



N° d'ordre : 40/2016

THESE DE DOCTORAT

Dans le cadre d'une cotutelle entre l'Université Sidi Mohamed ben Abdellah
 &
 L'Université de Lyon

Présentée par

Mr. Omar BAHO

Spécialité : Génie Mécanique

Sujet de la thèse :

**Conception de structures sandwiches à fort pouvoir d'atténuation
 acoustique « analyse de sensibilité et optimisation »**

Thèse présentée et soutenue le 03 décembre 2016 devant le jury composé de

Nom Prénom	Titre	Etablissement	
BOUHADDI Noureddine	Professeur des universités	FEMTO-ST – France	Président
MOUSSAOUI Fouad	Professeur d'enseignement supérieur	FST - Er-Rachidia	Rapporteur
EL KHALFI Ahmed	Professeur d'enseignement supérieur	FST - Fès	Rapporteur
KHAMLICH Abdelatif	Professeur d'enseignement supérieur	ENSA -Tétouan	Rapporteur
SEDDOUKI Abbass	Professeur d'enseignement supérieur	FST - Fès	Examineur
ZINE Abdelmalek	Maître de conférences	ECL - France	Examineur
BAREILLE Olivier	Maître de conférences	ECL - France	Examineur
BENAMAR Rhali	Professeur d'enseignement supérieur	EMI - Rabat	Co-Directeur de thèse
HARRAS Bilal	Professeur d'enseignement supérieur	FST - Fès	Directeur de thèse
ICHCHOU Mohammed	Professeur des universités	ECL - France	Directeur de thèse

Laboratoires d'accueil : Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes
 (ECL) Laboratoire de Génie Mécanique (FST)



Etablissements : Faculté des Sciences et Techniques de Fès et École Centrale de Lyon



Centre d'Etudes Doctorales Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Faculté des Sciences et Techniques - Fès ; Route d'Immouzer, B.P. 2202 Fès-, Maroc –

Tél. : (212) 5 35 60 80 14 ; Tél. : (212) 5 35 60 29 53 ; Fax : (212) 5 35 60 82 14 ; Site web : www.fst-usmba.ac.ma

Résumé

L'industrie aérospatiale doit faire face à de nouvelles exigences environnementales, tout particulièrement concernant la réduction des coûts de lancement. L'utilisation de matériaux sandwichs composites plus légers permet de répondre à ces besoins. Cependant, l'allègement des matériaux sandwichs favorise une transmission importante du bruit, d'où la nécessité de prendre en compte des critères vibroacoustiques dès la phase de préconception. Dans cette optique, le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif de proposer une démarche d'optimisation vibroacoustique des panneaux sandwichs composites légers, sous contraintes de masse et rigidité. Une étude spécifique est consacrée à l'optimisation des variables géométriques de solides cellulaires à périodicité de type nid d'abeille. L'objectif principal est de minimiser la densité modale en s'appuyant sur des modèles homogénéisés fiables.

Afin de calculer les propriétés mécaniques macroscopiques des panneaux sandwichs, une méthode numérique d'homogénéisation tridimensionnelle est développée. Cette méthode permet de calculer les propriétés mécaniques équivalentes en utilisant les déformations et contraintes moyennes sur le volume représentatif. Les résultats obtenus sont conformes à ceux calculés par des méthodes classiques basées sur des modèles analytiques.

Dans le but d'identifier une fonction objectif riche en informations sur le comportement vibroacoustique de panneau sandwich, on choisit d'étudier la densité modale du panneau. Par la suite, la fréquence de transition, qui sépare la zone de comportement de flexion pure du panneau sandwich du comportement en cisaillement pur de l'âme, est utilisée pour définir la fonction objectif.

Après une étude d'analyse de sensibilité sur les paramètres mécaniques et géométriques de la structure sandwich, une démarche globale d'optimisation mono-objectif est mise en

oeuvre pour maximiser la fréquence de transition de la structure sandwich composite constituée d'une âme en nid d'abeille hexagonale.

Enfin, cette démarche est étendue pour estimer les propriétés géométriques optimales de nouvelles âmes.

Mots-clés : Vibroacoustique, optimisation, sensibilité, homogénéisation, panneau sandwich, nid d'abeille.

Abstract

The aerospace industry has to adapt to new environmental requirements, especially concerning the reduction of the launch costs. The use of lighter composite sandwich materials can meet part of these requirements. However, their high stiffness-to-weight ratio implies that they tend to increase noise transmission, which may be damageable to the payload. Vibroacoustic criteria should hence be taken into account from the early design stages. In this context, the work presented in this thesis aims to provide a vibroacoustic optimization approach of lightweight composite sandwich panels, under mass and stiffness constraints. A specific study is devoted to the optimization of geometric variables of periodic cellular solids such as honeycombs. The main objective is to minimize the modal density based on reliable homogenized models.

In order to calculate the macroscopic mechanical properties of the sandwich panel, a numerical method of three-dimensional homogenization is developed. This method allows to calculate the equivalent mechanical properties by applying **the average strains and stresses** on a unit cell. The results obtained are consistent with those calculated by conventional methods based on analytical approaches.

The modal density is chosen as an objective function for optimization, as it is closely related to the vibroacoustic behavior of the structure. The transition frequency, which separates the region of pure panel bending from the pure core shear zone, is further studied and considered as an alternative objective function.

After a sensitivity analysis of the mechanical and geometric parameters of the sandwich structure, a mono-objective optimization approach is implemented to maximize the

Abstract

transition frequency of a composite sandwich structure with a hexagonal core. This approach is then extended to estimate the optimal geometric properties of new core shapes.

Keywords: Vibroacoustics, optimization, sensitivity analysis, homogenization, sandwich panel, honeycomb.

Table des matières

RÉSUMÉ	II
ABSTRACT	IV
TABLE DES MATIÈRES	VI
LISTE DES TABLEAUX	X
LISTE DES FIGURES	XII
LISTE DES ABRÉVIATIONS	XV
DÉDICACE	XVI
REMERCIEMENTS	XVII
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE 1. ÉTAT DE L'ART	6
1.1 INTRODUCTION.....	7
1.2 ARCHITECTURE DE STRUCTURE SANDWICH.....	8
1.2.1 Architecture de l'âme de sandwich.....	11
1.2.2 Architecture des peaux de sandwich.....	14
1.2.3 Désignation des structures périodiques.....	15
1.2.4 Modélisations des architectures périodiques.....	15
1.2.5 Comportement vibratoire d'une structure périodique.....	19
1.3 INDICATEURS VIBROACOUSTIQUES.....	20
1.4 ANALYSE DE SENSIBILITÉ.....	22
1.5 OPTIMISATION DES STRUCTURES	24

1.5.2	Méthodes numériques d'optimisation des structures	27
1.5.3	Méthode de résolution.....	32
CHAPITRE 2. HOMOGENÉISATION DES STRUCTURES PÉRIODIQUES		36
2.1	INTRODUCTION.....	37
2.2	PRINCIPE DE L'HOMOGENÉISATION	38
2.3	MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION	39
2.4	ESTIMATION DES PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DU NID D'ABEILLE.....	41
2.4.1	Description macro-méso de la structure.....	41
2.4.2	Modélisation numérique.....	45
2.4.3	Automatisation de l'homogénéisation numérique	52
2.4.4	Application numérique.....	53
2.5	EFFET GÉOMÉTRIQUE SUR LE MODULE DE CISAILLEMENT DE L'ÂME EN NID D'ABEILLE	54
2.6	CONCLUSION.....	59
CHAPITRE 3. COMPORTEMENT VIBROACOUSTIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES.....		61
3.1	INTRODUCTION.....	62
3.1.1	Expressions théoriques de la densité modale.....	63
3.1.2	Effet de cisaillement et de comportement orthotrope sur la densité modale.....	72
3.2	ESTIMATION DE FRÉQUENCE DE TRANSITION.....	73
3.2.1	Brève revue dans la littérature sur la prédiction de fréquence de transition.....	74
3.2.2	Amélioration de l'estimation de la fréquence de transition.....	78
3.3	CONCLUSION.....	90
CHAPITRE 4. ANALYSE DE SENSIBILITÉ.....		92
4.1	INTRODUCTION.....	93
4.2	ÉTUDE DE SENSIBILITÉ.....	94

4.2.1	Indice de sensibilité	94
4.2.2	Estimation de l'indice de sensibilité - Méthode FAST	96
4.3	APPLICATION : STRUCTURE SANDWICH COMPOSITE.....	100
4.3.1	Densité modale	100
4.3.2	Fréquence de transition.....	108
4.4	CONCLUSION.....	110
 CHAPITRE 5. OPTIMISATION DU COMPORTEMENT VIBROACOUSTIQUE DE STRUCTURES SANDWICHES COMPOSITES.....		112
5.1	INTRODUCTION.....	113
5.2	PROCÉDURE D'OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH COMPOSITE	114
5.2.1	Fonction objectif.....	115
5.2.2	Variables de conception.....	115
5.2.3	Contraintes	116
5.2.4	Formulation de problème d'optimisation	116
5.2.5	Démarche globale d'optimisation.....	118
5.3	OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH D'ÂME HEXAGONALE	120
5.3.1	Facteur de perte par transmission	123
5.4	OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH À ÂME SINUSOÏDALE.....	126
5.5	CONCLUSION.....	131
 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES		132
 BIBLIOGRAPHIE		I
 ANNEXE : A		XIII
 ANNEXE : B		I
 ANNEXE : C		VI
 ANNEXE : D.....		VII

Liste des tableaux

TABLEAU 1.	EXPRESSION DE LA DENSITÉ MODALE POUR DIFFÉRENTES STRUCTURES	21
TABLEAU 2.	DÉFINITION DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES ET MATÉRIELS DE VER	44
TABLEAU 3.	PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MATÉRIELS DU SANDWICH ISOTROPE - MODÈLE A.....	44
TABLEAU 4.	PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MATÉRIELLES DU SANDWICH COMPOSITE -MODÈLE B.	45
TABLEAU 5.	CONDITIONS AUX LIMITES POUR LE MODÈLE ÉLÉMENT FINI DU VER : 1ER, 2EME ET 3EME ANALYSES STATISTIQUES	48
TABLEAU 6.	CONDITIONS AUX LIMITES POUR LE MODÈLE ÉLÉMENT FINI DU VER : 4 ^{EME} , 5 ^{EME} ET 6 ^{EME} ANALYSES STATISTIQUES.	49
TABLEAU 7.	IMPLANTATION DE VER DE NID D'ABEILLE SUR ABAQUS	50
TABLEAU 8.	PROPRIÉTÉS MATÉRIELLES DE L'ÂME.....	50
TABLEAU 9.	EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES PROPRIÉTÉS HOMOGÉNÉISÉES ÉQUIVALENTES DE L'ÂME.	53
TABLEAU 10.	PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ÉQUIVALENTES DE L'ÂME EN NID D'ABEILLE MODÈLE B	54
TABLEAU 11.	COMPARAISON DE L'ESTIMATION DES MODULES DE CISAILLEMENT TRANSVERSAL G13 * ET G23 *.....	56
TABLEAU 12.	EXPRESSIONS DE LA DENSITÉ MODALE -STRUCTURE SANDWICH DONT L'ÂME ET PEAUX SONT ISOTROPES.....	63
TABLEAU 13.	VALEUR DE FREQUENCE DE TRANSITION PAR DIFFERENTES METHODES	88
TABLEAU 14.	PLAGES DE VARIATION DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES	101

Liste des tableaux

<i>TABLEAU 15.</i>	<i>PLAGES DE VARIATION DES PARAMÈTRES MÉCANIQUES.....</i>	<i>101</i>
<i>TABLEAU 16.</i>	<i>DÉFINITION DE VARIABLES DE CONCEPTION DE NID D'ABEILLE.....</i>	<i>115</i>
<i>TABLEAU 17.</i>	<i>PANNEAU SANDWICH COMPOSITE DE RÉFÉRENCE.....</i>	<i>121</i>
<i>TABLEAU 18.</i>	<i>PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES DE PANNEAU SANDWICH COMPOSITE DE RÉFÉRENCE.....</i>	<i>121</i>
<i>TABLEAU 19.</i>	<i>CONFIGURATION INITIALE ET OPTIMALE DE PANNEAU SANDWICH COMPOSITE.....</i>	<i>123</i>
<i>TABLEAU 20.</i>	<i>FRÉQUENCE DE TRANSITION OPTIMALE.....</i>	<i>129</i>
<i>TABLEAU 21.</i>	<i>CONFIGURATION INITIALE ET OPTIMALE D'ÂME EN NID D'ABEILLE HEXAGONALE.....</i>	<i>129</i>
<i>TABLEAU 22.</i>	<i>CONFIGURATION OPTIMALE D'ÂME SINUSOÏDALE.....</i>	<i>129</i>
<i>TABLEAU 23.</i>	<i>CONFIGURATION OPTIMALE D'ÂME SINUSOÏDALE RENFORCÉE.....</i>	<i>130</i>
<i>TABLEAU 24.</i>	<i>PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES ÉQUIVALENTES POUR DIFFÉRENTES ÂMES.....</i>	<i>130</i>

Liste des figures

FIGURE 1.	PANNEAU DE STRUCTURE SANDWICH.....	8
FIGURE 2.	TYPES DES STRUCTURES SANDWICHES.....	9
FIGURE 3.	COÛT-PERFORMANCE DES DIFFÉRENTES STRUCTURES SANDWICHES [3].....	10
FIGURE 4.	L'INTENSITÉ ET LA RIGIDITÉ DE DIVERSE STRUCTURE À ÂME ALVÉOLAIRE [3]	10
FIGURE 5.	STRUCTURES SANDWICHES AVEC LES DIFFÉRENTS NOYAUX	11
FIGURE 6.	DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DE NIDS D'ABEILLE.....	13
FIGURE 8.	SCHÉMA D'UN MODÈLE À DEUX DIMENSIONS.....	17
FIGURE 9.	SCHÉMA ITÉRATIF : PROBLÈME INITIAL \rightarrow SOUS-PROBLÈME APPROCHÉ.....	31
FIGURE 10.	BOÎTE NOIRE D'OPTIMISATION	32
FIGURE 11.	PROCESSUS D'OPTIMISATION À L'AIDE DE LA PSC.....	35
FIGURE 12.	GÉOMÉTRIE ET NOTATIONS D'UNE PLAQUE SANDWICH.....	42
FIGURE 13.	ÂME HEXAGONALE - DÉFINITION DU VER.....	43
FIGURE 14.	STRUCTURE SANDWICH COMPOSITE SYMÉTRIQUE	43
FIGURE 15.	VOLUME ÉLÉMENTAIRE REPRÉSENTATIF EN 3D	48
FIGURE 16.	SCHÉMA DE CALCUL DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ÉQUIVALENTES	52
FIGURE 17.	CELLULE DE L'ÂME DE NID D'ABEILLE SOUS DÉPLACEMENT DE CISAILLEMENT ARBITRAIRE.....	57
FIGURE 18.	MODULE DE CISAILLEMENT SELON LA DIRECTION DE CHARGEMENT $e\alpha$ (AVEC $\theta = \pi/3$) .	58
FIGURE 19.	MODULE DE CISAILLEMENT EN FONCTION DE LA DIRECTION DE CHARGEMENT ($\theta = \pi/3$	59
FIGURE 21.	NOMBRE D'ONDES PLAN [78]	70
FIGURE 22.	EFFET DE CISAILLEMENT SUR LA DENSITÉ MODALE	72
FIGURE 23.	EFFET DU COMPORTEMENT ORTHOTROPE SUR LA DENSITÉ MODALE.....	73

Liste des figures

FIGURE 24.	FRÉQUENCE DE TRANSITION UTILISANT LE NOMBRE D'ONDES – MODÈLE A	81
FIGURE 25.	FRÉQUENCE DE TRANSITION UTILISANT LE NOMBRE D'ONDES – MODÈLE B	82
FIGURE 26.	FRÉQUENCE DE TRANSITION UTILISANT LA DENSITÉ MODALE-MODÈLE A	85
FIGURE 27.	FRÉQUENCE DE TRANSITION UTILISANT LA DENSITÉ MODALE-MODÈLE A	86
FIGURE 28.	EFFET DE COMPORTEMENT ORTHOTROPE SUR LA FRÉQUENCE DE TRANSITION	89
FIGURE 29.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL : TSI) DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES (t_h , b_h ET t_c) DE SANDWICH MODÈLE-B	102
FIGURE 30.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL : TSI) DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES (h_h , θ_h ET t_f) DE SANDWICH MODÈLE-B	103
FIGURE 31.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL) DES PARAMÈTRES MÉCANIQUES (E_c ET ρ_p) DE SANDWICH MODÈLE-B	104
FIGURE 32.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL) DES PARAMÈTRES MÉCANIQUES (ρ_c ET ρ_p) DE SANDWICH MODÈLE-B	105
FIGURE 33.	INDICES DE SENSIBILITÉ DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DU SANDWICH	107
FIGURE 34.	INDICES DE SENSIBILITÉ DES PARAMÈTRES MÉCANIQUES DU SANDWICH	107
FIGURE 35.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL) DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DE SANDWICH MODÈLE-B	109
FIGURE 36.	INDICES DE SENSIBILITÉ (PARTIEL : PSI ET TOTAL) DES PARAMÈTRES MÉCANIQUES DE SANDWICH MODÈLE-B	109
FIGURE 37.	PROCÉDURE D'OPTIMISATION DU PANNEAU SANDWICH COMPOSITE	119
FIGURE 38.	COMPARAISON ENTRE LA DENSITÉ MODALE OPTIMALE ET LA DENSITÉ MODALE DU MODÈLE DE RÉFÉRENCE	122

Liste des figures

FIGURE 39.	TRANSMISSION ACOUSTIQUE	124
FIGURE 40.	FACTEUR DE PERTE PAR TRANSMISSION TL (DB) DU PANNEAU SANDWICH DE RÉFÉRENCE ET OPTIMAL	125
FIGURE 41.	ÂME SINUSOÏDALE	126
FIGURE 42.	ÂME SINUSOÏDALE RENFORCÉE.....	126

Liste des abréviations

- AS : Analyse de sensibilité
- VER. : Volume élémentaire représentatif
- SI. : Indice de sensibilité
- TL : Transmission loss
- SD : Screening Designs
- 3D : Tridimensionnelle
- 2D : Bidimensionnelle
- MC : Monte Carlo
- RSM : Response Surface Methodology
- FAST : Fourier Amplitude Sensivity Test
- GSA : Global Sensivity Analysis
- LSA : Local Sensivity Analysis
- PSI : Partial sensitivity indice
- TSI : Total sensitivity indice
- PSC : Programmation séquentielle convexe

إهداء

إلى من علمني الصبر والحلم

إلى من شجعني على المعرفة والعلم

إلى من أفتقده كثيرا...إلى أبي العزيز

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها

إلى من علمتني وعانت الصعاب لأصل إلى ما أنا فيه...إلى أمي الغالية

إلى من ضحت بجانبني وكانت سندي وقوتي وملأني بعد الله

إلى من شجعتني وساعدتني بكل غال ونفيس... إلى زوجتي الحبيبة

إلى من أثار دربي وأسعد أيامي

إلى مهجة قلبي...إلى إبني هيثم وسيم

إلى إخوتي وأسرتي جميعا

إلى أساتذتي وكل من علمني حرف

أهدي هذا البحث المتواضع راجيا من المولى

عز وجل أن يتقبله منا وأن ينفع به غيرنا

Remerciements

Les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse n'auraient jamais pu avoir lieu sans l'aide et le soutien très précieux de plusieurs personnes. Ce travail est réalisé au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes (D2S) du laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'Ecole centrale de Lyon en collaboration avec la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, laboratoire Génie Mécanique.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mes deux directeurs de thèse **Mr. Bilal Harras**, **Mr. Mohammed Najib Ichchou**, pour avoir dirigé ces travaux et pour m'avoir confié ce sujet de thèse très passionnant. J'exprime ma reconnaissance pour leurs aides si précieuses, leurs intérêts et leurs disponibilités. Toutes leurs compétences, leurs qualités humaines m'ont beaucoup servie au cours de ces trois courtes années.

Je voudrais témoigner ma plus grande gratitude, doublée de mon profond respect, à mon Co-directeur **Mr. Rhali Benamar** pour la confiance qu'il m'a accordé et la qualité des conseils qu'il m'a apportés.

Je tiens à remercier **Mr. Abdelmalek Zine** et **Mr. Olivier Bareille**. Je les remercie pour leurs disponibilités, leurs explications, et leurs conseils précieux qu'ils m'ont donnés pendant toute cette période de thèse, et aussi pour avoir bien voulu participer à la soutenance.

J'aimerais également adresser un grand merci à **Mr. Abdellatif Khamlichi**, professeur à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Tétouan, **Mr. Fouad Moussaoui**, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Er-Rachidia et **Mr Ahmed El Khalfi**, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès d'avoir accepté d'examiner en tant que rapporteurs de ce travail.

Je remercie également **Mr. Nouredine Bouhaddi**, professeur à université de Franche-Comté Besançon d'avoir accepté de faire partir de ce jury et surtout de le présider et je remercie très chaleureusement **Mr. Abbas Seddouki**, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès d'avoir bien accepté d'être membre de jury et de l'attention accordée à ce manuscrit.

Je remercie mes collègues et amis doctorants avec qui j'ai tant partagé pendant ces dernières années : Zakaria, Jean-Loup, Christophe, Xingrong, Xiangkun, Anna Rita, Xiangway....

Merci aussi à mes collègues de projet, **Zergoune Zakaria** et **Christen Jean-Loup**, pour la qualité de leur travail qui a grandement simplifié le mien. Je remercie également très chaleureusement tout le personnel (Isabelle, Françoise...) du secrétariat pour leurs disponibilités et leurs gentillesse.

Mes dernières pensées vont à ma petite famille, ma femme **Hanane** et mon fils **Haytham**, je tiens à leur exprimer ma sincère reconnaissance pour leurs encouragements et leurs aides précieux. Merci pour m'avoir donné ce goût pour les études et cette soif d'apprendre et d'avoir faire ensemble cette belle aventure. Je remercie également ma mère et ma belle-mère pour leurs soutiens continus et leurs appuis à toute épreuve. Je n'oublierai pas toute les membres de la grande famille.

Introduction générale

À l'heure actuelle, les problématiques économiques et écologiques majeures dans le domaine des transports tel que l'industrie aérospatiale et aéronautique amènent à envisager de nouvelles solutions afin de réduire les coûts d'exploitation. À titre d'exemple, la conception des charges utiles a (satellites) besoin d'un grand savoir-faire, notamment en vibroacoustique. Dès le décollage des lanceurs, les charges utiles sont soumises à des champs de pression acoustique intenses qui peuvent les endommager. Pour lutter contre ces endommagements, les constructeurs de lanceurs mettent en place deux familles de solutions à savoir :

Des solutions faites à l'intérieur de lanceur : ajouts des absorbeurs d'Helmholtz qui recouvrent la face interne de la coiffe, afin de garantir aux satellites une protection acoustique acceptable pendant le vol, ou ajout des mousses.



ABSORBEURS D'HELMHOLTZ DANS LA COIFFE

Des solutions faites à l'extérieur du lanceur : Une injection dans le déflecteur du moteur central, qui permet de réduire notablement le bruit lorsque le lanceur est à 0 m du sol. Une autre injection dans les carreaux des deux propulseurs EAP, pour réduire le bruit à faible altitude également. Et aussi il y a autre injection sur la table de lancement, tel que les jets d'eau atteignent le plan supérieur des palettes EAP où viennent s'écraser les jets des moteurs. Cette injection est surtout efficace pour atténuer le bruit à l'altitude 50 m, sur la partie haute du lanceur dans les premières bandes d'octaves, ce qui est important vis-à-vis des charges utiles.



ARIANE 5 FLIGHT VA208 TAKE-OFF

La limitation de la première famille des méthodes est la masse importante ajoutée, dans le cas où la deuxième famille de méthodes à un coût trop important. Dans cette optique, une des premières solutions consiste à alléger les structures. De nombreuses études ont été réalisées sur le comportement et l'utilisation de matériaux composites pour les substituer aux matériaux classiques. Ainsi, les matériaux composites ont été progressivement introduits pour remplacer, dans un premier temps, les pièces non structurales, en raison de leurs ratios élevés de rigidité-poids, leur résistance à la corrosion. Ces matériaux offrent la possibilité d'introduire une couche de base viscoélastique pour apporter un niveau d'amortissement acceptable tout en respectant un compromis entre masse ajoutée et rigidité. Aujourd'hui, les panneaux sandwichs composites d'âme en nid d'abeille sont largement utilisés dans l'industrie aérospatiale, en

raison de leurs excellentes propriétés telles que la rigidité, le rapport résistance/poids élevé et une faible conductivité thermique. En plus les panneaux sandwichs d'âme en nid-d'abeilles offrent une possibilité d'ajuster les paramètres géométriques des cellules unitaires pour atteindre un objectif donné. Généralement, les variétés de panneaux sandwichs commerciales de nid-d'abeilles sont optimisées pour des contraintes mécaniques et de poids. Par conséquent, un panneau sandwich peut être léger et conçu pour supporter des charges mécaniques élevées. Toutefois, il a tendance à être médiocre en ce qui concerne l'atténuation acoustique. L'architecture du sandwich entraîne le cisaillement de l'âme du matériau sandwich qui à son tour, augmente sa densité modale d'une manière exponentielle, ce qui augmente la transmission acoustique du sandwich, notamment en moyenne et haute fréquence. Cette augmentation de la transmission dépend de la valeur du cisaillement de l'âme. Pour remédier à ce problème, plusieurs tentatives ont été faites pour identifier les architectures sandwichs optimales qui équilibrent les propriétés mécaniques et acoustiques en optimisant la perte de transmission sous contraintes de types mécaniques ou matériels. Dans cette perspective notre travail consiste à étudier le comportement vibroacoustique des structures sandwichs en matériaux composites pour voir la manière de propagation du son et des vibrations afin de développer les travaux déjà faits sur la perte de transmission et les étendues pour optimiser les autres indicateurs vibroacoustiques comme la densité modale. Le but est de construire des structures sandwichs capables d'atténuer ou éliminer les vibrations en termes de réduction de bruit.

Objectifs de thèse

L'objectif principal de ces travaux de recherche est de concevoir une structure sandwich à fort pouvoir d'atténuation acoustique en optimisant respectivement l'âme du sandwich et les peaux. Précisément, on s'intéresse à minimiser la densité modale de structure sandwich à âme en nid d'abeille et de proposer d'autres formes plus efficaces.

Dans ce contexte, cette thèse a quatre axes principaux, à savoir :

- le développement d'une nouvelle méthode d'homogénéisation en trois dimensions pour calculer les propriétés équivalentes de l'âme de sandwich à l'échelle macroscopique,
- l'analyse de comportement vibroacoustique de la structure sandwich pour identifier la fonction objectif.
- l'étude de sensibilité des paramètres géométriques et matériels de la structure sandwich,
- le développement d'une méthode générale d'optimisation des structures sandwich d'un point de vue vibroacoustique.

Organisation de la thèse

Ce mémoire de thèse est organisé de la manière suivante :

- ❖ **Le premier chapitre** est consacré à la présentation de la structure sandwich. Dans un premier temps, nous présentons quelques notions concernant les structures sandwichs composites, ainsi qu'une synthèse sur les architectures des structures sandwichs à âmes alvéolaires périodiques. Dans un second temps sont présentés les différents outils d'analyse de sensibilité et d'optimisation utilisés dans le domaine de l'analyse structurale.
- ❖ **Le deuxième chapitre** est dédié à l'estimation des propriétés mécaniques équivalentes de l'âme alvéolaire périodique de la structure sandwich basée sur l'approche numérique. Dans ce chapitre on s'intéresse uniquement à identifier les propriétés mécaniques équivalentes pour la forme hexagonale du nid d'abeille qui sera comparé par la suite avec celle calculée analytiquement dans la littérature.

- ❖ **Le troisième chapitre** porte sur l'analyse de la densité modale dans les structures sandwichs, et plus précisément à l'effet de cisaillement de l'âme. En effet, le cisaillement de l'âme augmente la densité modale des modes de flexion du sandwich. Pour étudier cet effet, on cherche dans ce chapitre à identifier la fréquence à laquelle commence cet effet. Une brève revue est faite sur l'estimation de fréquence de transition. Le développement et la validation d'une nouvelle expression analytique de fréquence de transition sont présentés à la fin de ce chapitre. Cette expression permet de prendre en considération l'effet de comportement orthotrope des panneaux sandwichs composites.

- ❖ **Le quatrième chapitre** est consacré à l'étude de sensibilité ou bien l'influence des paramètres géométriques et matériels de la structure sandwich sur les résultats obtenus via des modèles proposés dans le chapitre 2 et chapitre 3. L'objectif de cette étude est d'identifier les paramètres des modèles les plus influents en vue d'optimisation ultérieure.

- ❖ **Le cinquième chapitre** est consacré à proposer une méthode d'optimisation générale, qui permet d'identifier les paramètres géométriques optimaux de l'âme et les deux peaux d'un panneau sandwich composite. La minimisation de la densité modale est l'objectif de la présente étude d'optimisation dans un premier temps. Ensuite deux types d'âmes de sandwich sont proposés pour réduire encore plus la densité modale. Enfin, l'identification des propriétés géométriques de ces nouvelles structures est faite à l'aide de cette nouvelle méthode d'optimisation.

- ❖ Enfin, une conclusion générale résumera les principaux résultats mis en évidence par la présente étude.

Chapitre 1. État de l'art

L'objet de ce chapitre est de positionner ces travaux de recherche par rapport aux différents domaines de l'analyse vibratoire et acoustique des structures. Suite à une présentation générale des structures sandwiches, les différents types d'architectures sandwiches d'âmes périodiques en nid d'abeille, ainsi que les principaux indicateurs vibroacoustiques seront présentés. Ensuite, une brève revue sur les différentes méthodes d'analyse de sensibilité et d'optimisation sera présentée.

1.1	INTRODUCTION	7
1.2	ARCHITECTURE DE STRUCTURE SANDWICH	8
1.2.1	Architecture de l'âme de sandwich.....	11
1.2.2	Architecture des peaux de sandwich.....	14
1.2.3	Désignation des structures périodiques.....	15
1.2.4	Modélisations des architectures périodiques.....	15
1.2.4.1	Modèle à deux dimensions.....	16
1.2.4.2	Modèle à trois dimensions.....	18
1.2.5	Comportement vibratoire d'une structure périodique	19
1.3	INDICATEURS VIBROACOUSTIQUES	20
1.4	ANALYSE DE SENSIBILITÉ	22
1.5	OPTIMISATION DES STRUCTURES	24
1.5.2	Méthodes numériques d'optimisation des structures	27
1.5.2.1	Critères d'optimalité.....	28
1.5.2.2	Les méthodes de programmation mathématique.....	28
1.5.2.3	Programmation séquentielle convexe.....	29
1.5.3	Méthode de résolution.....	32
1.5.3.1	Procédure d'optimisation (PSC).....	34

1.1 Introduction

Le besoin très élevé des matériaux architecturés de plus en plus légers et résistants pour une performance mécanique équivalente à celles des structures métal a conduit les scientifiques à développer de nouveaux concepts des matériaux architecturés. En effet, les matériaux architecturés permettent d'élargir les possibilités par combinaison de plusieurs matériaux constitutifs. En particulier pour des propriétés contradictoires (masse, rigidité, acoustique, isolation thermique, etc.), les matériaux sandwichs sont en mesure de proposer de très bons compromis.

Les sandwichs nid-d'abeilles représentent un intérêt tout particulier dans l'industrie, du fait de leur très faible masse pour des rigidités équivalentes très élevées, en compression notamment. Elles sont couramment utilisées dans la fabrication automobile, aéronautique et ferroviaire. Précisément, la plupart des moyens de transport modernes (automobiles, avions ...). Cet allègement de masse s'accompagne cependant d'une augmentation de la densité modale et donc de la transmission acoustique.

Dans ce contexte, ce travail de thèse traite de la conception optimale de panneau sandwich en termes de réduction de bruit à travers quatre points principaux : la mise en place d'une méthode d'homogénéisation capable de calculer les propriétés mécaniques équivalentes de l'âme de panneau sandwich ; l'analyse vibroacoustique ; l'analyse de sensibilité des paramètres géométriques et matériel de panneau sandwich ; et l'optimisation mono-objectif de l'âme puis des peaux du sandwich. Une introduction sur les notions de matériaux sandwichs, les indicateurs vibroacoustique et les méthodes d'analyse de sensibilité et d'optimisation est proposée dans ce chapitre.

1.2 Architecture de structure sandwich

Les structures sandwichs sont en plein essor. Ils présentent des propriétés mécaniques, thermiques qui les rendent très intéressantes pour de nombreuses applications. Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure 1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faible épaisseur et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité, et l'ensemble est maintenu par une sorte d'adhésif structural. Généralement l'âme est composée d'un réseau interconnecté de barres solides ou des plaques qui forment les arêtes et les faces des cellules. Il en existe trois types [1]: les structures en nid-d'abeilles, la mousse à cellules ouvertes en trois dimensions et la mousse à cellules fermées tridimensionnelle comme illustré à la figure 1. L'insertion de cette âme entre les deux peaux permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

La structure sandwich la plus efficace est obtenue lorsque la masse de l'âme est à peu près égale à la masse des deux faces. Il est évident que la rigidité à la flexion de cet arrangement est très supérieure à celle d'une seule plaque pleine de même masse totale constituée du même matériau que les peaux.

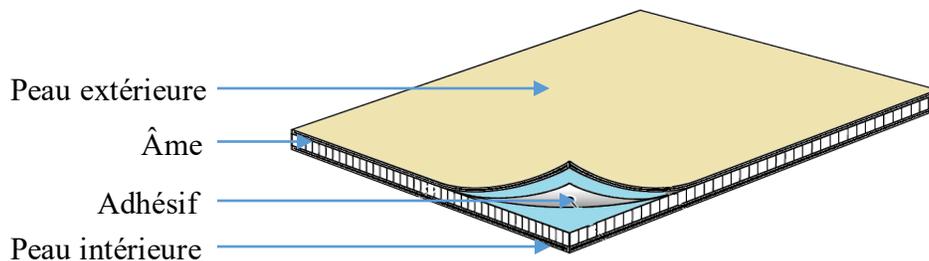
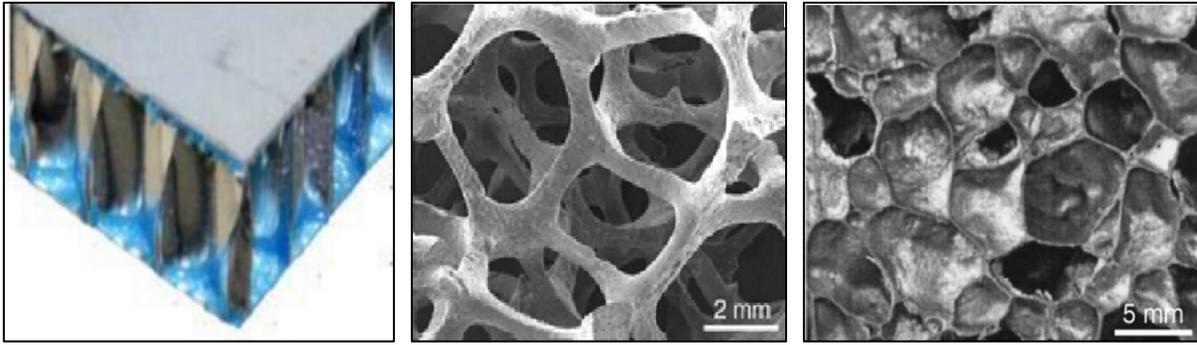


Figure 1. Panneau de structure sandwich



(a) : Nid d'abeille ; (b) : Mousse ouverte ; (c) : Mousse fermée

Figure 2. Types des structures sandwiches

D'après Allen [2], on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport de distance (d) séparant les plans moyens de deux peaux et l'épaisseur (t_f) avec $d = h_c + t_f$, tel que h_c représente l'épaisseur de l'âme.

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport $\frac{d}{t_f} > 100$, on parle de sandwichs à peaux très fines.
- Si le rapport $5.77 < \frac{d}{t_f} < 100$, le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines.
- Si le rapport $\frac{d}{t_f} < 5.77$, la structure est dite à peaux épaisses.

Une comparaison coût-performance pour les structures sandwich est donnée à la figure 3. Les âmes en nid d'abeille sont plus coûteuses que les âmes en mousse, mais elles offrent des performances supérieures. Cela explique pourquoi de nombreuses applications commerciales utilisent des âmes de mousse, qui sont aussi plus faciles à fabriquer et à mettre en place, tandis que les applications aérospatiales utilisent des structures les plus performantes, mais plus chères comme nid d'abeille. Une comparaison relative de la

rigidité et de l'intensité (résistance) des différents matériaux de base est représentée sur la figure 4 .

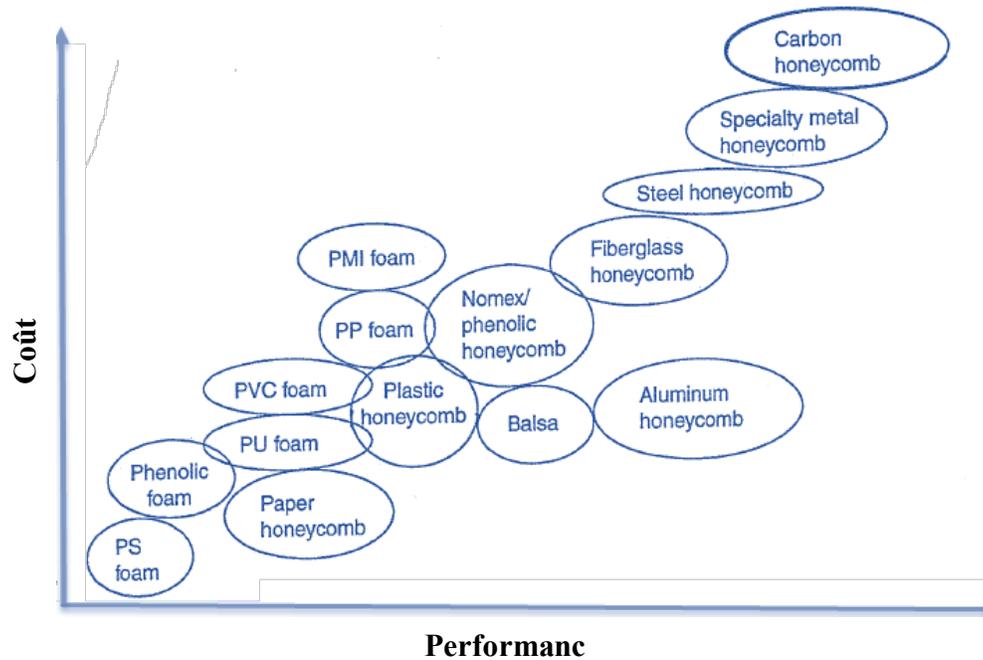


Figure 3. Coût-performance des différentes structures sandwichs [3]

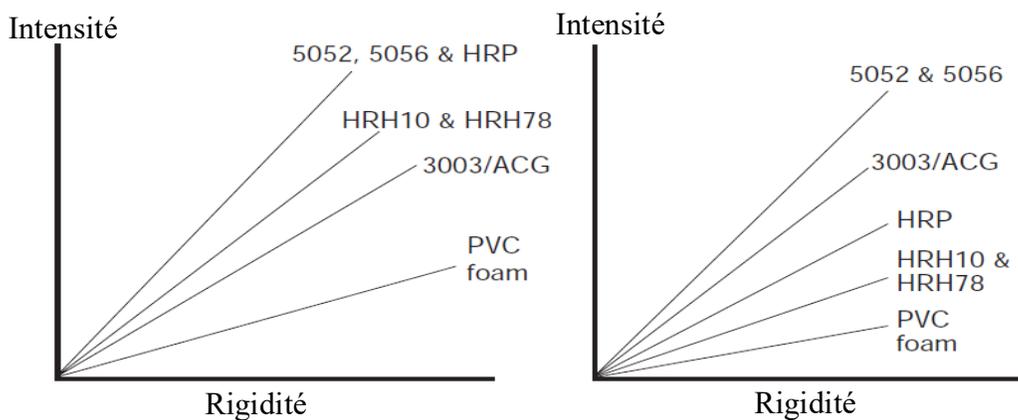


Figure 4. L'intensité et la rigidité de diverse structure à âme alvéolaire [3]

Aluminium - 3003/ACG ; 5052 ; 5056

Nomex - HRH10 ; HRH78 ;

Fibre de verre - HRP

La première voie de recherche permet d'augmenter les performances des panneaux sandwichs traditionnelles en optimisant la composition des constituants, et de les adapter aux exigences des concepteurs. La seconde voie est celle présentée dans ce mémoire en jouant sur les paramètres géométriques de l'âme et les peaux de panneaux sandwichs.

1.2.1 Architecture de l'âme de sandwich

L'âme de certaines structures sandwichs est construite selon une architecture mésoscopique régulière comme nid d'abeille ou irrégulière comme la mousse (Figure 5). En général l'âme doit être suffisamment rigide dans la direction perpendiculaire aux peaux afin d'assurer qu'il reste une distance constante entre les deux peaux, et également assez rigide en cisaillement pour assurer que lorsque le panneau sandwich est plié les peaux ne glissent pas une par rapport à l'autre. Notons que dans ce mémoire on se focalise uniquement sur une architecture d'âme périodique.

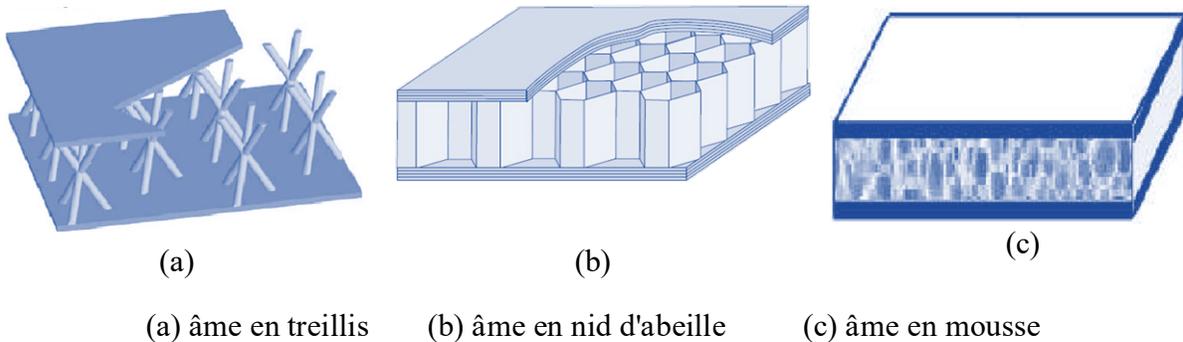


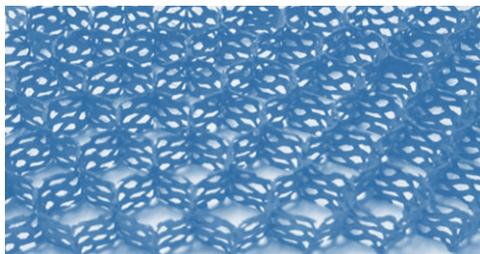
Figure 5. Structures sandwichs avec les différents noyaux

Dans le domaine aéronautique et spatial, trois grandes classes de matériaux ont été utilisées : les matériaux alvéolaires de type nid d'abeille ou ondulé, les mousses et le balsa.

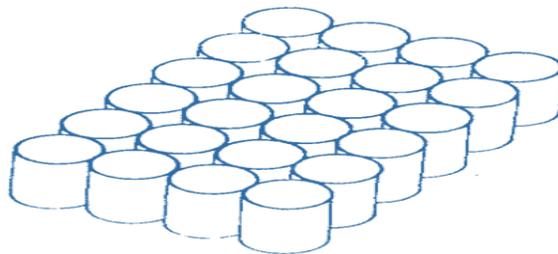
D'un point de vue pratique, les alvéolaires de type nid d'abeille ou ondulé sont les plus répandues dans le domaine aéronautique et spatial, malgré les problèmes de reprise hydrique. Le nid d'abeille est fabriqué à partir de la déformation des plaques minces en alliage d'aluminium, acier, des fibres de verre pré-imprégnées ou des fibres d'aramide (Nomex), de même l'âme ondulée est fabriquée à partir des tôles cannelées attachées alternativement sur les peaux (supérieure et inférieure).

La figure 6 illustre différentes configurations alvéolaires en nid-d'abeilles disponible dans la littérature. Les trois configurations cellulaires de base (hexagonal, flexible, sur-expansé) sont les plus utilisées.

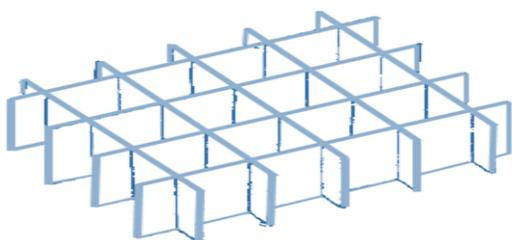
En général, les propriétés caractéristiques de nids d'abeille dépendent de la taille et la forme de la cellule, ainsi que de l'épaisseur et de la constitution des parois. Les peaux en association avec les âmes nids d'abeille sont en composite ou constituées d'un matériau homogène.



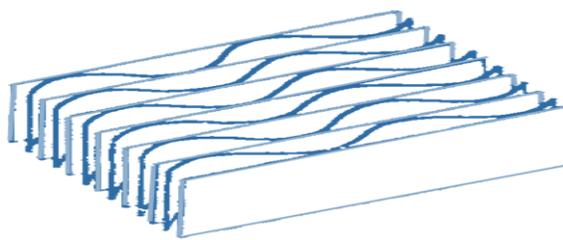
(a) Hexagonal



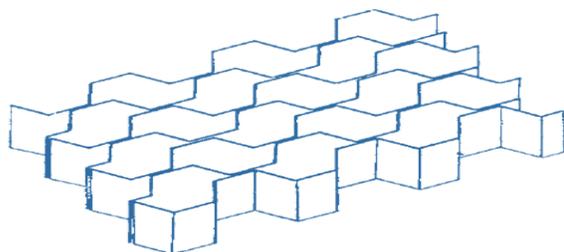
(b) Circulaire



(c) Carrée



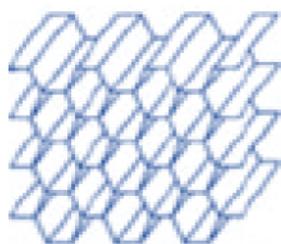
(d) Ondulé



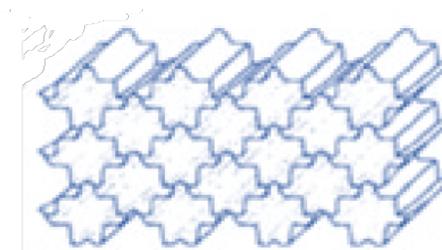
(e) Flexible



(f) Rectangulaire



(g) Sur-éxpansé



(h) Cruciforme

Figure 6. Différentes configurations de nids d'abeille

1.2.2 Architecture des peaux de sandwich

Les peaux des sandwichs peuvent être constituées d'un matériau isotrope (tel que l'aluminium) ou stratifié (figure 7). Le stratifié est formé par l'empilement d'un certain nombre de tissus ou plis unidirectionnel (UD) aux épaisseurs et orientations de fibres différentes. Le pli unidirectionnel est composé de fibres longues identiques, parallèles entre elles, liées par une résine(matrice). Ce matériau présente d'excellentes propriétés en traction dans le sens des fibres, mais dans cette même direction, la résistance en compression est plus faible, car le scénario de rupture est piloté par la résine.

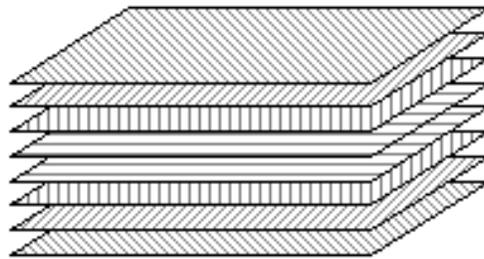


Figure 7. Exemple de stratifié symétrique composé de couches unidirectionnelles

Les propriétés mécaniques des stratifiés sont données dans un repère conventionnel. Ce repère dépend de l'agencement des plis. Dans le cas d'un matériau orthotrope se caractérise par trois plans de symétrie orthogonaux. Selon une direction de symétrie, une contrainte uni-axiale ne provoquera ni cisaillement ni torsion, et de la même, un cisaillement appliqué dans un plan de symétrie ne provoquera ni torsion et ni allongement. Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit soit en introduisant douze constantes de rigidité C_{ij} [4].

1.2.3 Désignation des structures périodiques

Une structure périodique consiste en la répétition d'un même élément de base. Notons tout d'abord qu'il existe plusieurs types de périodicité :

- **Unidimensionnelle** lorsque le motif est répété dans une seule direction ; il s'agit du cas le plus couramment rencontré (ex. rail de train),
- **Bidimensionnelle** lorsque le motif est répété dans deux directions (ex. grillage, filet, nid d'abeille),
- **Tridimensionnelle** lorsque le motif est répété dans les 3 directions de l'espace (cas de certains matériaux et des cristaux).

Les structures périodiques peuvent également être classées en fonction du nombre de degrés de liberté de couplage entre deux éléments unitaires :

- **Les structures périodiques mono-couplées** où les éléments unitaires sont reliés par un seul degré de liberté,
- **Les structures périodiques multi-couplées** où les éléments unitaires sont reliés par plusieurs degrés de liberté.

1.2.4 Modélisations des architectures périodiques

Les structures sandwiches périodiques apparaissent comme de bons candidats pour répondre aux exigences de l'industrie aérospatiale et aéronautique. Cependant, l'analyse de ces structures nécessite l'étude de trois échelles caractéristiques à savoir :

- **L'échelle macroscopique** : comportement global de la plaque sandwich composite y compris les peaux ;
- **L'échelle mésoscopique** : propriétés géométriques de cellule unitaire de la structure ;

- **L'échelle microscopique** : les propriétés du matériau de base telles que l'acier, l'aluminium ou l'aramide (Nomex).

Une modélisation totale de ces structures tenant compte ces variabilités d'échelle est difficilement réalisables à cause des coûts de calcul importants, d'où la nécessité de développer des outils d'identification pour permettre leur mise en œuvre. La méthode la plus utilisée dans la littérature est celle la modélisation multi-échelle qui représente le passage d'une échelle à un autre, dans ce cas la structure hétérogène à âme périodique n'est alors plus étudiée dans son ensemble, mais au travers d'un Volume élémentaire représentatif (VER). Ce dernier contient les données nécessaires de l'échelle en question, telle que l'analyse approfondie de son comportement permet la mise en place d'un calcul de structure à l'échelle macroscopique. Les études présentées dans ce mémoire s'intéressent au passage entre deux échelles à savoir la transition de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique de la structure. Pour plus d'informations sur les différentes méthodes de modélisation multi échelle les lecteurs peut se référer aux travaux de revue de [5].

Le calcul du comportement macroscopique de la structure sandwich de l'âme périodique peut se faire analytiquement ou numériquement [1] . En général on peut citer trois principaux modèles servant à déterminer les différentes propriétés effectives d'une structure sandwich, composées d'éléments de mésostructure périodiquement répétés, notamment des modèles à trois dimensions et modèles à deux dimensions sous format plaque ou coque.

1.2.4.1 Modèle à deux dimensions

L'ensemble de la structure sandwich réelle est remplacé par une couche équivalente (modèle monocouche équivalent). Ce passage se fait en introduisant 2 paramètres : le premier est associé à la périodicité et le deuxième à la minceur du milieu (voir la figure

8). Selon l'ordre dans lequel on fait tendre ces petits paramètres vers zéro, on peut avoir plusieurs méthodes d'homogénéisation pour construire un modèle homogène équivalent. Ces méthodes peuvent être classées en fonction de leur capacité à décrire plus ou moins de détails le phénomène de cisaillement du cœur de la structure sandwich. Les travaux des références [6, 7] remplacent la structure sandwich par un modèle équivalent à une seule couche. En revanche, [8] et [9] approchent la structure sandwich par un modèle discret par couche (Zig-Zag).

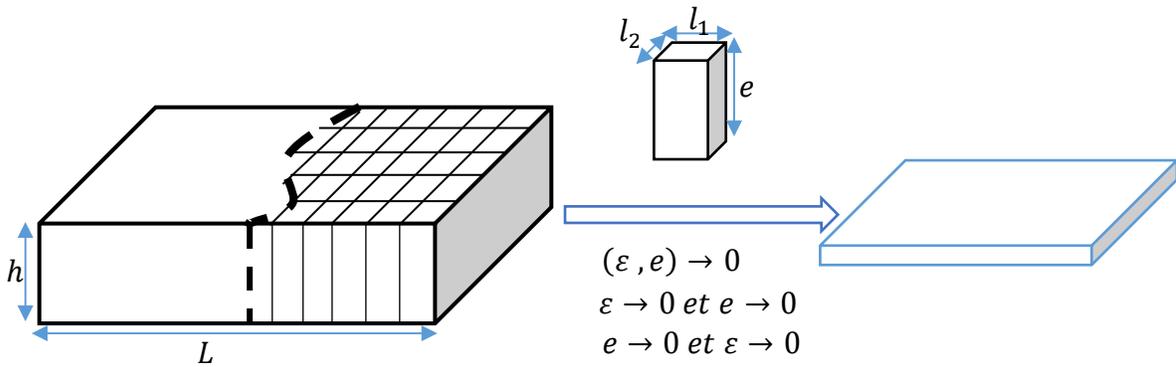


Figure 8. Schéma d'un modèle à deux dimensions

Le panneau présenté dans la figure 8 est un panneau alvéolaire périodique caractérisé par deux paramètres géométriques à savoir :

- ε : La taille dans le plan de la période relativement à celle du panneau ($\varepsilon = \frac{l_\alpha}{L}$) avec $\alpha = (1,2)$.
- e : L'inverse de l'élancement de la plaque avec ($e = \frac{h}{L}$).

Passer de la structure périodique (hétérogène) à une plaque homogène équivalente de type Kirchhoff-Love ou Reissner-Mindlin, consiste à faire tendre les paramètres (ε, e) vers 0, d'où la définition de 3 familles de méthodes :

Cas 1 : ($\varepsilon, e \rightarrow 0$) e et ε tendent vers zéro simultanément, la plaque homogène équivalente est alors obtenue en une seule étape.

Cas 2 : ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $e \rightarrow 0$) l'homogénéisation est d'abord faite dans le plan, ensuite le second passage à la limite est effectué sur une structure mince.

Cas 3 : ($e \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$) dans ce cas le premier passage à la limite conduit à une plaque périodique, qui est ensuite homogénéisée.

À propos du domaine d'application de ces méthodes, [10] affirme que la deuxième méthode est valable quelle que soit la période et que cette méthode représente la référence, en revanche les autres méthodes pouvant être considérées comme étant des approximations plus ou moins bonnes. De plus cette méthode donne des bons résultats lorsque $e \approx \varepsilon$. D'autre part, la première méthode est valable pour $e \ll \varepsilon$ et la deuxième méthode pour $e \gg \varepsilon$.

1.2.4.2 Modèle à trois dimensions

La modélisation tridimensionnelle est l'approche la plus précise pour passer d'un milieu hétérogène à un milieu équivalent, cette approche peut se traiter en deux manières, à savoir :

- Modélisation tridimensionnelle continue, où l'âme de la structure sandwich seule est remplacée par un milieu homogène équivalente [11].
- Modélisation tridimensionnelle détaillée, dans ce cas, le modèle représente la géométrie réelle de l'âme en nid d'abeille ainsi que les couches adhésives et les peaux. [12, 13] sont les premiers à réaliser une représentation 3D détaillée en utilisant les méthodes des éléments finis (MSC/NASTRAN), dans l'objectif de prédire les propriétés effectives de la structure de sandwich à âme en nid d'abeille.

En général, l'approche tridimensionnelle est difficile à l'adopter à cause de son coût important en termes de temps de calcul et de mémoire de stockage des données en comparaison avec l'approche à deux dimensions.

1.2.5 Comportement vibratoire d'une structure périodique

Dans la littérature, plusieurs travaux utilisent les propriétés particulières des structures périodiques dans le but d'améliorer le comportement vibratoire et/ou acoustique de certains systèmes.

Une des propriétés les plus importantes des structures périodiques non amorties est l'existence de deux types de zones fréquentielles distinctes : les zones de propagation et les zones d'atténuation. Ces deux types de zones, dont le nombre est infini, sont en continuelle alternance. Dans une zone de propagation, tous les éléments vibrent avec la même amplitude, mais avec un déphasage dépendant de la fréquence. Les ondes associées sont alors propagatrices dans la mesure où l'énergie est transmise à l'ensemble de la structure. L'étude faite par [14] a montré que les modes propres d'une structure périodique finie sont localisées dans les zones fréquentielles de propagation. Ses travaux ont également permis de mettre en évidence le fait que, dans chaque zone de propagation, il existe autant de modes propres qu'il y a d'éléments unitaires dans la structure. À l'opposé, les zones d'atténuation n'introduisent aucun changement de phase, mais imposent une décroissance exponentielle de l'amplitude lors du passage à travers un élément unitaire. Les ondes correspondantes sont donc évanescentes. Ces deux types de zones fournissent une vision synthétique du comportement vibratoire d'une structure périodique en fonction de la fréquence.

1.3 Indicateurs vibroacoustiques

De nombreuses activités industrielles sont confrontées à des problèmes de réduction de bruit, soit pour augmenter le confort des usagers, soit pour réduire les nuisances environnementales. Dans cette optique, l'art de la réduction du bruit des structures excitées par des forces dynamiques exige une compréhension de la vibroacoustique, via l'analyse approfondie des indicateurs vibroacoustiques, y compris le nombre d'onde de la structure, la densité modale, le facteur de perte d'amortissement, l'efficacité du rayonnement et la perte de transmission acoustique. Dans le présent rapport, on s'intéresse principalement à deux indicateurs qui sont : la densité modale et l'indice d'affaiblissement.

1- Densité modale

La densité modale est un indicateur important pour l'analyse de bruit et vibration des structures complexes. Par définition la densité modale est le nombre de modes de

$$n(\omega) = \frac{N}{\Delta\omega} = \frac{N}{2\pi\Delta f} \quad (1)$$

résonance par une bande de fréquence. On peut donc exprimer la densité modale :

où N est le nombre de modes résonants dans la bande de fréquence Δf .

Hart et Shah [15] présentent une discussion sur le concept de densité modale pour les différentes structures (Poutre, plaque rectangulaire, plaque circulaire, composite ...). Dans le cas général l'expression de la densité modale est donnée par :

$$n(f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_1}^{f_2} 4M\mathcal{R}(Y)df \quad (2)$$

où $\mathcal{R}(Y)$ est la partie réelle de la mobilité, et M la masse de la structure.

Le tableau suivant présente une revue importante de l'expression de la densité modale pour différente structure [16, 17].

Poutre uniforme	$n(f) = 2L \sqrt{\frac{\rho_{pp}}{E}}$
Poutre en flexion	$n(f) = \frac{L}{\sqrt{2\pi f}} \sqrt[4]{\frac{\rho_{pp} A_s}{EI}}$
Plaque en flexion	$n(f) = \frac{S\sqrt{12}}{2t} \sqrt{\frac{\rho_p(1-\nu)}{E}}$
Coque cylindrique en flexion	$\frac{1}{2\pi a_m} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu)}}$

Tableau 1. Expression de la densité modale pour différentes structures

où L et A sont respectivement l'épaisseur et la section de la poutre, E est le module de Young et I est le deuxième moment d'inertie de la section autour de l'axe du plan neutre. S est la surface de la plaque, E module Young et t est l'épaisseur de la plaque. a_m , est le rayon moyenne de la coque.

2- Indice d'affaiblissement acoustique

Lorsqu'une onde acoustique de pression P_i se propage dans l'air dans une direction d'angle θ et frappe une paroi d'une structure, une partie de l'onde est absorbée, une partie de l'onde est réfléchié dans l'air avec une amplitude de pression P_r et une autre partie est transmise à travers la structure, donnant naissance à une onde transmise dans l'air d'amplitude P_t . L'indice d'affaiblissement de la structure est alors défini à partir de la transparence acoustique, τ de cette structure par la relation suivante :

$$R_w(\theta) = 10 \log_{10} \frac{1}{\tau(\theta)} = 10 \log_{10} \frac{W_i(\theta)}{W_t(\theta)} = 10 \log_{10} \left(\frac{|P_i|^2}{|P_t|^2} \right) \quad (3)$$

W_i et W_t sont respectivement l'intensité incidente à la structure et l'intensité transmise par cette dernière.

De nombreux ouvrages [18-21] présentent des modèles mathématiques simples pour estimer l'indice d'affaiblissement en fonction de la direction de l'onde d'incidence (normal, oblique ou e, champ diffus). En champ diffus l'indice d'affaiblissement R_d est obtenu par intégration toutes les incidences de $\theta_{min} = 0$ et $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$:

$$R_d = -10 \log \left(\frac{\int_{\theta_{max}}^{\theta_{min}} \tau(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_{\theta_{max}}^{\theta_{min}} \sin \theta \cos \theta d\theta} \right) \quad (4)$$

1.4 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est une étape importante lors de la construction d'un modèle mathématique. Elle permet notamment d'analyser un modèle mathématique en étudiant l'influence de la perturbation des variables d'entrée d'un modèle sur les variables de sortie. Autrement dit, l'analyse de sensibilité permet de savoir quel est le paramètre qui a le plus d'impact sur les résultats, celui qui a le moins impact et quelles ceux qui interagissent au sein du modèle [61]. Parmi les raisons qui conduisent à l'utilisation de l'analyse de sensibilité, il peut s'agir de simplifier le modèle de départ ou de le valider. Les méthodes principales utilisées actuellement dans les différentes publications pour effectuer l'analyse de sensibilité d'un modèle mathématique sont : l'analyse de sensibilité globale « Global Sensivity Analysis », l'analyse de sensibilité locale « Local Sensivity

Analysis » et le « Screening Designs (SD) ». Ces méthodes sont largement décrites dans Saltelli et al. (2000) et Kleijnen [21].

1- Méthodes globale « Global Sensivity Analysis (GSA) »

L'analyse de sensibilité globale est une méthode quantitative basée sur l'estimation de la contribution de chaque paramètre d'entrée d'un modèle à la variance observée dans les sorties, elle étudie aussi l'interaction entre ces différentes variables d'entrée [22, 23]. Trois techniques principales sont largement utilisées : Monte-Carlo (MC), " Response Surface Methodology " (RSM) et " Fourier Amplitude Sensivity Test " (FAST). Ces techniques s'affranchissent des hypothèses classiques de linéarité qui supposent les principes de régression et de corrélation.

2- Méthode locale « Local Sensivity Analysis (LSA) »

L'analyse de sensibilité locale s'intéresse à déterminer l'influence d'une petite variation locale des variables d'entrée sur le modèle. Elle repose sur le principe qui consiste à calculer la variation des dérivées partielles des fonctions de sorties par rapport aux variables d'entrée. Ces calculs se font numériquement en faisant varier les entrées du modèle dans un petit intervalle autour d'une valeur nominale. La méthode d'analyse locale la plus classique est l'approche " One-Factor-At-A-Time " (OAT).

3- Méthode de screening « Screening Designs (SD) »

" Screening Designs " (SD) est la méthode la plus simple pour effectuer une analyse de sensibilité. Elles permettent d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée en fonction de leur influence sur la variabilité de la réponse. Son but est d'isoler les facteurs les plus importants parmi de nombreux autres pouvant affecter une sortie particulière d'un modèle donné [24]. Le SD est très efficace quand le modèle à analyser a un nombre considérable de paramètres d'entrée [25]. Trois types de technique peuvent être utilisés

pour effectuer une AS par cette méthode : le “ One-Factor-At-A-Time ”, le “ Factorial Experimentation ” et le “ Fractional Factorial Experiment ”.

1.5 Optimisation des structures

L'optimisation structurale est une discipline qui a pris son essor dans le début des années 1960 [22]. C'est à cette époque qu'ont été développées les principales théories de l'optimisation des structures basées sur les concepts de programmation mathématique et d'analyse de sensibilité. Les techniques d'optimisation ont commencé à être appliquées en mécanique des structures dès la fin des années 1970, et à l'heure actuelle, alimente un grand nombre de publications scientifiques.

L'optimisation structurale consiste à jouer sur les paramètres structuraux. En principe, l'optimisation intervient de façon primordiale dans l'amélioration des performances et la réduction de la masse des structures, tout en satisfaisant à un certain nombre de contraintes assurant la faisabilité et la fiabilité de la conception et le respect du cahier des charges. D'une manière générale un problème d'optimisation des structures ou d'optimisation en mécanique, est défini par trois données :

- 1- **Un modèle** (typiquement une équation aux dérivées partielles) qui permet d'évaluer le comportement mécanique d'une structure,
- 2- **Un critère** que l'on cherche à minimiser ou maximiser, et éventuellement plusieurs critères (on parle aussi de fonction objectif ou de fonction coût),
- 3- **Un ensemble admissible de variables** d'optimisation qui tient compte d'éventuelles contraintes que l'on impose aux variables.

En général un problème d'optimisation de structure est un problème où les variables d'optimisation sont les formes des structures elles-mêmes. Les problèmes d'optimisation

des structures peuvent être classés en grandes catégories selon la nature des variables de conception, à savoir :

- 1- **Optimisation de dimensionnement** (apparu au début des années 1970) : (dite aussi dimensionnement optimal, optimisation de conception ou optimisation de forme paramétrique) ne permet de modifier que les dimensions transversales des éléments d'une structure, dont la forme et la topologie, sont fixées. Dans ce cas les variables sont des sections, des épaisseurs ou toute variable qui peut évoluer sans modifier ni la géométrie ni l'agencement ni le nombre des membres structuraux, ce qui limite considérablement la variété des formes possibles (ou admissibles) [23],
- 2- **Optimisation de forme** (apparu dans les années 1980) : permet de contrôler la géométrie de la structure à topologie fixée au préalable. Autrement dit, lors des changements de forme, le nombre de membres structuraux reste constante, sans création ni la disparition de trous. Les variables de conception sont des paramètres décrivant les frontières du domaine. Ce type d'optimisation a pour objet la recherche de la meilleure forme possible d'une structure [23],
- 3- **Optimisation topologique** : permet de changer plus fondamentalement la nature de la structure. L'objectif de ce type d'optimisation est de chercher la meilleure forme ou les dimensions transversales optimales possibles quitte à changer la topologie d'une structure. Le fait de changer la topologie ainsi que la forme de la structure pendant l'optimisation augmentera la complexité du problème. En raison de cette complexité, ce type d'optimisation est considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles en mécanique de structure [24]. L'optimisation topologique est un sujet encore assez récent, où l'on peut distinguer trois approches radicalement différentes [23, 25, 26]:
 - Les techniques d'optimisation topologique basées sur l'homogénéisation.

- L'approche basée sur la sensibilité de la fonction d'adaptation par rapport à l'introduction dans le domaine de calcul de trous infinitésimaux : c'est celle que nous appellerons l'asymptotique topologique.
- L'optimisation par le biais d'algorithmes stochastiques (et plus généralement les méthodes non déterministes), qui travaille sur un problème discret.

4- **Optimisation du matériau** : Consiste à rechercher dans la structure l'emplacement du matériau optimal. Par exemple, la sélection du module de Young optimal d'une structure ou l'orientation optimale des fibres dans le cas d'un pli composite. Ce type d'optimisation peut être vu comme un problème d'optimisation topologique.

1.5.1 Formulation générale de problème d'optimisation

Un problème d'optimisation cherche la meilleure solution optimale (valeur minimum ou maximum) d'une fonction $F(\mathbf{r})$ appelée fonction objectif (ou fonction coût) tel que $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{r} représente le vecteur de variable, et les quantités x_i sont les variables de conception du problème d'optimisation. Dans ce cas tout vecteur \mathbf{r} dans l'espace de conception de n dimension \mathbb{R}^n est unique. La plupart des cas d'optimisation structurale confrontés dans la pratique, les variables de conception doivent satisfaire à certaines conditions ou contraintes supplémentaires.

La formulation générale de problème d'optimisation consiste à chercher la solution optimale en recherchant la valeur minimale ou la valeur maximale d'un paramètre

quantifié, de la fonction objectif, en faisant varier les variables de conception dans le cadre des contraintes de conception proposée.

D'une façon générale, un problème d'optimisation de dimension n peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } F(r) \in \mathcal{R}, r = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n \\ \text{avec:} \\ g_i(r) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(r) = 0, \quad j = 1, \dots, q \\ x_k^{\min} \leq x_k \leq x_k^{\max}, k = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (5)$$

$g_i(x)$ et $h_j(x)$ représentent respectivement les contraintes d'inégalité et d'égalité

x_k^{\min} et x_k^{\max} désignent les contraintes de domaine et \mathcal{R}^n est l'espace de recherche borné par les contraintes de domaine.

La solution d'un problème d'optimisation est alors donnée par un ensemble de paramètres r^* pour lesquels la fonction objectif présente une valeur optimale (minimale ou maximale) dans l'espace admissible.

Si la fonction objectif F et les contraintes sont linéaires, alors le problème est un problème d'optimisation linéaire, tandis qu'un problème d'optimisation est non linéaire, si la fonction objectif ou l'une des contraintes est non linéaire. Les problèmes d'optimisation de structure sont généralement des problèmes d'optimisation non linéaire.

1.5.2 Méthodes numériques d'optimisation des structures

Plusieurs méthodes numériques d'optimisation des structures ont été développées pour mettre en évidence les solutions optimales pour les quatre catégories de problèmes

d'optimisation décrits au-dessus. Ces méthodes peuvent être soit déterministes, soit stochastiques. Les premières conduisent toujours au même optimum tandis que les secondes, ayant en partie un caractère probabiliste, peuvent conduire à des solutions différentes du même problème [27, 28]. L'utilisation des méthodes stochastiques entraîne un coût de calcul élevé, ce qui explique leur utilisation marginale en optimisation des structures. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations dans la référence [29].

En général on peut classer les méthodes d'optimisations en trois grandes familles à savoir : critères d'optimalité, méthodes de programmation mathématique et la programmation séquentielle convexe.

1.5.2.1 Critères d'optimalité

Les critères d'optimalité sont des méthodes d'optimisation consacrées à résoudre certains problèmes d'optimisation spécifiques. Des critères d'optimalité ont été développés pour l'optimisation de forme, l'optimisation topologique, ainsi dans le cas d'optimisation des matériaux composites (c.-à-d. l'orientation des fibres optimale). Le plus connu des critères d'optimalité est le critère du Full Stressed Design (FSD) [30]. Parmi les avantages de ces méthodes est qu'ils permettent souvent d'atteindre la meilleure solution en un nombre minimal d'itérations, indépendamment du nombre de variables de conception du problème d'optimisation. L'inconvénient de ces méthodes qu'ils sont très spécifiques, du fait du manque de généralité et l'absence de fondement mathématique de ces méthodes.

1.5.2.2 Les méthodes de programmation mathématique

Les méthodes de programmation mathématique sont des ensembles d'algorithmes génériques d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation difficile. D'une manière générale, les méthodes de programmation mathématique permettent la résolution des problèmes d'optimisation généraux, sans nécessiter de changements profonds dans

l'algorithme. Ces méthodes peuvent être divisées en deux grandes catégories : méthodes sans gradient et méthodes avec gradient :

1- Méthodes sans gradient

Les principales méthodes sans gradients utilisées dans le cadre de l'optimisation des structures sont les algorithmes génétiques et les méthodes de surface de réponse. Ces méthodes permettent de minimiser des fonctions coût dont la forme peut être très complexe. De plus ces méthodes sont capables de chercher les minima locaux et le minimum global de la fonction objectif [31]. Les algorithmes génétiques sont des techniques d'optimisation inspirés du principe évolutif de la sélection naturelle de Darwin [32-34]. On peut utiliser ces algorithmes en optimisation de dimensionnement, de forme et pour déterminer le nombre de plis optimal dans l'empilement dans le cas des matériaux composites. Malheureusement ce type d'algorithme demande un très grand nombre d'évaluations de la fonction objectif. Ainsi le temps de calcul devient très important si la fonction objectif est issue de calculs numériques.

2- Méthodes avec gradient

Les méthodes à gradient sont des méthodes basées sur les dérivées premières de la fonction à minimiser par rapport aux variables de conception. Les ouvrages de Bonnans et al. [35] et Gill et al [36] présentent les différentes méthodes d'optimisation avec gradient.

1.5.2.3 Programmation séquentielle convexe

La solution directe du problème d'optimisation (5) est généralement prohibitive dans l'optimisation des structures, en raison du coût de calcul de l'analyse et de la sensibilité de problème. En effet la plupart des problèmes d'optimisation sont non-linéaires, et implicite en fonction des variables de conception de sorte que chaque évaluation de la fonction objectif nécessiterait une analyse par éléments finis.

Au début des années 1970, Schmidt et al. [37, 38] ont proposé une méthode intéressante pour contourner le problème en utilisant des outils de programmation. Une telle méthode et souvent appelée programmation séquentielle convexe (SCP). L'idée générale de cette méthode consiste à remplacer le problème d'optimisation primaire (5) avec une séquence de sous-problèmes approximatifs explicites ayant une structure algébrique simple (convexe) et construit à partir de l'information disponible sur les valeurs des vraies fonctions et de leurs dérivées premières au point de conception courant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser} \quad \tilde{F}^{(p)}(r) \in R, \quad r = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \\ \quad \text{avec:} \\ \quad \tilde{g}_i^{(p)} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \quad \tilde{h}_j^{(p)} = 0, \quad j = 1, \dots, q \\ \quad x_k^{\min(p)} \leq x_k \leq x_k^{\max(p)}, \quad k = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (6)$$

où \tilde{F} , \tilde{g}_i et \tilde{h}_j sont respectivement les approximations de la fonction objectif F , sous les contraintes d'inégalité g_i et d'égalité h_j . Ces approximations peuvent être considérées comme une sorte de développement en série de Taylor en termes des variables de conception x_k . Différentes techniques d'approximation représentant des variantes du développement en série de Taylor ont été proposées dans la littérature, mais les plus célèbres restent COLIN développé par Fleury et Braibant [39], et MMA (Method of Moving Asymptotes) développé par Svanberg [40].

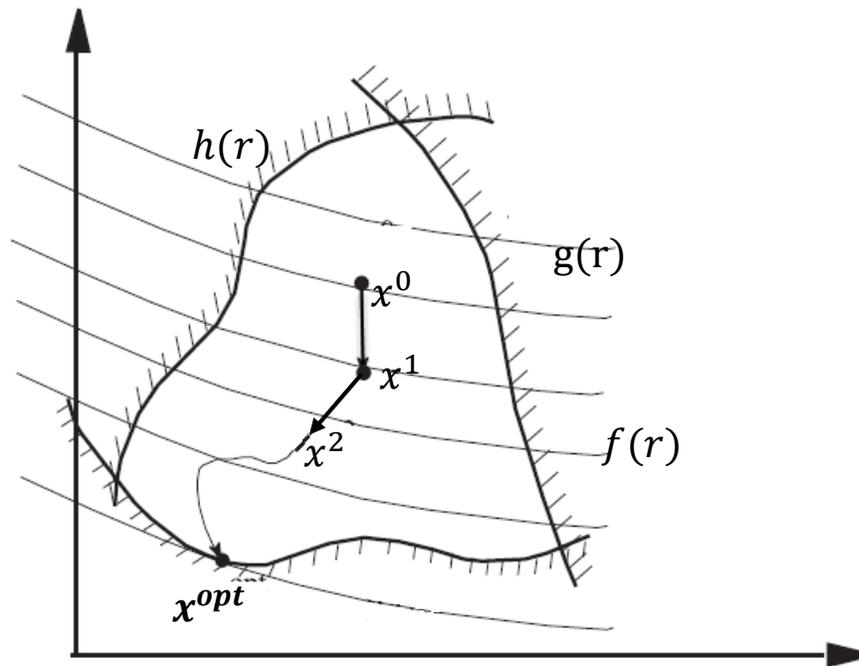


Figure 9. Schéma itératif : Problème initial \rightarrow sous-problème approché

Parmi les problèmes d'optimisation structurale ont été traité dans la littérature en utilisant cette méthode d'approximation :

- optimisation de dimensionnement : Starnes [41],
- optimisation de forme : Braibant [42],
- optimisation multidisciplinaire : Zhang [43],
- optimisation topologique : Duysinx [44, 45],
- optimisation multidisciplinaire : Sigmund[46],
- optimisation multidisciplinaire et l'optimisation des structures en matériaux composites : Bruyneel [47, 48].

1.5.3 Méthode de résolution.

Suite à ce qui a été présenté dans les sous-sections précédentes, avant toute démarche de résolution d'un problème d'optimisation, il faut que le problème d'optimisation s'accompagne de définitions préalables à savoir :

- Définir clairement l'objectif (s'il n'est pas unique, on préfère le rendre unique),
- Exprimer l'objectif d'une façon telle que les outils d'optimisation puissent traiter le problème,
- Définir les variables de conception (savoir se limiter et de tenir compte du coût et le temps de calcul),
- Identifier correctement les bornes associées aux contraintes.

Une méthode de résolution d'un problème d'optimisation peut être schématisée selon le modèle de la boîte noire, illustré par le schéma suivant :

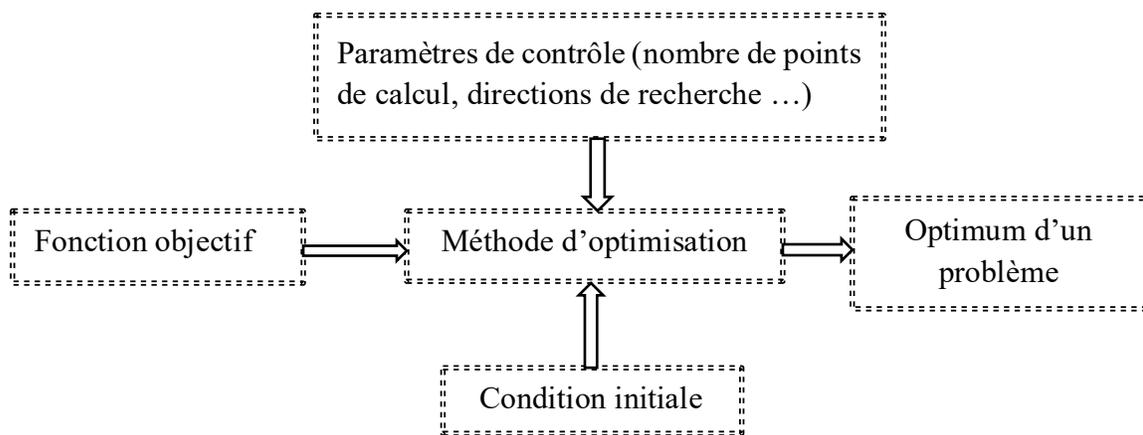


Figure 10. Boîte noire d'optimisation

Pour choisir la méthode de la résolution la plus adaptée à un problème d'optimisation, les étapes prises en comptes sont :

- La capacité de s'adapter aux problèmes mono-objectifs ou multi-objectifs,
- La puissance à converger vers le minimum global,
- La puissance et la rapidité de convergence,
- La nécessité du calcul de gradient ou sans gradient.

En général il y a trois groupes de méthodes de résolution un problème d'optimisation à savoir les méthodes d'optimisation sans contraintes, les méthodes avec contraintes et optimisation multi objectif.

Parmi les algorithmes pour résoudre les problèmes de minimisation non linéaire sans contrainte, on trouve :

- **L'algorithme Quasi-Newton** utilise une procédure mixte de recherche de ligne quadratique et cubique, ainsi que la formule Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) pour actualiser l'approximation de la matrice hessienne.[49],
- **L'algorithme de Nelder-Mead** (ou downhill simplex) est une méthode de recherche directe qui utilise exclusivement les valeurs de fonction (elle n'exige pas de dérivées) et peut traiter des fonctions objectif non dérivable en tout point [50]
- **L'algorithme de la zone de confiance** est appliqué dans le cas des problèmes sans contraintes non linéaires et est particulièrement utile pour les problèmes à grande échelle pour lesquels il est possible d'exploiter la faible densité ou la structure.

Une multitude d'algorithmes ont été conçus afin de résoudre le problème d'optimisation avec contraintes à savoir :

- **L'algorithme du point intérieur**, qui est utilisé pour l'optimisation non linéaire générale. Il est particulièrement utile pour les problèmes à grande échelle dotés de structure de densité faible et tolère les échecs d'objectifs définis par l'utilisateur et d'évaluations de fonctions de contraintes. Il est basé sur une fonction barrière et assure, le cas échéant, la faisabilité de toutes les valeurs itérées par rapport aux limites pendant l'exécution de l'optimisation.
- **L'algorithme SQP** est utilisé pour l'optimisation non linéaire générale. Il respecte les limites de toutes les itérations et supporte les échecs d'objectifs définis par l'utilisateur et d'évaluation de fonctions de contraintes.
- **L'algorithme ensemble actif** est utilisé pour l'optimisation non linéaire générale.
- **L'algorithme réflexif de zone de confiance** est utilisé uniquement pour les problèmes sous contraintes liées ou d'égalités linéaires. Il est particulièrement utile

1.5.3.1 Procédure d'optimisation (PSC)

La figure 11 présente un schéma global d'optimisation des structures. La première phase consiste à établir une analyse structurale (à l'aide d'un code des éléments finis) et analyse de sensibilité pour la valeur x^p des variables de conception. Le but de cette phase est de générer le sous problème d'optimisation approché. La seconde phase consiste à rechercher la solution optimale par des techniques dérivées de la programmation mathématique. Par la suite, la solution du sous problème approché est adoptée comme nouveau point de départ dans le domaine de conception initial, et le processus d'optimisation se poursuit jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

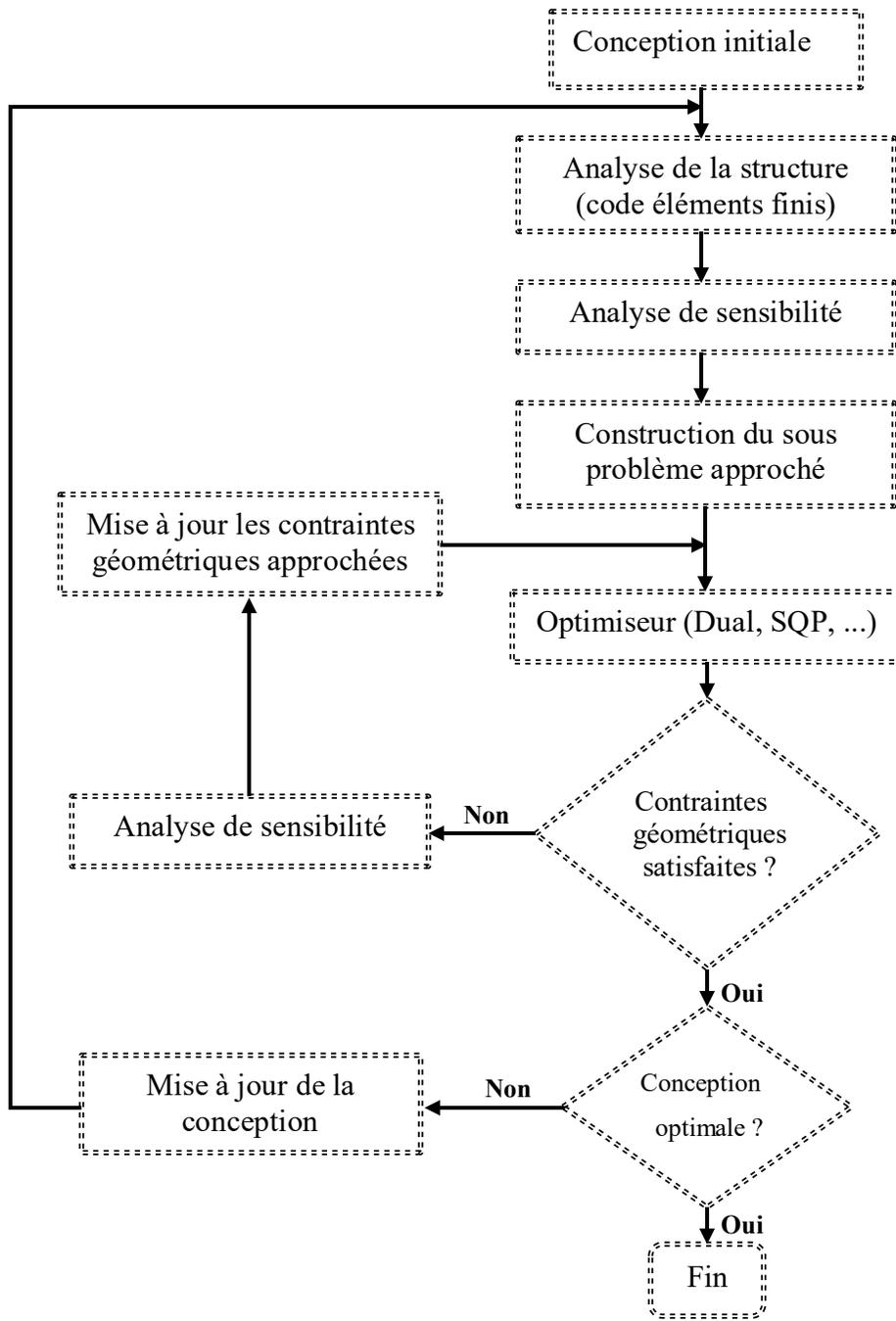


Figure 11. Processus d'optimisation à l'aide de la PSC

Chapitre 2. Homogénéisation des structures périodiques

Dans ce chapitre, un aperçu de la théorie de l'homogénéisation des structures périodiques est présenté. Les différentes méthodes d'homogénéisation existantes dans la littérature sont discutées. Une méthode numérique pour estimer les propriétés macroscopiques d'une cellule périodique est mise en place. Enfin, l'effet de la géométrie et la direction de chargements sur l'estimation de module de cisaillement des structures sandwichs est analysé.

2.1 INTRODUCTION.....	37
2.2 PRINCIPE DE L'HOMOGENÉISATION.....	38
2.3 MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION.....	39
2.4 ESTIMATION DES PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DU NID D'ABEILLE	41
2.4.1 Description macro-méso de la structure.....	41
2.4.2 Modélisation numérique.....	45
2.4.2.1 Implantation sur ABAQUS et script Python.....	49
2.4.3 Automatisation de l'homogénéisation numérique	52
2.4.4 Application numérique.....	53
2.5 EFFET GÉOMÉTRIQUE SUR LE MODULE DE CISAILLEMENT DE L'ÂME EN NID D'ABEILLE	54
2.6 CONCLUSION	59

2.1 Introduction

La conception idéale des structures sandwichs se heurte à de nombreux problèmes. Le problème majeur dans la modélisation numérique de ces structures est la variété d'échelles et de matériaux mis en jeu, à savoir l'échelle macroscopique de la structure, l'échelle mésoscopique qui dépend de l'architecture et l'échelle microscopique associée au matériau constitutif. Par conséquent, une modélisation complète de ces matériaux tenant compte de ces différentes échelles est difficilement envisageable, car elle nécessite des coûts de calcul importants. De plus, la détermination expérimentale de ces nombreuses propriétés est un processus fastidieux et coûteux. D'où la nécessité de développer des méthodes d'homogénéisation numérique ou analytique pour prédire les propriétés élastiques de la structure sandwich, en traitant l'âme de sandwich, ensuite les peaux. Dans cette optique, l'objectif de cette partie est de caractériser le comportement mécanique en fonction des paramètres géométriques et matériels des structures sandwichs de l'âme en nids d'abeille de forme hexagonale. Ces types de structures composées d'éléments de mésostructure périodiquement répétitive peuvent être analysés en utilisant des méthodes d'homogénéisation afin de déterminer le comportement du matériau macroscopique. À l'échelle mésoscopique, les propriétés élastiques des structures sandwichs sont supposées disponible sous la forme de module de Young E , module de cisaillement G , coefficient de Poisson ν , etc. la méthode d'homogénéisation consiste donc à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques équivalentes, supposé se comporter de la même façon que le matériau réel une fois soumis aux mêmes chargements. Le comportement d'une structure composée d'un matériau hétérogène pourra être calculé plus facilement et plus rapidement avec le comportement de l'ensemble, en supposant que le matériau obéit au comportement homogène équivalent. Les procédures d'homogénéisation peuvent être appliquées pour

déterminer une large gamme de propriétés physiques qui peuvent être mécaniques, électriques, acoustiques, thermiques et autres [51, 52].

2.2 Principe de l'homogénéisation

Le procédé d'homogénéisation est basé sur un développement asymptotique à deux échelles de comportements significatifs avec des cellules unitaires périodiques. Les propriétés globales d'un corps élastique peuvent être décrites avec deux échelles différentes : l'échelle macroscopique ou globale (\mathbf{x}), et l'échelle microscopique ou locale (\mathbf{y}). L'échelle globale \mathbf{x} est liée à l'échelle locale \mathbf{y} par la relation $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, où ε est un très petit nombre positif, qui est une taille relative de la cellule périodique.

Généralement pour homogénéiser une structure sandwich on définit d'abord un volume élémentaire représentatif (VER) qui est, comme son nom l'indique, représentatif des hétérogénéités de la structure sandwich. Ce choix de représenter un point à l'échelle macroscopique par un élément de volume consiste en fait à effectuer un zoom sur le point afin de détailler les hétérogénéités qui lui sont associées. Dans ce travail le VER qui représente l'hétérogénéité de la structure est défini à l'échelle mésoscopique. À partir de ce VER, on dispose alors des repères associés à chacune des échelles (mésos et macro). Notant δ l'échelle de dimension, ceci signifie que les propriétés mesurées sur un échantillon de dimension δ sont indépendantes du point du matériau où a été prélevé l'échantillon. Dans ce cadre, le matériau peut alors être considéré comme étant effectivement homogène et les problèmes de calcul de structure peuvent être résolus en considérant les propriétés moyennes mesurées à l'échelle δ . On considère deux classes de matériaux à savoir les matériaux désordonnés et les matériaux périodiques, dans notre cas le nid d'abeille. Ce dernier présente une mésostructure aux propriétés répétitives et autorise alors une représentation déterministe du VER qui sera dans ce cas une cellule appelée cellule de base qui sera à son tour translatée dans toutes les directions de l'espace d'étude et qui

permettra de reconstituer entièrement le matériau. De nombreuses références existent sur le sujet dans la littérature, les méthodes ayant été appliquées à de nombreux domaines de la physique et à de nombreuses situations, les deux références classiques sont deux livres [53, 54] de la fin des années 70 et début 80. On trouve aussi de nombreux développements utiles dans [55, 56]. Dans les deux cas, il faudra attribuer les propriétés matérielles et géométriques aux différents constituants qui seront alors considérés comme homogènes à l'échelle microscopique.

2.3 Méthodes d'homogénéisation

1. **La méthode des développements asymptotiques** : un développement asymptotique est fait à double échelle sur la solution dont le premier terme est la solution macroscopique homogène et le deuxième terme la solution microscopique sur la cellule. Cette méthode permet de connaître la solution macroscopique sur le matériau homogénéisé et d'obtenir une bonne approximation de la solution microscopique sur la cellule de base. Shi et Tong [57] ont proposé une approche asymptotique à deux échelles pour calculer la valeur effective hors plan de module de cisaillement. Plus tard, Masters et Evans [58] ont ajouté une certaine complexité utile pour prédire les propriétés élastiques effectives de nid d'abeille dans le plan en tenant compte des différents modes de déformation, notamment la flexion, la compression et les effets de l'articulation des parois de la cellule. Xu et Qiao [59] ont étudié l'effet d'épaisseur pour évaluer toutes les constantes élastiques effectives en utilisant la technique d'homogénéisation multipasse.
2. **La méthode des moyennes** : Elle utilise la loi de comportement homogénéisée et la relation entre les moyennes de la déformation et aussi de la contrainte sur la cellule de base. Cette méthode est équivalente à celle des développements

asymptotiques. Il existe dans la littérature de nombreux articles consacrés à la prédiction des propriétés effectives de nid d'abeille. Kelsy et al. [60] ont évalué théoriquement le module de cisaillement hors plan de l'âme. Dans un premier temps ils ont appliqué la méthode de l'énergie et montré que l'utilisation du théorème de l'énergie potentielle minimale et du champ de déformation uniforme cinématique compatible donne une borne supérieure du module de cisaillement, le théorème de l'énergie complémentaire minimum donnant sa borne inférieure. Gibson et Ashby [1] ont calculé analytiquement les propriétés effectives en fonction de la géométrie de la cellule périodique en nid d'abeille, mais l'influence des peaux sur l'âme n'a pas été prise en compte.

3. **Tests numériques sur une poutre ou un panneau** : L'estimation des propriétés effectives des structures sandwiches à l'aide de l'approche éléments finis a d'abord été faite par Grediac [61] qui a analysé le comportement hors plan de nid d'abeille. Par la suite Meraghani et al [62] exploitent cette approche pour calculer toutes les propriétés élastiques dans le plan. Enfin Lira et al. [63] ont étendu la méthode analytique et l'approche MEF pour évaluer les propriétés élastiques de cisaillement transversal.

4. **La méthode de l'énergie** (méthode « self-consistent ») : cette méthode se base sur le principe que l'énergie élastique du matériau est la même que celle d'un matériau homogène équivalent. Elle peut s'appliquer aux composites non périodiques, mais dont le VER, par des homothéties différentes, reproduit le matériau.

2.4 Estimation des propriétés élastiques du nid d'abeille

L'objectif de cette étude est d'estimer les propriétés mécaniques de la structure sandwich en traitant l'âme de nid d'abeille indépendamment des peaux et par la suite les couches intermédiaires. Pour ce faire, la structure périodique de géométrie complexe est remplacée par un matériau homogène aux propriétés mécaniques équivalentes via l'utilisation des méthodes numériques. Durant cette investigation, l'objectif est d'identifier les propriétés macroscopiques de nids d'abeille de forme hexagonale.

2.4.1 Description macro-méso de la structure

L'âme en nid-d'abeilles est une structure périodique réalisée généralement à partir de matériaux en plaques minces. Des raies de colle sont disposées en bandes régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc. Ce bloc est coupé en tranches, puis ces tranches sont transformées en planches de nid-d'abeilles par expansion. Le matériau obtenu est fortement anisotrope. On peut définir un repère orthonormé (x, y, z) tel que la direction x corresponde au sens ruban, la direction y au sens expansion et z à la direction des alvéoles (Figure 13).

On considère une plaque sandwich rectangulaire de longueur l_x de largeur l_y d'épaisseur totale h . Cette structure se compose de trois couches principales (Figure 12), dont une couche épaisse d'épaisseur t_c , nommée âme, et deux peaux minces supérieure et inférieure d'épaisseur t_f . L'origine du système de coordonnées cartésiennes est située au milieu du plan (x, y) avec l'axe z étant perpendiculaire à ce plan.

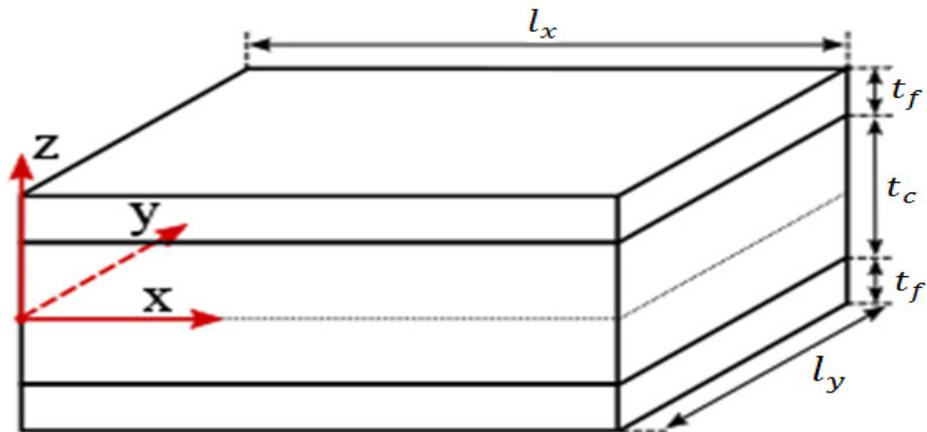


Figure 12. Géométrie et notations d'une plaque sandwich

Le remplacement de la structure en nid-d'abeilles hétérogène par une couche homogène orthotrope équivalente présentant des propriétés mécaniques effectives peut être effectué sur la base des techniques d'homogénéisation présentées ci-dessus. La plus petite partie représentative de la structure périodique originale, qu'on a dénommée volume élémentaire représentatif, est utilisée pour estimer les propriétés macroscopiques effectives. De ce fait, les propriétés matérielles équivalentes seront liées aux paramètres discrets caractérisant la géométrie et les propriétés des parois de la cellule unitaire. La détermination de ces caractéristiques mécaniques peut être effectuée analytiquement ou numériquement.

En comparant les résultats obtenus à partir de ces deux méthodes, on peut approximer les propriétés mécaniques effectives du nid d'abeille de forme hexagonale.

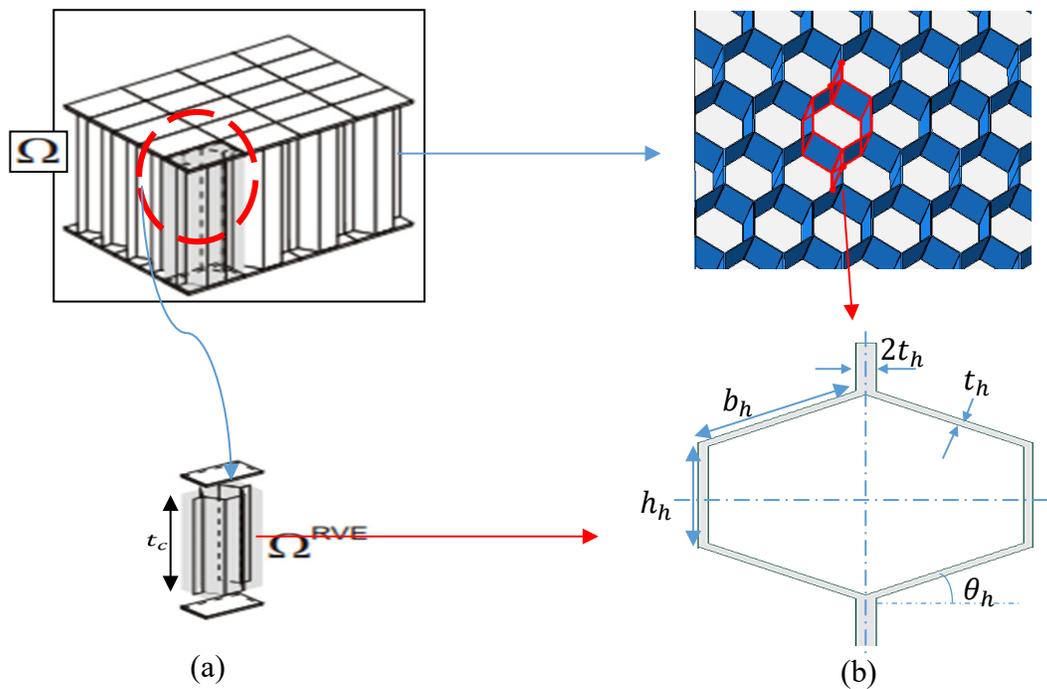


Figure 13. Âme hexagonale - définition du VER

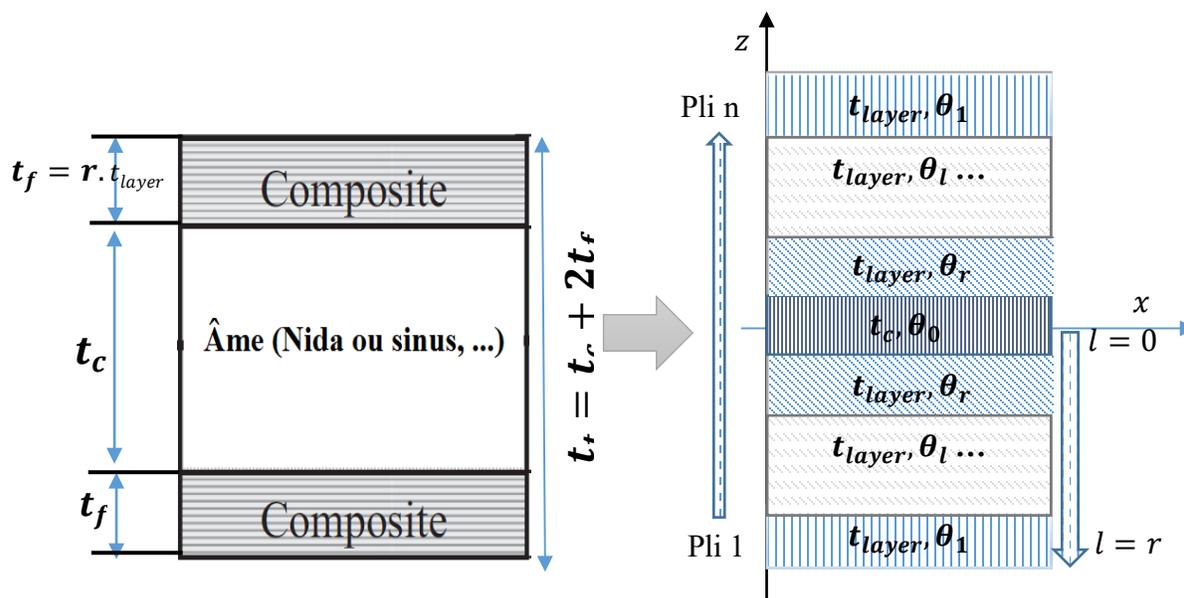


Figure 14. Structure sandwich composite symétrique

La figure (a) illustre l'âme orthotrope en vue perspective et (b) est le volume élémentaire représentatif de l'âme. Le Tableau 2 définit les différents paramètres géométriques et matériels du VER (Figure 13. b).

Paramètres matériels	Paramètres géométriques (Figure 13)
E : Module de Young	b_h : longueur du côté incliné de la cellule
G : Module de cisaillement	h_h : longueur latérale de la cellule
ρ : Densité	θ_h : angle de la cellule
ν : Coefficient de poisson	t_h : épaisseur de la paroi simple de la cellule

Tableau 2. Définition des paramètres géométriques et matériels de VER

Dans cette étude on s'intéresse à deux types de sandwichs à savoir :

Modèle A : Panneau sandwich symétrique de comportement isotrope, d'où l'âme fabriquée en Nomex et les deux peaux identiques faites en aluminium (Tableau 3).

Modèle B : Panneau sandwich symétrique de comportement orthotrope, dont l'âme en Nomex et deux peaux sont des stratifiées (Tableau 4).

	Âme de nid d'abeille (Matériau Nomex)	Peaux de sandwich (Matériau aluminium)
Propriétés matérielles	$\rho = 1380 \text{ kg/m}^3$ $E = 3 \text{ GPa}; \nu = 0.33$	$\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$ $E = 72.5 \text{ GPa}; \nu = 0.34$
Propriétés géométriques	$b_h = h_h = 2.75 \text{ mm}; t_h = 76.2 \cdot 10^{-6} \text{ mm}; \theta = \frac{\pi}{6}$ $t_c = 20 \text{ mm}; t_f = 0.6 \text{ mm}; l_x = 2.15 \text{ m}; l_y = 1.8 \text{ m}$	

Tableau 3. Propriétés géométriques et matériels du sandwich isotrope - Modèle A

	Âme de nid d'abeille (Matériau Nomex)	Peaux de sandwich (Époxy renforcé aux fibres de carbone)
Propriétés matérielles	$\rho = 1240 \text{ kg/m}^3$ $E = 5.5 \text{ GPa}$ $\nu = 0.33$ $G = 2.07 \text{ GPa}$	$E_1 = 0.293 \text{ MPa}; E_2 = 0.0303 \text{ MPa}$ $E_3 = 0.229 \text{ GPa}; G_{xy} = 0.069 \text{ MPa}$ $G_{13} = 32.75 \text{ MPa}; G_{23} = 55.04 \text{ MPa}$ $\nu_{12} = 0.975; \nu_{13} = 0.00042$ $\nu_{23} = 0.00043; \rho = 51.82 \text{ kg/m}^3$
Propriétés géométriques	$b_h = h_h = 2.75 \text{ mm}; t_h = 76.2 \cdot 10^{-6} \text{ mm}; \theta = \frac{\pi}{6}$ $t_c = 12 \text{ mm}; t_f = 1.0 \text{ mm}; t_{layer} = \frac{t_c}{8} = 0.125 \text{ mm}$ $l_x = 2.15 \text{ m}; l_y = 1.8 \text{ m}^2 [0 \ 30 \ 90 - 30]_s (8 \text{ layers})$	

Tableau 4. Propriétés géométriques et matérielles du sandwich composite -Modèle B

2.4.2 Modélisation numérique

Pour estimer les propriétés mécaniques effectives de l'âme périodique, la technique d'homogénéisation [64, 65] peut être utilisée. En se basant sur la notion de VER introduite par [66], les propriétés mécaniques effectives peuvent être obtenues en utilisant la contrainte moyenne et la déformation moyenne appliquées sur le VER sous des conditions aux limites et des déplacements homogènes bien choisis.

Soit Ω^{RVE} un élément de volume représentatif du matériau périodique. Les contraintes ($\bar{\sigma}_{ij}$) et les déformations ($\bar{\varepsilon}_{ij}$) moyennes sur le volume le VER, sont :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\Omega^{VER}} \int_{\Omega^{VER}} \sigma_{ij} d\Omega^{VER} , \quad (7)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\Omega^{\text{VER}}} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \varepsilon_{ij} d\Omega^{\text{VER}}, \quad (8)$$

D'après le théorème de la déformation moyenne [67] l'application de conditions aux limites homogènes sur un élément de référence (VER) produit une déformation moyenne identique à celle que l'on applique sur la frontière $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0$. D'où pour déterminer les propriétés mécaniques effectives du VER, il suffit de calculer les contraintes moyennes pour des déplacements spécifiques. Cette approche est également vraie si on raisonne sur la contrainte moyenne.

Par conséquent, l'homogénéisation du VER d'une structure périodique consiste à rechercher les propriétés élastiques effectives qui relient déformations et contraintes moyennes sur le VER.

Selon la loi de Hooke généralisée, le comportement élastique d'un solide est caractérisé par l'existence d'une relation linéaire entre les composantes de contrainte et celles de déformation :

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^H \bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl}^H \bar{\sigma}_{ij} \quad i, j, k, l = \{x, y, z\} \quad (9)$$

où C_{ijkl}^H et S_{ijkl}^H sont les composantes des tenseurs de rigidité élastique et de souplesse homogénéisés. Les propriétés effectives de nid-d'abeilles sont caractérisées par un comportement orthotrope, d'où l'expression (9) en notation de Voigt s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Dans l'expression (10) la notation du tenseur \mathbf{C} en faisant figurer les coefficients C_{ijkl} distincts dans une matrice 6×6 . Dans ce but, on redéfinit une numérotation des indices par la correspondance $C_{ijkl} \rightarrow C_{\alpha\beta}$.

Par le biais de la relation inverse entre la déformation et la contrainte peut être écrit la loi de comportement sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \\ \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \\ \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu_{21}^h}{E_1^h} & -\frac{\nu_{31}^h}{E_3^h} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}^h}{E_1^h} & 1 & -\frac{\nu_{32}^h}{E_3^h} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}^h}{E_1^h} & -\frac{\nu_{23}^h}{E_2^h} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^h} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Pour identifier les propriétés mécaniques effectives de l'âme de structure sandwich, il suffit de calculer les neuf paramètres de matériaux indépendants à savoir :

- Les modules d'élasticité longitudinaux : E_1, E_2, E_3 ,
- Les modules de cisaillement : G_{12}, G_{13}, G_{23} ,
- Les coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$.

Ces paramètres sont estimés en fonction des caractéristiques géométriques et paramètres matériels du VER.

Les composantes de la matrice \mathbf{C} sont déterminées en résolvant six modèles élastiques de VER soumis à des conditions aux limites (Tableau 5, Tableau 6). Ces conditions aux

limites sont choisies de telle manière qu'une seule composante de la déformation est non nulle et égale à un pour chaque modèle tel que :

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\bar{\sigma}_\alpha}{\bar{\varepsilon}_\beta} = \bar{\sigma}_\alpha = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma_\alpha(x_1, x_2, x_3) d\Omega \quad (12)$$

Avec $\alpha, \beta = 1 \dots 6$. Les intégrales (12) sont évaluées dans chaque élément fini en utilisant la quadrature de Gauss Legendre.

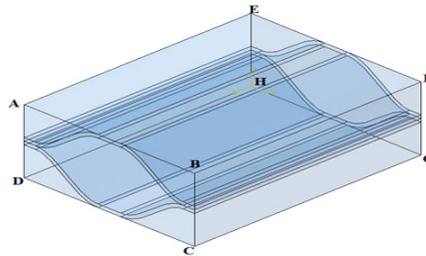


Figure 15. Volume élémentaire représentatif en 3D

Charge	Faces	u_x	u_y	u_z
Cas 1	BCGF	u_1	Libre	Libre
	ADHE	0	Libre	Libre
	ABFE/DCGH	Libre	0	Libre
	ABCD/EFGH	Libre	Libre	0
Cas 2	BCGF/ADHE	0	Libre	Libre
	ABFE	Libre	u_2	Libre
	DCGH	Libre	0	Libre
	ABCD/EFGH	Libre	Libre	0
Cas 3	BCGF/ADHE	0	Libre	Libre
	ABFE/DCGH	Libre	0	Libre
	EFGH	Libre	Libre	0
	ABCD	Libre	Libre	u_3

Tableau 5. Conditions aux limites pour le modèle élément fini du VER :
1er, 2eme et 3eme analyses statistiques

Charge	Faces	u_x	u_y	u_z
Cas 4	BCGF/ADHE	0	Libre	Libre
	ABFE/DCGH	0	Libre	0
	EFGH	0	0	Libre
	ABCD	0	u_3	0
Cas 5	BCGF/ADHE	Libre	0	0
	ABFE/DCGH	Libre	0	Libre
	EFGH	0	0	Libre
	ABCD	u_3	0	0
Cas 6	BCGF/ADHE	Libre	0	0
	ABFE	0	Libre	0
	DCGH	u_2	0	0
	ABCD/EFGH	Libre	Libre	0

Tableau 6. Conditions aux limites pour le modèle élément fini du VER : 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} analyses statistiques.

2.4.2.1 Implantation sur ABAQUS et script Python

Afin d'obtenir les propriétés mécaniques efficaces de l'âme en nid-d'abeilles, le EF 3D pour l'élément de volume représentatif (Figure 13. b) a été créé à l'aide d'un script Python. Les analyses d'homogénéisation sont réalisées avec le logiciel commercial ABAQUS.

- **Démarche d'implantation de VER de nid d'abeille sur ABAQUS.**

Pour réduire le temps de calcul, le modèle EF est développé en tenant compte des conditions de périodicité et de symétrie. Le VER possède deux plans de symétrie, d'où il ressort que seul un quart et la moitié de l'épaisseur de l'âme est suffisant pour réaliser le calcul dans ABAQUS en suivant la démarche suivante :

Étapes	
Parts	1- L'âme hexagonale (Figure 13) 2- Aire
Propriétés matérielles	1- Densité massique, module de Young et coefficient de poisson de l'âme de nid d'abeille (Tableau 4) 2- Densité massique et module de Young de poisson de l'aire (Tableau 8)
Section & Assemblage	<p>Pour garder l'air et l'âme de nid d'abeille ensemble au cours de chargement, les liaisons « Tie constraint » sont utilisées.</p> <p>Pour créer des contraintes de liaison, la surface maîtresse et la surface esclave doivent être définies. Les faces de l'âme sont choisies comme les surfaces principales et les faces de l'aire, à lesquelles les faces de l'âme sont liées, elles sont choisies comme des surfaces esclaves.</p>
Maillage	Le VER est modélisé avec des éléments solides C3D20R avec intégration réduite et trois degrés de liberté (DDL) par nœud.
Chargement & conditions aux limites	Les Tableau 5 et Tableau 6 présentent les conditions aux limites et les déplacements appliqués sur les six côtés de VER.

Tableau 7. **Implantation de VER de nid d'abeille sur ABAQUS**

Les propriétés matérielles de l'aire sont illustrées dans la table

Densité massique	Module d'élasticité isostatique
1.2 Kg/m³	0.141179 GPa

Tableau 8. **Propriétés matérielles de l'aire**

- **Script Python**

Toutes les étapes nécessaires pour créer le VER en nid d'abeille comme illustre dans le (Tableau 7), sont mises en œuvre par un code écrit en langage Python. Une liste des commandes nécessaires pour écrire le code en langage Python est disponible dans le « Scripting Reference Manual of ABAQUS documentation [68] ». Trois scripts Python sont nécessaires pour automatiser le calcul des propriétés mécaniques équivalentes de la structure sandwich d'âme en nid d'abeille :

Le Script 1 : est dédié génération de la forme géométrique du VER, en utilisant les variables d'entrées suivantes :

Les variables matérielles : E, G, ρ et ν ;

Les variables géométriques : b_h, h_h, t_h et θ_h .

Le Script 2 : est consacré à l'implantation de la forme du VER généré à l'aide du script 1 en appelant ABQUS/CAE.

Script 3 : sert à importer les résultats de calcul stocké dans un fichier «.odb» et à calculer les propriétés équivalentes en utilisant les expressions développées au-dessus.

2.4.3 Automatisation de l'homogénéisation numérique

Dans l'objectif d'automatiser le calcul des propriétés équivalentes de l'âme de structure sandwich, un programme Matlab est mis en place. Le schéma de la figure 16 montre les liaisons entre les trois programmes de calcul (ABAQUS, Python et Matlab). L'objectif principal d'introduire Matlab dans le calcul des propriétés mécaniques équivalentes est de l'utiliser par la suite dans les processus d'optimisation.

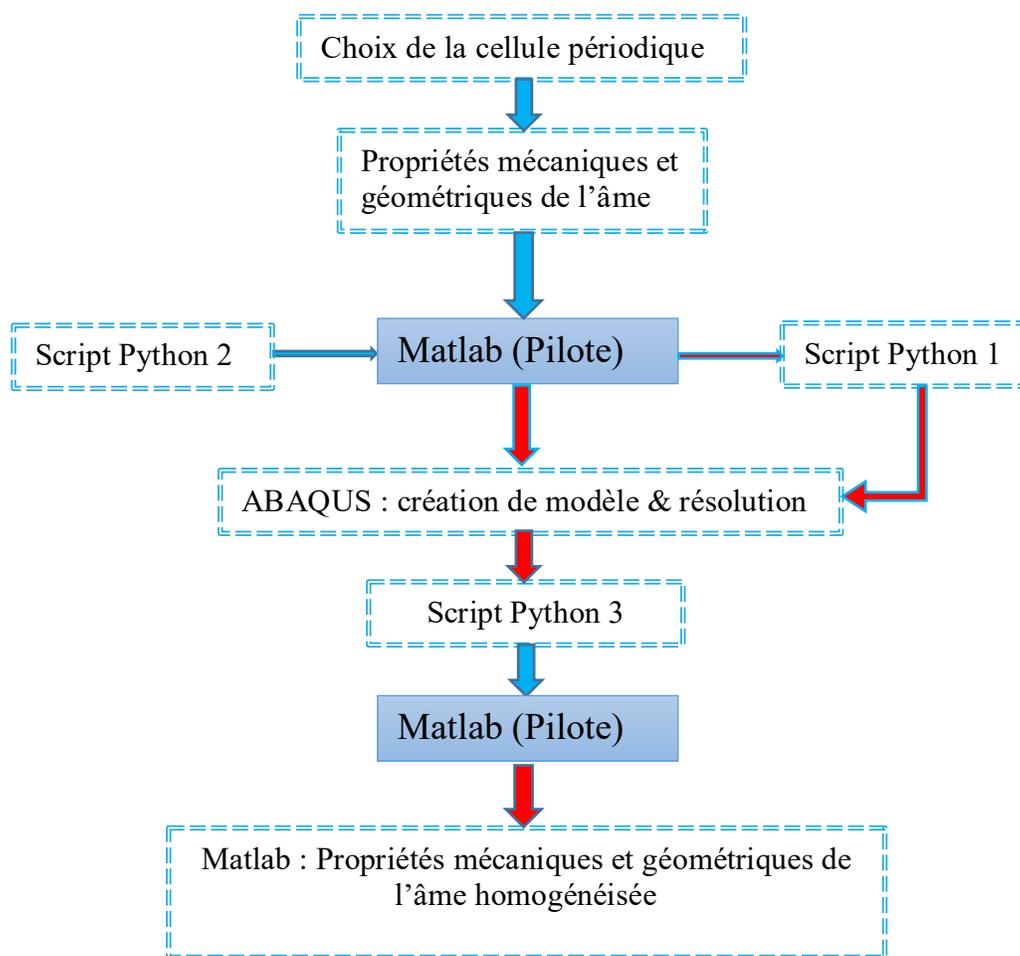


Figure 16. Schéma de calcul des propriétés mécaniques équivalentes en utilisant MATLAB

2.4.4 Application numérique

Avant de présenter les résultats numériques, le tableau 9 montre les expressions d'homogénéisation analytique de l'âme de la structure sandwich développée récemment par Malek [69] :

E_1^h	$\frac{E_h \left(\frac{t_h}{b_h}\right)^3 \cos \theta}{\left(\frac{h_h}{b_h} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta} \left[1 + (2.4 + 1.5\nu_h + \cot^2 \theta) \left(\frac{t_h}{b_b}\right)^2 \right]^{-1}$
E_2^h	$\frac{E_h \left(\frac{t_h}{b_h}\right)^3 \cos \theta}{\cos^3 \theta} \left[1 + \left(2.4 + 1.5\nu_h + \tan^2 \theta + \frac{\left(\frac{h_b}{b_b}\right)}{\cos^2 \theta} \right) \left(\frac{t_h}{b_b}\right)^2 \right]^{-1}$
E_3^h	$E_h \left(1 - \frac{b_h \cos \theta (h_b + b_h \sin \theta)}{(b_h \cos \theta + t_h)(h_h + b_h \sin \theta)} \right)$
G_{12}^h	$\frac{E_h \left(\frac{t_h}{b_b}\right)^3 \left(\frac{h_h}{b_h} + \sin \theta_h\right)}{\left(\frac{h_b}{b_b}\right)^2 \cos \theta} \left[1 + 2 \left(\frac{h_b}{b_b}\right) + C \right]$ $C = \left(\frac{t_h}{b_b}\right)^2 \left(\frac{2.4 + 1.5\nu_h}{\frac{h_b}{b_b}} \left(4 + \left(\frac{h_h}{b_h}\right) + \sin \theta_h \right) + \frac{h_b + \sin \theta_h}{\left(\frac{h_b}{b_b}\right)^2} \left[\left(\frac{h_b}{b_b} + \sin \theta_h\right) \tan^2 \theta_h + \sin \theta \right] \right)$
G_{13}^h	$G_h \left(\frac{\frac{t_h}{b_h}}{\left(\frac{h_h}{b_h} + \sin \theta_h\right) \left(\cos \theta_h + \frac{t_h}{b_h}\right)} \right) \left[\cos^2 \theta_h \left(\frac{b_b}{b_h}\right) + 2 \left(\frac{t_h}{b_h}\right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right]$
G_{23}^h	$G_h \left(\frac{\frac{t_h}{b_h}}{\left(\frac{h_h}{b_h} + \sin \theta_h\right) \left(\cos \theta_h + \frac{t_h}{b_h}\right)} \right) \left[\sin^2 \theta \left(\frac{b_b}{b_h}\right) + \frac{h_h}{b_h} + \left(\frac{t_h}{b_h}\right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right]$

Tableau 9. Expressions analytiques des propriétés homogénéisées équivalentes de l'âme

Le tableau 10 de comparaison des résultats montre que les propriétés mécaniques équivalentes calculées analytiquement sont proches avec celles obtenues numériquement.

Propriétés	Présente méthode	Gibson (1982)[1]	Malek (2015) [69]
$E_1^h (MPa)$	0,292	0,270	0,285
$E_2^h (MPa)$	0,309	0,270	0,283
$E_3^h (Mpa)$	227	235	227
$G_{13}^h (MPa)$	33,29	33,10	33,0
$G_{23}^h (MPa)$	49,10	50,20	52,92
$G_{12}^h (MPa)$	0,166	0,162	0,1707
ν_{12}^h	0,9961	1	0,9968
ν_{23}^h	$4,30 \cdot 10^{-4}$	0	$4,1416 \cdot 10^{-4}$
ν_{13}^h	$4,31 \cdot 10^{-4}$	0	$4,1074 \cdot 10^{-4}$

Tableau 10. Propriétés mécaniques équivalentes de l'âme en nid d'abeille Modèle B

2.5 Effet géométrique sur le module de cisaillement de l'âme en nid d'abeille

L'objectif de cette partie est d'étudier l'influence des paramètres géométriques sur le module de cisaillement équivalent de l'âme en nid d'abeille. En effet, de nombreux chercheurs ont étudié les propriétés mécaniques de l'âme de nid d'abeille, précisément ils ont intéressé à bien estimer les modules de cisaillements. Kelsey [60] est le premier à fournir un ensemble d'équations pour calculer G_{xz} et G_{yz} à l'aide de la méthode énergétique appliquée sur les faces de la cellule périodique de nid d'abeille. Cette approche est enrichie par la suite par Gibson et Ashby [1] en utilisant la théorie d'élasticité. Chamis

[13] a aussi proposé un modèle en éléments finis en trois dimensions du sandwich d'âme en nid d'abeille afin de déterminer les propriétés homogénéisées de l'âme. Ensuite Grédiac [61] a suggéré de prendre en compte la non-uniformité des champs de contraintes dans les parois cellulaires. Le Tableau 11 montre les différentes expressions pour calculer les modules de cisaillement.

Kelsey [60]		$G_c = \sqrt{G_{12}G_{23}}$
$G_{13}^* \text{Up} = G \frac{t_2}{l_1} \frac{1 + \sin^2\theta}{(1 + \sin\theta)\cos\theta}$	29,59	24 22,62
$G_{23}^* \text{Low} = G \frac{t_2}{l_1} \frac{1 + \sin\theta}{2\cos\theta}$	27,71	
$G_{23}^* = G \frac{t_2}{l_1} \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$	18,47	
Noor & Burton [11]		
$G_{13}^* \text{Up} = G \frac{t_2}{l_1} \frac{1 + \sin^2\theta}{(1 + \sin\theta)\cos\theta}$	30,79	23,84 14,30
$G_{13}^* \text{Low} = G \frac{t_2}{l_1} \frac{1 + \sin\theta}{5\cos\theta}$	11,08	
$G_{23}^* = G \frac{t_2}{l_1} \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$	18,47	
Grediac [61]		
$G_{13}^* = G_{xz\text{Low}}^* + \frac{0,787l_1}{h} (G_{xz\text{Up}}^* - G_{xz\text{Low}}^*)$	28,04	22,75
$G_{23}^* = G \frac{t_2}{l_1} \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$	18,47	
Chamis [13]		
$G_{13}^* = G \frac{3t_2}{4l_1\cos\theta}$	27,71	22,62
$G_{23}^* = G \frac{t_2}{2l_1\cos\theta}$	18,47	
Malek [69]		

G_{13}^* (Voir l'expression dans le Tableau 9)	29,42	22,98
G_{23}^* (Voir l'expression dans le Tableau 9)	17,982	
Florens [12]		
G_{13}^* (Méthodes des éléments finis)	26,95	21,92
G_{23}^* (Méthodes des éléments finis)	17,83	
Présente étude		
G_{13}^* (Approche proposée)	26,82	21,96
G_{23}^* (Méthode proposée)	17,98	

Tableau 11. Comparaison de l'estimation des modules de cisaillement transversal G_{13}^* et G_{23}^*

D'après Chang [70] l'expression de module de cisaillement dans les différentes directions α figure 17 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$G_{\alpha}^* = G_h \frac{t_h}{b_h} \frac{\left(\frac{h_h}{b_b} + 1\right) + \left[\left(\frac{h_h}{b_h} + 1\right) - 2\sin^2\theta_{\alpha}\right] \cos 2\alpha}{2 \sin \theta_{\alpha} \left(\frac{h_h}{b_h} + \cos \theta_{\alpha}\right)} \quad (13)$$

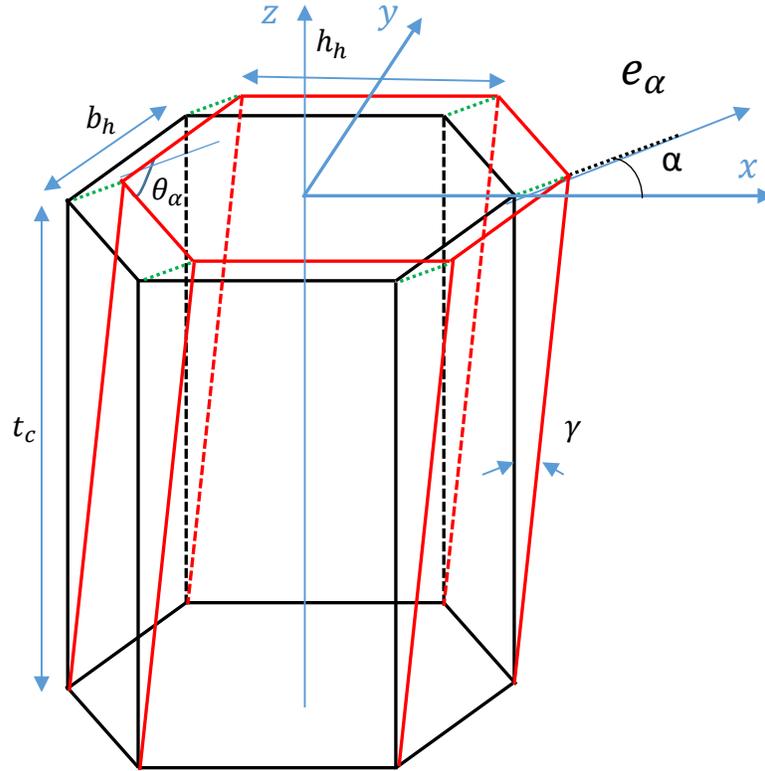


Figure 17. Cellule de l'âme de nid d'abeille sous déplacement de cisaillement arbitraire

La figure 18 montre la variation de module du cisaillement équivalent en fonction du chargement, pour un panneau sandwich d'âme en nid d'abeille de cellule hexagonale régulière ($b_h = h_h$ et $\theta_h = \frac{\pi}{6}$). Le module de cisaillement est faible dans le cas où le chargement est perpendiculaire avec le côté h_h ($G_\alpha^*(\alpha = 90^\circ) = 18 \text{ MPa}$ pour le modèle-A), tandis que le module de cisaillement est maximal pour $\alpha = 0^\circ$.

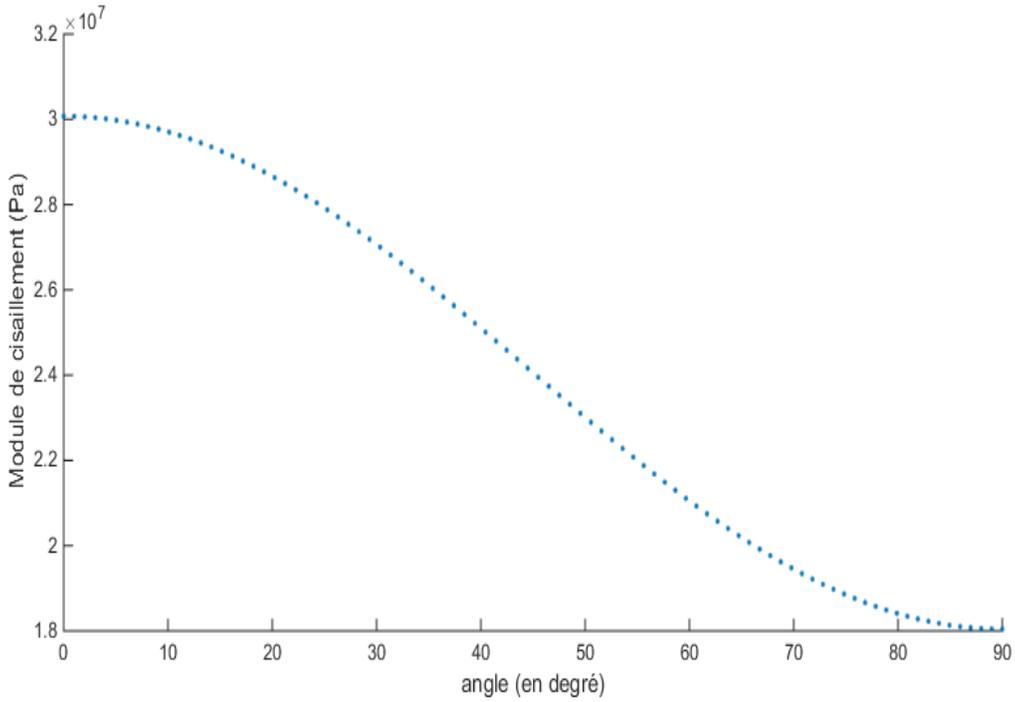


Figure 18. Module de cisaillement selon la direction de chargement e_α
(avec $\theta = \frac{\pi}{3}$)

L'expression de module de cisaillement équivalent moyen est donnée par :

$$G_m^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_h \frac{t_h}{b_h} \frac{\left(\frac{h_h}{b_b} + 1\right) + \left[\left(\frac{h_h}{b_h} + 1\right) - 2\sin^2\theta_\alpha\right] \cos 2\alpha}{2 \sin \theta_\alpha \left(\frac{h_h}{b_h} + \cos \theta_\alpha\right)} d\alpha \quad (14)$$

D'où

$$G_c^* = \frac{1}{2} \frac{G_h t_h (b_h + h_h)}{b_h \sin \theta (b_h \cos \theta + h_h)} \quad (15)$$

Un angle $\alpha = 0^\circ$ implique que $G_{c0^\circ}^* = G_{13}^* = \frac{G_h t_h}{b_h} \frac{b_h \cos^2 \theta_\alpha + h_h}{\sin \theta_\alpha (b \cos \theta_\alpha + h_h)}$

Une valeur de $\alpha = 90^\circ$, implique que $G_{c90^\circ}^* = G_{23}^* = G_h t_h \frac{\sin \theta_\alpha}{b \cos \theta_\alpha + h_h}$

La figure 19 montre l'influence du rapport de forme $\left(\frac{h_h}{b_h} = R\right)$ sur le module de cisaillement équivalent. Plus le rapport de forme est important, plus le module de cisaillement équivalent augmente.

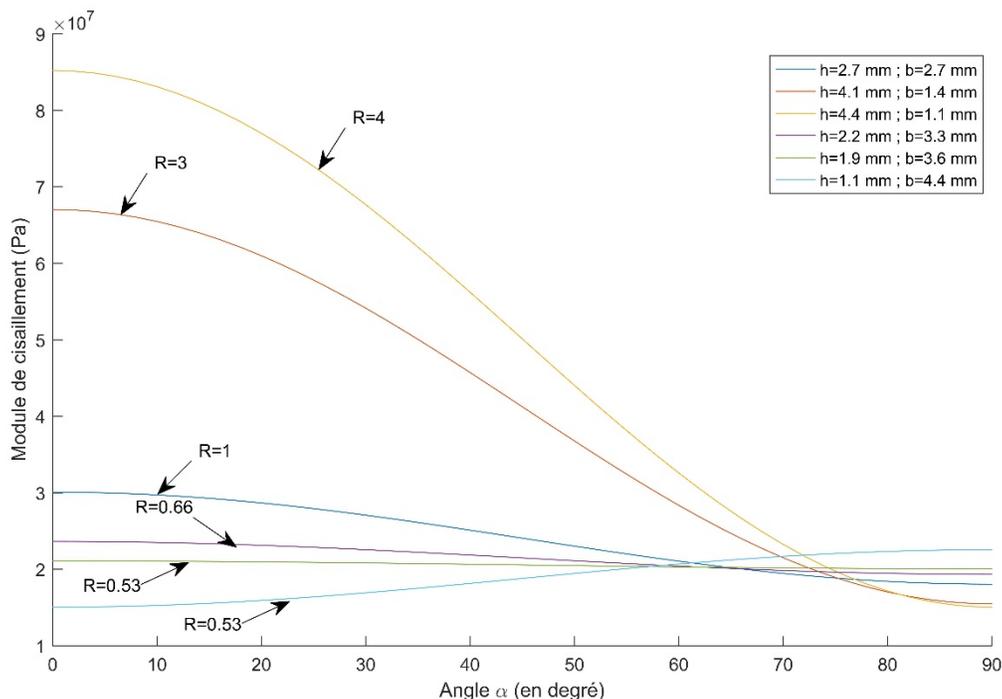


Figure 19. Module de cisaillement en fonction de la direction de chargement (avec $\theta = \frac{\pi}{3}$)

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche générale pour calculer les propriétés macroscopiques des structures sandwichs d'âme périodique. À l'échelle microscopique, les propriétés du matériau qui constituent l'âme sont supposées connues. Ensuite, la notion de volume élémentaire représentatif et le passage méso-macro sont exploités pour générer un modèle numérique tridimensionnelle. Ce modèle est subit à des déplacements spécifiques sous conditions aux limites bien choisies. À l'aide du code de

calcul (ABAQUS), les propriétés mécaniques effectives sont calculées en utilisant la contrainte moyenne et la déformation moyenne appliquées sur le VER. Afin d'automatiser le calcul des propriétés élastiques équivalentes un programme Matlab couple avec ABAQUS et Python est mis en place. Cette automatisation est utile par la suite, car elle aidera à faire l'analyse de sensibilité et l'optimisation de l'âme de sandwich.

Chapitre 3. Comportement vibroacoustique des structures sandwiches

Ce chapitre présente les caractéristiques de la réponse vibroacoustique de la structure sandwich composite à âme en nid d'abeille. Il a pour objectif, d'une part, d'étudier et d'analyser la densité modale dans la structure sandwich, et d'autre part de montrer l'influence de l'orthotropie de la structure sandwich et l'effet du cisaillement du cœur sur la densité modale. Dans la suite de ce chapitre, une technique d'amélioration de la fréquence de transition calculée « analytiquement » est proposée, afin de prendre en compte les effets d'orthotropie produits par la cellule tri-dimensionnelle et les peaux de sandwich.

3.1	INTRODUCTION.....	62
3.1.1	Expressions théoriques de la densité modale.....	63
3.1.1.1	Densité modale : Structure sandwich isotrope.....	63
3.1.1.2	Densité modale : Structure sandwich de comportement orthotrope.....	64
3.1.2	Effet de cisaillement et de comportement orthotrope sur la densité modale.....	72
3.2	ESTIMATION DE FRÉQUENCE DE TRANSITION.....	73
3.2.1	Brève revue dans la littérature sur la prédiction de fréquence de transition.....	74
3.2.2	Amélioration de l'estimation de la fréquence de transition.....	78
3.2.2.1	Prédiction de la fréquence de transition dans le domaine de nombre d'onde .	78
3.2.2.2	Prédiction de la fréquence de transition : Vitesse de groupe	82
3.2.2.4	Étude de cas	87
3.3	CONCLUSION.....	90

3.1 Introduction

La réponse vibroacoustique des structures sandwichs sous excitations aléatoires est souvent dominée par la résonance de modes structurels et acoustiques contigus. Il convient de rappeler que, lorsqu'une structure est excitée par une certaine forme d'excitation structurelle à large bande, la réponse structurelle dominante est résonante, tandis qu'une structure est excitée acoustiquement, la réponse dominante est généralement forcée, mais il peut aussi être résonant. Lorsqu'un volume acoustique clos est excité par une source de bruit à large bande, la principale réponse est résonante. On s'intéresse alors en moyennes fréquences aux flux d'énergie entre les groupes de résonance des modes qui est la principale préoccupation ici. La densité modale est généralement définie comme le nombre de fréquences de résonance d'un élément de structure dans une bande de fréquence ou bien le nombre de modes compris dans une bande de fréquence [71].

En principe, la densité modale peut être obtenue expérimentalement en excitant la structure avec une force sinusoïdale de fréquence variable et en comptant le nombre de modes qui sont excités dans chaque bande de fréquences. La méthode des mobilités, décrite par Cremer et al. [16] est la plus appropriée pour mesurer la densité modale. La précision de cette méthode dépend de façon critique de la fiabilité des mesures de la force et de la vitesse. En revanche la première expression analytique de la densité modale pour les panneaux sandwichs isotropes est proposée par Wilkinson [71]. Plus tard, une étude a été réalisée par Erickson [72] pour étudier l'effet de l'anisotropie de l'âme de la densité modale. Les théories proposées par les deux derniers auteurs sont comparées à des expériences par Clarkson [73]. Des études expérimentale et analytique sur la densité modale des panneaux sandwichs nid d'abeille sont rapportées dans la référence [74]. Pour plus de détails, l'étude faite dans la référence [75], présente un résumé des différentes théories pour calculer la densité modale de panneaux sandwichs en nid d'abeille.

3.1.1 Expressions théoriques de la densité modale

3.1.1.1 Densité modale : Structure sandwich isotrope

Clarkson et Ranky [73] ont traité les panneaux sandwichs en nid d'abeille comme des plaques planes équivalentes pour calculer la densité modale $n(f)$, en supposant que la rigidité à la flexion des peaux D est négligeable dans l'équation de sixièmes ordres donnés par Mead et Markus [76]. Le Tableau 12 présente les différentes expressions de la densité modale des panneaux sandwichs à peaux et âme qui sont pratiquement toutes isotropes.

Référence	Densité modale $n(f)$ modes/Hz
Conlon [77]	$n(f) = \frac{2\pi f S_h}{c_{beff}^2} \left(1 - \frac{c_b}{2c_{beff}} \right)$
Clarkson [73]	$n(f) = \frac{\pi S_h \rho_p f}{gB} \left(1 + (\rho_p^2 \omega^4 + 4\rho_p \omega^2 g^2 B (1 - \nu^2))^{-\frac{1}{2}} (\rho_p \omega^2 + 2g^2 B (1 - \nu^2)) \right)$
Renji [78]	$n(f) = \frac{\pi A \rho_p f}{S_h} \left(1 + \left(\rho_p^2 \omega^4 + \frac{4\rho_p \omega^2 S^2}{D} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\rho_p \omega^2 + \frac{2S^2}{D} \right) \right)$

Tableau 12. Expressions de la densité modale -Structure sandwich dont l'âme et peaux sont isotropes

où $c_{beff} = (c_b^{-3} + c_s^{-3})^{-\frac{1}{3}}$ est la vitesse efficace d'onde de flexion, $c_b = \sqrt{\omega(D/\rho_p)}^{\frac{1}{4}}$ est la vitesse d'onde de flexion, $c_s = \sqrt{Gh/\rho_p}$ est la vitesse d'onde de cisaillement, D est la rigidité en flexion et G le module de cisaillement.

Pour comparer la densité modale de chaque référence, les équations du Tableau 12 et les paramètres des matériaux de Tableau 3 sont utilisées. Pour une plaque rectangulaire ($A=1.68 \times 1.68$ m), les résultats des calculs de densité modale, dans les bandes d'octaves $f=31.5$ à 8000 Hz, montrent que toutes ces méthodes sont sensiblement les mêmes dans le cas du panneau sandwich isotrope (Figure 20).

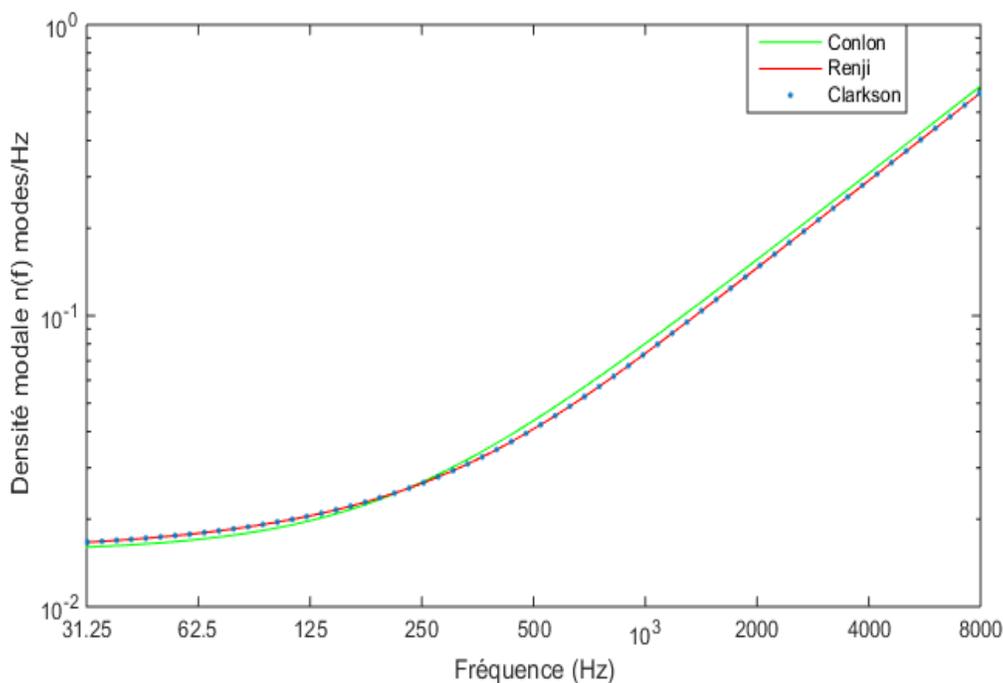


Figure 20. Densité modale d'une structure sandwich [77], [73], [78]

3.1.1.2 Densité modale : Structure sandwich de comportement orthotrope

L'équilibre vertical d'un élément dans une plaque rectangulaire est donné par [79]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - p = 0 \quad (16)$$

Où Q_x est la force de cisaillement dans un plan xz , Q_y est la force de cisaillement dans le plan yz , et p est la charge de pression uniforme. L'équilibre du moment autour de l'axe des ordonnées est :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (17)$$

L'équilibre du moment autour de l'axe des x est :

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (18)$$

Où M_{xx} , M_{xy} , M_{yx} et M_{yy} sont les résultantes de moment. À partir, des équations (16), (17) et (18), l'équation d'équilibre s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - p = 0 \quad (19)$$

Les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} sont égaux :

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z dz = M_{yx} \quad (20)$$

Ainsi l'équation (19) peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - p = 0 \quad (21)$$

La relation entre les résultantes de moment et les courbures est :

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Où φ_x et φ_y sont les rotations du plan transversal dues à la flexion.

D_{11} , D_{22} , D_{12} et D_{66} sont les coefficients de rigidité en flexion et en torsion du panneau sandwich. D_{16} et D_{26} sont les coefficients de couplage flexion-torsion.

Pour un panneau sandwich symétrique D_{16} et D_{26} sont nuls. Dans ce cas les coefficients sont écrits comme suit :

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z^2 Q_{ij} dz = \frac{1}{3} \sum_k^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) Q_{ij}^k. \quad (23)$$

$h_t = t_c + 2t_f$ est l'épaisseur totale de panneau sandwich. Q_{ij}^k sont les coefficients de rigidité réduite de la couche k exprimé dans la base de sandwich (x, y, z) .

$$D_{ij} = \frac{2}{3} \left(M^{ud} Q^{ud} + \frac{t_c^3}{8} M_0 Q^{nid} \right) \quad (24)$$

où Q^{ud} est la matrice de raideur du pli unidirectionnel exprimée dans les axes d'orthotropie (1,2,3).

$$Q^{ud} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Q^{nid} est la matrice de raideur de l'âme exprimée dans la base de sandwich.

$$Q^{nid} = \begin{pmatrix} \frac{E_x^h}{1 - \nu_{xy}^h \nu_{yx}^h} & \frac{\nu_{12} E_y}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}^h E_y^h}{1 - \nu_{xy}^h \nu_{21}^h} & \frac{E_y^h}{1 - \nu_{xy}^h \nu_{yx}^h} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}^h \end{pmatrix} \quad (26)$$

Tous les paramètres homogénéisés de la matrice Q^{nid} peuvent se calculer en utilisant la méthode d'homogénéisation numérique détaillée dans le chapitre 2.

La matrice M^{ud} sert à projeter les composantes de la matrice de raideur du pli dans le repère de référence (repère global associé au sandwich) tel que $M^{ud} = \sum_1^r M_{ij}^l$:

$$M^{ud} = \begin{pmatrix} d_l c_{(l)}^4 & d_l s_{(l)}^4 & 2d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & 4d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 \\ d_l s_{(l)}^4 & d_l c_{(l)}^4 & 2d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & 4d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 \\ d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & d_l (c_{(l)}^4 + s_{(l)}^4) & -d_l (c_{(l)}^4 + s_{(l)}^4) \\ d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & -2d_l c_{(l)}^2 s_{(l)}^2 & d_l (c_{(l)}^2 - s_{(l)}^2)^2 \\ d_l c_{(l)}^3 s_{(l)} & -d_l c_{(l)} s_{(l)}^3 & d_l c_{(l)} s_{(l)} (s_{(l)}^2 - c_{(l)}^2) & 2d_l c_l s_l (s_l^2 - c_l^2) \\ d_l c_{(l)} s_{(l)}^3 & -d_l c_{(l)}^3 s_{(l)} & d_l c_{(l)} s_{(l)} (c_{(l)}^2 - s_{(l)}^2) & 2d_l c_l s_l (c_l^2 - s_l^2) \end{pmatrix} \quad (27)$$

avec $s_{(l)} = \sin(\theta_l)$, $c_{(l)} = \cos(\theta_l)$ et d_l représente la contribution géométrique de chaque pli l . Les épaisseurs des plis unidirectionnels sont supposées identiques d'où :

$$d_l = \frac{3}{4} t_c^2 e^{ud} + \frac{3}{2} t_c^2 (2l - 1) (e^{ud})^2 + (3l^2 - 3l + 1) (e^{ud})^3 \quad (28)$$

La matrice M_0 peu s'écrit sous la forme suivante :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Pour inclure l'effet de cisaillement transversal, la théorie de Mindlin est utilisée. L'angle de cisaillement moyen est pris égal à la rotation du plan transversal. Pour un panneau

sandwich, cette théorie donne des résultats précis. Par conséquent, si γ_x et γ_y sont les rotations moyennes du plan transversal dû au cisaillement, $\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x$ et $\phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y$

L'équation (21) devient :

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \\ & = D_{11} \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x + \partial \gamma_y} \partial y \right) + D_{22} \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial y^3} + p \end{aligned} \quad (30)$$

Les rigidités de cisaillement sont définies par :

$$S_x = G_x h \left(1 + \frac{t_f}{t_c} \right)^2 \quad (31)$$

$$S_y = G_y h \left(1 + \frac{t_f}{t_c} \right)^2 \quad (32)$$

Où G_x et G_y sont les modules de cisaillement, h est la hauteur de l'âme et t_f est l'épaisseur de chaque peau. En général, pour un matériau isotrope le module de cisaillement s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{G}_c = \sqrt{\mathbf{G}_x \mathbf{G}_y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y = \mathbf{G}_c t_c \left(1 + \frac{t_f}{t_c} \right)^2 \quad (33)$$

or les angles de cisaillement moyen peuvent être exprimés en termes de force de cisaillement divisée par la rigidité de cisaillement :

$$\gamma_x = \frac{Q_x}{S_x}, \quad \gamma_y = \frac{Q_y}{S_y} \quad (34)$$

Substitué (34) dans l'expression (16) on obtient :

$$S \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + p = 0 \quad (35)$$

La dérivée seconde suivant x puis suivant y de l'expression (35) donne :

$$\begin{cases} S \left(\frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \\ S \left(\frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

En utilisant les équations (36), l'expression (30) devient :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \\ = -\frac{1}{S} \left(D_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + p \\ + (D_{12} + 2D_{66} - D_{11}) \frac{\partial^3 \gamma_y}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66} - D_{22}) \frac{\partial^3 \gamma_x}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (37)$$

D'après Renji [78] et Clarkson [73] on néglige la dérivée d'ordre trois des angles de cisaillement et on remplace la pression par la force d'inertie $p = -\frac{\rho_p \partial^2 \omega}{\partial t^2}$, donc l'équation (37) devient :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \\ = -\frac{m}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \rho_p \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (38)$$

où ρ_p est la densité de masse surfacique du panneau par unité de surface.

$$\rho_p = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) = \rho_c h_c + 2\rho_f h_f \quad (39)$$

L'équation (38) représente l'équation du mouvement d'une structure sandwich, cependant, certains effets de cisaillement sont négligés parce que D_{11} et D_{22} sont beaucoup plus grande que D_{12} et D_{66} .

Pour une plaque rectangulaire de dimensions a et b , le nombre d'ondes est donné par :

$$n(\omega) = \frac{ab}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \quad (40)$$

avec (θ, r) la distance maximale de la courbe pour ω constante (Figure 21). La densité modale $n(\omega)$ peut être déduite de (40) et devient :

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{ab}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(r^2)}{d\omega} d\theta \quad (41)$$

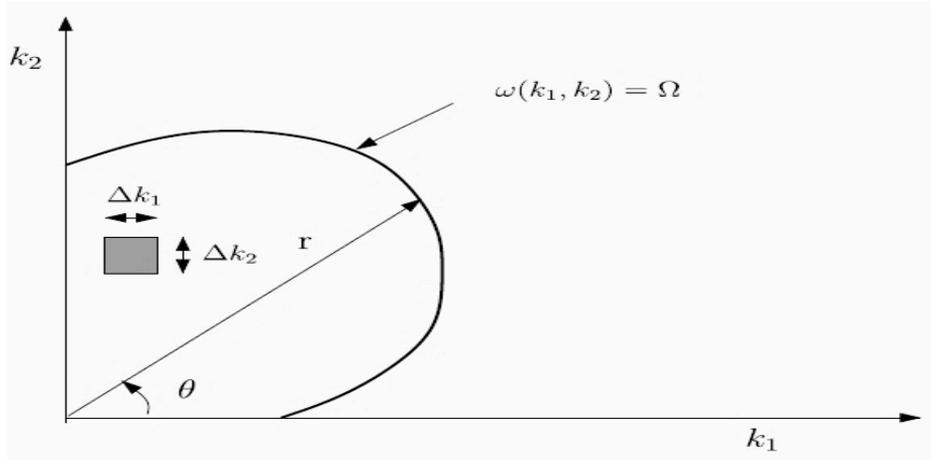


Figure 21. Nombre d'ondes plan [78]

Pour une plaque finie, la solution est considérée comme :

$$W(x, y, \omega) = C e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (42)$$

où C est une constante. k_y et k_x sont les nombres d'ondes dans les directions x et y respectivement. L'équation (42) est remplacée dans (38) l'équation non amortie du mouvement de la plaque sera transformée en fréquence et nombre d'onde :

$$D_{11}k_x^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})k_x^2k_y^2 + D_{22}k_y^4 - \frac{\omega^2 m}{S}(D_{11}k_x^2 + D_{22}k_y^2) = \rho_p \omega^2 \quad (43)$$

Dans les coordonnées polaires les nombres d'ondes k_x et k_y :

$$\begin{cases} k_x = D_{11}^{-\frac{1}{4}} r \cos \theta \\ k_y = D_{22}^{-\frac{1}{4}} r \sin \theta \end{cases} \quad (44)$$

Le nombre d'ondes devient alors :

$$N(\omega) = \frac{ab}{2\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta \quad (45)$$

Substitue l'équation (44) dans (43) donne :

$$\begin{aligned} r^4(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{2\sqrt{D_{11}D_{22}}} \sin^2 2\theta) - r^2 \frac{m\omega^2}{S} (\sqrt{D_{11}} \cos^2 \theta \\ + \sqrt{D_{22}} \sin^2 \theta) - \rho_p \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Par définition la densité modale représente le nombre de modes compris dans une bande de fréquence. Autrement dit, la densité modale est la dérivée de $N(\omega)$ par rapport à ω .

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{ab\rho_p\omega}{2\pi^2 S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f_2(\theta)}{f_1(\theta)} + \frac{1}{f_1(\theta)} \frac{m\omega^2 f_2^2(\theta) + \frac{2f_1(\theta)S^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}}{\left(m^2\omega^4 f_2^2(\theta) + \frac{4m\omega^2 f_1(\theta)S^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta \quad (47)$$

Avec :

$$\begin{cases} f_1(\theta) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}\right) \sin^2 2\theta \\ f_2(\theta) = \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \cos^2 \theta + \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \sin^2 \theta, \end{cases} \quad (48)$$

L'expression (47) présente la densité modale du panneau sandwich orthotrope en fonction de la fréquence et les dimensions du panneau.

3.1.2 Effet de cisaillement et de comportement orthotrope sur la densité modale

L'expression de la densité modale (47) montre que la densité modale dépend de cisaillement et l'orthotropie de la structure sandwich. Pour évaluer cette dépendance on utilise l'expression (47) et les paramètres des matériaux de Tableau 3 pour une plaque rectangulaire ($A=2.15 \times 1.80$ m) sont mis en œuvre.

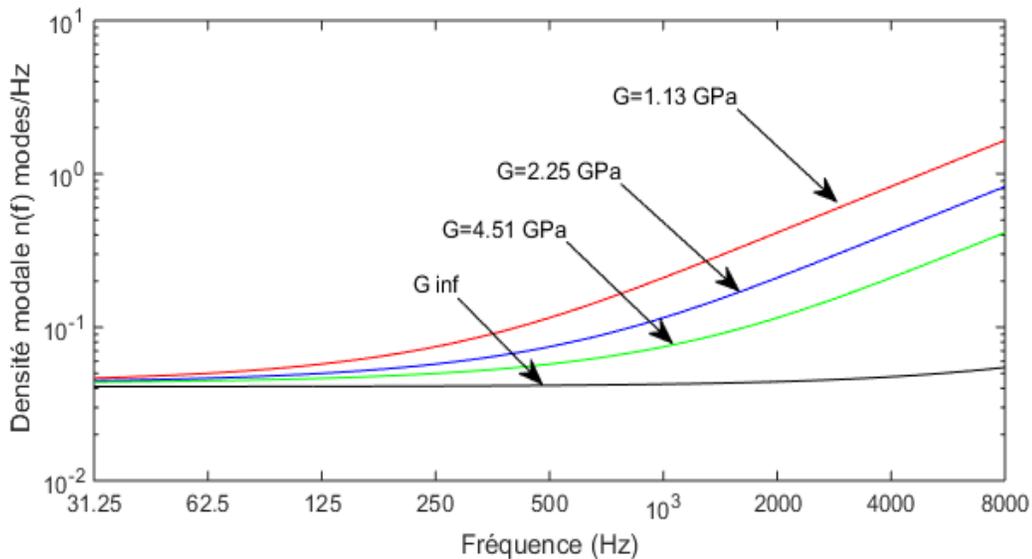


Figure 22. Effet de cisaillement sur la densité modale

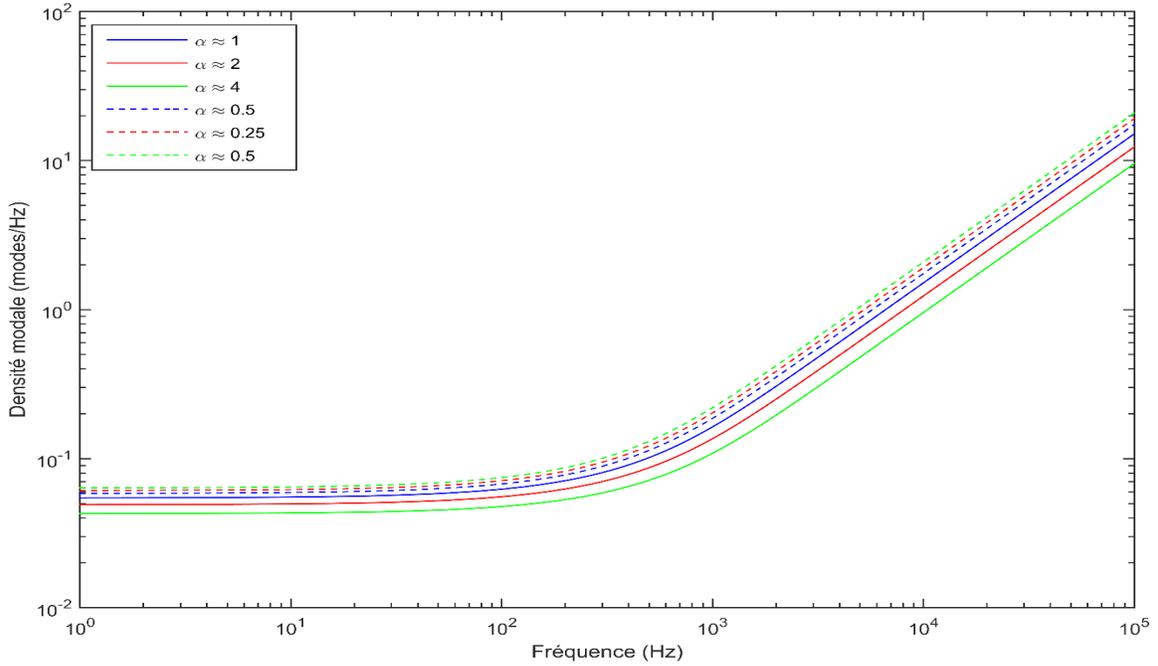


Figure 23. Effet du comportement orthotrope sur la densité modale

Les résultats des calculs de densité modale dans la bande d'octaves $f=31.5$ à 8000 Hz illustrés dans la figure 22 et la figure 23 montrent que la densité modale augmente en fonction du module de cisaillement. Cette dépendance est très claire en moyennes fréquences et très amplifiée aux hautes fréquences. De plus le comportement orthotrope a un effet significatif sur la densité modale comme le montre la figure 23, la densité modale augmente en fonction du comportement orthotrope de la structure sandwich.

3.2 Estimation de fréquence de transition

À partir de l'analyse au-dessus, on constate que la densité modale dépend largement de cisaillement de l'âme de sandwich et le comportement orthotrope de la structure sandwich. De nombreux chercheurs tel que [72], [73], [78] et [80] ont montré que la faiblesse vibroacoustique des sandwichs en nid d'abeille réside dans l'effet de cisaillement de l'âme aux moyennes fréquences. D'après Kurtz et Fahy [19] il existe trois

régimes de comportement de l'onde de flexion pour un panneau sandwich nid d'abeille à savoir :

- **Régime1** : contrôlé par la flexion globale de la structure sandwich définie aux basses fréquences ;
- **Régime 2** : contrôlée par le cisaillement de l'âme en nid-d'abeilles définie aux moyennes fréquences ;
- **Régime 3** : contrôlé par flexion de chaque peau, agissant de façon indépendante aux hautes fréquences.

À partir de ces trois régimes, on peut définir deux fréquences de transition :

- Fréquence de transition de flexion globale au cisaillement de l'âme de la structure sandwich ;
- Fréquence de transition de cisaillement de l'âme aux flexions indépendantes des peaux.

3.2.1 Brève revue dans la littérature sur la prédiction de fréquence de transition

Dans ce qui précède, il est intéressant de noter que les structures sandwiches en nid-d'abeilles ont un comportement acoustique complexe, qui sont contrôlées par trois régimes différents de mouvement mécanique. Dans les gammes basses et moyennes fréquences, ce type de structure a une fréquence de transition, qui sépare le comportement de la flexion globale de la structure et le cisaillement de l'âme. Dans l'étude menée par

Evan [58], on peut montrer clairement l'existence deux types de fréquences de transition en se basant sur le modèle Kurtze et Watters [81] suivant :

$$\frac{c_S^4}{c_B^4} c^6 + c_S^2 c^4 - c_S^4 c^2 - c_{Bf}^4 c_S^2 = 0 \quad (49)$$

avec c onde de flexion dans le panneau. c_B , c_S et c_{Bf} sont respectivement la vitesse d'onde de flexion de la structure sandwich, la vitesse d'onde de cisaillement dans l'âme et la vitesse d'onde de flexion d'une seule peau. Ces trois ondes ont été déterminées par Davis [82] en normalisant la vitesse d'onde de flexion à la vitesse du son dans l'air c_0 dans le polynôme (49) :

$$\frac{c_S^4}{c_B^4} \left(\frac{c^6}{c_0^6} \right) + \frac{c_S^2}{c_0^2} \left(\frac{c^4}{c_0^4} \right) - \frac{c_S^4}{c_0^4} \left(\frac{c^2}{c_0^2} \right) - \frac{c_{Bf}^4 c_S^2}{c_0^6} = 0 \quad (50)$$

La vitesse de différents régimes en fonction de la géométrie du panneau, la densité et les propriétés élastiques des matériaux s'écrivent comme suit :

$$c_B = \left[\frac{\omega^2 t_s^2 \left(1 + \frac{t_c}{t_s}\right)^2}{4(1 + \rho_c t_c / 2\rho_s t_s)} \left(\frac{E_s}{\rho_s (1 - \nu^2)} \right) \right]^{1/4} \quad (51)$$

$$c_S = \left[\frac{1}{4(1 + 2\rho_s t_s / \rho_c t_c)} \left(\frac{G}{\rho_c} \right) \right]^{1/4} \quad (52)$$

$$c_{Bf} = \left[\frac{\omega^2 t_s^2}{24(1 + \rho_c t_c / 2\rho_s t_s)} \left(\frac{E_s}{\rho_s (1 - \nu^2)} \right) \right]^{1/4} \quad (53)$$

La transition de flexion globale au cisaillement de l'âme de la structure sandwich existe si :

$$f_{\min} = \frac{1}{\pi t_c} \left(\frac{1}{1 + t_c/t_f} \right) \sqrt{\frac{(\rho_c t_c / 2 \rho_f t_f)^2}{(1 + \rho_c t_c / 2 \rho_f t_f)}} \left(\frac{C_{ms}^2}{C_{mL}} \right) \quad (54)$$

f_{\min} : représente la fréquence de transition de flexion globale du panneau sandwich au cisaillement d'âme.

Avec $C_{ms} = \sqrt{\frac{G_c}{\rho_c}}$ est l'onde de cisaillement de l'âme de nid d'abeille et $C_{mL} = \sqrt{\frac{E_f}{\rho_f(1-\nu)}}$ est la vitesse longitudinale.

La transition de cisaillement de l'âme aux flexions des peaux existe si :

$$f_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\pi t_f} \sqrt{\frac{(\rho_c t_c / 2 \rho_f t_f)^2}{(1 + \rho_c t_c / 2 \rho_f t_f)}} \left(\frac{C_{ms}^2}{C_{mL}} \right) \quad (55)$$

f_{\max} : représente la fréquence de transition de cisaillement d'âme – flexion des peaux.

Dans une autre étude menée par Rindel [83], il a montré l'existence de trois types de transition pour une plaque épaisse d'épaisseur t_r et de densité massique m_r à savoir :

1. Le passage progressif des ondes flexion en basse fréquence aux ondes de cisaillement en haute fréquence peut être caractérisé par une fréquence de transition f_t^R . Cette fréquence est définie comme la fréquence à laquelle la vitesse de phase des ondes de flexion devient égale à la vitesse de phase des ondes de cisaillement. Ces vitesses de phase sont données par :

$$c_s = \sqrt{\frac{G_r t_r}{m_r}} \quad , \quad c_b = \sqrt{\omega^4 \frac{D_r}{m_r}} \quad (56)$$

où ω est la fréquence angulaire, D_r est la rigidité en flexion de la plaque et m_r est la masse par unité de surface. G_r est le module de cisaillement et t_r est l'épaisseur du panneau sandwich. On notera que l'onde de cisaillement a une vitesse indépendante de la fréquence, alors que la vitesse des ondes de flexion augmente avec la fréquence, l'intersection de ces deux dernières vitesses de phase définit la fréquence de transition f_t^R tel que :

$$f_t^R = \frac{c_s^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m_r}{D_r}} \quad (57)$$

2. À l'aide de l'analyse asymptotique, de la densité modale, Rindel montre que la densité modale est constante dans les basses fréquences, mais augmente en fonction de la fréquence quand on atteint la fréquence $\frac{f_t^R}{2}$, d'où la définition d'une autre transition.
3. L'analyse de vitesse de groupe définit une autre fréquence de transition, tel qu'au-dessus de cette fréquence la vitesse de groupe est constante est égale la vitesse de phase des ondes de cisaillement. Par contre au-dessous de cette fréquence qui est égale $\frac{f_t^R}{4}$ la vitesse de groupe égale deux fois la vitesse de phase des ondes de flexions.

Récemment, Guillaumie [84] a donné l'expression de la fréquence de transition de panneaux sandwichs symétrique d'âme en nid d'abeille et de peaux en composites en utilisant l'inverse de l'expression de l'impédance mécanique.

$$f_t^G = \frac{K_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\rho_p D} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

avec $K_s = G_c h_c \left(1 + \frac{h_f}{h_c}\right)^2$ représente la rigidité de cisaillement et $D = \sqrt{D_{11} D_{22}}$ est la rigidité de flexion.

Les modèles ci-dessus montrent clairement l'existence des fréquences de transition en passant d'un comportement à un autre, mais les expressions de ces différentes fréquences ne comprennent pas l'effet orthotropie de la structure. En ce sens, la sous-section suivante est consacrée pour développer d'une méthode analytique pour prédire la valeur correcte de la fréquence de transition en utilisant un modèle de plaque qui prend en compte le comportement orthotrope d'un panneau sandwich alvéolaire symétrique.

3.2.2 Amélioration de l'estimation de la fréquence de transition

Dans cette partie, un développement analytique d'une expression de fréquence transition pour les structures sandwiches symétriques est élaboré. La procédure générale pour obtenir l'expression de fréquence de transition est basée sur l'analyse asymptotique du nombre d'ondes, la vitesse de groupe et la densité modale.

Les expressions de la fréquence de transition développée dans cette section sont valables sous les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est supérieure à celle des peaux ;
- L'âme et les peaux sont supposées incompressibles suivant l'épaisseur ;
- La structure étudiée soit un panneau sandwich symétrique ou une plaque épaisse orthotrope.

3.2.2.1 Prédiction de la fréquence de transition dans le domaine de nombre d'onde

La fréquence de transition du panneau sandwich peut être identifiée de manière analytique à l'aide de la relation de dispersion de la structure en sandwich (43). En posant

cette fois les nombres d'ondes $k_x = r \cos(\theta)$ et $k_y = r \sin(\theta)$ avec $k = ||r|| = \sqrt{k_y^2 + k_x^2}$ par la suite en substituant ces expressions dans l'équation (43), la relation de dispersion devient :

$$r^4 - \frac{\rho_p \omega^2}{K_s} \frac{\chi_2(\theta)}{\chi_1(\theta)} r^2 - \frac{\rho_p \omega^2}{\chi_1(\theta)} = 0, \quad (59)$$

$\chi_1(\theta)$ et $\chi_2(\theta)$ représentent les propriétés orthotropes d'un panneau sandwich alvéolaire symétrique avec peau orthotrope :

$$\begin{cases} \chi_1(\theta) = D_{11} \cos^4(\theta) + 2 \sqrt{D_{11} D_{22}} \Gamma \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + D_{22} \sin^4(\theta) \\ \chi_2(\theta) = D_{11} \cos^2(\theta) + D_{22} \sin^2(\theta) \end{cases} \quad (60)$$

La solution positive de l'équation (59) s'écrit comme suite :

$$r^2 = \frac{\omega^2}{2\chi_1(\theta)} \left[\left(\frac{\rho_p}{K_s} \chi_2(\theta) \right) + \sqrt{\left(\frac{\rho_p}{K_s} \chi_2(\theta) \right)^2 + \frac{4 \chi_1(\theta) \rho_p}{\omega^2}} \right] \quad (61)$$

Par conséquent, le nombre d'ondes de flexion propageant dans la direction θ peut s'écrit sous la forme suivante :

$$k(\omega, \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{K_s \chi_1(\theta) \omega \left(\omega \rho_p \chi_2(\theta) + \sqrt{\omega^2 \rho_p^2 \chi_2(\theta)^2 + 4 K_s^2 \rho_p \chi_1(\theta)} \right)}{K_s \chi_1(\theta)}} \quad (62)$$

Le développement asymptotique de la relation (62) pour $\omega \rightarrow \infty$ (en haute fréquence) conduit à l'expression suivante :

$$\langle k_S(\omega)^2 \rangle = \frac{\omega^2 \rho_p}{2\pi K_S} \int_0^{2\pi} \frac{\chi_2(\theta)}{\chi_1(\theta)} d\theta \quad (63)$$

L'expression $\langle k_S(\omega)^2 \rangle$ représente la valeur moyenne de nombre d'ondes de cisaillement en haute fréquence pour la structure sandwich. Dans l'autre cas de limite, pour $\omega \rightarrow 0$ l'effet de cisaillement est très grande ($K_S \rightarrow \infty$) et la relation (62) s'écrit :

$$\langle k_B(\omega)^2 \rangle = \frac{\omega \sqrt{\rho_p}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\chi_1(\theta)}} d\theta \quad (64)$$

L'expression $\langle k_B(\omega)^2 \rangle$ représente la valeur moyenne de nombre d'ondes de flexion en basse fréquence.

Par conséquent, l'intersection entre la courbe de cisaillement pur de l'âme $k_B(\omega)$ et la courbe de flexion pure de panneau sandwich $k_B(\omega)$ définit ce qu'on appelle la fréquence de transition f_t^w qui a l'expression analytique suivante :

$$f_t^w = \frac{K_S}{2\pi \sqrt{\rho_p}} P(\theta) \quad (65)$$

avec

$$P(\theta) = \left(\int_0^{2\pi} \chi_1(\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{\chi_2(\theta)}{\chi_1(\theta)} d\theta \right)^{-1} \quad (66)$$

$P(\theta)$, caractérise les propriétés orthotropes du panneau sandwich alvéolaire symétrique.

Les asymptotes de nombre d'ondes en haute fréquence (63) et en basse fréquence (63) pour le panneau isotrope modèle A défini dans le tableau 1 sont représentées dans la figure 24. En outre, les asymptotes de nombre d'ondes du modèle B sont illustrées dans la figure 25. On observe sur les deux figures que l'intersection des courbes de flexion pure

et cisaillement pur est située dans les gammes de moyennes fréquences, tel que la fréquence de transition pour le modèle A est 359.56 Hz et pour le modèle B est 679.09 Hz. De plus ces valeurs calculées analytiquement pour les modèles sont très proches de celles estimées numériquement (Bisection méthode) [85]. Dans le cas isotrope, la valeur de transition du modèle A convergé vers les valeurs calculées par les expressions de Evan et Rindel comme le montre le Tableau 13.

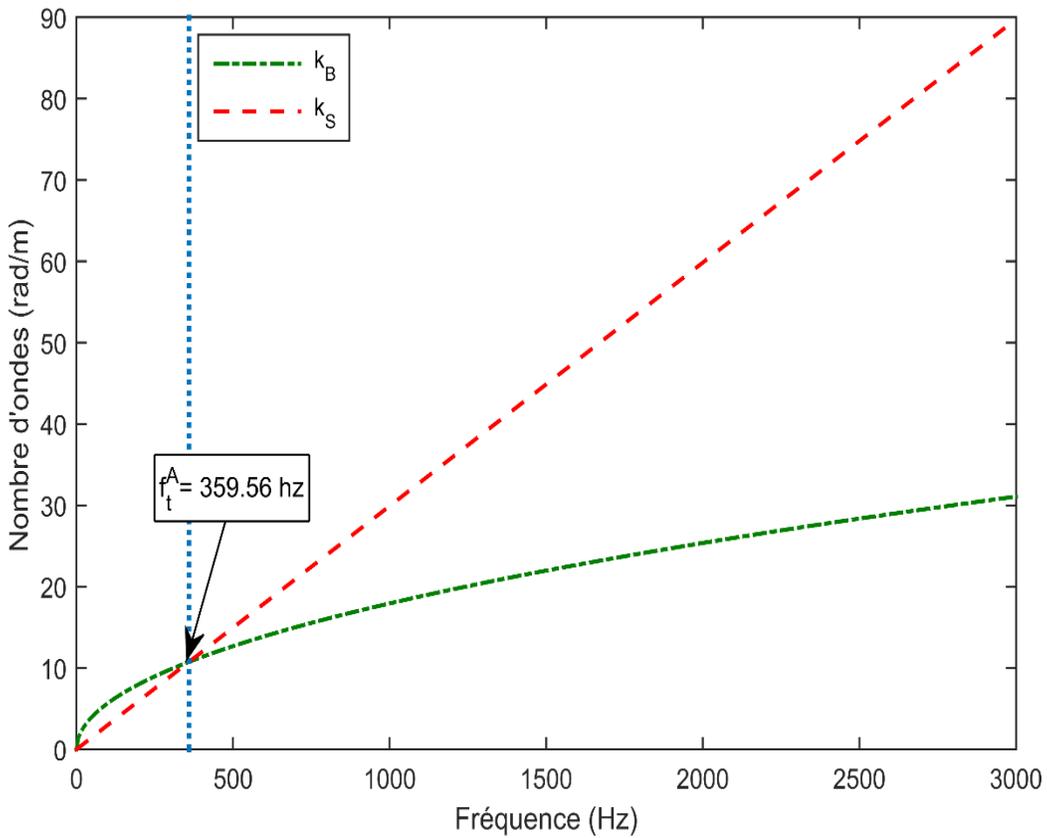


Figure 24. Fréquence de transition utilisant le nombre d'ondes – Modèle A

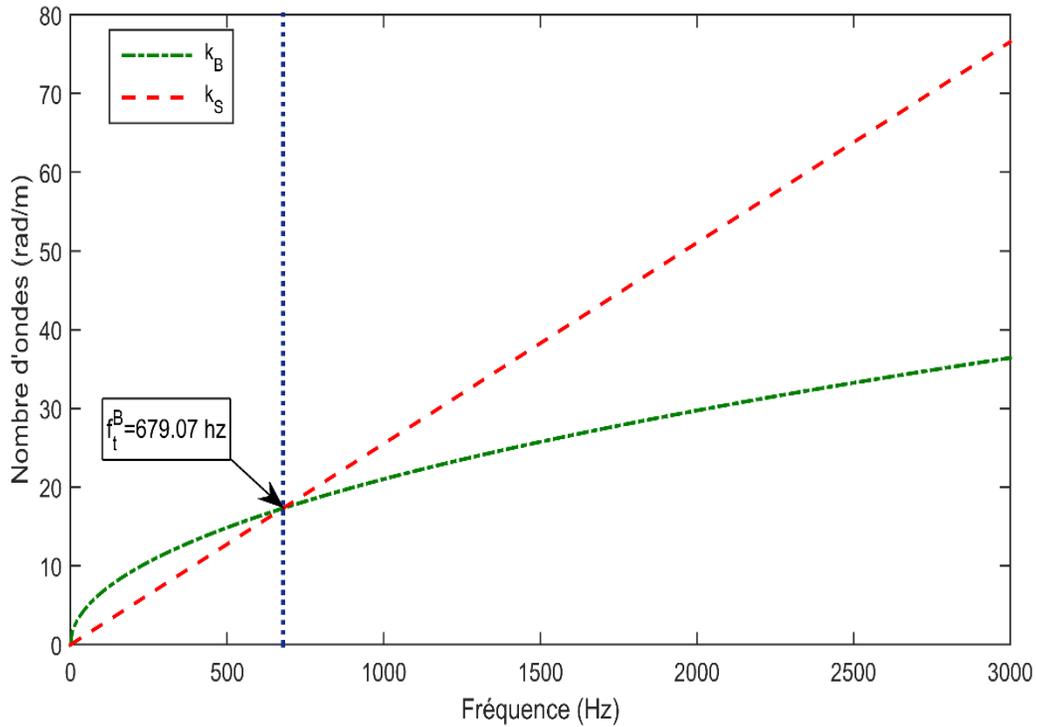


Figure 25. Fréquence de transition utilisant le nombre d’ondes – Modèle B

3.2.2.2 Prédiction de la fréquence de transition : Vitesse de groupe

La vitesse de groupe représente la vitesse à laquelle se propage un paquet d’ondes, ou encore la vitesse maximum de la modulation. Elle s’exprime la vitesse de groupe en fonction de la pulsation ω et du nombre d’ondes k selon la formule ci-dessous :

$$c_g(\omega, \theta) = \frac{d\omega}{dk(\omega, \theta)} \quad (67)$$

En utilisant la définition ci-dessus de la vitesse de groupe et les relations (63) et (63) d’un panneau sandwich symétrique avec peaux orthotropes. Le développement asymptotique de la vitesse de groupe s’écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_g(\omega, \theta)_{k_S \rightarrow \infty} = c_{g_S} = \sqrt{\frac{K_S}{\rho_p}} \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\chi_2(\theta)}{\chi_1(\theta)}} d\theta} \\ c_g(\omega, \theta)_{k_S \omega \rightarrow \infty} = c_{g_B} = \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{\rho_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{\chi_1(\theta)}} d\theta} \end{array} \right. \quad (68)$$

L'intersection entre la vitesse de groupe en flexion pure (quand $\omega \rightarrow \infty$) et la vitesse de groupe en cisaillement pure (quand $k_S \rightarrow \infty$) donne :

$$f_t^g = \frac{K_S}{8\pi\sqrt{\rho_p}} P(\theta) = \frac{1}{4} f_t^w \quad (69)$$

Cette dernière expression (69) montre que la fréquence de transition trouvée en analysant la vitesse de groupe représente un quart de celle donnée par le développement asymptotique du nombre d'ondes (65).

3.2.2.3 Prédiction de la fréquence de transition : Densité modale

La densité modale représente le nombre de modes compris dans une bande de fréquence. Selon [3] on peut donc exprimer la densité modale :

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{l_x l_y}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dr^2}{d\omega} d\theta \quad (70)$$

où $N(\omega)$ est le nombre de modes résonants dans la bande de fréquence $\frac{\Delta f}{2\pi}$, a et b sont les dimensions géométriques du panneau sandwich.

La densité modale en flexion pure du panneau sandwich peut être obtenue par l'analyse asymptotique. Pour une rigidité de cisaillement très élevée, l'effet de cisaillement

transversal de l'âme de sandwich peut être négligé. Pour $K_S \rightarrow \infty$ l'équation (61) devient alors :

$$K_S \rightarrow \infty \Rightarrow r^2 = \sqrt{\frac{\rho_p \omega^2}{\chi_1(\theta)}} \quad (71)$$

En substituant (71) dans l'expression (70), on obtient :

$$n_B(\omega) = n(\omega)_{K_S \rightarrow \infty} = \frac{\rho_p^{0.5} ab}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi_1(\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (72)$$

où $n_B(\omega)$ présente la densité modale du panneau sandwich en basse fréquence.

La densité modale en cisaillement pur peut être calculée. Lorsque la fréquence circulaire ω tend vers l'infini, l'effet de cisaillement transversal de l'âme de panneau devient prédominant, dans ce cas l'équation (61) donne :

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow r^2 = \frac{\omega^2}{\chi_1(\theta)} \left(\frac{\rho_p}{K_S} \chi_2(\theta) \right) \quad (73)$$

En substituant (73) dans l'expression (70), on obtient :

$$n_S(\omega) = n(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{l_x l_y \rho_p \omega}{\pi^2 K_S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi_2(\theta) \chi_1(\theta)^{-1} d\theta \quad (74)$$

où $n_S(\omega)$ représente la densité modale asymptotique dans la gamme des hautes fréquences du panneau sandwich.

L'intersection entre la densité modale en flexion pure $n_B(\omega)$ et la densité modale en cisaillement pur $n_S(\omega)$, définit la fréquence de transition suivante :

$$f_t^m = \frac{K_s}{4\pi \sqrt{\rho_p}} T(\theta) \quad (75)$$

où $T(\theta)$ représente l'effet d'orthotropie de panneau sandwich de la densité modale, donné par :

$$T(\theta) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi_1(\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi_2(\theta)}{\chi_1(\theta)} d\theta \right)^{-1} \quad (76)$$

Pour un panneau sandwich symétrique de cœur en nid d'abeille, les expressions $T(\theta)$ et $P(\theta)$ sont égaux. La fréquence de transition obtenue en utilisant l'analyse asymptotique de la densité modale est alors égale au double de la fréquence de transition déterminée par l'analyse asymptotique du nombre d'ondes.

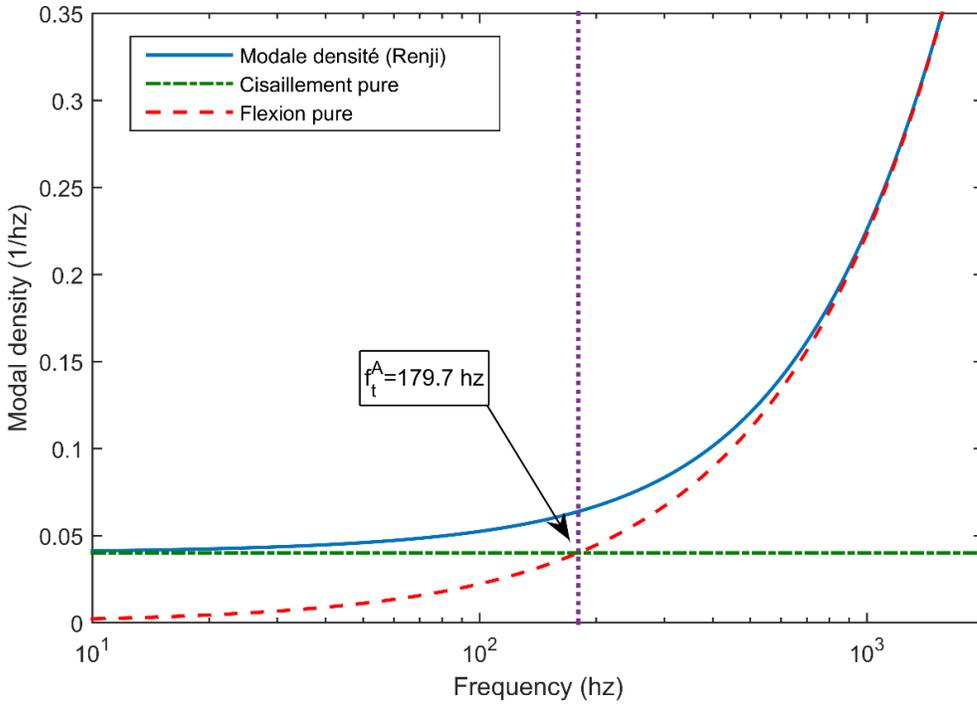


Figure 26. Fréquence de transition utilisant la densité modale-Modèle A

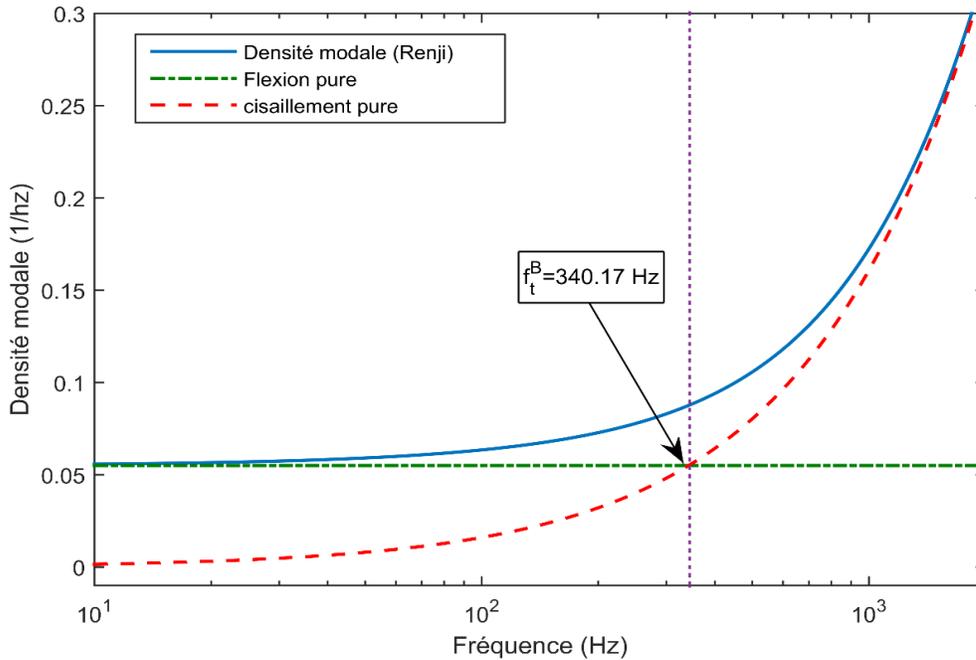


Figure 27. Fréquence de transition utilisant la densité modale-Modèle A

Les courbes de densité modale pour les deux panneaux sandwichs des modèles A et B (Tableau 3 et Tableau 4), sont représentées dans la figure 26 et figure 27 respectivement. De plus, les asymptotes de comportement en flexion (9) et de comportement en cisaillement (10) sont tracées. On observe sur la figure 3 que les panneaux ont des comportements en flexion purs aux basses fréquences et des comportements en cisaillement pur en haute fréquence. L'intersection de ces courbes définit la fréquence de transition flexion globale-cisaillement de l'âme. La valeur de fréquence de transition pour le modèle A est 179.7 Hz et 340.17 Hz pour le modèle B.

Etant donné le modèle B représente un comportement orthotrope, la valeur de fréquence de transition estimée en utilisant l'expression de Guillaumie [84] pour le modèle B est supérieure de 14 Hz à celle trouvée à l'aide de l'expression (75) comme le montre le Tableau 13. D'où la nécessité de prendre en compte l'effet d'orthotropie pour calculer la fréquence de transition pour les panneaux sandwichs orthotrope.

3.2.2.4 Étude de cas

Dans la plupart des applications industrielles, la rigidité en flexion du panneau sandwich est approximativement la même dans les directions x et y ($D_{11} = D_{22} = D$). En utilisant cette hypothèse et en introduisant $\beta_\Gamma^2 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma)$ l'expression (8) devient :

$$\begin{cases} \chi_1(\theta) = D(1 - \beta_\Gamma^2 \sin^2 2\theta) \\ \chi_2(\theta) = D \end{cases} \quad (77)$$

En substituant l'équation (77) dans l'équation (75), la fréquence de transition donnée par l'analyse asymptotique, de la densité modale devient :

$$f_t^m = \frac{K_s \sqrt{\Gamma + 1}}{4\sqrt{2} \pi^2 \sqrt{\rho_p D}} F(\pi, \beta_\Gamma) \quad (78)$$

Où F est l'intégrale elliptique incomplète du premier type, définie par :

$$F(\phi, \beta_\Gamma) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\Gamma^2 \sin^2(X)}} dX \quad (79)$$

Pour un panneau sandwich dont l'âme et peaux sont isotropes, le coefficient $\Gamma = 1$ (c.-à-d. $D_{11} = D_{22} = D$ and $D_{12} + 2D_{66} = D$). Sous cette condition l'expression (75) devient :

$$f_t^w = \frac{K_s}{4\pi \sqrt{\rho_p D}} \quad (80)$$

Dans ce cas l'expression de la fréquence de transition trouvée en basant sur la densité modale est identique à l'expression trouvée par Guillaumie [84]. D'ailleurs, la fréquence

de transition trouvée par l'analyse asymptotique pour le cas d'une plaque épaisse isotrope est le même que l'expression de Rindel [83]:

$$f_t^w = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{G_t h_t}{\rho_p} \right) \sqrt{\frac{\rho_p}{D}}, \quad (81)$$

où G_t est le module de cisaillement et h_t est l'épaisseur de la plaque isotrope.

Le Tableau 13 suivant résume les fréquences de transition pour les deux types de sandwichs qui ont des comportements différents à savoir le comportement isotrope pour le modèle A et le comportement orthotrope pour le Modèle B.

		Model A	Model B
Nombre d'ondes	Approche analytique	359.56 Hz	680.08 Hz
	Méthode [81]	339.08 Hz	-
	Méthode [82]	359.25 Hz	-
	Méthode numérique [85]	358.40 Hz	676.46 Hz
Densité modale	Approche analytique	179.78 Hz	340.17 Hz
	Méthode [84]	179.78 Hz	354.40 Hz
	Méthode bisection [85]	179.78 Hz	338.69 Hz
	Énergie de déformation [85]	179.06 Hz	344.48 Hz
Vitesse de groupe	Approche analytique	89.89 Hz	170.08 Hz
	Énergie de déformation [85]	89.02 Hz	167.08 Hz

Tableau 13. Valeur de fréquence de transition par différentes méthodes

Parmi les principaux objectifs de cette investigation, on cherche à obtenir la valeur correcte de la fréquence de transition qui prend en compte l'effet d'orthotropie. Pour des structures sandwich en nid d'abeille, le comportement orthotrope du panneau a un effet important sur la fréquence de transition prédite du panneau sandwich orthotrope, comme le montre la figure 28. Le coefficient orthotrope en fonction de la fréquence de transition normalisée (f_t/f_t^*) avec f_t est la fréquence de transition en tenant compte de l'effet de comportement orthotrope de panneau sandwich et f_t^* est la fréquence de transition du panneau isotrope équivalent obtenu dans l'équation (80).

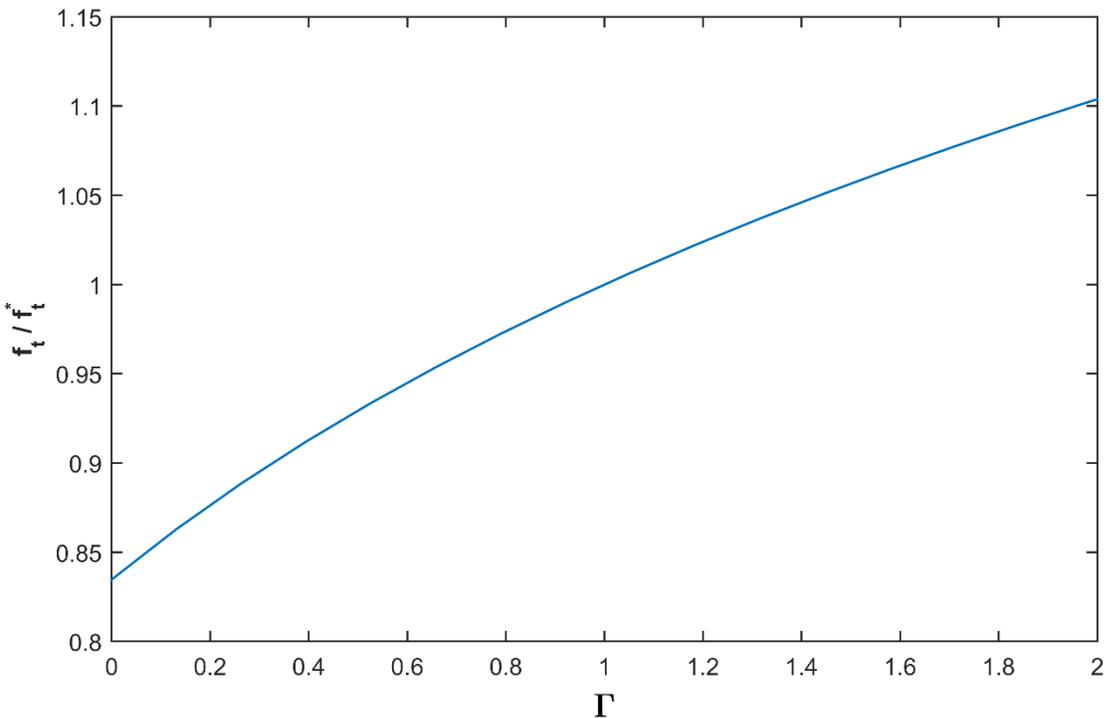


Figure 28. Effet de comportement orthotrope sur la fréquence de transition

D'une manière générale, la courbe présente une tendance croissante en fonction du coefficient d'orthotropie Γ du panneau sandwich. Lorsque le coefficient Γ est inférieur à 1, la fréquence de transition développée dans cette étude est inférieure à la fréquence de transition obtenue pour la plaque isotrope équivalente. Pour $\Gamma > 1$, la fréquence de

transition prédite du panneau sandwich est une surestimation par rapport à celle calculée pour une plaque isotrope équivalente.

D'après la figure 26 et la figure 27 il est clair que la densité modale augmente en fonction de la fréquence et le module du cisaillement, et cette augmentation est plus importante à partir des moyennes fréquences. De plus cette fréquence peut s'écrire en fonction des propriétés géométriques et matérielles du panneau sandwich. La question qui se pose à ce stade est alors de minimiser la densité modale en jouant sur l'architecture de sandwich en nid d'abeille sans toucher aux performances mécaniques telles que la rigidité et la masse du sandwich, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

3.3 Conclusion

Ce chapitre a permis, dans un premier temps, de donner des expressions « analytiques » explicites pour la densité modale, que ce soit dans les structures sandwiches isotropes ou orthotropes. Une analyse de l'influence du cisaillement de l'âme et de l'orthotropie de la structure sandwich sur la densité modale a ainsi pu être réalisée. En effet, la densité modale augmente en fonction de cisaillement de l'âme et l'orthotropie du sandwich, et cette dépendance est amplifiée dans les moyennes et hautes fréquences.

Dans un deuxième temps, une approche analytique et numérique pour prédire la fréquence de transition dans les structures sandwiches a été développée. Cette fréquence de transition existe si et seulement si, l'effet de cisaillement de l'âme du sandwich ne peut être négligé, ce qui est le cas de la structure sandwich alvéolaire. Par définition, la fréquence de transition sépare deux domaines de comportement en moyenne fréquence. Le premier domaine est contrôlé par la flexion globale du sandwich, tandis que le second domaine est contrôlé par le cisaillement de l'âme du sandwich.

La fréquence de transition dans la densité modale du sandwich représente la fréquence à laquelle le nombre de modes commence à augmenter de façon remarquable en fonction de la fréquence. Autrement dit, à partir de la fréquence de transition, la structure sandwich devient progressivement moins rigide, en raison de l'effet de cisaillement. En plus, la fréquence de transition prédite en utilisant la relation de dispersion est approximativement le double de celle trouvée dans la densité modale, alors qu'elle est quatre fois de la fréquence de transition estimée par la vitesse de groupe.

Chapitre 4. Analyse de sensibilité

Ce chapitre a pour objectif de valider le modèle mathématique proposé en chapitre 3 d'une part, et d'autre part de mieux comprendre l'influence des paramètres mécaniques et géométriques sur les résultats obtenus à l'aide des modèles établis en chapitre 2 et chapitre 3 à savoir ; la densité modale et la fréquence de transition.

4.1 INTRODUCTION.....	93
4.2 ÉTUDE DE SENSIBILITÉ.....	94
4.2.1 Indice de sensibilité	94
4.2.2 Estimation de l'indice de sensibilité - Méthode FAST.....	96
4.2.2.1 Méthode FAST classique.....	99
4.2.2.2 Méthode FAST étendue	99
4.3 APPLICATION : STRUCTURE SANDWICH COMPOSITE.....	100
4.3.1 Densité modale.....	100
4.3.2 Fréquence de transition	108
4.4 CONCLUSION	110

4.1 Introduction

Comme déjà mentionné dans le premier chapitre, l'analyse de sensibilité vise à recueillir des informations importantes sur les paramètres d'entrées d'un modèle en regard de leur influence par rapport aux résultats générés par ce modèle. En d'autres termes, l'étude de sensibilité peut classer les paramètres en fonction de son influence sur les résultats et d'estimer également les interactions entre les paramètres d'entrées. L'analyse de sensibilité du modèle a pour but d'aider à optimiser et faciliter sa caractérisation [86, 87]. En effet, les estimations des propriétés mécaniques équivalentes à l'échelle macroscopique prennent beaucoup de temps. L'utilisation de l'analyse de sensibilité peut aider à sélectionner les paramètres les plus influents, pour n'optimiser que ceux-ci par la suite.

Les sensibilités des indicateurs vibroacoustiques des structures sandwichs varient en fonction de la fréquence et du paramètre étudié. Une étude de sensibilité des paramètres mécaniques sur les performances vibroacoustiques des structures sandwichs a été proposée par Christen et al.[87] . Il s'agit de déterminer l'impact des paramètres mécaniques sur la transmission acoustique sur une bande fréquence des structures sandwichs. La méthode d'analyse de sensibilité FAST a été utilisée dans cette étude, dont l'objectif est de quantifier l'influence des différents paramètres intervenant dès la phase de conception des structures sandwichs isotropes ou orthotropes sur la densité modale. Cette approche de sensibilité a été également appliquée par Ouisse et al. [86] pour étudier des modèles des matériaux poreux. La méthode de Sobol [88] a été également utilisée. En se basant sur ces études, une étude de sensibilité utilisant la méthode FAST sera l'objet de ce présent chapitre. L'objectif est d'identifier les paramètres mécaniques et géométriques les plus influents dans la densité modale d'une structure sandwich, sur

une bande de fréquence. Par la suite une autre étude de sensibilité a été faite en utilisant l'expression de la fréquence de transition développée dans le chapitre 3. L'objectif est de voir si les paramètres les plus influents identifiés en utilisant la densité modale sont les mêmes paramètres les plus influents obtenus en utilisant le modèle de fréquence de transition. Étant donné que le cisaillement d'âme de sandwich influe sur la densité, une étude de sensibilité est faite pour caractériser les paramètres les plus influences.

4.2 Étude de sensibilité

Dans cette section, l'expression générale de l'indice de sensibilité du 1er ordre et total est présentée. Ensuite la méthode FAST a été utilisée pour estimer cet indice de sensibilité.

4.2.1 Indice de sensibilité

Considérons une fonction à valeurs réelles définie sur $[0,1]^p$:

$$Y = f(x) = f(x_1, \dots, x_p), \quad (82)$$

Si la variance de Y est finie, alors d'après le théorème de la variance totale, la variance de Y s'écrit sous la forme suivante :

$$V(Y) = V(E[Y|X_i = x_i]) + E[V(Y|X_i)]. \quad (83)$$

$E[V(Y|X_i)]$, représente l'espérance mathématique de Y conditionnelle au fait que l'entrée X_i a la valeur x_i .

Il est possible de décomposer la variance de Y en combinaison linéaire de variances d'espérances conditionnelles. Au 1er ordre, l'indice de sensibilité de la variable Y à la variable X_i :

$$S_i = \frac{V(E(Y|X_i))}{V(Y)} \quad (84)$$

Plus la variable X_i sera important plus l'indice de sensibilité sera plus élevé. D'où le fait que l'indice de sensibilité de 1er ordre permet d'effectuer le classement des entrées par ordre de priorité, ce que Saltelli et al. [89] appelle *factor prioritization*.

En utilisant la décomposition de Sobol [88] de la variance, la variance de Y se décompose en :

$$V = \sum_{i=1}^P V_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1\dots p} , \quad (85)$$

$$V_i = V(E(Y|X_i)),$$

$$V_{ij} = V(E(Y|X_i, X_j)) - V_i - V_j ,$$

...

$$V_{1\dots p} = V - \sum_{i=1}^P V_i - \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} V_{ij} - \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{p-1} \leq p} V_{i_1 \dots i_{p-1}}$$

Pour plus de détail, voir l'annexe (C).

L'indice de sensibilité de 2^{ème} ordre est la sensibilité de la variance de Y (Variable de sortie) à l'interaction de deux variables X_i et X_j (Variables d'entrées) :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} \quad (86)$$

L'indice de sensibilité total de la variable d'entrée X_i , noté TSI_i est défini comme la somme des indices de sensibilité concernant la variable d'entrée et toutes les interactions entre la variable X_i et les autres entrées.

D'où l'indice de sensibilité total s'écrit :

$$TSI_i = \sum_{k \neq i} S_k = \frac{E(V(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} = 1 - \frac{V(E(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} \quad (87)$$

D'après Saltelli [89], l'indice de sensibilité totale permet d'effectuer le choix des variables d'entrée à fixer (*factor fixing*)

4.2.2 Estimation de l'indice de sensibilité - Méthode FAST

En général, il est impossible de calculer les indices de sensibilité analytiquement. Il faut les estimer via des simulations numériques du modèle $f(x_1, \dots, x_p)$, puisque les indices de sensibilités sont définis à partir d'intégrales multiples. Les méthodes d'intégrale classique sont inutiles dans le cas où le nombre p des paramètres est grand. Les travaux récents proposent donc le calcul d'indice de sensibilité comme un problème d'échantillonnage.

La méthode FAST est une procédure qui a été développée pour l'analyse de sensibilité et l'incertitude de systèmes de réactions chimiques (Cukier et al. Schaibly et Shuler, McRae et al.). Cette procédure sert essentiellement à estimer l'indice de sensibilité de 1er ordre et l'indice de sensibilité total.

D'après Cukier et al., en utilisant la transformée de Fourier multidimensionnelle, la décomposition de la variance de l'expression peut s'écrire comme suite :

$$f(x_1, \dots, x_p) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{i,j}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,p}(x_1, \dots, x_p) \quad (88)$$

Le principe de la méthode FAST consiste à convertir les décompositions p-dimensionnelles en des décompositions unidimensionnelles le long d'une courbe parcourant l'espace $[0,1]^p$.

La méthode FAST utilise les transformations suivantes :

$$x_i(s) = G_i[\sin(\omega_i s + \phi_i)] \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \quad (89)$$

où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \mathbb{N}^{*p}$ est un ensemble de fréquences entières associées aux p entrés X_i , s est une variable scalaire, les $\phi_i \in [0,1]$ sont des phases aléatoires, utilisées pour introduire de la variabilité dans les tirages et G_i sont des fonctions à déterminer. Pour une distribution uniforme sur $[0,1]$, la transformation employée est $g(.) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(.)$, d'où :

$$x_i(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\omega_i s + \phi_i)) \quad (90)$$

(Cukier et al. [90, 92]; Schaibly and Shuler [91]; McRae et al. [93]) montrent que :

$$f_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) ds \quad (91)$$

Étant donnée la courbe des fréquences entières $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ est périodique de période 2π , alors :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) ds \quad (92)$$

La moyenne et la variance de Y peuvent être estimées comme suit :

$$\bar{Y} = f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) ds \quad (93)$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) ds - f_0^2 \quad (94)$$

L'évaluation de la variance V peut être effectuée en utilisant les coefficients de Fourier, d'après le théorème de Parseval :

$$V = 2 \sum_{v=1}^{\infty} (A_v^2 + B_v^2) \quad (95)$$

Notons que A_v et B_v sont les coefficients de Fourier définis par :

$$\begin{cases} A_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) \times \cos(vs) ds \\ B_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_p(s)) \times \sin(vs) ds \end{cases} \quad (96)$$

Les variances partielles sont définies comme sommes des carrés des coefficients de Fourier relatifs aux multiples de ω_i . L'indice de sensibilité est alors défini par le rapport :

$$S_{\omega_i} = \frac{V_{\omega_i}}{V} = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} (A_{p \times \omega_i}^2 + B_{p \times \omega_i}^2)}{\sum_{v=1}^{\infty} (A_v^2 + B_v^2)} \quad (97)$$

S_{ω_i} mesure une partie de l'effet principal d'entrée X_i sur la réponse du module ou la variance partielle.

4.2.2.1 Méthode FAST classique

L'objectif de cette méthode est de calculer l'indice de sensibilité de 1er ordre, pour un nombre d'harmoniques M à fixer, l'indice de sensibilité est estimé donc par :

$$S_i = \frac{\sum_{m=1}^M (A_{m \times \omega_i}^2 + B_{m \times \omega_i}^2)}{V} \quad (98)$$

Dans ce cas les fréquences ω_i doivent être choisies de façon que $\sum_{i=1}^p c_i \omega_i \neq 0$, pour tous entiers c_i telles que $\sum_{i=1}^p |c_i| \leq M + 1$. Plus M est grand, mieux l'estimation de l'indice de sensibilité reflète l'effet des variables, par contre plus M est grand, plus le nombre de simulations sera élevé si le nombre des paramètres est lui-même élevé. Cukier et al. [94] proposent un algorithme récursif permettant de trouver ces fréquences.

4.2.2.2 Méthode FAST étendue

La FAST étendue est développée par Saltelli et al. [89], et consiste à évaluer la part de variance due à toutes les variables sauf X_i comme la somme carrée des coefficients de Fourier A_v et B_v associé à toutes les $\omega_{\sim i}$ autre que ω_i et ses harmoniques. Dans cette méthode la valeur de ω_i est choisie beaucoup plus élevée que les fréquences des autres paramètres.

L'indice de sensibilité total TSI_i , est donné par :

$$TSI_i = 1 - \frac{\sum_{m=1}^M (A_{m \times \omega_{\sim i}}^2 + B_{m \times \omega_{\sim i}}^2)}{V} \quad (99)$$

4.3 Application : Structure sandwich composite

L'intérêt de cette section est d'intégrer l'analyse de sensibilité pour des structures sandwichs composites. La méthode numérique présentée dans le chapitre 2 a été utilisée pour le but d'estimer les propriétés mécaniques macroscopiques de l'âme de sandwich de modèle B. Ensuite les expressions de la densité modale, fréquence de transition et le module de cisaillement sont utilisées comme des modèles de sensibilité.

4.3.1 Densité modale

Dans cette partie, on analyse l'influence de plusieurs paramètres dans la densité modale de la structure sandwich composite à cœur en nid d'abeille. La bande fréquences considérée est de 0 à 4000 Hz. Il y a deux groupes de paramètres étudiés à savoir :

- Les paramètres géométriques de la cellule unitaire (VER) : longueur du côté incliné de la cellule (b_h), longueur latérale de la cellule (h_h), épaisseur de la paroi simple de la cellule (t_h), angle de la cellule (θ), l'épaisseur de l'âme (t_c) et l'épaisseur de chaque peau (t_f).
- Les paramètres mécaniques du sandwich : deux peaux identiques des modules de Young (E_{xp}, E_{yp}), densité (ρ_{pp}), module de cisaillement (G_{xyp}) et de coefficient de Poisson (ν_p). Pour l'âme de module de Young (E_c), densité (ρ_c) et coefficient de Poisson (ν_c).

Les valeurs nominales, ainsi que les limites supérieures et inférieures des paramètres variables sont résumées dans les Tableau 14 et Tableau 15.

Paramètre	Valeur nominale	Limite inférieure	Limite supérieure
b_h (mm)	2.7	2.5	3
h_h (mm)	2.7	2.5	3
t_h (μm)	76.2	72.39	80.01
θ (rad)	$\pi/6$	0.4712	0.5760
t_c (mm)	12	11.4	12.6
t_f (mm)	1	0.9	1.1

Tableau 14. Plages de variation des paramètres géométriques

Paramètre	Valeur nominale	Limite inférieure	Limite supérieure
E_{xp} (GPa)	133.6	126.92	142.28
E_{yp} (GPa)	7.7	6.16	9.24
ρ_{pp}	1550	1395	1705
G_{xyp} (GPa)	3.1	2.79	3.41
ν_p	0.29	0.26	0.32
E_c	5.5	4.95	6.05
ρ_c	1240	1116	1364
ν_c	0.33	0.29	0.36

Tableau 15. Plages de variation des paramètres mécaniques

Dans l'analyse, les distributions de probabilité (PDF) sont supposées uniformes, et les paramètres d'entrées sont supposés indépendants entre eux à l'échelle mésoscopique.

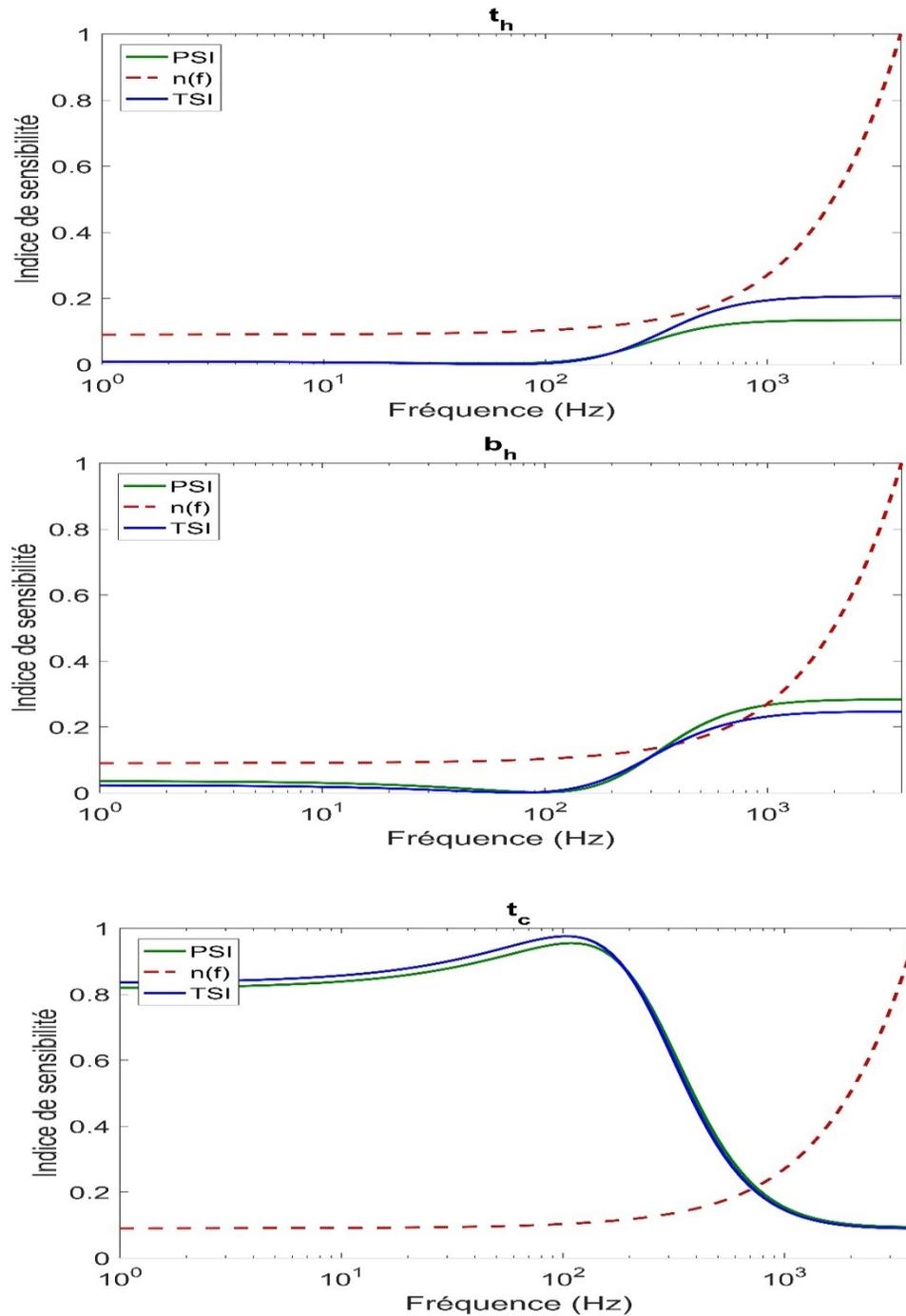


Figure 29. Indices de sensibilité (partiel : PSI et total : TSI) des paramètres géométriques (t_h , b_h et t_c) de sandwich Modèle-B

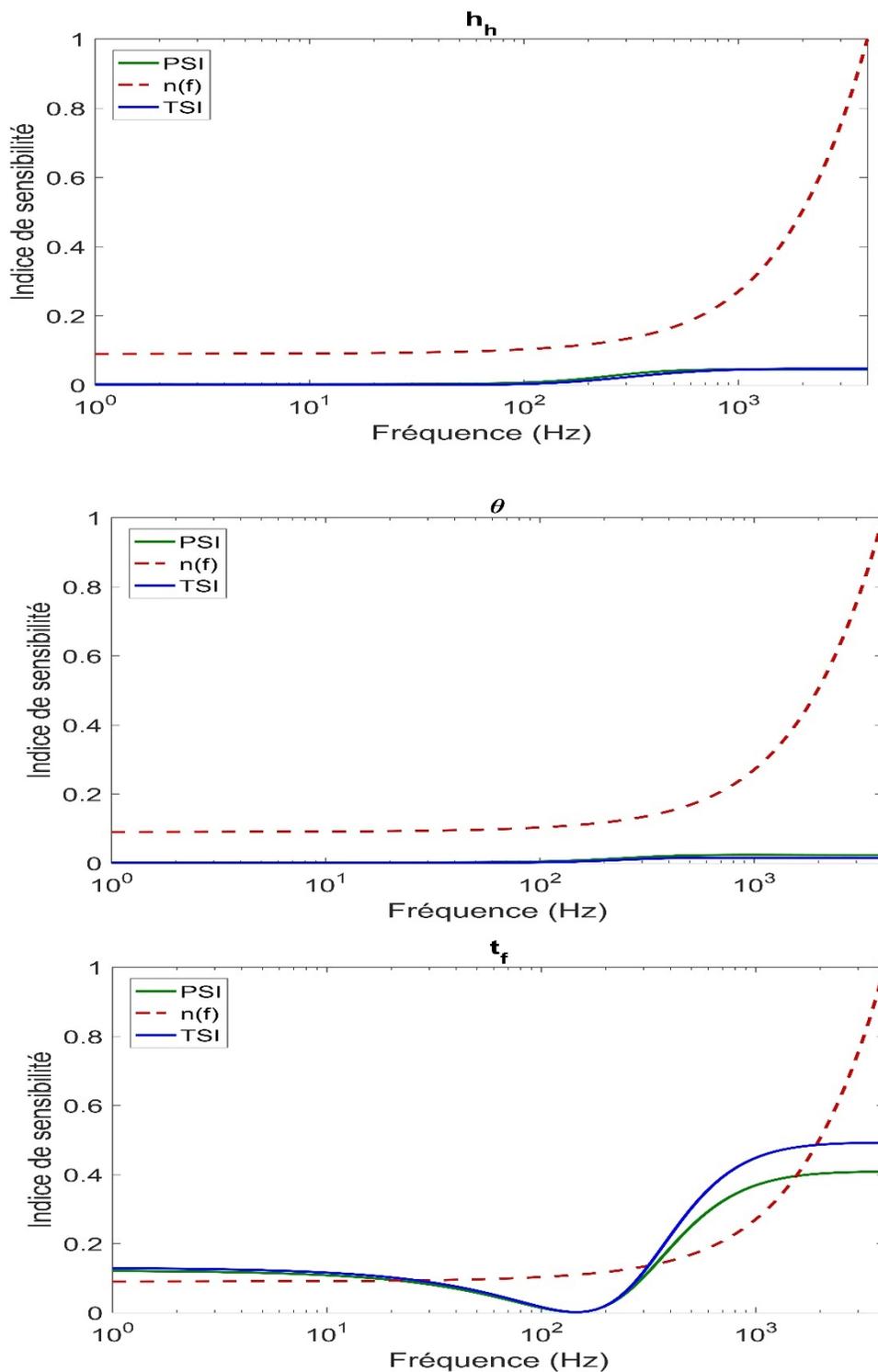


Figure 30. Indices de sensibilité (partiel : PSI et total : TSI) des paramètres géométriques (h_h , θ_h et t_f) de sandwich Modèle-B

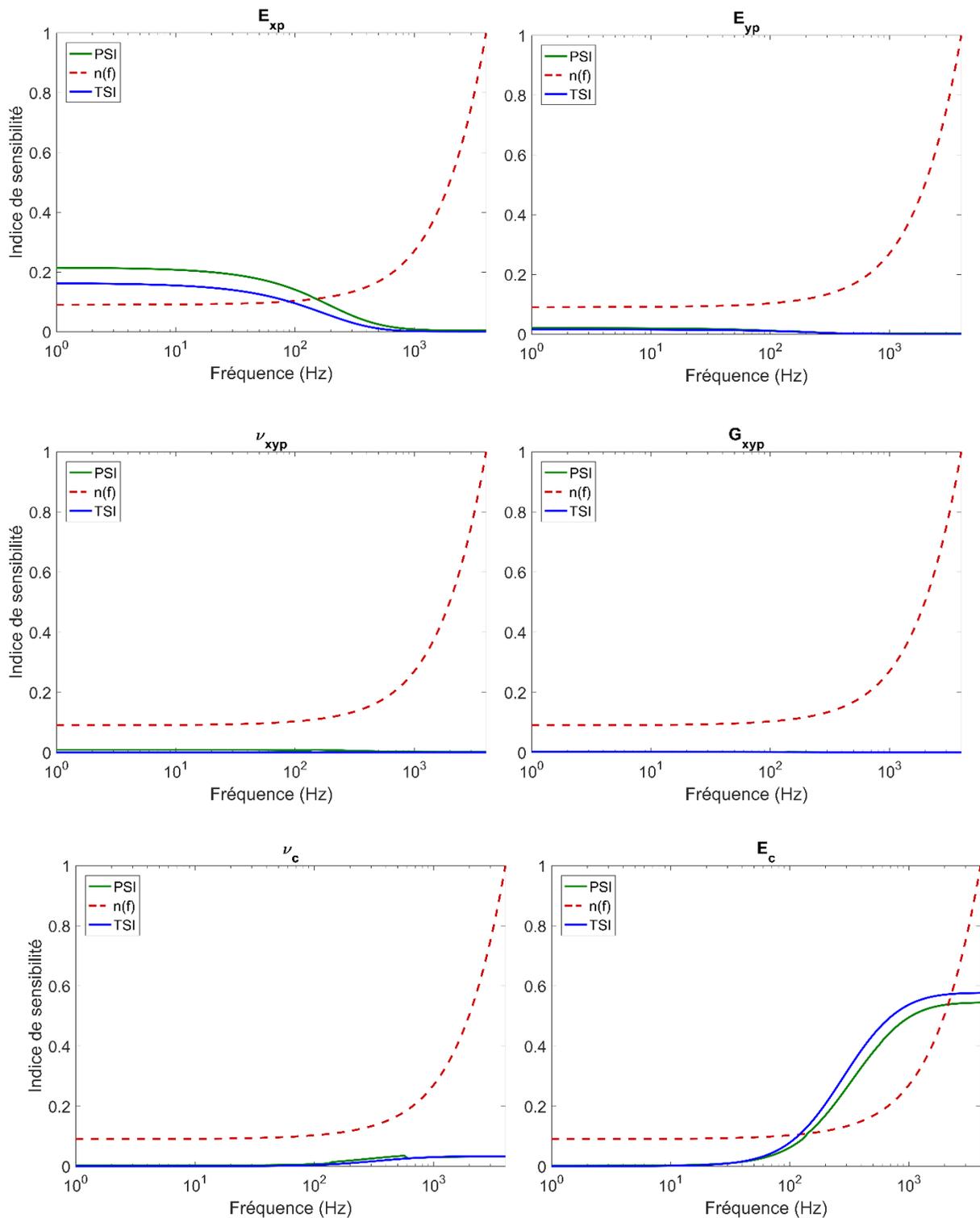


Figure 31. Indices de sensibilité (partiel : PSI et Total) des paramètres mécaniques (E_c et ρ_p) de sandwich Modèle-B

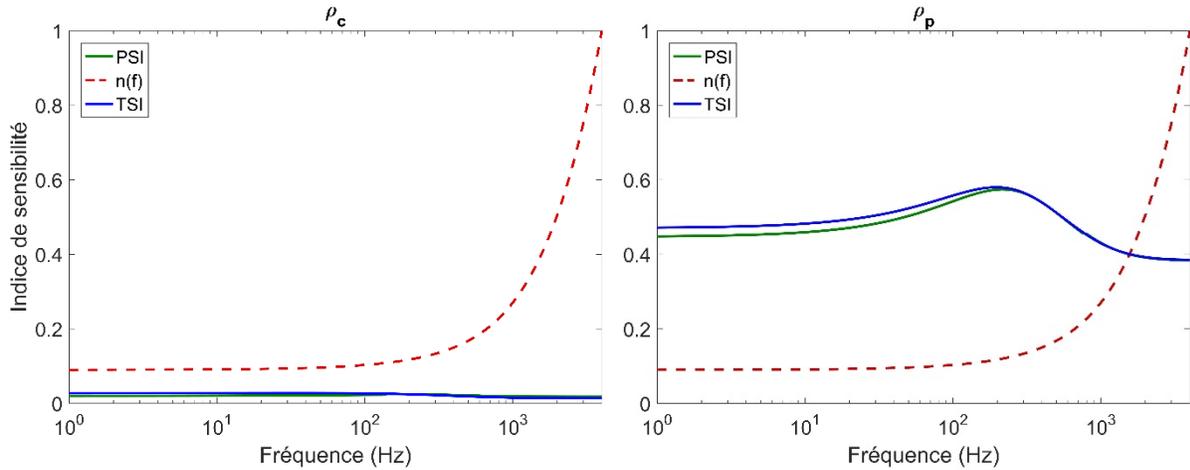


Figure 32. Indices de sensibilité (partiel : PSI et Total) des paramètres mécaniques (ρ_c et ρ_p) de sandwich Modèle-B

Les indices de sensibilité totaux et du premier ordre pour les six paramètres géométriques et les huit paramètres mécaniques sont présentés dans les figures (figure 29, figure 30, figure 31, figure 32). Ces figures montrent les évolutions des indices de sensibilités de premier ordre (PSI), lignes vertes, et des indices totaux (TSI), lignes bleues en fonction de la fréquence. La somme des indices du 1^{er} ordre est proche de 1. Ce qui montre (au sens statistique) l'existence peu d'interactions entre les paramètres dans ce modèle. Dans les figure 29 et figure 30, le paramètre dominant (85%) dans la plage de fréquence [0 à 500Hz] est l'épaisseur de l'âme, et cette sensibilité diminue brusquement arrivant environ à 10% dans la fréquence 500 Hz. Ainsi, dans cette plage fréquentielle l'épaisseur des peaux a un peu d'influence de (10%). Ceci peut s'expliquer par le comportement de flexion globale du panneau sandwich. Par contre, entre [500 à 4000 Hz], la longueur du côté incliné de la cellule (b_h), l'épaisseur de la paroi simple de la cellule (t_h) et l'épaisseur des peaux présentent une grande sensibilité dans cette bande de fréquences. Ce qui explique qu'en moyenne fréquence (~ 500 Hz) ce sont les paramètres de l'âme qui ont beaucoup

d'influence sur la densité modale. En revanche, en haute fréquence le paramètre dominant est l'épaisseur des peaux.

En ce qui concerne les paramètres mécaniques (figure 31 et figure 32), la sensibilité (PSI et TSI) au module de Young de l'âme (E_c) présente une augmentation progressive à partir de (~ 100 Hz) allant jusqu'à 60 % en moyenne et haute fréquence.

La masse volumique des peaux de sandwich (ρ_{pp}) présente une sensibilité (TSI et PSI) importante à partir de la basse fréquence et elle augmente jusqu'à atteindre la valeur de 60 % en moyenne fréquence (~ 300 Hz) pour ensuite inverser sa tendance où elle en atteignant une valeur de 40 % à la fréquence 2000 Hz.

Le module de Young des peaux (E_{xp}) présente une sensibilité remarquable (20 %) entre les basse et moyenne fréquences pour ensuite inverser sa tendance à partir de (~ 100 Hz).

Les cinq autres paramètres mécaniques de la structure sandwich ($\rho_c, \nu_c, \nu_p, E_{yp}$ et G_{xyp}) présentent une sensibilité moins prononcée qui, en général ne dépasse pas 5 %.

D'après les figures (Figure 29, Figure 30, Figure 31, Figure 32), on constate que les distributions de l'indice de sensibilité du premier ordre (PSI) des paramètres géométriques et mécaniques (courbes vertes) ressemblent beaucoup aux indices de sensibilités totaux (courbes bleues). La différence remarquable entre PSI et TSI est que l'intensité de PSI est moins élevé, ce qui montre en plus que les interactions entre les paramètres sont faibles.

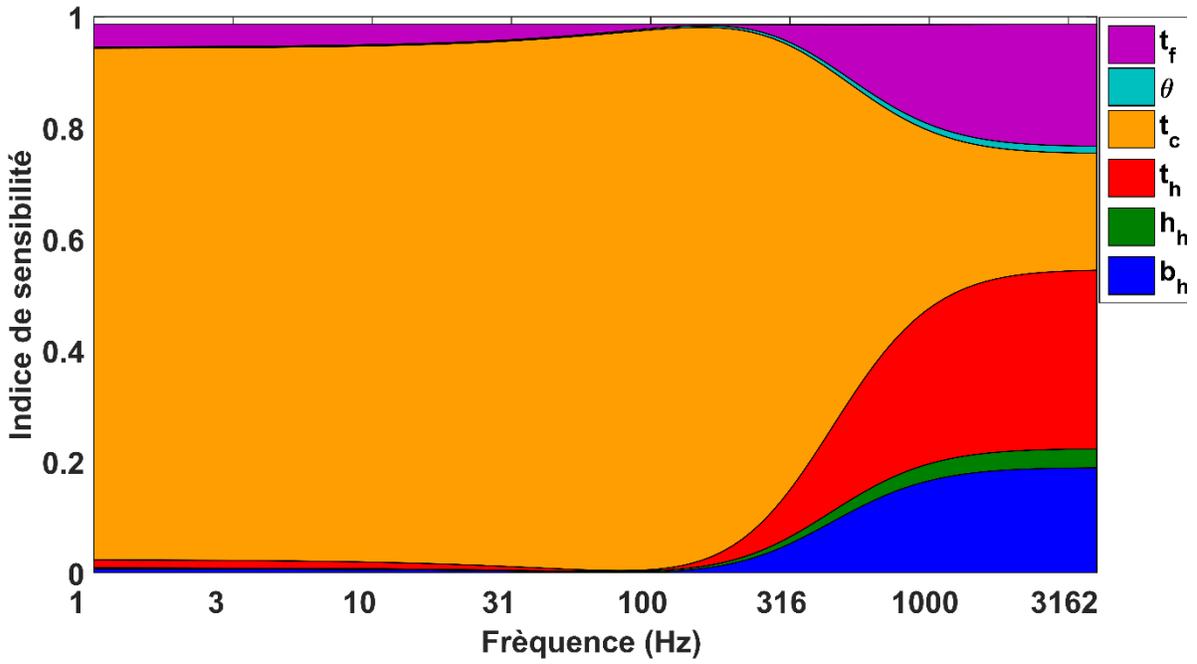


Figure 33. Indices de sensibilité des paramètres géométriques du sandwich

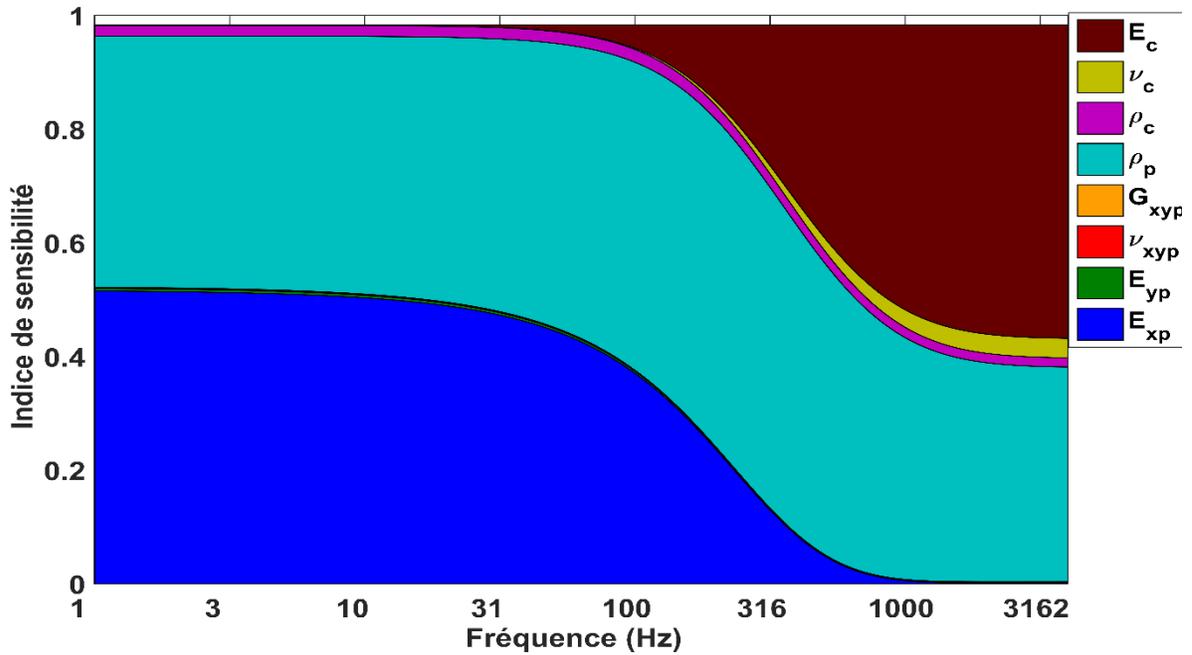


Figure 34. Indices de sensibilité des paramètres mécaniques du sandwich

Étant donné que la variation des indices de sensibilité (PSI) en fonction de la fréquence ressemble à celle des sensibilités totales (TSI), le classement des paramètres selon les deux indices dans toute la plage fréquentielle considérée, donne les mêmes classements. Par conséquent, le classement des paramètres selon leur importance est :

- Pour les paramètres géométriques, les paramètres les plus influents en basse fréquence sont l'épaisseur de l'âme (t_c) et l'épaisseur des peaux (t_f). Les autres paramètres n'ont aucune influence en basse fréquence. À partir de moyenne fréquence, les paramètres (t_h, b_h, t_c) sont les plus influents (Figure 33).
- Pour les paramètres mécaniques, la densité volumique des peaux (ρ_{pp}) et le module de Young dans la direction des fibres (E_{xp}) sont les plus importants en basse fréquence. Par contre, à partir de moyenne fréquence, le module de Young de l'âme est le plus influent. Ensuite, un peu d'importance pour l'épaisseur de l'âme t_c . L'influence des autres paramètres est négligeable devant les deux premiers paramètres les plus influents (Figure 34).

4.3.2 Fréquence de transition

On s'intéresse dans cette section à l'identification des paramètres les plus influents en utilisant l'expression de la fréquence de la transition développée dans le chapitre 3.

En gardant les mêmes plages de variation des paramètres géométriques et mécaniques détaillés dans la partie 4.3.1 (Tableau 14, Tableau 15), les distributions de probabilité (PDF) sont supposées uniformes, et les paramètres d'entrées sont supposés indépendants entre eux à l'échelle mésoscopique. La seule différence entre le modèle mathématique basé sur la densité modale et celui basé sur la fréquence de transition, est que le premier génère des résultats en fonction de la fréquence, tandis que la sortie du deuxième modèle est un scalaire.

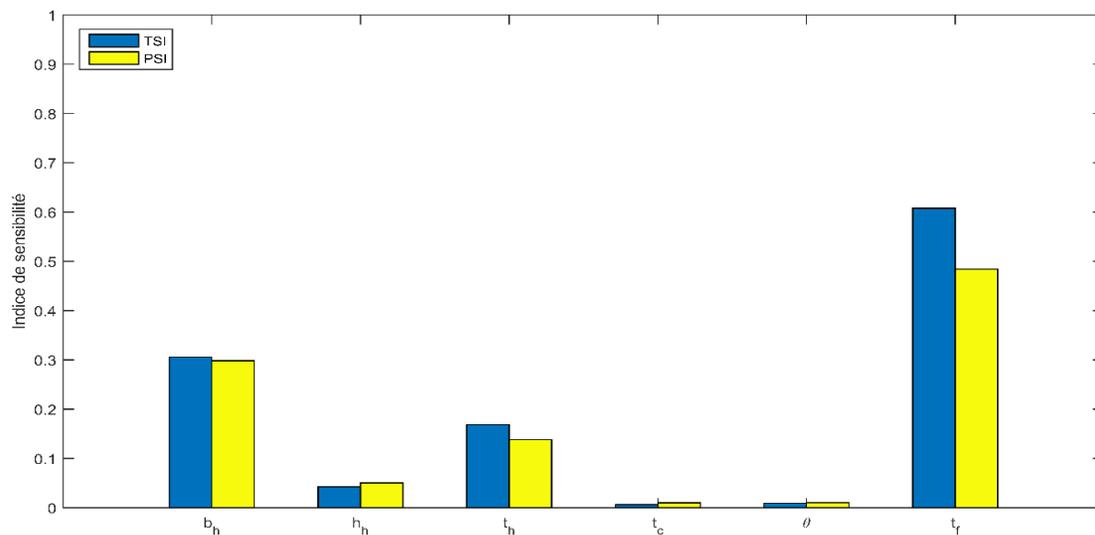


Figure 35. Indices de sensibilité (partiel : PSI et Total) des paramètres géométriques de sandwich Modèle-B

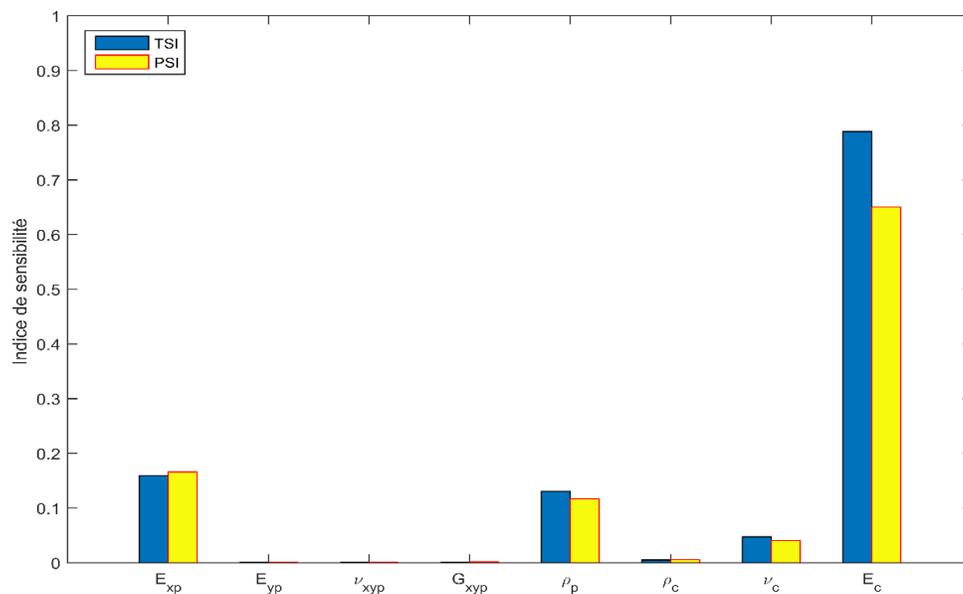


Figure 36. Indices de sensibilité (partiel : PSI et Total) des paramètres mécaniques de sandwich Modèle-B

Les figures (figure 35, figure 36) montrent les indices de sensibilité totaux (TSI) et de premier ordre, pour chacun des 6 paramètres géométriques ($t_h, b_h, h_h, t_c, \theta_h$ et t_c) et des 8 paramètres mécaniques ($E_{xp}, E_{yp}, \nu_{xyp}, G_{xyp}, \rho_{pp}, E_c, \rho_c, \nu_c$). Les colonnes jaunes représentent les indices de sensibilité de 1^{er} ordre (PSI), et les colonnes bleues représentent les indices de sensibilité totaux. En fonction des résultats obtenus, les paramètres mécaniques et géométriques sont classés selon leur influence sur la fréquence de transition :

- La figure 35 montre que les paramètres mécaniques les plus influents par ordre d'importance sont : l'épaisseur des peaux (t_f), la longueur de côté incliné de la cellule unitaire (b_h), l'épaisseur de parois de la cellule (t_h), avec moins d'influence de la longueur de côté horizontale de la cellule (h_h), et enfin les deux paramètres les moins influents sont l'angle (θ_h) et l'épaisseur de l'âme (t_c);
- Pour les paramètres mécaniques (Figure 36) par ordre d'importance, les trois paramètres les plus influents sont : module de Young de l'âme (E_c) [65% PSI et 80% TSI], module de Young des peaux (suivant la direction des fibres E_{xp}) [~18% PSI et TSI] et la masse volumique des peaux (ρ_{pp}) [~12% TSI et PSI]. Ensuite, avec un peu d'influence de coefficient de Poisson de l'âme (ν_c). Finalement les autres paramètres mécaniques présentent très peu d'importance ($\rho_c, \nu_c, \nu_p, E_{yp}$ et G_{xyp}).

4.4 Conclusion

Les résultats obtenus dans l'étude de sensibilité apportent des informations très utiles. En effet, l'analyse de sensibilité de la densité modale donne des informations sur le classement des paramètres les plus influents en basse et moyenne fréquence. Ce

classement n'est pas facile à effectuer dans la bande de transition des basses aux moyennes fréquences. Cette difficulté est fortement liée au changement du comportement vibratoire de la structure sandwich (passage de la flexion pure de la structure sandwich au cisaillement pur de l'âme, déjà abordé dans le chapitre 3). Pour résoudre ce problème une étude de sensibilité en utilisant l'expression analytique de fréquence de transition a été réalisée.

Chapitre 5. Optimisation du comportement vibroacoustique de structures sandwichs composites

L'objectif de cette partie consiste à trouver les paramètres géométriques optimisés de la structure sandwich à âme en nid d'abeille, minimisant la transparence acoustique. À cet égard, la densité modale est l'un des indicateurs en vibroacoustique que l'on peut optimiser en maximisant la fréquence de transition estimée dans le chapitre précédent. On utilise pour cela l'optimisation paramétrique en lien avec le procédé d'homogénéisation numérique présenté dans le deuxième chapitre.

5.1 INTRODUCTION.....	113
5.2 PROCÉDURE D'OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH COMPOSITE.....	114
5.2.1 Fonction objectif.....	115
5.2.2 Variables de conception	115
5.2.3 Contraintes	116
5.2.4 Formulation de problème d'optimisation	116
5.2.5 Démarche globale d'optimisation.....	118
5.3 OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH D'ÂME HEXAGONALE	120
5.3.1 Facteur de perte par transmission.....	123
5.4 OPTIMISATION DE PANNEAU SANDWICH À ÂME SINUSOÏDALE	126
5.5 CONCLUSION	131

5.1 Introduction

La plupart des problèmes d'optimisation du comportement vibroacoustique dans la littérature s'intéressent à améliorer certaines caractéristiques acoustiques d'une structure sandwich qui rayonne acoustiquement par une modification de la structure initiale. Cette modification se fait via des procédures d'optimisation capable de modifier automatiquement les variables de conception de la structure sandwich (forme, épaisseur et/ou propriétés matérielles) pour minimiser ou maximiser une fonction objectif. En général, l'optimisation des structures sandwiches implique un certain grand nombre d'évaluations de la fonction objectif qui représente l'indicateur vibroacoustique de la structure à optimiser. Le calcul de cette fonction objectif se fait dans la plupart des cas via un modèle numérique. En fonction du nombre de variables de conception, la nature de problème d'optimisation, de la méthode d'optimisation et d'autres caractéristiques, ce calcul peut être répété entre 10 et 10^6 fois.

Depuis quelque temps, des études approfondies sont consacrées à la conception optimale des panneaux sandwichs d'âme en nid d'abeille. Plusieurs méthodologies sont disponibles dans la littérature [95-97] afin de maximiser la perte de transmission acoustique de ces panneaux. Par exemple, Lang et Dym [95] ont optimisé la conception d'un panneau sandwich en maximisant le TL dans la gamme fréquentielle (1000 -4000 Hz). Les variables de conception utilisée dans cette étude sont le module de Young, la densité massique et les épaisseurs de l'âme et les peaux. Thamburaj et.al [96] décrit un procédé pour optimiser la transmission du son à travers un panneau sandwich, en contraignant la rigidité, le poids et l'épaisseur du panneau. L'âme et l'épaisseur du sandwich sont optimisées séparément. Les résultats montrent que le TL est meilleur avec une peau plus mince du côté incident et une peau épaisse du côté transmis. En outre, le TL est encore plus élevé lors de l'utilisation d'âme anisotrope par rapport aux âmes isotropes. De la même manière Franco et al. [97] décrivent une procédure pour obtenir des caractéristiques améliorées du

TL en considérant différentes configurations, à savoir âme aléatoire, âme homogène et âme treillis. Wennhage [98, 99] minimise le poids des panneaux sandwich, en tenant compte des contraintes acoustiques. Denli et al. [100] ont mené des études d'optimisation pour maximiser le TL de panneaux sandwichs. Les déplacements des nœuds de la poutre ont été pris comme variables de conception. Ruzzene [101] a examiné les effets de l'utilisation des structures en nid-d'abeilles dans les panneaux sandwichs sur les caractéristiques de TL. La formulation spectrale a été utilisée pour modéliser la réponse acoustique et structurale de la plaque. Les résultats obtenus montrent que l'utilisation d'une structure d'âme en nid-d'abeilles donne de meilleures caractéristiques de TL par rapport à la forme treillis. De plus Ruzzene a testé quatre configurations différentes de cellules unitaires hexagonales en nid-d'abeilles et a montré que les nids d'abeille à angles négatifs (re-ntrants) ont de meilleures caractéristiques du TL par rapport à celles des angles positifs. Dans la même voie, Griese [102] a étudié l'effet du changement de l'angle de nid d'abeille de forme hexagonale sur le TL de la plaque. Avec un nombre fixe de cellules unitaires, Griese fait varier l'angle entre -45° et $+45^\circ$. Les résultats obtenus montrent également une meilleure performance pour les structures à angles négatifs.

5.2 Procédure d'optimisation de panneau sandwich composite

L'objectif de cette étude est de choisir les paramètres pertinents à utiliser dans le problème d'optimisation. Comme illustré dans la section précédente, la densité modale dépend de la géométrie et les propriétés physiques des peaux et l'âme viscoélastique. Avant d'entamer le problème d'optimisation proprement dit, il est nécessaire de définir la fonction objectif, les contraintes et les variables de conception dans un problème d'optimisation de forme.

5.2.1 Fonction objectif

L'objectif de cette étude est de minimiser la densité modale dans la structure sandwich, comme montre dans le troisième chapitre, la densité modale augmente en fonction du cisaillement de l'âme. Par la suite, on a montré que cet effet se caractérise principalement par une fréquence de transition qui représente le point de passage d'un comportement de flexion globale du panneau sandwich à un comportement en cisaillement de l'âme. Cette fréquence de transition s'écrit en fonction des propriétés matérielles et géométriques de panneau sandwich. La maximisation de cette fréquence, ce qui correspond à retarder l'apparition de l'effet de cisaillement, permet alors de rendre la densité modale optimale. La fréquence de transition est donc choisie comme une fonction objectif à optimiser.

5.2.2 Variables de conception

À partir de la fonction objectif présentée ci-dessus, il est clair que la fréquence de transition dépend de la géométrie et des propriétés physiques des peaux et de l'âme du panneau sandwich. Le Tableau 16 illustre les variables de conception avec ces limites supérieures et inférieures choisies dans le cas de nid d'abeille (Figure 13).

Âme hexagonale	
h_{hmin}	$h_h < h_{hmax}$
b_{hmin}	$b_h < b_{hmax}$
θ_{hmin}	$\theta_h < \theta_{hmax}$
t_{hmin}	$t_h < t_{max}$
t_{cmin}	$t_c < t_{cmax}$

Tableau 16. Définition de variables de conception de nid d'abeille

$[h_h \ b_h \ \theta_h \ t_h \ t_c]$ est le vecteur de variables de conception du panneau sandwich (les définitions de ces variables sont présentées dans le Tableau 2).

5.2.3 Contraintes

Pour concevoir un panneau sandwich composite optimale en termes de transparence acoustique, il est primordial de garder ou bien d'augmenter les performances initiales du panneau sandwich à savoir :

- Les dimensions du panneau sandwich restent constantes ;
- La masse globale du panneau sandwich doit être inférieure ou égale à la masse initiale ;
- Les performances mécaniques, notamment la raideur en flexion du panneau sandwich, ne doivent pas être dégradées.

5.2.4 Formulation de problème d'optimisation

La présente étude porte sur l'optimisation mono-objectif de la cellule unitaire en nid d'abeille, et l'objectif est d'optimiser la densité modale en maximisant la fréquence de transition. Après avoir identifié les variables d'optimisation, le problème d'optimisation peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser : } F(x) = -f_t(x) \\
 & \text{Sous contraintes } C_1 = \chi_\rho - \chi_\rho^* = 0 \\
 & C_2 = \Lambda - \Lambda^* = 0 \\
 & g = D - D^* \geq 0 \\
 & x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad k=1\dots, n
 \end{aligned} \tag{100}$$

Avec $F(x)$ est la fonction objectif, C_1 et C_2 sont respectivement les contraintes d'égalité sur la densité et la taille du VER. g est la contrainte d'inégalité sur la rigidité de flexion

de panneau sandwich. Tandis que x_k est vecteur de variable de conception. x_k^l et x_k^u sont respectivement les bornes supérieure et inférieure des variables de conception. $\chi_\rho = \rho_h/\rho_s$ est le rapport de la densité équivalente ρ_h de VER à la densité ρ_s de la matière solide constituée le VER. Λ est la surface de la cellule élémentaire et D est la rigidité en flexion du panneau sandwich. L'exposant* désigne la valeur limite prescrite.

Dans ce problème, on a deux contraintes d'égalité et une contrainte d'inégalité. Pour ramener le problème de minimisation sous contraintes de F (100) à un problème sans contrainte, le Lagrangien associé au problème (100) est obtenu comme suit :

$$L(x, \lambda, \mu) = F(x) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i C_i - \mu g - \lambda^L(x - x^L) + \lambda^U(x - x^U) - \mu^L(x - x^L) + \mu^U(x - x^U) \quad (101)$$

Les paramètres λ et μ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Les conditions de Kuhn-Tucker [103] sont des conditions nécessaires qui sont réalisées à l'optimum du problème. Elles s'écrivent de la manière suivante :

La condition d'optimalité est alors donnée par la stationnarité de la fonction objectif F par rapport aux variables x :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial C_i}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} - \lambda^L + \lambda^U - \mu^L + \mu^U = 0 \quad (102)$$

et les conditions complémentaires sont :

$$\lambda_i C_i = 0; \mu g = 0;$$

$$\lambda^L(x - x^L) = 0 \text{ et } \lambda^U(x - x^U) = 0;$$

$$\mu^L(x - x^L) = 0 \text{ et } \mu^U(x - x^U) = 0;$$

avec $\lambda_i \geq 0$, $\lambda^L \geq 0$, $\lambda^U \geq 0$, $\mu^L \geq 0$ et $\mu^U \geq 0$.

Le problème d'optimisation indiqué ci-dessus consiste à minimiser la fréquence de transition en fonction de plusieurs variables. Les contraintes associées à la fonction objectif sont des contraintes non linéaires sur la masse, la rigidité et la taille de panneau sandwich. Pour résoudre ce problème on utilise la fonction 'fmincon' « MATLAB optimization toolbox » [104]. Elle est basée sur la méthode programmation quadratique séquentielle (SQP), qui est une approche appropriée lorsque l'évaluation des fonctions définissant le problème d'optimisation non linéaire et leurs dérivées prend du temps. Chaque itération de l'algorithme de SQP nécessite la résolution d'un programme quadratique (QP) [103].

5.2.5 Démarche globale d'optimisation

Le schéma (Figure 37) englobe les étapes générales à suivre pour optimiser la densité modale à savoir : La première étape consiste à identifier les paramètres géométriques et matériels du panneau sandwich composite de référence. La deuxième étape a pour objectif de calculer les propriétés mécaniques équivalentes à l'aide de la méthode d'homogénéisation numérique (Figure 16). La troisième étape sert à identifier la fonction objectif (Fréquence de transition) par la résolution du problème vibroacoustique. Pour la quatrième étape, on évalue la fonction objectif et les contraintes en utilisant la méthode d'optimisation pour trouver les paramètres optimaux du panneau sandwich. La cinquième étape est consacrée à contrôler la validité des contraintes du problème. Notons que les valeurs des contraintes sont calculées à partir du modèle de référence. Si les conditions d'optimalité sont satisfaites, on passe à la sixième étape pour chercher les orientations des fibres de peaux qui minimise encore plus la densité modale tout en gardant la masse et la taille de panneau sandwich constante et la rigidité en flexion supérieure ou égale à la rigidité de panneau de référence.

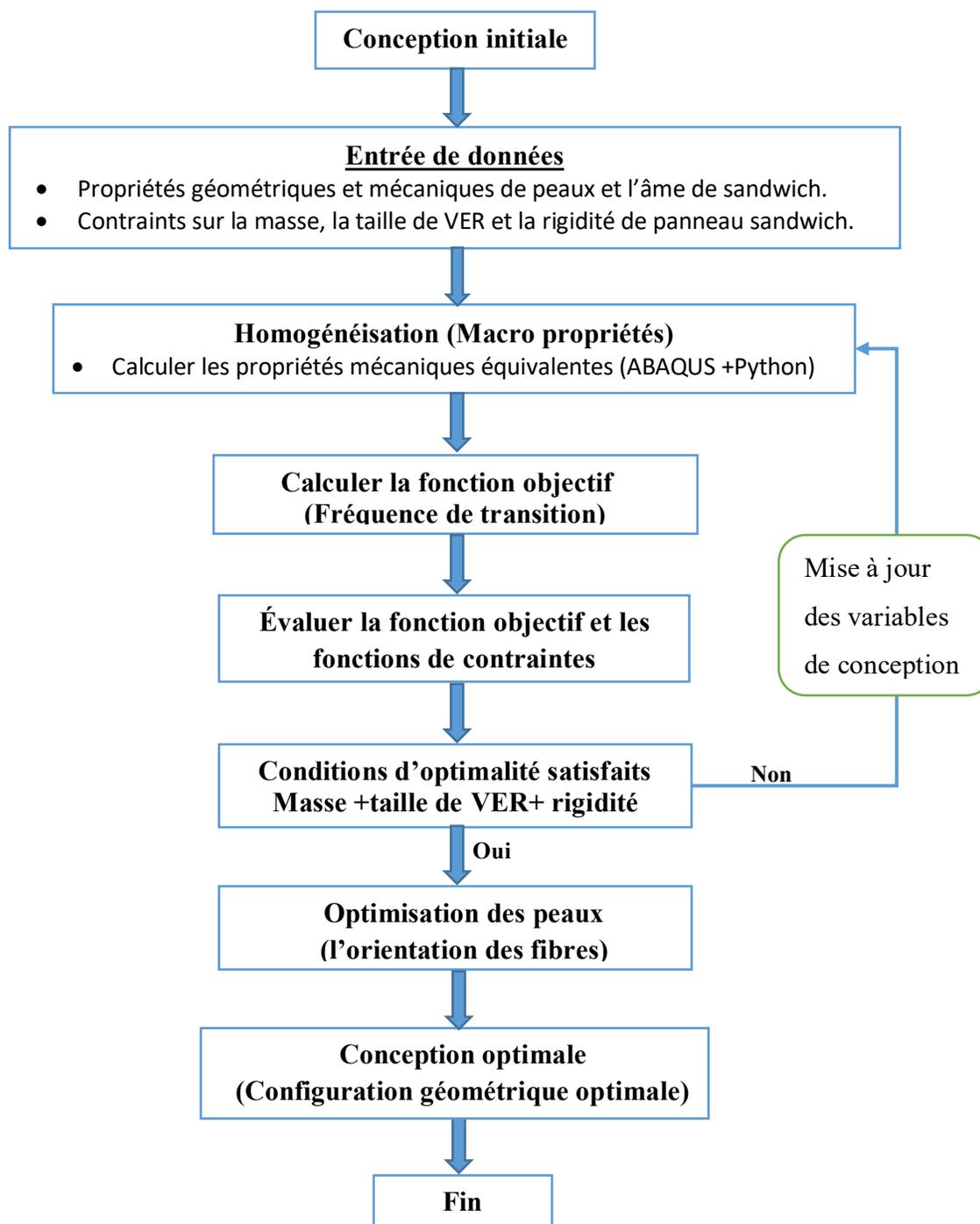


Figure 37. Procédure d'optimisation du panneau sandwich composite

5.3 Optimisation de panneau sandwich d'âme hexagonale

La cellule unitaire de la structure sandwich d'âme en nid d'abeille de forme hexagonale est représentée dans la figure 13. Dans ce cas la formulation de problème est :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimiser } F(x) = - \frac{S X \sqrt{H_r L_r} / (4\pi^4 \sqrt{D_{xx} D_{yy}})}{\sqrt{2\rho_f t_f H_r L_r + \rho_c \left(H_r L_r - b_h \cos \theta \left(h_h - t_h \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + b_h \sin \theta \right) \right)}} \\
 \text{Sous les contraintes} \quad C_1 = \frac{t_h \left(b_h \cos \theta_h \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_h}{2} \right) + H_r \right)}{H_r L_r \chi_\rho^*} - 1 \\
 \quad C_2 = \frac{4H_r L_r t_c}{\Lambda^*} - 1 \\
 \quad g = D_m - D_m^* \geq 0 \\
 \quad x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad x_k = \{a_r, b_r, h_r, t_r, t_c\}
 \end{array} \right. \quad (103)$$

Avec $H_r = h_h + b_h \sin \theta_h$ et $L_r = t_h + b_h \cos \theta_h$

D_m^* , χ_ρ^* , Λ^* sont respectivement rigidité en flexion de sandwich, densité et la taille du VER de nid d'abeille de référence.

L'expression de la rigidité en flexion d'un panneau orthotrope pour une direction d'angle ϕ est donnée par :

$$D(\phi) = D_{11} \cos^4 \phi + 2D_{12} \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi \quad (104)$$

En utilisant l'expression (104) la moyenne de la rigidité en flexion D_m de panneau sandwich composite d'âme en nid d'abeille peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{11} \cos^4 \phi + 2D_{12} \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi \, d\phi \quad (105)$$

Les propriétés matérielles et les configurations du panneau sandwich en nid d'abeille de référence adoptée dans cette étude d'optimisation sont résumées dans le Tableau 13. L'âme a une forme hexagonale fabriquée en matière Nomex. Les peaux identiques sont faites en polymère à renfort fibre de carbone (PRFC).

	Âme de nid d'abeille (Matériau aluminium)	Peaux de sandwich (PRFC)
Propriétés matérielles	$\rho = 2680 \text{ kg/m}^3$ $E = 70.3 \text{ GPa}$ $\nu = 0.33$	$E_x = 300 \text{ GPa}; E_y = 6.07 \text{ GPa}$ $\nu_{xy} = 0.346 ; G_{xy} = 5 \text{ GPa}$ $\rho = 1650 \text{ kg/m}^3$
Propriétés géométriques	$b_h = h_h = 5.5 \text{ mm}; t_h = 0.018 \text{ mm}; \theta = \frac{\pi}{6}$ $t_c = 18 \text{ mm}; t_f = 0.2 \text{ mm}; 2\text{-layers (0/30)}$ $l_x = 2.15 \text{ m}; l_y = 1.8 \text{ m}^2$	

Tableau 17. Panneau sandwich composite de référence

Les propriétés mécaniques équivalentes de panneau sandwich composite sont résumées dans le Tableau 18:

Propriétés homogénéisées de l'âme	Rigidités en flexion du panneau sandwich
$E_1^h = 5.7525 \cdot 10^3 \text{ Pa}; E_2^h = 5.7817 \cdot 10^3 \text{ Pa}$	$D_{11} = 7879.8 \text{ Nm} ; D_{22} = 586.69 \text{ Nm}$
$E_2^h = 353.56 \text{ MPa};$	$D_{12} = 995.88; D_{66} = 1052.9 \text{ Nm}$
$G_{13}^h = 49.907 \text{ MPa}; G_{13}^h = 83.262 \text{ MPa};$	

Tableau 18. Propriétés équivalentes de panneau sandwich composite de référence

Les paramètres de conception initiaux du panneau sandwich sont présentés dans le Tableau 17. La contrainte initiale sur la densité est $\chi_\rho^* = 0.005$. La contrainte initiale sur la taille de VER est $\Lambda^* = 2836.3 \text{ mm}^3$. La contrainte sur la rigidité moyenne en flexion

est $D_m = 3423.9 Nm$. La valeur de la fréquence de transition (fonction objectif) calculée en utilisant les paramètres géométriques initiaux est $f_t^i = 1847.7 Hz$ et le coefficient d'orthotropie est $\alpha = 1.44$. La densité surfacique de panneau sandwich est $\rho_p = 0.9026 kg/m^2$.

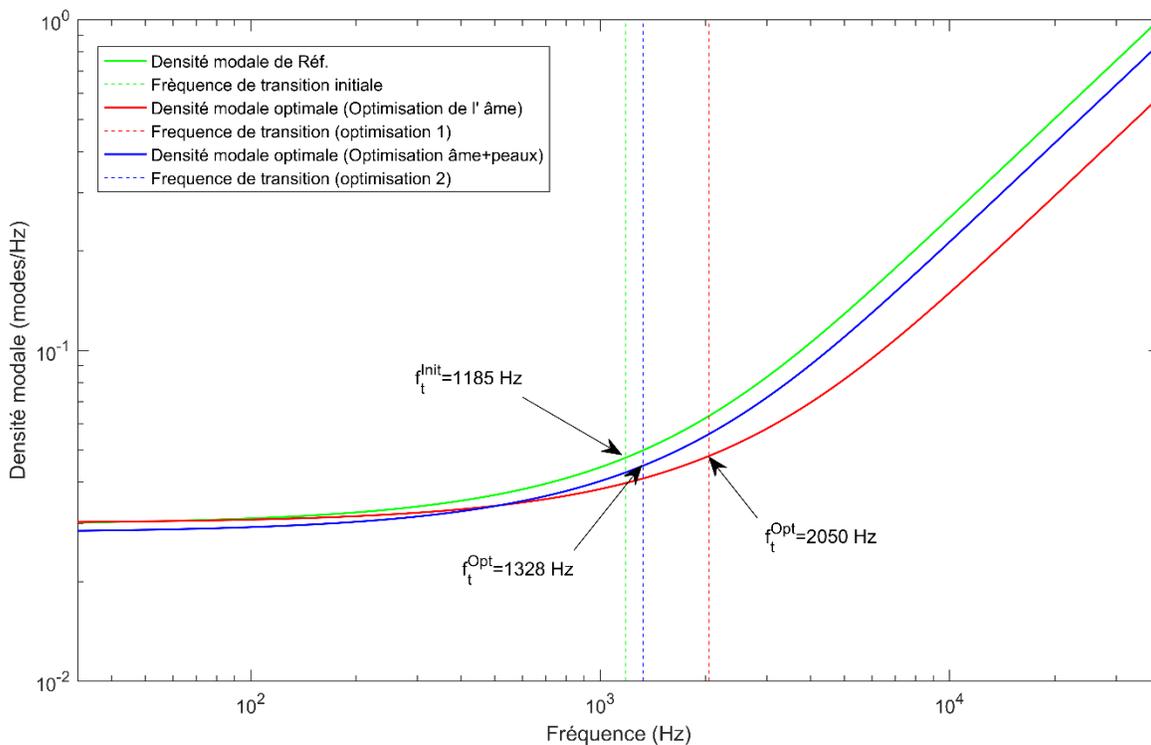


Figure 38. Comparaison entre la densité modale optimale et la densité modale du modèle de référence

En suivant la méthode d'optimisation présentée dans la figure 37, une comparaison de la densité optimale et non optimale est représentée sur la figure 38. L'étude d'optimisation se fait sous trois contraintes ; la masse et la taille de VER du panneau sandwich en nid d'abeille qui devant rester constantes après l'étude d'optimisation, la troisième contrainte étant la rigidité en flexion qui doit être supérieure ou égale à la rigidité de référence. La courbe de densité modale rouge illustrée dans la figure 38 représente la densité modale optimale obtenue en utilisant la configuration des variables optimales uniquement de

l'âme (voir le Tableau 19.). Dans ce cas la fréquence de transition est augmentée de 143 Hz par rapport à la fréquence de transition initiale. La courbe rouge représente la densité modale la plus optimale. Cette dernière est obtenue en modifiant également les orientations des fibres des deux peaux, alors la fréquence de transition est augmentée de 865 Hz par rapport à la valeur initiale.

	Initial	Final
b_h	5.5 mm	2.84 mm
h_h	5.5 mm	1.00 mm
t_h	0.018 mm	0.010 mm
θ_h	30°	26°
t_c	18 mm	20 mm

Tableau 19. Configuration initiale et optimale de panneau sandwich composite

5.3.1 Facteur de perte par transmission

Cette partie est consacrée à l'étude de l'influence des paramètres optimaux obtenue par l'optimisation de la densité modale sur le facteur de perte par transmission (TL).

On considère le panneau sandwich composite de référence (Figure 39) avec un champ acoustique incident. Le coefficient de transmission acoustique est défini comme le rapport de l'intensité du son émis à l'intensité du son incident. Soient I_i l'intensité de l'onde sonore incidente et I_t l'intensité de l'onde sonore transmise, le coefficient de transmission acoustique est défini par :

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} \quad (106)$$

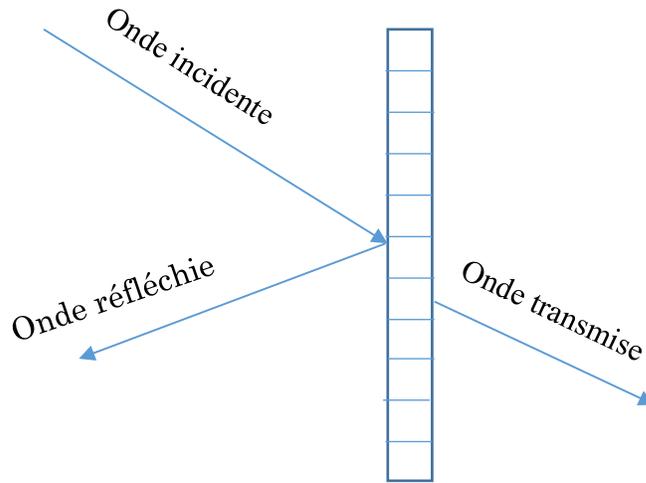


Figure 39. Transmission acoustique

En conséquence, le facteur de perte par transmission (TL) est défini par :

$$TL = 10 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (107)$$

D'après Renji [105], l'expression du coefficient de transmission acoustique en tenant compte l'effet de cisaillement, s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = \left(1 + \eta \beta \cos \theta \sin^4 \theta \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \right)^2 + \beta^2 \cos^2 \theta \left(1 - \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \sin^4 \theta \left[1 - \frac{c^2 \rho}{N \sin^4 \theta} \right] \right)^2 \quad (108)$$

avec $f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{D}}$ la fréquence critique sans considérer l'effet de cisaillement et $\beta = \rho \omega / (2\rho_a c)$ (pour plus de détail, voir la référence [105])

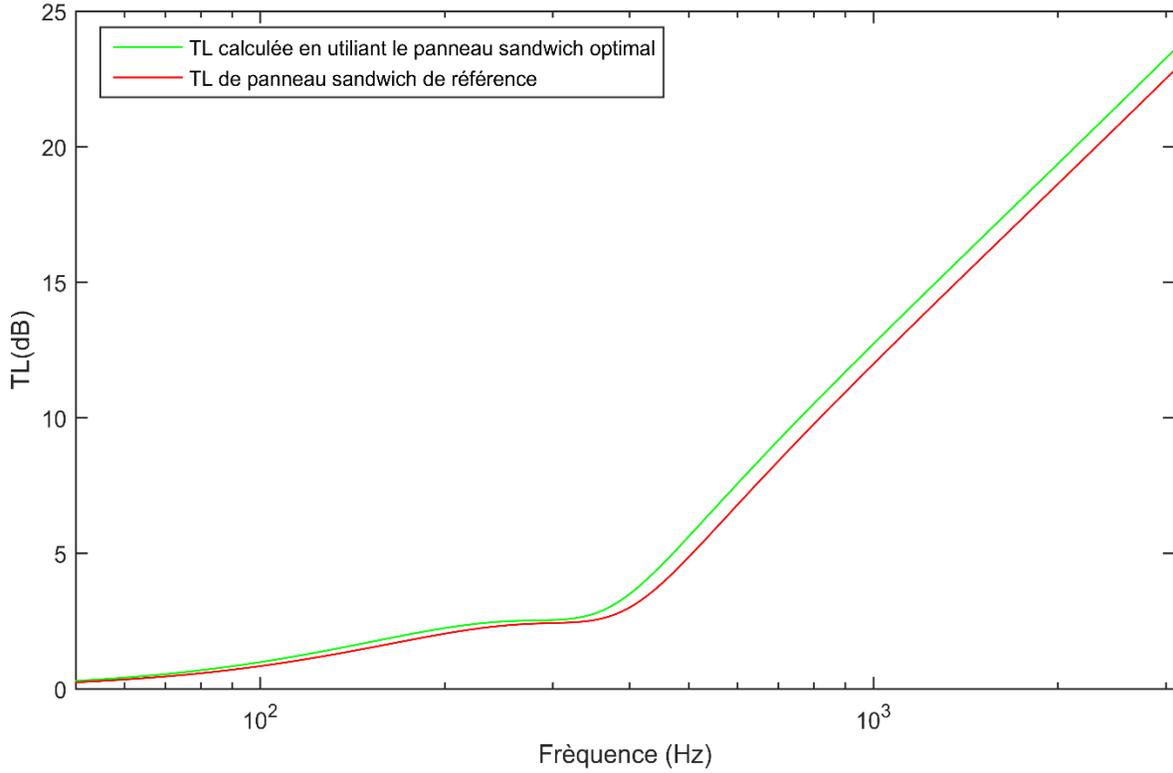


Figure 40. Facteur de perte par transmission TL (dB) du panneau sandwich de référence et optimal

La figure 40 montre le TL (dB) optimal (la courbe verte) calculé en utilisant les paramètres géométriques optimaux, et le TL de la configuration initiale de panneau sandwich composite (Tableau 19). On peut conclure que, le fait de minimiser la densité modale cela influence d'une manière positive sur l'évolution de la transmission acoustique.

5.4 Optimisation de panneau sandwich à âme sinusoïdale

Dans le but d'améliorer l'atténuation vibroacoustique des panneaux sandwichs, on propose dans cette partie deux concepts d'âme de nid d'abeille : une âme sinusoïdale (Figure 41) et une âme sinusoïdale renforcée (Figure 42). Les vecteurs $[a_s \ b_s \ h_s \ t_s]$ et $[a_r \ b_r \ h_r \ t_1 \ t_2]$ sont respectivement les vecteurs des variables de conception de la forme sinusoïdale et sinusoïdale renforcée. L'objectif de l'optimisation est donc de chercher la forme optimale de l'âme sinusoïdale et sinusoïdale renforcée, tout en satisfaisant à des contraintes sur la taille, la masse et la rigidité du panneau sandwich.

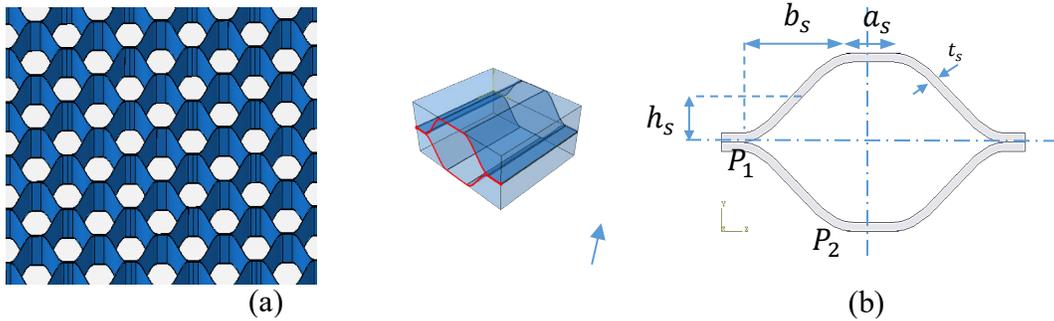


Figure 41. Âme sinusoïdale

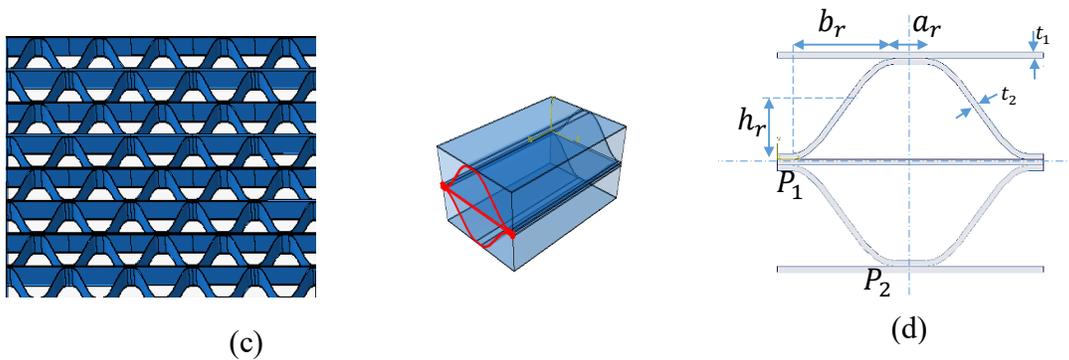


Figure 42. Âme sinusoïdale renforcée

Les figures (b) et (d) sont respectivement le volume élémentaire représentatif de l'âme sinusoidale et de l'âme sinusoidale renforcée.

La courbe $P_1 P_2$ représentée sur les figures (b) et (d) a une forme sinusoidale qui peut être définie par la fonction suivante :

$$f(x) = h_i \left(1 - \cos \left(\frac{\pi x}{b_i} \right) \right) \quad (109)$$

où le symbole $i = \{s, r\}$; s et r sont respectivement les indices des paramètres géométriques de l'âme sinusoidale et l'âme sinusoidale renforcée.

La longueur de la courbe ($P_1 P_2$) peut-être écrit :

$$\Gamma = \int_0^\pi \left(\left(\frac{a}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{b \sin \theta}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad (110)$$

Les propriétés matérielles de l'âme sinusoidale et sinusoidale renforcée sont les mêmes propriétés que modèle de référence (Tableau 18), tandis que les propriétés géométriques sont estimées à l'aide de la méthode d'optimisation présentée dans la figure 37. Le panneau sandwich composite à âme hexagonale est considéré dans cette étude comme le modèle de référence.

Le problème d'optimisation du volume élémentaire représentatif du panneau sandwich d'âme sinusoidale est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimiser} \quad F_s(x) = - \frac{S X \sqrt{L_s H_s}}{4\pi \sqrt[4]{D_{xx} D_{yy}} \sqrt{2\rho_f t_f L_s H_s + \rho_c t_c t_s (a_s + \Gamma)}} \\
 \text{Sous contraintes} \quad C_1 = \frac{t_s (a_s + \Gamma)}{L_s H_s \chi_\rho^*} - 1 \\
 \quad \quad \quad \quad C_2 = \frac{4 L_s H_s}{\Lambda^*} - 1 \\
 \quad \quad \quad \quad g = \frac{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{D^*} - 1 \geq 0 \\
 \quad \quad \quad \quad x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad x_k = \{a_s, b_s, h_s, t_s, t_c\}
 \end{array} \right. \quad (111)$$

où $L_s = a_s + b_s$ et $H_s = 2h_s + t_s$

Le problème d'optimisation de la forme sinusoidale renforcée est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Minimiser} \quad F(x) = - \frac{1}{4\pi \sqrt[4]{D_{xx} D_{yy}} \sqrt{2L_r H_r \rho_f t_f + \rho_c t_c (2L_r t_1 + (\Gamma + a_r) t_2)}} S X \sqrt{L_r H_r} \\
 \text{Sous contraintes} \quad C_1 = \frac{2L_r t_1 + (a_r + \Gamma) t_2}{L_r H_r \chi_\rho^*} - 1 \\
 \quad \quad \quad \quad C_2 = \frac{4 L_r H_r}{\Lambda^*} - 1 \\
 \quad \quad \quad \quad g = \frac{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{D^*} - 1 \geq 0 \\
 \quad \quad \quad \quad x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad x_k = \{a_r, b_r, h_r, t_r, t_c\}
 \end{array} \right. \quad (112)$$

où $H_r = h_h + b_h \sin \theta_h$ et $L_r = t_h + b_h \cos \theta_h$

Afin de commencer la méthode d'homogénéisation numérique, les propriétés géométriques initiales sont associées aux âmes sinusoidale et sinusoidale renforcée. De plus les variables de conception sont supposées continues.

Après l'application de la procédure d'optimisation (Figure 37), la fréquence de transition optimale correspondante à chaque configuration est présentée dans le Tableau 20.

Configuration optimale	Âme hexagonale	Âme sinusoidale	Âme sinusoidale renforcée
Fréquence de transition en Hz	332	417.26	419.29

Tableau 20. Fréquence de transition optimale

Les Tableau 21, Tableau 22 et Tableau 23 présentent les variables de conception optimale de configuration hexagonale, sinusoidale et sinusoidale renforcée, respectivement. D'autre part, l'âme sinusoidale renforcée a la plus grande valeur de fréquence de transition. De plus, la comparaison des propriétés élastiques équivalentes de chaque configuration montre que le module de cisaillement de la configuration sinusoidale renforcée est le plus grand par rapport à ceux des autres configurations.

	Initiale	Finale
b_h	2.75 mm	2.22 mm
h_h	2.75 mm	3.57 mm
t_h	0.0762 mm	0.0914 mm
θ_h	30°	26°
t_c	12 mm	12 m

Tableau 21. Configuration initiale et optimale d'âme en nid d'abeille hexagonale

a_s	2.2748 mm
b_s	2.2522 mm
h_s	2.1642 mm
t_s	0.1499 mm

Tableau 22. Configuration optimale d'âme sinusoidale

a_r	1.53 mm
b_r	1.72 mm
h_r	2 mm
t_1	0.048 mm
t_2	0.058 mm

Tableau 23. Configuration optimale d'âme sinusoidale renforcée

	Configuration de référence	Âme hexagonale optimale	Âme sinusoidale optimale	Âme sinusoidale renforcée optimale
\mathbf{E}_x (MPa)	0.29	0.15	0.17	153
\mathbf{E}_y (MPa)	0.30	0.43	0.98	7.80
\mathbf{E}_z (MPa)	223.89	228.02	297.36	270
\mathbf{G}_{xy} (MPa)	0.21	0.33	0.54	0.14
\mathbf{G}_{xz} (MPa)	48.62	39.25	45.41	45.1
\mathbf{G}_{yz} (MPa)	33.19	43.99	60.34	66.3
\mathbf{v}_{xy}	0.96	0.58	0.42	0.13
\mathbf{v}_{xz}	4.3010^{-4}	$2.1787 \cdot 10^{-4}$	$1.99 \cdot 10^{-4}$	0.18
\mathbf{v}_{yz}	4.3110^{-4}	$2.1812 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$	0.18

Tableau 24. Propriétés élastiques équivalentes pour différentes âmes

Le nombre d'itération nécessaire pour trouver la solution optimale est 27 itération dans le cas de configuration hexagonale, 25 itération pour la configuration sinusoidale et 31 itération pour la configuration sinusoidale renforcée. Les itérations ont été arrêtées lorsque les variations de la fonction objectif (114) et les variables de conception (113) étaient inférieure à $TOL = 1\%$ en deux itérations successives.

$$\max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq TOL \quad (i = 1, \dots, n) \quad (113)$$

$$|F_0^{(k)} - F_0^{(k-1)}| \leq TOL \quad (114)$$

L'utilisation de tolérance de 1% évite de perdre du temps dans des itérations coûteuses qui ne permettent pas d'améliorer la solution.

5.5 Conclusion

Dans le but d'optimiser la densité modale de la structure sandwich, une procédure d'optimisation mono-objectif et d'homogénéisation combinée de la structure sandwich a été présentée dans ce chapitre. La fréquence de transition identifiée en utilisant la densité modale est considérée ici comme une fonction objectif. Les contraintes du problème d'optimisation sont : la masse, la surface et la rigidité de la structure sandwich. La méthode de programmation quadratique séquentielle a été utilisée pour résoudre le problème d'optimisation de forme. Plusieurs points de départ ont été évalués pour identifier le minimum global du problème. Les résultats montrent qu'il existe d'autres formes hexagonales plus optimales en comparaison avec la forme régulière de l'hexagone. À partir de l'analyse de sensibilité, nous avons constaté que l'arête inclinée de la cellule unitaire est considérée parmi les paramètres géométriques les plus influents sur la densité modale en moyenne fréquence. Pour quantifier cette influence, nous avons proposé deux architectures originales de l'âme de sandwich. La première proposition consiste à changer l'arête inclinée de la cellule hexagonale par une arête de forme sinusoidale. Cette dernière a été renforcée par une facette dans la deuxième proposition. Les résultats d'optimisation obtenus montrent que la configuration sinusoidale renforcée a une fréquence de transition et module de cisaillement le plus élevée en comparaison avec les autres configurations.

Conclusion générale et perspectives

Contributions de ce travail de thèse

L'objectif principal des travaux présentés dans cette thèse était de proposer une démarche d'optimisation vibroacoustique des structures sandwichs composites d'âme en nid d'abeille. Pour ce faire nous avons décomposé cet objectif en trois sous-objectifs :

- le calcul des propriétés mécaniques équivalentes de l'âme de sandwich à l'échelle macroscopique,
- l'identification un modèle (la fonction objectif) capable de décrire le comportement vibroacoustique de la structure sandwich,
- la hiérarchisation paramétrique des modèles considérés.

Pour établir ces objectifs, nous avons décrit d'abord, dans le Chapitre 1, les outils utilisés dans ce présent mémoire. Après une brève présentation sur l'architecture et la modélisation des structures sandwichs d'âme périodique, les principaux indicateurs vibroacoustiques sont présentés. Par la suite, les méthodes d'analyse de sensibilité sont exposées. La plus grande partie de ce premier chapitre est ensuite consacré à la présentation les différents types d'optimisation utilisés dans le domaine de l'analyse structurale.

Dans le Chapitre 2, nous avons développé une méthode d'homogénéisation numérique en 3D basée sur le concept méso-macro du VER. Les déformations et contraintes moyennes sur le volume représentatif ont utilisées pour calculer les propriétés mécaniques macroscopiques de l'âme de la structure sandwich. Nous avons comparé les résultats obtenus avec une méthode analytique développée par Malek et al. [69]. À l'aide du code

éléments finis (ABAQUS), les scripts Python et le programme MATLAB nous avons pu automatiser le calcul des propriétés homogénéisées des structures périodiques de type nid d'abeille.

Dans le Chapitre 3, nous avons détaillé l'expression de la densité modale dans la structure sandwich composite. Nous avons ensuite développé de nouvelles expressions de la fréquence de transition en utilisant le développement asymptotique du nombre d'onde, vitesse de groupe et la densité modale de la structure sandwich. L'objectif de cette fréquence est d'identifier la transition du comportement de flexion globale de la structure sandwich au comportement de cisaillement pur de l'âme. L'avantage de cette nouvelle expression réside dans sa capacité de prendre en compte l'effet d'orthotropie et son expression en fonction des différents paramètres géométriques de l'âme et des peaux de la structure sandwich. Dans le Chapitre 4, nous avons exploité les expressions développées dans le chapitre 3 pour hiérarchiser les paramètres mécaniques et géométriques de la structure sandwich. La méthode d'analyse de sensibilité adoptée dans cette hiérarchisation est la méthode FAST. Dans un premier temps nous avons calculé l'indice de sensibilité de 1^{er} ordre et total en fonction de la fréquence dans le cas de la densité modale, et dans un second temps, ces derniers sont traités dans le cas de la fréquence de transition. L'objectif de cette partie était de comprendre la contribution de chaque paramètre dans les modèles pour mieux formuler le problème d'optimisation.

Le chapitre 5 constitue la raison de ce travail, soit la mise en place une méthode de conception optimale de la structure sandwich à cœur en nid d'abeille. Le modèle par éléments finis utilisé a été établi en utilisant la méthode d'homogénéisation automatique établie dans le chapitre 2. Une analyse de sensibilité selon la méthode FAST a permis de constater quels paramètres étaient les plus influents selon les spécifications du problème. Étant donné l'utilisation de fréquence de transition comme fonction objectif, une démarche d'optimisation basée sur la programmation quadratique séquentielle (SQP) a

permis d'identifier dans un premier temps les paramètres géométriques optimaux de l'âme de structure sandwich. Dans un second temps une méthode d'optimisation séquentielle convexe à été utilisée pour trouver les orientations des fibres optimales des peaux. Ensuite, les résultats de l'optimisation ont montré que la densité modale se diminue si on joue seulement sur l'architecture de l'âme. Cette densité est encore améliorée si on l'optimise en tenant compte de l'effet d'orthotropie de sandwich.

Perspective de recherche

Ce travail de thèse nous a permis de répondre à un certain nombre de questions vis-à-vis du comportement vibroacoustique des structures sandwichs, mais en a soulevé de nouvelles, offrant ainsi plusieurs perspectives de recherche. Tout d'abord, il serait intéressant de développer la deuxième fréquence de transition qui sépare la zone de comportement de cisaillement pur de l'âme et les flexions des peaux. Ensuite, d'établir une procédure d'optimisation multi-objectifs pour minimiser la densité modale en moyenne et en haute fréquence. De plus, l'algorithme présenté dans ce travail est en phase préliminaire. En effet, l'évaluation de la fonction objectif prend beaucoup de temps ce qui peut rendre l'identification du minimum global très difficile, d'où la nécessité de développer une autre démarche basée sur les surfaces de réponse et l'optimisation séquentielle convexe (PSC) comme celle développé par Khamlichi et al.[106, 107]. Enfin, ces travaux peuvent être étendus pour traiter les structures sandwichs courbées, de type coque cylindrique.

Bibliographie

- [1] Gibson L. Ashby, MF: Cellular Solids. Structure and Properties Oxford: Pergamon Press. 1988.
- [2] Allen HG. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. Oxford ; New York : Pergamon Press, [1969].
- [3] Composite H. HexWeb tm honeycomb sandwich design technology. [http](http://). 2004.
- [4] Berthelot J-M. Composite materials: mechanical behavior and structural analysis: Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Kanouté P, Boso D, Chaboche J, Schrefler B. Multiscale methods for composites: a review. Archives of Computational Methods in Engineering. 2009;16:31-75.
- [6] Saito T, Parbery RD, Okuno S, Kawano S. Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. Journal of Sound and Vibration. 1997;208:271-87.
- [7] Backström D, Nilsson AC. Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters. Journal of Sound and Vibration. 2007;300:589-611.
- [8] Trindade MA. Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux pi isoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes: INSA Lyon, 2000.
- [9] Moreira R, Rodrigues JD, Ferreira A. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. Computational Mechanics. 2006;37:426-44.

- [10] Lewinski T. Effective models of composite periodic plates. III, Two-dimensional approaches. *International journal of solids and structures*. 1991;27:1185-203.
- [11] Noor AK, Burton WS, Bert CW. Computational models for sandwich panels and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1996;49:155-99.
- [12] Florens C, Balmes E, Clero F, Corus M. Accounting for glue and temperature effects in Nomex based honeycomb models. *International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA2006*.
- [13] Chamis CC, Aiello RA, Murthy PL. Fiber composite sandwich thermostructural behavior: Computational simulation. *Journal of Composites, Technology and Research*. 1988;10:93-9.
- [14] Gupta GS. Natural flexural waves and the normal modes of periodically-supported beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1970;13:89-101.
- [15] Hart FD, Shah K. *Compendium of modal densities for structures*. 1971.
- [16] Cremer L, Heckl M, Ungar E. *Structure-Borne Sound* Springer-Verlag. New York. 1973.
- [17] Ver IL. *Interaction of sound waves with solid structures. Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications, Second Edition*. 1971:389-515.
- [18] Ver IL, Beranek LL. *Noise and vibration control engineering: principles and applications*: Wiley, 2006.
- [19] Fahy FJ, Gardonio P. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*: Academic press, 2007.

- [20] Kinsler L. Frey et al. R, Coppens, JV Sanders JV, Fundamentals of Acoustics, Jhon Wiley an Sons USA. 2000.
- [21] Pierce A. Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications (Acoustical Society of America, Melville, NY). ISBN 0-838318-612-8; 1989.
- [22] Abdelkhalak EH, Bouchaïb R. Incertitudes, optimisation et fiabilité des structures: Lavoisier, 2013.
- [23] Allaire G, Schoenauer M. Conception optimale de structures: Springer, 2007.
- [24] Rozvany GI. Shape and layout optimization of structural systems and optimality criteria methods: Springer, 2014.
- [25] Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer methods in applied mechanics and engineering. 1988;71:197-224.
- [26] Duysinx P. Introduction à l'optimisation topologique. LTAS; 1996.
- [27] Berro A. Optimisation multiobjectifs et stratégies d'évolution en environnement dynamique: ANRT [diff.], 2001.
- [28] Dréo J, Pétrowski A, Siarry P, Taillard E. Métaheuristiques pour l'optimisation difficile: Eyrolles, 2003.
- [29] Spall JC. Simultaneous perturbation stochastic approximation. Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control. 2003:176-207.

- [30] Morris AJ. Foundations of structural optimization: a unified approach: John Wiley & Sons, 1982.
- [31] Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems (; Cambridge. MIT Press; 1992.
- [32] Holland JH. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence: U Michigan Press, 1975.
- [33] Goldberg D. Genetic algorithms in optimization, search and machine learning. Addison Wesley. 1989;905:205-11.
- [34] Michalewicz Z. GAs: What are they? Genetic algorithms+ data structures= evolution programs: Springer; 1994. p. 13-30.
- [35] Bonnans J, Gilbert J, Lemaréchal C, Sagastizábal C. Optimisation numérique, coll. SMAI Mathématiques et Applications no27. Springer; 1997.
- [36] Gill PE, Murray W, Wright MH. Practical optimization. 1981.
- [37] Schmit LA, Farshi B. Some approximation concepts for structural synthesis. AIAA Journal. 1974;12:692-9.
- [38] Schmit LA, Fleury C. Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods. AIAA Journal. 1980;18:1252-60.
- [39] Fleury C, Braibant V. Structural optimization: a new dual method using mixed variables. International journal for numerical methods in engineering. 1986;23:409-28.

- [40] Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*. 1987;24:359-73.
- [41] Starnes Jr JH, Haftka RT. Preliminary design of composite wings for buckling, strength, and displacement constraints. *Journal of Aircraft*. 1979;16:564-70.
- [42] Braibant V, Fleury C. An approximation-concepts approach to shape optimal design. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1985;53:119-48.
- [43] Zhang W, Fleury C, Duysinx P, Nguyen VH, Laschet I. A generalized method of moving asymptotes (GMMA) including equality constraints. *Structural optimization*. 1996;12:143-6.
- [44] Duysinx P, Bendsøe MP. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International journal for numerical methods in engineering*. 1998;43:1453-78.
- [45] Duysinx P. *Layout optimization: A mathematical programming approach*. 1997.
- [46] Sigmund O. Design of multiphysics actuators using topology optimization—Part I: One-material structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2001;190:6577-604.
- [47] Bruyneel M, Fleury C. Composite structures optimization using sequential convex programming. *Advances in Engineering Software*. 2002;33:697-711.
- [48] Bruyneel M. A general and effective approach for the optimal design of fiber reinforced composite structures. *Composites Science and Technology*. 2006;66:1303-14.

- [49] Broyden CG. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. IMA Journal of Applied Mathematics. 1970;6:76-90.
- [50] Nelder JA, Mead R. A simplex method for function minimization. The computer journal. 1965;7:308-13.
- [51] Kalamkarov AL. Composite and Reinforced Elements of Constructions. John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO 19 1 UD, UK, 1992 286. 1992.
- [52] Parton VZ, Kudrĩ a vt s ev BA. Engineering mechanics of composite structures: CRC Press, 1993.
- [53] Bensoussan A, Lions J. G. Papanicolaou Asymptotic analysis for periodic structures Studies in Mathematics and its applications, Vol. 5. North-Holland, Amsterdam; 1978.
- [54] Sánchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. Non-homogeneous media and vibration theory 1980.
- [55] Hubert JS, Palencia ES. Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation: application à la mécanique des milieux continus: Masson, 1992.
- [56] Hubert JS, Palencia ES. Exercices sur les méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation: Masson, 1993.
- [57] Shi G, Tong P. Equivalent transverse shear stiffness of honeycomb cores. International journal of solids and structures. 1995;32:1383-93.
- [58] Masters I, Evans K. Models for the elastic deformation of honeycombs. Composite structures. 1996;35:403-22.

- [59] Xu XF, Qiao P. Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect. *International journal of solids and structures*. 2002;39:2153-88.
- [60] Kelsey S, Gellatly R, Clark B. The shear modulus of foil honeycomb cores: A theoretical and experimental investigation on cores used in sandwich construction. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 1958;30:294-302.
- [61] Grediac M. A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores. *International journal of solids and structures*. 1993;30:1777-88.
- [62] Meraghni F, Desrumaux F, Benzeggagh M. Mechanical behaviour of cellular core for structural sandwich panels. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 1999;30:767-79.
- [63] Lira C, Innocenti P, Scarpa F. Transverse elastic shear of auxetic multi re-entrant honeycombs. *Composite structures*. 2009;90:314-22.
- [64] Barbero EJ. *Finite element analysis of composite materials using Abaqus™*: CRC press, 2013.
- [65] Barbero EJ. *Finite element analysis of composite materials*. Taylor and Francis Group, 2008.
- [66] Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963;11:357-72.
- [67] Aboudi J. *Mechanics of composite materials-A unified micromechanical approach*. NASA STI/Recon Technical Report A. 1991;93:29778.

- [68] ABAQUS. Scripting Reference Manual of ABAQUS documentation. https://thingsmathscamacuk/computing/software/abaqus_docs/docs/v612/books/ker/default.htm. 2012.
- [69] Malek S, Gibson L. Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs. *Mechanics of Materials*. 2015;91:226-40.
- [70] Chang CC, Ebcioğlu IK. Effect of cell geometry on the shear modulus and on density of sandwich panel cores. *Journal of basic Engineering*. 1961;83:513-7.
- [71] Wilkinson J. Modal densities of certain shallow structural elements. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1968;43:245-51.
- [72] Erickson LL. Modal densities of sandwich panels: theory and experiment. *The Shock and Vibration Bulletin*. 1969;39:1-16.
- [73] Clarkson B, Ranky M. Modal density of honeycomb plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1983;91:103-18.
- [74] Renji K. Experimental modal densities of honeycomb sandwich panels at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*. 2000;237:67-79.
- [75] Ghinet S, Atalla N. Vibro-acoustic behaviors of flat sandwich composite panels. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. 2006;30:473-93.
- [76] Mead D, Markus S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 1969;10:163-75.
- [77] Conlon S, Hambric S. Predicting the vibroacoustic response of satellite equipment panels. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2003;113:1455-74.

- [78] Renji K, Nair PS, Narayanan S. Modal density of composite honeycomb sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*. 1996;195:687-99.
- [79] Turner CE. *Introduction to plate and shell theory*: American Elsevier Publishing Company, 1965.
- [80] Han J, Yu K, Li X, Zhao R. Modal density of sandwich panels based on an improved ordinary sandwich panel theory. *Composite structures*. 2015;131:927-38.
- [81] Kurtze G, Watters B. New wall design for high transmission loss or high damping. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1959;31:739-48.
- [82] Davis EB. Designing honeycomb panels for noise control. *AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, 5 th, Bellevue, WA1999*. p. 792-800.
- [83] Rindel J. Dispersion and absorption of structure-borne sound in acoustically thick plates. *Applied Acoustics*. 1994;41:97-111.
- [84] Guillaumie L. Vibroacoustic flexural properties of symmetric honeycomb sandwich panels with composite faces. *Journal of Sound and Vibration*. 2015;343:71-103.
- [85] Baho O, Zergoune Z, Ichchou M, Harras B, Benamar R, Troclet B, et al. On global bending–shear core transition effects for the vibroacoustic of sandwich structures: Analytical and numerical investigations. *Composite structures*. 2016;154:453-63.
- [86] Ouisse M, Ichchou M, Chedly S, Collet M. On the sensitivity analysis of porous material models. *Journal of Sound and Vibration*. 2012;331:5292-308.

- [87] Christen J-L, Ichchou M, Troclet B, Bareille O, Ouisse M. Global sensitivity analysis of analytical vibroacoustic transmission models. *Journal of Sound and Vibration*. 2016;368:121-34.
- [88] Sobol IM. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*. 2001;55:271-80.
- [89] Saltelli A, Ratto M, Andres T, Campolongo F, Cariboni J, Gatelli D, et al. *Global sensitivity analysis: the primer*: John Wiley & Sons, 2008.
- [90] Cukier R, Fortuin C, Shuler KE, Petschek A, Schaibly J. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory. *The Journal of Chemical Physics*. 1973;59:3873-8.
- [91] Schaibly JH, Shuler KE. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. II Applications. *The Journal of Chemical Physics*. 1973;59:3879-88.
- [92] Cukier R, Levine H, Shuler K. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal of computational physics*. 1978;26:1-42.
- [93] McRae GJ, Tilden JW, Seinfeld JH. Global sensitivity analysis—a computational implementation of the Fourier amplitude sensitivity test (FAST). *Computers & Chemical Engineering*. 1982;6:15-25.
- [94] Cukier R, Schaibly J, Shuler KE. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. III. Analysis of the approximations. *The Journal of Chemical Physics*. 1975;63:1140-9.

- [95] Lang MA, Dym CL. Optimal acoustic design of sandwich panels. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1975;57:1481-7.
- [96] Thamburaj P, Sun J. Optimization of anisotropic sandwich beams for higher sound transmission loss. *Journal of Sound and Vibration*. 2002;254:23-36.
- [97] Franco F, Cunefare KA, Ruzzene M. Structural-acoustic optimization of sandwich panels. *Journal of vibration and acoustics*. 2007;129:330-40.
- [98] Wennhage P. Weight optimization of large scale sandwich structures with acoustic and mechanical constraints. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2003;5:253-66.
- [99] Wennhage P. Weight optimization of sandwich panel with acoustic constraints, experimental verification. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2002;4:353-65.
- [100] Denli H, Sun J. Structural-acoustic optimization of sandwich structures with cellular cores for minimum sound radiation. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;301:93-105.
- [101] Ruzzene M. Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core. *Journal of Sound and Vibration*. 2004;277:741-63.
- [102] Griese D. *Finite Element Modeling and Design of Honeycomb Sandwich Panels for Acoustic Performance*. 2012.
- [103] Haftka R. Gü rdal Z (1992) *Elements of structural optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [104] Mathwoks. Find minimum of constrained nonlinear multivariable function—fmincon matlab. MATLAB. 2016.

[105] Renji K. Sound transmission loss of unbounded panels in bending vibration considering transverse shear deformation. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;283:478-86.

[106] ABOUD N, KHAMLIHI A, DUBUJET P. Optimisation structurale par interpolation séquentielle des contraintes du programme mathématique. 20ème Congrès Français de Mécanique, 28 août/2 sept 2011-25044 Besançon, France (FR). 2011.

[107] KHAMLIHI A, ABOUD N. Optimisation des structures par interpolation séquentielle. Editions Universitaires Européennes ISBN: 978-613-1-54361-6. 2010.

[108] BAHO O, Ichchou M, Harras B, Benamar R. Optimization of the vibro-acoustic indicators of honeycomb panels. International Conference on Dynamics of Composite Structures, Arles, France. DYNCOMP 2015.

Publications et communications

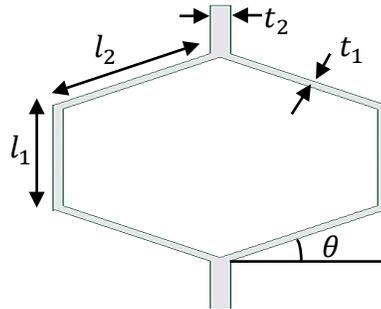
- **O Baho**, Z Zergoune, MN Ichchou, B Harras, R Benamar, B Troclet, and O Bareille, "On Global Bending–Shear Core Transition Effects for the Vibroacoustic of Sandwich Structures: Analytical and Numerical Investigations", *Composite Structures*, 154 (2016), 453-63.
- O. BAHO, M. N. ICHCHOU, B. HARRAS, R. BENAMAR, B. TROCLET, O. BAREILLE "Broadband vibroacoustic design optimization of sandwich panels under constraints". (en cours).
- **O Baho**, MN Ichchou, B Harras, and R Benamar, "Optimization of the vibro-acoustic indicators of honeycomb panels". *DYNCOMP 2015: International Conference on Dynamics of Composite Structures*, Arles, France.
- C DROZ, Z ZERGOUNE, **O BAHO**, JL CHRISTEN, and M ICHCHOU, "Vibroacoustic optimization of sandwich panels involving hexagonal honeycomb cores". *2015: International Conference on Composite Structures*, At Lisbon, Portugal.
- H BHAR, O BAHO, R BENAMAR and B HARASS, "Semi-analytical method, for determining the large amplitude free vibration behaviour of c-c-c-ss and c-s-c-s symmetrically laminated rectangular composite plates". *CSNDD 2016: International Conference on Composite Structural Dynamics and Diagnosis*,
- **O BAHO**, B HARASS, and R BENAMAR, "Geometrically non-linear forced vibration of C-SS-C-SS symmetrically laminated AS4/APC2 rectangular composite plates". *ARCACHON 2014: 4th International Conference on Carbon Composites (IC3)*. Arcachon, France.
- **O BAHO**, B HARASS, and R BENAMAR, "Geometrically non-linear free vibration of C-SS-C-SS symmetrically laminated AS4/APC2 rectangular composite plates". *MEDYNA 2013: 1st Euro-Mediterranean Conference on Structural Dynamics and Vibroacoustics*, Marrakech, Maroc.
- **O BAHO**, B HARASS, and R BENAMAR, "Investigation of non-linear free vibrations of C–SS–C–SS symmetrically laminated Carbon fibre reinforced PEEK (AS4/APC2) rectangular composite panels". *Dynacom 2012: 1st International Conference on Composites Dynamics*, Arcachon, France.
- **O BAHO**, B HARASS, MN ICHCHOU, and R BENAMAR, "A new approach to optimize the model density and transmission loss of honeycomb panels". *JJCAB 2015* Besançon, France.

Annexe : A

Propriétés équivalentes de nid d'abeille (Gibson [1])

Propriétés dans le plan	Propriétés hors plan
$E_x^h = \frac{E \left(\frac{t_2}{l_2}\right)^3 \left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta}$	$E_z^h = \frac{E}{l_2} \frac{2t_2 + \frac{l_1 t_1}{l_2}}{\left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right) \cos \theta}$
$E_y^h = \frac{E \left(\frac{t_2}{l_2}\right)^3 (\cos \theta)}{\left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta}$	$G_{yz}^h = G \frac{t_2}{l_2} \frac{\cos \theta}{\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta}$
$G_{xy}^h = \frac{E}{b^3} \frac{\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta}{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \left(\frac{1}{t_1^3} + \frac{2l_1}{l_2 t_2^3}\right) \cos \theta}$	$G_{xz}^h (Up) = \frac{G}{l_2} \frac{\frac{l_1 t_1}{l_2} + 2t_2 \sin^2 \theta}{2 \cos \theta \left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right)}$
	$G_{xz}^h (Low) = \frac{G}{l_2} \frac{\left(\frac{l_1 t_1}{l_2} + t_2 \sin \theta\right)^2}{\cos \theta \left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right) \left(2 \frac{l_1 t_1}{l_2} + t_2\right)}$
$v_{xy}^h = \frac{\left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right) \sin \theta}{\cos^2 \theta}$	$v_{zx}^h = \nu$
$v_{yx}^h = \frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{l_1}{l_2} + \sin \theta\right) \sin \theta}$	$v_{zy}^h = \nu$

1



Annexe : B

Développement asymptotique des structures périodique

Considérons un panneau alvéolaire dans l'espace dont la méso-structure est formée par la répétition spatiale d'une cellule élémentaire comme le montre la figure B.1 et soit ε le rapport de période sur la taille caractéristique de la structure, c'est-à-dire que la période élémentaire constituant la cellule de base de la structure peut s'obtenir par une homothétie de rapport ε , avec $0 < \varepsilon \ll 1$ de l'ouvert $Y =]0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]0, Y_3[$.

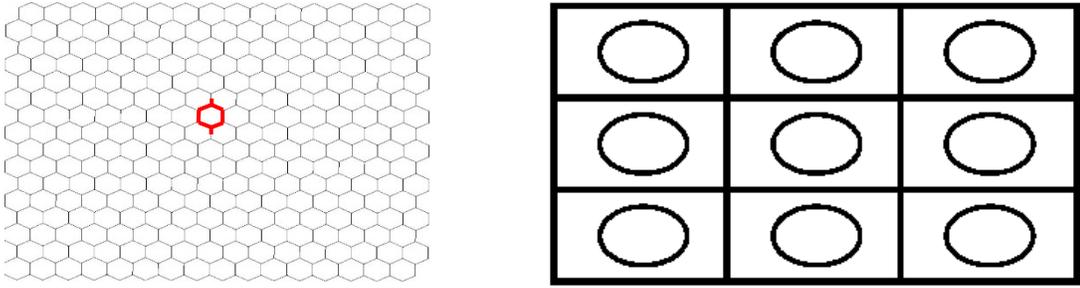


Figure A.1 Mésostructure périodique

Le tenseur de rigidité de la structure dans à l'échelle mésoscopique n'est pas constant, mais varie périodiquement avec la période ε dans chacune des directions de l'espace (x, y) . Pour mettre en valeur cette périodicité de taille ε , on écrit les coefficients de tenseur de rigidité sous la forme suivante :

$$E_{ijkl}^\varepsilon(x) = E_{ijkl}\left(x, y - \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\text{B-1})$$

Où x est la variable macroscopique qui représente la variation des grandeurs à l'échelle de la structure, et y est la variable locale décrite la variation rapide consécutive à la

microstructure. On peut relier la variable mésoscopique à la variable macroscopique y par la relation $y = x/\varepsilon$.

Nous introduisons maintenant le problème de l'élasticité générale d'une structure périodique figure B.1.

La structure est en équilibre avec des forces de volume f et des tractions de surface t .

L'équation de déplacement virtuel, également connu sous le nom de « formulation faible » peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS, \forall v \in V^\varepsilon \quad (\text{B-2})$$

Où p_i^ε sont les forces aux limites des cellules unitaires et v_i fonction arbitraire qui satisfait les conditions limites (Figure B.2).

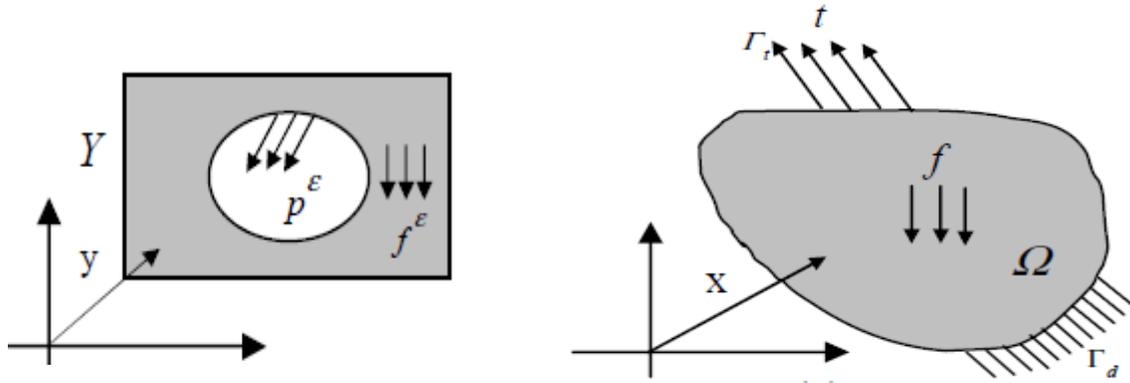


Figure B.2 Définition du problème élastique

Dans l'élasticité linéaire pour un matériau symétrie on sait que : $C_{ijkl}^\varepsilon = C_{jikl}^\varepsilon = C_{ijkl}^\varepsilon = C_{ijlk}^\varepsilon$. Les relations entre contraintes et déformations et déformation-déplacement sont respectivement : $\sigma_{ij}^\varepsilon = C_{ijkl}^\varepsilon \epsilon_{kl}^\varepsilon$ et $\epsilon_{kl}^\varepsilon = \frac{1}{2}(u_{k,l}^\varepsilon + u_{l,k}^\varepsilon)$.

On utilise la méthode de développement asymptotique à double échelle, le champ de déplacement devient :

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon^1 u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots, \text{ Pour tout } (x, y) \in \Omega \times Y, Y\text{-périodicité}$$

Soit $\varphi(x, y)$ la quantité physique d'une structure de mésostructures périodiques est définie par :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y + Y) \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (\text{B-4})$$

Pour toute fonction $\varphi(y)$ d' Y -périodicité, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \varphi(y) dY d\Omega \quad (\text{B-5})$$

Tel que $|Y|$ le volume d'une cellule.

L'introduction du développement asymptotique du déplacement u dans le principe des travaux virtuels donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl}^\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right) + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right) + \varepsilon(\dots) \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS, \forall v \in V_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl}^\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] + \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \varepsilon(\dots) \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS, \forall v \in V_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

Le problème général de l'élasticité équation (B.6) est décomposé en 2 parties telles que le premier est définie dans l'échelle mésoscopique et l'autre à l'échelle macroscopique. Les dérivations détaillées se trouvent dans les références qui ont conclu également que le premier terme de l'expansion de u^ε ne dépend que de l'échelle macroscopique x .

$$\int_Y C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y f_i v_i(y) dY, \quad \forall v \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{B-8})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial y_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial y_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \tau_{ij}(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial y_j} d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i(x) v_i(x) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} b_i(x) v_i(x) d\Omega, \quad \forall v \in V_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

$$C_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{ijkl} \left(C_{ijkl} - C_{ijkl} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \quad (\text{B-10})$$

$C_{ijkl}^H(x)$ Représente le tenseur élastique homogénéisé, tel que

$$\tau_{ij}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial y_l} dy \quad (\text{B-11})$$

$b_i(x)$ Les forces des masses tel que : $b_i(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY$

$$\int_Y C_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad (\text{B-12})$$

$$\int_Y C_{ijkl} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i dY \quad (\text{B-13})$$

Comme indiqué précédemment, les problèmes mésoscopique et macroscopique ne sont pas couplés lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

En plus les constants élastiques homogénéisés peuvent être calculés à l'intérieur de la cellule de base, en résolvant les équations. (B.12) et (B.13) avec l'analyse par éléments finis pour χ^{kl} et ϕ_k . La réponse mécanique du problème d'élasticité générale avec les mésostructures périodiques peut être analysée sous l'étude des structures homogènes.

Annexe : C

Décomposition de la variance

Soit le modèle $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ a entrées indépendantes

Pour tout modèle Y défini et intégrable sur le domaine $D_1 \times \dots \times D_p$, il existe une décomposition (la décomposition de Sobol [88]) unique de la forme :

$$f(X_1, \dots, X_p) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{i,j}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,\dots,p}(X_1, \dots, X_p) \quad (\text{C-1})$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= E[Y] \\ f_i(X_i) &= E[Y|X_i] - E[Y] \\ f_{i,j}(X_i, X_j) &= E[Y|X_i, X_j] - E[Y|X_i] - E[Y|X_j] + E[Y] \\ f_{i,j,k}(X_i, X_j, X_k) &= E[Y|X_i, X_j, X_k] - E[Y|X_i, X_j] - E[Y|X_i, X_k] - \\ &\quad E[Y|X_j, X_k] + E[Y|X_i] + E[Y|X_j] + E[Y|X_k] - E[Y] \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

Comme été expliqué dans le chapitre 4, la variance de Y peut se décomposer en :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1,\dots,p}, \quad (\text{C-3})$$

avec

$$\begin{aligned} V_i &= V(E[Y|X_i]) \\ V_{ij} &= V(E[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j \\ V_{ijk} &= V(E[Y|X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k \\ V_{i_1, \dots, i_s} &= V(f_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})) = \tilde{V}_{i_1, \dots, i_s} \quad \forall \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, p\} \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

Annexe : D

Diagramme d'optimisation des indicateurs vibroacoustique[108]

La figure suivante présente la procédure générale pour optimiser les indicateurs vibroacoustique (TL, Densité modale ...) en fonction de la fréquence.

