**Université Sidi Mohammed Ben Abdellah**
**Faculté des Sciences Dhar El Mahraz- Fès**
**Centre d'Etudes Doctorales**
**"Sciences et Technologies"**

***Formation Doctorale : Mathématiques et Applications***

***Discipline : Mathématiques***

***Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale***

***Laboratoire : Analyse Mathématique et Applications***

# THESE DE DOCTORAT

Présentée par

HAMID BOUA

# Egalité du Spectre de Descente Et Théorie Spectrale des Semi-groupes

Soutenue le 10 Mars 2018 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| *Pr. M. Ech-Chérif El Kettani* | *Faculté des Sciences D.M. – Fès* | *Président* |
| *Pr. A. Blali* | *Ecole Normale Supérieure- Fès* | *Rapporteur* |
| *Pr. A. Faouzi* | *Faculté des Sciences-El Jadida* | *Rapporteur* |
| *Pr. H. Zariouh* | *CRMEF de l'Oriental-Oujda* | *Rapporteur* |
| *Pr. R. Ameziane Hassani* | *Faculté des Sciences D.M. – Fès* | *Examinateur* |
| *Pr. M. Babahmed* | Faculté des Sciences-Meknès | Examinateur |
| *Pr. M. Ouzahra* | *Ecole Normale Supérieure- Fès* | Examinateur |
| *Pr. A. Tajmouati* | *Faculté des Sciences D.M. – Fès* | Directeur de thèse |

**Année universitaire : 2017-2018**

# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire Analyse Mathématique et Applications de l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès. En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur **Abdelaziz Tajmouati**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, qui m'a dirigé durant toute la période de la préparation de cette thèse avec la plus grande compétence et la plus grande disponibilité. Son soutien et sa gentillesse m'ont énormément aidé à l'élaboration de cette thèse dans de bonnes conditions. Sa patience ainsi que les conseils qu'il me prodiguait chaque fois que je m'adresse à lui m'ont beaucoup apporté.

Je remercie très sincèrement Monsieur **Mustapha Ech-Chérif Elkettani**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie chaleureusement le Professeur **Aziz Blali**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'école normale supérieure de Fès qui a accepté de rapporter cette thèse et de participer au jury.

Je remercie également le Professeur **Abdelkhalek Faouzi**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaib Doukkali d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et de m'avoir apporté des remarques judicieuses.

Je tiens à remercier vivement le Professeur **Hassan Zariouh**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Université Mohamed Premier, d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de bien vouloir venir de Oujda pour siéger dans mon Jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Rachid Ameziane Hassani**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, Monsieur **Moham-**

**med Babahmed**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'Université Moulay Ismaïl et Monsieur **Mohamed Ouzahra** Professeur de l'enseignement supérieur à l'école normale supérieure de Fès, qui ont accepté d'examiner mon travail et m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

J'exprime mes remerciements aussi à Monsieur **Abdeslam El Bakkali**, Professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaib Doukkali, pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Je tiens à remercier tous mes amis du département de Mathématiques de la faculté des sciences Dahar El Mehraz pour la sympathie et les encouragements qu'ils ont témoignés à mon égard. Je leur exprime ici toute ma gratitude.

Enfin, mes remerciements vont à ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont soutenu durant l'élaboration de ce travail.

# Table des matières

**Résumé**

Dans cette thèse nous étudions d'une part la relation entre le spectre de descente $\sigma_{desc}(T)$ d'un opérateur linéaire borné $T$ sur un espace de Banach $X$ et le spectre $\sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ de descente de $T$ comme un élément de l'algère de Banach $\mathcal{B}(X)$. D'autre part, la relation entre $\sigma_{desc}(T)$ et le spectre de descente essentielle $\sigma^e_{desc}(T)$ de $T$. Plus précisément, nous étudions les deux questions suivantes :

($\star$) Sous quelles conditions sur $T$ on a $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ ?

($\star\star$) Sous quelles conditions sur $T$ on a $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ ?

La réponse à ($\star$) est affirmative si $T$ satisfait la SVEP. L'égalité est obtenue aussi lorsque toute composante connexe de $\rho_{desc}(T)$ (respectivement $\rho_{su}(T)$) rencontre le résolvant $\rho(T)$ (respectivement $\rho_p(T)$). Pour la question ($\star\star$), nous montrons que si $T^*$ possède la SVEP, alors $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

Nous présentons aussi certains aspects de la théorie spectrale des semi-groupes (semi-groupes fortement continus, semi-groupes intégrés) des opérateurs, notamment nous établissons les inclusions spectrales d'un semi-groupe pour plusieurs parties du spectre.

**Mots clés :** descente, descente essentielle, $C_0$ semi-groupe, semi-groupe intégré, générateur, spectre

**Abstract**

In this thesis we study, on the one hand, the relation between the descent spectrum $\sigma_{desc}(T)$ of a bounded linear operator $T$ on a Banach space $X$ and $\sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ the descent spectrum of $T$ as an element of Banach's algebra $\mathcal{B}(X)$, on the other hand the relation between $\sigma_{desc}(T)$ and $\sigma^e_{desc}(T)$ the essential descent spectrum of $T$. More precisely we study the two following questions :

($\star$) Under what conditions on $T$ do we have $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ ?

($\star\star$) Under what conditions on $T$ do we have $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ ?

The answer to ($\star$) is affirmative if $T$ satisfies SVEP. Equality is also obtained when any connected component of $\rho_{desc}(T)$ (respectively $\rho_{su}(T)$) meets the resolver $\rho(T)$ (respectively $\rho_p(T)$). Answering question ($\star\star$), we show that if $T^*$ has SVEP, then $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

We also present some aspects of the spectral theory of the semi-groups (strongly continuous semigroups, integrated semi-groups) of the operators, in particular we establish the spectral inclusions of a semi-group for several parts of the spectrum.

**Key words :** descent, essential descent, $C_0$ semigroup, integrated semigroup, generator, spectrum.

# Introduction Générale

Soit $T$ un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe $X$. La descente $d(T)$ de $T$ est définie par l'égalité $d(T) = \min\{n \in \mathbb{N} : R(T^n) = R(T^{n+1})\}$. Le spectre de descente de $T$ est l'ensemble $\sigma_{desc}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : d(T - \lambda) = \infty\}$. La descente essentielle $d_e(T)$ de $T$ est définie par l'égalité $d_e(T) = \min\{n \in \mathbb{N} : \dim R(T^n)/_{R(T^{n+1})} < \infty\}$, avec la convention que $\min \emptyset = \infty$. Le spectre de descente essentielle de $T$ est l'ensemble $\sigma^e_{desc}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : d_e(T - \lambda) = \infty\}$. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach, le spectre de descente d'un élément $a \in \mathcal{A}$ (noté $\sigma_{desc}(a, \mathcal{A})$) est défini comme le spectre de descente de l'opérateur de multiplication à gauche par $a$ sur $\mathcal{A}$. Nous disons qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfait l'égalité du spectre de descente (ESD), si le spectre de descente de $T$ en tant qu'opérateur coïncide avec le spectre de descente de $T$ comme élément de l'algèbre $\mathcal{B}(X)$.

Dans [23, Proposition 2.1] A. Kaidi et A. Rodríguez Palacios ont montré le résultat suivant : Si $T$ est un opérateur linéaire borné sur un espace Banach $X$. Alors

$$\sigma_{desc}(T) \quad \subseteq \quad \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)) \tag{1}$$

En outre, cette inclusion devient une égalité si $X$ satisfait la "propriété de factorisation" suivante : Pour tous $F, G \in \mathcal{B}(X)$ tels que $R(F) \subseteq R(G)$, il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $F = GS$.

Ils ont démontré aussi dans ce même article ([23, Théorème 2.8]) qu'il existe un espace de Banach $X$ et $T \in \mathcal{B}(X)$ tels que $0 \in \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)) \backslash \sigma_{desc}(T)$, ce qui montre qu'en général l'inclusion (1) est stricte.

Dans [23, Corollaire 2.6], A. Haïly, A. Kaidi et A. Rodríguez Palacios ont étudié et caractérisé les espaces de Banach $X$ vérifiant le problème d'égalité du spectre de descente, par exemple les espaces de Banach qui sont isomorphes à $\ell^1(I)$ ou $\ell^2(I)$, en particulier si $H$ est un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$, alors $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(H))$.

Les mêmes auteurs ont prouvé que si $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur dont le spectre $\sigma(T)$ est d'intérieur vide, alors $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

Nous avons remarqué que nous pouvons construire un opérateur $T$ satisfaisant l'égalité du spectre de descente tel que l'intérieur du spectre $\sigma(T)$ est non vide. Par exemple, si $T$ est l'opérateur de décalage droit bilatéral sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$, défini par $T(x_n)_n = (x_{n-1})_n$ pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$. Ce qui nous a motivé à poser la question suivante : Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ dont $\sigma(T)$ est d'intérieur non nécessairement vide, sous quelles conditions on a $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ ?

D'autre part, nous disons qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfait l'égalité du spectre de descente essentielle (ESDE), si le spectre de descente de $T$ coïncide avec le spectre de descente essentielle de $T$.

Dans [9], Olfa Bel Hadj Fredj a montré que si $T$ est un opérateur linéaire borné sur $X$, alors

$$\sigma^e_{desc}(T) \quad \subseteq \quad \sigma_{desc}(T) \tag{2}$$

En outre, l'inclusion ci-dessus devient une égalité si $\sigma(T)$ est dénombrable.

Dans [12], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta et M. Oudghiri, ont montré que si $T$ est l'opérateur de décalage droit unilatéral défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$, alors $\sigma_{desc}(T)$ contient le disque unité fermé et $\sigma^e_{desc}(T)$ est contenu dans le cercle unité. Ce qui montre qu'en général l'inclusion (2) est stricte.

Nous pouvons construire un opérateur $T$ satisfaisant l'égalité $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ sans que $\sigma(T)$ soit dénombrable. Par exemple, soit $H$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2, ...\}$ et $T \in \mathcal{B}(H)$ l'opérateur défini par $T(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_1}{2}, 0, x_2, x_3, ...)$, où $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$. Dans [1], P.Aiena a prouvé que $\sigma_{su}(T) = \Gamma \cup \{\frac{1}{2}\}$, où $\Gamma$ désigne le cercle unité, donc $\sigma(T)$ est non dénombrable. Cependant, $T$ satisfait l'égalité du spectre de descente essentielle (Voir chapitre 2). Naturellement, on se pose la question suivante : Si $T \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\sigma(T)$ est non nécessairement dénombrable, sous quelles conditions sur $T$ l'égalité $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ doit être satisfaite ?

Pour un opérateur fermé $A$ à domaine dense dans un espace de Banach $X$, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

Il est bien connu que si $A$ engendre un $C_0$ semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et si la donnée initiale $x_0$ est dans le domaine de $A$, alors l'application $t \in [0,\infty) \mapsto T(t)x_0$ est solution unique du problème de Cauchy. Nous disposons alors d'un résultat d'existence et d'unicité de solution pour le problème de Cauchy sus-cité sans aucune information qualitative sur celle-ci. Une des approches classiques pour dégager des informations sur la solution $u(t)$ consiste à étudier directement le spectre du semi-groupe $T(t)$. Dans de nombreuses applications, on ne dispose que de l'expression explicite du générateur $A$. D'où, la nécessité d'avoir des informations sur le spectre du semi-groupe $T(t)$ en terme de celui du générateur $A$. L'interprétation intuitive du semi-groupe $T(t)$ comme étant un "$e^{tA}$" nous a amené à croire que le spectre du semi-groupe $T(t)$ peut être déduit du spectre du générateur $A$ par une relation de la forme $e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t))$. Malheureusement, cette égalité est fausse en général, comme le montre l'exemple suivant : Soit $T(t)_{t\geq 0}$ le groupe de rotation sur $X = L^p(\Gamma)$, où $1 < p < \infty$ et $\Gamma$ désigne le cercle unité (voir [22, exemple 2.6 (iv)]). Le spectre de son générateur est $\sigma(A) = i\mathbb{Z}$, donc $e^{t\sigma(A)}$ est dénombrable. Mais chaque $e^{ikt}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est une valeur propre de $T(t)$. Si $t/2\pi$ est irrationnel, ces valeurs propres forment un sous-ensemble dense de $\Gamma$ et puisque le spectre est toujours fermé, on obtient $\sigma(T(t)) = \Gamma$, qui est non dénombrable. Cependant, l'inclusion spectrale $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t))\backslash\{0\}$ est toujours vérifiée.

En 1979, R. Derndinger et R. Nagel [16] ont montré que si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe et $A$ son générateur, alors on a $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t))\backslash\{0\}$, $e^{t\sigma_p(A)} \subseteq \sigma_p(T(t))\backslash\{0\}$ et $e^{t\sigma_r(A)} \subseteq \sigma_r(T(t))\backslash\{0\}$. En 2001, A. El Koutri et A. Taoudi dans [21] ont prouvé que $e^{t\sigma_K(A)} \subseteq \sigma_K(T(t))\backslash\{0\}$. Plus tard, un résultat similaire a été obtenu pour le spectre essentiel de Kato par A.El Koutri et A.Taoudi [20]. Par ailleurs, l'étude des inclusions spectrales similaires pour les différentes parties du spectre s'avère essentielle. Ceci fera l'objet du troisième chapitre.

La notion des semi-groupes intégrés a été introduite par Arendt dans [3], [5] et a été développée dans plusieurs directions voir([17], [54]). L'exemple le plus simple d'un semi-groupe intégré est l'intégrale d'un $C_0$ semi-groupe, c'est-à-dire si $A$ génère $(T(t))_{t\geq 0}$ comme un $C_0$ semi-groupe sur $X$, alors $A$ génère aussi $(S(t))_{t\geq 0}$ comme un semi-groupe intégré sur $X$, où $S(t) = \int_0^t T(s)ds$. Arendt a montré que les semi-groupes adjoints de $C_0$ semi-groupe sur des espaces de Banach non-réflexifs sont des semi-groupes intégrés qui ne sont pas des intégrales de $C_0$ semi-groupe. Il a également montré que si $A$ génère un semi-groupe intégré $S(t)$, alors le problème de Cauchy a une solution classique unique pour tout $x \in D(A^2)$ voir([25]).

En 1993, dans [14], Colin R. Day a montré que si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi groupe intégré et $A$ son générateur, alors $\int_0^t e^{s\sigma(A)}ds \subseteq \sigma(S(t))$, $\int_0^t e^{s\sigma_p(A)}ds \subseteq \sigma_p(S(t))$ et $\int_0^t e^{s\sigma_r(A)}ds \subseteq \sigma_r(S(t))$.

Une question apparait de façon naturelle : cette inclusion spectrale est-elle vraie pour les autres parties du spectre usuel d'un semi-groupe intégré ?

Cette thèse se compose de quatre chapitres et organisée de la façon suivante :
Nous commençons par un chapitre introductif qui a pour but de présenter les définitions et les résultats qu'on utilisera dans la suite de ce travail. Nous rappellons des résultats sur les opérateurs fermés et quelques résultats fondamentaux sur les semi-groupes (semi-groupes fortement continus, semi-groupes intégrés) qui jouent un rôle essentiel dans ce travail.

Le deuxième chapitre consiste à étudier d'une part, la relation entre le spectre $\sigma_{desc}(T)$ de descente d'un opérateur linéaire borné $T$ sur un espace de Banach $X$ et le spectre de descente $\sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X))$ de $T$ comme un élément de l'algère de Banach $\mathcal{B}(X)$. D'autre part, la relation entre $\sigma_{desc}(T)$ et le spectre $\sigma^e_{desc}(T)$ de descente essentielle de $T$. Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous montrons qu'un multiplicateur sur une algèbre de Banach commutative semi-primaire satisfait la propriété d'égalité du spectre de descente (ESD).

Dans la deuxième section, nous établissons le résultat suivant : Si $T \in \mathcal{B}(X)$, alors

$$\sigma_{desc}(T) \subseteq \sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X)) \subseteq \sigma_{desc}(T) \cup \overline{\mathcal{S}(T)}$$

De ce résultat, on déduit que si $T$ possède la propriété de l'extension unique (SVEP)(voir [2], [32]), alors $T$ satisfait la propriété ESD, ce qui généralise le résultat donné par A. Haïly, A. Kaidi et A. Rodríguez Palacios dans [23, Corollary 2.15].
Lorsque $T$ est supercyclique, la propriété (ESD) est obtenue par l'adjoint $T^*$ dans l'algèbre $\mathcal{B}(X^*)$. Nous montrons aussi dans cette section que, si $T \in \mathcal{B}(X)$ et $D$ un sous ensemble fermé de $\mathbb{C}$ tel que $\sigma(T) = \sigma_{su}(T) \cup D$, alors

$$\sigma_{desc}(T) \cup \mathrm{int}(D) = \sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X)) \cup \mathrm{int}(D)$$

Par conséquent, si l'intérieur de $\sigma_\star(T)$ est vide où $\sigma_\star$ désigne le spectre d'ascente, le spectre semi-Browder supérieur et le spectre semi-Weyl supérieur, alors $T$ satisfait la propriété ESD.
Nous prouvons aussi que si toute composante connexe de la résolvante de descente $\rho_{desc}(T)$ rencontre le résolvant $\rho(T)$, alors $T$ satisfait la propriété ESD.
Nous terminons cette section par le résultat suivant : Si toute composante connexe de la résolvante surjective $\rho_{su}(T)$ rencontre la résolvante ponctuelle $\rho_p(T)$, alors $T$ satisfait la propriété (ESD).

Dans la dernière section, nous abordons la deuxième question. Nous montrons d'abord que $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T) \cup \overline{\mathcal{S}(T^*)}$. La réponse est positive à cette question si $T^*$ satisfait la SVEP. Ce qui généralise le résultat donné par Olfa Bel Hadj Fredj dans [9, Corollaire 2.10]. Donc en particulier l'égalité est obtenue lorsque $T$ est décomposable ou satisfait la propriété $(\delta)$(voir [29]). Dans le cas d'un opératur supercyclique, on établit que si $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur supercyclique, alors $T$ satisfait la propriété (ESDE).

Nous établissons dans cette section que si $T \in \mathcal{B}(X)$ et $D$ un sous ensemble fermé de $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_{su}(T) = \sigma_K(T) \cup D$, alors

$$\sigma_{desc}(T) \cup \mathrm{int}(D) = \sigma^e_{desc}(T) \cup \mathrm{int}(D)$$

On peut remplacer $D$ par $\overline{S(T^*)}$ dans le résultat précédent. Donc, en particulier si $T^*$ possède la SVEP, alors $T$ satisfait la propriété (ESDE).

Nous terminons cette section par le résultat suivant : Si $T \in M(\mathcal{A})$ est un multiplicateur sur une algèbre de Banach semi-primaire, régulière et commutative $\mathcal{A}$, alors $T$ satisfait la propriété (ESDE).

Le troisième chapitre est consacré à présenter certains aspects de la théorie spectrale des $C_0$ semi-groupes (semi-groupes fortement continus) d'opérateurs linéaires bornés sur $X$, notamment, nous établissons les inclusions spectrales d'un $C_0$ semi-groupe pour plusieurs parties du spectre. Pour se faire, nous organisons ce chapitre sous forme de trois sections. Dans la première section, nous allons commencer par prouver le résultat suivant : si $A$ est le générateur d'un $C_0$ semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et si $B_\lambda(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)ds$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, alors il existe deux opérateurs linéaires bornés $F_\lambda(t)$ et $G_\lambda(t)$ de $\mathcal{B}(X)$ tels que pour tout $x \in X$, $F_\lambda(t)x \in D(A)$ et $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)B_\lambda(t) = tI$. De plus, les opérateurs $\lambda - A$, $F_\lambda(t)$, $G_\lambda(t)$ et $B_\lambda(t)$ commutent deux à deux.
En se basant sur ce dernier résultat, on montre que si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe et $A$ son générateur infinitésimal, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n(t), L_n(t) \in \mathcal{B}(X)$ tels que :

1. $\forall x \in X$, $H_n(t)x \in D(A^n)$ et $(\lambda - A)^n H_n(t) + L_n(t)B^n_\lambda(t) = I$ ;
2. les opérateurs $(\lambda - A)^n$, $H_n(t)$, $L_n(t)$ et $B^n_\lambda(t)$ commutent deux à deux.

De ce résultat, on déduit que si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur $X$ et si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $R(e^{\lambda t} - T(t))^n$ est fermé, alors $R(\lambda - A)^n$ l'est aussi.
Ces résultats ont une importance particulière dans la suite de notre travail.

Dans la section 2 de ce chapitre, nous allons montrer que pour tout $t > 0$, on a $e^{t\sigma_\star(A)} \subseteq$

$\sigma_\star(T(t))\backslash\{0\}$, où $\sigma_\star$ désigne le spectre quasi-Fredholm, spectre de descente, spectre d'ascente, spectre de Drazin, spectre de descente essentielle et le spectre de d'ascente essentielle.

Dans la troisième section, nous prouvons aussi que l'inclusion spectrale des $C_0$-semi-groupes reste vraie pour le spectre de Saphar noté $\sigma_{Sap}$ et Saphar essentielle $\sigma^e_{Sap}$. Comme conséquence des résultats précédents, nous avons le résultat de stabilité suivant : Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi groupe borné de générateur $A$. Si $\sigma_{Sap}(A)\cap i\mathbb{R}=\emptyset$, alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est stable. Ensuite, nous donnons un résultat de stabilité exponentielle uniforme pour les semi-groupes bornés. Rappelons qu'un $C_0$-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $\lim_{t\to+\infty}e^{\varepsilon t}\|T(t)\|=0$. Plus précisément, nous allons montrer que $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable si, et seulement si, il existe $t_0>0$ tel que $\sigma_{Sap}(T(t_0))\cap\Gamma=\emptyset$, où $\Gamma$ désigne le cercle unité de $\mathbb{C}$.

L'objectif du quatrième chapitre est de mener une étude similiaire à celle établie dans le troisième chapitre pour les semi-groupes intégrés. Nous commençons la section 1 de ce chapitre en établissant le résultat suivant : Soit $A$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Pour $\lambda\in\mathbb{C}$ et $t\geq 0$, on pose $D_\lambda(t)x=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

1. $\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)x=(\lambda-A)D_\lambda(t)x, \forall x\in X$,
2. $\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)x=D_\lambda(t)(\lambda-A)x, \forall x\in D(A)$,
3. $R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^n\subseteq R(\lambda-A)^n$,
4. $N(\lambda-A)^n\subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^n$.

Nous allons prouver que si $\lambda\in\mathbb{C}$, $t\geq 0$ et $L_\lambda(t)x=\int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)xds$, alors :

1. $L_\lambda(t)$ est un opérateur borné sur $X$ .
2. $\forall x\in X$, $L_\lambda(t)x\in D(A)$ et $(\lambda-A)L_\lambda(t)+G_\lambda(t)D_\lambda(t)=\phi_\lambda(t)I$ avec $G_\lambda(t)=e^{-\lambda t}I$ et $\phi_\lambda(t)=\int_0^t\int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}xd\sigma d\tau$.
3. Les opérateurs $L_\lambda(t)$, $G_\lambda(t)$, $D_\lambda(t)$ et $(\lambda-A)$ commutent deux à deux.

A noter que l'égalité $(\lambda-A)L_\lambda(t)+G_\lambda(t)D_\lambda(t)=\phi_\lambda(t)I$ a une importance particulière dans les preuves des résultats, comme nous le verrons dans la suite. En particulier, nous l'utilisons pour prouver les inclusions spectrales des semi-groupes intégrés.

Dans la deuxième section, nous allons continuer à développer la théorie spectrale pour les semi-groupes intégrés. Nous montrons que si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré de générateur $A$, alors pour tout $t > 0$, $\int_0^t e^{s\sigma_\star(A)} ds \subseteq \sigma_\star(S(t))$ où $\sigma_\star$ désigne le spectre semi-Fredholm supérieur, spectre semi-Fredholm inférieur, spectre de Fredholm, spectre quasi-Fredholm, spectre de Fredholm, spectre de Kato, spectre de Kato essentielle, spectre de Saphar, spectre de Saphar essentielle, spectre de descente, spectre d'ascente, spectre semi-Browder supérieur, spectre semi-Browder inférieur, spectre de Browder, spectre de descente essentielle et le spectre d'ascente essentielle.

Chapitre 1

# Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Pour faciliter l'approche et la lecture de ce chapitre nous avons omis, volontiers, certains détails et présenté des versions particulières de certains résultats. Pour les lecteurs désireux de plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données. Le chapitre est organisé comme suit : En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs fermés. La deuxième section a pour objet de présenter les définitions et les principaux résultats de l'ascente et la descente d'un opérateur qui seront utilisé fréquemment dans ce travail. La troisième section, est consacrée à la présentation des semi-groupes (semi-groupes fortement continus, semi-groupes intégrés) et quelques propriétés que l'on utilisera dans les deux derniers chapitres.

## 1.1 Rappels et notations

Dans ce travail, $X$ désigne un espace de Banach complexe et $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $X$. Dans cette section nous présentons les définitions et les principaux résultats sur les opérateurs fermés. Soit $A$ un opérateur fermé de domaine $D(A)$, on note $A^*$, $N(A)$, $\alpha(A)$, $R(A)$, $\beta(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_{ap}(A)$, $\sigma_{su}(A)$, respectivement l'adjoint, le noyau, la dimension du noyau, l'image, la codimension de l'image, le spectre, le spectre ponctuel, le spectre approximatif, et le spectre surjectif de $A$ sont définis respectivement par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas bijectif } \}$$

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas injectif } \}$$

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas borné inférieurement } \}$$

$$\sigma_{su}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas surjectif } \}$$

Le résolvant $\rho(A)$ de $A$ est le complémentaire de $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$, c'est un ouvert, et donc le spectre $\sigma(A)$ est fermé, voir[22]. L'application $R(.,A) : \lambda \in \rho(A) \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ s'appelle la résolvante de $A$.

### 1.1.1 Opérateur de Fredholm

**Définition 1.1.1.** [10] Soit $A$ un opérateur fermé, on dit que :

1. $A$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur (resp. inférieur) si $R(A)$ est fermé et $\alpha(A)$ fini (resp. $\beta(A)$ fini).
2. $A$ est semi-Fredholm s'il est semi-Fredholm inférieur ou semi-Fredholm supérieur. Dans ce cas l'indice de $A$ est par définition $ind(A) = \alpha(A) - \beta(A)$.
3. $A$ est un opérateur de Fredholm s'il est semi-Fredholm inférieur et semi-Fredholm supérieur..

Les spectres associés aux classes d'opérateur définis ci-dessus sont :
Le spectre semi-Fredholm supérieur :

$$\sigma_{uf}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm supérieur } \}$$

Le spectre semi-Fredholm inférieur :

$$\sigma_{lf}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm inférieur } \}$$

Le spectre de Fredholm :

$$\sigma_{f}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas de Fredholm } \}$$

Le spectre semi-Fredholm :

$$\sigma_{sf}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm } \}$$

Evidemment, $\sigma_{sf}(A) = \sigma_{uf}(A) \cap \sigma_{lf}(A)$ et $\sigma_f(A) = \sigma_{uf}(A) \cup \sigma_{lf}(A)$. Notons que si $A$ est borné alors ces ensembles sont non vides et compacts dans $\mathbb{C}$, voir[39].

Les opérateurs quasi-Fredholm ont été introduites par J. P. Labrousse [31] comme une généralisation des opérateurs semi-Fredholm. Posons :

$$\Delta(A) = \{n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, R(A^n) \cap N(A) = R(A^m) \cap N(A)\}$$

et on appelle degré d'itération stable de $A$, noté $dist(A)$ la quantité $dist(A) = inf\Delta(A)$ avec $inf\emptyset = \infty$.

**Définition 1.1.2.** [10] Soit $A$ un opérateur fermé, on dira que $A$ est quasi-Fredholm de degré $d \in \mathbb{N}$, si :

1. $dis(A) = d$ ;
2. $\forall n \geq d$, $R(A^n)$ est fermé dans $X$ ;
3. $R(A) + N(A^d)$ est fermé dans $X$.

Le spectre quasi-Fredholm d'un opérateur fermé $A$ est défini par :

$$\sigma_{qF}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas quasi-Fredholm }\}$$

Si $T \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma_{qF}(T)$ est un compact.

**Définition 1.1.3.** [10] Soit $A$ un opérateur fermé, on dit que :

1. $A$ est un opérateur semi-Weyl supérieur s'il est semi-Fredholm supérieur d'indice négatif.
2. $A$ est un opérateur semi-Weyl inférieur s'il est semi-Fredholm inférieur d'indice positif.
3. $A$ est un opérateur de Weyl s'il est de Fredholm d'indice nul.

Les spectres associés aux classes d'opérateur définis ci-dessus sont :

Le spectre semi-Weyl supérieur :

$$\sigma_{uw}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Weyl supérieur }\}$$

Le spectre semi-Weyl inférieur :

$$\sigma_{lw}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Weyl inférieur }\}$$

Le spectre de Weyl :

$$\sigma_{w}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas Weyl }\}$$

### 1.1.2 Opérateur de Kato

On considère les deux chaines des sous-espaces noyaux et images associés à $A$ :

$$N(A^n) \subseteq N(A^{n+1}) \text{ et } R(A^{n+1}) \subseteq R(A^n), n \geq 0$$

En général, ces inclusions sont strictes. Le noyau généralisé et l'image généralisée de $A$ sont :

$$N^\infty(A) = \bigcup_{n\geq 0} N(A^n) \text{ et } R^\infty(A) = \bigcap_{n\geq 0} R(A^n)$$

Le spectre semi-régulier a été introduit par Apostol [6] pour les opérateurs sur les espaces de Hilbert et successivement étudié par plusieurs auteurs, Müller [38], Rakočević [43], Mbekhta et Ouahab [35] et Mbekhta [34] dans le contexte plus général agissant sur les espaces de Banach. Pour définir les opérateurs semi-réguliers, on a besoin du lemme, purement algèbrique, suivant :

**Lemme 1.1.1.** [1][39] Soit $A$ une application linéaire dans un espace vectoriel dans lui-*même*, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout $m \geq 0$, $N(A) \subseteq R(A^m)$ ;
2. pour tout $n \geq 0$, $N(A^n) \subseteq R(A)$ ;
3. pour tout $n \geq 0$, pour tout $m \geq 0$, $N(A^n) \subseteq R(A^m)$ ;
4. pour tout $n \geq 0$, pour tout $m \geq 0$, $N(A^n) = T^m(N(A^{n+m}))$ ;
5. $N^\infty(A) \subseteq R(A)$ ;
6. $N(A) \subseteq R^\infty(A)$ ;
7. $N^\infty(A) \subseteq R^\infty(A)$.

**Définition 1.1.4.** [36] Un opérateur fermé $A$ est dit semi-régulier si $R(A)$ est fermé et il vérifie l'une des conditions du lemme 1.1.1.

**Remarque 1.** *Un opérateur semi-régulier est connu aussi dans la littérature par l'opérateur de Kato.*

Pour une version essentielle de la semi-régularité, nous utilisons la notation suivante :

**Définition 1.1.5.** [39] Soit $M, L \subseteq X$ deux sous-espaces de $X$, on dit que $M$ est inclus dans $L$ essentiellement et on note $M \subseteq_e L$, s'il existe un sous-espace $F$ de $X$ de dimension finie, tel que $M \subseteq L + F$.

**Définition 1.1.6.** [36][39] Un opérateur fermé $A$ est dit essentiellement semi-régulier si $R(A)$ est fermé et $N(A) \subseteq_e R^\infty(A)$.

Le spectre semi-régulier d'un opérateur fermé $A$ est défini par :

$$\sigma_K(A) =: \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-régulier } \}$$

et sa version essentielle par :

$$\sigma_{es}(A) =: \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ n'est pas essentiellement semi-régulier } \}$$

**Proposition 1.1.1.** [39] Si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors :

1. $\sigma_K(A)$ et $\sigma_{es}(A)$ sont toujours compacts non vides du plan complexe $\mathbb{C}$.
2. Pour toute fonction analytique $f$ sur un voisinage du spectre $\sigma(A)$, on a :
$$\sigma_K(f(A)) = f(\sigma_K(A)) \text{ et } \sigma_{es}(f(A)) = f(\sigma_{es}(A))$$

**Définition 1.1.7.** [36] Un opérateur fermé $S$ s'appelle un inverse généralisé de $A$ si $R(A) \subseteq D(S)$, $R(S) \subseteq D(A)$, $ASA = A$ sur $D(A)$ et $SAS = S$ sur $D(S)$, ce qui est équivaut à $R(A) \subseteq D(S)$, $R(S) \subseteq D(A)$, $ASA = A$ sur $D(A)$.

**Définition 1.1.8.** *Un opérateur fermé $A$ s'appelle un opérateur de Saphar si $A$ a un inverse généralisé et $N(A) \subseteq R^\infty(A)$, ce qui équivaut à $A$ est un opérateur de Kato qui admet un inverse généralisé.*

Si nous supposons dans la définition ci-dessus que $N(A) \subseteq_e R^\infty(A)$, $A$ est dit un opérateur essentiellement Saphar. Les spectres de Saphar et essentiellement Saphar sont définis par :

$$\sigma_{Sap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas de Saphar } \}$$

$$\sigma^e_{Sap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas essentiellement Saphar } \}$$

**Proposition 1.1.2.** [39] Si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors :

1. $\sigma_{Sap}(A)$ et $\sigma^e_{Sap}(A)$ sont toujours compacts non vides du plan complexe $\mathbb{C}$.
2. Pour toute fonction analytique $f$ sur un voisinage du spectre $\sigma(A)$, on a :
$$\sigma_{Sap}(f(A)) = f(\sigma_{Sap}(A)) \text{ et } \sigma^e_{Sap}(f(A)) = f(\sigma^e_{Sap}(A))$$

### 1.1.3 Propriété de l'extension unique

**Définition 1.1.9.** [2][32] Soit $A$ un opérateur fermé dans l'espace de Banach $X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on dit que $A$ admet la propriéte de l'extension unique en $\lambda$ (et on note $A$ a la SVEP en $\lambda$) si $f = 0$ est la seule solution analytique dans un voisinage de $\lambda$ de l'équation : $(A - \mu I)f(\mu) = 0$. On dira aussi que $A$ a la SVEP si $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A$ a la SVEP en $\lambda$.

On note

$$\mathcal{S}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A \text{ n'admet pas la SVEP en } \lambda\}$$

Alors $A$ admet la SVEP si, et seulement si $S(A) = \emptyset$. Si $A$ est un opérateur borné sur $X$, alors $\mathcal{S}(A)$ est ouvert et $S(A) \subseteq \sigma_p(A)$, donc $int(\sigma_p(A)) = \emptyset$ implique que $A$ possède la SVEP, en particulier tout opérateur de spectre totalement discontinu possède la SVEP, d'où les opérateurs compacts et les opérateurs algèbrique possèdent la SVEP. Evidemment $A$ admet la SVEP en tout point de $\rho(A)$, et aussi en tout point de $\partial\sigma(A)$, en particulier en tout point isolé du spectre.

**Proposition 1.1.3.** [32] Soit $A$ un opérateur fermé dans un $X$ et supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_0 I - A$ soit surjectif et non injectif alors $A$ n'a pas la SVEP en $\lambda_0$.

**Proposition 1.1.4.** [32] Soit $A$ un opérateur fermé tel que $A$ a la SVEP, alors $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si $\lambda I - A$ n'est pas surjectif.

Donc la SVEP permet de réduire le spectre dans le sens suivant :

**Corollaire 1.1.1.** [32] Soit $A$ un opérateur fermé.

1. Si $A$ admet la SVEP, alors $\sigma(A) = \sigma_{su}(A)$ ;
2. Si $A^*$ admet la SVEP, alors $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A)$.

**Définition 1.1.10.** [2][32] Soit $A$ un opérateur fermé et $x \in X$ fixé, notons $\rho_A(x)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\lambda$ de $\lambda$ dans $\mathbb{C}$ et une fonction $f : \mathcal{V}_\lambda \to D(A)$ analytique (dans $\mathcal{V}_\lambda$) vérifiant :

$$(A - \mu I)f(\mu) = x, \forall \mu \in \mathcal{V}_\lambda$$

$\rho_A(x)$ est appelé l'ensemble résolvant local de $A$ en $x$, son complémentaire dans $\mathbb{C}$, qu'on note $\sigma_A(x)$ est le spectre local de $A$ en $x$.

Il est immédiat de vérifier les propriétés suivantes :

**Proposition 1.1.5.** [1], [39] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. On a les propriétés suivantes :

1. $\sigma_A(0) = \emptyset$ ;
2. $\sigma_A(\alpha x) = \sigma_A(x)$, $\forall \alpha \neq 0, x \in X$ ;
3. $\sigma_A(x+y) \subset \sigma_A(x) \cup \sigma_A(y), \forall x, y \in X$ ;
4. Pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$ qui commute avec $A$, $\ x \in X$, $\sigma_A(Sx) \subseteq \sigma_A(x)$ ;
5. $\bigcup_{x \in X} \sigma_A(x) = \sigma_s(A)$ ;
6. $\sigma_{A \oplus S}(x \oplus y) = \sigma_A(x) \cup \sigma_S(y)$, avec $S \in \mathcal{B}(X)$, $x, y \in X$ ;

Pour chaque sous-ensemble $F$ de $\mathbb{C}$, on définit le sous-espace spectral local de $A$ associé à $F$ par $X_A(F) = \{x \in X : \sigma_A(x) \subseteq F\}$. Évidemment, $X_A(F)$ est un sous-espace hyperinvariant de $A$, mais pas toujours fermé. On dit que $A$ possède la condition de Dunford $C$, si pour tout fermé $F$ de $\mathbb{C}$ l'espace $X_A(F)$ est fermé, (voir [1], [28]).

**Définition 1.1.11.** [1] On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ est décomposable si, pour tout recouvrement ouvert $\{U_1, U_2\}$ du plan complexe $\mathbb{C}$, il existe deux sous-espaces $A$ invariants fermés $Y_1$ et $Y_2$ de $X$ tels que $Y_1 + Y_2 = X$ et $\sigma(A_{/Y_k}) \subseteq U_k$ pour $k \in \{1,2\}$ .

**Définition 1.1.12.** [28] On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ satisfait la condition de Bishop $(\beta)$ si pour tout ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ et pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions analytiques sur $U$ à valeurs dans $X$, $(A-\mu)f_n(\mu)$ converge vers zéro dans $O(U,X)$ entraîne $f_n(\mu)$ converge vers zéro dans $O(U,X)$, où $O(U,X)$ désigne l'espace de Fréchet des fonctions analytiques sur $U$ à valeur dans $X$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $U$.

**Définition 1.1.13.** [28] On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ satisfait la propriété de décomposition $(\delta)$, si pour tout $x \in X$ et pour tout pair $(U,V)$ d'ouverts recouvrant $\mathbb{C}$, il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $x = x_1 + x_2$ avec $x_i = (T-\mu)f_i(\mu)$, $\forall \mu \in \mathbb{C} \backslash \overline{V_i}$, où $f_i : \mathbb{C} \backslash \overline{V_i} \to X$ est analytique pour $i \in \{1,2\}$.

**Théorème 1.1.1.** [29] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur sur un espace de Banach $X$, alors
$A$ est décomposable $\Rightarrow$ $A$ satisfait la propriété $(\beta)$ $\Rightarrow$ $A$ satisfait la propriété $(C)$ $\Rightarrow$ $A$ satisfait la SVEP.

**Théorème 1.1.2.** [29] Pour tout opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ sur un espace de Banach $X$, on a les assertions suivantes :

1. si $A$ satisfait $(\beta)$, alors $A^*$ satisfait $(\delta)$,
2. si $A$ satisfait $(\delta)$, alors $A^*$ satisfait $(\beta)$,
3. si $A^*$ satisfait $(\delta)$, alors $A$ satisfait $(\beta)$.

## 1.2 L'ascente et la descente d'un opérateur

### 1.2.1 L'ascente et la descente d'un opérateur fermé

On rappelle qu'un opérateur fermé $A$ est dit de descente finie, s'il existe un entier naturel positif $n$ pour lequel : $R(A^n) = R(A^{n+1})$ ; ce qui est équivaut aussi à $R(A) + N(A^n) = X$ ; et dans ce cas la descente de $A$ est définie par :

$$d(A) := \inf\{n \in \mathbb{N} : R(A^n) = R(A^{n+1})\}$$

De manière similaire, un opérateur fermé $A$, est dit d'ascente finie s'il existe un entier naturel positif n pour lequel : $N(A^n) = N(A^{n+1})$ ; ce qui est équivaut aussi à $R(A^n) \cap N(A) = \{0\}$ ; et dans ce cas l'ascente de $A$ est définie par :

$$a(A) = \inf\{n \in \mathbb{N} : N(A^n) = N(A^{n+1})\}$$

On conviendra que $\mathbf{inf}\emptyset = \infty$. Les spectres de descente et d'ascente sont :

$$\sigma_{des}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ d(A - \lambda I) = \infty\}$$

$$\sigma_{asc}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ a(A - \lambda I) = \infty\}$$

**Théorème 1.2.1.** [51] Soit $A$ un opérateur fermé sur $X$. Si $a(A)$ et $d(A)$ sont finies, alors $a(A) \leq d(A)$, avec égalité si $A$ est borné.

**Remarque 2.** *En général, $a(A) < \infty$ et $d(A) < \infty$ n'impliquent pas que $a(A) = d(A)$. En effet, soit $A$ un opérateur défini par : $D(A) \neq X$, $D(A) \neq \{0\}$ et $Au = u$. Alors $a(A) = 0$ et $d(A) = 1$.*

**Proposition 1.2.1.** [9][12] Si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors :

1. $\sigma_{desc}(A)$ et $\sigma_{asc}(A)$ sont toujours compacts non vides du plan complexe $\mathbb{C}$.
2. Pour toute fonction analytique $f$ sur un voisinage du spectre $\sigma(A)$, non constante sur les composantes connexes de son domaine, on a :

$$\sigma_{desc}(f(A)) = f(\sigma_{desc}(A)) \text{ et } \sigma_{asc}(f(A)) = f(\sigma_{asc}(A))$$

**Théorème 1.2.2.** [39] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tels que $N(A^{k+1}) = N(A^k)$ et $R(A^{k+1}) = R(A^k)$. Alors $R(A^k)$ est fermé et $X = N(A^k) \oplus R(A^k)$.

**Définition 1.2.1.** [12] Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe avec unité $e$. À un élément $a \in \mathcal{A}$ , on associe l'opérateur de multiplication à gauche $L_a$ défini par $L_a(x) := ax$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. La descente d'un élément $a \in \mathcal{A}$ est définie par $d(a, \mathcal{A}) := d(L_a)$ et le spectre de descente de $a$ est défini par $\sigma_{desc}(a, \mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ d(a - \lambda e, \mathcal{A}) = \infty\}$.

**Définition 1.2.2.** [10] Soit $A$ un opérateur fermé, on dit que :

1. $A$ est un opérateur semi-Browder supérieur s'il est semi-Fredholm supérieur d'ascente finie.
2. $A$ est un opérateur semi-Browder inférieur s'il est semi-Fredholm inférieur de descente finie.
3. $A$ est un opérateur de Browder s'il est de Fredholm d'ascente et de descente finies .

Les spectres associés aux classes d'opérateur définis ci-dessus sont :
Le spectre semi-Browder supérieur :

$$\sigma_{ub}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Browder supérieur }\}$$

Le spectre semi-Fredholm inférieur :

$$\sigma_{lb}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas semi-Browder inférieur }\}$$

Le spectre de Fredholm :

$$\sigma_{b}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \lambda I \text{ n'est pas de Browder }\}$$

Notons que si $A$ est borné alors ces ensembles sont compacts dans $\mathbb{C}$, voir[39].

### 1.2.2 L'inverse de Drazin d'un opérateur fermé

**Définition 1.2.3.** [55] Soit $A$ un opérateur fermé. On appelle inverse de Drazin de $A$, un opérateur $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que :

i) $R(B) \subseteq D(A)$,

ii) $BAB = B$,

iii) pour tout $x \in D(A)$, on a $ABx = BAx$,

iv) il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $A^k(I - AB) = 0$.

**Théorème 1.2.3.** [55] Un opérateur fermé $A$ admet un inverse de Drazin si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $a(A) = d(A) = k$ et $X = R(A^k) \oplus N(A^k)$.

Le spectre de Drazin est défini par :

$$\sigma_D(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ n'admet pas un inverse de Drazin }\}$$

D'après [10], $A$ admet un inverse de Drazin si et seulement si, $0$ est un pôle de la résolvante de $A$.

### 1.2.3 L'ascente essentielle et la descente essentielle d'un opérateur fermé

Un opérateur fermé $A$ est dit de descente essentielle finie, s'il existe un entier naturel positif $n$ pour lequel : $\dim R(A^n)/_{R(A^{n+1})} < \infty$, dans ce cas la descente essentielle de $A$ est définie par :

$$d_e(A) := \inf\{n \in \mathbb{N} : \dim R(A^n)/_{R(A^{n+1})} < \infty\}$$

De manière similaire, un opérateur fermé $A$ est dit d'ascente essentielle finie, s'il existe un entier naturel positif n pour lequel : $\dim N(A^{n+1})/_{N(A^n)} < \infty$, et dans ce cas l'ascente de $A$ est définie par :

$$a_e(A) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \dim N(A^{n+1})/_{N(A^n)} < \infty\}$$

On conviendra que $\inf \emptyset = \infty$. Les spectres de descente essentielle et d'ascente essentielle sont :

$$\sigma^e_{des}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ d_e(A - \lambda I) = \infty\}$$

$$\sigma^e_{asc}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ a_e(A - \lambda I) = \infty\}$$

Il est clair que $\sigma^e_{des}(A) \subseteq \sigma_{des}(A)$ et $\sigma^e_{asc}(A) \subseteq \sigma_{asc}(A)$.
D'après [9], si $A \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma^e_{des}(A)$ et $\sigma^e_{asc}(A)$ sont compacts de $\mathbb{C}$.

**Corollaire 1.2.1.** [9],[12] Soit $A$ un opérateur borné sur $X$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sigma(A)$ est au plus dénombrable,

(ii) $\sigma_{desc}(A)$ est au plus dénombrable.

(iii) $\sigma^{e}_{desc}(A)$ est au plus dénombrable.

(iv) $\sigma_{asc}(A)$ est au plus dénombrable.

(v) $\sigma^{e}_{asc}(A)$ est au plus dénombrable.

## 1.3 Semi-groupes

### 1.3.1 $C_0$ semi-groupes

Dans cette section, nous introduisons la classe des $C_0$ semi-groupes (semi-groupes fortement continus) et nous étudions ses propriétés élémentaires. Nous commençons par rappeler la définition d'un $C_0$ semi-groupe. Pour un exposé de base sur la théorie des $C_0$ semi-groupes, le lecteur peut consulter les livres de E.J. Engel et R. Nagel [22], E. Hille et R.S. Phillips [27] et A. Pazy [41].

**Définition 1.3.1.** [22][27][41] Soit $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de $X$. On dit que $\mathcal{T}$ est un $C_0$ semi-groupe si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $T(0) = I$,
2. $T(s+t) = T(s)T(t) \qquad$ pour tout $s,t \geq 0$,
3. $\lim\limits_{t\downarrow 0} T(t)x = x \qquad$ pour chaque $x \in X$.

**Théorème 1.3.1.** [41] Si $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$ semi-groupe, alors il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que : $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.

**Corollaire 1.3.1.** [41] Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$ semi-groupe, alors pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $X$.

A un $C_0$ semi-groupe $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ on peut associer un opérateur $A$ défini sur l'ensemble

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe } \},$$

par

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ pour tout } x \in D(A).$$

L'opérateur $A$ est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et $D(A)$ son domaine.

**Théorème 1.3.2.** [22],[41] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$ semi-groupe et soit $A$ son générateur infinitésimal. Alors

1. Pour tout $x \in X$, on a $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$.
2. Pour tout $x \in X$, on a $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et $A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$.
3. Pour tout $x \in D(A)$, on a $T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.
4. Pour tout $x \in D(A)$, on a $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Axdr = \int_s^t AT(r)xdr$.

Hille-Yosida a établit dans [41] que si $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $\mathcal{T}$, alors $A$ est un opérateur fermé à domaine dense.

**Puissances des générateurs.**[7][53]

Nous fixons $D(A^0) = X$, $A^0 = I$, et pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons par récurrence :

$$D(A^n) := \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = AA^{n-1}x \quad \text{pour} \quad x \in D(A^n),$$

Nous introduisons

$$D(A^\infty) := \cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n),$$

et on a :

$$X = D(A^0) \supseteq D(A) \supseteq D(A^2) \supseteq ... \supseteq D(A^n) \supseteq ... \supseteq D(A^\infty).$$

**Théorème 1.3.3.** [41] Soit $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine $D(A^n)$ de $A^n$ est dense dans $X$, alors $D^\infty(A) = \cap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $X$.

**Exemple 1.** [41] Soit $X = BU(0,\infty)$ l'espace des fonctions uniformément continues sur $[0,+\infty[$. Pour $t \geq 0$ posons $(T(t)f)(s) = f(t+s)$. Alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$ semi-groupe sur $X$. Son générator infinitésimal $A$ est défini par $D(A) = \{f \in X : f' \in X\}$ et $(Af)(s) = f'(s)$ pour $f \in D(A)$.

**Exemple 2.** [22] Soit $q : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\sup_{s\in\Omega} Re\ q(s) < \infty$. Alors la famille d'opératurs $(T_q(t))_{t\geq 0}$ où $T_q(t)f = e^{tq}f$ pour $t \geq 0$ et $f \in L^p(\Omega,\mu)$ est un $C_0$ semi-groupe appelé semi-groupe de multiplication, son générateur l'opérateur de multiplication défini par $M_q f = q.f$ pour tout $f \in D(M_q)$ et $D(M_q) = \{f \in L^p(\Omega,\mu) : q.f \in L^p(\Omega,\mu)\}$.

### 1.3.2 Semi-groupes intégrés

**Définition 1.3.2.** [52] On appelle semi-groupe intégré sur $X$ une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés vérifiant les propriétés suivantes :

1. $S(0)=0$ ;
2. l'application $t\in[0,\infty)\mapsto S(t)\in\mathcal{B}(X)$ est fortement continue ;
3. pour tous $t,s\geq 0$ on a $S(t)S(s)=\int_0^t[S(r+s)-S(r)]dr$.

On dira que le semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ est non dégénéré si de plus

$$\forall t>0,\ S(t)x=0\Rightarrow x=0$$

.

**Remarque 3.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous désignerons par $C^n$ l'ensemble*

$$\{x\in X|S(.)x\in C^n([0,\infty);X)\}$$

*avec la convention $C^0=X$. Alors la propriété 3 de la définition précédente peut-être remplacée par*

$$S(t)x\in C^1$$

*et*

$$S'(r)S(t)x=S(r+t)x-S(r)x,\ \textit{pour tout } r,\ t\geq 0 \textit{ et } x\in X.$$

*De plus, nous avons*

$$S(t):C^n\to C^{n+1},\ \textit{pour tout } n\in\mathbb{N} \textit{ et } t\geq 0$$

*et*

$$S'(t):C^n\to C^n,\ \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}^* \textit{ et } t\geq 0$$

**Proposition 1.3.1.** [52] Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré. Alors :

1. pour tout $x\in C^1$ on a $S(r)S'(t)x=S(r+t)x-S(t)x, \forall r,t\geq 0$ ;

2. pour tout $x \in C^1$ on a $S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x, \forall t \geq 0$ ;

3. pour tout $x \in C^1$ on a $S''(0)S(t)x = S(t)S''(0)x, \forall t \geq 0$.

**Exemple 3.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$ semi-groupe. Alors la famille $(S(t))_{t\geq 0}$ où $S(t) = \int_0^t T(s)ds$ est un semi-groupe intégré sur $X$*

**Exemple 4.** *On considère $X = \ell^2$ et la famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur $X$ définie par :*

$$S(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\int_0^t e^{a_n s} ds x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

*Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré.*

**Définition 1.3.3.** [52] On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $(S(t))_{t\geq 0}$ un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$ défini par :

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y \text{ si et seulement si pour tout } t \geq 0 \text{ on a } S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y dr$$

Les semi-groupes intégrés considéres dans le chapitre 4 sont non dégénérés.

**Remarque 4.** *On voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in C^1$ et $S'(t)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0$.*

**Proposition 1.3.2.** [52] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors $C^2 \subseteq D(A) \subseteq C^1$ et $Ax = S''(0)x, \forall x \in C^2$.

**Proposition 1.3.3.** [52] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors $A$ est un opérateur fermé.

**Proposition 1.3.4.** [52] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors $S(t) : C^1 \to C^2 \subseteq D(A)$ et pour tout $x \in C^1$ on a $AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - x, \forall t \geq 0$. De plus, pour tout $x \in D(A)$ on a $AS(t)x = S(t)Ax, \forall t \geq 0$.

**Proposition 1.3.5.** [52] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Pour tout $x \in X$, on a $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$ et $A \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - tx, \forall t \geq 0$.

**Théorème 1.3.4.** [52] Un semi groupe intégré est déterminé uniquement par son générateur.

Chapitre 2

# Égalité du spectre de descente

Ce chapitre consiste à étudier d'une part la relation entre le spectre de descente $\sigma_{desc}(T)$ d'un opérateur borné $T$ sur un espace de Banach $X$ et le spectre de descente $\sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$ de $T$ comme un élément de l'algère de Banach $\mathcal{B}(X)$. D'autre part, la relation entre $\sigma_{desc}(T)$ et le spectre $\sigma^e_{desc}(T)$ de descente essentielle de $T$.

## 2.1 Égalité du spectre de descente dans un espace de Hilbert

A.Haily, A.Kaidi et A.Rodrigues Palacios ont établi dans [23] la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1.** *Si $T$ est un opérateur borné sur un espace de Banach $X$, alors*

$$\sigma_{desc}(T) \subseteq \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)).$$

*En outre, l'inclusion ci-dessus devient une égalité si $X$ satisfait la "propriété de factorisation" suivante : Pour tout $F, G \in \mathcal{B}(X)$ avec $R(F) \subseteq R(G)$, il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $F = GS$.*

Pour un ensemble $I$ non vide et $1 \leq p < \infty$, on note par $l^p(I, X)$ l'espace de Banach de toutes les familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $X$ tels que $\|(x_i)_{i\in I}\|^p := \sum_{i\in I} \|x_i\|^p < \infty$, et par $l_\infty(I, X)$ l'espace de Banach de toutes les familles bornées $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $X$ tels que $\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} \|x_i\| < \infty$. Lorsque $X$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous écrivons $\ell^p(I)$ au lieu de $l^p(I, X)$, et si de plus $I = \mathbb{N}$, alors nous écrivons simplement $\ell^p$.

**Remarque 5.** *Notons que l'inclusion de la proposition précédente est stricte en général.*
*En effet, dans* [23], A. Haily, A. Kaidi et A. Rodrigues Palacios ont montré que si $X$ est un espace de Banach satisfaisant l'une des conditions suivantes :

i) $X$ est isomorphe à $\ell^p(I)$ pour certains $p \neq 2$ avec $1 < p \leq \infty$, et un ensemble infini $I$.

ii) $X$ est isomorphe à $\ell^p \oplus \ell^1$ pour certains $p$ avec $1 < p < \infty$.

Alors, il existe un opérateur borné surjectif $T$ sur $X$, vérifiant $T^n = T^{n+1}S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S \in \mathcal{B}(X)$. Par conséquent, pour un tel opérateur $T$ on a $0 \in \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)) \backslash \sigma_{desc}(T)$.

Dans [23], A.Haily, A.Kaidi et A.Rodrigues Palacios ont montré le lemme suivant :

**Lemme 2.1.1.** *Soient $X$, $Y$ et $Z$ des espaces de Banach, $F : X \to Z$ et $G : Y \to Z$ deux opérateurs bornés tels que $N(G)$ admet un supplémentaire topologique dans $Y$ et $R(F) \subseteq R(G)$. Alors il existe un opérateur borné $S : X \to Y$ satisfaisant $F = GS$.*

Comme conséquence immédiate du lemme 2.1.1 et de la proposition 2.1.1, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.1.** *Soit $T$ un opérateur borné sur un espace de Hilbert $H$, alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(H))$$

**Définition 2.1.1.** [1][29] Une application $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sur une algèbre de Banach commutative complexe $\mathcal{A}$ est dite un multiplicateur sur $\mathcal{A}$, si pour tout $u, v \in \mathcal{A}$, on a :

$$u(Tv) = (Tu)v$$

Pour tout élément $a \in \mathcal{A}$, l'opérateur de multiplication à droite $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ défini par $L_a(u) := au$ pour tout $u \in \mathcal{A}$, est clairement un multiplicateur sur $\mathcal{A}$. L'ensemble de tous les multiplicateurs de $\mathcal{A}$ est noté $M(\mathcal{A})$. Nous rappelons qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est dite semi-première si $\{0\}$ est le seul idéal $J$ de $\mathcal{A}$ tel que $J^2 = \{0\}$, pour plus de détails, voir [1]. On a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.2.** *Si $T \in M(\mathcal{A})$ est un multiplicateur sur une algèbre de Banach commutative semi-première $\mathcal{A}$, alors :*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(\mathcal{A}))$$

**Démonstration** Soit $\lambda \notin \sigma_{desc}(T)$, alors $T-\lambda$ est de descente finie $d$. D'après [29, Proposition 4.10.8], il existe un sous-espace vectoriel fermé $W$ de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = N(T-\lambda)^{d+1} \oplus W$. D'après le théorème 2.1.1, il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ tel que $(T-\lambda)^d = (T-\lambda)^{d+1}S$, d'où $\lambda \notin \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(\mathcal{A}))$.

D'après [42, 4.9.2.1], nous disons que l'espace de Banach $X$ possède la propriété de "lifting" si, pour tout sous-espace fermé $N$ d'un espace Banach arbitraire $Y$ et tout opérateur linéaire borné $\widehat{T} : X \to Y/N$, il existe un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ tel que $\widehat{T} = \pi T$, où $\pi : Y \to Y/N$ est la surjection canonique. Selon [42, 4.9.2.6], $X$ a la propriété de "lifting" si et seulement s'il est isomorphe à $\ell^1(I)$, pour un ensemble $I$. Ce résultat peut être reformulé comme suit :

**Proposition 2.1.2.** [23] Soit $X$ un espace de Banach, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X$ est isomorphe à $\ell^1(I)$, pour un ensemble $I$.
2. Pour tous espaces de Banach $Y$ et $Z$, et tous opérateurs bornés $F : X \to Z$ et $G : Y \to Z$ tels que $R(F) \subseteq R(G)$, il existe un opérateur borné $S : X \to Y$ satisfaisant $F = GS$.

**Corollaire 2.1.3.** [23] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $X$ est isomorphe à $\ell^1(I)$ ou $\ell^2(I)$ pour un ensemble $I$, alors

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

## 2.2 Égalité du spectre de descente dans un espace de Banach

Dans [23], A.Haily, A.Kaidi et A.Rodrigues Palacios ont établi que si $T$ est un opérateur linéaire borné sur $X$ tel que $\sigma(T)$ est d'intérieur vide, alors $T$ satisfait l'égalité du spectre de descente. L'objectif principal de cette section est de généraliser ce résultat à un opérateur linéaire borné dont le spectre est d'intérieur non vide.

**Proposition 2.2.1.** [23] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur tel que $int(\sigma(T)) = \emptyset$, alors

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Remarque 6.** *On peut construire un opérateur $T$ satisfaisant l'égalité du spectre de descente sans que l'intérieur du spectre $\sigma(T)$ soit vide. Par exemple, si $T$ est l'opérateur de décalage droit bilatéral sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, défini par $T(x_n)_n = (x_{n-1})_n$ pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. On voit facilement que $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. Puisque $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert, alors $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.*

La plupart des résultats obtenus dans cette section sont basés sur le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1.** [23]
Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur de descente $d = d(T)$ finie. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $0 < |\mu| < \delta$, on a :

1. $T - \mu$ est surjectif,
2. $\dim N(T - \mu) = \dim(N(T) \cap R(T^d))$.

**Lemme 2.2.2.** [1] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $d(A) < \infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A$ a la SVEP en 0 ;
2. $a(A) < \infty$ ;
3. 0 est un pôle de la résolvante ;
4. 0 est un point isolé dans $\sigma(A)$.

**Théorème 2.2.1.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$, alors*

$$\sigma_{desc}(T) \subseteq \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)) \subseteq \sigma_{desc}(T) \cup \overline{\mathcal{S}(T)}$$

**Démonstration** Soit $\lambda$ un nombre complexe tel que $T - \lambda$ est de descente finie $d$ et $\lambda \notin \overline{\mathcal{S}(T)}$. D'après le lemme 2.2.1, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $0 < |\lambda - \mu| < \delta$, l'opérateur $T - \mu$ est surjectif et $T$ a la SVEP en $\mu$. En utilisant le corollaire 1.1.1, on obtient $T - \mu$ est bijectif pour tout $0 < |\lambda - \mu| < \delta$. Donc $\lambda$ est un point isolé dans $\sigma(T)$. D'après le lemme 2.2.2, $T - \lambda$ d'ascente et de descente finies et d'après le théorème 1.2.2, nous avons $X = N(T - \lambda)^d \oplus R(T - \lambda)^d$. Il s'ensuit que $N(T - \lambda)^d$ admet un supplémentaire topologique dans $X$. D'après lemme 2.1.1, il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $(T - \lambda)^d = (T - \lambda)^{d+1} S$, ce qui implique $\lambda \notin \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

**Corollaire 2.2.1.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ possède la SVEP, alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Remarque 7.** *Soit $T$ l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ par $T(x_n)_n = (x_{n+1})_n$ pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. D'après le corollaire 2.1.1, nous avons $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$. De plus $T$ n'admet pas la SVEP en 0, ce qui montre que la condition "$T$ possède la SVEP" n'est pas nécessaire.*

**Exemple 5.** *Soient $m$ la restriction de la mesure de Lebesgue sur le disque $\mathbb{D}$, $L^1(m)$ l'espace de Banach des fonctions complexes définies sur $\mathbb{D}$ absolument intégrables par rapport à $m$, et $A^1(m)$ l'espace de Bergman des fonctions de $L^1(m)$ analytiques sur $\mathbb{D}$. Il est clair que $A^1(m)$ est la fermeture de l'ensemble des fonctions polynomiales. Définissons l'opérateur $M$ sur $L^1(m)$ par $(Mf)(z) = zf(z)$, $f \in L^1(m)$. Il est facile de voir que $M$ est un opérateur linéaire borné sur $L^1(m)$ et $\|M\| \leq 1$. Soient $X = L^1(m)/A^1(m)$ et $T$ l'opérateur quotient induit par $M$ sur $X$. D'après* [13], $T$ posssède la SVEP et $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. De plus d'après le corollaire 2.2.1, nous avons $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

**Définition 2.2.1.** [8]
Un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est dit supercyclique lorsqu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'ensemble $\{\lambda T^n(x) : n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ soit dense dans $X$.

**Proposition 2.2.2.** [8]
Soit $X$ un espace localement convexe. Si $T \in \mathcal{B}(X)$ est supercyclique, alors soit $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, soit $\sigma_p(T^*) = \{\lambda\}$ pour $\lambda \neq 0$.

**Corollaire 2.2.2.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur supercyclique, alors*

$$\sigma_{desc}(T^*) = \sigma_{desc}(T^*, \mathcal{B}(X^*))$$

**Démonstration** Si $T \in \mathcal{B}(X)$ est supercyclique, d'après la proposition 2.2.2, on a $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ou $\sigma_p(T^*) = \{\lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$, donc $\mathrm{int}(\sigma_p(T^*)) = \emptyset$, alors $S(T^*) = \emptyset$, et d'après le corollaire 2.2.1, nous avons $\sigma_{desc}(T^*) = \sigma_{desc}(T^*, \mathcal{B}(X^*))$.

**Corollaire 2.2.3.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. *$T$ est décomposable,*
2. *$T$ a la propriété $(\beta)$,*
3. *$T$ a la propriété $(C)$,*

*alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Démonstration** Si $T$ satisfait l'une de ces conditions, d'après 1.1.1, $T$ a la SVEP. En utilisant 2.2.1, nous avons $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

**Théorème 2.2.2.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ et $D$ ensemble fermé tel que $\sigma(T) = \sigma_{su}(T) \cup D$, alors*

$$\sigma_{desc}(T)\cup int(D)=\sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X))\cup int(D)$$

**Démonstration** Soit $\lambda\notin\sigma_{desc}(T)\cup \mathrm{int}(D)$, alors l'opérateur $T-\lambda$ est de descente finie $d$ et $\lambda\notin int(D)$. D'après le lemme 2.2.1, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $0<|\lambda-\mu|<\delta$, l'opérateur $T-\mu$ est surjectif et $\dim N(T-\mu)=\dim N(T-\lambda)\cap R(T-\lambda)^d$. Soit $D^*(\lambda,\delta)=\{\mu\in\mathbb{C}:0<|\lambda-\mu|<\delta\}$. Puisque $\lambda\notin int(D)$, alors $D^*(\lambda,\delta)\backslash D$ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$ non vide. Soit $\lambda_0\in D^*(\lambda,\delta)\backslash D$, alors $T-\lambda_0$ est bijectif, et la continuité de l'indice assure que $\mathrm{ind}(T-\mu)=0$ pour tout $\mu\in D^*(\lambda,\delta)$. Mais pour $\mu\in D^*(\lambda,\delta), T-\mu$ est surjective, il s'ensuit que $T-\mu$ est bijectif. Donc $\lambda$ est un point isolé du spectre $\sigma(T)$. D'après le lemme 2.2.2, $T-\lambda$ d'ascente et de descente finies et d'après le théorème 1.2.2, nous avons $X=N(T-\lambda)^d\oplus R(T-\lambda)^d$. Il s'ensuit que $N(T-\lambda)^d$ est admet un suppémentaire topologique dans $X$. D'après lemme 2.1.1, il existe $S\in\mathcal{B}(X)$ tel que $(T-\lambda)^d=(T-\lambda)^{d+1}S$, ce qui implique $\lambda\notin\sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X))\cup int(D)$. Ce qui termine la preuve.

Comme conséquence immédiate du théorème précédent, on annonce le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.4.** *Si $T\in\mathcal{B}(X)$ satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. $\sigma(T)=\sigma_{su}(T)$,
2. $int(\sigma_{ap}(T))=\emptyset$,
3. $int(\sigma_p(T))=\emptyset$,
4. $\mathcal{S}(T)=\emptyset$.

*Alors*

$$\sigma_{desc}(T)=\sigma_{desc}(T,\mathcal{B}(X))$$

**Proposition 2.2.3.** *Si $T\in\mathcal{B}(X)$, alors :*

1. $\sigma(T)=\sigma_{su}(T)\cup\sigma_{asc}(T)$,
2. $\sigma(T)=\sigma_{su}(T)\cup\sigma_{ub}(T)$,
3. $\sigma(T)=\sigma_{su}(T)\cup\sigma_{uw}(T)$.

**Démonstration**

1. Soit $\lambda\notin\sigma_{su}(T)\cup\sigma_{asc}(T)$, alors $T-\lambda$ est surjectif et $T-\lambda$ d'ascente finie, donc $a(T-\lambda)=d(T-\lambda)=0$, d'où $\lambda\notin\sigma(T)$.
2. Comme $\sigma_{asc}(T)\subseteq\sigma_{ub}(T))$, alors $\sigma(T)=\sigma_{su}(T)\cup\sigma_{ub}(T)$.

3. Soit $\lambda \notin \sigma_{su}(T) \cup \sigma_{uw}(T)$, alors $T-\lambda$ est surjectif et $\text{ind}(T-\lambda) \leq 0$, donc $\text{ind}(T-\lambda) = \dim N(T-\lambda) = 0$, d'où $\lambda \notin \sigma(T)$.

**Corollaire 2.2.5.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. *$int(\sigma_{asc}(T)) = \emptyset$,*
2. *$int(\sigma_{ub}(T)) = \emptyset$,*
3. *$int(\sigma_{uw}(T)) = \emptyset$.*

*Alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Exemple 6.** *Considérons l'opérateur de Césaro $C_p$ défini sur l'espace Hardy classique $\mathbb{H}_p(\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert et $1 < p < \infty$. Cet opérateur $C_p$ est défini par $(C_p f)(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{f(\mu)}{1-\mu} d\mu$ pour tout $f \in \mathbb{H}_p(\mathbb{D})$ et $\lambda \in \mathbb{D}$. Dans* [37] T.L. Miller, V.G. Miller et Smith ont montré, que le spectre de $C_p$ est le disque fermé $\Gamma_p$ de centre $p/2$ de rayon $p/2$ et $\sigma_{ap}(C_p)$ est la frontière $\partial\Gamma_p$. Alors $\text{int}(\sigma_{ap}(C_p))=\text{int}(\sigma_p(C_p)) = \emptyset$. En appliquant le corollaire 2.2.4, on obtient $\sigma_{desc}(C_p) = \sigma_{desc}(C_p, \mathcal{B}(\mathbb{H}_p(\mathbb{D})))$.

**Exemple 7.** *Considérons l'opérateur $T$ défini sur $\ell^p(\mathbb{N})$ où $1 \leq p < \infty$, par : $Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n e_{n+1}$ pour tout $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$, avec $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$. Si $c(T) = \lim_{n\to+\infty} \inf(\omega_1 ... \omega_n)^{1/n} = 0$, dans* [1] P. Aiena a montré que l'opérateur $T$ a la SVEP. En appliquant le corollaire 2.2.1, on obtient $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

**Théorème 2.2.3.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si pour toute composante connexe $G$ de $\rho_{desc}(T)$, on a $G \cap \rho(T) \neq \emptyset$, alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Démonstration** Soit $\lambda$ un complexe tel que $T-\lambda$ de descente finie $d$. D'après le lemme 2.2.1, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $0 < |\lambda-\mu| < \delta$, l'opérateur $T-\mu$ est surjectif et $\dim N(T-\mu) = \dim N(T-\lambda) \cap R(T-\lambda)^d$. Comme $D^*(\lambda, \delta) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda-\mu| < \delta\}$ est un sous-ensemble connexe de $\rho_{desc}(T)$, alors il existe une composante connexe $G$ de $\rho_{desc}(T)$ contenant $D^*(\lambda, \delta)$. Puisque $G \cap \rho(T)$ est non vide la continuité de l'indice assure que $\text{ind}(T-\mu) = 0$ pour tout $\mu \in D^*(\lambda, \delta)$. Donc pour $\mu \in G$, $T-\mu$ est surjectif, il s'ensuit que $T-\mu$ est bijectif. Ainsi $G \subseteq \rho(T)$, donc $\lambda$ est un point isolé dans $\sigma(T)$. Par conséquent $\lambda \notin \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$. Ce qui termine la preuve.

**Remarque 8.** *Nous rappelons qu'un opérateur* $R \in \mathcal{B}(X)$ *est dit de Riesz si* $R-\lambda$ *est de Fredholm pour tout nombre complexe non nul* $\lambda$*. Il est bien connu que* $\sigma_{desc}(R) = \{0\}$*, (voir* [30]). Donc pour toute composante connexe $G$ de $\rho_{desc}(R)$, on a $G \cap \rho(R) \neq \emptyset$. Par conséquent $\sigma_{desc}(R, \mathcal{B}(X)) = \{0\}$

**Exemple 8.** *Considérons l'opérateur shift unilatéral à droite* $T$ *sur l'espace* $X := \ell^p$ *où* $1 \leq p \leq \infty$*. Puisque* $\sigma(T) = \sigma_{desc}(T)$*, alors pour toute composante connexe* $G$ *de* $\rho_{desc}(T)$ *on a* $G \cap \rho(T) \neq \emptyset$*. Par conséquent* $\sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X)) = \overline{\mathbb{D}}$ *le disque unité fermé.*

**Théorème 2.2.4.** *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Si pour toute composante connexe* $G$ *de* $\rho_{su}(T)$*, on a* $G \cap \rho_p(T) \neq \emptyset$*, alors :*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$$

**Démonstration** Soit $\lambda$ un nombre complexe tel que $T-\lambda$ de descente finie $d$. D'après le lemme 2.2.1, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $0 < |\lambda - \mu| < \delta$, l'opérateur $T - \mu$ est surjectif et $\dim N(T-\mu) = \dim N(T-\lambda) \cap R(T-\lambda)^d$. Donc $D^*(\lambda, \delta) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \mu| < \delta\}$ un sous-ensemble connexe de $\rho_{su}(T)$. Soit $G$ une composante connexe de $\rho_{su}(T)$ contenant $D^*(\lambda, \delta)$. Or $G \cap \rho_p(T)$ est non vide, d'après la continuité de l'indice assure que $\text{ind}(T-\mu) = 0$ pour tout $\mu \in D^*(\lambda, \delta)$. Pour tout $\mu \in G$, $T - \mu$ is surjectif, il s'ensuit que $T - \mu$ est bijectif, on obtient que $\lambda$ est un point isolé dans $\sigma(T)$. Par conséquant $\lambda \notin \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

**Remarque 9.** *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$ *un opérateur tel que* $\sigma(T) = \sigma_{su}(T)$*, alors pour toute composante connexe* $G$ *de* $\rho_{su}(T)$*, on a* $G \cap \rho_p(T) \neq \emptyset$*. En utilisant le théorème 2.2.4, on obtient* $\sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$*.*

## 2.3 Égalité du spectre de descente essentielle

Dans [9], Olfa Bel Hadj Fredj a montré que si $T$ est un opérateur linéaire borné sur $X$ tel que $\sigma(T)$ est au plus dénombrabe, alors $T$ satisfait l'égalité du spectre de la descente essentielle, c'est à dire $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$. L'objectif principal de cette section est de généraliser ce résultat à un opérateur linéaire borné dont le spectre non nécéssairement dénombrable.

**Proposition 2.3.1.** [9] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, alors

$$\sigma^e_{desc}(T) \subseteq \sigma_{desc}(T)$$

En outre, l'inclusion ci-dessus devient une égalité si $\sigma(T)$ est dénombrable.

**Remarque 10.** *En général l'inclusion ci-dessus est strice. En effet, considérons l'opérateur de décalage droit unilatéral $T$ défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Dans* [12], M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta, et M. Oudghiri, ont montré que $\sigma_{desc}(T)$ contient le disque unité fermé, et $\sigma^e_{desc}(T)$ est contenu dans le cercle unité.

**Proposition 2.3.2.** [9] Soit $T$ un opérateur borné sur $X$, alors $\sigma_{des}(T)\backslash\sigma^e_{des}(T)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.

**Remarque 11.** *Nous pouvons construire un opérateur $T$ satisfaisant l'égalité $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ de sorte que $\sigma(T)$ soit non dénombrable. Par exemple, soit $H$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2, ...\}$. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ défini par, $T(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_1}{2}, 0, x_2, x_3, ...)$, $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$. Dans [1], P. Aiena a prouvé que $\sigma_{su}(T) = \Gamma \cup \{\frac{1}{2}\}$, où $\Gamma$ désigne le cercle unité. Alors $\sigma_{su}(T)$ d'intérieur vide. Selon la proposition 2.3.2, $\sigma_{desc}(T)\backslash\sigma^e_{desc}(T)$ est un ouvert. De plus $\sigma_{desc}(T)\backslash\sigma^e_{desc}(T) \subseteq \sigma_{su}(T)$, donc $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$. Ce qui nous a motivé de poser la question suivante : Soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $\sigma(T)$ est non dénombrable, sous quelles conditions sur $T$ l'éalité $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$ doit être satisfaite ?*

**Lemme 2.3.1.** [9] Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ tel que $d_e(T)$ est finie, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < |\lambda| < \delta$ et $p := p(T)$,

i) $T - \lambda$ est semi-régulier,

ii) $\dim N(T-\lambda)^n = n \dim N(T^{p+1})/N(T^p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

iii) $\operatorname{codim} R(T-\lambda)^n = n \dim R(T^p)/R(T^{p+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Lemme 2.3.2.** [1] Soit $T$ un opérateur borné sur $X$, et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, on a les implications suivantes :

1. $a(\lambda_0 I - T) < \infty \Rightarrow T$ satisfait la SVEP en $\lambda_0$,
2. $d(\lambda_0 I - T) < \infty \Rightarrow T^*$ satisfait la SVEP en $\lambda_0$.

**Lemme 2.3.3.** [1] Soit $T$ un opérateur borné sur $X$, et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si $T - \lambda_0$ est semi régulier, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $T^*$ satisfait la SVEP en $\lambda_0$,
2. $d(\lambda_0 I - T) < \infty$.

**Théorème 2.3.1.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$, alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T) \cup \overline{\mathcal{S}(T^*)}$$

*En particulier, si $T^*$ satisfait la SVEP, alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$$

**Démonstration** Si $\lambda \notin \sigma_{desc}(T)$, alors $\lambda \notin \sigma^e_{desc}(T)$ et d'après le lemme 2.3.2, $T^*$ satisfait la SVEP en $\lambda$, donc $\sigma^e_{desc}(T) \cup \mathcal{S}(T^*) \subseteq \sigma_{desc}(T)$, il s'ensuit que $\sigma^e_{desc}(T) \cup \overline{\mathcal{S}(T^*)} = \overline{\sigma^e_{desc}(T) \cup \mathcal{S}(T^*)} \subseteq \overline{\sigma_{desc}(T)} = \sigma_{desc}(T)$. Pour l'autre inclusion, soit $\lambda$ un nombre complexe tel que $T - \lambda$ a une descente essentielle finie et $\lambda \notin \overline{\mathcal{S}(T^*)}$. Selon le lemme 2.3.1, il existe $\delta > 0$, tel que pour $0 < |\lambda - \mu| < \delta$ et $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur $T - \mu$ est semi-régulier et codim $R(T-\mu) = \dim R(T-\lambda)^p / R(T-\lambda)^{p+1}$. Posons $D^*(\lambda, \delta) = \{\mu : 0 < |\lambda - \mu| < \delta\}$. Puisque $\lambda \notin \overline{\mathcal{S}(T^*)}$, $D^*(\lambda, \delta) \backslash \mathcal{S}(T^*)$ est non vide, et il s'ensuit qu'il existe $\mu_0 \in D^*(\lambda, \delta)$ tel que $T - \mu_0$ est semi-régulier et $T^*$ satisfait la SVEP en $\mu_0$. En utilisant le lemme2.3.3, $T - \mu_0$ est de descente finie. D'après le lemme 2.2.1, il existe $\mu_1 \in D^*(\lambda, \delta)$ tel que $T - \mu_1$ est surjectif. Par conséquent codim$R(T - \mu_1) = \dim R(T-\lambda)^p / R(T-\lambda)^{p+1} = 0$. Il s'ensuit que $R(T-\lambda)^p = R(T-\lambda)^{p+1}$, ce qui implique que $\lambda \notin \sigma_{desc}(T)$.

**Exemple 9.** *Soit $T$ l'opérateur de décalage droit unilatéral pondéré sur $\ell^p(\mathbb{N})$, où $1 \leq p < \infty$ et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$. Il est bien connu que si $c(T) = \lim_{n\to\infty} \inf(\omega_1 ... \omega_n)^{\frac{1}{n}} = 0$, alors $T^*$ satisfait la SVEP, voir (*[1, Théorème 2.88]), et d'après le théorème 2.3.1, nous avons $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

**Corollaire 2.3.1.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur supercyclique. Alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$$

**Démonstration** Si $T \in \mathcal{B}(X)$ est un opérateur supercyclique, alors d'après la proposition 2.2.2, $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ou $\sigma_p(T^*) = \{\lambda\}$ pour $\lambda \neq 0$, donc int$(\sigma_p(T^*)) = \emptyset$, d'où $S(T^*) = \emptyset$, et d'après le Théorème 2.3.1, on a $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

**Corollaire 2.3.2.** *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ est décomposable ou satisfait la propriété* $(\delta)$*, alors $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.*

**Démonstration** Si $T$ est décomposable ou $T$ satisfait la propriété $(\delta)$, alors $T^*$ satisfait la SVEP. En utilisant le Théorème 2.3.1, nous avons $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

**Corollaire 2.3.3.** *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $T$ est décomposable, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$d(T - \lambda)$ est finie,*

*2.* $d_e(T-\lambda)$ *est finie,*

*3.* $d(T-\lambda, \mathcal{B}(X))$ *est finie.*

**Démonstration** Si $T$ est décomposable, alors les opérateurs $T$ et $T^*$ ont la SVEP, et d'après le théorème 2.3.1 et le corollaire 2.2.1, on obtient $\sigma^e_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T) = \sigma_{desc}(T, \mathcal{B}(X))$.

Si $T \in M(\mathcal{A})$ est un multiplicateur sur une algèbre de Banach semi-première, régulière et commutative $\mathcal{A}$, alors l'opérateur $T^*$ satisfait la SVEP voir([1, Corollaire 6.52]). Donc on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.4.** *Soit* $T \in M(\mathcal{A})$ *un multiplicateur sur une algèbre de Banach semi-première, régulière et commutative* $\mathcal{A}$ *alors*

$$\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$$

**Théorème 2.3.2.** *Soit* $T \in \mathcal{B}(X)$ *et* $D$ *un sous ensemble fermé de* $\mathbb{C}$ *tel que* $\sigma_{su}(T) = \sigma_K(T) \cup D$*, alors*

$$\sigma_{desc}(T) \cup int(D) = \sigma^e_{desc}(T) \cup int(D)$$

**Démonstration** Soit $\lambda \notin \sigma^e_{desc}(T) \cup \mathrm{int}(D)$, alors l'opérateur $T-\lambda$ est de descente essentielle finie $d$ et $\lambda \notin int(D)$. D'après le lemme 2.3.1, il existe $\delta > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, tel que pour $0 < |\lambda - \mu| < \delta$, l'opérateur $T-\mu$ est semi-régulier et codim$R(T-\mu) = \dim R(T-\lambda)^p / R(T-\lambda)^{p+1}$. Puisque $\lambda \notin int(D)$, alors $D^*(\lambda, \delta) \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ non vide. Soit $\lambda_0 \in D^*(\lambda, \delta) \setminus D$, alors $T-\lambda_0$ est surjctif. Donc codim$R(T-\lambda_0) = \dim R(T-\lambda)^p / R(T-\lambda)^{p+1} = 0$. Il s'ensuit que $R(T-\lambda)^p = R(T-\lambda)^{p+1}$, ce qui implique $\lambda \notin \sigma_{desc}(T) \cup int(D)$. Ce qui termine la preuve.

**Remarque 12.** *En remarquant que* $\sigma_{su}(T) = \sigma_K(T) \cup \mathcal{S}(T^*)$*, on peut retrouver le résultat du théorème 2.3.1. En effet si* $T^*$ *a la SVEP, alors* $int(\overline{\mathcal{S}(T^*)}) = \emptyset$*, et d'après le théorème 2.3.2* $\sigma_{desc}(T) = \sigma^e_{desc}(T)$.

Chapitre 3

# Théorie spectrale des $C_0$ semi-groupes

Dans ce chapitre, nous présentons une étude concernant les propriétés spectrales des $C_0$-semi-groupes des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach. Nous établissons les inclusions spectrales d'un $C_0$ semi-groupe pour plusieurs parties du spectre usuel, et nous donnons des résultats de stabilité pour les $C_0$ semi groupes en utilisant le spectre de Saphar.

## 3.1 Résultats préliminaires

**Lemme 3.1.1.** [22][41] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Pour $t \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit sur $X$, l'opérateur $B_\lambda(t)$ par :

$$\forall x \in X,\ B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds$$

Alors $B_\lambda(t)$ est un opérateur linéaire borné sur $X$, de plus on a :

1. Pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{\lambda t} - T(t))^n x = (\lambda - A)^n B_\lambda^n(t)x$,
2. pour tout $x \in D(A^n)$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{\lambda t} - T(t))^n x = B_\lambda^n(t)(\lambda - A)^n x$,
3. $R^\infty(e^{\lambda t} - T(t)) \subseteq R^\infty(\lambda - A)$,
4. $N(\lambda - A)^n \subseteq N(e^{\lambda t} - T(t))^n$.

La plupart des résultats obtenus dans ce chapitre sont basés sur le lemme suivant :

**Lemme 3.1.2.** Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, il existe $F_\lambda(t)$ et $G_\lambda(t)$ de $\mathcal{B}(X)$ tels que

1. $\forall x \in X$, $F_\lambda(t)x \in D(A)$ et $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)B_\lambda(t) = tI$,

2. les opérateurs $\lambda - A$, $F_\lambda(t)$, $G_\lambda(t)$ et $B_\lambda(t)$ commutent deux à deux.

**Démonstration**

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, on pose $F_\lambda(t)x = \int_0^t e^{-\lambda s}B_\lambda(s)xds$. Il est clair que $F_\lambda(t)$ est un opérateur linéaire borné sur $X$, et pour tout $x \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}F_\lambda(t)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t e^{-\lambda s}B_\lambda(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t\int_0^s e^{-\lambda u}T(u+h)xduds - \frac{1}{h}\int_0^t\int_0^s e^{-\lambda u}T(u)xduds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t\left(\int_0^s e^{-\lambda u}T(u+h)xdu - \int_0^s e^{-\lambda u}T(u)xdu\right)ds \\
&= \int_0^t\left(\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{h+s} e^{-\lambda u}T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^s e^{-\lambda u}T(u)xdu\right)ds \\
&= \int_0^t\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_h^s e^{-\lambda u}T(u)xdu + \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_s^{h+s} e^{-\lambda u}T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda u}T(u)xdu\right)ds.
\end{aligned}$$

Le terme de droite de cette dernière égalité tend vers $\lambda\int_0^t e^{-\lambda s}B_\lambda(s)xds + e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds - tx$ lorsque $h$ tend vers $0$, ce qui entraîne, $F_\lambda(t)x \in D(A)$ et $AF_\lambda(t)x = \lambda F_\lambda(t)x + e^{-\lambda t}B_\lambda(t)x - tx$, et par suite nous avons l'égalité $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)B_\lambda(t) = tI$ avec $G_\lambda(t) = e^{-\lambda t}I$.

2. Pour tout $t \geq 0$, $F_\lambda(t)$ et $B_\lambda(t)$ commutent. En effet, pour tout $t, s \geq 0$ on a d'une part,

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)B_\lambda(s)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-u)}T(u)B_\lambda(s)xdu \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-u)}T(u)\int_0^s e^{\lambda(s-v)}T(v)xdvdu \\
&= \int_0^t\int_0^s e^{\lambda(t-u)}e^{\lambda(s-v)}T(u)T(v)xdvdu \\
&= \int_0^s e^{\lambda(s-v)}T(v)\int_0^t e^{\lambda(t-u)}T(u)xdudv \\
&= B_\lambda(s)B_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(t)B_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{-\lambda u}B_\lambda(u)B_\lambda(t)xdu \\
&= \int_0^t e^{-\lambda u}B_\lambda(t)B_\lambda(u)xdu \\
&= B_\lambda(t)\int_0^t e^{-\lambda u}B_\lambda(u)xdu \\
&= B_\lambda(t)F_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(t)(\lambda - A)x &= \int_0^t e^{-\lambda s} B_\lambda(s)(\lambda - A)xds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda s}(e^{\lambda s} - T(s))xds \\
&= tx - \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)xds \\
&= tx - G_\lambda(t)B_\lambda(t)x \\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

**Lemme 3.1.3.** Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigroup sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n(t), L_n(t) \in \mathcal{B}(X)$ tels que

1. $\forall x \in X$, $H_n(t)x \in D(A^n)$ et $(\lambda - A)^n H_n(t) + L_n(t)B_\lambda^n(t) = I$,
2. les opérateurs $(\lambda - A)^n$, $H_n(t)$, $L_n(t)$ et $B_\lambda^n(t)$ commutent deux à deux.

**Démonstration** D'après le lemme 3.1.2, il existe deux opérateurs bornés $F_\lambda(t)$ et $G_\lambda(t)$ tels que $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)B_\lambda(t) = I$. Pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^i F_\lambda^n(t)x &= [(\lambda - A)F_\lambda(t)]^i F_\lambda^{n-i}(t)x \\
&= [F_\lambda(t)(\lambda - A)]^i F_\lambda^{n-i}(t)x \in D(A).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_\lambda^n(t)x \in D(A^n)$. De plus,

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^n F_\lambda^n(t) &= [(\lambda - A)F_\lambda(t)]^n \\
&= [I - G_\lambda(t)B_\lambda(t)]^n \\
&= I - L_{1,n}(t)B_\lambda(t),
\end{aligned}$$

avec $L_{1,n}(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} G_\lambda^k(t)B_\lambda^{k-1}(t)$. Par suite $(\lambda - A)^n F_\lambda^n(t) + L_{1,n}(t)B_\lambda(t) = I$.
De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}
L_{1,n}^n(t)B_\lambda^n(t) &= [I - (\lambda - A)^n F_\lambda^n(t)]^n \\
&= I - (\lambda - A)^n \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(\lambda - A)^{n(k-1)} F_\lambda^{nk}(t)
\end{aligned}$$

Posons $H_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(\lambda - A)^{n(k-1)} F_\lambda^{nk}(t)$ et $L_n(t) = L_{1,n}^n(t)$, alors $(\lambda - A)^n H_n(t) + L_n(t)B_\lambda^n(t) = I$. De plus les opérateurs $(\lambda - A)^n$, $H_n(t)$, $L_n(t)$ et $B_\lambda^n(t)$ commutent deux à deux.

**Lemme 3.1.4.** Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi-groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Si $R(e^{\lambda t}-T(t))^p$ est fermé, alors $R(\lambda-A)^p$ est fermé.

**Démonstration** Supposons que $R(e^{\lambda t}-T(t))^p$ est fermé. Soit $y_n=(\lambda-A)^p x_n$ une suite convergente vers $y\in X$. D'après le lemme 3.1.3, il existe $H_p(t), L_p(t)\in\mathcal{B}(X)$ tel que $(\lambda-A)^p H_p(t)+L_p(t)B_\lambda^p(t)=I$. Donc $y_n=(\lambda-A)^p H_p(t)y_n+(e^{\lambda t}-T(t))^p L_p(t)x_n$. Comme $(\lambda-A)^p H_p(t)$ est un opérateur linéaire borné et $R(e^{\lambda t}-T(t))^p$ fermé, alors $(e^{\lambda t}-T(t))^p L_p(t)x_n=y_n-(\lambda-A)^p H_p(t)y_n$ converge vers $y-(\lambda-A)^p H_p(t)y\in R(e^{\lambda t}-T(t))^p$, donc il existe $z\in X$ tel que $y-(\lambda-A)^p H_p(t)y=(e^{\lambda t}-T(t))^p z$. D'où $y=(\lambda-A)^p(H_p(t)y+B_\lambda^p(t)z)$, et par suite $y\in R(\lambda-A)^p$.

## 3.2 Inclusion spectrale d'un $C_0$ semi groupe

### 3.2.1 Spectre Quasi-Fredholm

**Proposition 3.2.1.** *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, alors*

$$dis(\lambda-A)\leq dis(e^{\lambda t}-T(t))$$

*Démonstration.* Si $dis(e^{\lambda t}-T(t))=+\infty$, c'est immédiat.
Si $dis(e^{\lambda t}-T(t))=d\in\mathbb{N}$, alors pour tout $n\geq d$ nous avons

$$R(e^{\lambda t}-T(t)^n)\cap N(e^{\lambda t}-T(t))=R(e^{\lambda t}-T(t))^d\cap N(e^{\lambda t}-T(t)).$$

Il suffit de prouver que

$$R(\lambda-A)^{2d}\cap N(\lambda-A)=R(\lambda-A)^d\cap N(\lambda-A).$$

Soit $y\in R(\lambda-A)^d\cap N(\lambda-A)$, il existe $x\in D(A^d)$ tel que $y=(\lambda-A)^d x$, et d'après le lemme 3.1.3, il existe deux opérateurs linéaires bornés $F_d(t)$, $G_d(t)$ tels que $(\lambda-A)^d F_d(t)+B_\lambda^d(t)G_d(t)=I$, de plus les opérateurs $(\lambda-A)^d$, $F_d(t)$, $B_\lambda^d(t)$ et $G_d(t)$ commutent deux à deux. Il résulte directement que

$$y=(\lambda-A)^{2d}F_d(t)x+(e^{\lambda t}-T(t))^d G_d(t)x,$$

et comme

$$(e^{\lambda t}-T(t))^d G_d(t)x \in R(e^{\lambda t}-T(t))^d \cap N(e^{\lambda t}-T(t)),$$

nous avons aussi

$$(e^{\lambda t}-T(t))^d G_d(t)x \in R(e^{\lambda t}-T(t))^{2d} \cap N(e^{\lambda t}-T(t)),$$

donc il existe $z \in X$ tel que

$$(e^{\lambda t}-T(t))^d G_d(t)x = (e^{\lambda t}-T(t))^{2d} z,$$

d'où

$$y = (\lambda - A)^{2d} F_d(t)x + (e^{\lambda t}-T(t)^{2d})z = (\lambda - A)^{2d}(F_d(t)x + B_\lambda^{2d}(t)z),$$

ce qui implique que $y \in R(\lambda - A)^{2d} \cap N(\lambda - A)$. Par conséquent $dis(\lambda - A) \leq d$.

□

**Proposition 3.2.2.** *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi groupe sur $X$, $A$ son générateur infinitésimal et $d \in \mathbb{N}$. Si $R(e^{\lambda t}-T(t)) + N(e^{\lambda t}-T(t))^d$ est fermé dans $X$, alors $R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^d$ l'est aussi.*

*Démonstration.* Si $d = 0$, le résultat est immédiat d'après le lemme 3.1.4. Supposons que $d \in N^*$ et $R(e^{\lambda t}-T(t)) + N(e^{\lambda t}-T(t))^d$ est un fermé dans $X$.
Soit $(y_n)_n$ une suite à éléments dans $R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^d$, qui converge vers $y \in X$. Donc il existe $x_n \in X$ et $z_n \in N(\lambda - A)^d$ tel que $y_n = (\lambda - A)x_n + z_n$. Comme $B_\lambda^d(t)y_n = B_\lambda^d(t)(\lambda - A)x_n + B_\lambda^d(t)z_n$, alors $B_\lambda^d(t)y_n \in R(e^{\lambda t}-T(t)) + N(e^{\lambda t}-T(t))^d$ et tend vers $B_\lambda^d(t)y$, donc il existe $x \in X$ et $z \in N(e^{\lambda t}-T(t))^d$ tel que $B_\lambda^d(t)y = (e^{\lambda t}-T(t))x + z$. D'où $B_\lambda^{2d}(t)y = B_\lambda^d(t)(e^{\lambda t}-T(t))x + B_\lambda^d(t)z$ et $B_\lambda^d(t)z \in N(\lambda - A)^d$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} y &= (\lambda - A)^{2d} F_d(t)y + B_\lambda^{2d}(t)G_d(t)y \\ &= (\lambda - A)^{2d} F_d(t)y + G_d(t)[B_\lambda^d(t)(e^{\lambda t}-T(t))x + B_\lambda^d(t)z] \\ &= (\lambda - A)[(\lambda - A)^{2d-1} F_d(t)y + G_d(t)B_\lambda^{d-1}(t)] + G_d(t)B_\lambda^d(t)z \in R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^d \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré. □

**Corollaire 3.2.1.** *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, alors pour tout $t > 0$,*

$$e^{t\sigma_{qF}(A)} \subseteq \sigma_{qF}(T(t))$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

**Corollaire 3.2.2.** *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, alors pour tout $t>0$,*

$$e^{t\sigma_K(A)} \subseteq \sigma_K(T(t))$$

*Démonstration.* Si $e^{t\lambda} \in \sigma_K(T(t))$, alors $dist(e^{\lambda t} - T(t)) = 0$ et $R(e^{\lambda t} - T(t))$ fermé. D'après la proposition3.2.1 et le lemme 3.1.4, on a $dist(\lambda - A) = 0$ et $R(\lambda - A)$ fermé. donc $\lambda \in \sigma_K(A)$. Ce qui termine la preuve. □

### 3.2.2 Spectre de l'ascente, spectre de descente

Nous commençons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi-groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, alors pour tout $t>0$, on a*

$$e^{t\sigma_{desc}(A)} \subseteq \sigma_{desc}(T(t))\backslash\{0\} \text{ et } e^{t\sigma_{asc}(A)} \subseteq \sigma_{asc}(T(t))\backslash\{0\}$$

**Démonstration** Si la descente de $e^{\lambda t} - T(t)$ est finie, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(e^{\lambda t} - T(t))^n = R(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1}$, d'après le lemme 3.1.3, il existe deux opérateurs $H_n(t)$ et $L_n(t)$ tels que $(\lambda - A)^n H_n(t) + L_n(t) B_\lambda^n(t) = I$ et $H_n(t)$, $L_n(t)$, $B_\lambda(t)$ et $\lambda - A$ commutent deux à deux.
Soit $y \in R(\lambda - A)^n$, il existe $x \in D(A^n)$ tel que $y = (\lambda - A)^n x$. Donc

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^n x &= (\lambda - A)^n H_n(t)(\lambda - A)^n x + L_n(t) B_\lambda^n(t)(\lambda - A)^n x \\
&= (\lambda - A)^{n+1} H_n(t)(\lambda - A)^{n-1} x + L_n(t)(e^{\lambda t} - T(t))^n x.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que, $R(\lambda - A)^n = R(\lambda - A)^{n+1}$, et par suite la descente de $\lambda - A$ est finie.
Si l'ascente de $e^{\lambda t} - T(t)$ est finie, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N(e^{\lambda t} - T(t))^n = N(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1}$.
Soit $x \in N(\lambda - A)^{n+1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^n x &= (\lambda - A)^n H_n(t)(\lambda - A)^n x + L_n(t)(e^{\lambda t} - T(t))^n x \\
&= (\lambda - A)^{n-1} H_n(t)(\lambda - A)^{n+1} x + L_n(t)(e^{\lambda t} - T(t))^n x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où, $N(\lambda - A)^n = N(\lambda - A)^{n+1}$, et par suite l'ascente de $\lambda - A$ est finie.

**Remarque 13.** *On considère le groupe de translation sur l'espace* $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *des fonctions continues* $2\pi$*, périodique sur* $\mathbb{R}$*. On note par* $A$ *le générateur de ce groupe (voir* [22, Paragraphe I.4.15]). D'après [22, Exemples 2.6.iv], $\sigma(A) = i\mathbb{Z}$, donc $e^{t\sigma(A)}$ est plus dénombrable, ce qui implique que, $e^{t\sigma_{asc}(A)}$ et $e^{t\sigma_{desc}(A)}$ sont aussi au plus dénombrables. D'autre part, le spectre de $T(t)$ est toujours contenu dans $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et il contient les valeurs propres $e^{ikt}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\sigma(T(t))$ est fermé, alors d'après [22, Théorème IV.3.16], on a $\sigma(T(t)) = \Gamma$ pour $t/2\pi \notin \mathbb{Q}$, donc $\sigma(T(t))$ n'est pas dénombrable. D'après [9, Corollaire 2.10] et [12, Corollaire 1.8], $\sigma_{asc}(T(t))$ et $\sigma_{desc}(T(t))$ ne sont pas dénombrables. Par conséquent les inclusions du théorème précédent sont strictes.

**Corollaire 3.2.3.** *Si* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un* $C_0$*-semi-groupe sur* $X$ *et* $A$ *son générateur, alors pour tout* $t > 0$*,*

$$e^{t\sigma_D(A)} \subseteq \sigma_D(T(t))\backslash\{0\}$$

**Démonstration** Si $e^{\lambda t} - T(t)$ est de Drazin inversible, alors la descente et l'ascente de $e^{\lambda t} - T(t)$ sont finies et qui vaut $p$. D'après le théorème 3.2.1, la descente et l'ascente de $\lambda - A$ sont finies. Montrons que $a(\lambda - A) = d(\lambda - A)$. Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda = 0$. Soit $a(A) = p$ et $d(A) = q$, alors d'après le Théorème 1.2.1 nous avons $p \leq q$. Soit maintenant $u \in D(A^q)$, alors il existe $v \in D(A^{q+l})$ tel que $A^q u = A^{q+1}v$, donc $u - Av \in N(A^q)$. Par conséquent $u \in R(A) + N(A^q)$ et $D(A^q) \subseteq R(A) + N(A^q)$. D'où $R(A) + D(A^q) \subseteq R(A) + N(A^q)$. Et puisque $X = D(A^q) + R(A)$, on obtient $R(A) + N(A^q) = X$. D'autre part, $p \leq q$ implique $N(A^p) = N(A^q)$. D'où $X = R(A) + N(A^p)$. Par conséquent $D(A^p) = R(A) \cap D(A^p) + N(A^p)$. D'où $R(A^p) = R(A^{p+1})$ et donc $q \leq p$. Ce qui montre que $a(A) = d(A)$. En outre, il est facile de voir que $N(A^p) \cap R(A^p) = \{0\}$. En effet si $u \in N(A^p) \cap R(A^p)$, alors il existe $v \in D(A^p)$ tel que $u = A^p v$. Et comme $u \in N(A^p)$, on voit que $v \in N(A^{2p}) = N(A^p)$ et donc $u = A^p v = 0$. Montrons que $X = R(A^p) + N(A^p)$. Comme $d(A) = p$, alors en particulier on a $R(A^p) = R(A^{2p})$. Donc si $u \in D(A^p)$, alors $A^p u \in R(A^p) = R(A^{2p})$. Donc il existe $v \in D(A^{2p})$ tel que $A^p u = A^{2p} v$. D'où $u - A^p v \in N(A^p)$. Par conséquent $u \in R(A^p) + N(A^p)$ et donc $D(A^p) \subseteq R(A^p) + N(A^p)$. Et par suite $X = R(A^p) + N(A^p)$.

**Remarque 14.** *L'inclusion du corollaire précédent est stricte. Car d'après la remarque 13,* $e^{t\sigma_D(A)}$ *est au plus dénombrable, mais* $\sigma_D(T(t))$ *n'est pas dénombrable.*

### 3.2.3 Spectre de l'ascente essentielle, spectre de descente essentielle

**Théorème 3.2.2.** *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, alors pour tout $t > 0$ on a :*

$$e^{t\sigma^e_{desc}(A)} \subseteq \sigma^e_{desc}(T(t)) \ et \ e^{t\sigma^e_{asc}(A)} \subseteq \sigma^e_{asc}(T(t))$$

**Démonstration**

1. Si $d_e(e^{\lambda t} - T(t)) < \infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\dim R(e^{\lambda t} - T(t))^n / R(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1} < \infty.$$
Nous allons montrer que
$$\dim R(\lambda - A)^n / R(\lambda - A)^{n+1} < \infty$$
Considérons l'application :
$$\begin{aligned} \psi : R(\lambda - A)^n &\rightarrow R(e^{\lambda t} - T(t))^n / R(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1} \\ (\lambda - A)^n x &\mapsto (e^{\lambda t} - T(t))^n x + R(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1} \end{aligned}$$
L'application $\psi$ est bien définie, linéaire et surjective. De plus on a
$$\text{Ker}(\psi) \subseteq R(\lambda - A)^{n+1} \subseteq R(\lambda - A)^n,$$
d'après le premier théorème d'isomorphisme $R(\lambda - A)^n / \text{Ker}(\psi)$ et $R(e^{\lambda t} - T(t))^n / R(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1}$ sont isomorphes, donc $\dim R(\lambda - A)^n / \text{Ker}(\psi) < \infty$. D'autre part, comme $R(\lambda - A)^{n+1} / \text{Ker}(\psi) \subseteq R(\lambda - A)^n / \text{Ker}(\psi)$, alors $\dim R(\lambda - A)^{n+1} / \text{Ker}(\psi) < \infty$, ce qui implique $\dim R(\lambda - A)^n / \text{Ker}(\psi) < \infty$, et par conséquent $d_e(\lambda - A) < \infty$.
2. Si $a_e(e^{\lambda t} - T(t)) < \infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\dim N(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1} / N(e^{\lambda t} - T(t))^n < \infty$$
Montrons que
$$\dim N(\lambda - A)^{n+1} / N(\lambda - A)^n < \infty$$
On considère l'application suivante :
$$\begin{aligned} \varphi : N(\lambda - A)^{n+1} &\rightarrow N(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1} / N(e^{\lambda t} - T(t))^n \\ x &\mapsto x + N(e^{\lambda t} - T(t))^n \end{aligned}$$
L'application $\varphi$ est bien définie, linéaire et $\text{Ker}(\varphi) \subseteq N(\lambda - A)^n \subseteq N(\lambda - A)^{n+1}$. D'après le premier théorème d'isomorphisme $N(\lambda - A)^{n+1} / \text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont isomorphes. Comme

$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq N(e^{\lambda t} - T(t))^{n+1}/N(e^{\lambda t} - T(t))^n$, alors $\dim N(\lambda - A)^{n+1}/\mathrm{Ker}(\varphi) < \infty$, donc $\dim N(\lambda - A)^{n+1}/\mathrm{Ker}(\varphi) < \infty$, ce qui implique $\dim N(\lambda - A)^{n+1}/N(\lambda - A)^n < \infty$. Par conséquent $a_e(\lambda - A) < \infty$.

**Remarque 15.** *Les inclusions du corollaire précédent sont strictes. Car d'après la remarque 13, $e^{t\sigma^e_{desc}(A)}$ et $e^{t\sigma^e_{asc}(A)}$ sont au plus dénombrables, mais d'après le corollaire 1.2.1 les spectres $\sigma^e_{desc}(T(t))$ et $\sigma^e_{asc}(T(t))$ ne sont pas dénombrables.*

## 3.3 Satabilité d'un $C_0$−semi groupe

Dans cette section, nous montrons que l'inclusion spectrale d'un $C_0$−semi groupe tient pour le spectre de Saphar et spectre essentiellement Saphar. Certains résultats de stabilités sont également établis.

**Proposition 3.3.1.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigroup sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Alors pour tout $t > 0$, si $e^{\lambda t} - T(t)$ admet un inverse généralisé, alors $\lambda - A$ l'est aussi.*

**Démonstration** Supposons que $e^{\lambda t} - T(t)$ admet un inverse généralisé, alors il existe un opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que :

$$(e^{\lambda t} - T(t))S(e^{\lambda t} - T(t)) = e^{\lambda t} - T(t)$$

D'après le lemme 3.1.2, on a $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)B_\lambda(t) = tI$, donc :

$$\begin{aligned}
t(\lambda - A) &= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + B_\lambda(t)G_\lambda(t)(\lambda - A)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)B_\lambda(t)G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (e^{\lambda t} - T(t))G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (e^{\lambda t} - T(t))S(e^{\lambda t} - T(t))G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)B_\lambda(t)S(\lambda - A)B_\lambda(t)G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)B_\lambda(t)SB_\lambda(t)G_\lambda(t)(\lambda - A)\\
&= (\lambda - A)[F_\lambda(t) + B_\lambda(t)SB_\lambda(t)G_\lambda(t)](\lambda - A)
\end{aligned}$$

et par suite $\lambda - A$ admet un inverse généralisé.

**Théorème 3.3.1.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semigroupe sur $X$, et $A$ son générateur infinitésimal. Alors pour tout $t > 0$ :*

$$e^{t\sigma_{Sap}(A)} \subseteq \sigma_{Sap}(T(t)),\ e^{t\sigma^e_{Sap}(A)} \subseteq \sigma^e_{Sap}(T(t))$$

**Démonstration**

1. Supposons que $e^{\lambda t} - T(t)$ est un opérateur de Saphar, alors $e^{\lambda t} - T(t)$ admet un inverse généralisé et $N(e^{\lambda t} - T(t)) \subseteq R^{\infty}(e^{\lambda t} - T(t))$. D'après la proposition 3.3.1, $\lambda - A$ admet un inverse généralisé, de plus $N(\lambda - A) \subseteq N(e^{\lambda t} - T(t)) \subseteq R(e^{\lambda t} - T(t))^{\infty} \subseteq R(\lambda - A)^{\infty}$. Ce qui preuve que $\lambda - A$ est un opérateur de Saphar.
2. Si $e^{\lambda t} - T(t)$ est un opérateur essentiellement Saphar, alors $e^{\lambda t} - T(t)$ admet un inverse généralisé, et il existe un sous-espace $M$ de $X$ de dimension finie tel que $N(e^{\lambda t} - T(t)) \subseteq R^{\infty}(e^{\lambda t} - T(t)) + M$. Donc $N(\lambda - A) \subseteq N(e^{\lambda t} - T(t)) \subseteq R(e^{\lambda t} - T(t))^{\infty} + M \subseteq R(\lambda - A)^{\infty} + M$, et d'après la proposition 3.3.1, $\lambda - A$ admet un inverse généralisé, ce qui términe la preuve.

**Définition 3.3.1.** [22] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. On dit que :

1. $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement stable si $\lim\limits_{t\to\infty} ||T(t)x|| = 0$ pout tout $x \in X$.
2. $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable si $\lim\limits_{t\to\infty} ||T(t)|| = 0$.

Dans [21], A. Elkoutri et M. A. Taoudi ont montré que $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement stable si $\sigma_K(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dans la suite de cette section, nous donnons des résultats de stabilité pour les $C_0$ semi groupes fortement continus en utilisant le spectre Saphar.

**Corollaire 3.3.1.** *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $C_0$-semi groupe borné sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$,
2. $\sigma_K(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$,
3. $\sigma_{Sap}(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

*Si l'une de ces propriétés est vérifiée, alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement stable.*

*Démonstration.* Puisque $\sigma_K(A) \subseteq \sigma_{Sap}(A) \subseteq \sigma(A)$, d'après [21] le résultat est immédiat. □

**Définition 3.3.2.** [22] Un $C_0$ semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\varepsilon t} ||T(t)|| = 0$.

**Corollaire 3.3.2.** *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*-semi groupe borné sur* $X$ *et* $A$ *son générateur infinitésimal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable,*
2. *il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $\sigma_K(T(t_0)) \cap \Gamma = \emptyset$*,*
3. *il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $\sigma_{Sap}(T(t_0)) \cap \Gamma = \emptyset$*.*

*Démonstration.* 1. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) d'après [21, corollaire 2.2].

2. 1) $\Longrightarrow$ 3) voir [22].
3. 3) $\Longrightarrow$ 1) Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\sigma_{Sap}(T(t_0)) \cap \Gamma = \emptyset$. Or $\sigma_K(T(t_0)) \subseteq \sigma_{Sap}(T(t_0))$, alors $\sigma_K(T(t_0)) \cap \Gamma = \emptyset$. D'après [21, corollaire 2.2], $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.

□

# Chapitre 4

# Théorie spectrale d'un semi groupe intégré

Le but de ce chapitre est d'établir une relation spectrale entre le semi-groupe intégré et son générateur. Plus précisément, nous montrons que pour tout $t > 0$, nous avons

$$\int_0^t e^{s\sigma_*(A)} ds \subseteq \sigma_*(S(t))$$

où $\sigma_*$ désigne une partie du spectre usuel.

## 4.1 Résultats préliminaires

Nous commençons par quelques lemmes, qu'ils seront nécessaires dans la suite.

**Lemme 4.1.1.** *Soit $A$ le générateur d'un semi-groupe intégré $(S(t))_{t\geq 0}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, on pose $D_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} S(s)xds$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

1. $\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right) x = (\lambda - A) D_\lambda(t)x, \forall x \in X,$
2. $\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right) x = D_\lambda(t)(\lambda - A)x, \forall x \in D(A),$
3. $R\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right)^n \subseteq R(\lambda - A)^n,$
4. $N(\lambda - A)^n \subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right)^n.$

**Démonstration**

1. Pour tout $r$, $t \in [0,+\infty[$ et $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned}
S(r)D_\lambda(t)x &= S(r)\int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(r)S(s)xds \\
&= \int_0^t \int_0^r e^{\lambda(t-s)}[S(\tau+s)-S(\tau)]xd\tau ds \\
&= \int_0^r \int_0^t e^{\lambda(t-s)}[S(\tau+s)-S(\tau)]xdsd\tau
\end{aligned}$$

Ce qui montre que, pour tout $x \in X$, $D_\lambda(t)x \in C^1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}S(r)D_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}[S(r+s)-S(r)]xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}[S(r+s)-S(s)]xds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)xds - \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(r)xds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{d}{ds}[S(s)S(r)]xds - S(r)\int_0^t e^{\lambda s}xds + D_\lambda(t)x \\
&= S(r)S(t)x + \lambda S(r)D_\lambda(t)x - S(r)\int_0^t e^{\lambda s}xds + D_\lambda(t)x \\
&= S(r)[S(t) + \lambda D_\lambda(t)x - \int_0^t e^{\lambda s}xds] + D_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

Ainsi, $D_\lambda(t)x \in D(A)$ et $AD_\lambda(t)x = S(t) + \lambda D_\lambda(t)x - \int_0^t e^{\lambda s}xds$.

D'où,

$$(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))x = (\lambda - A)D_\lambda(t)x$$

2. Soit $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)Ax &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)Axds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}(S'(s)x - x)ds \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}S'(s)xds - \int_0^t e^{\lambda s}xds \\
&= S(s) + \lambda D_\lambda(t)x - \int_0^t e^{\lambda s}xds
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))x = D_\lambda(t)(\lambda - A)x$$

3. On peut montrer facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$,

$$\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x = (\lambda - A)^n D_\lambda^n(t)x$$

Donc

$$R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n \subseteq R(\lambda - A)^n$$

4. Par récurrence que, Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in D(A^n)$,

$$\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x = D_\lambda^n(t)(\lambda - A)^n x$$

Donc

$$N(\lambda - A)^n \subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n$$

**Lemme 4.1.2.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \geq 0$, soit $L_\lambda(t)x = \int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)xds$, alors :*

1. *$L_\lambda(t)$ est un opérateur borné sur $X$ .*
2. *$\forall x \in X$, $L_\lambda(t)x \in D(A)$ et $(\lambda - A)L_\lambda(t) + G_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$ avec $G_\lambda(t) = e^{-\lambda t}I$ et $\phi_\lambda(t) = \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}d\sigma d\tau$.*
3. *Les opérateurs $L_\lambda(t)$, $G_\lambda(t)$, $D_\lambda(t)$ et $(\lambda - A)$ sont commutent deux à deux.*

**Démonstration**

1. $L_\lambda(t)$ est clairement un opérateur linéaire borné sur $X$.
2. Pour tout $r \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
S(r)L_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{-\lambda\tau}S(r)D_\lambda(\tau)xd\tau \\
&= \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}\int_0^r [S(u+\sigma) - S(u)]xdud\sigma d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^\tau \int_0^r e^{-\lambda\sigma}[S(u+\sigma) - S(u)]xdud\sigma d\tau \\
&= \int_0^r \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}[S(u+\sigma) - S(u)]xd\sigma d\tau du
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que, pour tout $x \in X$, $L_\lambda(t)x \in C^1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}S(r)L_\lambda(t)x &= \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}[S(r+\sigma) - S(r)]xd\sigma d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}[S(r+\sigma) - S(\sigma)]xd\sigma d\tau + L_\lambda(t)x - \phi_\lambda(t)S(r)x \\
&= \int_0^t \int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}\frac{d}{d\sigma}S(\sigma)S(r)xd\sigma d\tau + L_\lambda(t)x - \phi_\lambda(t)S(r)x \\
&= S(r)[e^{-\lambda t}D_\lambda(t)x + \lambda L_\lambda(t)x - \phi_\lambda(t)x] + L_\lambda(t)x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $AL_\lambda(t)x = e^{-\lambda t}D_\lambda(t)x + \lambda L_\lambda(t)x - \phi_\lambda(t)x$.

$(\lambda - A)L_\lambda(t) + G_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$ où $G_\lambda(t) = e^{-\lambda t}I$.

3. Pour tout $t \geq 0$, $L_\lambda(t)$ et $D_\lambda(t)$ Commutent.

   En effet, pour $t,s \geq 0$ on a d'une part,

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t)D_\lambda(s)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-u)}S(u)D_\lambda(s)xdu \\
&= \int_0^t e^{\lambda(t-u)}S(u)\int_0^s e^{\lambda(s-v)}S(v)xdvdu \\
&= \int_0^t\int_0^s e^{\lambda(t-u)}e^{\lambda(s-v)}S(u)S(v)xdvdu \\
&= \int_0^s e^{\lambda(s-v)}S(v)\int_0^t e^{\lambda(t-u)}S(u)xdudv \\
&= D_\lambda(s)D_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned}
L_\lambda(t)D_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{-\lambda u}D_\lambda(u)D_\lambda(t)xdu \\
&= \int_0^t e^{-\lambda u}D_\lambda(t)D_\lambda(u)xdu \\
&= D_\lambda(t)\int_0^t e^{-\lambda u}D_\lambda(u)xdu \\
&= D_\lambda(t)L_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

   Pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned}
L_\lambda(t)(\lambda-A)x &= \int_0^t e^{-\lambda s}D_\lambda(s)(\lambda-A)xds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda s}(e^{\lambda s}-S(s))xds \\
&= \phi_\lambda(t)x-\int_0^t e^{-\lambda s}S(s)xds \\
&= \phi_\lambda(t)x-G_\lambda(t)D_\lambda(t)x \\
&= (\lambda-A)L_\lambda(t)x
\end{aligned}$$

   D'après le lemme 4.1.1, pour tout $x \in D(A)$, $(\lambda-A)D_\lambda(t)x = D_\lambda(t)(\lambda-A)x$.

**Lemme 4.1.3.** Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe intégré sur $X$ et $A$ son générateur. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n(t), L_n(t) \in \mathcal{B}(X)$ tels que

1. $\forall x \in X$, $H_n(t)x \in D(A^n)$ et $(\lambda-A)^n H_n(t) + L_n(t)D_\lambda^n(t) = I$ ;
2. les opérateurs $(\lambda-A)^n$, $H_n(t)$, $L_n(t)$ et $D_\lambda^n(t)$ commutent deux à deux.

**Démonstration** La démonstration est similaire à celle du lemme 3.1.3

**Lemme 4.1.4.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n$ est fermé, alors $R(\lambda - A)^n$ est fermé.*

**Démonstration** Soit $y_p = (\lambda - A)^n x_p$ une suite dans $R(\lambda - A)^n$ convergente vers $y\in X$. D'après le lemme 4.1.3, il existe $F_n(t)$ et $G_n(t)$ deux opérateurs linéaires bornés tels que :

$$(\lambda - A)^n F_n(t) + D_\lambda^n(t) G_n(t) = I \tag{4.1}$$

On a d'une part, $D_\lambda^n(t)y_p \to D_\lambda^n(t)y$. D'autre part, d'après le lemme 4.1.1, on a

$$D_\lambda^n(t)y_p = D_\lambda^n(t)(\lambda - A)^n x_p = \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x_p \in R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n$$

Comme $R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n$ est fermé, il existe $z\in X$ tel que $D_\lambda^n(t)y = \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n z$. D'après (4.1) on a

$$\begin{aligned} y_p &= (\lambda - A)^n F_n(t)(\lambda - A)^n x_p + \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n G_n(t) x_p \\ &= (\lambda - A)^n F_n(t) y_p + G_n(t) D_\lambda^n(t) y_p \end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient,

$$\begin{aligned} y &= (\lambda - A)^n F_n(t) y + G_n(t) D_\lambda^n(t) y \\ &= (\lambda - A)^n F_n(t) y + G_n(t)\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n z \\ &= (\lambda - A)^n \left(F_n(t)y + D_\lambda^n(t) G_n(t) z\right) \in R(\lambda - A)^n \end{aligned}$$

## 4.2 Inclusion spectrale d'un semi groupe intégré

### 4.2.1 Spectre de Frdholm

**Théorème 4.2.1.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe intégré sur $X$ et $A$ son générateur. Alors pour tout $t>0$ :*

1. *Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm supérieur, alors $\lambda - A$ est semi-Fredholm supérieur.*
2. *Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm inférieur, alors $\lambda - A$ est semi-Fredholm inférieur.*
3. *Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm, alors $\lambda - A$ est semi-Fredholm.*

*4. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est de Fredholm, alors $\lambda - A$ est de Fredholm .*

**Démonstration**

1. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur, alors $\mathbf{dim}N(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$ et $R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))$ est fermé. En appliquant le lemme 4.1.1 et le lemme 4.1.3, on obtient $\mathbf{dim}N(\lambda - A) < \infty$ et $R(\lambda - A)$ est fermé, d'où $\lambda - A$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur.
2. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur semi-Fredholm inférieur, alors codim$R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$. D'après le lemme4.1.1, on a codim $R(\lambda - A) < \infty$, d'où $\lambda - A$ est un opérateur semi-Fredholm inférieur.
3. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur semi-Fredholm, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm supérieur ou semi-Fredholm inférieur. Donc $\lambda - A$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur ou un opérateur semi-Fredholm inférieur, d'où le résultat.
4. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur semi-Fredholm, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm supérieure et semi-Fredholm inférieure. Donc $\lambda - A$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur est semi-Fredholm inférieur, d'où le résultat.

**Corollaire 4.2.1.** *Soit $S(t)_{t\geq 0}$ un semi groupe intégré sur $X$ et $A$ son générateur. Alors pour tout $t > 0$ :*

$$\int_0^t e^{s\sigma_{uf}(A)}ds \subseteq \sigma_{uf}(S(t)),\ \int_0^t e^{s\sigma_{lf}(A)}ds \subseteq \sigma_{lf}(S(t))$$

$$\int_0^t e^{s\sigma_{sf}(A)}ds \subseteq \sigma_{sf}(S(t)),\ \int_0^t e^{s\sigma_{f}(A)}ds \subseteq \sigma_{f}(S(t))$$

### 4.2.2 Spectre quasi-Fredholm

**Proposition 4.2.1.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Alors*

$$dis(\lambda - A) \leq dis(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))$$

**Démonstration** Si $dis(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) = +\infty$, le résultat est évident.
Si $dis(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) = d \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $n \geq d$, on a :

$$R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n \cap N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) = R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^d \cap N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \quad (4.2)$$

Nous allons montrer que :

$$R(\lambda-A)^{d+1}\cap N(\lambda-A)=R(\lambda-A)^{d}\cap N(\lambda-A)$$

Soit $y\in R(\lambda-A)^{d}\cap N(\lambda-A)$, il existe $x\in X$ tel que $y=(\lambda-A)^{d}x$. D'après le lemme 4.1.3, il existe deux opérateurs $F_d(t)$ and $G_d(t)$ tel que

$$(\lambda-A)^{d}F_d(t)+D_{\lambda}^{d}(t)G_d(t)=I$$

Comme $\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^{d}G_d(t)x\in R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^{d}\cap N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)$, d'après (4.2) il existe $z\in X$ tel que $(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d}G_d(t)x=(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d+1}z$. Donc

$$\begin{aligned} y &= (\lambda-A)^{d}F_d(t)(\lambda-A)^{d}x+\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^{d}G_d(t)x \\ &= (\lambda-A)^{2d}F_d(t)x+\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)\right)^{d+1}z \\ &= (\lambda-A)^{d+1}((\lambda-A)^{d-1}F_d(t)x+D_{\lambda}^{d}(t)z). \end{aligned}$$

Ce qui implique $y\in R(\lambda-A)^{d+1}\cap N(\lambda-A)$. Par conséquent $dis(\lambda-A)\leq d$.
Si $d=0$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$R(\textstyle\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{n}\cap N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))=N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t)).$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$N(\lambda-A)\subseteq N(\textstyle\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))\subseteq R(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{n}\subseteq R(\lambda-A)^{n}.$$

Ce qui donne $N(\lambda-A)\cap R(\lambda-A)^{n}=N(\lambda-A)\cap R(\lambda-A)^{0}$, ceci suffit pour conclure $dis(\lambda-A)=0$

**Proposition 4.2.2.** *Soit $(S(t))_{t\geq0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$ et $d\in\mathbb{N}$. Si $R(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))+N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d}$ est fermé dans $X$, alors $R(\lambda-A)+N(\lambda-A)^{d}$ est fermé.*

**Démonstration** Si $d=0$, d'après le lemme 4.2.1 le résultat est immédiat .
Si $d\geq1$, soit $(y_n)_n$ une suite dans $R(\lambda-A)+N(\lambda-A)^{d}$, convergente vers $y\in$. Il existe $x_n\in X$ et $z_n\in N(\lambda-A)^{d}$ tels que $y_n=(\lambda-A)x_n+z_n$. Comme $D_{\lambda}^{d}(t)y_n\in R(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))+N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d}$ tend vers $D_{\lambda}^{d}(t)y_n$, alors $D_{\lambda}^{d}(t)y\in R(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))+N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d}$. Donc il existe $x\in X$ et $z\in N(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))^{d}$ tels que $D_{\lambda}^{d}(t)y=(\int_0^t e^{\lambda s}ds-S(t))x+z$, ce qui implique $D_{\lambda}^{2d}(t)y=D_{\lambda}^{d}(t)(\int_0^t e^{\lambda s}ds-$

$S(t))x + D_\lambda^d(t)z$ et $D_\lambda^d(t)z \in N(\lambda - A)^d$. Par conséquent

$$\begin{aligned} y &= (\lambda - A)^{2d} F_d(t)y + D_\lambda^{2d}(t) G_d(t) y \\ &= (\lambda - A)^{2d} F_d(t)y + G_d(t)[D_\lambda^d(t) \left( \int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t) \right) x + D_\lambda^d(t)z] \\ &= (\lambda - A)[(\lambda - A)^{2d-1} F_d(t)y + G_d(t) D_\lambda^{d-1}(t)] + G_d(t) D_\lambda^d(t)z \in R(\lambda - A) + N(\lambda - A)^d. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des propositions 4.2.1, 4.2.2 et le lemme 4.1.4.

**Corollaire 4.2.2.** *Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Alors, pour tout $t > 0$ :*

$$\textstyle\int_0^t e^{t\sigma_{qF}(A)} ds \subseteq \sigma_{qF}(S(t))$$

**Corollaire 4.2.3.** *Soit $S(t)_{t \geq 0}$ un semi groupe intégré sur $X$ et $A$ son générateur. Alors pour tout $t > 0$ :*

$$\textstyle\int_0^t e^{s\sigma_K(A)} ds \subseteq \sigma_K(S(t)) \ \ et \ \int_0^t e^{s\sigma_{se}(A)} ds \subseteq \sigma_{se}(S(t))$$

**Démonstration**

1. Supposons que $\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)$ est un opérateur de Kato, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $N(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)) \subseteq R\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right)^n$ et $R\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right)$ est fermé. D'après le lemme 4.1.1, $N(\lambda - A) \subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right) \subseteq R\left(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)\right)^n \subseteq R(\lambda - A)^n$ et d'après le lemme4.1.4 $R(\lambda - A)$ est fermé. Donc $\lambda - A$ est un opérateur de Kato
2. Si $\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)$ est un opérateur de Kato essentielle, alors il existe un sous-espace $L$ de $X$ de dimension finie tel que $N(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)) \subseteq R^\infty(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)) + L$ et $R(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t))$ est fermé. D'après le lemme 4.1.1, $N(\lambda - A) \subseteq N(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)) \subseteq R^\infty(\int_0^t e^{\lambda s} ds - S(t)) + L \subseteq R^\infty(\lambda - A) + L$. et d'après 4.1.4 $R(\lambda - A)$ est fermé. Donc $\lambda - A$ est un opérateur de Kato essentielle.

### 4.2.3 Spectre de Saphar, Spectre essentiellement Saphar

**Lemme 4.2.1.** *Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Alors, pour tout $t > 0$ on a :*

$$\int_0^t e^{\lambda t}ds - S(t) \text{ admet un inverse généralisé} \Longrightarrow \lambda - A \text{ admet un inverse généralisé .}$$

*Démonstration.* Supposons que $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ admet un inverse généralisé, alors il existe $R \in \mathcal{B}(X)$ tel que :

$$\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) R \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) = \int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$$

D'après le lemme 4.1.2, on a $(\lambda - A)F_\lambda(t) + G_\lambda(t)D_\lambda(t) = \phi_\lambda(t)I$, alors :

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(t)(\lambda - A) &= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + D_\lambda(t)G_\lambda(t)(\lambda - A)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)D_\lambda(t)G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) R \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)D_\lambda(t)R(\lambda - A)D_\lambda(t)G_\lambda(t)\\
&= (\lambda - A)F_\lambda(t)(\lambda - A) + (\lambda - A)D_\lambda(t)RD_\lambda(t)G_\lambda(t)(\lambda - A)\\
&= (\lambda - A)[F_\lambda(t) + D_\lambda(t)RD_\lambda(t)G_\lambda(t)](\lambda - A)
\end{aligned}$$

Donc $\lambda - A$ admet un inverse généralisé . □

**Théorème 4.2.2.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré sur $X$ de générateur $A$. Alors pour tout $t > 0$ :*

$$\int_0^t e^{t\sigma_{Sap}(A)}ds \subseteq \sigma_{Sap}(S(t)), \quad \int_0^t e^{t\sigma^e_{Sap}(A)}ds \subseteq \sigma^e_{Sap}(S(t))$$

**Démonstration**

1. Supposons que $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur de Saphar, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ admet un inverse généralisé et $N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \subseteq R^\infty\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)$. D'après le lemme 4.2.1, $\lambda - A$ admet un inverse généralisé, et puisque
$$N(\lambda - A) \subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \subseteq R^\infty\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \subseteq R^\infty(\lambda - A),$$
alors $\lambda - A$ est un opérateur de Saphar.

2. Supposons que $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est un opérateur essentiellement Saphar, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ admet un inverse généralisé, et il existe un sous-espace $M$ de dimension finie de $X$ tel que

$N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \subseteq R^\infty\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) + M$. D'après le lemme 4.2.1, $\lambda - A$ admet un inverse généralisé, et $N(\lambda - A) \subseteq N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) \subseteq R^\infty\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right) + M \subseteq R^\infty(\lambda - A) + M$. Donc $\lambda - A$ est essentiellement Saphar.

### 4.2.4 Spectre de descente, spectre de l'ascente

**Théorème 4.2.3.** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe intégré et $A$ son générateur. Alors pour tout $t > 0$ on a,*

1. *si $d(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, alors $d(\lambda - A) < \infty$,*
2. *si $a(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, alors $a(\lambda - A) < \infty$.*

**Démonstration**

1. Supposons que $d(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^n = R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^{n+1}.$$
D'après le lemme 4.1.3, il existe deux opérateurs linéaire borné $L_n(t)$ and $G_n(t)$ tels que :
$$(\lambda - A)^n L_n(t) + G_n(t) D_\lambda^n(t) = I \tag{4.3}$$
de plus $L_n(t)$, $H_n(t)$, $D_\lambda(t)$ et $(\lambda - A)$ sont commutent deux à deux.
Soit $y \in R(\lambda - A)^n$ et $x \in D(A^n)$ tels que $y = (\lambda - A)^n x$. D'après l'égalité (4.3) on a,
$$\begin{aligned}(\lambda - A)^n x &= (\lambda - A)^n L_n(t)(\lambda - A)^n x + G_n(t) D_\lambda^n(t)(\lambda - A)^n x \\ &= (\lambda - A)^{n+1} L_n(t)(\lambda - A)^{n-1} x + G_n(t)\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x\end{aligned}$$
Soit $z \in X$ tel que $(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^n x = (\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^{n+1} z$, alors :
$$(\lambda - A)^n x = (\lambda - A)^{n+1}[(\lambda - A)^{n-1} L_n(t) x + G_n(t) D_\lambda^{n+1}(t) z]$$
ceci suffit pour conclure $R(\lambda - A)^n = R(\lambda - A)^{n+1}$, par conséquent $d(\lambda - A) < \infty$.
2. Supposons que $a(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$N(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^n = N(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^{n+1}$$
Soit $x \in N(\lambda - A)^{n+1}$, alors $x \in N(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^n$. D'après l'égalité (4.3), on a
$$\begin{aligned}(\lambda - A)^n x &= (\lambda - A)^n L_n(t)(\lambda - A)^n x + G_n(t)\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x \\ &= (\lambda - A)^{n-1} L_n(t)(\lambda - A)^{n+1} x + G_n(t)\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x \\ &= 0\end{aligned}$$
Ceci implique $N(\lambda - A)^n = N(\lambda - A)^{n+1}$, par conséquent $a(\lambda - A) < \infty$.

**Corollaire 4.2.4.** *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi groupe intégré et* $A$ *son générateur. Alors pour tout* $t>0$*, si* $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ *est de Drazin inversible, alors* $\lambda - A$ *est de Drazin inversible.*

**Théorème 4.2.4.** *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi groupe intégré sur* $X$ *et* $A$ *son générateur. Alors pour tout* $t>0$ *:*

1. *Si* $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ *est semi-Browder supérieur, alors* $\lambda - A$ *est semi-Browder supérieur,*
2. *si* $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ *est semi-Browder inférieur, alors* $\lambda - A$ *est semi-Browder inférieur,*
3. *si* $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ *est semi-Browder, alors* $\lambda - A$ *est semi-Browder.*

**Démonstration**

1. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Browder supérieur, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Fredholm supérieur et $d(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$. D'après le théorème 4.2.1 et le théorème 4.2.3, on a $\lambda - A$ est semi-Fredholm supérieur et $d(\lambda - A) < \infty$, on en déduit que $\lambda - A$ est semi-Browder supérieur.
2. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Browder inférieur, alors $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Browder inférieur et $a(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$. D'après le théorème 4.2.1 et le théorème 4.2.3, on a $\lambda - A$ est semi-Fredholm inférieur et $d(\lambda - A) < \infty$, ce qui implique $\lambda - A$ est semi-Browder inférieur.
3. Si $\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)$ est semi-Browder, alors il est semi-Browder supérieur ou semi-Browder inférieur. D'après ce qui précède, $\lambda - A$ est semi-Browder supérieur ou semi-Browder inférieur. Par conséquent $\lambda - A$ est semi-Browder

**Corollaire 4.2.5.** *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi groupe intégré sur* $X$ *et* $A$ *son générateur. Alors pour tout* $t>0$ *:*

$$\int_0^t e^{s\sigma_{ub}(A)}s \subseteq \sigma_{ub}(S(t)),\ \int_0^t e^{s\sigma_{lb}(A)}s \subseteq \sigma_{lb}(S(t))$$

$$\int_0^t e^{s\sigma_b(A)}s \subseteq \sigma_b(S(t))$$

### 4.2.5 Spectre de descente essentielle, spectre de l'ascente essentielle

**Théorème 4.2.5.** *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi groupe intégré et* $A$ *son générateur. Alors pour tout* $t>0$*,*

1. *si* $d_e(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$*, alors* $d_e(\lambda - A) < \infty$*,*
2. *si* $a_e(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$*, alors* $a_e(\lambda - A) < \infty$*.*

**Démonstration**

1. Si $d_e(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\dim R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^n / R(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t))^{n+1} < \infty$$
Considérons l'application,
$$\begin{array}{rcl} \psi : R(\lambda - A)^n & \rightarrow & R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n / R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^{n+1} \\ (\lambda - A)^n x & \mapsto & \left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n x + R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^{n+1} \end{array}$$
L'application $\psi$ est bien définie, linéaire et surjective. De plus on a
$$N(\psi) \subseteq R(\lambda - A)^{n+1} \subseteq R(\lambda - A)^n$$
d'après le premier théorème d'isomorphisme $R(\lambda - A)^n / \mathrm{Ker}(\psi)$ et $R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n / R\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^{n+1}$ sont isomorphes, alors $\dim R(\lambda - A)^n / \mathrm{Ker}(\psi) < \infty$, et par suite $\dim R(\lambda - A)^{n+1} / \mathrm{Ker}(\psi) < \infty$. Par conséquent $\dim R(\lambda - A)^n / R(\lambda - A)^{n+1} < \infty$, on en déduit $d_e(\lambda - A) < \infty$.

2. Si $a_e(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)) < \infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\dim N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^{n+1} / N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n < \infty$$
Considérons l'application :
$$\begin{array}{rcl} \varphi : N(\lambda - A)^{n+1} & \rightarrow & N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^{n+1} / N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n \\ x & \mapsto & x + N\left(\int_0^t e^{\lambda s}ds - S(t)\right)^n \end{array}$$
L'application $\varphi$ est bien définie, linéaire et $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq N(\lambda - A)^n \subseteq N(\lambda - A)^{n+1}$. D'après le premier théorème d'isomorphisme $N(\lambda - A)^{n+1} / \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont isomorphe, donc $\dim N(\lambda - A)^{n+1} / \mathrm{Ker}(\varphi) < \infty$, et par suite $\dim N(\lambda - A)^n / \mathrm{Ker}(\varphi) < \infty$, ce qui montre que $\dim N(\lambda - A)^{n+1} / N(\lambda - A)^n < \infty$. On en déduit $a_e(\lambda - A) < \infty$.

**Corollaire 4.2.6.** *Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi groupe intégré sur $X$ et $A$ son générateur. Alors pour tout $t > 0$ :*

$$\int_0^t e^{s\sigma^e_{desc}(A)}ds \subseteq \sigma^e_{desc}(S(t)),\ \int_0^t e^{s\sigma^e_{asc}(A)}s \subseteq \sigma^e_{asc}(S(t))$$

# Bibliographie


[1] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers,* Kluwer. Acad. Press, 2004.

[2] P. Aiena, C.Trapani and S.Triolo, *SVEP and local spectral radius formula for unbounded operators,* Filomat, 28 (2) (2014), 263-273.

[3] W. Arendt, *Resolvent positive operators and integrated semigroups,* Semesterber. Funct. Anal., Univ. Tübingen, (1984), 73-101.

[4] W. Arendt, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems,* Israel J. Math., 59 (1987), 327-352.

[5] W. Arendt, *Resolvent positive operators,* Proc. London Math. Soc., 54 (1987), 321-349.

[6] C. Apostol, *The reduced minimum modules,* Michigan Math. J., 32 (1985), 279-294.

[7] A. Bátkai, P. Csomós, B. Farkas and A. Ostermann, *Operator Semigroups for Numerical Analysis*, Internet-Seminar Manuscript, 2012, https :// isem-mathematik.uibk.ac.at

[8] F. Bayart and É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators,* Cambridge Univ. Press, (2009).

[9] O. Bel Hadj Fredj, M. Burgos and M. Oudghiri, *Ascent spectrum and essential ascent spectrum,* Studia Math., 187 (1) (2008).

[10] M. Berkani and N. Moalla, *B-Fredholm Properties of Closed Invertible Operators,* Mediterr. J. Math., 13 (6) (2016), 4175-4185.

[11] H. Boua, A. El Bakkali and A. Tajmouati *Essential Descent Spectrum Equality,* arXiv :1801.09764v1.

[12] M. Burgos, A. Kaidi, M. Mbekhta and M. Oudghiri, *The descent spectrum and perturbations,* J. Operator Theory, 56 (2006), 259-271.

[13] J. Bračič and V. Müller, *Open set of eigenvalues and SVEP,* Banach Center Publ., 75 (2007), 67-69.

[14] Colin R. Day, *Spectral mapping theorem for integrated semi groups,* 1993 Springer-Verlag New York Inc. Vol. 47 (1993), 359-372.

[15] R. Derndinger and R. Nagel, *Der Generator stark stetiger Verbandshalbgruppen auf C(X) und dessen Spektrum*, Math. Ann., 245 (1979), 159-177.

[16] R. Derndinger and R. Nagel, *Der Generator stark stetiger Verbandshalb gruppen auf* $C(X)$ *und dessen Spektrum,* Math. Ann, 245 (1979), 159-174.

[17] R. DeLaubenfels, *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations,* Lect. Notes Math., 1570, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[18] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* Academic press, 1972.

[19] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators I*, Interscience, New York, (1958).

[20] A. Elkoutri and M. A. Taoudi, *Spectral Inclusions and stability results for strongly continuous semigroups*, Int. J. of Math. and Math. Sci., 37 (2003), 2379-2387.

[21] A. Elkoutri and M. A. Taoudi, *Spectre singulier pour les générateurs des semi-groupes,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 333 (7) (2001), 641-644 (French).

[22] K. J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

[23] A. Haïly, A. Kaidi and A. Rodríguez Palacios, *Algebra Descent Spectrum of Operators,* Israel J. Math., 177 (2010), 349-368.

[24] H. Heuser, *Functional analysis.* John Wiley. Sons Inc, New York, (1982).

[25] M. Hieber *Laplace Transforms and* $\alpha$*-Times Integrated Semigroups,* Forum Math. 3 (1991), 595-612.

[26] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups.* A. M. S., Providence, Rhode Island, 1957.

[27] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups* American Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, New series, vol. 31, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1957.

[28] M. Houimdi and H. Zguitti, *Propriétés Spctrales Locales d'une Matrice Carrée Des Opérateurs,* Acta Math. Vietnam., 25 (2000), 137-144.

[29] K. B. Laursen, M. M. Neumann, *Introduction to Local Spectral Theory,* Clarendon Press, Oxford, (2000).

[30] D. C. Lay, *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect*, Math. Ann., 184 (1970), 197-214.

[31] J. P. Labrousse, *Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm,* Rend. Circ. Math. Palermo (2), XXIX (1980), 161-258.

[32] M. Mbekhta *Théorie spectrale locale et limite de nilpotents,* Proc. Amer. Math. Soc., 110 (1990), 621-631.

[33] M. Mbekhta *Ascente, descente et spectre essentiel quasi-Fredholm,* Rend. Circ. Math. Palermo, 2 (2) (1997), 175-196.

[34] M. Mbekhta, *On the generalized resolvent in Banacah space,* J. M. A. A., 189 (1995), 362-377.

[35] M. Mbekhta and A. Ouahab *Opérateurs s-régulier dans un espace de Banach et Théorie spectrale,* Acta Sci, Math (Szeged)., 59 (1994), 525-543.

[36] M. Mbekhta, *Résolvant généralisé et Théorie spectrale* , J. Oper. Theory, 21 (1989), 69-105.

[37] T.L. Miller, V.G. Miller, R.C. Smith, *Bishop's property (*$\beta$*) and the Césaro operator,* J. London Math. Soc. (2) 58, (1998) 197-207.

[38] V. Müller, *On the regular spectrum*, J. Oper. Theory, 31 (1994), 363-380.

[39] V. Müller, *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras* 2nd edition. Oper. Theory Advances and Appl., vol. 139, 2007.

[40] R. Nagel and J. Poland, *The Critical Spectrum of a Strongly Continuous Semigroup,* Adv. Math., 152 (2000), 120-133.

[41] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[42] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators,* Birkhäuser, Basel, 2007.

[43] V. Rakočević, *Generalized spectrum and commuting compact perturbations,* Proc. Edinb. Math. Soc., 36 (1993), 197-209.

[44] A. Tajmouati, H. Boua, *Spectral Inclusions For* $C_0$*-Semigroups,* Int. J. Math. and Anal, 9 (40) (2015), 1971-1980.

[45] A. Tajmouati, H. Boua, *Spectral Theory For Integrated Semigroups,* Int. J. Pure Appl. Math., 109 (4) (2016), 847-860.

[46] A. Tajmouati, H. Boua, *Spectral Mapping Theorem for $C_0$-Semigroups of Drazin Spectrum,* Bol. Soc. Paran. Mat. (In Press).

[47] A. Tajmouati, H. Boua, *Problem of Descent Spectrum Equality,* arXiv :1801.09752v1.

[48] A. Tajmouati, H. Boua and A. El Bakkali, *Descent spectrum equality,* Asian-Eur. J. Math., (In Press).

[49] A. Tajmouati, H. Boua, M. Karmouni *Quasi-Fredholm, Saphar Spectra For $C_0$ Semigroups Generators,* Int. J. Pure Appl. Math., 36 (2016) 359-366.

[50] A. Tajmouati, H. Boua, M. Karmouni *Quasi-Fredholm, Saphar Spectra for Integrated Semigroup,* arXiv :1801.09743v1.

[51] A. E, Taylor, *Introduction to Functional Analysis,* Wiley, New York, (1958).

[52] H. R. Thieme, *Integrated Semigroups and Integrated Solutions to Abstract Cauchy Problems,* J. Math. Anal. Appl., 152 (1990), 416-447.

[53] J. M. A. A. Van Neerven, *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operator*, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1992.

[54] T. J. Xiao and J. Liang, *The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations,* Lect. Notes in Math. 1701, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[55] M. Zuhair, Nashed and Yagu Zhao, *The Drazin Inverse for Singular Evolution Equations and Partial Differential Operators,* WSSIAA 1 (1992), 441-456.