \mathcal{Q}_{22} + C_c^T(h)C_c(h) & C_c^T(h)D(h) \\ * & * & -\gamma^2 I + D^T(h)D(h) \end{bmatrix}; \quad \zeta = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} F(h) \\ G(h) \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} -I & A_c(h) & B(h) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Où

- **Basse fréquence** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_l$

$$\mathcal{Q}_{11} = -Q; \quad \mathcal{Q}_{12} = P(h); \quad \mathcal{Q}_{22} = \bar{\omega}_l^2 Q$$

- **Moyenne fréquence** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\mathcal{Q}_{11} = -Q; \quad \mathcal{Q}_{12} = P(h) + j\bar{\omega}_0 Q; \quad \mathcal{Q}_{22} = -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 Q$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\mathcal{Q}_{11} = Q; \quad \mathcal{Q}_{12} = P(h); \quad \mathcal{Q}_{22} = -\bar{\omega}_h^2 Q$$

Par le lemme du complément de Schur, les expressions (5.14) est équivalent à

$$\mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0 \quad (5.15)$$

D'après la condition (iv) du lemme de finsler, avec

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} A_c(h) & B(h) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

En utilisant la condition (ii) du lemme de finsler, on obtient les expressions (2.12), (2.13) et (2.14).

5.2.2 Conception de la commande H_∞

En se basant sur la proposition 5.2.1, dans la proposition 5.2.2 ci-dessous, nous présentons des conditions suffisantes pour la solvabilité du problème de contrôleur H_∞ à retour d'état avec la spécification FF dans (5.7).

Proposition 5.2.2 : Le système en boucle fermée (5.5) est asymptotiquement stable avec niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ et satisfait la spécification de FF dans (5.7). S'il existe des matrices hermitiennes $\tilde{P}(h) \in \mathbb{H}_n$, $0 < \tilde{Q} = \tilde{Q}^T \in \mathbb{H}_n$, matrice de Lyapunov, symétrique, définies positives $0 < \tilde{W}(h) = \tilde{W}^T(h) \in \mathbb{H}_n$, matrices $R(h)$ $F(h)$ et un scalaire λ donnée, telles que :

$$\tilde{\Upsilon}(h) = \begin{bmatrix} -\bar{F}^T(h) - \bar{F}(h) & \tilde{W}(h) + A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h) - \bar{F}(h) \\ * & \text{sym}[A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)G^T(h)] \end{bmatrix} < 0 \quad (5.16)$$

$$\tilde{\Psi}(h) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11}(h) & \tilde{\Psi}_{12}(h) & B(h) & 0 \\ * & \tilde{\Psi}_{22}(h) & \lambda B(h) & \bar{F}(h)C^T(h) + R(h)E^T(h) \\ * & * & -\gamma^2 I & D^T(h) \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.17)$$

Où

- **Basse fréquence** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_l$

$$\tilde{\Psi}_{11}(h) = -\tilde{Q} - \bar{F}^T(h) - \bar{F}(h); \quad \tilde{\Psi}_{22}(h) = \bar{\omega}_l^2 \tilde{Q} + \text{sym}[A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)];$$

$$\tilde{\Psi}_{12}(h) = \tilde{P}(h) - \bar{F}(h) + A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)$$

- **Moyenne fréquence** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\tilde{\Psi}_{11}(h) = -\tilde{Q} - \bar{F}^T(h) - \bar{F}(h); \quad \tilde{\Psi}_{22}(h) = -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \tilde{Q} + \text{sym}[A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)];$$

$$\tilde{\Psi}_{12}(h) = \tilde{P}(h) + j\bar{\omega}_0 \tilde{Q} - \bar{F}(\rho(t)) + A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\tilde{\Psi}_{11}(h) = \tilde{Q} - \bar{F}^T(h) - \bar{F}(h); \quad \tilde{\Psi}_{22}(h) = -\bar{\omega}_h^2 \tilde{Q} + \text{sym}[A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)];$$

$$\tilde{\Psi}_{12}(h) = \tilde{P}(h) - \bar{F}(h) + A(h)\bar{F}^T(h) + B(h)R^T(h)$$

Les matrices de gain du contrôleur dans (5.4) est données par

$$K(h) = [\bar{F}^{-1}(h)R(h)]^T \quad (5.18)$$

Preuve 5.2.2 : Premièrement, pour la variable matricielle $G(h)$ dans la proposition 5.2.1, nous définissons : $G(h) = \lambda F(h)$, après en remplaçant (5.6) dans (5.8) et (5.9), respectivement. De plus, soient $\bar{F}(h) = F^{-1}(h)$, $R(h) = \bar{F}(h)K^T$, $\tilde{Q} = F^{-1}(h)QF^{-T}(h)$, $\tilde{P}(h) = F^{-1}(h)P(h)F^{-T}(h)$ et $\tilde{W}(h) = F^{-1}(h)W(h)F^{-T}(h)$. Respectivement, pré- et post-multiplication (5.8) par des matrices non singulières $\hat{\Xi} = \text{diag}\{F^{-1}(h), F^{-1}(h)\}$ et $\hat{\Xi}^T$, nous obtenons (5.8) est équivalent à (5.9). Enfin, respectivement, pré- et post-multiplication

5.2 Commande H_∞ du système 1D continu flou T-S

(5.9) par des matrices non singulières $\Xi = \text{diag}\{F^{-1}(h), F^{-1}(h), I, I\}$ et Ξ^T , nous obtenons que (5.9) est équivalent à (5.17).

Un théorème important qui peut garantir la stabilité asymptotique et les performances H_∞ de la stratégie de commande PDC floue par spécification FF dans (5.7) va être proposé.

Théorème 5.2.1 : *Le système en boucle fermée (5.5) est asymptotiquement stable avec le niveau d'atténuation $\gamma > 0$ de performance H_∞ et satisfait la spécification de FF dans (3.13). S'il existe des matrices hermitiennes $P_i \in \mathbb{H}_n$, $0 < Q = Q^T \in \mathbb{H}_n$, matrice de Lyapunov, symétrique, définies positives $0 < W_i = W_i^T \in \mathbb{H}_n$, les matrices F_i , R_i et un scalaire λ donnée, telles que la condition suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{ii} < 0; \quad \tilde{\Upsilon}_{ii} < 0; \quad 1 \leq i \leq r \\ \frac{1}{r-1} \tilde{\Psi}_{ii} + \frac{1}{2} [\tilde{\Psi}_{ij} + \tilde{\Psi}_{ji}] < 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq r \\ \frac{1}{r-1} \tilde{\Upsilon}_{ii} + \frac{1}{2} [\tilde{\Upsilon}_{ij} + \tilde{\Upsilon}_{ji}] < 0; \quad 1 \leq i \neq j \leq r \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\tilde{\Psi}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11ij} & \tilde{\Psi}_{12ij} & B_i & 0 \\ * & \tilde{\Psi}_{22ij} & B_i & \bar{F}_j C_i^T + G_j E_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Upsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\bar{F}_j^T - \bar{F}_j & W_i + A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T - \bar{F}_j \\ * & \text{sym}[A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T] \end{bmatrix}$$

Où

- **Basse fréquence** : $|\omega| \leq \bar{\omega}_l$

$$\tilde{\Psi}_{11ij} = -\tilde{Q} - \bar{F}_j^T - \bar{F}_j; \quad \tilde{\Psi}_{12ij} = \tilde{P}_i - \bar{F}_j + A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T; \quad \tilde{\Psi}_{22ij} = \bar{\omega}_l^2 \tilde{Q} + \text{sym}[A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T]$$

- **Moyenne fréquence** : $\bar{\omega}_1 \leq \omega \leq \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}_0 = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{11ij} &= -\tilde{Q} - \bar{F}_j^T - \bar{F}_j; \quad \tilde{\Psi}_{12ij} = \tilde{P}_i + j\bar{\omega}_0 \tilde{Q} - \bar{F}_j + A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T; \\ \tilde{\Psi}_{22ij} &= -\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \tilde{Q} + \text{sym}[A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T] \end{aligned}$$

- **Haute fréquence** : $|\omega| \geq \bar{\omega}_h$

$$\tilde{\Psi}_{11ij} = \tilde{Q} - \bar{F}_j^T - \bar{F}_j; \quad \tilde{\Psi}_{12ij} = \tilde{P}_i - \bar{F}_j + A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T; \quad \tilde{\Psi}_{22ij} = -\bar{\omega}_h^2 \tilde{Q} + \text{sym}[A_i \bar{F}_j^T + B_i R_j^T]$$

Les matrices de gain du contrôleur dans (5.4) est donnée par

$$K_j = (\bar{F}_j^{-1} R_j)^T, \quad 1 \leq j \leq r \quad (5.20)$$

Preuve 5.2.3 : En appliquant le lemme 1.8.4, on peut dériver le résultat correspondant.

Remarque 5.2.1 Dans le théorème 5.2.1, ω_l , ω_1 , ω_2 et ω_h sont des limites de fréquence qui sont données à l'avance. LMI dans (5.19) est donc l'optimisation ci-dessus le problème est convexe et peut être facilement résolu par Yalmip [111] et SeDuMi [139] dans MATLAB 7.6.

Remarque 5.2.2 Si nous prenons $Q = 0$, nous pouvons utiliser le théorème 5.2.1 pour résoudre le problème de commande H_∞ dans tout le domaine fréquentiel du système à temps continu flou T-S.

Remarque 5.2.3 Les scalaires λ doivent être constants, pour que le le théorème 5.2.1 soit linéaire dans les variables. Ceci permet d'obtenir une optimisation convexe de telle sorte que les solutions puissent être résolues.

5.2.3 Exemple de simulation : Pendule inversé

Dans cette section, nous utilisons un exemple pour montrer l'efficacité et le mérite de notre approche.

Nous considérons le problème de la commande d'un pendule inversé présenté sur la figure 5.1. Les équations [47, 110, 151] de mouvement pour le pendule sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 0.1v \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - \frac{amlx_2^2 \sin(2x_1)}{2} - a \cos(x_1)u}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(x_1)} + 0.1v \\ y &= x_1 + x_2 + 0.1u \end{aligned} \quad (5.21)$$

Où x_1 désigne l'angle du pendule par rapport à la verticale, x_2 est la vitesse angulaire, u est la force appliquée au chariot, v est la variable de la perturbation externe, m est la masse du pendule, M est la masse du chariot, $2l$ est la longueur du pendule et $g = 9.8m/s^2$ est la constante de gravité, $a = \frac{1}{m+M}$. Nous choisissons $m = 2$ Kg, $M = 8$ Kg $2l = 1$ m dans la simulation.

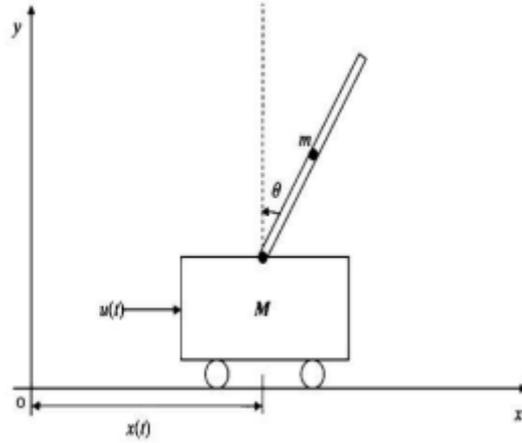


FIGURE 5.1 Système de pendule inversé.

Le modèle flou suivant est utilisé pour concevoir le contrôleur flou de retour d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i [A_i x(t) + L_i u(t) + B_i v(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i [C_i x(t) + E_i u(t) + D_i v(t)] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 17.2941 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 12.6305 & 0 \end{bmatrix}; L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \end{bmatrix}; \\ L_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \end{bmatrix}; B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}; E_1 = E_2 = 0.1; D_1 = D_2 = 0; C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance sont :

$$T_1(x_1) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp(-7(x_1 - \frac{\pi}{4}))} \right\} \left\{ \frac{1}{1 + \exp(-7(x_1 + \frac{\pi}{4}))} \right\}; \quad T_2(x_1) = 1 - T_1(x_1) \quad (5.23)$$

Premièrement, disons si les perturbations sont dans des domaines à fréquences entières (EF) et moyenne fréquence (MF), par exemple,

$$v(t) = \begin{cases} 2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 2 & 5 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{autres} \end{cases} \quad (5.24)$$

Puisque la plage de fréquence des perturbations peut être considérée comme appartenant à la plage de moyenne fréquence (MF) $\nu(t) \in [1, 5]$.

Deuxièmement, supposons que les perturbations sont dans le domaine des basses fréquences $\nu(t) = 0.1 \sin(0.7t)$ c'est à dire., $|\omega| \leq 0.7$ rad/s pour $\nu(t)$. Enfin, en supposant la fréquence du bruit $\nu(t)$ est plus élevée que 12 Hz c'est à dire, $|\omega| \geq 6$ rad/s pour $\nu(t)$.

Pour montrer l'avantage de notre approche proposée dans cette partie, nous fournissons dans les tables 5.2 et 5.1 le niveau d'atténuation de performance H_∞ calculés par les approches FF et EF proposées dans cette partie. Puis nous comparons nos résultats avec ce qui est proposé dans [151]. nous pouvons voir que le théorème 5.2.1 est moins conservatifs que les conditions obtenues par [151].

Plages des fréquences	Les Méthodes	γ_{min}
BF ($ \omega \leq 0.7$)	Théorème 2 [151]	1.3598
BF ($ \omega \leq 0.7$)	Théorème 5.2.1	0.2507
MF ($1 \leq \omega \leq 5$)	Corollaire 1 [151]	1.3010
MF ($1 \leq \omega \leq 5$)	Théorème 5.2.1	0.8355
HF ($ \omega \geq 6$)	Corollaire 2 [151]	—
HF ($ \omega \geq 6$)	Théorème 5.2.1	0.5702

TABLE 5.1 Comparaison des performances H_∞ pour différentes domaines des fréquences finies

Domaines des fréquences	Les méthodes	γ_{min}
EF ($0 \leq \omega \leq \infty$)	[151]	Infaisable
EF ($0 \leq \omega \leq \infty$)	Théorème 5.2.1 (avec $Q = 0$)	1.1789

TABLE 5.2 Comparaison des valeurs minimales des performances H_∞ pour un domaine $0 \leq \omega \leq \infty$

En résolvant LMI (5.19), les résultats de simulation dans les différents cas s'illustre comme suit :

- Commençons par un domaine entier de fréquences (EF) ($0 \leq \omega \leq \infty$) et $\lambda = 0.9172$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ est $\gamma = 1.1789$ et les gains de commande H_∞ correspondant sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 229.3090 & 51.4505 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 411.9556 & 118.2251 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

- Maintenant, quand un domaine de basses de fréquences (BF) ($|\omega| \leq 0.7$) et $\lambda = 0.0502$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ est $\gamma = 0.2507$ et les gains de

commande H_∞ correspondant sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 168.2205 & 22.9439 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 353.5002 & 115.2592 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

— Ensuite, pour un domaine de moyennes fréquences (MF) ($1 \leq \omega \leq 5$) et $\lambda_1 = 0.5025$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ est $\gamma = 0.8355$ et les gains de commande H_∞ correspondant sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 186.8988 & 36.1978 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 378.9459 & 109.7698 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

— Finalement, quand un domaine de hautes fréquences (HF) ($|\omega| \geq 6$) et $\lambda = 0.2478$, le niveau d'atténuation de performance H_∞ est $\gamma = 0.5702$ et les gains de commande H_∞ correspondant sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 203.4092 & 43.1392 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} 356.0428 & 101.8833 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Ici, nous définissons les conditions initiales comme suit $x(0) = [0.5 \ -0.2]^T$.

Pour un domaine ($0 \leq |\omega| \leq +\infty$), les figures 5.2 et 5.3 représentent respectivement l'évolution des l'états $x(t)$ les estimations $u(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps. Nous pouvons constater que les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ convergent vers zéro dans un temps fini.

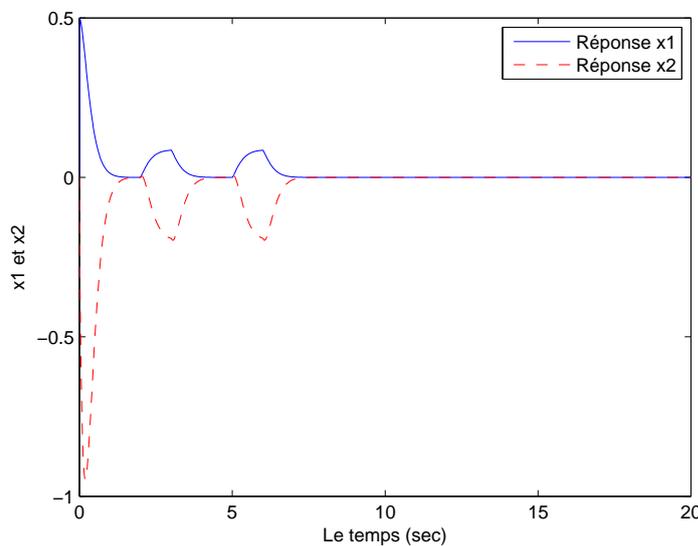


FIGURE 5.2 Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($0 \leq |\omega| \leq +\infty$)

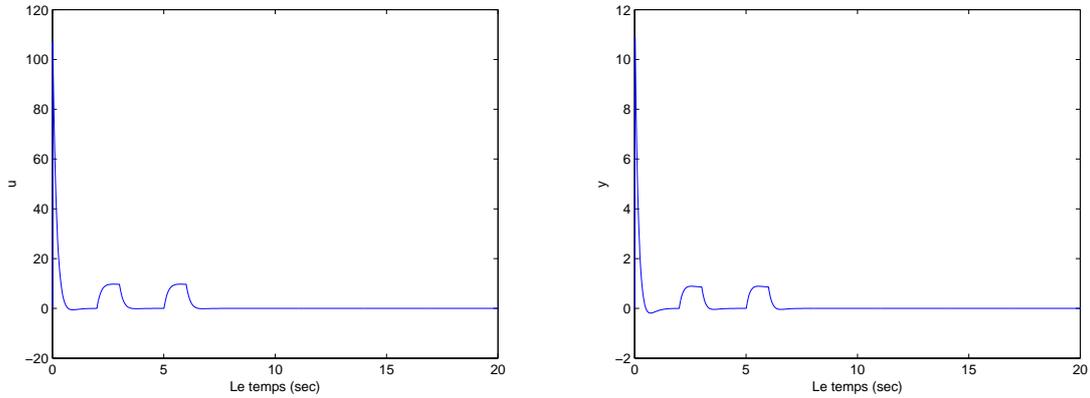


FIGURE 5.3 Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($0 \leq |\omega| \leq +\infty$)

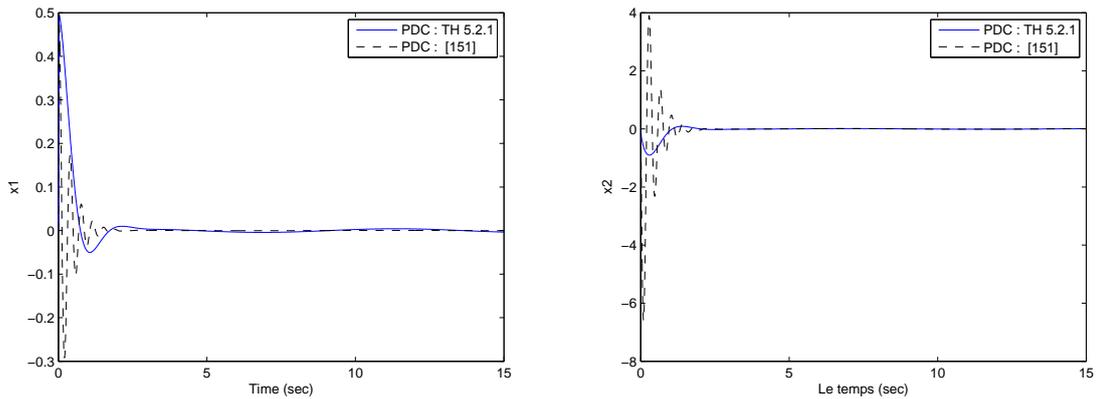


FIGURE 5.4 Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($|\omega| \leq 0.7$).

D'autre part, les réponses de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$ et $u(t)$ pour un domaine ($|\omega| \leq 0.7$) comparé aux différentes approches sont représentées dans les figures 5.4 et 5.5 qui convergent vers 0. Lorsque les lignes continues sont données par le théorème 5.2.1, et les lignes pointillés sont obtenues par [151]. Ensuite, nous pouvons conclure que notre approche fournit des meilleurs résultats par rapport [151].

5.2 Commande H_∞ du système 1D continu flou T-S

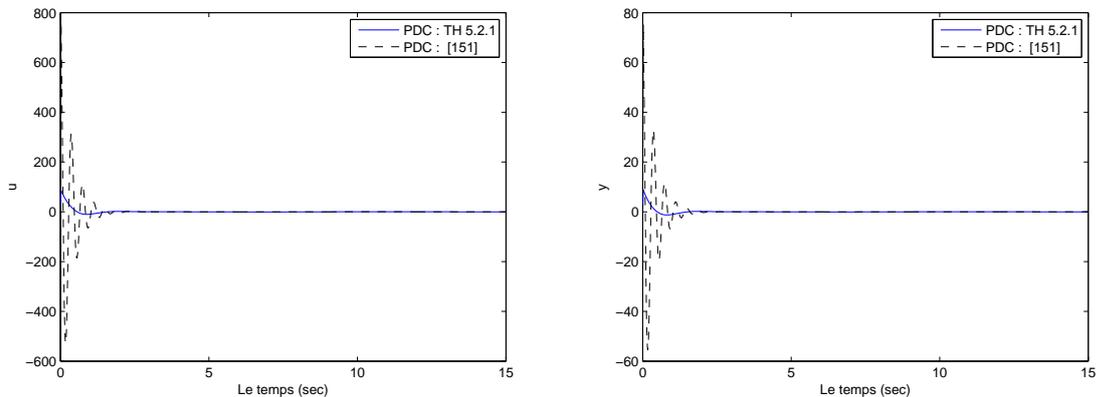


FIGURE 5.5 Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($|\omega| \leq 0.7$).

Finalement, nous présentons les états $x(t)$ à travers la figure 5.6 et les estimations $u(t)$ et $y(t)$ dans la figure 5.7 comparé aux différentes méthodes à MF ($1 \leq |\omega| \leq 5$). Ces figures confirment l'efficacité de notre méthode, où les lignes pleines sont obtenues par le théorème 5.2.1, tandis que les lignes pointillés sont données dans [151]. Alors, les valeurs du pic est minimale par rapport à [151] et converge vers 0.

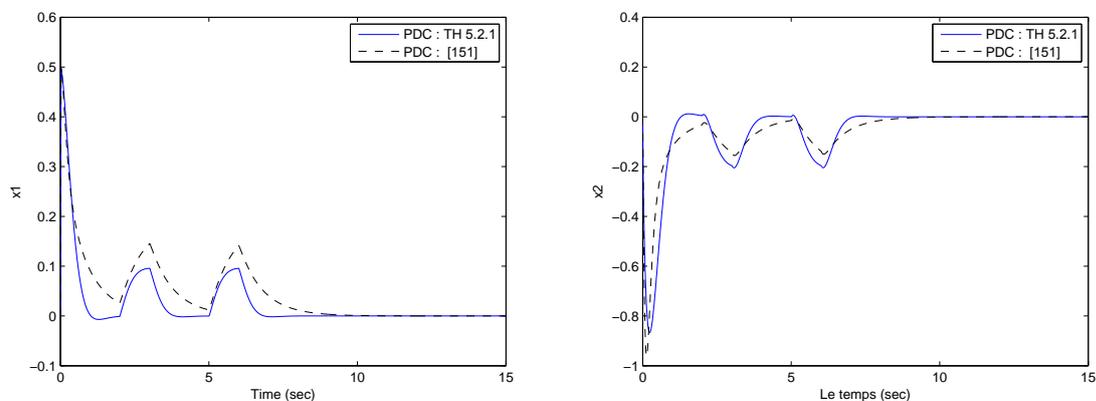
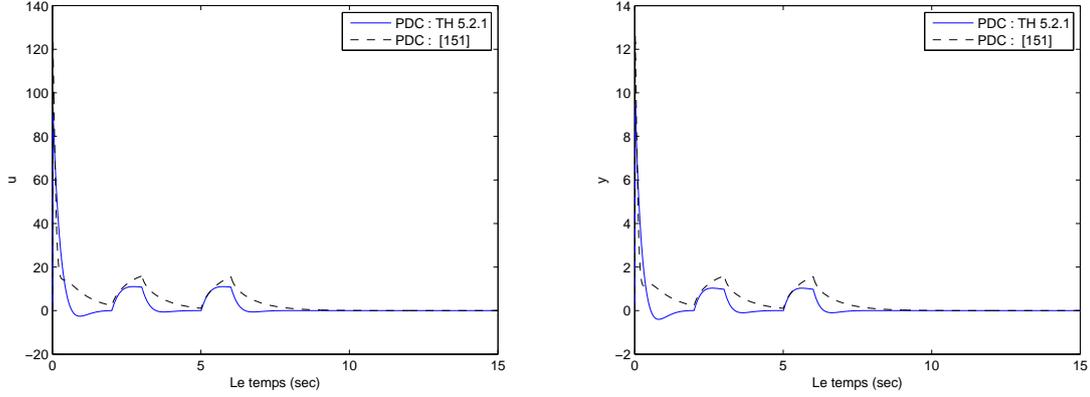


FIGURE 5.6 Réponses des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour un domaine ($1 \leq |\omega| \leq 5$).


 FIGURE 5.7 Estimations d'entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$ contrôlées pour un domaine ($1 \leq |\omega| \leq 5$).

5.3 Contrôle réel positif du système 2D continu

Dans cette section, considérons le système 2D décrit par le modèle Roesser en boucle ouverte avec une entrée de contrôle décrit par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Lu(t_1, t_2) + Bw(t_1, t_2) \\ z(t_1, t_2) &= C \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Eu(t_1, t_2) + Dw(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Où $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_h}$, $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont respectivement les vecteurs d'état horizontal et vertical du système, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^l$ est l'entrée de contrôle, $z(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p$ la sortie contrôlée, A , L , C , B , D et E sont des matrices constantes du système ayant des dimensions compatibles, $w(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée des perturbations exogènes avec une énergie bornée et une fréquence horizontale u_h et une fréquence verticale u_v de $u(i, j)$ satisfait (w_h, w_v) où

$$\Delta = \{(w_h, w_v); w_{h1} \leq w_h \leq w_{h2}; w_{v1} \leq w_v \leq w_{v2}\} \quad (5.30)$$

avec w_{h1} , w_{h2} , w_{v1} et $w_{v2} \in [0, +\infty[$.

Nous proposons le contrôle :

$$u(t_1, t_2) = K \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Où K est la matrice à déterminer.

5.3 Contrôle réel positif du système 2D continu

En connectant le contrôle (5.31) au système en boucle ouverte (5.29), le système en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_2} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= A_c \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Bw(t_1, t_2) \\ z(t_1, t_2) &= C_c \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Dw(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Où

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B \\ \hline C_c & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + LK & B \\ \hline C + EK & D \end{array} \right] \quad (5.33)$$

Objectifs : Notre objectif est de concevoir un contrôle de retour d'état dans (5.31) pour le système (5.29) telles que les deux conditions soient satisfaites :

- Le système en boucle fermée (5.32) est asymptotiquement stable.
- L'indice de fréquence finie suivante est décrit par :

$$G(w_h, w_v) + G^T(w_h, w_v) > 0 \quad \forall (w_h, w_v) \in \Delta \quad (5.34)$$

Où

$$G(w_h, w_v) = C_c[\Omega - A_c]^{-1}B + D; \quad \Omega = \text{diag}\{jw_h I_{n_h}, jw_v I_{n_v}\}; \quad \forall (w_h, w_v) \in \Delta \quad (5.35)$$

5.3.1 Résultats principaux : contrôle réel positif

Nous utilisons le lemme 1.7.2 et l'équation dans (1.37), le résultat est donné dans le lemme suivant :

Lemme 5.3.1 [61] : *Le système en boucle fermée (5.32) est asymptotiquement stable et satisfait la spécification FF dans (5.34). S'il existe des matrices hermitiennes $P = \text{diag}\{P_h, P_v\} \in \mathbb{H}_n$, $0 < Q = \text{diag}\{Q_h, Q_v\} \in \mathbb{H}_n$ et matrice de Lyapunov, symétrique, définie positive $0 < \bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_h, \bar{P}_v\} \in \mathbb{H}_n$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} A_c & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & I \end{bmatrix}^T < 0 \quad (5.36)$$

et les énoncés suivants sont équivalents

1.

$$(C_c[\Omega - A_c]^{-1}B + D)^T + (C_c[\Omega - A_c]^{-1}B + D) > 0 \quad (5.37)$$

2.

$$\begin{bmatrix} A_c & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & P + \Lambda Q \\ P - \Lambda Q & WQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -C_c^T \\ -C_c & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.38)$$

3.

$$\begin{bmatrix} A_c & I \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & P + \Lambda Q \\ P - \Lambda Q & WQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & I \\ C_c & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & -B \\ -B^T & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.39)$$

avec Ω est défini dans (5.35) et Λ, W sont définis dans (1.55).

Dans le théorème suivant, nous présentons des conditions suffisantes pour la résolution du problème de contrôle réel positif via le contrôleur de retour d'état.

Théorème 5.3.1 [61] : *Le système en boucle fermée (5.32) est asymptotiquement stable et satisfait la spécification FF dans (5.34). S'il existe des matrices hermitiennes $P = \text{diag}\{P_h, P_v\} \in \mathbb{H}_n$, $0 < Q = \text{diag}\{Q_h, Q_v\} \in \mathbb{H}_n$, une matrice de Lyapunov, symétrique, définie positive $0 < \bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_h, \bar{P}_v\} \in \mathbb{H}_n$ et matrice $F = \text{diag}\{F_h, F_v\} \in \mathbb{H}_n$ telles que :*

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Q - F - F^T & P + \Lambda Q - F + F^T A_c^T & F^T C_c^T \\ * & WQ + A_c F + F^T A_c^T & -B + F^T C_c^T \\ * & * & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.40)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -F - F^T & \bar{P} - F + F^T A_c^T \\ * & A_c F + F^T A_c^T \end{bmatrix} < 0 \quad (5.41)$$

Où Λ et W sont définis dans (1.56).

Preuve 5.3.1 : *Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous utilisons le lemme de projection. Pour l'appliquer, premièrement, nous montrons que l'équation (5.39) est équivalente à (5.40), nous choisissons*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -Q & P + \Lambda Q & 0 \\ P & WQ & -B \\ 0 & -B & -(D + D^T) \end{bmatrix}; \mathcal{U} = \begin{bmatrix} -I \\ A_c \\ C_c \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} F & F & 0 \end{bmatrix}; \Gamma = I; \Gamma^\perp = 0 \quad (5.42)$$

Le complément orthogonal de \mathcal{U} est : $\mathcal{U}^\perp = \begin{bmatrix} A_c & I & 0 \\ C_c & 0 & I \end{bmatrix}$.

La condition $\mathcal{U}^\perp \Sigma \mathcal{U}^{\perp T} < 0$ de lemme de projection coïncide avec la condition (5.39). Par conséquent, (5.39) est équivalent à (5.40).

5.3 Contrôle réel positif du système 2D continu

D'autre part, l'équivalence entre les équations (5.36) et (5.41) peut être trouvée de manière similaire en réintroduisant :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & \bar{P} \\ \bar{P} & 0 \end{bmatrix}; \mathcal{U} = \begin{bmatrix} -I \\ A_c \end{bmatrix}; \mathcal{U}^\perp = \begin{bmatrix} A_c \\ I \end{bmatrix}; \Gamma = I; \Gamma^\perp = 0; Z = \begin{bmatrix} F & F \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Pour faciliter le calcul du gain de d'état K , nous considérons que les matrices suivantes sont structurées par les blocs suivants :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

En utilisant le théorème 5.3.1, le résultat garantissant l'existence d'un contrôleur de retour d'état est donné comme suit :

A. Fréquence finie (FF)

Théorème 5.3.2 [61] : *Le système en boucle fermée (5.32) est asymptotiquement stable et satisfait la spécification FF dans (5.34). S'il existe des matrices hermitiennes $P = \text{diag}\{P_h, P_v\} \in \mathbb{H}_n$, $0 < Q = \text{diag}\{Q_h, Q_v\} \in \mathbb{H}_n$, une matrice de Lyapunov, symétrique, définie positive $0 < \bar{P} = \text{diag}\{\bar{P}_h, \bar{P}_v\} \in \mathbb{H}_n$ et matrices $Z_1, Z_2, F = \text{diag}\{F_h, F_v\}$ telles que les LMIs suivante sont vérifiés :*

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & 0 & \bar{\Phi}_{13} & F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T & F_h^T C_1^T + Z_1^T E^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & \bar{\Phi}_{24} & F_v^T C_2^T + Z_2^T E^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & A_{12} F_v + L_1 Z_2 + F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T & -B_1 + F_h^T C_1^T + Z_1^T E^T \\ * & * & * & -w_{v_1} w_{v_2} Q_v + \text{sym}(A_{22} F_v + L_2 Z_2) & -B_2 + F_v^T C_2^T + Z_2^T E^T \\ * & * & * & * & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.45)$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} -F_h - F_h^T & 0 & \bar{\Psi}_{13} & F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T \\ * & -F_v - F_v^T & \bar{\Psi}_{23} & P_{sv} - F_v + F_v^T A_{22}^T + Z_2^T L_2^T \\ * & * & \bar{\Psi}_{33} & A_{12} F_v + L_1 Z_2 + F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T \\ * & * & * & \text{sym}(A_{22} F_v + L_2 Z_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.46)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -Q_h - F_h - F_h^T; \quad \bar{\Phi}_{13} = P_h + jw_{h_c} Q_h - F_h + F_h^T A_{11}^T + Z_1^T L_1^T; \\ \bar{\Phi}_{22} &= -Q_v - F_v - F_v^T; \quad \bar{\Phi}_{23} = F_v^T A_{12}^T + Z_2^T L_1^T; \quad \bar{\Psi}_{33} = \text{sym}(A_{11} F_h + L_1 Z_1); \\ \bar{\Phi}_{24} &= P_v + jw_{v_c} Q_v - F_v + F_v^T A_{22}^T + Z_2^T L_2^T; \quad \bar{\Phi}_{33} = -w_{h_1} w_{h_2} Q_h + \text{sym}(A_{11} F_h + L_1 Z_1); \\ \bar{\Psi}_{13} &= P_{sh} - F_h + F_h^T A_{11}^T + Z_1^T L_1^T; \quad \bar{\Psi}_{23} = F_v^T A_{12}^T + Z_2^T L_1^T; \quad w_{h_c} = \frac{w_{h_1} + w_{h_2}}{2}; \quad w_{v_c} = \frac{w_{v_1} + w_{v_2}}{2} \end{aligned}$$

Les paramètres des gains à retour d'état est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} Z_1 F_h^{-1} & Z_2 F_v^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

B. Fréquence entière (EF)

Dans cette partie, nous discutons le cas à EF. Basé sur le théorème 5.3.2, pour ce cas, Q est défini comme $Q = 0$ alors que P est défini pour satisfaire $P = \text{diag}\{P_h, P_v\} > 0$ de telle sorte que la stabilité est également impliquée par l'inégalité dans (5.40). En résumé, la proposition 5.3.1 est réduite au résultat suivant pour un problème de contrôle réel positif pour le système continu 2D via un contrôleur de retour d'état décrit par le modèle de Roesser.

Proposition 5.3.1 [61] : *Le système en boucle fermée (5.32) est asymptotiquement stable. S'il existe une matrice de Lyapunov, symétrique, définie positive $0 < P = \text{diag}\{P_h, P_v\} \in \mathbb{H}_n$ et les matrices $Z_1, Z_2, F = \text{diag}\{F_h, F_v\}$ satisfait le LMI (5.48), telles que la condition suivante est vérifiée :*

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & 0 & \bar{\Phi}_{13} & F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T & F_h^T C_1^T + Z_1^T E^T \\ * & \bar{\Phi}_{22} & \bar{\Phi}_{23} & P_v - F_v + F_v^T A_{22}^T + Z_2^T L_2^T & F_v^T C_2^T + Z_2^T E^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & A_{12} F_v + L_1 Z_2 + F_h^T A_{21}^T + Z_1^T L_2^T & -B_1 + F_h^T C_1^T + Z_1^T E^T \\ * & * & * & \text{sym}(A_{22} F_v + L_2 Z_2) & -B_2 + F_v^T C_2^T + Z_2^T E^T \\ * & * & * & * & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.48)$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} &= -F_h - F_h^T; \quad \bar{\Phi}_{22} = -F_v - F_v^T; \quad \bar{\Phi}_{23} = F_v^T A_{12}^T + Z_2^T L_1^T; \\ \bar{\Phi}_{13} &= P_h - F_h + F_h^T A_{11}^T + Z_1^T L_1^T; \quad \bar{\Phi}_{33} = \text{sym}(A_{11} F_h + L_1 Z_1) \end{aligned}$$

Les matrices des gains à retour d'état est donnée dans (5.47).

5.3.2 Exemple de simulation

Dans cette section, nous présentons un exemple pour montrer l'efficacité de l'approche proposée. Considérons le système (5.29) avec les paramètres suivants [154] :

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ -1 & 0.5 & -0.1 & 0.3 \\ \hline 0 & -0.5 & 0.3 & -1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 & -0.8 \end{array} \right]; \quad L = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & -0.3 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & -0.8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \\ -0.8 \end{bmatrix}; \\ C &= \left[\begin{array}{cc|c} 0.6 & 0.2 & 0 \\ & & -0.3 \end{array} \right]; \quad E = \begin{bmatrix} 0.8 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = 1.8 \end{aligned} \quad (5.49)$$

5.3 Contrôle réel positif du système 2D continu

Supposons que la région à FF soit $1 \leq w_h \leq 4$, $1 \leq w_v \leq 4$.

Les contrôleurs de retour d'état obtenus par le **théorème 5.3.2 [61]** et la **proposition 5.3.1 [61]** sont :

$$K_{FF} = \left[\begin{array}{cc|cc} -3.1745 & -2.0263 & 0.0856 & -0.2873 \\ -2.8256 & -0.2603 & -0.7876 & 0.3035 \end{array} \right] \quad (5.50)$$

$$K_{EFa} = \left[\begin{array}{cc|cc} -4.2500 & -2.3725 & 0.0145 & -0.4408 \\ -3.0826 & -0.3251 & -0.4807 & 0.0793 \end{array} \right] \quad (5.51)$$

Nous pouvons voir que les contrôleurs de retour d'état ci-dessus sont meilleurs que le contrôleur de retour d'état suivant obtenu par le théorème 2 dans [154].

$$K_{EFb} = \left[\begin{array}{cc|cc} -13.1176 & 1.4601 & -0.8423 & 1.9756 \\ -7.2462 & 3.0437 & -1.0484 & 1.7918 \end{array} \right] \quad (5.52)$$

Pour démontrer l'efficacité du contrôleurs conçus, nous avons tracé les valeurs singulières minimales obtenues par les fonctions de transfert en boucle fermée sur les figures 5.8, 5.9 et 5.10. Nous pouvons montrer que les systèmes en boucle fermée résultants ont une propriété de positivité dans les régions de fréquences correspondantes. Ces figures démontrent clairement l'efficacité de la méthode proposée.

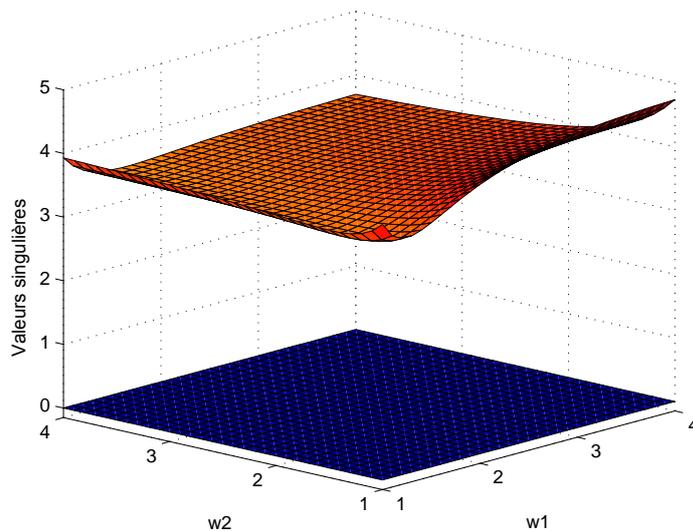


FIGURE 5.8 $\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.50) pour K_{FF}

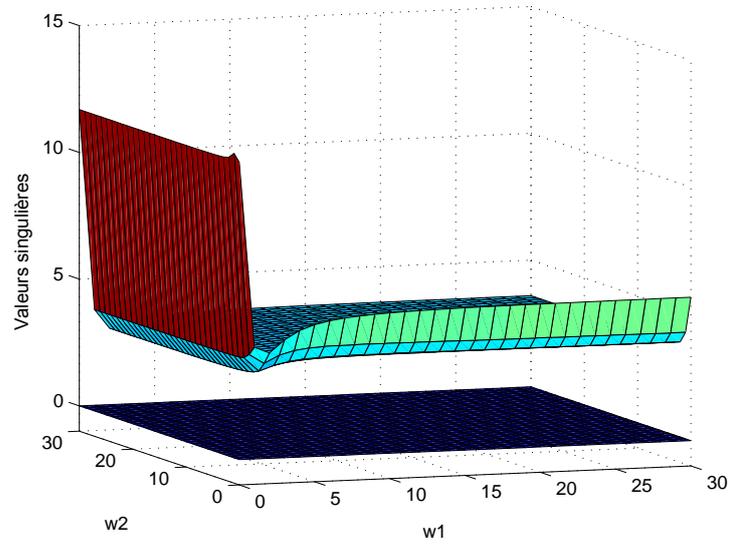


FIGURE 5.9 $\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.51) pour K_{EFa}

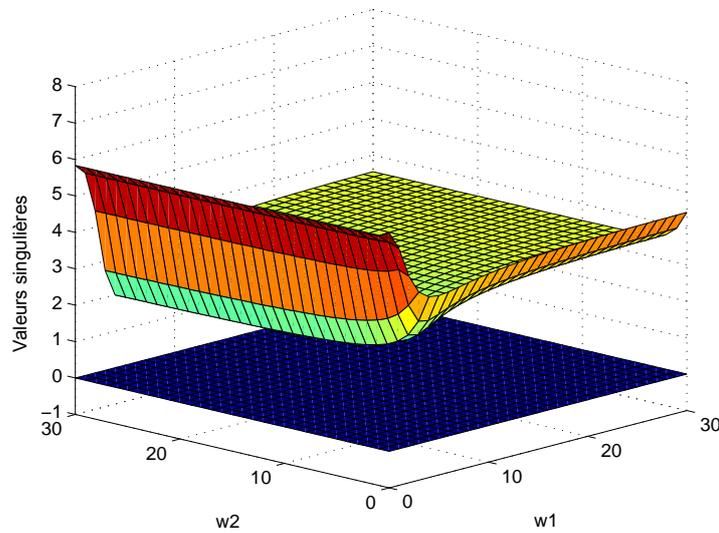


FIGURE 5.10 $\lambda_{\min}(\text{sym}[G(w_h, w_v)])$ avec un contrôleur de retour d'état dans (5.52) pour K_{EFb}

Dans la table 5.3, nous donnons les valeurs singulières minimales ($\lambda_{\min}(\text{sym}(G(w_h, w_v)))$) obtenues par des fonctions de transfert en boucle fermée pour différentes méthodes. Nos résultats qui concerne le domaine de fréquences finies (FF) sont plus excellents.

5.4 Conclusion

Domaines des fréquences	Méthodes	$\lambda_{min}(sym(G(w_h, w_v)))$
EF	Théorème 2 [154]	2.0004
EF	Proposition 2.3.2 [61]	3.0183
FF $[1, 4] \times [1, 4]$	Théorème 2.3.1 [61]	3.5289

TABLE 5.3 $\lambda_{min}(sym[G(w_h, w_v)])$ obtenu par différentes méthodes

5.4 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié le problème de commande H_∞ pour le système dynamique 1D flou, en utilisant la méthode de Lyapunov, lemme gKYP, et des matrices additionnelles pour dériver des nouvelles conditions qui assurent un niveau d'atténuation γ de performance H_∞ moins conservatifs.

la dernière partie de ce chapitre, nous avons traité le problème de contrôle réel positif pour le système continu 2D décrits par modèle Roesser avec des spécifications dans un domaine fréquentiel fini. A l'aide du lemme gKYP, une condition d'existence a été développée pour la paramétrisation du contrôleur à retour d'état garantissant la stabilité asymptotique et la positivité à fréquence finie du système en boucle fermée. Le résultat est caractérisé par une positivité à fréquence finie sur toute région des fréquences rectangulaire dans des cas particuliers.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié les performances des systèmes dynamiques dans les domaines fréquentiels limités par l'approche H_∞ . Plusieurs cas ont été traités, selon la nature du temps (continu, discret), les dimensions de propagation d'information (une, deux dimensions), le type des systèmes choisis (linéaires, non linéaires) ou les problèmes sélectionnés (réduction de modèle, filtrage, commande).

Dans toutes les contributions et pour résoudre les problèmes d'analyse et de synthèse, nous avons suivi une démarche en quatre étapes : formulation de problème, analyse, conception et simulation des résultats via des exemples numériques académiques et pratiques. Dans l'étape de la formulation du problème, nous définissons le système à étudier, les outils et les conditions initiales pour bien poser le problème à traiter. Dans l'étape d'analyse, nous analysons le comportement des systèmes erreurs (système + filtre) en termes de l'astabilité, de commande, de précision et d'autres performances. Dans l'étape de synthèse, on cherche à concevoir des systèmes de commande, des filtres, des modèles de réduction,... Dans la dernière étapes (simulation), nous testons la faisabilité et l'applicabilité des conditions élaborées dans les étapes d'analyse et de synthèse via des exemples numériques physiques ou académiques.

Dans ce contexte, nous avons traité dans le deuxième chapitre le problème de réduction de modèle H_∞ . Dans lequel, nous avons proposé des modèles d'ordre réduit permettant de bien d'approcher des systèmes complexes soumis à des entrées exogènes appartenant à des domaines fréquentiels limités. Des conditions d'analyse et de synthèse des paramètres du modèle d'ordre réduit sont formulées en termes des LMIs.

Dans les troisième et quatrième chapitres, nous avons étudié le problème de filtrage H_∞ des systèmes non linéaires flous de type T-S et des systèmes linéaires incertains (1D discret, 1D continu et 2D continu). Nous avons considéré les fréquences des bruits extérieurs appartenant à des domaines fréquentiels connus et limités pour dériver des contraintes suffisantes assurant un certain niveau de performance H_∞ . Nous avons obtenu les objectifs

visés via utilisation de fonction de Lyapunov dépendante des paramètres, lemmes de Finsler, projection et version améliorée du lemme gKYP.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié dans la première partie le problème du contrôle H_∞ du système unidimensionnel (1D) T-S flou à temps continu soumis à des perturbations dont ses fréquences sont connues. Nous avons proposé une nouvelle loi de commande H_∞ par retour d'état de type PDC (Parallel Direct Compensator) pour traiter les bruits avec des domaines de fréquences pré-définis (basse, moyenne et haute fréquences (BF, MF, HF)). Dans la deuxième partie, nous avons traité le problème de la synthèse des lois de commande positifs à fréquence finie. Les Systèmes 2D continus positifs dans des domaines fréquentiels finis des perturbations. C-à-d, chercher une commande telle que le système en boucle fermée est stable, et sa fonction de transfert est positive.

Dans tous les chapitres, nous avons formulé la synthèse en des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMIs, adaptés aux domaines de fréquences finies différentes (BF/MF/HF) et qu'on peut résoudre facilement en utilisant des solveurs numériques (LMI Toolbox, Sedumi, Yalmip ...).

les paramètres des filtres et de contrôles sont présentes et résolues par un algorithme et de solveurs numériques.

Perspectives :

La recherche réalisée dans ce travail indique que certains thèmes d'intérêt peuvent être explorés dans de nouvelles directions. Parmi ces thèmes, on peut souligner ceux qui nous paraissent être les plus prometteurs :

- L'étude des observateurs de performance H_∞ à fréquence finie.
- L'extension des approches proposées aux systèmes dynamiques 2D non linéaires à temps discret dans un domaine fréquentiel fini.
- L'extension des résultats obtenus aux systèmes stochastiques et répétitifs dans un domaine fréquentiel fini.
- Réduction du modèle à fréquence finie pour systèmes dynamiques avec retard

Bibliographie

- [1] Alfid, M. (2009). *Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires bidimensionnels*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès, Moroc.
- [2] Alfid, M., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2010, June). *Stabilization and positiveness of 2-D systems by local state-feedback : An LMI approach*. In Control & Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on (pp. 663-668). IEEE.
- [3] Alfid, M., & Hmamed, A. (2007). *Control for stability and positivity of 2-D linear discrete-time systems*. WSEAS Transactions on Systems and Control”, is, 12, 546-556.
- [4] Antoulas, A. C. (2005). *Approximation of large-scale dynamical systems*. (Vol. 6). Siam.
- [5] Astolfi, A. (2010). *Model reduction by moment matching for linear and nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(10), 2321-2336.
- [6] Aitouche, A., & Bouamama, B. O. (2005). *Fault tolerant control with respect to actuator failures Application to steam generator process*. In Computer Aided Chemical Engineering (Vol. 20, pp. 1471-1476). Elsevier.
- [7] Ball, J. A., & Helton, J. W. (1989). *H_∞ optimal control for nonlinear plants : connection with differential games*. In Proc. 28th Conference on Decision and Control (pp. 956-962).
- [8] Ball, J. A., Helton, J. W., & Walker, M. L. (1993). *H_∞ control for nonlinear systems with output feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, 38(4), 546-559.
- [9] Benzaouia, A., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2016). *Robust H_∞ Filtering for Two-Dimensional Delayed Systems*. In Two-Dimensional Systems. (pp. 223-270). Springer, Cham.
- [10] Benzaouia, A., Mesquine, F., & Benhayoun, M. (2018). *Saturated Control of Linear Systems*. Springer.
- [11] Benzaouia, A., & El Hajjaji, A. (2017). *Stabilization of Continuous-Time Fractional Positive T-S Fuzzy Systems by Using a Lyapunov Function*. Circuits, Systems, and Signal Processing, 36(10), 3944-3957.
- [12] Benzaouia, A., Hmamed, A., & EL Hajjaji, A. (2010). *Stabilization of controlled positive discrete-time T-S fuzzy systems by state feedback control*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 24(12), 1091-1106.

- [13] Benzaouia, A., Mesquine, F., & Benhayoun, M. (2018). *Stabilization of 2D continuous systems with multi-delays and saturated control*. In *Saturated Control of Linear Systems* (pp. 187-199). Springer, Cham.
- [14] Bachelier, O., Paszke, W., Yeganefar, N., Mehdi, D., & Cherifi, A. (2016). *LMI stability conditions for 2D Roesser models*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3), 766-770.
- [15] Berrada, Y., El Amrani, A., & Boumhidi, I. (2017, March). *Finite frequency TS fuzzy control for a variable speed wind turbine*. In *Systems, Signals & Devices (SSD), 2017 14th International Multi-Conference on* (pp. 505-510). IEEE. DOI : **10.1109/SSD.2017.8166951**.
- [16] Benhayoun, M., Mesquine, F., & Benzaouia, A. (2013). *Delay dependent stabilizability of 2-D delayed continuous systems with saturating control*. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 32(6), 2723-2743.
- [17] Bernussou, J., Peres, P. L. D., & Geromel, J. C. (1989). *A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems*. *Systems & Control Letters*, 13(1), 65-72.
- [18] Besselink, B., Tabak, U., Lutowska, A., Van De Wouw, N., Nijmeijer, H., Rixen, D. J., & Schilders, W. H. A. (2013). *A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control*. *Journal of Sound and Vibration*, 332(19), 4403-4422.
- [19] Boukili, B. (2014). *Performance H_∞ Robuste pour les Systèmes Dynamiques Discrets*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès, Maroc.
- [20] Boukili, B., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2014, December). *Robust H_∞ filters for uncertain discrete-time stochastic systems*. In *Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2014 15th International Conference on* (pp. 95-99). IEEE.
- [21] Boukili, B., Hmamed, A., Benzaouia, A., & El Hajjaji, A. (2014). *H_∞ filtering of two-dimensional TS fuzzy systems*. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 33(6), 1737-1761.
- [22] Boukili, B., Hmamed, A., & Benzaouia, A. (2015). *H_∞ State Control for 2D Fuzzy FM Systems with Stochastic Perturbation*. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(3), 779-796.
- [23] Boukili, B., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2016). *Robust H_∞ Filtering for 2-D Discrete Roesser Systems*. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 27(5), 497-505.
- [24] Boukili, B., Zoulagh, T., & Hmamed, A. (2015). *H_∞ filtering for a class of discrete-time TS Fuzzy systems*. *Mediterranean J Meas Control*, 11(4), 473-482.
- [25] Boukili, B. Hmamed, A. & Tadeo, F. (2016). *Reduced-Order H_∞ Filtering with Intermittent Measurements for a Class of 2D Systems*. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 27(6), 597-607.

-
- [26] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. (Vol. 15). Siam.
- [27] Bose, N. K. (1982). *Applied multidimensional systems theory* (pp. 218-219). New York : Van Nostrand Reinhold.
- [28] Bracewell, R. N., & Imaging, T. D. (1995). *Prentice-Hall Signal Processing Series*. New Jersey.
- [29] Buckley, J. J. (1992). *Universal fuzzy controllers*. *Automatica*, 28(6), 1245-1248.
- [30] Badie, K., Alfidi, M., Tadeo, F., & Chalh, Z. (2018). *Delay-Dependent Stability and H_∞ Performance of 2-D Continuous Systems with Delays*. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 1-18.
- [31] Chadli, M. (2002). *Stabilité et commande de systemes décrits par des multimodeles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- [32] Chadli, M., & El Hajjaji, A. (2006). *Comment on Observer-based robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties*. *Fuzzy sets and Systems*, 157(9), 1276-1281.
- [33] Chibani, A., Chadli, M., Shi, P., & Braiek, N. B. (2017). *Fuzzy fault detection filter design for t - s fuzzy systems in the finite-frequency domain*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(5), 1051-1061.
- [34] Chang, X. H., & Yang, G. H. (2014). *Nonfragile H_∞ Filter Design for T - S Fuzzy Systems in Standard Form*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(7), 3448-3458.
- [35] Chang, X. H., & Yang, G. H. (2012). *Non-fragile fuzzy H_∞ filter design for nonlinear continuous-time systems with D stability constraints*. *Signal Processing*, 92(2), 575-586.
- [36] Castro, J. L. (1995). *Fuzzy logic controllers are universal approximators*. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 25(4), 629-635.
- [37] Chui, C. K., & Chen, G. (2017). *Kalman filtering*. Springer International Publishing.
- [38] Ding, D. W., Li, X. J., Du, X., & Xie, X. (2016). *Finite-Frequency Model Reduction of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(6), 1464-1474.
- [39] Ding, D., & Yang, G. (2009). *Finite frequency H_∞ filtering for uncertain discrete-time switched linear systems*. *Progress in natural science*, 19(11), 1625-1633.
- [40] Ding, D. W., Du, X., & Li, X. (2015). *Finite-frequency model reduction of two-dimensional digital filters*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6), 1624-1629.
- [41] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., & Francis, B. A. (1989). *State-space solutions to standard H_∞ and H_2 control problems*. *IEEE Transactions on Automatic control*, 34(8), 831-847.
- [42] Duan Z., Zhang J., Zhang C. & Mosca E. (2006). *Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems*. *Automatica*, 42(11), 1919-1926.
-

- [43] Duan Z., Zhang J., Zhang C. & Mosca E. (2006). *Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems*. Automatica, 42(11), 1919-1926.
- [44] Dymkou, S., Rogers, E., Dymkov, M., & Galkowski, K. (2008). *Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes*. SIAM Journal of Control and Optimization, 47(1), 396-420.
- [45] Du, X., & Yang, G. H. (2010). *H_∞ model reduction of linear continuous-time systems over finite-frequency interval*. IET control theory & applications, 4(3), 499-508.
- [46] Ding, D. W., & Yang, G. H. (2010). *Fuzzy filter design for nonlinear systems in finite-frequency domain*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 18(5), 935-945.
- [47] Dong, J., & Yang, G. H. (2008). *State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers*. Information Sciences, 178(6), 1680-1695.
- [48] De Oliveira, M. C., & Skelton, R. E. (2001). *Stability tests for constrained linear systems*. In Perspectives in robust control (pp. 241-257). Springer, London.
- [49] Duan, Z., & Xiang, Z. (2017). *Finite frequency H_∞ control of 2-D continuous systems in Roesser model*. Multidimensional Systems and Signal Processing, 28(4), 1481-1497.
- [50] Eising, R. (1979). *Controllability and observability of 2-D systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 24(1), 132-133.
- [51] Ebihara, Y., & Hagiwara, T. (2004). *On H_∞ model reduction using LMIs*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(7), 1187-1191.
- [52] El-Amrani, A., Boukili, B., Hmamed, A., & El Adel, E. M. (2017). *Robust H_∞ Filters for Uncertain Systems with Finite Frequency Specifications*. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 28(6), 693-706. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40313-017-0336-9>.
- [53] El-Amrani, A., Boukili, B., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2017). *Robust H_∞ filtering for 2D continuous systems with finite frequency specifications*. International Journal of Systems Science, 49(1), 43-57. DOI : <https://doi.org/10.1080/00207721.2017.1391960>.
- [54] El-Amrani, A., Boukili, B., El Hajjaji, A., & Hmamed, A. (2018). *H_∞ model reduction for T-S fuzzy systems over finite frequency ranges*. Optimal Control Applications and Methods. DOI : <https://doi.org/10.1002/oca.2422>.
- [55] El-Amrani, A., Berrada, Y., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2017, March). *Finite frequency H_∞ filtering for discrete-time uncertain systems*. In Systems, Signals & Devices (SSD), 2017 14th International Multi-Conference on (pp. 580-585). IEEE. DOI : [10.1109/SSD.2017.8166950](https://doi.org/10.1109/SSD.2017.8166950).
- [56] El-Amrani, A., Boukili, B., Hmamed, A., & Boumhidi, I. (2017, April). *H_∞ model reduction for TS fuzzy systems with finite frequency specifications*. In 2017 Intelligent Systems and Computer Vision (ISCV) (pp. 1-7). IEEE. DOI : [10.1109/ISACV.2017.8054975](https://doi.org/10.1109/ISACV.2017.8054975).

-
- [57] El-Amrani, A., Hmamed, A., Boukili, B., & El Hajjaji, A. (2016, May). *H_∞ filtering of T-S fuzzy systems in Finite Frequency domain*. In Systems and Control (ICSC), 2016 5th International Conference on (pp. 306-312). IEEE. DOI : **10.1109/ICoSC.2016.7507038**.
- [58] El-Amrani, A., El Hajjaji, A., Boukili, B., & Hmamed, A. (2018, June). *H_∞ model reduction for two-dimensional discrete systems in finite frequency ranges*. In 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED) (pp. 1-9). IEEE. **10.1109/MED.2018.8442969**
- [59] El-Amrani, A., Boukili, B., El Hajjaji, A., & Hmamed, A. (2018, June). *Robust H_∞ Filter for Uncertain Continuous-Time Systems with Finite Frequency Ranges*. In 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED) (pp. 807-812). IEEE. **10.1109/MED.2018.8443021**
- [60] El-Amrani, A., El Hajjaji, A., Hmamed, A., & Boumhidi, I. (2018, July). *Finite Frequency Filter Design for T-S Fuzzy Continuous Systems*. 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).
- [61] El-Amrani, A., Boukili, B., Hmamed, A., El Hajjaji, A., & Boumhidi, I. (2018, April). *Positive real control for 2D continuous systems roesser models in finite frequency domains*. In Optimization and Applications (ICOA), 2018 4th International Conference on (pp. 1-6). IEEE. DOI : **10.1109/ICOA.2018.8370511**.
- [62] El Hajjaji, A., Ciocan, A., & Hamad, D. (2005). *Four wheel steering control by fuzzy approach*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 41(2-3), 141-156.
- [63] El-Kasri, C. (2013). *Filtrage H_∞ Robuste des Systèmes Linéaires Bidimensionnels*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès, Maroc.
- [64] El-Kasri, C., Hmamed, A., Tissir, E. H., & Tadeo, F. (2013). *Robust H_∞ filtering for uncertain two-dimensional continuous systems with time-varying delays*. Multidimensional Systems and Signal Processing, 24(4), 685-706.
- [65] El-Kasri, C., Hmamed, A. & Tadeo, F. (2013). *Reduced-order H_∞ filters for uncertain 2D continuous systems, via LMIs and polynomial matrices*. Circuits, Systems, and Signal Processing, 33(4), 1189-1214.
- [66] El-Kasri, C., Hmamed, A., Alvarez, T., & Tadeo, F. (2011, September). *Robust H_∞ filtering for uncertain 2-D continuous systems, based on a polynomially parameter-dependent Lyapunov function*. In Multidimensional (nD) Systems (nDs), 2011 7th International Workshop on (pp. 1-6). IEEE.
- [67] El Haoussi, F., Tissir, E. H., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2012). *Stabilization of neutral systems with saturating actuators*. Journal of control science and engineering, 2012, 5.
- [68] El Haoussi, F., & El Tissir, H. (2010). *Delay and its time-derivative dependent robust stability of uncertain neutral systems with saturating actuators*. International Journal of Automation and Computing, 7(4), 455-462.
- [69] El-Agizi, N., & Fahmy, M. (1979). *Two-dimensional digital filters with no overflow oscillations*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 27(5), 465-469.
-

- [70] El Hellani, D., El Hajjaji, A., & Ceschi, R. (2017). *H_∞ filter design for linear time-invariant systems with polytopic uncertainties in finite frequency domain*. *Optimal Control Applications and Methods*, 38(4), 520-540.
- [71] El Hellani, D., El Hajjaji, A., & Ceschi, R. (2017). *H_∞ filter design for nonlinear systems with quantised measurements in finite frequency domain*. *International Journal of Systems Science*, 48(5), 1048-1059.
- [72] Elsayed, A., & Grimble, M. J. (1989). *A new approach to the H_∞ design of optimal digital linear filters*. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 6(2), 233-251.
- [73] Francis, B. A. (1987). *A course in H_∞ control theory*. Berlin; New York : Springer-Verlag.
- [74] Fornasini, E., & Marchesini, G. (1976). *State-space realization theory of two-dimensional filters*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4), 484-492
- [75] Gao, H., & Li, X. W. (2014). *Robust Filtering for Uncertain Systems*. Springer International Pu.
- [76] Goodwin G. C., Graebe S. F., & Salgado M. E. (2001). *Control System Design*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.
- [77] Grimble, M. J. (1988). *H_∞ design of optimal linear filters*. (pp. 533-540). Amsterdam, The Netherlands : North-Holland.
- [78] Geromel, J. C. (1999). *Optimal linear filtering under parameter uncertainty*. *IEEE Transactions on Signal processing*, 47(1), 168-175.
- [79] Grimble, M. J., & El Sayed, A. (1990). *Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems*. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(7), 1092-1104.
- [80] Grimble, M. J. (1993). *Polynomial Matrix Solution of the H_∞ Filtering Problem and the Relationship to Riccati Equation State-Space Results*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(1), 67.
- [81] Geromel, J. C., de Oliveira, M. C., & Bernussou, J. (2002). *Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3), 700-711.
- [82] Gao, H., Lam, J., Mao, X., & Shi, P. (2007). *H_∞ Filtering for uncertain bilinear stochastic systems*. *Nonlinear dynamics and systems theory*, 7(2), 151-168.
- [83] Gao, H., & Li, X. (2011). *H_∞ filtering for discrete-time state-delayed systems with finite frequency specifications*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(12), 2935-2941.
- [84] Gugercin, S., & Antoulas, A. C. (2004). *A survey of model reduction by balanced truncation and some new results*. *International Journal of Control*, 77(8), 748-766.
- [85] Gahinet, P., & Apkarian, P. (1994). *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*. *International journal of robust and nonlinear control*, 4(4), 421-448.

-
- [86] Gao, H., Lam, J., Wang, C., & Xu, S. (2005). *H_∞ model reduction for uncertain two-dimensional discrete systems*. Optimal Control Applications and Methods, 26(4), 199-227.
- [87] Glover, K. (1984). *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞-error bounds*. International journal of control, 39(6), 1115-1193.
- [88] Gao, H., Lam, J., Wang, C., & Wang, Q. (2004). *Hankel norm approximation of linear systems with time-varying delay : continuous and discrete cases*. International Journal of Control, 77(17), 1503-1520.
- [89] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., & Chilali, M. (1995). *The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab*. User's Guide. Natick, MA : The MathWorks.
- [90] Galkowski, K. (2002). *LMI based stability analysis for 2D continuous systems*. In Electronics, Circuits and Systems, 2002. 9th International Conference on (Vol. 3, pp. 923-926). IEEE.
- [91] Gugercin, S., & Antoulas, A. C. (2004). *A survey of model reduction by balanced truncation and some new results*. International Journal of Control, 77(8), 748-766.
- [92] Hinamoto, T. (1993). *2-D Lyapunov equation and filter design based on the Fornasini-Marchesini second model*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, 40(2), 102-110
- [93] Hmamed, A., Kririm, S., Benzaouia, A., & Tadeo, F. (2016). *Delay-dependent stability and stabilisation of continuous 2D delayed systems with saturating control*. International Journal of Systems Science, 47(12), 3004-3015.
- [94] Hmamed, A., Mesquine, F., Tadeo, F., Benhayoun, M., & Benzaouia, A. (2010). *Stabilization of 2D saturated systems by state feedback control*. Multidimensional Systems and Signal Processing, 21(3), 277-292.
- [95] Hmamed, A., Alfid, M., Benzaouia, A., & Tadeo, F. (2008). *LMI conditions for robust stability of 2D linear discrete-time systems*. Mathematical Problems in Engineering, 2008.
- [96] Isidori, A. (1994). *H_∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4(4), 553-574.
- [97] Imran, M., Ghafoor, A., & Sreeram, V. (2014). *A frequency weighted model order reduction technique and error bounds*. Automatica, 50(12), 3304-3309.
- [98] Iwasaki, T., Hara, S., & Yamauchi, H. (2003). *Dynamical system design from a control perspective : Finite frequency positive-realness approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(8), 1337-1354.
- [99] Iwasaki T. & Hara S. (2005). *Generalized KYP lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(1), 41-59.
- [100] Idrissi, S., Tissir, E. H., Boumhidi, I., & Chaibi, N. (2014). *Robust H_∞ control for uncertain TS fuzzy systems via delay partitioning approach*. International Journal of Ecology & Development™, 28(2), 96-108.
-

- [101] Kalman, R. E., & Bucy, R. S. (1960). *New results in linear filtering and prediction theory*. Journal of basic engineering, 83(1), 95-108.
- [102] Kharrat, D., Gassara, H., El Hajjaji, A., & Chaabane, M. (2018). *Adaptive Observer and Fault Tolerant Control for Takagi-Sugeno Descriptor Nonlinear Systems with Sensor and Actuator Faults*. International Journal of Control, Automation and Systems, 1-11.
- [103] Kim, E., & Lee, H. (2000). *New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 8(5), 523-534.
- [104] Kririm, S. (2014). *Commande Saturée et Filtrage H_∞ des Systèmes Bidimensionnels*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès, Maroc.
- [105] Kririm, S., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2015). *Robust H_∞ Filtering for Uncertain 2D Singular Roesser Models*. Circuits, Systems, and Signal Processing, 34(7), 2213-2235.
- [106] Kririm, S., Hmamed, A., & Tadeo, F. (2016). *Analysis and Design of H_∞ Controllers for 2D Singular Systems with Delays*. Circuits, Systems, and Signal Processing, 35(5), 1579-1592.
- [107] Kim, J. H. (2011). *Reduced-order delay-dependent H_∞ filtering for uncertain discrete-time singular systems with time-varying delay*. Automatica, 47(12), 2801-2804.
- [108] Lacerda M. J., Oliveira R. C. L. F. & Peres P. L. D. (2011). *Robust H_2 and H_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and Polynomail matrices*. Signal Processing, 91(5), 1115-1122.
- [109] Liu, X., & Zhang, Q. (2003). *Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for TS fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 11(6), 830-839.
- [110] Liu, X., & Zhang, Q. (2003). *Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for TS fuzzy systems*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 11(6), 830-839.
- [111] Löfberg J. YALMIP. (2004). *A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. Proceedings of the IEEE Computer-Aided Control System Design Conference, Taipei, Taiwan, 284-289.
- [112] Lee D. H. (2013). *An improved finite frequency approach to robust H_∞ filter design for LTI systems with polytopic uncertainties*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 27(11), 944-956.
- [113] Li, H., & Fu, M. (1997). *A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, 45(9), 2338-2350.
- [114] Li, X., Lam, J., & Cheung, K. C. (2016). *Generalized H_∞ model reduction for stable two-dimensional discrete systems*. Multidimensional Systems and Signal Processing, 27(2), 359-382.
- [115] Li, X., & Gao, H. (2012). *Robust finite frequency H_∞ filtering for uncertain 2-D Roesser systems*. Automatica, 48(6), 1163-1170.
- [116] Li, X., & Gao, H. (2013). *Robust finite frequency H_∞ filtering for uncertain 2-D systems : The FM model case*. Automatica, 49(8), 2446-2452.

-
- [117] Li, X., Lam, J., Gao, H., & Xiong, J. (2016). *H_∞ and H_2 filtering for linear systems with uncertain Markov transitions*. *Automatica*, 67, 252-266.
- [118] Li, X., Gao, H., & Wang, C. (2012). *Generalized Kalman–Yakubovich–Popov lemma for 2-D FM LSS model*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(12), 3090-3103.
- [119] Lu, W. S. (Ed.). (1992). *Two-dimensional digital filters*. (Vol. 80). CRC Press.
- [120] Lyapunov, A. M. (1992). *The general problem of the stability of motion*. *International journal of control*, 55(3), 531-534.
- [121] Lur'e, A. I. (1951). *Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control*. H. M. Stationery Off., London, 1957.
- [122] Li, Y., Lam, J., & Luo, X. (2009). *Hankel norm model reduction of uncertain neutral stochastic time-delay systems*. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*.
- [123] Lastman, G. (1984). *Reduced-order aggregated models for bilinear time-invariant dynamical systems*. *IEEE transactions on automatic control*, 29(4), 359-361.
- [124] Morais, C. F., Palma, J. M., Peres, P. L., & Oliveira, R. C. (2018). *An LMI approach for H_2 and H_∞ reduced-order filtering of uncertain discrete-time Markov and Bernoulli jump linear systems*. *Automatica*, 95, 463-471.
- [125] Moore, B. (1981). *Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction*. *IEEE transactions on automatic control*, 26(1), 17-32.
- [126] Mellouli, E. M., Alfid, M., & Boumhidi, I. (2018). *Fuzzy sliding mode control for three-tank system based on linear matrix inequality*. *International Journal of Automation and Control*, 12(2), 237-250.
- [127] Nguang, S. K., & Assawinchaichote, W. (2003). *H_∞ filtering for fuzzy dynamical systems with D stability constraints*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(11), 1503-1508.
- [128] Nachidi, M., Tadeo, F., & Benzaouia, A. (2009, August). *H_∞ control of Takagi-Sugeno systems with multiple time-delays*. In *Control Conference (ECC), 2009 European* (pp. 354-359). IEEE.
- [129] Oliveira, R. C., & Peres, P. L. (2007). *Parameter-dependent LMIs in robust analysis : Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7), 1334-1340.
- [130] Palhares R. M. & Peres P. L. D. (2001). *LMI approach to the mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete-time uncertain systems*. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(1), 292-296.
- [131] Qiu J., Feng G. & Yang J. (2008). *Robust mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete-time switched polytopic linear systems*. *The Institution of Engineering and Technology*, 2(5), 420-430.
-

- [132] Qiu, J., Feng, G., & Yang, J. (2010). *A new design of delay-dependent robust H_∞ filtering for continuous-time polytopic systems with time-varying delay*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 20(3), 346-365.
- [133] Qiu, J., Feng, G., & Yang, J. (2009). *A New Design of Delay-Dependent Robust H_∞ Filtering for Discrete-Time T-S Fuzzy Systems With Time-Varying Delay*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 17(5), 1044-1058.
- [134] Robert E. S., Iwasaki T., & Dimitri E. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. London, UK : Taylor & Francis.
- [135] Rogers, E., Galkowski, K., Gramacki, A., Gramacki, & J. Owens, D. H. (2002). *Stability and controllability of a class of 2-D linear systems with dynamic boundary conditions*. IEEE Transactions Circuits Systems, 49(1), 181-195.
- [136] Roesser, R. (1975). *A discrete state-space model for linear image processing*. IEEE Transactions on Automatic Control, 20, 1-10.
- [137] Rotstein H., Sznaier M. & Idan M. (1996). *H_2/H_∞ filtering theory and an aerospace application*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6(4), 347-366, 1996.
- [138] Rolland, C., Prakash, N., & Benjamen, A. (1999). *A multi-model view of process modelling*. Requirements Engineering, 4(4), 169-187.
- [139] Sturm J. F. Using SeDuMi 1.02. (1999). *A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*. Optimization Methods and Software, 625-653.
- [140] Stefanovski, J. D. (2017). *Fault detection over frequency region : Generalized spectral factorization approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 62(10), 5296-5301.
- [141] Su, X., Wu, L., Shi, P., & Song, Y. D. (2012). *H_∞ Model Reduction of Takagi–Sugeno Fuzzy Stochastic Systems*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 42(6), 1574-1585.
- [142] Shen, J., & Lam, J. (2015). *Improved results on H_∞ model reduction for continuous-time linear systems over finite frequency ranges*. Automatica, 53, 79-84.
- [143] Shen, M., & Ye, D. (2017). *A finite frequency approach to control of Markov jump linear systems with incomplete transition probabilities*. Applied Mathematics and Computation, 295, 53-64.
- [144] Tissir, E. H. (2007). *Robust Control Design for retarded discrete-time systems*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 129(1), 72-76.
- [145] Tanaka, K., Ikeda, T., & Wang, H. O. (1996). *Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities*. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 4(1), 1-13.
- [146] Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, (1), 116-132.

-
- [147] Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., & Yamamoto, Y. (2001). *Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design*. IEEE Transactions on fuzzy systems, 9(2), 324-332.
- [148] Tanaka, K., & Wang, H. O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- [149] Hahn, W. (1967). *Stability of Motion*. Berlin, DE.
- [150] Vidyasagar. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition.
- [151] Wang, H., Peng, L. Y., Ju, H. H., & Wang, Y. L. (2013). *H_∞ state feedback controller design for continuous-time T-S fuzzy systems in finite frequency domain*. Information Sciences, 223, 221-235.
- [152] Wang, M., Qiu, J., & Feng, G. G. (2018). *Finite Frequency Memory Output Feedback Controller Design for TS Fuzzy Dynamical Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems.
- [153] Xie, L., & Soh, Y. C. (2001). *H_∞ reduced-order approximation of 2-D digital filters*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, 48(6), 688-698.
- [154] Xu, S., Lam, J., Zou, Y., Lin, Z., & Paszke, W. (2005). *Robust positive real synthesis for 2D continuous systems via state and output feedback*. Circuits, Systems and Signal Processing, 24(2), 183-199.
- [155] Xu, S., Lam, J., Zou, Y., Lin, Z., Paszke, W. (2005). *Robust H_∞ filtering for uncertain 2D continuous systems*. IEEE Transactions on Signal Processing, 53(5) 1731-1738.
- [156] Xu, S., Lam, J., & Mao, X. (2007). *Delay-Dependent H_∞ Control and Filtering for Uncertain Markovian Jump Systems With Time-Varying Delays*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers, 54(9), 2070-2077.
- [157] Yang, R., Xie, L., & Zhang, C. (2008). *Generalized two-dimensional Kalman–Yakubovich–Popov lemma for discrete Roesser model*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers, 55(10), 3223-3233.
- [158] Zames, G. (1981). *Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses*. IEEE Transactions on automatic control, 26(2), 301-320.
- [159] Zoulagh, T. (2018). *Filtrage des Systèmes Linéaires et Non-Linéaires*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès, Moroc.
- [160] Zoulagh, T., El Aiss, H., Hmamed, A., & El Hajjaji, A. (2017). *H_∞ filter design for discrete time-varying delay systems : three-term approximation approach*. IET Control Theory & Applications, 12(2), 254-262.
- [161] Zoulagh, T., El Haiek, B., Hmamed, A., & El Hajjaji, A. (2018). *Homogenous polynomial H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems : A descriptor approach*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 32(2), 378-389.
-

- [162] Zhou, S., Feng, G., Lam, J., & Xu, S. (2005). *Robust H_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions*. Information Sciences, 174(3), 197-217.
- [163] Zhou, S., Lam, J., & Xue, A. (2007). *H_∞ filtering of discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov function approach*. Fuzzy Sets and Systems, 158(2), 180-193.
- [164] Zhang, H., Shi, Y., & Mehr, A. S. (2012). *On H_∞ Filtering for Discrete-Time Takagi–Sugeno Fuzzy Systems*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 20(2), 396-401.

RÉSUMÉ

Cette thèse se focalise sur le thème : réduction de modèle, filtrage et commandes des systèmes dynamiques 1D et 2D à fréquences finies. Elle aborde la synthèse de réduction du modèle H_∞ , filtres H_∞ et de lois commande (H_∞ et réel positif) dans un domaine fréquentiel fini pour différentes classes de systèmes dynamiques 1D et 2D, tels que les systèmes linéaires, les systèmes avec des incertitudes polytopiques et les systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno (TS). Les contributions portent sur le développement de nouveaux outils d'analyse et de synthèse de réduction du modèle H_∞ , filtres H_∞ et de lois commande (H_∞ et réel positif) moins restrictifs par rapport aux résultats existants dans la littérature et permettant de réduire le conservatisme de celles-ci tout en garantissant que les méthodes proposées soient numériquement efficaces. Les conditions de stabilité et de synthèse de systèmes visés pour les différentes classes de systèmes dynamiques sont formulées en des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Des exemples numériques et des comparaisons avec des résultats récents de la littérature sont également présentés afin de montrer les avantages et l'intérêt des approches proposées.

Mots clés : Fréquences finies ; Fréquences entières ; Systèmes linéaires à temps discret ; Systèmes linéaires à temps continu ; Systèmes multidimensionnels ; Performance H_∞ ; Contrôle réel positif ; Réduction de modèle ; Systèmes flous ; Modèles Roesser ; Inégalités matricielles linéaires (LMIs) ; Incertitudes polytopiques ; Filtrage H_∞ Robuste ; Commande H_∞ ; Fonction de Lyapunov ; Paramètres à polynômes homogènes.

ABSTRACT

This thesis focuses on the theme : model reduction, filtering and control of 1D et 2D dynamical systems in a finite frequency domain. It deals with synthesis of the H_∞ model reduction, H_∞ filters and control laws (H_∞ and positive real) in a finite frequency domain for different classes of 1D et 2D dynamical systems, such as linear systems, systems with polytopic uncertainties and Takagi-Sugeno (TS) non-linear systems. The contributions concern the development of new tools for analysis and synthesis of H_∞ model reduction, H_∞ filters filters and control laws (H_∞ and positive real), which are less restrictive compared to existing results in the literature and to reduce the conservatism of these while ensuring that the proposed methods are numerically effective. The stability and synthesis conditions of targeted systems for the different classes of dynamic systems are formulated into convex optimization problems under linear matrix inequality constraints (LMIs). Numerical examples and comparisons with recent literature results are also presented to show the benefits of the proposed approaches.

Keywords : Finite frequency ; Entire frequency ; Discrete time linear systems ; Continuous-time linear systems ; Multidimensional systems ; H_∞ Performance ; Positive real control ; Model reduction ; Fuzzy systems ; Roesser Models ; Linear Matrix Inequalities (LMIs) ; Polytopic uncertainties ; Robust H_∞ filtering ; H_∞ Control ; Lyapunov function ; Homogeneous polynomial parameters.