



UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES
TANGER

**Centre d'Etudes Doctorales : « Sciences et Techniques de
l'Ingénieur »**
Formation Doctorale : « Sciences et Techniques de l'Ingénieur »

THESE DE DOCTORAT

Présentée

Pour l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGENIEUR

Par :

FATIMA BAZDI

Discipline : Mécanique et physique des milieux hétérogènes.

Spécialité : Mécanique des matériaux.

**Titre de la thèse : Monocristal cubique à faces centrées à déformation
imposée.**

Soutenue le samedi 13 juin 2015 devant le jury

Président :

Pr. RACHID DKIOUAK (Faculté des Sciences et Techniques, Tanger)

Rapporteurs :

Pr. MOHAMED LHASSAN LAHLAOUTI (Faculté des Sciences, Tétouan)

Pr. ABDELATIF KHAMLIHI (Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Tétouan)

Pr. ABDERRAHIM EL OMRI (Faculté des Sciences et Techniques, Tanger)

Examineur :

Pr. KHALID ROKY (Faculté des Sciences et Techniques, Tanger)

Directeur de thèse :

Pr. AHMED CHENAOUI (Faculté des Sciences et Techniques, Tanger)

Structure de recherche accréditée d'accueil :

Références : Laboratoire de Mécanique et Physique des Milieux Hétérogène de la FST de Tanger

Remerciement

Je tiens à remercier spécialement mon directeur de thèse Pr. Ahmed Chenaoui de son générosité, son compréhension et son efficacité.

Je remercie également tout les membres de jury, de bien vouloir assister et juger mon travail.

Je tiens à exprimer un remerciement tout spécialement à mes parents, pour m'avoir soutenu et encouragé tout au long de mes études.

Je tiens à remercier aussi mon mari, pour ses conseils et ses appuis ainsi que ses encouragements.

Mes remerciements aussi à tout les membres de ma famille (frères et sœurs) et tous ceux qui m'ont soutenue, de près ou de loin.

Mes remerciements vont aussi à mes enfants Adnane et Mohamad Amine pour l'amour qu'ils me témoignent, et leurs sacrifices tout au long de ce travail.

Sommaire

Introduction générale	4
Chapitre I: Etude bibliographique	7
Introduction.....	8
1. Transformation du monocristal.....	9
2. Loi d'écoulement	11
2.1. Loi d'évolution	12
2.1.1. Ecoulement plastique	12
2.1.2. Ecoulement viscoplastique.....	13
2.2. Loi d'écrouissage	14
3. Cinématique discrète	16
4. Lois de comportement.....	17
5. Le monocristal cubique.....	18
5.1. Systèmes de glissement.....	18
5.2. Surface seuil.	19
Chapitre II: Monocristal plan.	23
Introduction.....	24
1. La cinématique plane.....	25
2. Le monocristal cubique Plan.....	27
2.1. Monocristal CFCP1.....	28
2.2. Monocristal CFCP2.....	30
3. Monocristal en cinématique plane.....	34
4. Le Monocristal plan rigide plastique.....	35
4.1. Analyse cinématique.....	35
4.1.1. Cas du CFCP1.....	35
4.1.2. Cas du CFCP2.....	37
4.2. Surface seuil	39
5. Conclusion.....	42

Chapitre III: Représentation plan projectif.	43
Introduction.....	44
1. Plan projectif	45
1.1. Cas rigide plastique	45
1.2. Cas viscoplastique	47
1.2.1. Pour monocristal CFCP2.....	48
1.2.2. Pour monocristal CFCP1.....	62
2. Conclusion :	77
Chapitre IV: Monocristal à déformation imposée.	78
Introduction.....	79
1. Essai de l'extension biaxiale	80
1.1. Cas CFCP2.....	83
1.2. Cas CFCP1.....	108
2. Essai général de déformation plane.....	127
3. Conclusion.....	130
Chapitre V: Analyse des résultats.	131
Introduction.....	132
1. Analyse de rotation	132
1.1. Pour CFCP2	132
1.2. Pour CFCP1.....	140
2. Analyse des contraintes :	147
2.1. Cas CFCP2.....	147
2.2. Cas CFCP1.....	153
3. Conclusion :	159
Conclusion générale	160
Références bibliographiques	162
Annexes	167

Introduction générale

La production des produits métalliques fait généralement intervenir des opérations de mise en forme par déformation plastique, cette mise en forme est basée sur la modélisation et la simulation numérique. Pour ce faire, les deux points suivants doivent être combinés:

- La mise en œuvre de moyens informatiques et d'outils numériques puissants;
- Une description fidèle du comportement du matériau.

C'est dans ce dernier point que s'inscrit le travail présenté dans cette thèse ayant pour objectif global l'étude du comportement des matériaux métalliques.

Pour les matériaux polycristallins, la déformation plastique est intimement liée aux mécanismes de déformation des grains, Taylor (1936), Sachs (1926). Cet aspect microscopique est fondamental pour identifier les mécanismes mis en jeu, notamment la nature et les paramètres qui sont liés aux systèmes de glissement.

À l'échelle des grains (monocristal), l'évolution de l'orientation des réseaux cristallins joue un rôle essentiel et fondamental dans la plasticité des métaux. En effet, l'origine de cette évolution est le mécanisme de glissement plastique qui induit une rotation plastique et par conséquent entraîne une rotation des réseaux cristallins. Ces rotations sont à l'origine des textures de déformation; phénomène connu depuis longtemps et qui est, pour une large part, responsable de l'anisotropie du comportement plastique macroscopique des matériaux métalliques.

Cependant, si la plasticité du monocristal est clairement formulée en grandes déformations (Sidoroff et Teodisiu, 1976), plusieurs problèmes spécifiques restent encore imparfaitement maîtrisés. C'est notamment le cas du problème des rotations cristallographiques: *équation spin plastique*.

D'un point de vue phénoménologique, cette équation pourra être définie d'une manière cinématique (Dogui et Sidoroff, 1986; Dogui et Sidoroff, 1987) ou postulée à partir des équations d'évolutions (Dafalias, 1984; Lorete et Dafalias, 1992). Ce qui permet d'éclairer la définition des rotations en l'absence de toute information sur la microstructure.

D'un point de vue microscopique et à l'échelle intragranulaire, cette équation spin plastique travail est l'est directement définie à partir de la nature cristallographique du monocristal. En effet, du glissement sur les systèmes actifs résulte une évolution des directions cristallographiques ce qui donne une déformation de l'orientation des grains monocristallines.

Plus précisément, l'objectif de ce travail est l'analyse des rotations cristalline ainsi que sont effet sur le comportement du monocristal lors d'une déformation imposée.

L'étude du monocristal à déformation imposée a donné lieu à de nombreux travaux de recherche, en particulier les travaux de Molinari et al. (1987), Chenaoui et al. (2000), Darrieulat et al. (2004). En effet, ces études ont été toujours confrontées, dans le cas du modèle monocristal rigide plastique, aux problèmes des indéterminations des glissements et par conséquent l'indétermination de la rotation du réseau cristallin. Il est clair aujourd'hui que le problème de ces indéterminations est intimement lié à la définition de la loi d'écoulement monocristalline utilisée pour l'analyse du comportement. C'est le cas de la loi de Schmid qui est largement utilisé dans les comportements plastiques indépendants des vitesses.

Différentes propositions ont été faites, pour lever ce problème d'indétermination, qui reste encore ouvert et analytiquement n'a pas encore reçu des solutions entièrement satisfaisantes. Pour lever l'indétermination rencontrée, une proposition a été faite par Boukadia et Chenaoui (1990) en introduisant la viscoplasticité de Bingham dans le cadre du concept monocristal plan. Une extension de ces travaux sera introduite dans cette thèse, en se basant sur la loi viscoplastique de Bingham (1922) nous introduisons une nouvelle représentation, duale de la loi de comportement dans l'espace des vitesses des déformations. Cette représentation présente l'avantage, de déterminer parfaitement les glissements cristallographiques et donc les rotations plastiques pour un monocristal à déformation imposée.

Au cours de ce travail, nous discutons les problèmes relatifs au comportement viscoplastique des monocristaux en grandes déformations et grandes rotations.

En particulier, nous nous intéressons au comportement d'un monocristal en sollicitation plane dans son plan de symétrie $\{110\}$ et $\{100\}$. Nous centrons notre étude sur un essai générale et sur les rotations qui en résultent. Les hypothèses utilisées dans ce travail sont les suivantes:

- Structure monocristalline de type CFC pour lequel les seuls mécanismes de déformation sont les glissements cristallographiques
- Avec écrouissage isotrope.

Notre travail est réparti en cinq chapitres :

Le premier chapitre, contient une étude bibliographique dans lequel nous présentons un rappel sur les mécanismes de déformation plastique des monocristaux CFC et les systèmes de glissement cristallographique qui en résultent. Nous présentons la formulation des lois de comportement plastique et viscoplastique en grandes déformations.

Le deuxième chapitre, porte sur le monocristal CFC plan soumis à une sollicitation plane dans les plans $\{100\}$ et $\{110\}$. En effet, l'une des difficultés du monocristal, est son caractère irréductiblement tridimensionnel. Cette difficulté est souvent escamotée en utilisant des modèles bidimensionnels, ces modèles sont détaillés dans le travail Boukadia et al. (1990) et Chenaoui et al. (1992), et sont respectivement notés le monocristal plan CFCP1, CFCP2.

Dans le troisième chapitre, nous représentons le plan projectif dans le cas plastique, pour ce faire nous nous sommes basé sur "la surface seuil" (Chenaoui (2000)). Pour déterminer parfaitement les glissements cristallographiques et donc les rotations plastiques, nous introduisons une nouvelle représentation plan projectif pour le monocristal CFCP2 et CFCP1 dans le cadre de la loi viscoplastique de Bingham.

Dans le quatrième chapitre, nous illustrons le monocristal à déformation imposée. En particulier, l'essai de l'extension biaxiale, dans le cas plan, pour les monocristaux CFCP1 et CFCP2. Nous déduisons dans le cas plan, que l'analyse viscoplastique introduite dans cette étude permet de construire un nouveau diagramme d'activité, dont les glissements et les rotations plastiques sont complètement déterminés. Ensuite nous montrerons que les résultats obtenus par l'extension biaxial, pour les deux modèles monocristallins, restent généraux, pour tout essai à cinématique plane imposée.

Enfin, dans le cinquième chapitre présenterons une analyse et une discussions détaillé sur les résultats obtenus.

Chapitre I:

Etude bibliographique

Introduction

Le but de ce chapitre est la prévision du comportement plastique d'un métal homogène formé d'atomes assemblés selon une structure cristalline. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des grandes déformations. Nous nous placerons dans ce chapitre dans l'hypothèse d'un matériau rigide plastique écoulement isotrope, pour lequel nous négligerons l'élasticité.

Dans un premier temps, nous présenterons une vue de l'ensemble des relations en introduisant le cadre général du monocristal. Dans ce cadre, nous présentons les relations constitutives d'un matériau avec une cinématique discrète pour lequel nous exposons le comportement rigide plastique en grandes déformations et rotations.

Ensuite, nous considérerons le cas des monocristaux cubiques; en particulier nous introduirons le cas de la structure cubique à faces centrées CFC pour laquelle nous présentons les systèmes cristallographiques mis en jeu lors de la déformation et les lois d'écoulement associées.

1. Transformation du monocristal

Si la transformation subie par l'élément matériel est infinitésimale (petites perturbations), les configurations initiale et déformée sont infiniment voisines et repérées dans le même repère spatial. Les relations classiques reliant contraintes et vitesse des déformations suffisent alors pour décrire son comportement mécanique.

En grandes déformations par contre, les deux configurations initiale C_0 et finale C_t sont très différentes. Par conséquent, les contraintes et déformations peuvent être définies par rapport à l'une ou l'autre des configurations. Un comportement peut donc être en formalisme lagrangien (relatif à C_0) ou eulérien (relatif à C_t). Le choix d'un formalisme simple est l'une des difficultés qui apparaissent dans la modélisation anisotrope du comportement élastoviscoplastique des matériaux métalliques en grandes déformations.

De nombreux travaux ont été consacrés à cette question (Green et Naghdi (1965,1971); Rice (1971) Lee (1969)...etc). Pour soulever ce problème, l'idée de base consiste à introduire la notion de décomposition multiplicative du tenseur gradient des déformations \mathbf{F} . En effet, une décomposition purement formelle et ayant une signification physique est celle de considérer un matériau plastique comme étant élastique par rapport à une configuration mobile intermédiaire \bar{C} telle que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{P} \tag{I.1}$$

Où \mathbf{F}^e est la déformation élastique définissant le passage de \bar{C} à la configuration eulérienne C_t , tandis que \mathbf{P} représente la transformation plastique de \bar{C} par rapport à la configuration de référence C_0 .

D'une manière générale, cette décomposition ne définit la configuration intermédiaire \bar{C} qu'à une rotation près. Il existe donc une infinité de configurations intermédiaires qui se diffèrent l'une de l'autre par une rotation. Pour les matériaux cristallins, dans lesquels existe une microstructure, l'orientation de \bar{C} est introduite par la physique. Selon Mandel (1982), la configuration privilégiée est celle orientée par un trièdre directeur lié au réseau cristallin. En

effet, la configuration isocline \bar{C} est obtenue en ramenant élastiquement (c'est à dire en figeant les dislocations) le réseau cristallographique à sa forme et à son orientation initiale.

Physiquement, \mathbf{F}^e traduit la distorsion du réseau cristallin et des atomes qui lui sont attachés (déformation et rotation). Tandis que \mathbf{P} représente le mouvement relatif des atomes par rapport au réseau cristallin. Le tenseur gradient des vitesses s'exprime, dans la configuration eulérienne, par :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e\mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}^{e-1} \quad (\text{I.2})$$

Dans toute la suite, nous négligeons l'élasticité et nous ne considérons qu'un monocristal rigide plastique. Le tenseur \mathbf{F}^e devient équivalent à la rotation du réseau \mathbf{R} (figure I.1). Les relations (I.1) et (I.2) deviennent

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{P} \quad (\text{I.3})$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^T \quad (\text{I.4})$$

Que l'on peut écrire dans la configuration isocline \bar{C} . Nous obtenons alors

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{R}^T\mathbf{L}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{I.5})$$

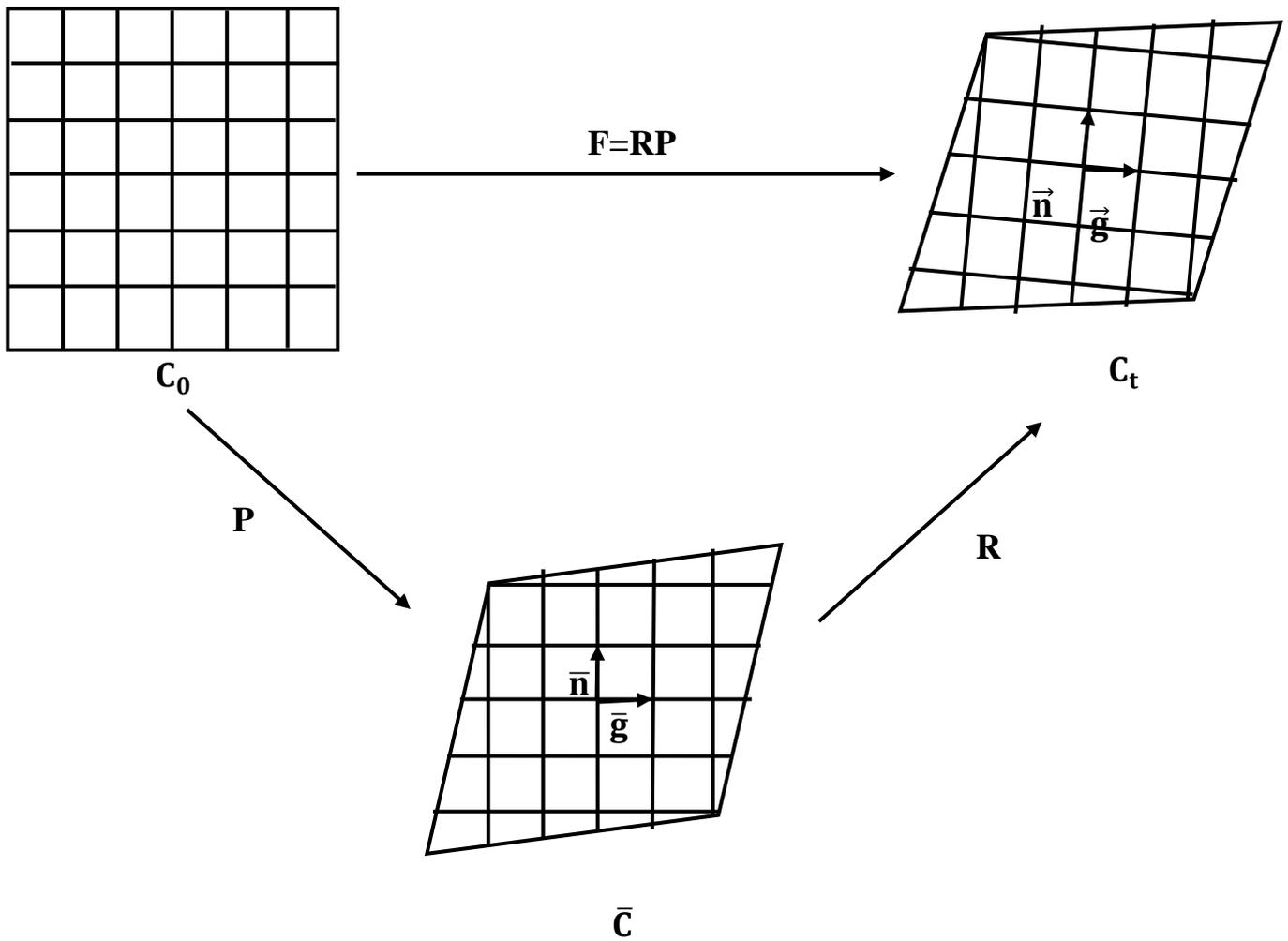


Figure I.1: Transformation d'un monocristal rigide plastique

2. Loi d'écoulement

La description de la plasticité du monocristal se fait au moyen de deux lois:

- Une loi d'évolution qui permet de déterminer l'activité sur les systèmes cristallographiques.
- Une loi d'écrouissage qui, suite à un glissement, représente le durcissement qui s'opère sur chaque système.

2.1. Loi d'évolution

Pour aborder l'écoulement d'un monocristal, on distingue deux voies:

- La première, de type "plastique", simple dans sa formulation, implique l'utilisation des critères sophistiqués pour lever les indéterminations mathématiques rencontrées lors d'un glissement multiple.

- La seconde, de type "viscoplastique", qui ne provoque jamais d'indéterminations, utilisée souvent pour éviter les problèmes numériques inhérents à un écoulement avec seuil.

2.1.1. Ecoulement plastique

Il existe plusieurs mécanismes physiques de déformation plastique qui peuvent intervenir simultanément ou séparément lors de la déformation des métaux (mouvement des dislocations, diffusion des défauts ponctuels, transformation de phase...etc.). Dans la plupart des processus de mise en forme et tout au long de ce travail, on considèrera que le mécanisme prédominant est le glissement sur des systèmes définis cristallographiquement. Ce type de mécanisme, qui fut proposé au départ par Taylor (1934) et Orowan (1934) en se basant sur le concept de dislocation, a été largement utilisé pour décrire la plasticité des métaux.

Des informations détaillées et générales sur la déformation plastique par glissement de dislocation sont exposées dans les ouvrages de Jaoul (1965), Fridel (1964) et Hirth et Lothé (1968).

La plasticité résulte du mouvement de glissement des dislocations dans un plan et selon une direction donnée. Ce plan et cette direction ne sont pas quelconques: Ils correspondent aux plans cristallographiques les plus denses et à des directions cristallographiques déterminées (systèmes de glissement). Un système de glissement (s) est identifié par le vecteur unitaire \bar{n}^s normal au plan de glissement et par le vecteur unitaire \bar{g}^s parallèle à la direction de glissement appelé vecteur de Burgers.

Dès 1924 Schmid (Schmid 1924-1927), en s'appuyant sur l'observation expérimentale, postule une loi, qui communément appelée aujourd'hui loi de Schmid, permettant de formuler

les conditions pour lesquelles il y a écoulement sur un système. Selon cette loi, un glissement sur un système cristallographique aura lieu si la cission résolue τ^s (contrainte de cisaillement exercée dans le plan de glissement suivant la direction de glissement) atteint une cission critique τ_c^s .

En effet, si \mathbf{T} est la contrainte de Cauchy appliquée au matériau et $\bar{\mathbf{T}}$ son transport dans la configuration isocline \bar{C} , la cission résolue τ^s pour le système (s) s'exprime par

$$\tau^s = \bar{g}^s \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{n}}^s, \quad \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R}, \quad (\text{I.6})$$

Si on définit par $\dot{\gamma}^s$, le taux de glissement cristallographique sur un système (s) qui aura toujours lieu dans le sens de la cission résolue τ^s , à tout instant de l'écoulement plastique, la traduction mathématique de la loi de Schmid sous une forme générale s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^s \geq 0 \\ \tau^s - \tau_c^s \leq 0 \\ (\dot{\tau}^s - \dot{\tau}_c^s) \dot{\gamma}^s = 0 \end{cases} \quad \text{Ou bien} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}^s \leq 0 \\ \tau^s + \tau_c^s \geq 0 \\ (\dot{\tau}^s + \dot{\tau}_c^s) \dot{\gamma}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Notons que pour simplifier l'écriture, nous avons supposé dans ces équations que le système avait la même cission critique τ_c^s dans ses deux sens. Ceci n'a rien d'essentiel.

Ces inégalités et égalités représentent les conditions d'écoulement plastique pour la plupart des monocristaux métalliques se déformant par glissement cristallographiques. Il s'agit d'un critère microscopique qu'il convient de relier aux variables macroscopiques, mises en jeu lors de la déformation (déplacements du cristal, les forces qui lui sont appliquées...etc.), pour l'étude du comportement plastique d'un monocristal.

2.1.2. Ecoulement viscoplastique

A l'inverse de l'approche plastique, un monocristal viscoplastique est un matériau cristallin pour lequel la vitesse de déformation a une influence importante sur le comportement. Aussi, cette formulation ne crée pas d'indéterminations sur les vitesses de glissement. Deux cas peuvent être distingués:

- **Viscoplasticité avec seuil** : C'est une loi qui obéit à la condition de Schmid avec une cission critique τ_c^s . Une forme simple de la loi visqueuse avec seuil est, par exemple, la loi linéaire de Bingham suivante

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^s = \frac{1}{\mu}(\tau^s - \tau_c^s) \geq 0 & \text{if } \tau^s \geq \tau_c^s \\ \dot{\gamma}^s = 0 & \text{if } -\tau_c^s \leq \tau^s \leq \tau_c^s \\ \dot{\gamma}^s = \frac{1}{\mu}(\tau^s + \tau_c^s) & \text{if } \tau^s \leq -\tau_c^s \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

- **Viscoplasticité sans seuil** : Afin d'éviter les problèmes numériques, inhérents à l'écoulement avec seuil, plusieurs simulations numériques ont considéré une loi purement visqueuse: par exemple la loi puissance suivante:

$$\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0^s \left(\frac{\tau^s}{\tau_c^s} \right)^n \quad (\text{I.9})$$

Où n est un exposant compris entre 0 et 1 (sensibilité à la vitesse). Cette loi est très utilisée dans la littérature mais elle n'est pas satisfaisante d'un point de vue physique.

2.2. Loi d'écrouissage

Pour compléter les lois d'écoulement présentées ci-dessus il reste à préciser la loi de variation des cissions critiques réduites sur chaque système: "loi d'écrouissage". La détermination d'une loi physiquement satisfaisante régissant cette variation est un sujet qui a été très étudié ces dernières années (Mandel (1965); Franciosi (1985), (1987); Cailletaud (1987); Chang et Asaro (1981)). A l'échelle des mécanismes cristallographiques, la loi d'écrouissage la plus couramment utilisée suppose que les seules variables d'écrouissage à prendre en compte sont les amplitudes des glissements sur les différents systèmes.

$$\tau_c^s = \tau_c^s(\bar{\gamma}) \quad ; \quad \bar{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N)$$

Généralement, on adopte une loi de durcissement sous la forme:

$$\dot{\tau}_c^s = \sum_q h^{sq} |\dot{\gamma}^{sq}| \quad (\text{I.10})$$

Avec la condition initiale $\tau_c^s = \tau_0^s$ pour $\gamma^s = 0$. Les modules physiques d'écroissage h^{sq} forment par définition la matrice d'écroissage et dépendent de la somme des quantités de glissement sur les systèmes.

$$\begin{cases} h^{sq} = h^{sq}(\bar{\gamma}) \\ \dot{\gamma} = \sum_s |\dot{\gamma}^s| \quad \text{ou bien } \bar{\gamma} = \int_0^t \sum_s |\dot{\gamma}^s| dt \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Cette matrice est en général très difficile à caractériser complètement. Physiquement, elle représente, par ses coefficients h^{sq} , la nature d'interactions qui peuvent intervenir entre les systèmes de glissement au cours de l'évolution. Ainsi, les composantes diagonales de cette matrice représentent l'auto-écrouissage, tandis que les composantes hors de la diagonale décrivent l'écrouissage latent.

La forme ainsi introduite dans (I.11) a été largement utilisée et plusieurs auteurs (Teodosiu (1975); Franciosi (1984) et (1985)) ont proposé différentes formes de la matrice h . Une formulation simple de cette matrice est celle de considérer une matrice isotrope telle que:

$$h^{sq} = h_0 \quad \forall s \text{ et } q$$

Dans ce travail nous ne considérerons que l'écrouissage isotrope. Deux lois pourront être introduites:

- Écroissage linéaire

$$\begin{cases} \tau_c = \tau_0 + H \bar{\gamma} \\ \dot{\gamma} = \sum_s |\dot{\gamma}^s| \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

- Écroissage non linéaire

$$\begin{cases} \tau_c = \tau_0 + A (\bar{\gamma})^n \\ \dot{\bar{\gamma}} = \sum_s |\dot{\gamma}^s| \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Où H, A, n sont des constantes caractéristiques des matériaux.

3. Cinématique discrète

Une fois les systèmes de glissement sont connus, nous définissons un milieu avec une cinématique discrète (Teodosiu et Sidoroff (1976)); par les lois de comportement suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^T \\ \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \sum_s \dot{\gamma}^s \bar{\mathbf{M}}^s, \quad \bar{\mathbf{M}}^s = \bar{\mathbf{g}}^s \otimes \bar{\mathbf{n}}^s \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Le tenseur gradient des vitesses s'écrira, dans la configuration liée au réseau cristallin $\bar{\mathbf{C}}$, par:

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{I.15})$$

Et en décomposant cette relation dans $\bar{\mathbf{C}}$, en partie symétrique et partie antisymétrique, on obtient:

- Le tenseur vitesse des déformations $\bar{\mathbf{D}}$:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D}\mathbf{R} = (\bar{\mathbf{L}})^S = \sum_s \dot{\gamma}^s (\bar{\mathbf{M}}^s)^S \quad (\text{I.16})$$

- Le tenseur vitesse des rotations $\bar{\mathbf{W}}$:

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \mathbf{W}\mathbf{R} = (\bar{\mathbf{L}})^A = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \sum_s \dot{\gamma}^s (\bar{\mathbf{M}}^s)^A \quad (\text{I.17})$$

Où D et W sont respectivement le taux des vitesses des déformations et le taux des vitesses des rotations écrites dans la configuration eulérienne.

Suivant le cas considéré, les relations (I.16) et (I.17) représentent la cinématique d'un matériau cristallin se déformant par glissements cristallographiques.

A côté de ces relations il faut ajouter la loi d'évolution reliant les cissions réduites τ^s (I.7) aux glissements $\dot{\gamma}^s$ telle que:

$$\dot{\gamma}^s = a(\tau^s) \quad (\text{I.18})$$

Que nous avons définie dans l'équation (I.7) pour le cas plastique et dans les équations (I.8) et (I.9) pour le cas viscoplastique.

4. Lois de comportement

Le formalisme général que nous venons de définir s'appliquera à tous les cas de déformations plastiques par glissements cristallographiques, une fois que les systèmes de glissement sont clairement définis (par leurs normales aux plans et directions de glissement). Dans ce cas, le problème clé, pour écrire la loi de comportement est la résolution d'un système de N+8 équations à N+8 inconnues:

Les équations :

- Les N lois d'évolution donnant $\dot{\gamma}^s$ en fonction de τ^s (I.18).
- Les cinq équations cinématiques en vitesse de déformation (I.16).
- Les trois équations cinématiques des rotations donnant l'évolution du référentiel cristallographique (I.17).

Les inconnues:

- Les N vitesses de glissement $\dot{\gamma}^s$.
- L'état déviatorique des contraintes (l'état sphérique n'intervient pas dans le cas rigide plastique).
- Les trois composantes de $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$.

5. Le monocristal cubique

5.1. Systèmes de glissement

Rappelons que dans la plupart des processus de mise en forme des métaux, on considère que le mécanisme prépondérant est le glissement sur des systèmes cristallographiques.

Taylor et Elam (1923, 1925, 1926) furent les premiers à étudier expérimentalement la déformation plastique des cristaux métalliques. Ils ont constaté que la nature des glissements dépend de l'arrangement atomique du matériau.

En particulier, pour les monocristaux cubiques à faces centrées, les glissements se font dans les quatre plans $\{111\}$ suivant les directions $\langle 110 \rangle$, ce qui forme un ensemble de 12 systèmes de glissement que nous avons représentés dans le tableau (I.1). Le formalisme général développé dans ce chapitre s'appliquera cependant à tous les cas de déformation plastique par glissement cristallographique, lorsque les systèmes seront clairement définis (par leur normale au plan et leur direction de glissement). Dans toute la suite nous considérons le cas de métaux cubiques à faces centrées, dont l'ensemble des systèmes de glissement faciles est représenté dans le tableau (I.1).

Tableau I.1 : Systèmes de glissement

Plane	Direction	BS	BH
(111)	$[1\bar{1}0]$	1	a_3
(111)	$[10\bar{1}]$	2	$-a_2$
(111)	$[01\bar{1}]$	3	a_1
$(11\bar{1})$	$[101]$	4	$-b_2$
$(11\bar{1})$	$[1\bar{1}0]$	5	b_3
$(11\bar{1})$	$[011]$	6	b_1
$(1\bar{1}1)$	$[10\bar{1}]$	7	$-d_2$
$(1\bar{1}1)$	$[011]$	8	$-d_1$
$(1\bar{1}1)$	$[110]$	9	d_3
$(\bar{1}11)$	$[01\bar{1}]$	10	c_1
$(\bar{1}11)$	$[110]$	11	$-c_3$
$(\bar{1}11)$	$[101]$	12	c_2

BS : Notation de Boukadia et Sidoroff (1988)

BH : Notation de Boschop et Hill (1951)

5.2. Surface seuil.

La description du comportement d'un solide cristallin, se déformant plastiquement par des glissements cristallographiques, se fait en écrivant à chaque instant la loi de Schmid suivante :

$$\dot{\gamma}^s \geq 0 \text{ si } \tau^s = \tau_c, \quad \dot{\gamma}^s = 0 \text{ si } |\tau^s| \leq \tau_c, \quad \dot{\gamma}^s \leq 0 \text{ si } \tau^s = -\tau_c \quad (\text{I.19})$$

Ce qui traduit que l'activité de chaque système est fonction uniquement de la cission résolue τ^s , résultant des forces qui lui étaient appliquées. Les inégalités entre les cissions réduites et cissions critiques dans le système (I.19), traduisent le fait qu'aucun système de

glissement ne peut devenir "surcritique" en cours de la déformation. Elles peuvent s'écrire sous la forme:

$$-\tau_c \leq \tau^s = \overline{T}_{ij} \overline{M}^s_{ij} \leq \tau_c \quad (I.20)$$

C'est-à-dire que l'état des contraintes doit alors rester à l'intérieur du domaine admissible appelé "surface seuil". En effet, dès qu'une égalité (type (I.20)) est obtenue pour un système de glissement, celui-ci est dit critique et, d'après (I.19), il peut y avoir glissement sur ce système entraînant un écoulement plastique du solide.

Dans l'espace des contraintes, les inégalités (I.20) définissent, pour un monocristal cubique à faces centrées, un polyèdre convexe à 24 faces qui est la surface d'écoulement plastique. En (1953) Bishop et Hill (tableau (I.2)) ont calculé, dans un espace à cinq dimensions, les sommets de ce polyèdre pour les glissements de type ($\{111\}$, $\langle 110 \rangle$) dans le cas où toutes les cissions critiques sont égales à une même valeur τ_c . Ils y a donc un polyèdre à 56 sommets; 28 plus leurs opposés respectifs

Chaque égalité ($\tau^s = \pm \tau_c^s, \forall s$) définit un hyperplan dans l'espace des contraintes. L'ensemble de ces hyperplans constitue la surface de plasticité. Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes se trouve sur un sommet ou sur une arête (intersection entre deux sommets) de cette surface, plusieurs systèmes sont simultanément actifs. Ce qui induit, dans certains cas de figure, le problème des indéterminations. Les modèles qui font usage de cette description proposent conjointement divers critères pour lever les indéterminations éventuelles.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour lever l'indétermination en $\dot{\gamma}^s$ dans le cas général. Honnef et Mecking (1978) prenaient la moyenne sur l'ensemble des solutions possibles alors que Van Houtte (1981) en sélectionnait une au hasard, Renouard et Wintenberger (1981), Havner (1981), Franciosi (1984) et (1985) et Wintenberger (1986) ont proposé indépendamment un critère d'écrouissage minimum. Enfin, Sidoroff et Chenaoui (1992) ont introduit la dépendance par rapport aux vitesses, en utilisant la viscoplasticité, pour lever les indéterminations rencontrées.

Malgré ces différentes propositions qui ont été faites, le problème des indéterminations est un sujet encore ouvert qui n'a pas encore reçu des solutions entièrement.

Tableau I.2 : Les sommets du polyèdre de Bishop et Hill et les systèmes correspondants

Indice	Composantes du sommet S^v / τ_c					Systèmes associés à S^v / τ_c
	S_1^v	S_2^v	S_3^v	S_4^v	S_5^v	
(v)	S_1^v	S_2^v	S_3^v	S_4^v	S_5^v	Systèmes associés à S^v / τ_c
1	0	-2	0	0	0	$2^+3^+4^+6^+7^+8^-10^+12^-$
2	$\sqrt{3}$	1	0	0	0	$1^-2^-4^-5^-7^-9^-11^+12^+$
3	$-\sqrt{3}$	1	0	0	0	$1^-3^-5^+6^-8^+9^+10^-11^-$
4	0	0	$2\sqrt{3}$	0	0	$1^-2^-4^+5^+7^+9^+11^+12^+$
5	0	0	0	$2\sqrt{3}$	0	$1^+3^-5^-6^+8^+9^+10^+11^+$
6	0	0	0	0	$2\sqrt{3}$	$2^+3^+4^+6^+7^-8^+10^-12^+$
7	$-\sqrt{3}/2$	$-3/2$	0	$\sqrt{3}$	0	$1^+2^+4^+6^+7^+9^+10^+12^-$
8	$-\sqrt{3}/2$	$-3/2$	0	$-\sqrt{3}$	0	$2^+3^+4^+5^+7^+8^-11^-12^-$
9	$-\sqrt{3}/2$	$3/2$	$\sqrt{3}$	0	0	$2^-3^-5^+6^-8^+9^+10^-12^+$
10	$-\sqrt{3}/2$	$3/2$	$-\sqrt{3}$	0	0	$1^+3^-4^-6^-7^-8^+10^-11^-$
11	$\sqrt{3}$	0	0	0	$\sqrt{3}$	$1^-3^+5^-6^+7^-9^-11^+12^+$
12	$\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$	$1^-2^-4^-5^-8^-9^-10^+11^+$
13	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$1^-3^+4^+6^+11^+12^+$
14	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$2^+3^+5^-6^+7^-9^-$
15	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$1^-2^-7^+8^-10^+11^+$
16	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$4^-5^-8^-9^-10^+12^-$
17	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$1^+2^+4^+6^+8^+9^+$
18	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2^+3^+4^+5^+10^-11^-$
19	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$1^+3^-7^+9^+10^+12^-$
20	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$5^+6^-7^+8^-11^-12^-$

21	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$2^-3^-8^+9^+11^+12^+$
22	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$1^+3^-4^-5^-7^-8^+$
23	0	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$1^-2^-5^+6^-10^-12^+$
24	0	1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$4^-6^-7^-9^-10^-11^-$
25	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$2^-3^-7^+9^+10^+11^+$
26	0	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$1^-3^+4^+5^+10^-12^+$
27	0	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$1^+2^+5^-6^+7^-8^+$
28	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$4^+6^+8^+9^+11^+12^+$

Chapitre II:

Monocristal plan.

Introduction

L'une des difficultés du monocristal est son caractère irréductiblement tridimensionnel. En général, une déformation plane induit dans un monocristal un état de contraintes non plan et vice-versa. Cette difficulté est souvent escamotée en utilisant des modèles bidimensionnels, tel le modèle "glissement double" initialement introduit par Shalaby et Havner (1978) et Asaro (1979). Toutefois, si cette sollicitation est exercée dans un plan de symétrie du réseau cristallin, cette propriété se retrouvera agréable ("sollicitation plane réponse plane"), ce qui nous permettra de travailler dans des espaces de dimensions plus faibles et donc de mieux comprendre ce qui se passe.

Dans ce chapitre, nous développerons la notion du monocristal plan, modèle simplifié certes mais aboutissant à des résultats qui restent valables dans le cas tridimensionnel.

1. La cinématique plane.

Les difficultés rencontrées dans le développement des lois de comportement en grandes déformations et rotations apparaissent aux cours des sollicitations non triaxiales; par exemple l'extension biaxiale, le cisaillement simple...etc. Pour présenter une analyse plus fine des essais plans, Dogui (1988) a introduit une cinématique permettant de traiter la majorité des problèmes en contraintes ou en déformations planes. En cette cinématique bidimensionnelle le tenseurs gradient des déformations \mathbf{F} et contraintes de Cauchy \mathbf{T} s'écrivent, dans le repère eulérien $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, par

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} e^\varepsilon & \gamma e^\varepsilon & 0 \\ 0 & e^\eta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\varepsilon+\eta)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Pour assurer la compatibilité de ces deux tenseurs, il faut que le plan de sollicitation $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ soit toujours un plan de symétrie du matériau.

Dans ce cas, la rotation \mathbf{R} devient donc une rotation plane qui, pour le monocristal, fait passer du plan eulérien $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ au plan lié à la configuration isocline $O\bar{x}_1\bar{x}_2$, telle que:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

θ étant l'angle de la direction isocline $O\bar{x}_1$ par rapport à la direction eulérienne $O\bar{x}_1$.

Le tenseur gradient des vitesses $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ s'écrit, dans le repère $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} & \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{\varepsilon-\eta} & 0 \\ 0 & \dot{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon} - \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Sa partie symétrique \mathbf{D} et partie antisymétrique \mathbf{W} sont obtenues par:

$$D_{11} = \dot{\varepsilon} \ , \ D_{22} = \dot{\eta} \ , \ D_{12} = W_{12} = \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{\varepsilon-\eta} \ , \ \bar{\mathbf{D}} = R^T D R \quad (\text{II.4})$$

De même, en fonction des composantes du tenseur $\bar{\mathbf{D}}$ introduit dans (I.16), l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}}{2} + \frac{\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22}}{2} \cos(2\theta) + D_{12} \sin(2\theta), \\ \dot{\eta} &= \frac{\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}}{2} - \frac{\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22}}{2} \cos(2\theta) - D_{12} \sin(2\theta), \\ \dot{\gamma} &= 2e^{(\eta-\varepsilon)} \left\{ -\frac{\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22}}{2} \sin(2\theta) + D_{12} \cos(2\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

On calcule alors directement, par inversion de (II.5), les tenseurs $\bar{\mathbf{D}}$, $\bar{\mathbf{W}}$ en fonction de ε , η , γ et θ . on a :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} &= \frac{\dot{\varepsilon} + \dot{\eta}}{2} + \frac{\dot{\varepsilon} - \dot{\eta}}{2} \cos(2\theta) - \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{(\varepsilon-\eta)} \sin(2\theta), \\ \bar{D}_{22} &= \frac{\dot{\varepsilon} + \dot{\eta}}{2} - \frac{\dot{\varepsilon} - \dot{\eta}}{2} \cos(2\theta) + \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{(\varepsilon-\eta)} \sin(2\theta), \\ \bar{D}_{12} &= \frac{\dot{\varepsilon} - \dot{\eta}}{2} \sin(2\theta) + \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{(\varepsilon-\eta)} \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$$W_{12} = -W_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{\varepsilon-\eta} \quad (\text{II.7})$$

Aussi le tenseur des contraintes $\bar{\mathbf{T}}$ est donné par:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) - \tau \sin(2\theta), \\ \bar{T}_{22} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) + \tau \sin(2\theta), \\ \bar{T}_{12} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) + \tau \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Soit en inversant:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2} + \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{2} \cos(2\theta) + \bar{T}_{12} \sin(2\theta) \\
 \sigma_2 &= \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{2} - \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{2} \cos(2\theta) - \bar{T}_{12} \sin(2\theta) \\
 \tau &= -\frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{2} \sin(2\theta) + \bar{T}_{12} \cos(2\theta)
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

2. Le monocristal cubique Plan

Rappelons que l'une des difficultés du monocristal est son caractère irréductiblement tridimensionnel. En général une déformation plane induit dans un monocristal un état de contraintes non plan et vice versa. Cette difficulté est souvent escamotée en considérant des modèles bidimensionnels, par exemple le modèle "glissement double" initialement introduit par Asaro (1981). Toutefois, si cette sollicitation est exercée dans un plan de symétrie du réseau cristallin, cette propriété se trouvera alors agréable "sollicitation plane réponse plane" et nous permettra de travailler dans des espaces de dimensions plus faibles et donc de mieux comprendre ce qui se passe.

Les monocristaux cubiques admettent deux types de plans de symétrie:

- les plans de famille $\langle 1,0,0 \rangle$; d'axes de symétrie d'ordre 4;
- les plans de famille $\langle 1,1,0 \rangle$; d'axes de symétrie d'ordre 2.

Dans ces plans on pourra parler d'une sollicitation plane. Compte tenu de cette propriété, Boukadia et Chenaoui (1991) ont construit trois monocristaux plans, dans notre travail nous allons considérer les deux monocristaux plans, correspondant à une sollicitation plane dans les plans $\{100\}$ et $\{110\}$, pour un monocristal CFC. Ces modèles sont respectivement notés le monocristal plan CFCP1, CFCP2.

2.1. Monocrystal CFCP1

Considérons un monocrystal cubique à faces centrées en sollicitation plane dans le plan de symétrie (100). Les vecteurs de base \bar{x}_1 , \bar{x}_2 et \bar{x}_3 , dans la configuration 1 cristallographique \bar{c} , sont choisis respectivement par:

$$\bar{X}_1 = [1 \ 0 \ 0]; \bar{X}_2 = [0 \ 1 \ 0]; \bar{X}_3 = [0 \ 0 \ 1].$$

Dans ce système d'axes, les composantes correspondantes de \bar{g}^s et \bar{n}^s sont données dans le tableau (II.1).

Tableau II.1. Les systèmes de glissement et les tenseurs \bar{M}^s dans la configuration isocline 1

Systèmes	Plan	Direction	\bar{M}^s	τ^s
S=1	(111)	[1 $\bar{1}$ 0]	$\bar{M}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^1 = \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}$
S=2	(111)	[10 $\bar{1}$]	$\bar{M}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^2 = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{12}$
S=3	(111)	[01 $\bar{1}$]	$\bar{M}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^3 = \bar{T}_{22} + \bar{T}_{12}$
S=4	(11 $\bar{1}$)	[101]	$\bar{M}^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^4 = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{12}$
S=5	(11 $\bar{1}$)	[1 $\bar{1}$ 0]	$\bar{M}^5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^5 = \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}$
S=6	(11 $\bar{1}$)	[011]	$\bar{M}^6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^6 = \bar{T}_{12} + \bar{T}_{22}$
S=7	(1 $\bar{1}$ 1)	[10 $\bar{1}$]	$\bar{M}^7 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^7 = \bar{T}_{11} - \bar{T}_{12}$
S=8	(1 $\bar{1}$ 1)	[011]	$\bar{M}^8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^8 = \bar{T}_{12} - \bar{T}_{22}$
S=9	(1 $\bar{1}$ 1)	[110]	$\bar{M}^9 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^9 = \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}$

S=10	$(\bar{1}11)$	$[01\bar{1}]$	$\bar{M}^{10} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^{10} = \bar{T}_{22} - \bar{T}_{12}$
S=11	$(\bar{1}11)$	$[\bar{1}10]$	$\bar{M}^{11} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^{11} = \bar{T}_{22} - \bar{T}_{11}$
S=12	$(\bar{1}11)$	$[\bar{1}01]$	$\bar{M}^{12} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{6}\tau^{12} = \bar{T}_{12} - \bar{T}_{11}$

L'examen de ces tenseurs \bar{M}^s montre que l'on peut regrouper les systèmes 2 par 2. Par exemple, si on considère les deux systèmes 1 et 5, nous aurons :

$$\sqrt{6}\tau^1 = \bar{T}_{11} - \bar{T}_{22} = \sqrt{6}\tau^5$$

D'après l'équation (I.9) on a :

$$\dot{\gamma}^1 = \dot{\gamma}^5$$

Ceci montre que dans ce plan (100) les deux systèmes 1 et 5 sont symétriques et identiquement chargés et aussi pour 2 et 4 ; 3 et 6 ; 7 et 12 ; 8 et 10 ; 9 et 11. Il est donc clair que l'on peut écrire $\dot{\gamma}^1 = \dot{\gamma}^5$; $\dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}^4$; $\dot{\gamma}^3 = \dot{\gamma}^6$; $\dot{\gamma}^7 = -\dot{\gamma}^{12}$; $\dot{\gamma}^8 = -\dot{\gamma}^{10}$; $\dot{\gamma}^9 = \dot{\gamma}^{11}$, on aura une cinématique plane discrète à 6 mécanismes $\dot{\alpha}^s$ tel que :

$$\dot{\alpha}^1 = \dot{\gamma}^1 + \dot{\gamma}^5$$

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^4$$

$$\dot{\alpha}^3 = \dot{\gamma}^3 + \dot{\gamma}^6$$

$$\dot{\alpha}^4 = \dot{\gamma}^7 - \dot{\gamma}^{12}$$

$$\dot{\alpha}^5 = \dot{\gamma}^8 - \dot{\gamma}^{10}$$

$$\dot{\alpha}^6 = \dot{\gamma}^9 - \dot{\gamma}^{11}$$

On peut ainsi calculer les nouvelles cissions réduites associées aux 6 pseudo-systèmes de glissement et leurs contributions à la déformation. Les résultats sont regroupés dans le tableau (II.2).

On obtient le modèle monocristal plan CFCP1 avec 6 mécanismes représentatifs du monocristal cubique à faces centrées en sollicitation plane dans le plan de symétrie (100).

Tableau II.2. Le monocristal CFCP1

Système	Cission résolue τ^s	Pseudo-système \bar{N}^s
S = 1	$\tau^1 = \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
S = 2	$\tau^2 = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{12}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
S = 3	$\tau^3 = \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
S = 4	$\tau^4 = \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{12}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
S = 5	$\tau^5 = \frac{\bar{T}_{12} - \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
S = 6	$\tau^6 = \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}}$	$\bar{N}^6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2.2. Monocristal CFCP2

Considérons un monocristal cubique à faces centrées en sollicitation plane dans le plan de symétrie (110). Les vecteurs de base \bar{x}_1 , \bar{x}_2 et \bar{x}_3 , dans la configuration 2 cristallographique \bar{c} , sont choisis respectivement par:

$$\bar{x}_1 = [001] , \bar{x}_2 = [1\bar{1}0] , \bar{x}_3 = [110]$$

Dans ce système d'axes, les composantes correspondantes de \bar{g}^s et \bar{n}^s sont données dans le tableau (II.3).

Tableau II.3. Les systèmes de glissement dans la configuration isocline 2

Systèmes	Plan	Direction	$\sqrt{3} \bar{n}^s$	$2 \bar{g}^s$
S=1	(111)	$[1\bar{1}0]$	$(1,0,\sqrt{2})$	$(0,2,0)$
S=2	(111)	$[10\bar{1}]$	$(1,0,\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},1,1)$
S=3	(111)	$[01\bar{1}]$	$(1,0,\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},-1,1)$
S=4	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[101]$	$(-1,0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},1,1)$
S=5	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[1\bar{1}0]$	$(-1,0,\sqrt{2})$	$(0,1,0)$
S=6	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[011]$	$(-1,0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},-1,1)$
S=7	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[10\bar{1}]$	$(1,\sqrt{2},0)$	$(-\sqrt{2},1,1)$
S=8	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[011]$	$(1,\sqrt{2},0)$	$(\sqrt{2},-1,1)$
S=9	$(1\bar{1}\bar{1})$	$[110]$	$(1,\sqrt{2},0)$	$(0,0,1)$
S=10	$(\bar{1}11)$	$[01\bar{1}]$	$(1,-\sqrt{2},0)$	$(-\sqrt{2},-1,1)$
S=11	$(\bar{1}11)$	$[110]$	$(1,-\sqrt{2},0)$	$(0,0,2)$
S=12	$(\bar{1}11)$	$[101]$	$(1,-\sqrt{2},0)$	$(\sqrt{2},1,1)$

On suppose que $T_{33} = \bar{T}_{33} = 0$ (contraintes planes). \bar{T} s'écrit:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{12} & \bar{T}_{22} \end{bmatrix}$$

Cissions réduites s'écrit:

$$\tau^s = \bar{T} : \bar{M}^s$$

Les tenseurs \bar{M}^s et les cissions réduites τ^s sont facilement obtenus pour tous les systèmes, est sont regroupées dans le tableau (II.4).

Tableau II.4. Les tenseurs \bar{M}^s et les cissions réduites τ^s

Systèmes	\bar{M}^s	τ^s
S=1	$\bar{M}^1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^1 = 2\bar{T}_{12}$
S=2	$\bar{M}^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^2 = \bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11}$
S=3	$\bar{M}^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^3 = -\bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11}$
S=4	$\bar{M}^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^4 = -\bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11}$
S=5	$\bar{M}^5 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^5 = -2\bar{T}_{12}$
S=6	$\bar{M}^6 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^6 = \bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11}$
S=7	$\bar{M}^7 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^7 = -\bar{T}_{12} + \sqrt{2}(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})$
S=8	$\bar{M}^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^8 = \bar{T}_{12} - \sqrt{2}(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})$
S=9	$\bar{M}^9 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\tau^9 = 0$
S=10	$\bar{M}^{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^{10} = \bar{T}_{12} + \sqrt{2}(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})$
S=11	$\bar{M}^{11} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\tau^{11} = 0$
S=12	$\bar{M}^{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{3}\tau^{12} = -\bar{T}_{12} - \sqrt{2}(\bar{T}_{22} - \bar{T}_{11})$

L'examen de ces tenseurs \bar{M}^s montre que l'on peut regrouper les systèmes 2 par 2. Par exemple, si on considère les deux systèmes 1 et 5, nous aurons :

$$\bar{M}^1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{M}^5 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\sqrt{3}\tau^1 = 2\bar{T}_{12} = -2\sqrt{3}\tau^5$$

D'après l'équation (I.9) on a :

$$\dot{\gamma}^1 = -\dot{\gamma}^5$$

De même pour les deux systèmes 2 et 6, nous avons

$$\bar{M}^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \bar{M}^6 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$2\sqrt{3}\tau^2 = 2\sqrt{3}\tau^6 = \bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11}$$

$$\text{Donc } \dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}^6$$

Pour les deux systèmes 9 et 11 on a:

$$\tau^9 = \tau^{11} = 0$$

Donc :

$$\dot{\gamma}^9 = \dot{\gamma}^{11} = 0$$

Ceci montre que dans ce plan (110) les deux systèmes 1 et 5 sont symétriques et identiquement chargés et aussi pour 2 et 6. Il est donc clair que l'on peut écrire $\dot{\gamma}^1 = -\dot{\gamma}^5$ et $\dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}^6$, puisque $\dot{\gamma}^9 = \dot{\gamma}^{11} = 0$ on aura une cinématique plane discrète à Cinq mécanismes $\dot{\alpha}^s$ tel que :

$$\dot{\alpha}^1 = \dot{\gamma}^1 - \dot{\gamma}^5$$

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^6$$

$$\dot{\alpha}^3 = -\dot{\gamma}^3 - \dot{\gamma}^4$$

$$\dot{\alpha}^4 = -\dot{\gamma}^7 - \dot{\gamma}^8$$

$$\dot{\alpha}^5 = \dot{\gamma}^{10} - \dot{\gamma}^{12}$$

On peut ainsi calculer les nouvelles cissions réduites associées aux cinq pseudo-systèmes de glissement et leurs contributions à la déformation. Les résultats sont regroupés dans le tableau (II.5).

On obtient le modèle monocristal plan CFCP2 avec cinq mécanismes représentatifs du monocristal cubique à faces centrées en sollicitation plane dans le plan de symétrie (110).

Tableau II.5. Le monocristal CFCP2

Système	Cission résolue τ^s	Pseudo-système \bar{N}^s
$S = 1$	$\tau^1 = \frac{\bar{T}_{12}}{\sqrt{3}}$	$\bar{N}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
$S = 2$	$\tau^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{T}_{12} - \sqrt{2}\bar{T}_{11})$	$\bar{N}^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$S = 3$	$\tau^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{T}_{12} + \sqrt{2}\bar{T}_{11})$	$\bar{N}^{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$S = 4$	$\tau^4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{T}_{12} + \sqrt{2}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}))$	$\bar{N}^{(4)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$
$S = 5$	$\tau^5 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{T}_{12} - \sqrt{2}(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}))$	$\bar{N}^{(5)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. Monocristal en cinématique plane

Avec ces notations, le monocristal plan devient représenté par les lois de comportement suivantes:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} = \sum_s^{5 \text{ ou } 6} \dot{\alpha}^s \bar{\mathbf{N}}^s, \quad (\text{II.10})$$

Et les lois de glissement reliant la vitesse $\dot{\alpha}^s$ à la cission réduite τ^s

$$\dot{\alpha}^s = a(\tau^s) \quad (\text{II.11})$$

Qui s'écrit par:

- dans le cas plastique.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^s &\geq 0 \quad \text{if} \quad \tau^s = \tau_c, \\ \dot{\alpha}^s &= 0 \quad \text{if} \quad |\tau^s| \leq \tau_c, \\ \dot{\alpha}^s &\leq 0 \quad \text{if} \quad \tau^s = -\tau_c, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

- dans le cas viscoplastique.

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^s &= \frac{1}{\mu} (\tau^s - \tau_c) \geq 0 \quad \text{if} \quad \tau^s \geq \tau_c, \\ \dot{\alpha}^s &= 0 \quad \text{if} \quad -\tau_c \leq \tau^s \leq \tau_c, \\ \dot{\alpha}^s &= \frac{1}{\mu} (\tau^s + \tau_c) \quad \text{if} \quad \tau^s \leq -\tau_c,\end{aligned}\tag{II.13}$$

Finalement la relation cinématique (I.16) et (I.17) deviennent:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{11} &= \sum_s^{5 \text{ ou } 6} \dot{\alpha}^s \bar{N}_{11} \\ \bar{D}_{22} &= \sum_s^{5 \text{ ou } 6} \dot{\alpha}^s \bar{N}_{22} \\ \bar{D}_{12} &= \frac{1}{2} \sum_s^{5 \text{ ou } 6} \dot{\alpha}^s (\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21}),\end{aligned}\tag{II.14}$$

$$W_{12} = \dot{\theta} + \omega^p \tag{II.15}$$

Où

$$\omega^p = \frac{1}{2} \sum_s^{5 \text{ ou } 6} \dot{\alpha}^s (\bar{N}_{12}^s - \bar{N}_{21}^s), \tag{II.16}$$

Les modèles CFCP1 et CFCP2 que nous venons de présenter ici sont deux modèles mathématiquement simples mais représentatifs du comportement d'un monocristal. Ils conduisent à travailler, pour les contraintes et les déformations, dans des espaces réduits; ce qui rend les analyses relativement simples.

Ainsi, pour une cinématique donnée, selon le modèle utilisé nous avons à résoudre les équations (II.11), (II.14) et (I.15) pour 9 (ou 10) inconnues; 5 (ou 6) vitesses de glissement $\dot{\alpha}^s$, 3 composantes des contraintes $(\bar{T}_{11}, \bar{T}_{22}, \bar{T}_{12})$ et l'orientation du réseau cristallin $\dot{\theta}$.

4. Le Monocristal plan rigide plastique

4.1. Analyse cinématique

4.1.1. Cas du CFCP1

Pour le cas du CFCP1, on a 6 systèmes de glissement. Nous écrivons donc directement à partir de l'équation (II.14).

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5) \\
 \bar{D}_{22} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^3 - \dot{\alpha}^5 - \dot{\alpha}^6) \\
 \bar{D}_{12} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3 - \dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5) \\
 \bar{\omega}_{12}^p &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(2\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}^3 - \dot{\alpha}^4 - \dot{\alpha}^5 - 2\dot{\alpha}^6)
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

L'examen de ces équations montre qu'il ya découplage entre les trois dernières équations, ce qui nous fait apparaître la combinaison $\dot{\alpha}^1 - \dot{\alpha}^3$, cette dernière va être calculer à partir de \bar{D}_{22} , \bar{D}_{12} , et $\bar{\omega}_{12}^p$ on aura alors :

$$(\dot{\alpha}^1 - \dot{\alpha}^3) = \frac{2\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) \tag{II.18}$$

$$\text{Si on pose } 2\xi_1 = \dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^3 \tag{II.19}$$

L'équation (II.19) devient :

$$(\dot{\alpha}^1 - \dot{\alpha}^3) + \dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^3 = \frac{2\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) + 2\xi_1 \tag{II.20}$$

Alors :

$$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_1 \tag{II.21}$$

D'après (II.20) et (II.21), on peut obtenir $\dot{\alpha}^3$ facilement, donc :

$$\dot{\alpha}^1 - \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_1 - \dot{\alpha}^3 \tag{II.22}$$

Alors :

$$2\xi_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_1 - \dot{\alpha}^3 \tag{II.23}$$

Ce qui donne :

$$\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_1 \tag{II.24}$$

Les quatre équations font intervenir ξ_1 , on pourra donc calculer $\dot{\alpha}^2$ en fonction de \bar{D}_{12} , $\bar{\omega}_{12}^p$ et ξ_1 .

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} + 3\bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_1 \tag{II.25}$$

Les trois équations de \bar{D}_{11} , \bar{D}_{12} et $\bar{\omega}_{12}^p$ font intervenir $2\xi_2 = \dot{\alpha}^6 - \dot{\alpha}^4$ (II.26), on pourra donc calculer $\dot{\alpha}^4$ de \bar{D}_{12} , $\bar{\omega}_{12}^p$ et ξ_2 .

$$\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_2 \tag{II.27}$$

D'après (II.26) et (II.27) on peut obtenir $\dot{\alpha}^6$ facilement, donc :

$$\dot{\alpha}^6 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_2 \quad (\text{II.28})$$

Ce qui permet finalement d'écrire :

$$\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{4} (-\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_2 \quad (\text{II.29})$$

Donc pour le CFCP1, on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{4} (-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_1 \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} + 3\bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_1 \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_1 \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_2 \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{4} (-\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) - \xi_2 \\ \dot{\alpha}^6 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p) + \xi_2 \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Qui donne $\dot{\alpha}^s$ en fonction de $\bar{\mathbf{D}}$ et de trois quantités indéterminées ξ_1 , ξ_2 et ω^p .

4.1.2. Cas du CFCP2

Le cas du CFCP2, est le plus simple car il ne fait intervenir que 5 systèmes. Nous écrivons donc directement à partir d'équation (II.14).

$$\begin{cases} \bar{D}_{11} = \frac{1}{\sqrt{6}} (-\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3 + \dot{\alpha}^4 - \dot{\alpha}^5) \\ \bar{D}_{22} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\dot{\alpha}^5 - \dot{\alpha}^4) \\ \bar{D}_{12} = \frac{1}{4\sqrt{3}} (2\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3 + \dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5) \\ \bar{\omega}_{12}^p = \frac{1}{4\sqrt{3}} (-2\dot{\alpha}^1 - \dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}^3 + 3\dot{\alpha}^4 + 3\dot{\alpha}^5) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

L'examen de ces équations montre qu'il ya découplage entre les deux premières équations qui ne font apparaitre que les deux combinaisons $\dot{\alpha}^4 - \dot{\alpha}^5$ et $\dot{\alpha}^3 - \dot{\alpha}^2$, qui vont donc être calculer à partir de \bar{D}_{11} et \bar{D}_{22} , alors :

$$(\dot{\alpha}^5 - \dot{\alpha}^4) = \sqrt{6}\bar{D}_{22} \text{ et } (\dot{\alpha}^3 - \dot{\alpha}^2) = \sqrt{6}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \quad (\text{II.32})$$

Les deux dernières équations font intervenir les trois combinaisons $\dot{\alpha}^1$, $\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3$ et $\dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5$, on pourra donc calculer ces 3 groupements en fonction de \bar{D}_{12} , $\bar{\omega}_{12}^p$ et ξ . Nous réécrivons ces deux dernières équations :

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3}\bar{D}_{12} &= ((2\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3) + (\dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5)) \\ 2\sqrt{3}\bar{\omega}_{12}^p &= (-(2\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3) + 3(\dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5)) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

D'où nous tirons:

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}^4 + \dot{\alpha}^5) &= \sqrt{3}(\bar{\omega}_{12}^p + \bar{D}_{12}) \\ (2\dot{\alpha}^1 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3) &= \sqrt{3}(-\bar{\omega}_{12}^p + 3\bar{D}_{12}) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Ce qui nous ramène à poser :

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3) &= \xi \\ 2\dot{\alpha}^1 &= \sqrt{3}(-\xi - \bar{\omega}_{12}^p + 3\bar{D}_{12}) \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Ce qui permet finalement d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\alpha}^1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(3\bar{D}_{12} - \bar{\omega}_{12}^p - \xi) \\ \dot{\alpha}^2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p - \sqrt{2}\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^5 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{D}_{12} + \bar{\omega}_{12}^p + \sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.36})$$

qui donne $\dot{\alpha}^s$ en fonction de $\bar{\mathbf{D}}$ et des deux quantités indéterminées ξ et ω^p .

Les équations (II.30) et (II.36) sont les équations de base pour les monocristaux plans CFCP1 et CFCP2.

Pour une cinématique plane imposée (II.1), si l'on se donne ε , η et γ , on connaît \bar{D}_{11} , \bar{D}_{22} et \bar{D}_{12} par (II.6). On dispose donc, en écrivant pour un monocristal plan d'un système:

- De 11 (resp. 12) équations:

- Les 5 (resp. 6) équations (II.36) (resp. (II.30));
- L'équation (II.15);
- Les 5 (resp. 6) lois de comportement;

- à 11 (resp.12) inconnues:

- Les 5 (resp. 6) glissements $\dot{\alpha}^s$;
- Les 3 contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \tau)$;

- Les 2 (resp. 3) indéterminées (ξ, ω^P) (resp. (ξ_1, ξ_2, ω^P));
- La vitesse de rotation $\dot{\theta}$.

Au contraire si l'on se donne le tenseur des contraintes \mathbf{T} (torsion, traction hors-axes...) alors à un instant donné (donc pour un θ fixe) on pourra calculer:

- Les cissions réduites τ^s par le tableau (II.5) (resp. tableau (II.2));
- Les $\dot{\alpha}^s$ par la loi de glissement (II.11);
- Les vitesses \bar{D}_{11} , \bar{D}_{22} et \bar{D}_{12} à partir de (II.14) puis les dérivées $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\eta}$ et $\dot{\gamma}$ par (II.5);
- La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ par (II.15).

4.2. Surface seuil

Pour les monocristaux plans, la situation est moins compliquée du fait que nous nous trouvons dans un espace à trois dimensions. En effet, les inégalités (I.20) s'écrivent:

$$-\tau_c \leq \sigma^s = \bar{T}_{ij} \bar{N}^s_{ij} \leq \tau_c \quad (\text{II.37})$$

Afin de conserver la normalité et pour construire ce domaine, nous introduisons dans l'espace des tenseurs plans, la base orthonormée suivante:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Un tenseur quelconque \mathbf{X} s'écrit dans cette base par:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 X_i a_i \quad (\text{II.39})$$

Où

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{11} \\ X_2 &= X_{22} \\ X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{12} + X_{21}) \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{12} - X_{21}) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Le tenseur des contraintes $\bar{\mathbf{T}}$ s'écrit alors:

$$\bar{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{X} \quad ; \quad X_1 = \bar{T}_{11}, \quad X_2 = \bar{T}_{22}, \quad X_3 = \sqrt{2} \bar{T}_{12} \quad (\text{II.41})$$

Les relations (II.37) sont:

- Pour le monocristal CFCP2

$$\begin{aligned}
 -2\tau_c \sqrt{6} &\leq 2X_3 \leq 2\tau_c \sqrt{6} \\
 -2\tau_c \sqrt{6} &\leq X_3 - 2X_1 \leq 2\tau_c \sqrt{6} \\
 -2\tau_c \sqrt{6} &\leq X_3 + 2X_1 \leq 2\tau_c \sqrt{6} \\
 -2\tau_c \sqrt{6} &\leq X_3 + 2(X_1 - X_2) \leq 2\tau_c \sqrt{6} \\
 -2\tau_c \sqrt{6} &\leq X_3 - 2(X_1 - X_2) \leq 2\tau_c \sqrt{6}
 \end{aligned} \tag{II.42}$$

Ce qui donne dans l'espace (X_1, X_2, X_3) une surface:

- Symétrique par rapport au plan X_3 ,
- Symétrique par rapport à l'axe X_3 .

Il suffit donc de construire le quart de la surface (par exemple $X_3 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$). Le polyèdre de Bishop et Hill se réduit à la surface schématisée sur la figure (II.1). C'est un polyèdre à 10 faces, 20 arêtes et 12 sommets dont 8 simples (intersection de 3 faces ou 3 arêtes) et 4 dégénérés (intersection de 4 faces ou 4 arêtes).

- Pour le monocristal CFCP1

$$\begin{aligned}
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq \sqrt{2}(X_1 - X_2) \leq 2\tau_c \sqrt{3} \\
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq \sqrt{2}X_1 + X_3 \leq 2\tau_c \sqrt{3} \\
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq \sqrt{2}X_2 + X_3 \leq 2\tau_c \sqrt{3} \\
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq \sqrt{2}X_1 - X_3 \leq 2\tau_c \sqrt{3} \\
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq -\sqrt{2}X_2 + X_3 \leq 2\tau_c \sqrt{3} \\
 -2\tau_c \sqrt{3} &\leq \sqrt{2}(X_1 - X_2) \leq 2\tau_c \sqrt{3}
 \end{aligned} \tag{II.43}$$

Ce qui donne la surface représentée sur la figure (II.2). C'est un polyèdre à 10 facettes, 20 arêtes et 12 sommets dégénérés (intersection de 4 facettes).

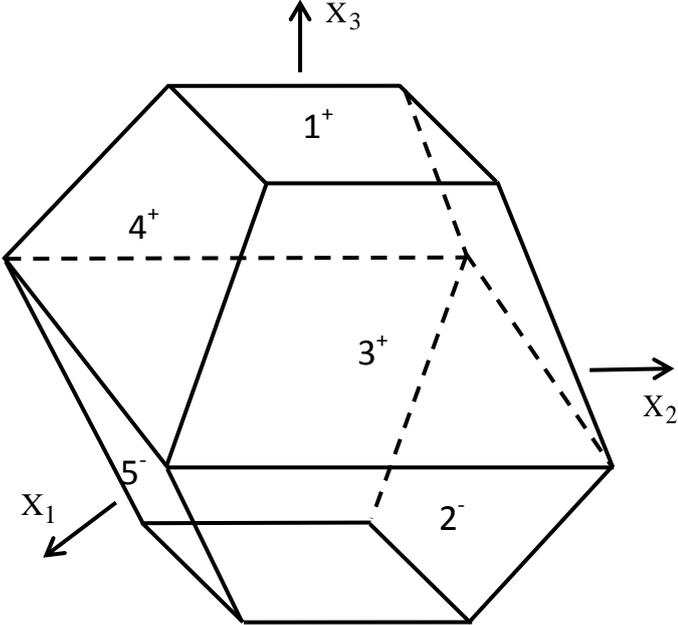


Figure II.1 : CFCP2 : Surface de plasticité.

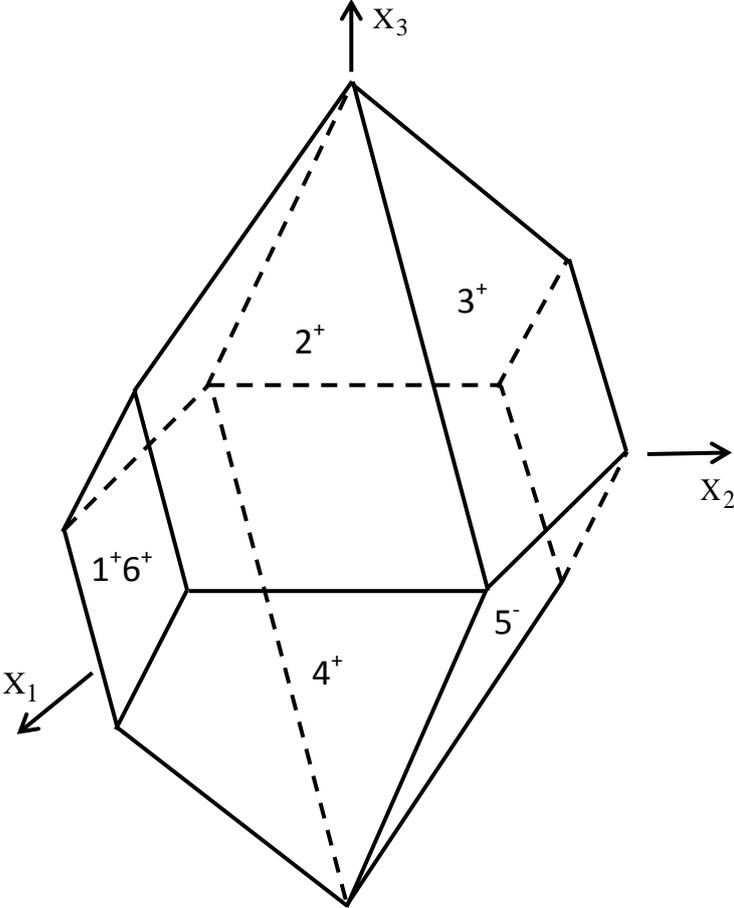


Figure II.2 : CFCP1 : Surface de plasticité.

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le cadre constitutif d'un monocristal se déformant par glissements cristallographiques.

Plus précisément, nous nous sommes intéressés au cas des monocristaux cubiques à faces centrées, pour lesquels nous avons introduit le cas d'une sollicitation plane dans un plan de symétrie.

Deux modèles de monocristaux plans ont été présentés:

- Le CFCP1 : représentative du monocristal sollicité dans le plan $\{100\}$. Ce qui donne un milieu caractérisé par 6 mécanismes;

- Le CFCP2 : représentative du monocristal sollicité dans le plan $\{110\}$. Ce qui donne un milieu caractérisé par 5 mécanismes.

Ensuite, une étude cinématique, de ces deux modèles, a été présentée dans le cas rigide plastique.

Dans la suite de ce travail nous allons insister plus particulièrement sur le comportement du monocristal CFCP2. Puisque l'analyse pour le CFCP1 est obtenue de la même manière, nous nous limiterons, lorsque ce dernier sera évoqué, à la simple présentation des résultats.

Nous allons maintenant appliquer le modèle monocristal plan au cas des essais plans en déformations et en contraintes.

Chapitre III:
Représentation plan projectif.

Introduction

La surface de plasticité est une représentation géométrique définissant la loi plastique dans l'espace des contraintes (X_1, X_2, X_3) . Suivant la règle de normalité, nous pouvons introduire une autre représentation (plan projectif) dans l'espace des vitesses des déformations.

Dans les travaux antérieurs (chenaoui, Boukadia, (1990)), la représentation plan projectif a été largement détaillé pour les deux modèles monocristallins CFCP1 et CFCP2. Ceci a été introduit dans le cadre du comportement monocristal rigide plastique. Il a été démontré dans ces travaux que l'utilisation de ce type de représentation présente toujours le problème d'indétermination des systèmes de glissement.

Dans ce chapitre, pour soulever ce problème d'indétermination nous allons présenter une nouvelle représentation plan projectif, pour les deux monocristaux. Ceci on se basant sur la loi viscoplastique de Bingham.

1. Plan projectif

Dans la base (II.38), la vitesse des déformations devient donc caractériser par le vecteur:

$$Y_1 = \bar{D}_{11}, Y_2 = \bar{D}_{22}, Y_3 = \sqrt{2} \bar{D}_{12} \quad (\text{III.1})$$

La vitesse de rotation est donnée par la 4^{ème} composante \bar{Y}_4 du tenseur gradient des vitesses plastiques $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}$.

Pour le monocristal obéissant au principe du travail maximal, le vecteur \bar{Y} , en tout point, est normal à la surface de plasticité et seule la direction de \bar{Y} est alors déterminée. Dans le cas de la plasticité parfaite ou de l'écroutissage isotrope (cas qui nous intéresse ici), pour représenter la loi de comportement, il est intéressant de caractériser l'état des contraintes en fonction de $\bar{\mathbf{D}}$.

On utilise le fait qu'en tout point de la surface seuil, c'est à dire pour chaque face du polyèdre qui définit également l'activité d'un système, le vecteur \bar{Y} est porté par la normale à la face du polyèdre.

N'ayant tenu compte que de la direction du vecteur \bar{Y} (plasticité indépendante des vitesses), nous pouvons introduire la notion du plan projectif (intersection de la droite avec un plan fixe) dans l'espace des déformations. Une vitesse de déformation sera donc caractérisée non pas par une droite mais par une demi-droite. Il convient donc de représenter plutôt les vitesses des déformations par deux plans physiques correspondant aux intersections des demi-droites avec les deux plans $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{h} = +1$ et $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{h} = -1$. Cette distinction est nécessaire pour pouvoir suivre les systèmes actifs (signe compris). Sur les figures (III.1) et (III.2), nous avons illustré la représentation plan projectif, dans le plan $Y_3 = \pm 1$, respectivement pour les deux monocristaux plans CFCP2 et CFCP1.

1.1. Cas rigide plastique

Ces diagrammes (figures (III.1) et (III.2)) donnent, pour une vitesse de déformation donnée les systèmes actifs et le point correspondant sur la surface de plasticité.

En effet, chaque face du polyèdre de la figure (II.1) (respectivement. figure (II.2)) correspond à une direction et par conséquent à un point dans la représentation plan projectif figure (III.1) (respectivement. figure (III.2)). De même une arête dans la figure (II.1) (respectivement. figure (II.2)) correspond à un segment dans la figure (III.1) (respectivement.

figure (III.2)) et chaque sommet de la surface de plasticité figure (II.1) (respectivement. figure (II.2)) correspond à un triangle ou un quadrilatère dans l'espace des déformations, selon que ce sommet est une intersection de trois ou quatre plans.

Les sommets à trois surfaces correspondent à l'activation de trois systèmes. Ces sommets, comme par exemple le sommet C du monocristal CFCP2 (figure II.2), sont représentés dans l'espace Y par un triangle et n'introduisent donc pas d'indétermination: La connaissance de D permet la détermination des trois vitesses de glissement possibles.

D'autres sommets par contre, par exemple le sommet A dans le monocristal CFCP2 (figure (II.2)), résultent de l'intersection de quatre faces et correspondent à l'activation de quatre systèmes avec l'indétermination correspondante. Ces sommets sont représentés dans les plans projectifs par un quadrilatère.

Un autre type d'indétermination moins classique s'obtient dans le cas du monocristal CFCP1 où deux faces peuvent être confondues, car les conditions d'activation (II.43) des deux systèmes 1 et 6 coïncident. Un sommet à trois faces, comme F (figure (II.1)), par exemple, correspond encore à l'activation de quatre systèmes, donc à une indétermination.

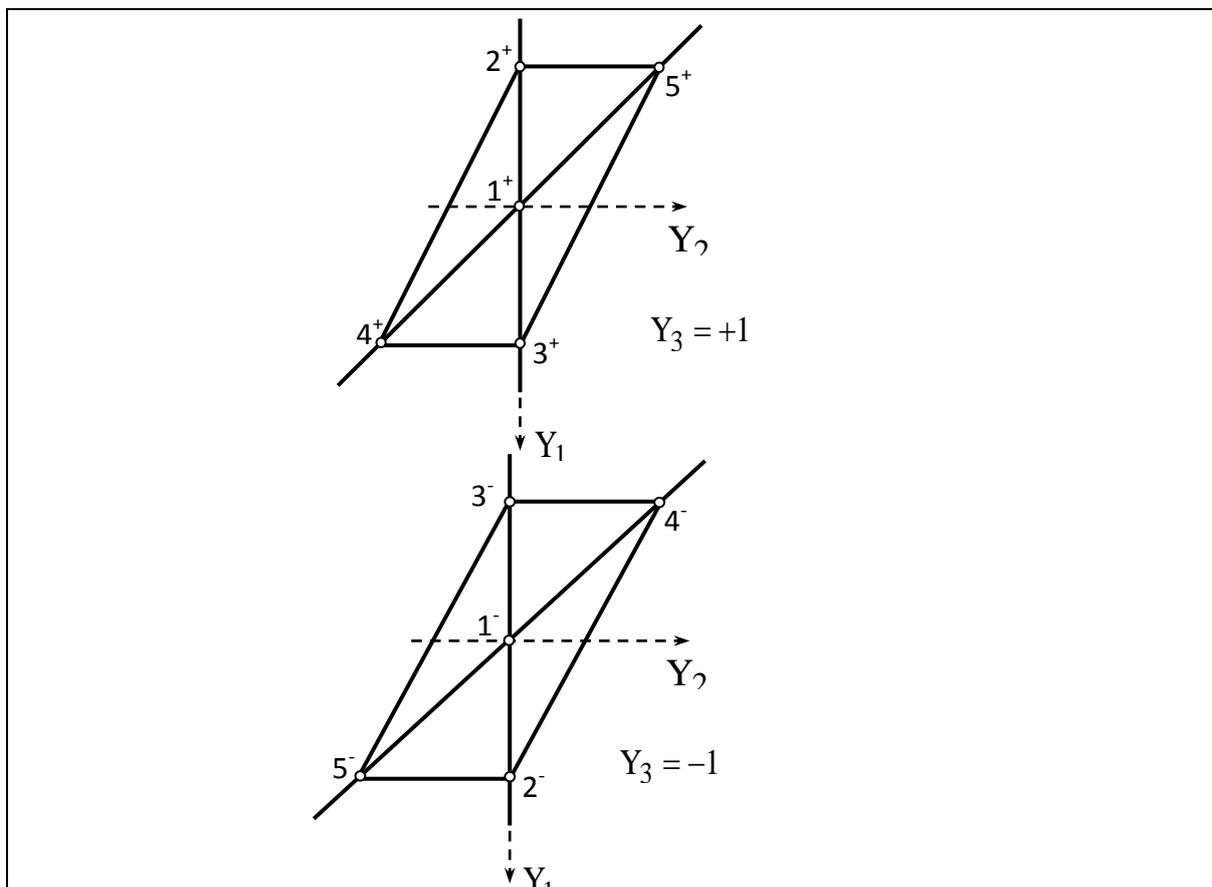


Figure III.1 : CFCP2 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = \pm 1$.

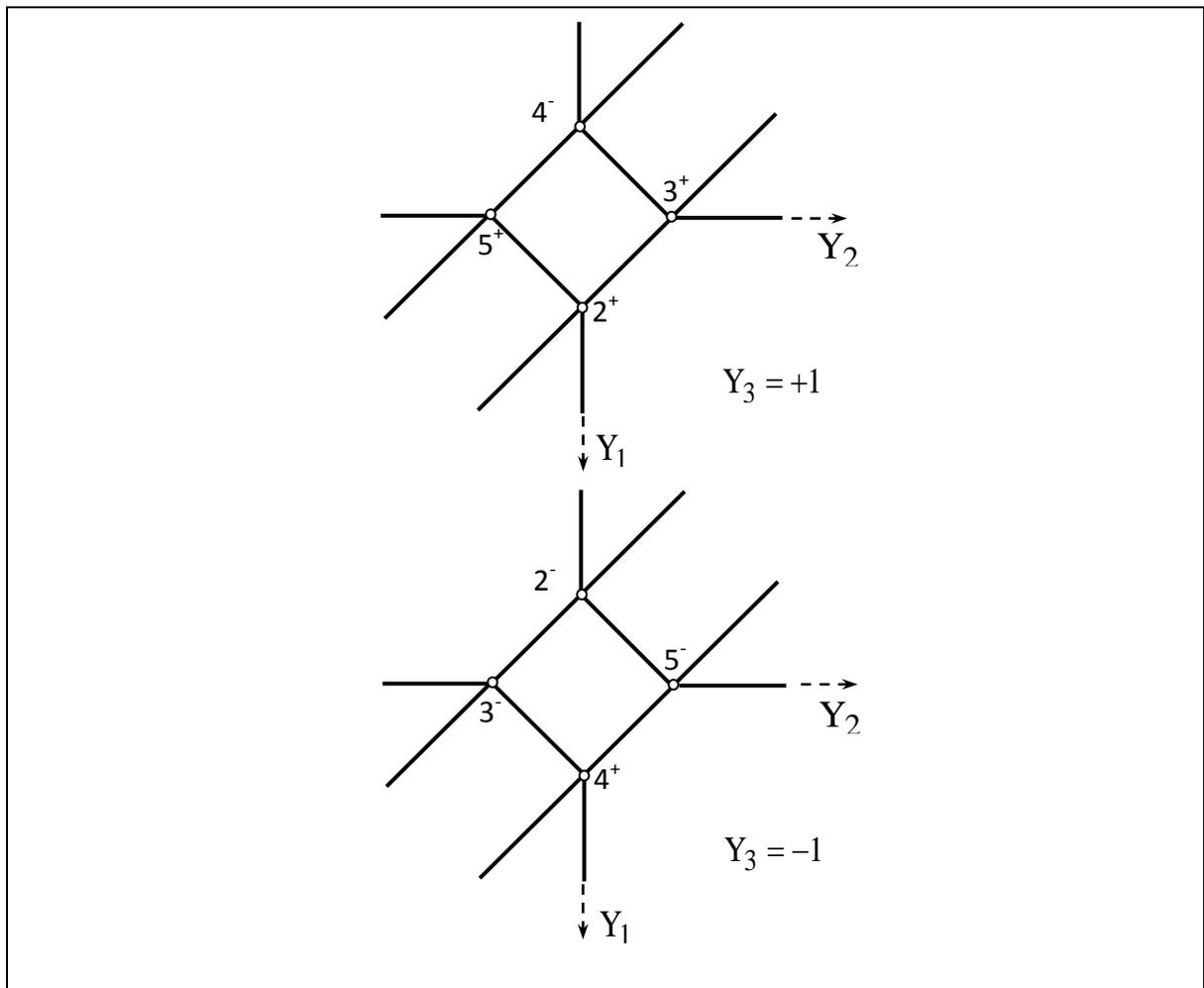


Figure III.2 : CFCP1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = \pm 1$.

1.2. Cas viscoplastique

Pour lever l'indétermination rencontrée dans le cas rigide plastique, nous avons introduit la dépendance par rapport aux vitesses, en considérant la loi viscoplastique de Bingham (1922). Et nous avons introduit une nouvelle représentation plan projectif pour le monocristal CFCP2 et CFCP1.

1.2.1. Pour monocristal CFCP2

A) Analyse des sommets

✓ Systèmes 2, 3, 4 et 5.

D'après le tableau (II.5) on a:

$$\tau^1 = \frac{\tau^2 + \tau^3 + \tau^4 + \tau^5}{2} \quad (\text{III.2})$$

$$\text{Donc } \tau^1 = \mu 2\sqrt{3}\bar{D}_{12} \quad (\text{III.3})$$

Et on a $\tau^1 = \frac{\bar{T}_{12}}{\sqrt{3}}$ donc :

$$\bar{T}_{12} = 6\mu\bar{D}_{12} \quad (\text{III.4})$$

D'après les équations (II.36), $\dot{\alpha}^1 = 0 \Leftrightarrow \xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12}$ et $\xi = \frac{\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3}{\sqrt{3}} = \frac{\tau^2 + \tau^3}{2\mu} = \frac{\bar{T}_{12}}{3\mu}$

On a:

$$\bar{T}_{12} = 3\mu\xi \quad (\text{III.5})$$

D'après les équations (III.4) et (III.5) on a:

$$\xi = 2\bar{D}_{12} \quad (\text{III.6})$$

$$\xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12} \Leftrightarrow \bar{\omega}_{12}^p = \bar{D}_{12} \quad (\text{III.7})$$

D'après les équations (III.6) et (III.7), les équations (II.36) deviennent:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) (III.1) .

Donc les équations (III.8) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2} (Y_3 - (Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{2} (Y_3 + (Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2} (Y_3 - Y_2) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2} (Y_3 + Y_2) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

On considère les équations des 4 droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 tels que:

$$\begin{cases} \Delta_1: Y_3 - (Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_2: Y_3 + (Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_3: Y_3 - Y_2 = 0 \\ \Delta_4: Y_3 + Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 4 systèmes 2, 3, 4 et 5 :

Cas: $2^+3^-4^+5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_3 - (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ Y_3 + (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ Y_3 - Y_2 \geq 0 \\ Y_3 + Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Cas: $2^+3^-4^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_3 - (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ Y_3 + (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ Y_3 - Y_2 \leq 0 \\ Y_3 + Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Cas: $2^-3^+4^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_3 - (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ Y_3 + (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ Y_3 - Y_2 \leq 0 \\ Y_3 + Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Cas: $2^-3^+4^+5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_3 - (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ Y_3 + (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ Y_3 - Y_2 \geq 0 \\ Y_3 + Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.3) et la figure (III.4).

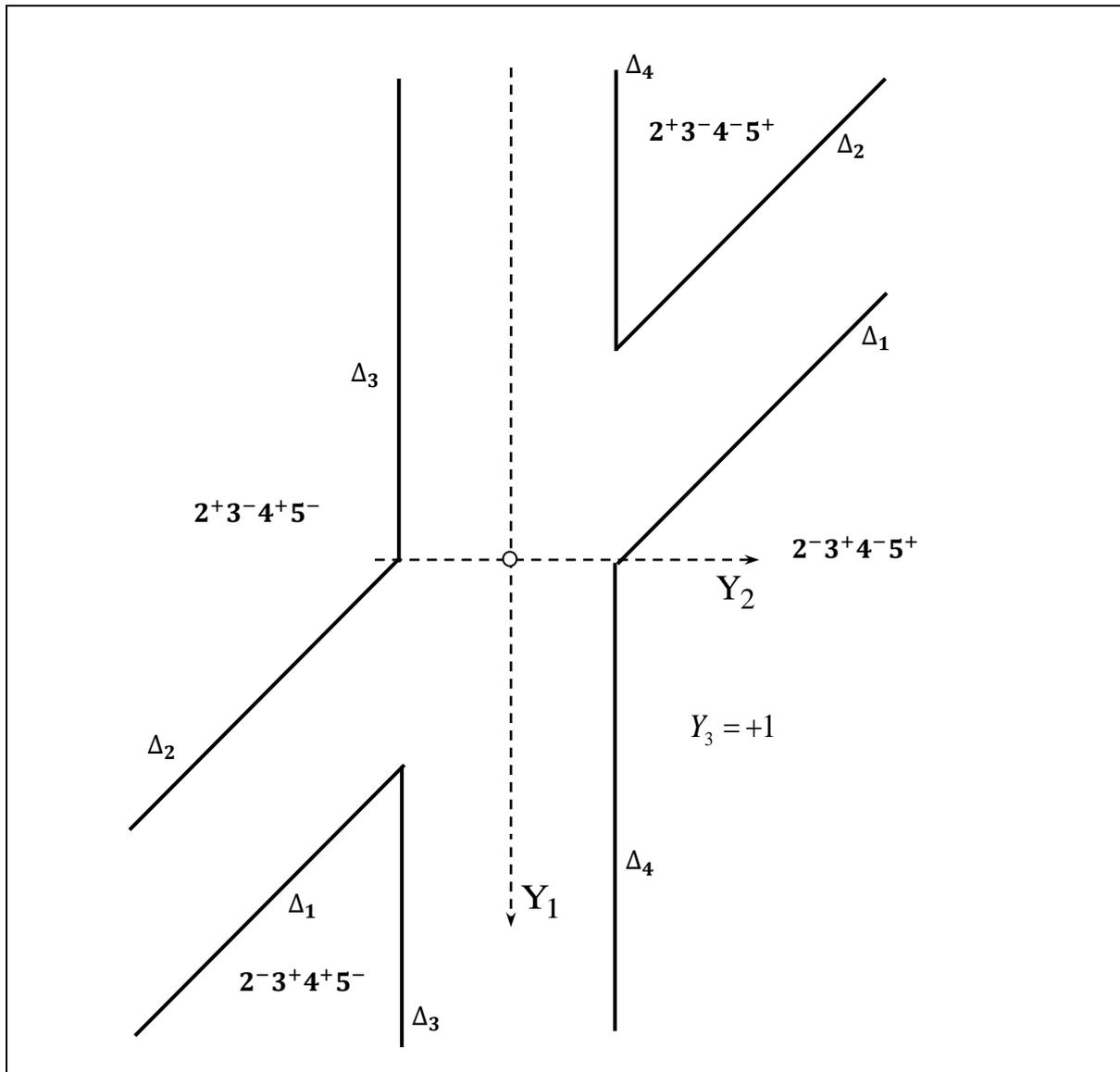


Figure III.3: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

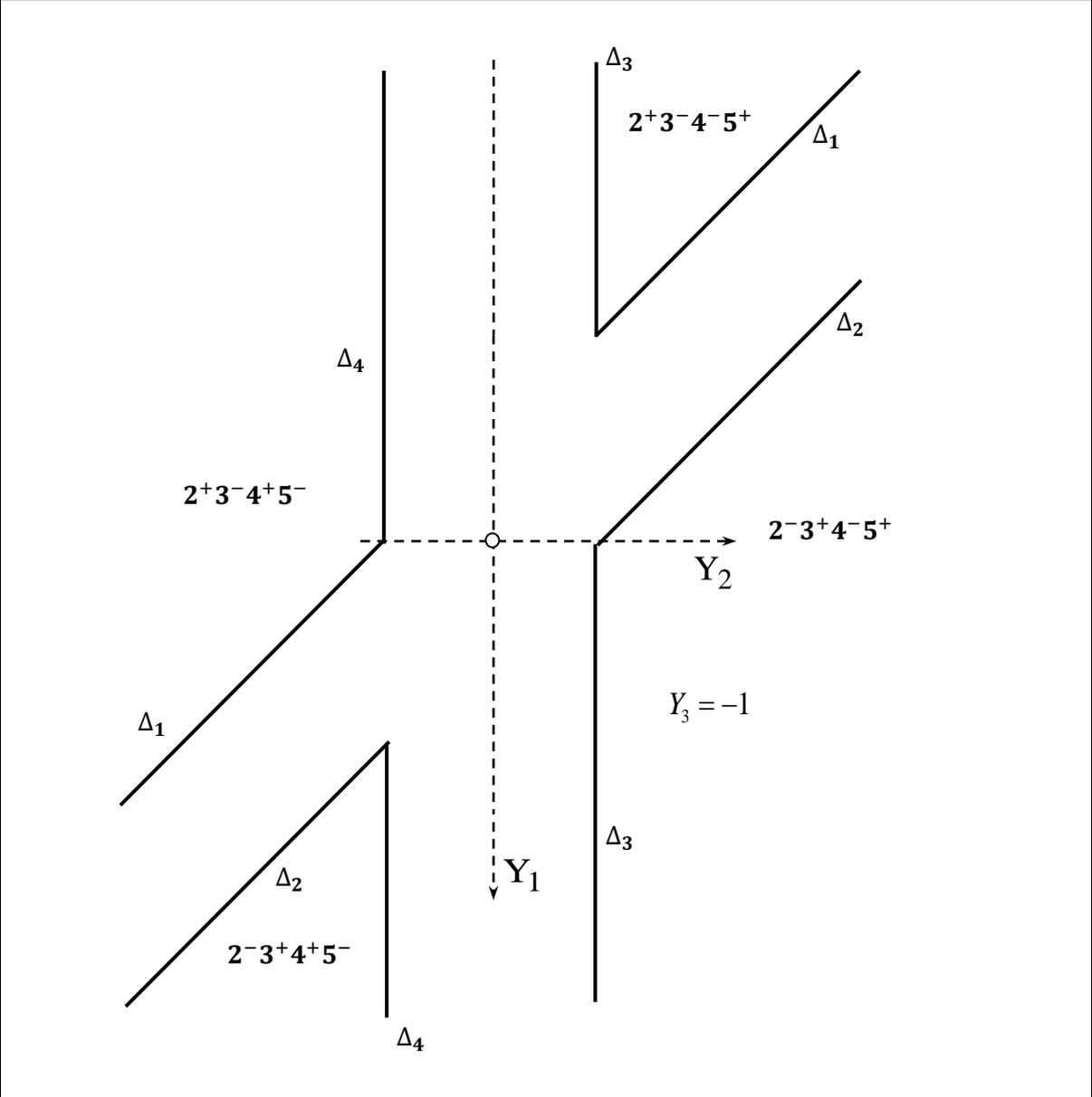


Figure III.4: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

✓ **Systèmes 2,3 et 4.**

D'après les équations (II.36), $\dot{\alpha}^1 = 0 \Leftrightarrow \xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12}$ et $\dot{\alpha}^5 = 0 \Leftrightarrow \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$

Donc :

$$\xi = 4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \quad (\text{III.15})$$

et

$$\bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \quad (\text{III.16})$$

De (III.15) et (III.16) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , (III. 1), les équations (III.17) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 - Y_1) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2Y_2) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_5, Δ_6 et Δ_7 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_5: 2Y_3 - Y_1 = 0 \\ \Delta_6: 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \\ \Delta_7: 2Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 système 2, 3 et 4:

Cas: $2^+3^-4^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Cas: $2^+3^-4^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Cas : $2^-3^+4^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Cas :2⁻3⁺4⁺

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.5) et la figure (III.6).

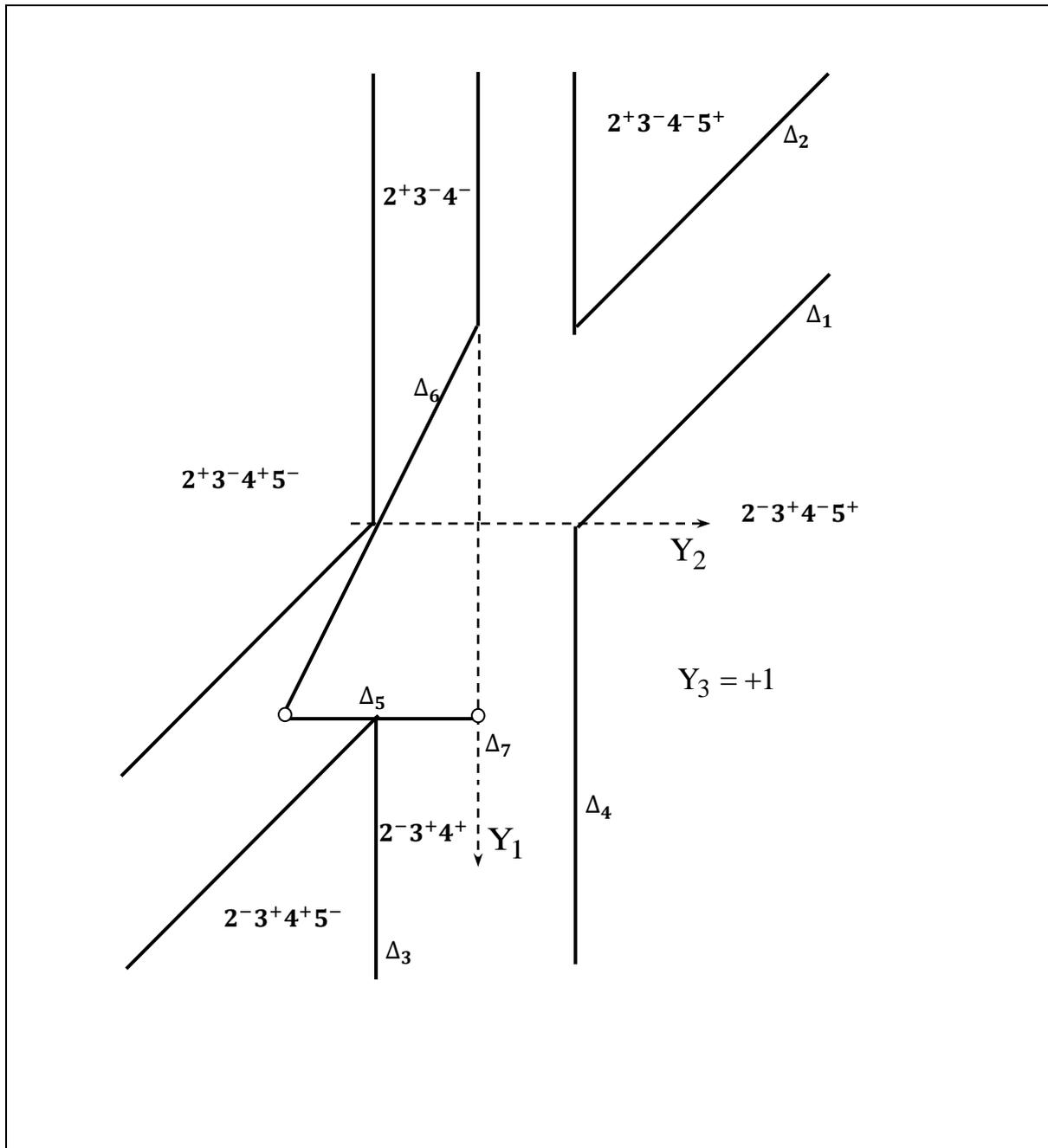


Figure III.5: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

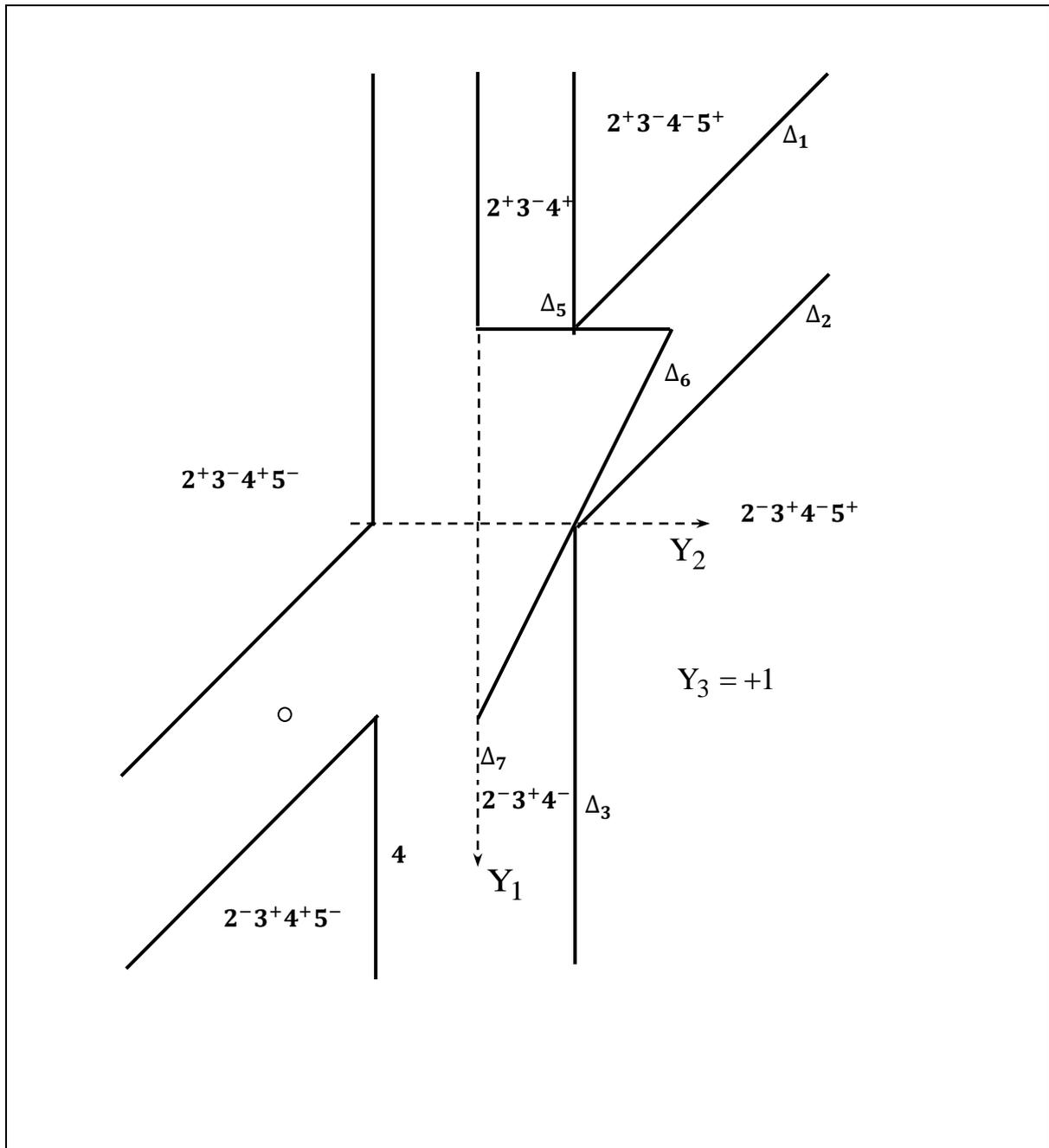


Figure III.6: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

✓ **Systèmes 2,3 et 5 .**

D'après les équations (II.36), $\dot{\alpha}^1 = 0 \Leftrightarrow \xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12}$ et $\dot{\alpha}^4 = 0 \Leftrightarrow \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$

Donc :

$$\xi = 4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \quad (\text{III.24})$$

et

$$\bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \quad (\text{III.25})$$

(III.24) et (III.25) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , (III.1), les équations (III.26) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2)) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + Y_1) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_2) \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_7, Δ_8 et Δ_9 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_8: 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) = 0 \\ \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \\ \Delta_7: 2Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 système 2, 3 et 5:

Cas: $2^+3^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \leq 0 \\ Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Cas: $2^-3^+5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \geq 0 \\ Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Cas: $2^+3^-5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \leq 0 \\ Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Cas: 2⁻3⁺5⁻

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \geq 0 \\ Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.7) et la figure (III.8).

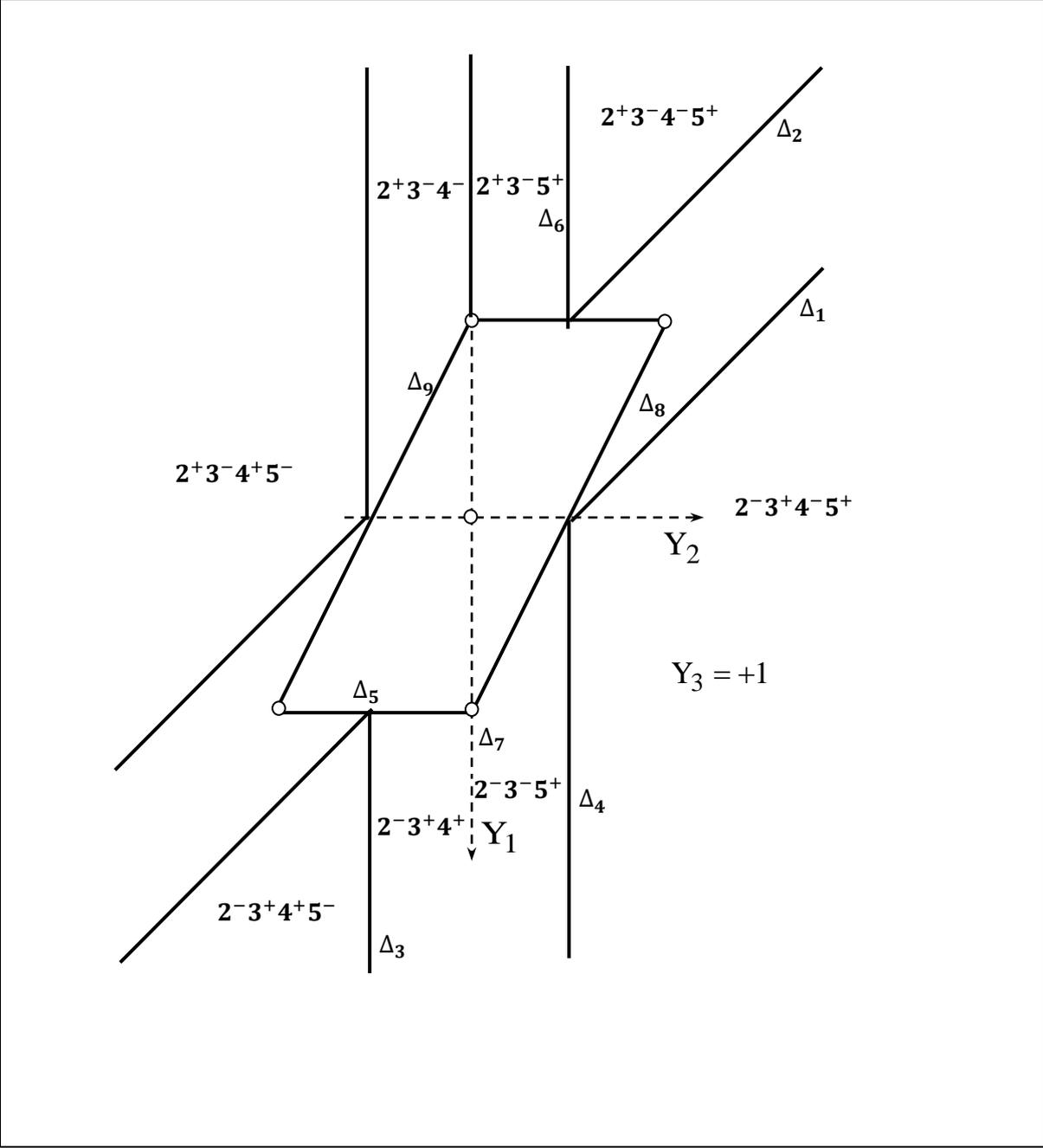


Figure III.7: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

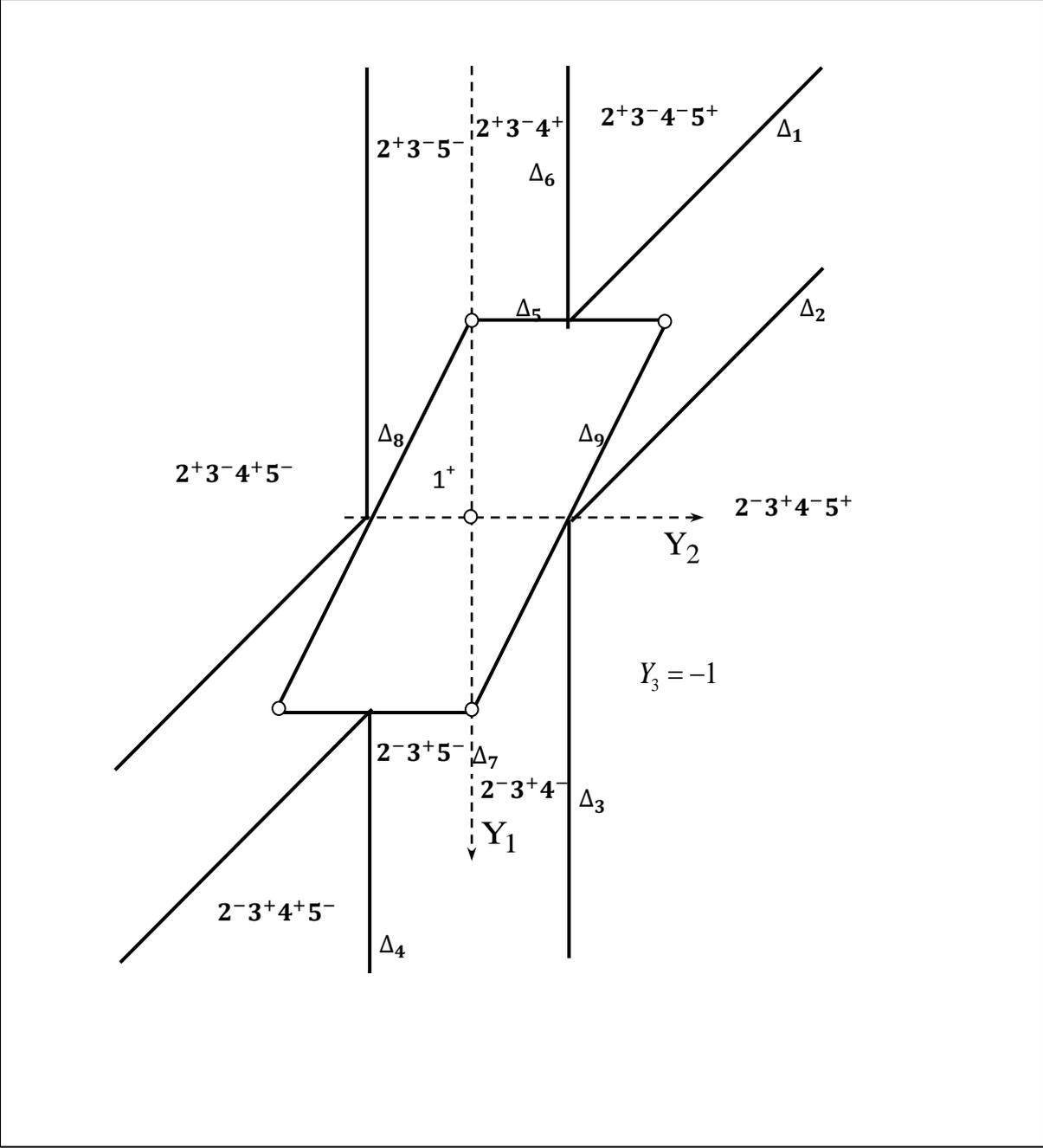


Figure III.8: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

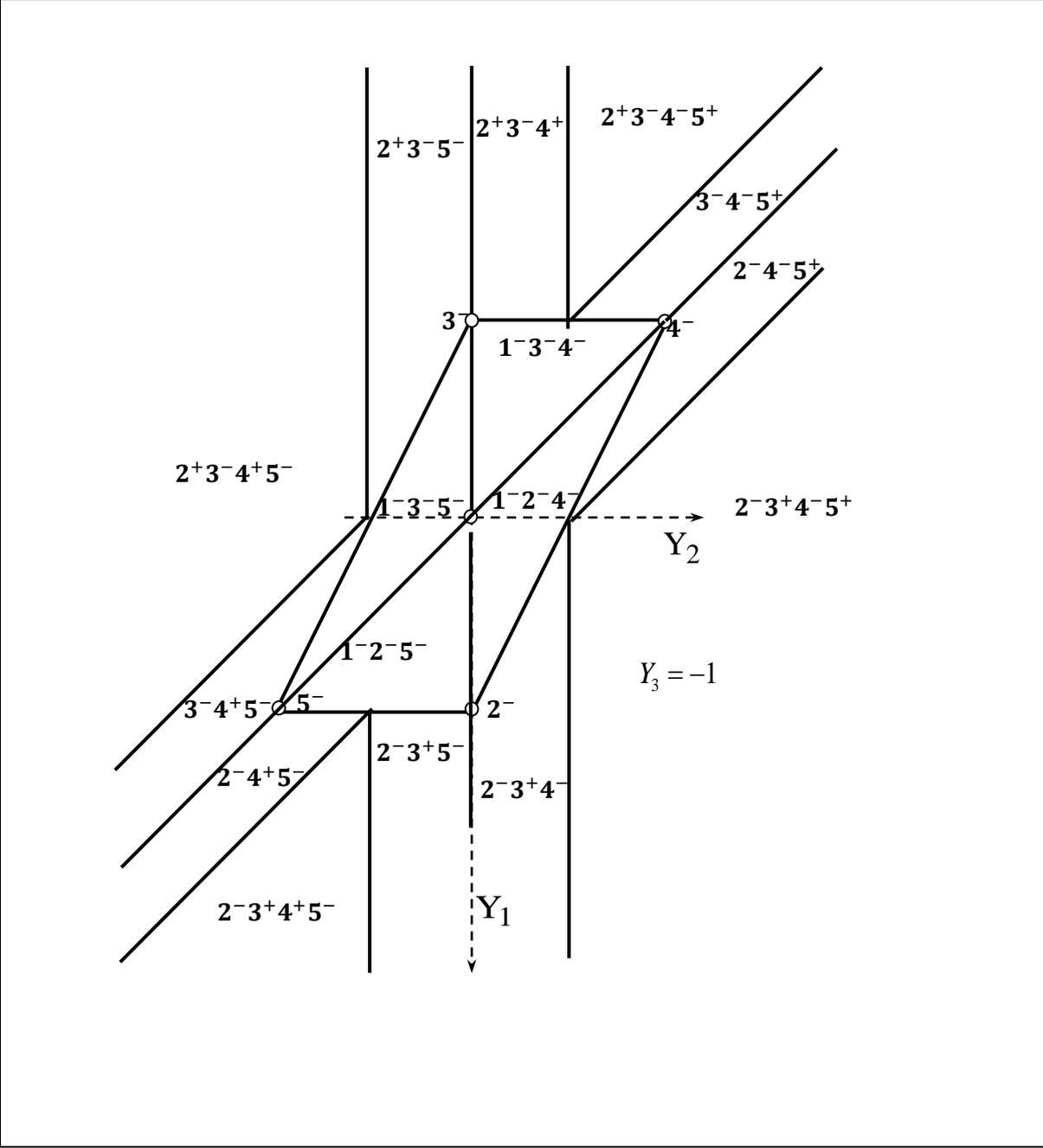


Figure III.10: CFCP2: Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

1.2.2. Pour monocristal CFCP1

A) Analyse des sommets

✓ Systèmes 2, 3, 4 et 5.

D'après les équations (II.30), on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{22} - \bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^6 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} (\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11} + \bar{\omega}^p) \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} + 2\bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{22} - 2\bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4} (-2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} - 2\bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{22} - 2\bar{\omega}^p) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Pour $Y_3 = +1$

Cas: $2^+3^+4^-5^+$

D'après Bengman (II.13), on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\tau^2 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\tau^3 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\tau^4 + \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\tau^5 - \tau_c}{\mu} \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

D'après le tableau (II.2), on a:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha^3 = \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}} \\ \alpha^4 + \alpha^5 = \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Alors:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha^3 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{22} + 4\bar{\omega}^p) \\ \alpha^4 + \alpha^5 = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{22} - 4\bar{\omega}^p) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Donc:

$$\frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{22} - 4\bar{\omega}^p) = \frac{\sqrt{6}}{4} (2\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{22} + 4\bar{\omega}^p)$$

$$\bar{\omega}^p = 0 \quad (\text{III.38})$$

D'après les équations (III.37) et (III.38), les équations (II.30) deviennent:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , (III.1), les équations (III.39) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\sqrt{2}Y_3 + 2Y_1) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\sqrt{2}Y_3 + 2Y_2) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\sqrt{2}Y_3 + 2Y_1) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\sqrt{2}Y_3 - 2Y_2) \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_2 > 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ \sqrt{2} - 2Y_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

De même pour $2^+3^+4^+5^-$ on a:

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_2 > 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ \sqrt{2} - 2Y_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

Et pour $2^-3^-4^-5^+$, on a:

$$\begin{cases} \sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_2 < 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ \sqrt{2} - 2Y_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

On refait le même calcul pour $Y_3 = -1$, on obtient:

Cas: $2^-3^-4^+5^-$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_2 < 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ -\sqrt{2} - 2Y_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Cas: $2^+3^+4^+5^-$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_2 > 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_1 > 0 \\ -\sqrt{2} - 2Y_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Cas: 2⁻3⁻4⁻5⁺

$$\begin{cases} -\sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ -\sqrt{2} + 2Y_2 < 0 \\ \sqrt{2} + 2Y_1 < 0 \\ -\sqrt{2} - 2Y_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.11) et la figure (III.12).

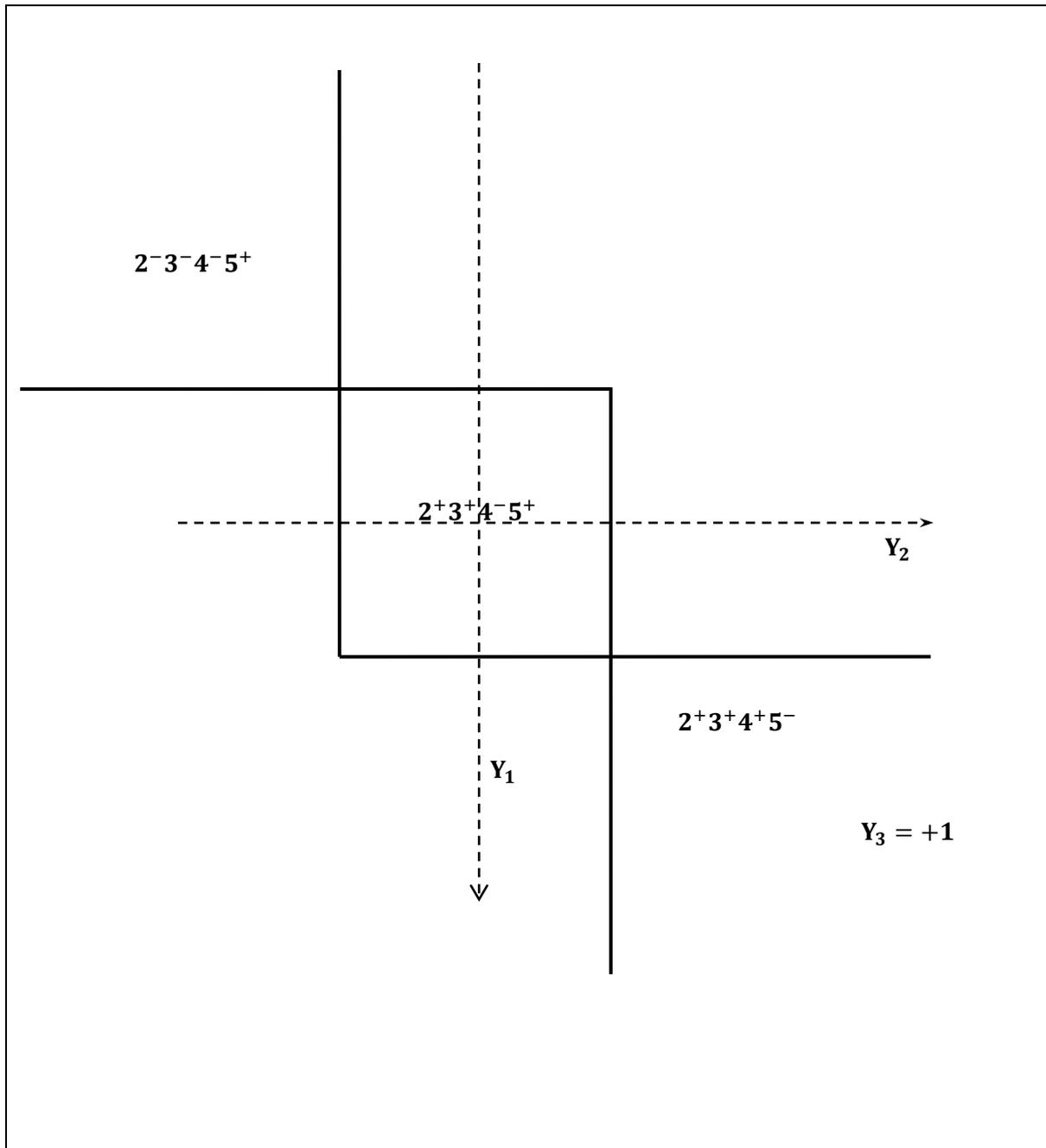


Figure III.11: CFCPI : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

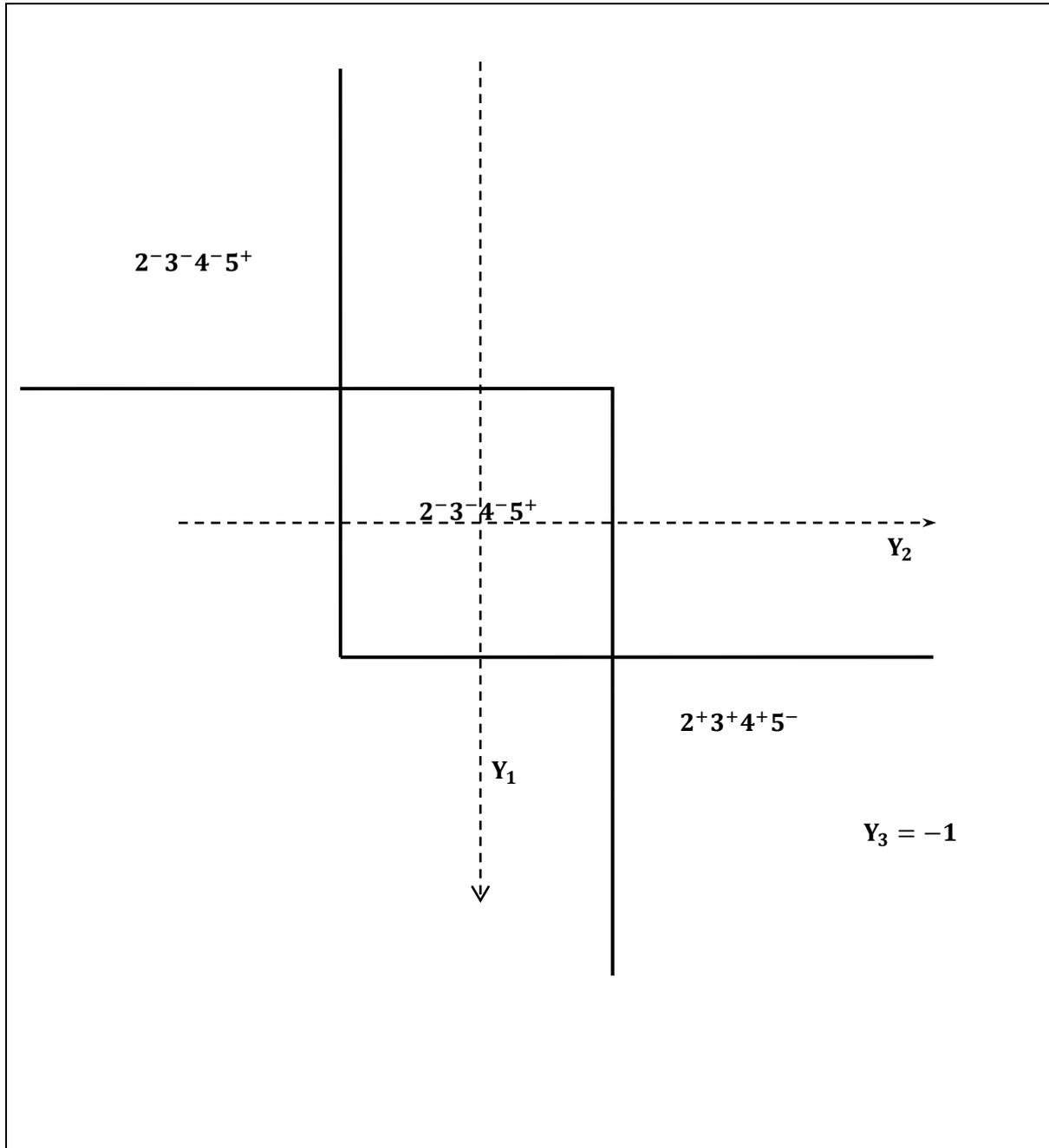


Figure III.12 : CFCP1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

✓ **Systèmes 1, 2, 4 et 6.**

D'après les équations (II.30), on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{22} + \bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2\bar{D}_{22} - \bar{D}_{11} + 3\bar{D}_{12} + \bar{\omega}^p) \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{22} + 2\bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{11} + 4\bar{\omega}^p) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-4\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^6 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{22} - 2\bar{\omega}^p) \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Pour $Y_3 = +1$

Cas: $1^+2^+4^+6^+$

D'après Bengman (II.13), on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\tau^1 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\tau^2 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\tau^4 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^6 = \frac{\tau^6 - \tau_c}{\mu} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

D'après le tableau (II.2), on a $\tau^1 = \tau^6$, donc $\alpha^1 = \alpha^6$.

Alors:

$$\bar{\omega}^p = \bar{D}_{12} \quad (\text{III.50})$$

D'après les équations (III.50) et (III.48), les équations (II.30) deviennent:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(2\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{12}) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-4\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^6 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , (III.1), les équations (III.51) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2Y_2) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\sqrt{2} + Y_1 + Y_2) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-\sqrt{2} + Y_1 + Y_2) \\ \dot{\alpha}^6 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-2Y_2) \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

$$\begin{cases} -2Y_2 > 0 \\ \sqrt{2} + Y_1 + Y_2 > 0 \\ -\sqrt{2} + Y_1 + Y_2 > 0 \\ -2Y_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

De même pour $Y_3 = -1$

Cas: 1⁻2⁻4⁻6⁻

$$\begin{cases} -2Y_2 < 0 \\ \sqrt{2} + Y_1 + Y_2 < 0 \\ -\sqrt{2} + Y_1 + Y_2 < 0 \\ -2Y_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.13) et la figure (III.14).

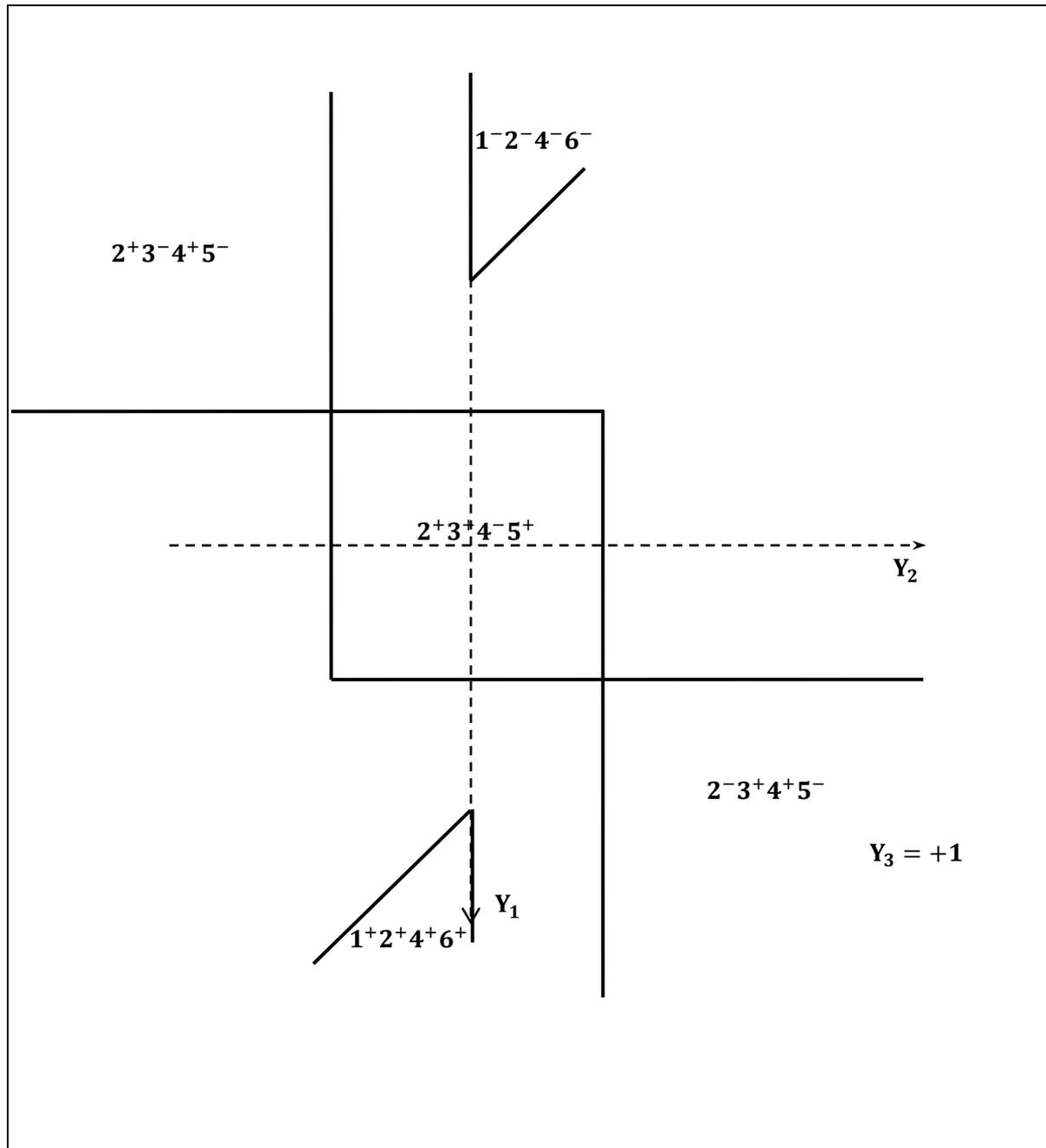


Figure III.13 : CF C P1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

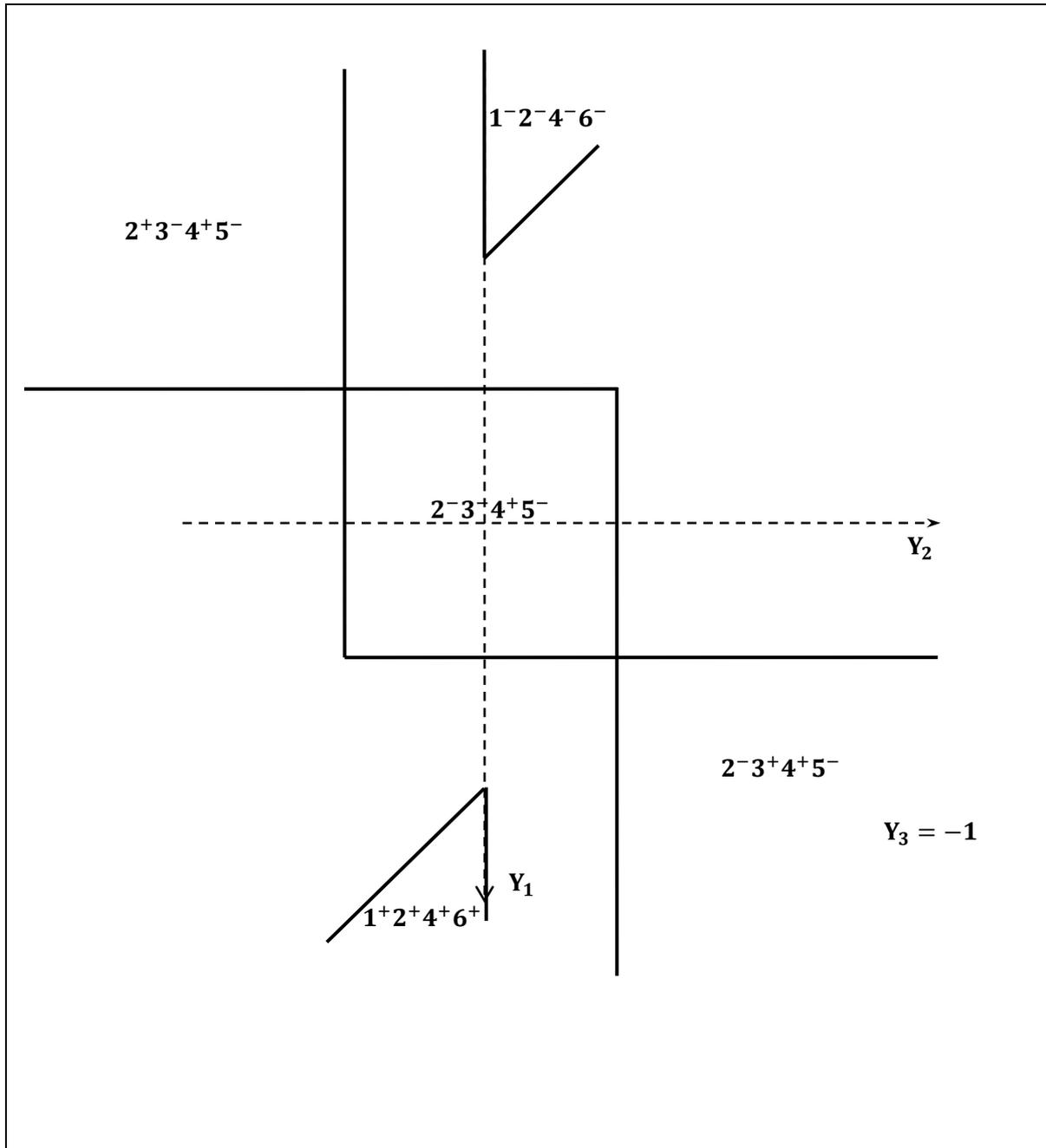


Figure III.14 : CFCPI : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

✓ **Systèmes 2, 3 et 4.**

D'après les équations (II.35), on a:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}(4\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(4\bar{D}_{22}) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{4}(-4\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) \\ \bar{\omega}^p = \bar{D}_{12} - \bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Pour $Y_3 = +1$:

Cas: $2^+3^+4^-$

De (II.13) , on a:

$$|\tau^5| < \tau_c \quad (\text{III.56})$$

Et

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\tau^2 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\tau^3 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\tau^4 + \tau_c}{\mu} \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

D'après le tableau (II.2), on a:

$$\tau^5 = \tau^2 - (\tau^3 + \tau^4) \quad (\text{III.58})$$

De (III.55), (III.56),(III.57) et (III.58), on a:

$$|\mu(4\bar{D}_{12} - 4\bar{D}_{22}) + \tau_c| < \tau_c \quad (\text{III.59})$$

Donc:

$$4\bar{D}_{12} - 4\bar{D}_{22} < 0 \quad (\text{III.60})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , (III.1), les équations (III.55) deviennent :

$$\begin{cases} \sqrt{2} + Y_1 - Y_2 > 0 \\ Y_2 > 0 \\ -\sqrt{2} + Y_1 + Y_2 < 0 \\ \sqrt{2} - 2Y_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Pour $Y_3 = -1$:

Cas: 2⁻3⁻4⁺

$$\begin{cases} -\sqrt{2} + Y_1 - Y_2 < 0 \\ Y_2 < 0 \\ \sqrt{2} + Y_1 + Y_2 > 0 \\ -\sqrt{2} - 2Y_2 > 0 \end{cases}$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.15) et la figure (III.16).

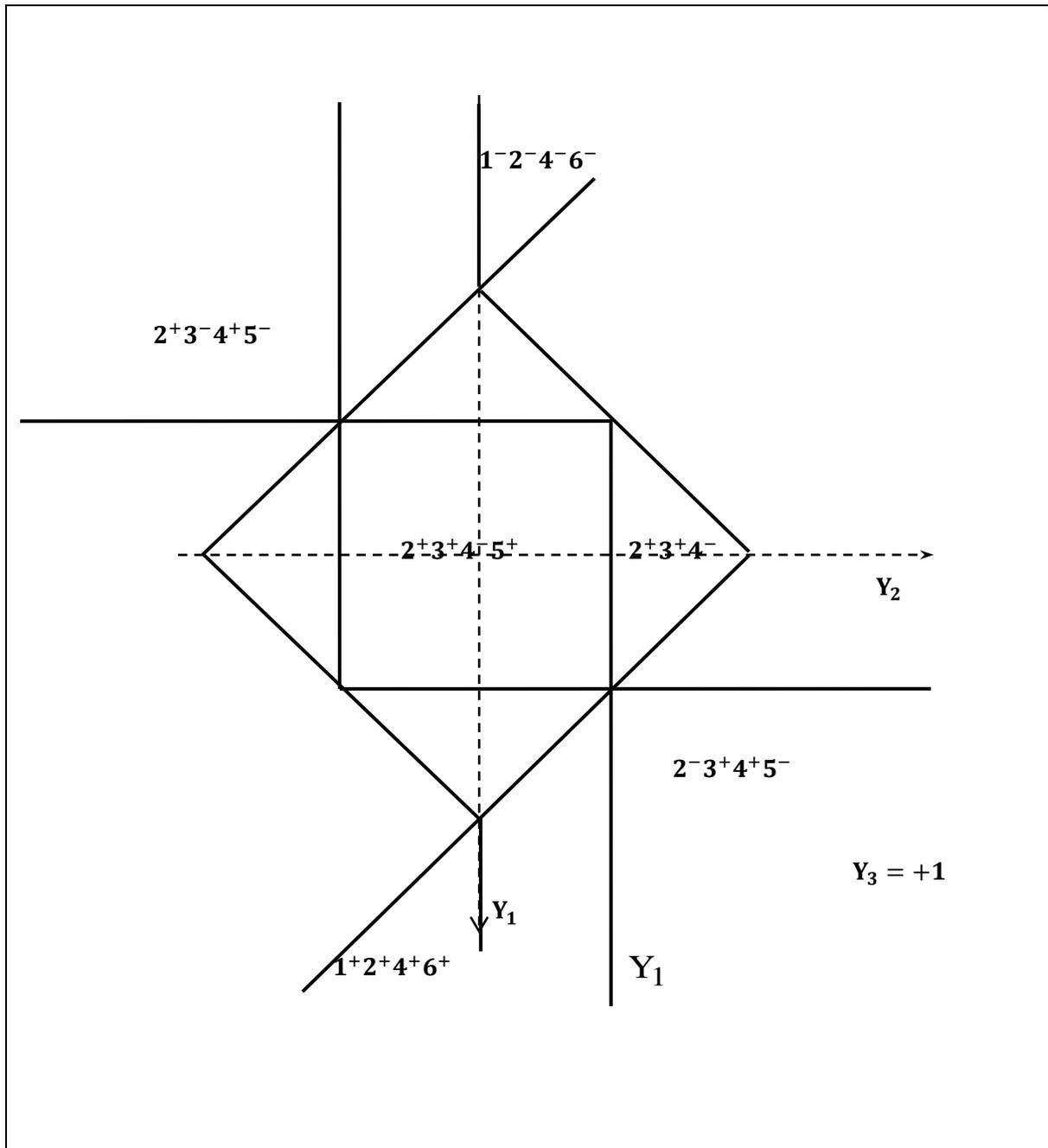


Figure III.15 : CFCP1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

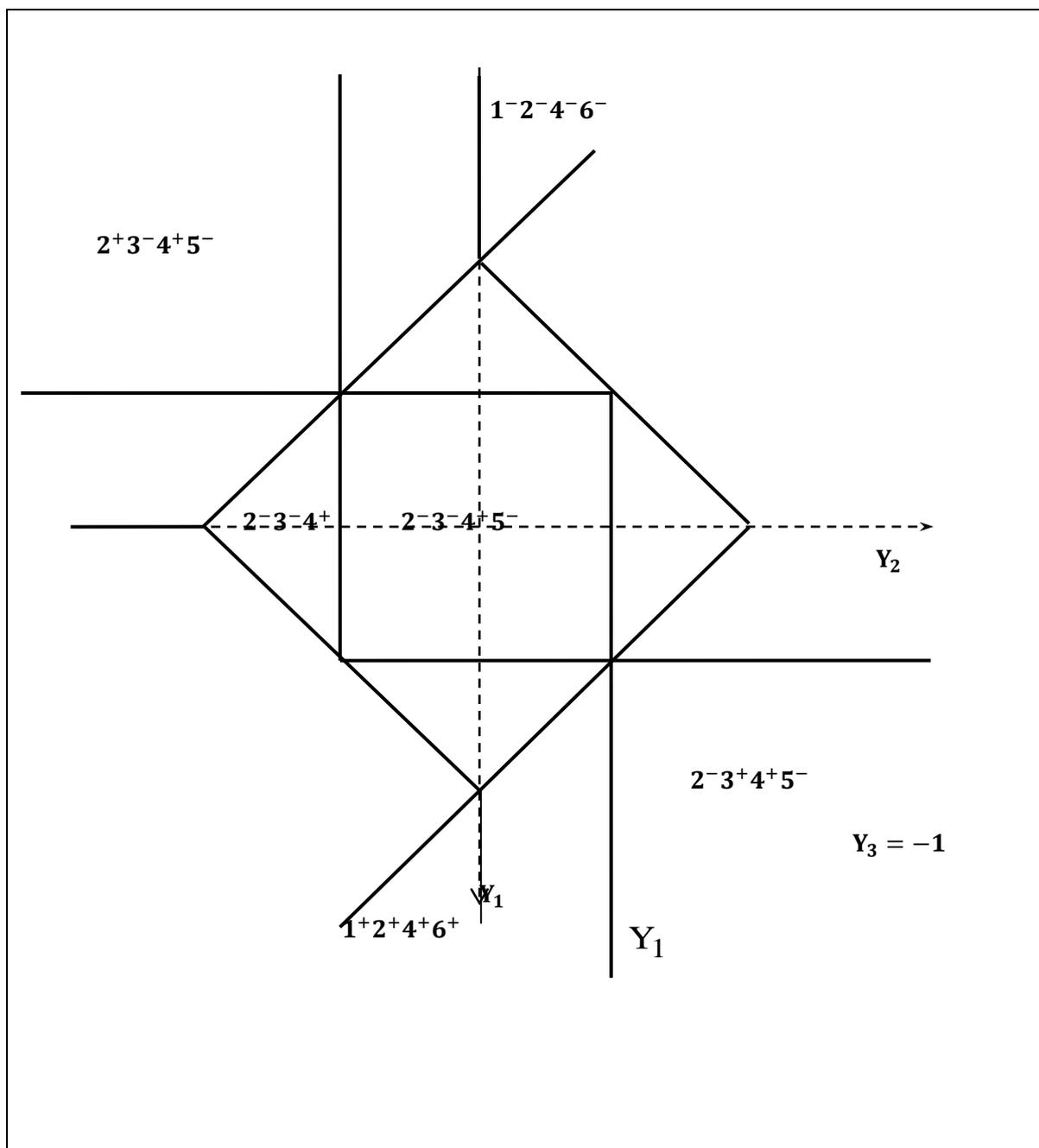


Figure III.16 : CFPC1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

Finalement on obtient une représentation des plans projectifs, figures (III.17) et (III.18) du monocristal plan CFPC1 avec une sollicitation plane dans un plan de symétrie (100).

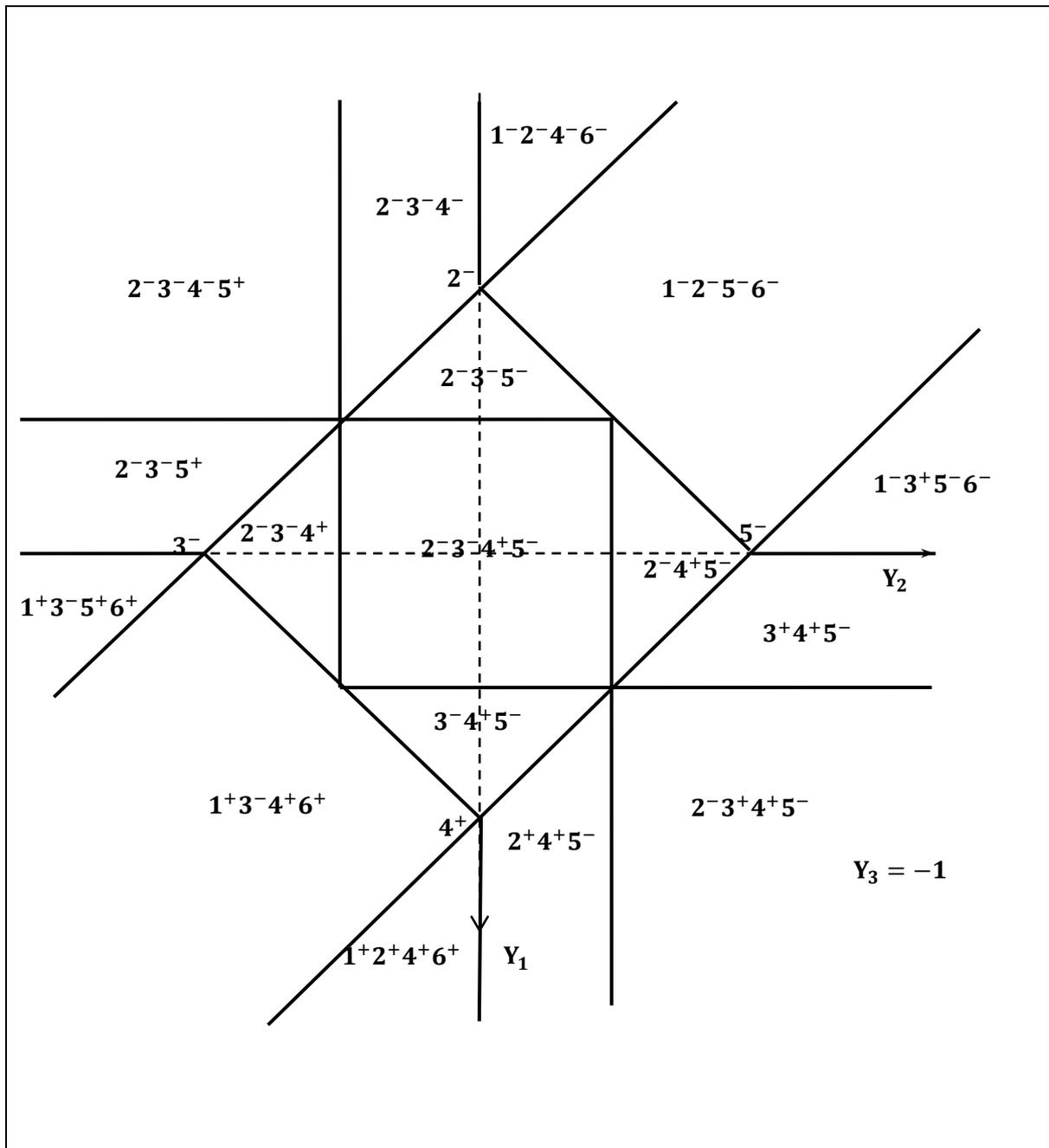


Figure III.18 : CFCP1 : Représentation dans le plan projectif $Y_3 = -1$.

2. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté la représentation plan projectif pour les monocristaux cubiques à faces centrées, pour lesquels nous avons introduit le cas d'une sollicitation plane dans un plan de symétrie.

Dans le cadre des deux modèles monocristal plan CFCP2 et CFCP1, en utilisant la loi viscoplastique de Bingham, nous avons présenté une nouvelle représentation plan projectif. Cette représentation présente l'avantage, par rapport à celle obtenue dans le cas rigide plastique, qu'elle nous permet de déterminer parfaitement les glissements cristallographiques et donc les rotations plastiques pour une sollicitation plane imposée.

Dans la suite de ce travail nous allons appliquer les deux modèles du monocristal plan au cas des essais plans en déformations et en contraintes.

.

Chapitre IV:
Monocristal à déformation imposée.

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéresserons au monocristal plan CFCP1 et CFCP2 à déformation imposée. Nous allons considérer le cas de l'extension biaxiale pour laquelle nous allons construire un nouveau diagramme d'activité pour les deux modèles CFCP1 et CFCP2. Ceci nous permettra d'étudier les systèmes actifs et par conséquent l'évolution des rotations cristallographiques.

Enfin, nous allons montrer que les résultats obtenus pour ce cas particulier, l'extension biaxiale, restent généraux et peuvent être appliqués à tout essai à cinématique plane imposée.

1. Essai de l'extension biaxiale

L'essai extension biaxiale est caractérisé par, un gradient des vitesses L , tel que :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.1})$$

Avec ϵ est une vitesse constante et $-1 \leq \rho \leq 1$

La vitesse des déformations D et des rotations W s'écrivent, dans le repère eulerien, par:

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.2})$$

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.3})$$

Aussi le tenseur des contraintes de Cauchy est définie par :

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau \\ \tau & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Les équations (II.10) deviennent :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} &= \left(\frac{1+\rho}{2} + \frac{\Delta}{2} \cos(2(\theta)) \right) \epsilon \\ \bar{D}_{22} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - \frac{\Delta}{2} \cos(2(\theta)) \right) \epsilon \\ \bar{D}_{12} &= \frac{\Delta}{2} \sin(2(\theta)) \epsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Avec :

$$\Delta = 1 - \rho \quad (\text{IV.6})$$

Ce qui donne dans l'espace $(Y_1 = \bar{D}_{11}, Y_2 = \bar{D}_{22}, Y_3 = \sqrt{2} \bar{D}_{12})$, la représentation plan projectif

$Y_3 = \pm 1$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[A(\rho) \frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{1}{\tan 2\theta} \right] \\ Y_2 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[A(\rho) \frac{1}{\sin 2\theta} - \frac{1}{\tan 2\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Où

$$A(\rho) = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad (\text{IV.8})$$

Ceci donne l'évolution dans l'espace (Y_1, Y_2) , l'allure des courbes correspondantes de l'essai d'extension biaxiale, pour différentes valeurs de $A(\rho)$, est schématisée sur les figures (IV.1) et (IV.2).

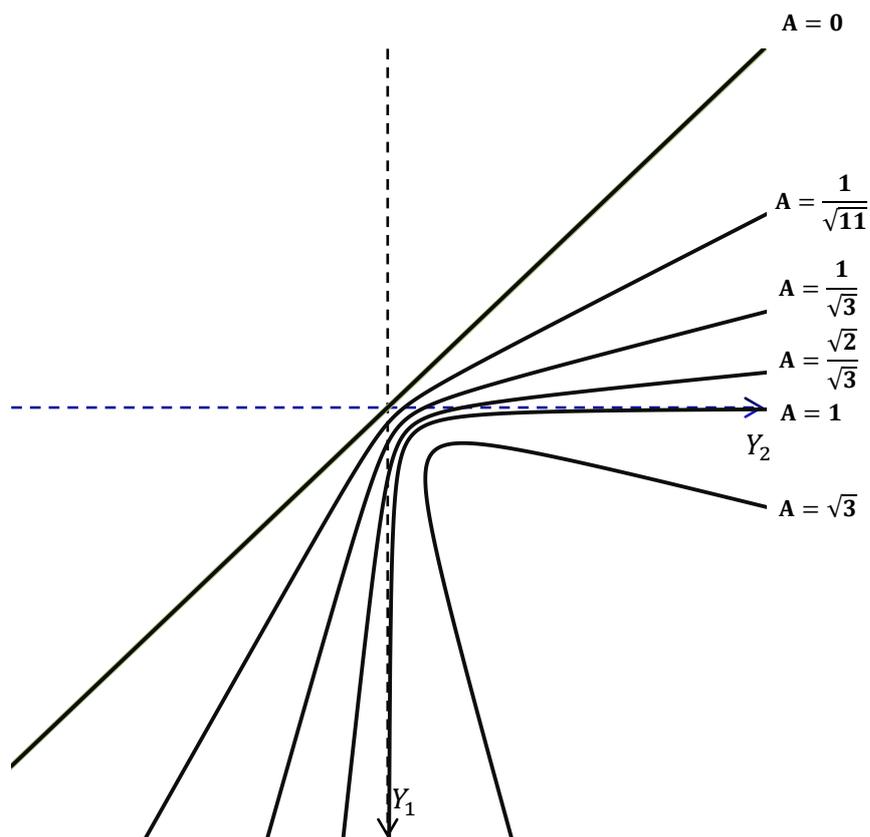


Figure IV.1: Courbes représentatives de l'essai extension biaxiale.

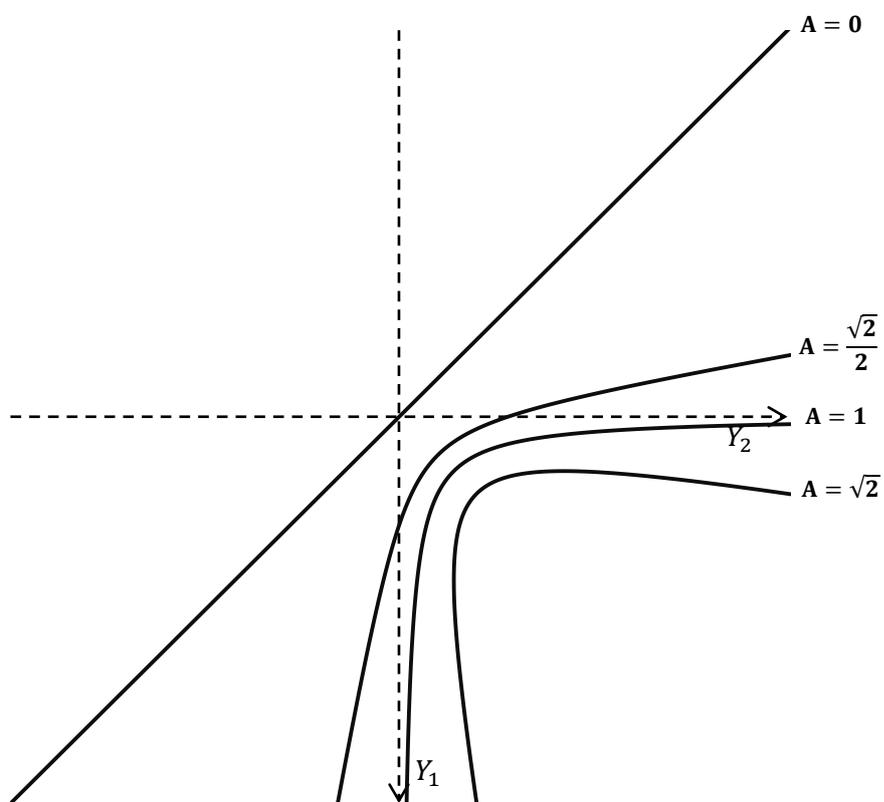


Figure IV.2: Courbes représentatives de l'essai extension biaxiale.

Par la superposition des courbes représentatives de l'essai ((IV.1) ; (IV.2)) et la figure des plans projectifs représentatifs du comportement du monocristal, nous obtenons le nouveau diagramme d'activité en fonction des valeurs de $A(\rho)$ et de l'orientation θ . Ceci nous donnera facilement l'état d'activité des différents systèmes et aussi l'évolution des rotations θ .

Pour développer les calculs, nous considérons le cas des monocristaux plans présentés dans le chapitre 3.

1.1. Cas CFCP2

Pour ce cas le plan projectif utilisé est celui présenté dans les figures ((III.9) ; (III.10)) du chapitre 3. Les figures ((IV.3) et (IV.4)) illustrent le comportement en extension biaxiale dans le cas du CFCP2.

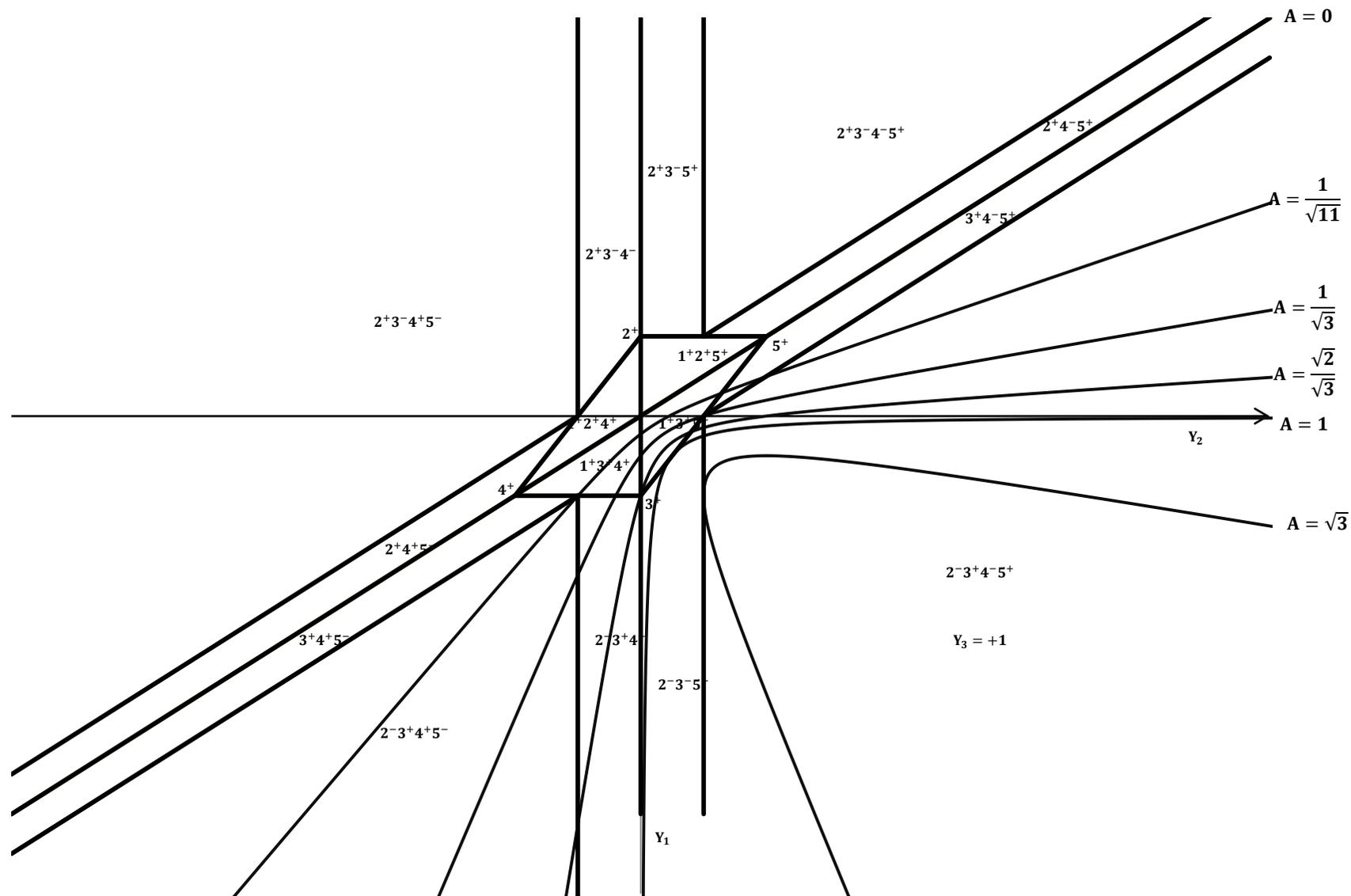


Figure IV.3: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$

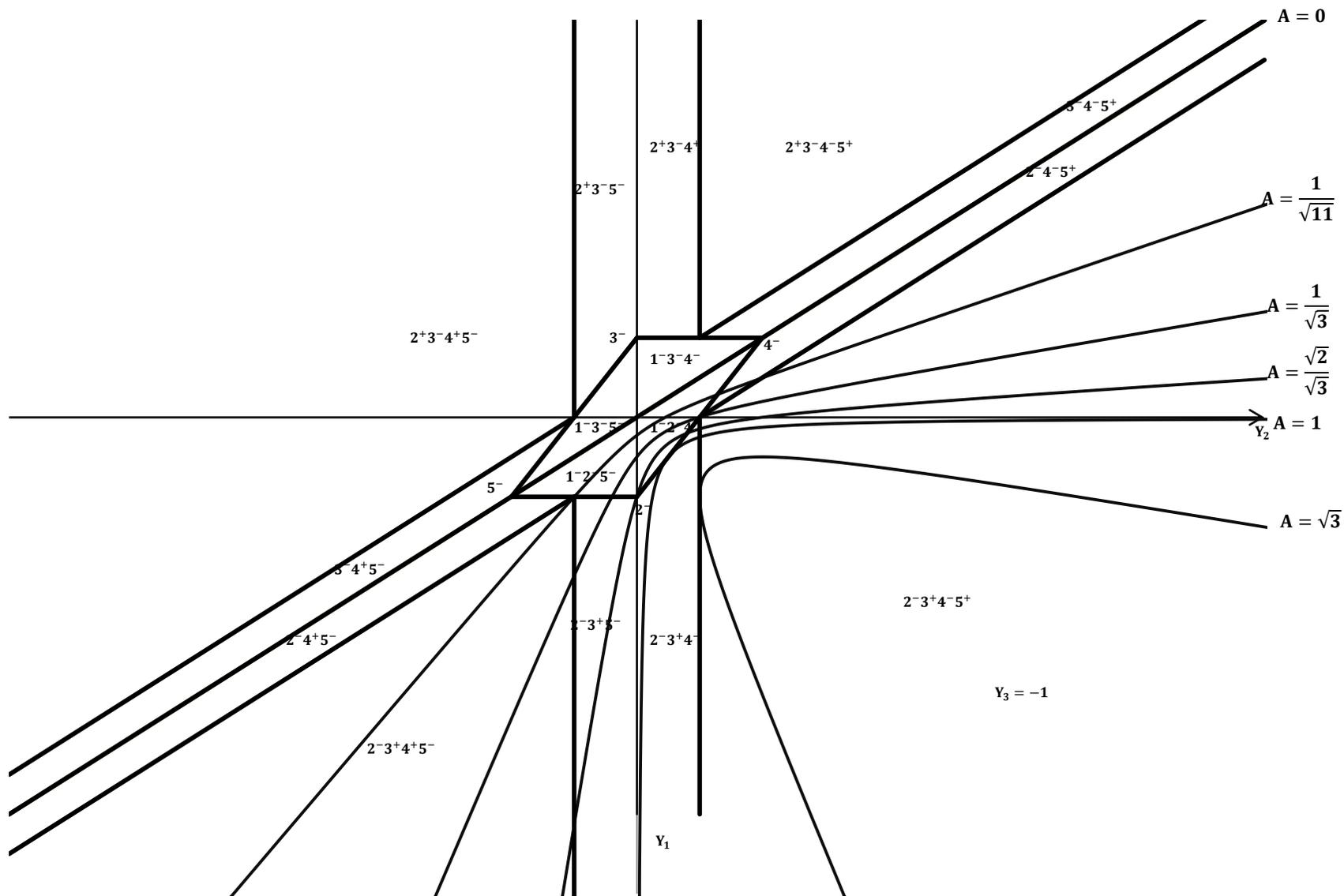


Figure IV.4: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$

Pour déduire l'état d'activité des systèmes, il suffit d'étudier la trajectoire de la courbe représentative de l'essai dans la nouvelle représentation plan projectif, pour chaque intervalle de A .

Il faudrait donc pour chaque valeur de A , faire une analyse précise des systèmes actifs suivant la valeur d'angle de rotation θ , et aussi étudier la rotation qui sera déterminée pour l'ensemble des systèmes concernés. Pour ce faire, dans la suite nous allons traiter tous les cas, notons qu'à côté de ce diagramme, il faut ajouter les tableaux qui donnent l'évolution de la rotation dans chaque zone d'activité. Plusieurs cas peuvent être considérés.

a. Cas $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$

Pour ce cas, les résultats sont introduits dans les figures (IV.5) et (IV.6).

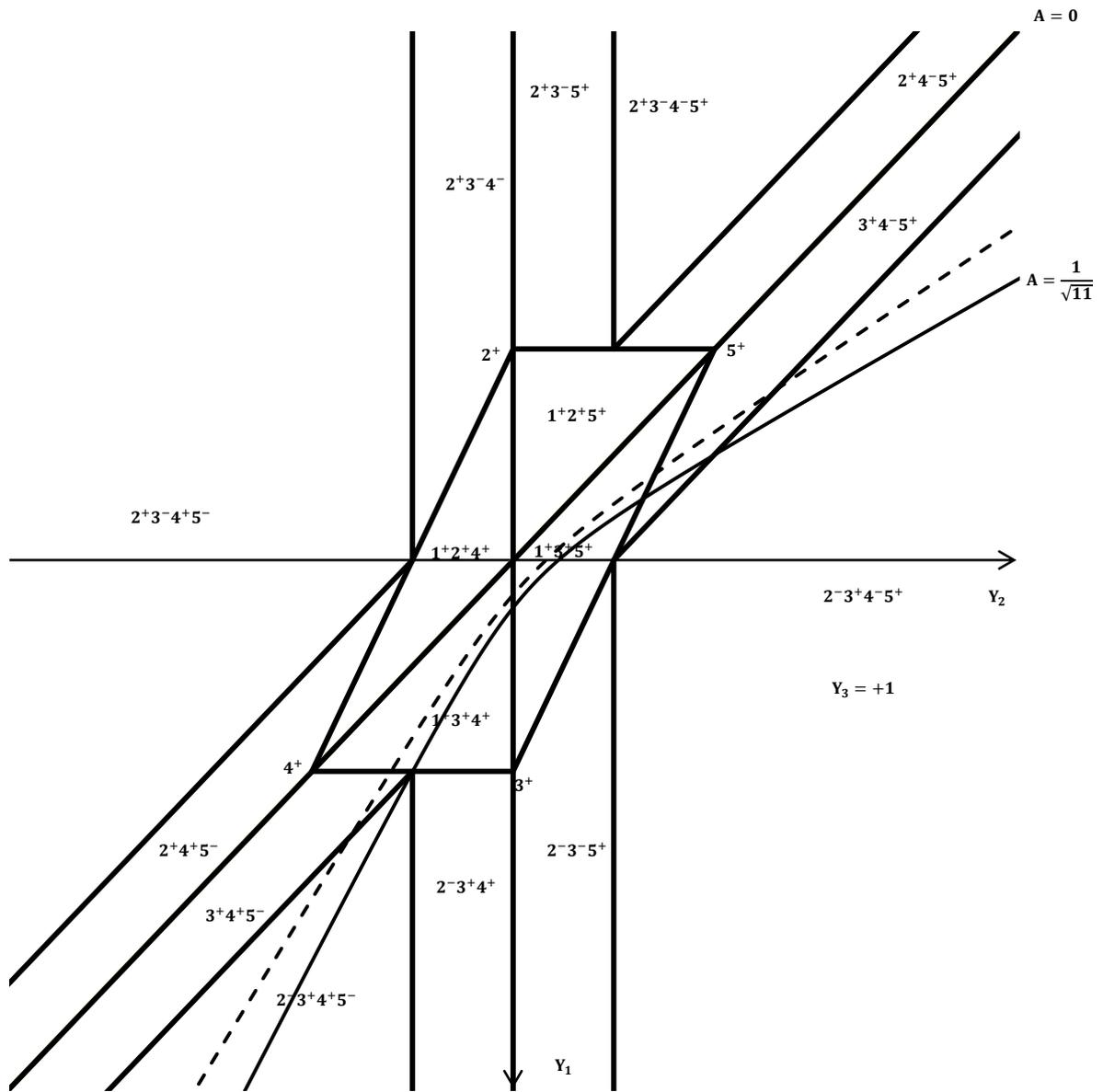


Figure IV.5: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$, Cas $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$.

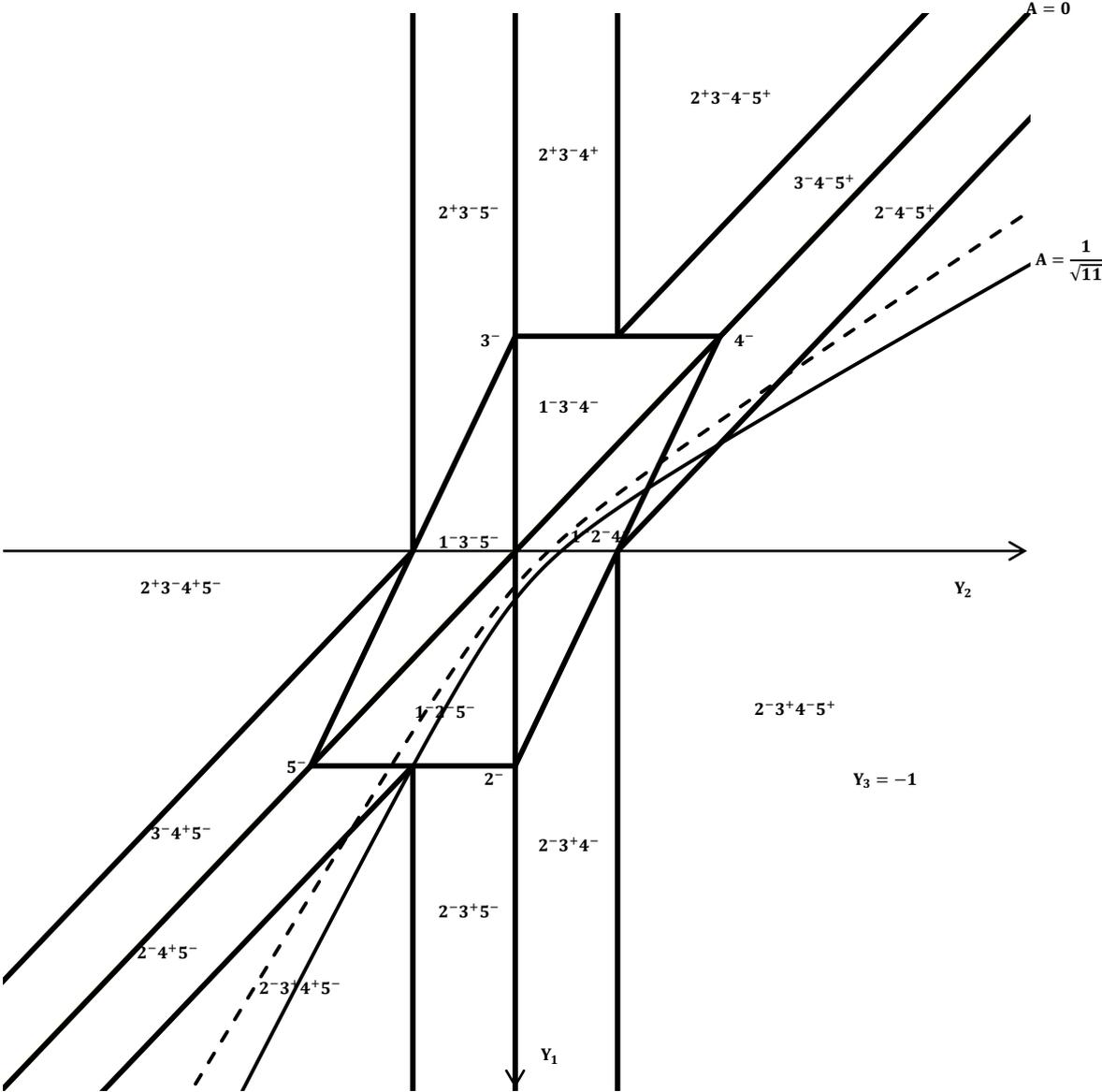


Figure IV.6: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$, Cas $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Dans ce cas, en fonction de l'orientation monocristalline θ les systèmes de glissement actif sont regroupés dans le tableau (IV.1)

Tableau IV.1. Les systèmes de glissement actif pour cas $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Condition de glissement
$0: \theta_1$	$2^-3^+4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\theta_1: \theta_2$	$3^+4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^2 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^3 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\theta_2: \theta_3$	$1^+3^+4^+$	$ \tau^2 \leq \tau_c; \tau^5 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \geq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0$
$\theta_3: \theta_4$	$1^+3^+5^+$	$ \tau^2 \leq \tau_c; \tau^4 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \geq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\theta_4: \theta_5$	$3^+4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^2 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$2^-3^+4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^3 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$1^-2^-4^-$	$ \tau^3 \leq \tau_c; \tau^5 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \leq 0; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$1^-2^-5^-$	$ \tau^3 \leq \tau_c; \tau^4 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \leq 0; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^3 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^-3^+4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{1-2A^2}}; \tan 2\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}A+\sqrt{9-A^2}}{-A+2\sqrt{2}\sqrt{9-A^2}}; \tan 2\theta_3 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{A}; \tan 2\theta_4 = \frac{2\sqrt{2}A+\sqrt{1-A^2}}{A-2\sqrt{2}\sqrt{1-A^2}}$$

$$\tan 2\theta_5 = \frac{-\sqrt{2}A}{\sqrt{1-2A^2}}$$

D'après (II.36) on peut calculer $\dot{\alpha}^s$ et $\bar{\omega}_{12}^p$, les vitesses de glissement et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.2).

Tableau IV.2. Vitesse de glissement et rotation plastique de chaque système de glissements pour

$$0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Systèmes de glissement	Vitesse de glissement $\dot{\alpha}^s$	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$2^-3^+4^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$	\bar{D}_{12}
$3^+4^+5^-$	$\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$1^+3^+4^+$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}\bar{D}_{11})$	$4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$1^+3^+5^+$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}\bar{D}_{11})$	$-\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$3^+4^-5^+$	$\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$	$3\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$2^-3^+4^-5^+$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$	\bar{D}_{12}

$2^-4^-5^+$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$	$3\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$1^-2^-4^-$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{22})$	$-\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$1^-2^-5^-$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22})$	$-\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$2^-4^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$	$3\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$2^-3^+4^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$	\bar{D}_{12}

b. Cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$

De la même manière que le cas précédent, on obtient les états d'activité des systèmes de glissement représenté sur les figures (IV.7) et (IV.8). Ceci donne l'évolution des vitesses de glissement et de la rotation plastique. Les résultats sont regroupés dans les tableaux (IV.3); (IV.4) et (IV.5).

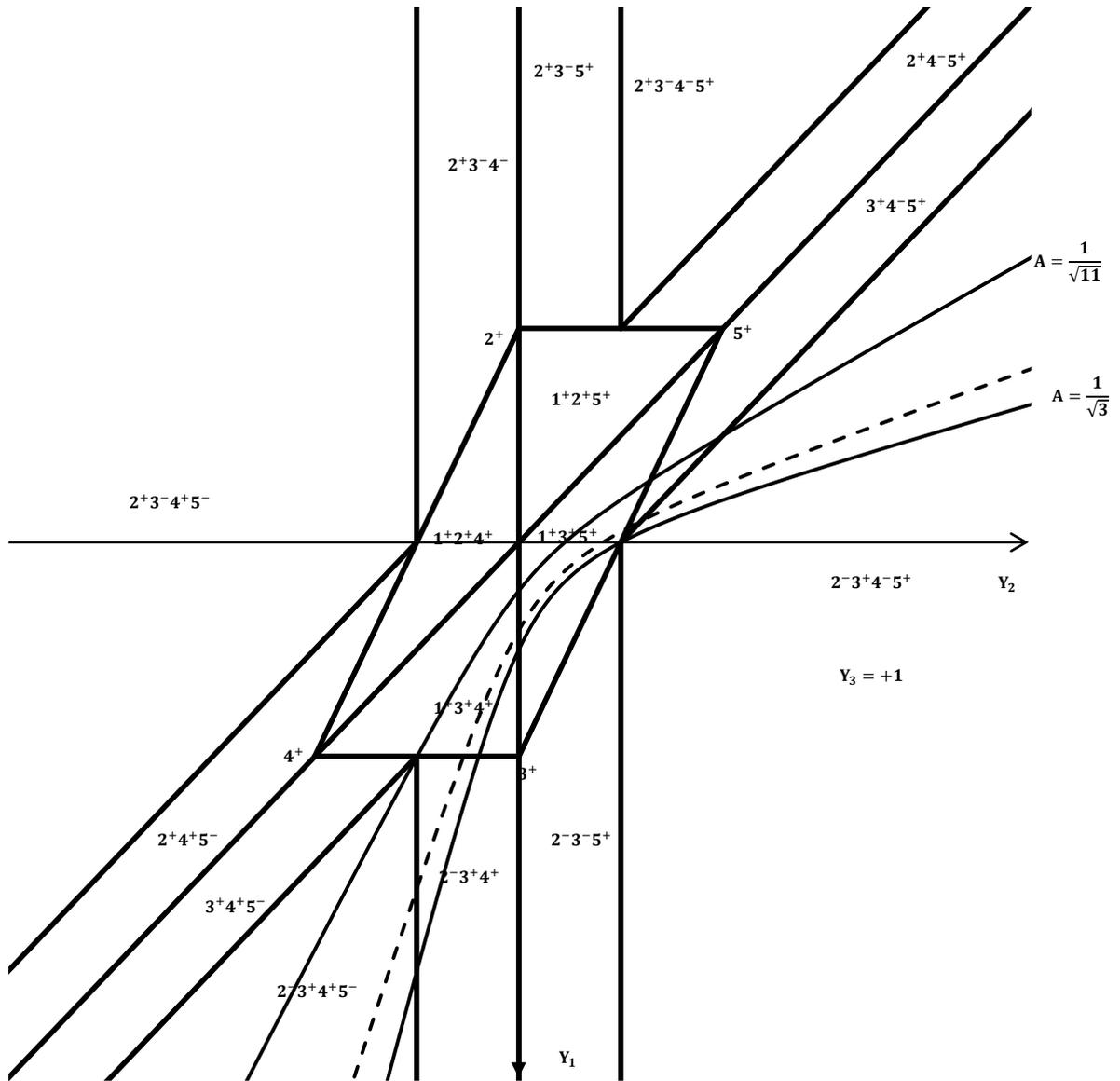


Figure IV.7: CFCP2: Diagramme d'activité pour essai de l'extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = +1$, cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

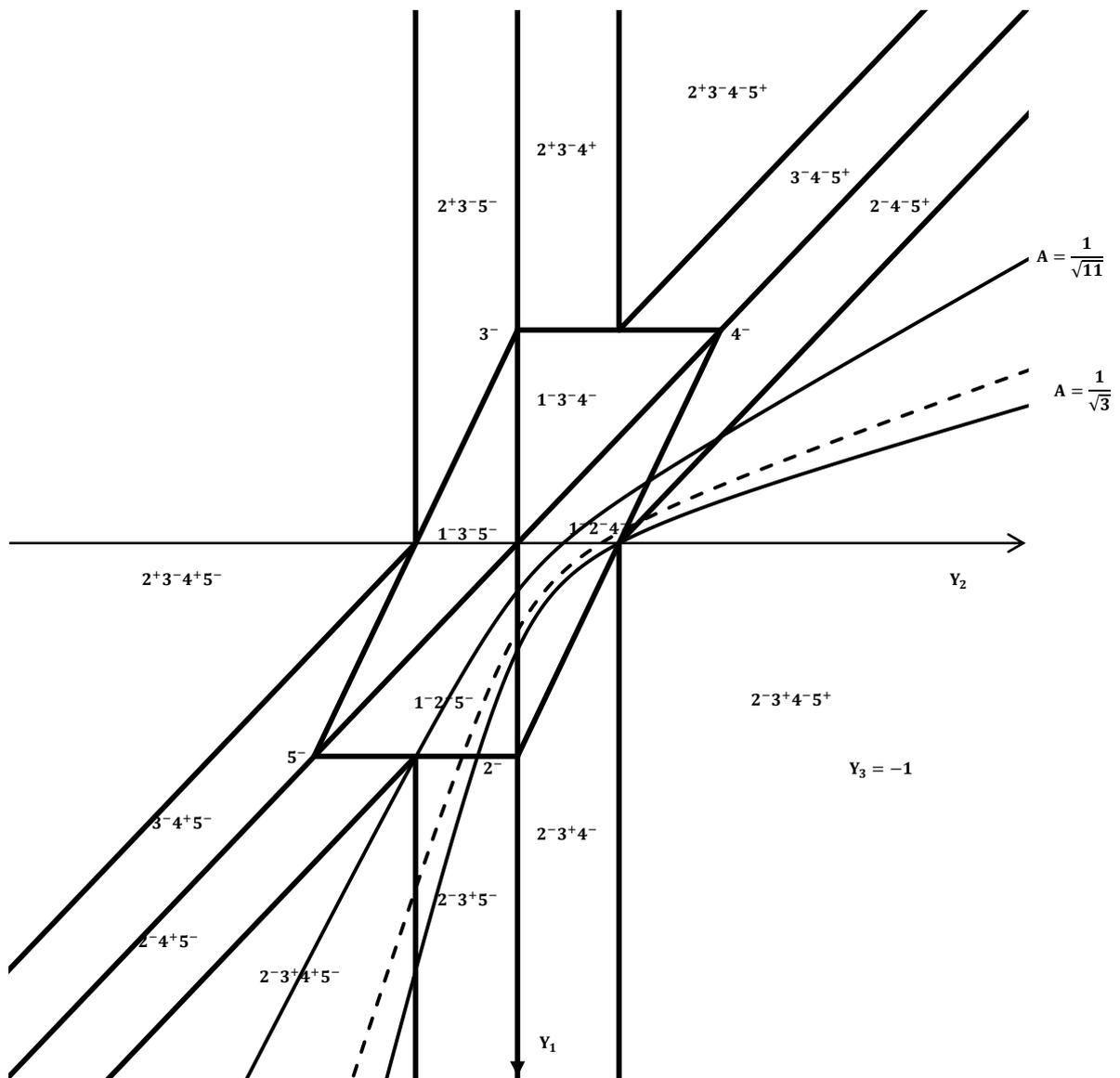


Figure IV.8: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai de l'extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = -1$, cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif sont regroupés dans le tableau (IV.3)

Tableau IV.3. Les systèmes de glissement actif pour cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Condition de glissement
$0: \theta_1$	$2^-3^+4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\theta_1: \theta_2$	$2^-3^+4^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^5 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0$
$\theta_2: \theta_3$	$1^+3^+4^+$	$ \tau^2 \leq \tau_c; \tau^5 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \geq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0$
$\theta_3: \theta_4$	$1^+3^+5^+$	$ \tau^2 \leq \tau_c; \tau^4 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \geq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\theta_4: \theta_5$	$3^+4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^2 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$2^-3^+4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-4^-5^+$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^3 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \geq 0$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$1^-2^-4^-$	$ \tau^3 \leq \tau_c; \tau^5 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \leq 0; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^4 \leq 0$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$1^-2^-5^-$	$ \tau^3 \leq \tau_c; \tau^4 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^1 \leq 0; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-3^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \tau^4 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^-3^+4^+5^-$	$ \tau^1 \leq \tau_c; \dot{\alpha}^2 \leq 0; \dot{\alpha}^3 \geq 0; \dot{\alpha}^4 \geq 0; \dot{\alpha}^5 \leq 0$

D'après (II.36) on peut calculer $\dot{\alpha}^s$ et $\bar{\omega}_{12}^p$, les vitesses de glissement et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans les tableaux (IV.4) et (IV.5).

Tableau IV.4. Vitesse de glissement de chaque système de glissements pour $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Systèmes de glissement	Vitesse de glissement $\dot{\alpha}^s$
$2^-3^+4^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$
$2^-3^+4^+$	$\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$
$1^+3^+4^+$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}\bar{D}_{11})$

$1^+3^+5^+$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}\bar{D}_{11})$
$3^+4^+5^+$	$\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11})$
$2^-3^+4^-5^+$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$
$2^-4^-5^+$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$
$1^-2^-4^-$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}\bar{D}_{22})$
$1^-2^-5^-$	$\dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}\bar{D}_{22})$
$2^-3^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$

$2^-3^+4^+5^-$	$\dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$
----------------	---

Tableau IV.5. Vitesse de rotation de chaque système de glissements pour $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Vitesse de rotation $\dot{\theta}$
$0: \theta_1$	$2^-3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_1: \theta_2$	$2^-3^+4^+$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_2: \theta_3$	$1^+3^+4^+$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_3: \theta_4$	$1^+3^+5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$\theta_4: \theta_5$	$3^+4^-5^+$	$-3\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$2^-3^+4^-5^+$	$-\bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-4^-5^+$	$-3\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$1^-2^-4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$1^-2^-5^-$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-3^+5^-$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^-3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12}$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}A + \sqrt{3-A^2}}{A + \sqrt{6-2A^2}}; \tan 2\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}A + \sqrt{9-A^2}}{-A + 2\sqrt{2}\sqrt{9-A^2}}; \tan 2\theta_3 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{A}; \tan 2\theta_4 = \frac{2\sqrt{2}A + \sqrt{1-A^2}}{A - 2\sqrt{2}\sqrt{1-A^2}};$$

$$\tan 2\theta_5 = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{1-2A^2}}.$$

c. Cas $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.9) et (IV.10))

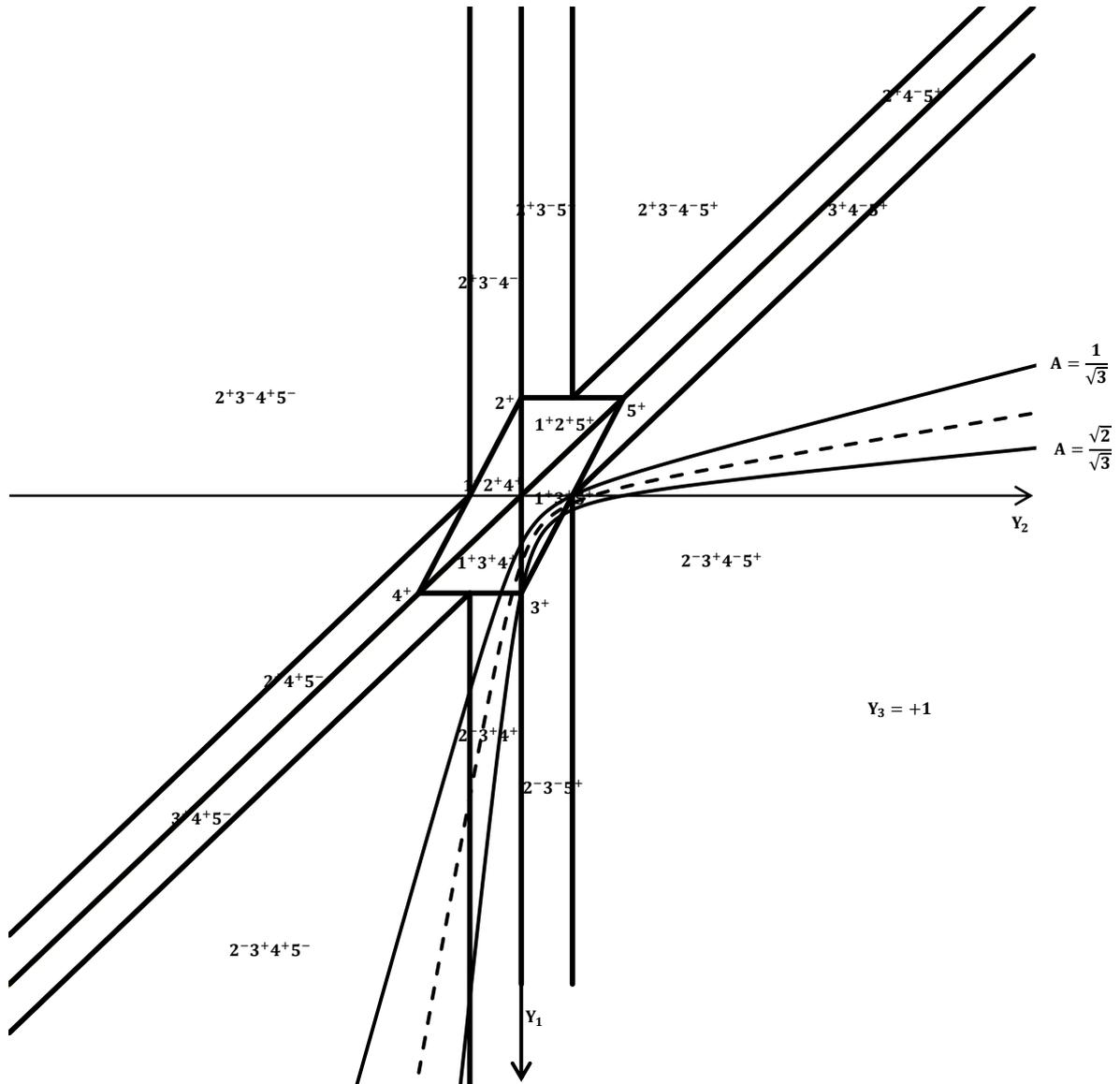


Figure IV.9: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = +1$, cas $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

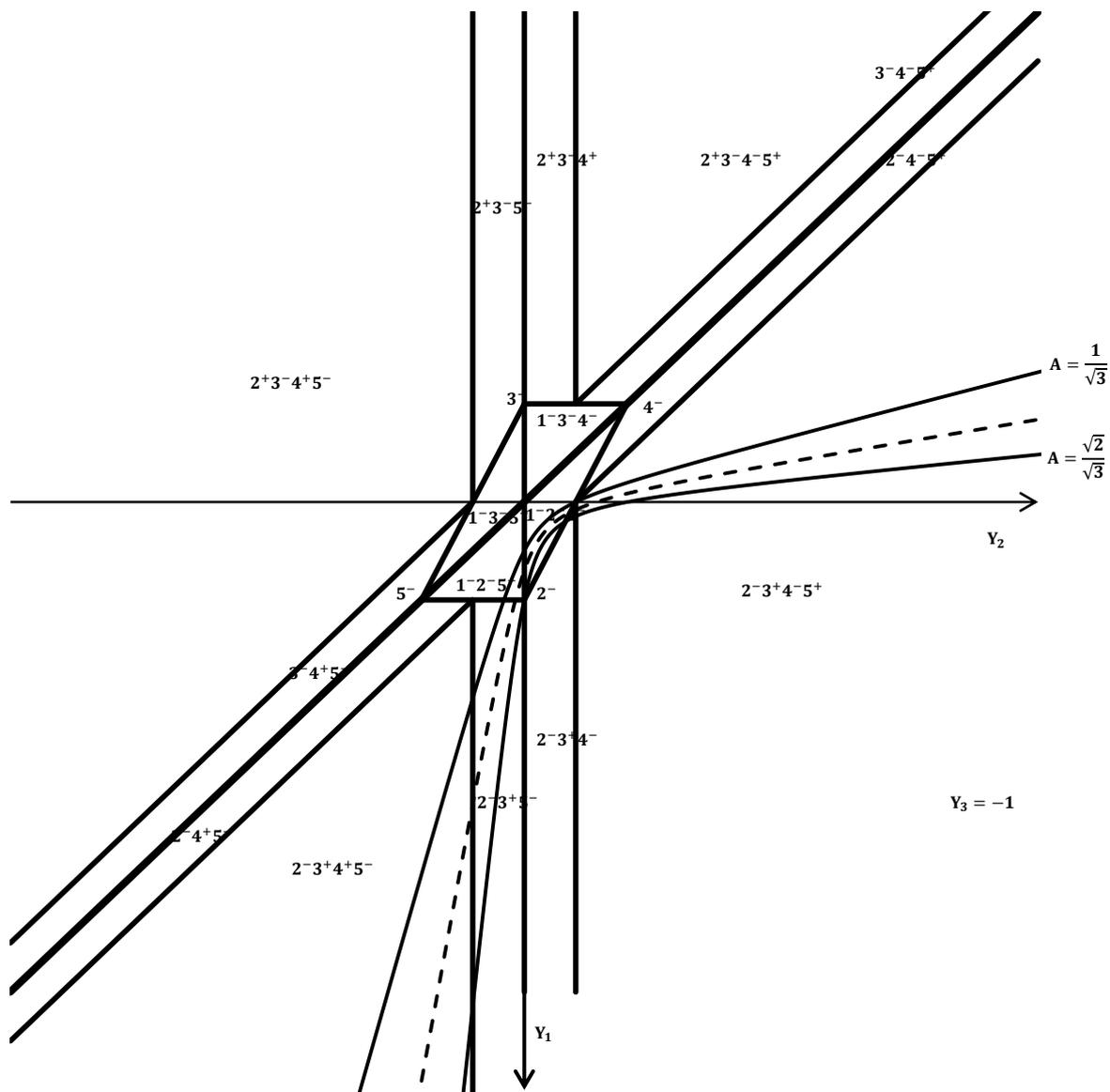


Figure IV.10: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = +1$, cas $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

D'après (II.36) on peut calculer $\bar{\omega}_{12}^p$, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.6).

Tableau IV.6. Vitesse de rotation de chaque système de glissements pour $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Vitesse de rotation $\dot{\theta}$
$0: \theta_1$	$2^- 3^+ 4^+ 5^-$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_1: \theta_2$	$2^- 3^+ 4^+$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_2: \theta_3$	$1^+ 3^+ 4^+$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_3: \theta_4$	$1^+ 3^+ 5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$\theta_4: \theta_5$	$3^+ 4^- 5^+$	$-3\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$2^- 3^+ 4^- 5^+$	$-\bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^- 4^- 5^+$	$-3\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$1^- 2^- 4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$1^- 2^- 5^-$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^- 3^+ 5^-$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^- 3^+ 4^+ 5^-$	$-\bar{D}_{12}$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}A + \sqrt{3-A^2}}{A + \sqrt{6-2A^2}}; \tan 2\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}A + \sqrt{9-A^2}}{-A + 2\sqrt{2}\sqrt{9-A^2}}; \tan 2\theta_3 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{A}; \tan 2\theta_4 = \frac{2\sqrt{2}A + \sqrt{1-A^2}}{A - 2\sqrt{2}\sqrt{1-A^2}};$$

$$\tan 2\theta_5 = \frac{\sqrt{2}A + \sqrt{3-A^2}}{A - \sqrt{6-2A^2}}.$$

;

d. Cas $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq A < 1$.

De la même manière que le cas précédent, les états d'activité des systèmes de glissement sont illustrés dans les figures ((IV.11) et (IV.12)).

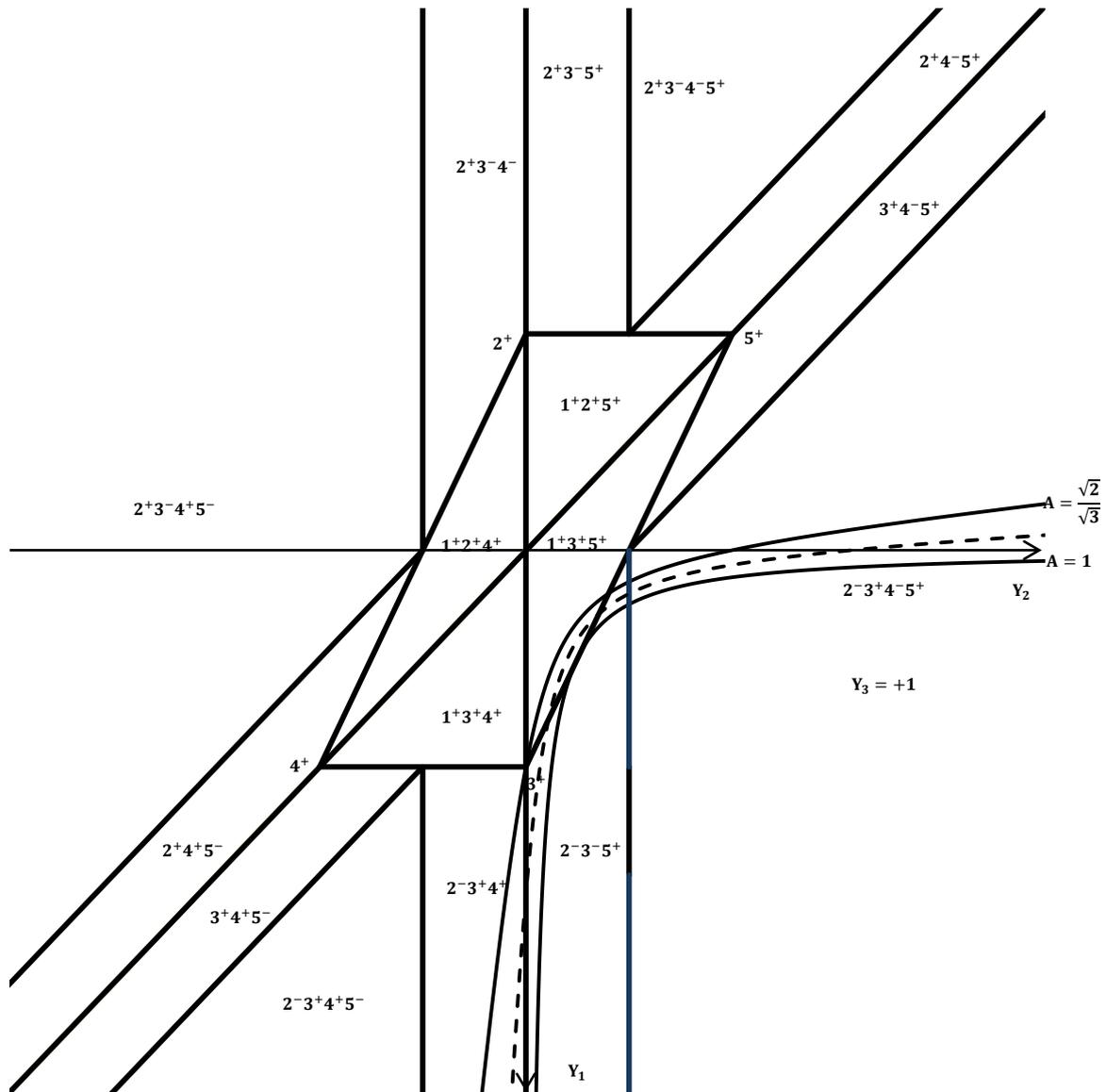


Figure IV 11: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = +1$, cas $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq A < 1$.

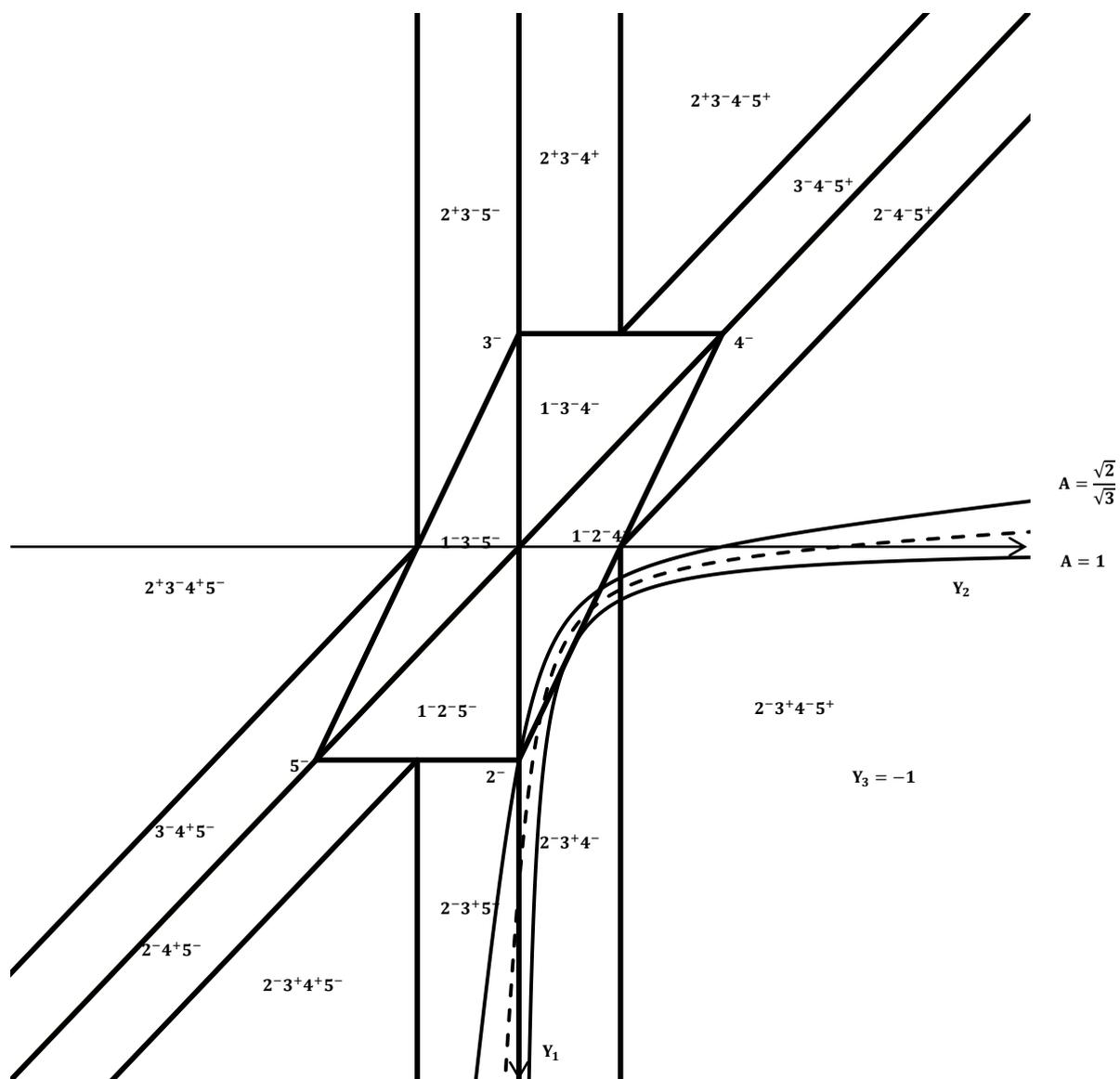


Figure IV 12: CFCP: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = -1$, cas $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq A < 1$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.7).

Tableau IV.7. Vitesse de rotation de chaque système de glissements pour $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq A < 1$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Vitesse de Rotation $\dot{\theta}$
$0: \theta_1$	$2^-3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_1: \theta_2$	$2^-3^+4^+$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_2: \theta_3$	$2^-3^+5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_3: \theta_4$	$1^+3^+5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}$
$\theta_4: \theta_5$	$2^-3^+5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$2^-3^+4^-5^+$	$-\bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-3^+4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$1^-2^-4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$2^-3^+4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-3^+5^-$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^-3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12}$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}A + \sqrt{3-A^2}}{A + \sqrt{6-2A^2}}; \tan 2\theta_2 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{A}; \tan 2\theta_3 = \frac{2\sqrt{2}A - \sqrt{1-A^2}}{A + 2\sqrt{2}\sqrt{1-A^2}}; \tan 2\theta_4 = \frac{2\sqrt{2}A + \sqrt{1-A^2}}{A - 2\sqrt{2}\sqrt{1-A^2}};$$

$$\tan 2\theta_5 = \frac{\sqrt{2}A + \sqrt{3-A^2}}{A - \sqrt{6-2A^2}}.$$

e. Cas $1 \leq A < \sqrt{3}$.

De la même manière que le cas précédent, les états d'activité des systèmes de glissement sont illustrés dans les figures ((IV.13) et (IV.14))

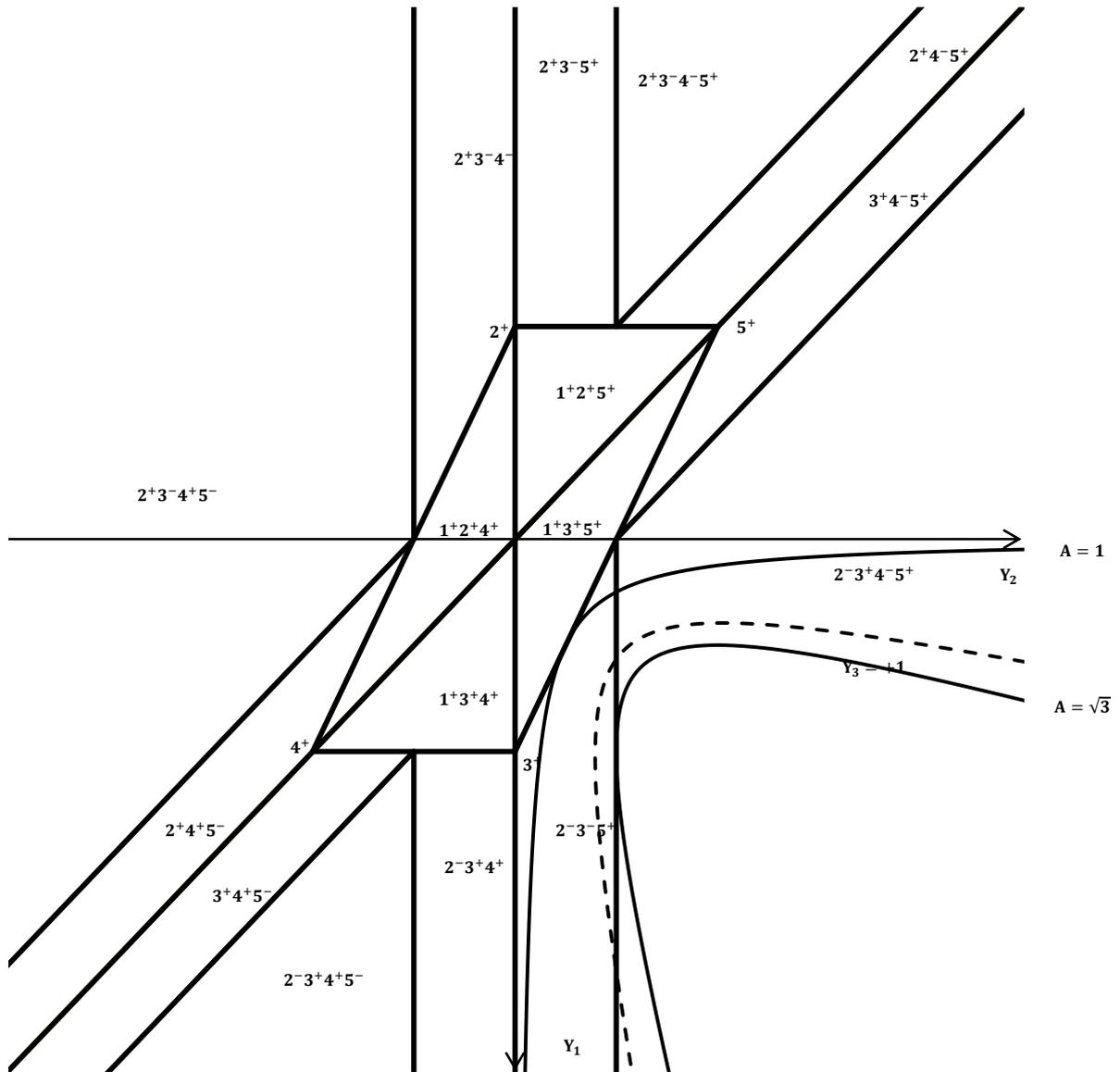


Figure IV 13: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$, cas $1 \leq A < \sqrt{3}$.

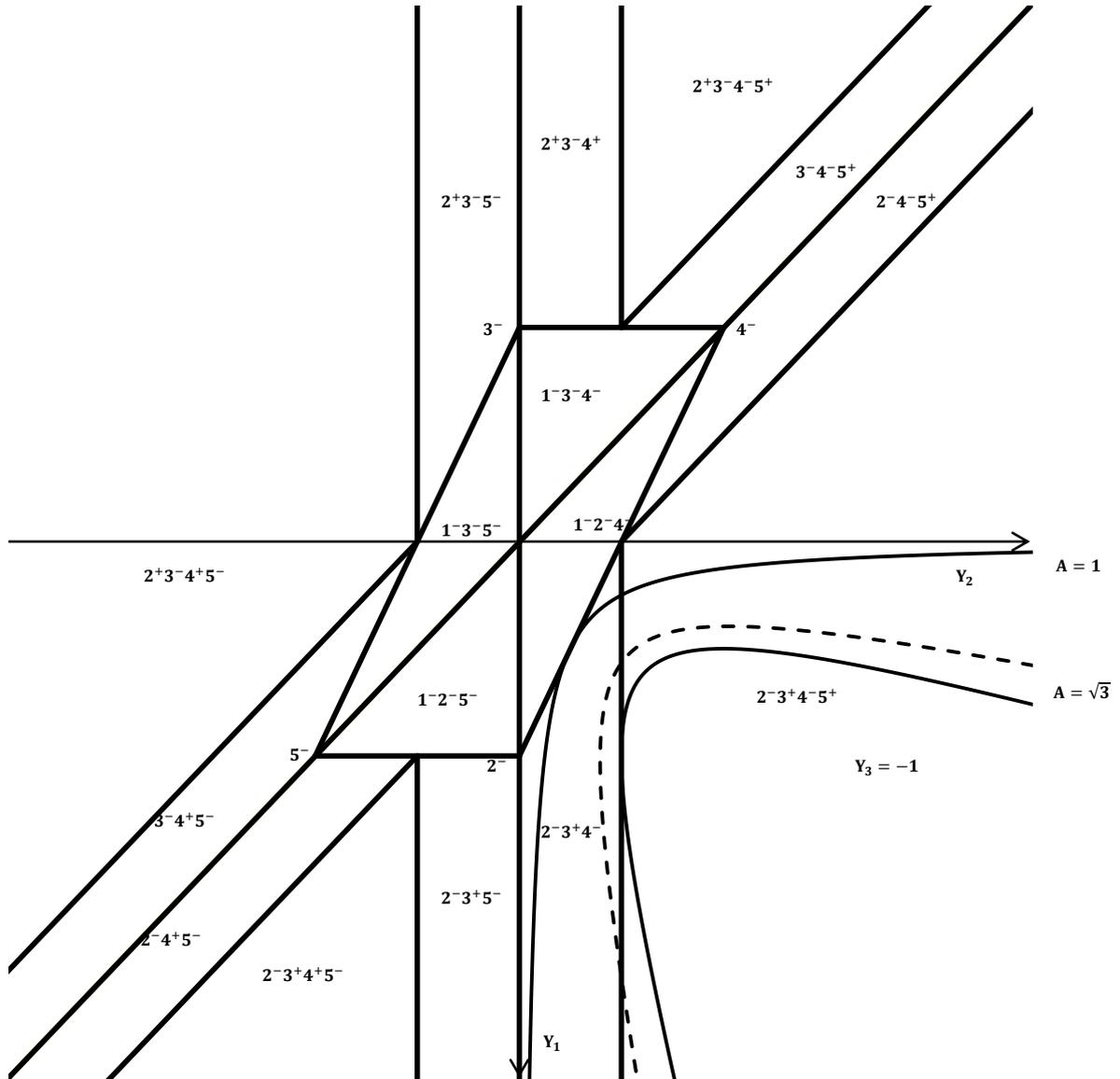


Figure IV 14: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$, cas $1. \leq A < \sqrt{3}$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.8).

Tableau IV.8. Vitesse de rotation de chaque système de glissements pour $1 \leq A < \sqrt{3}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Vitesse de rotation $\dot{\theta}$
$0: \theta_1$	$2^- 3^+ 4^- 5^+$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_1: \theta_2$	$2^- 3^+ 5^+$	$\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\theta_2: \pi - \theta_2$	$2^- 3^+ 4^- 5^+$	$-\bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^- 3^+ 4^-$	$\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^- 3^+ 4^- 5^+$	$-\bar{D}_{12}$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\sqrt{2}A - \sqrt{3 - A^2}}{A + \sqrt{6 - 2A^2}}; \quad \tan 2\theta_2 = \frac{\sqrt{2}A + \sqrt{3 - A^2}}{A - \sqrt{6 - 2A^2}}.$$

f. Cas $A \geq \sqrt{3}$.

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.15) et (IV.16))

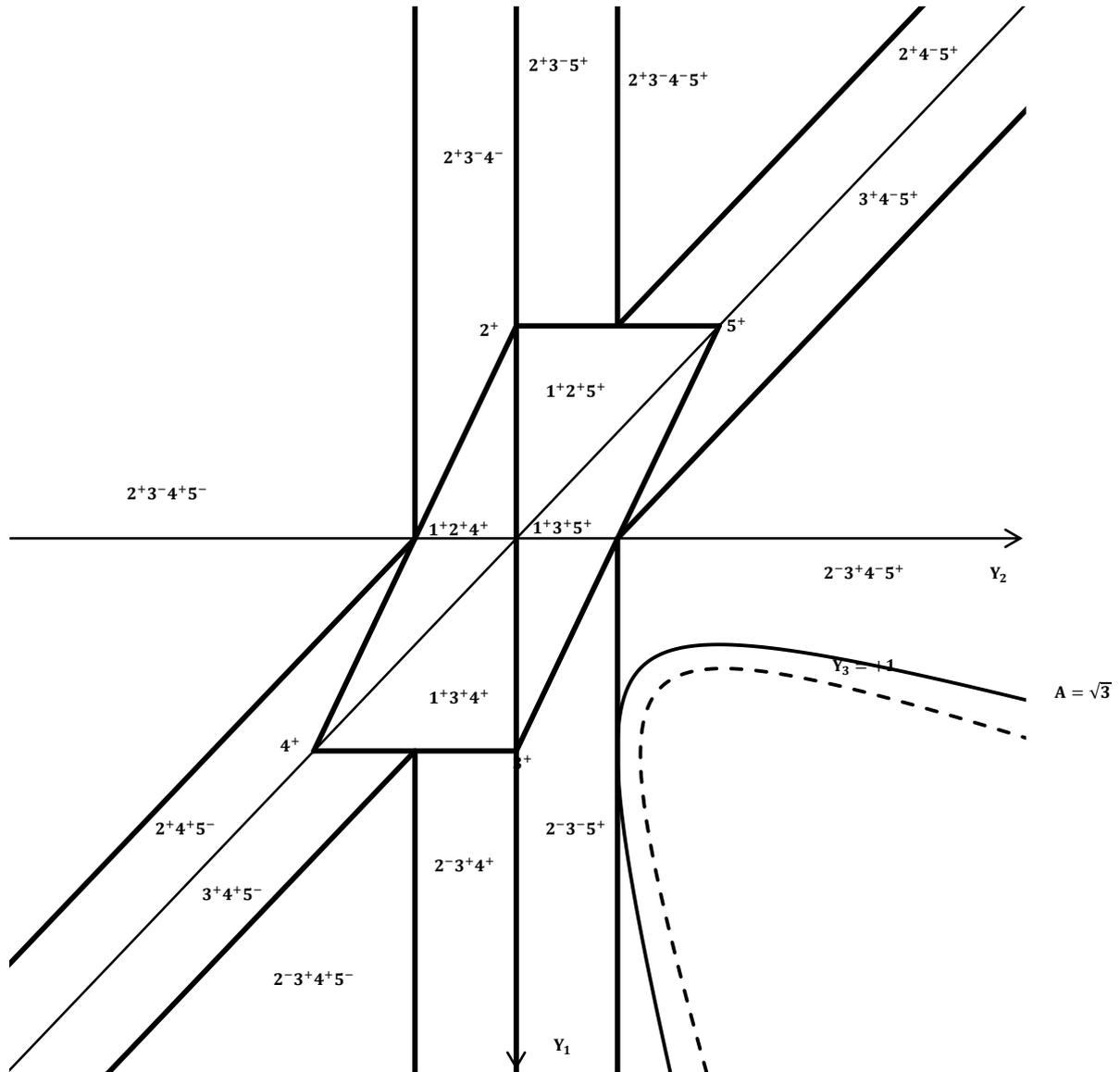


Figure IV 15: CFCP2: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$, cas $A \geq \sqrt{3}$.

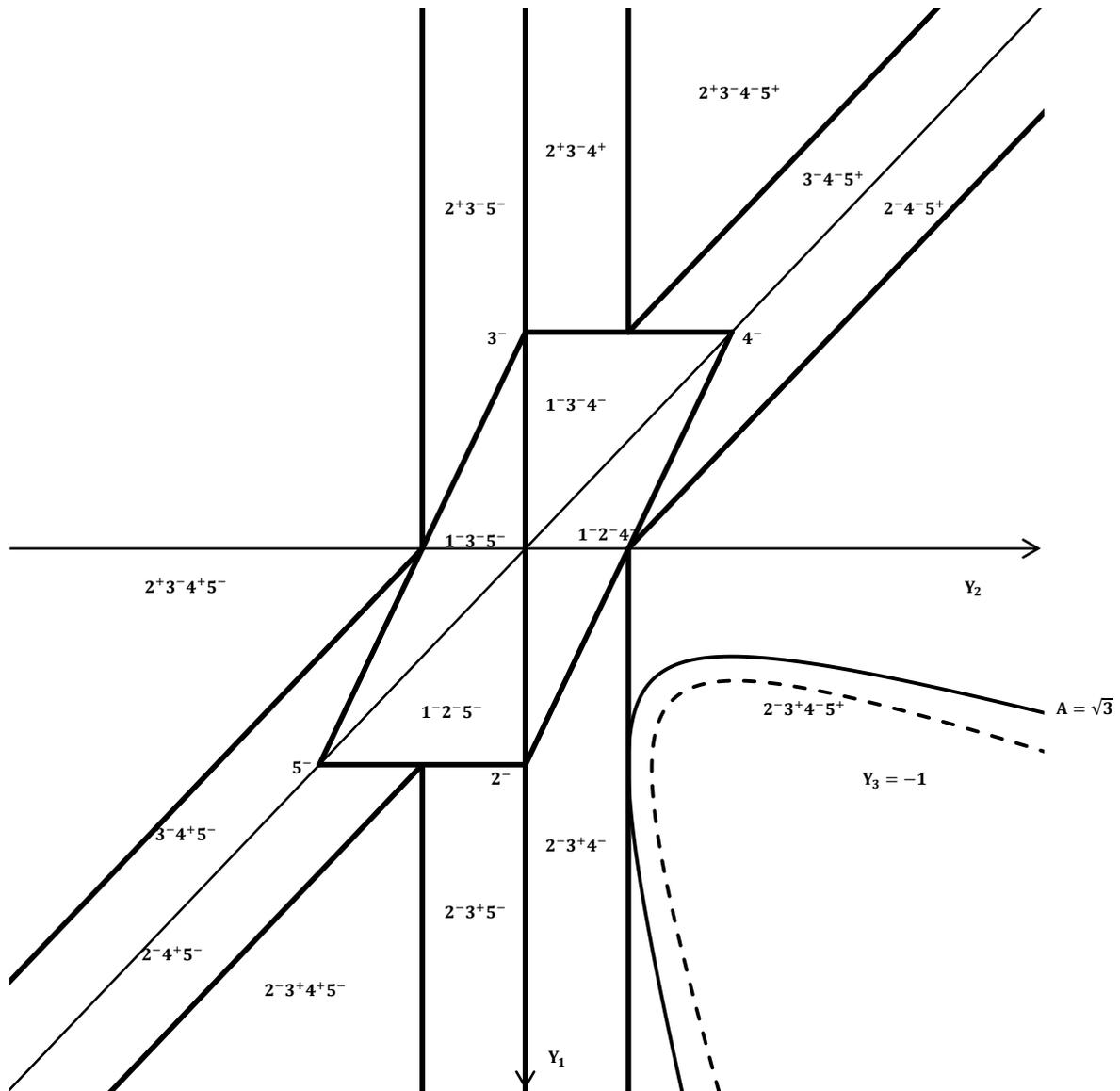


Figure IV 16: CFCP2: Diagramme d'activité pour essai de l'extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$, cas $A \geq \sqrt{3}$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.9).

Tableau IV.9. Vitesse de rotation de chaque système de glissements pour $A \geq \sqrt{3}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Vitesse de rotation $\dot{\theta}$
$0: \pi$	$2^-3^+4^-5^+$	$-\bar{D}_{12}$

1.2. Cas CFCP1

Par superposition des courbes de la figure (IV.2) représentatives de l'essai et les figures des plans projectifs (III.17) et (III.18) représentatives du monocristal CFCP1, on obtient le diagramme d'activité suivant ((IV.17) et (IV.18)).

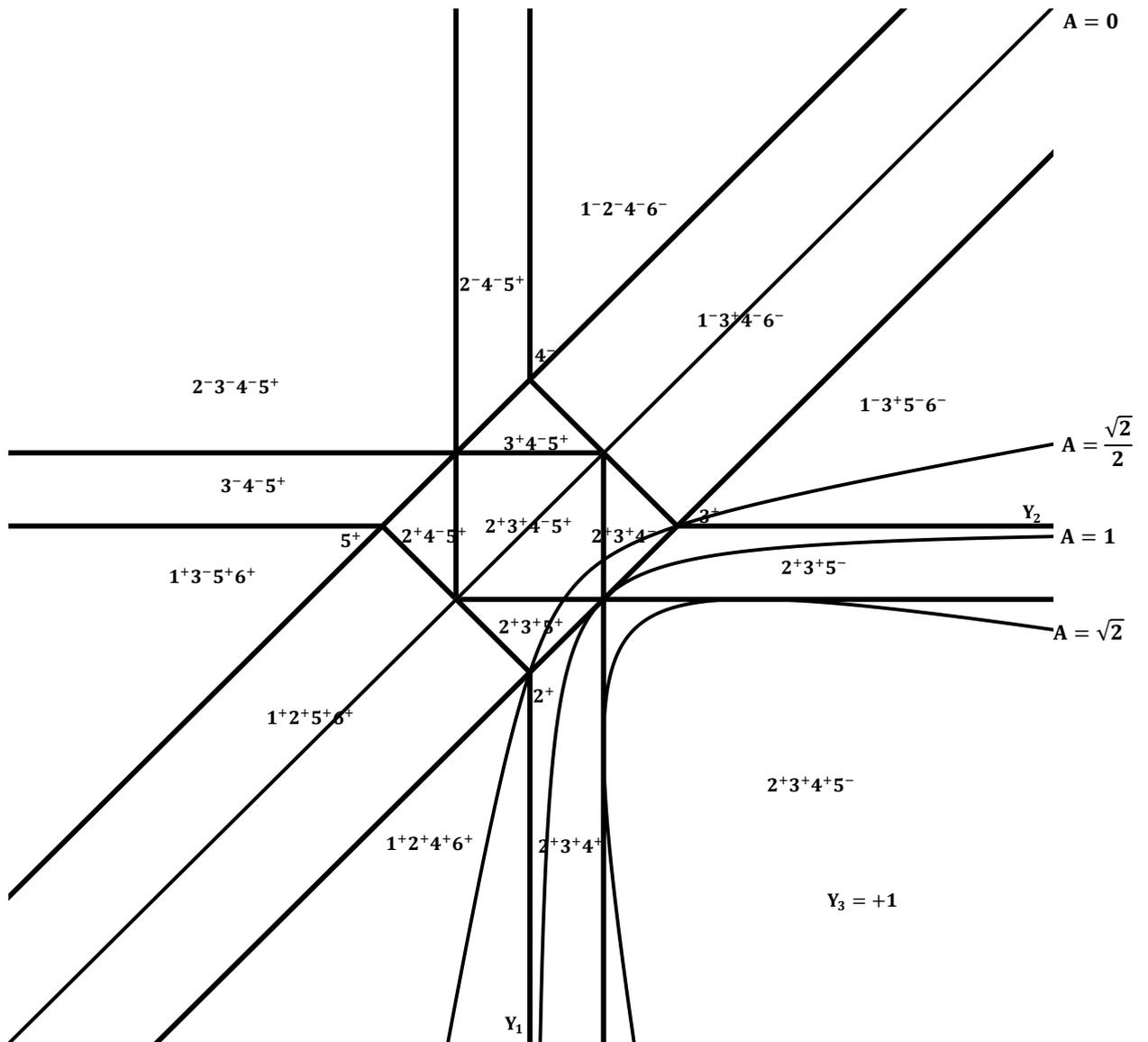


Figure IV.17: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$.

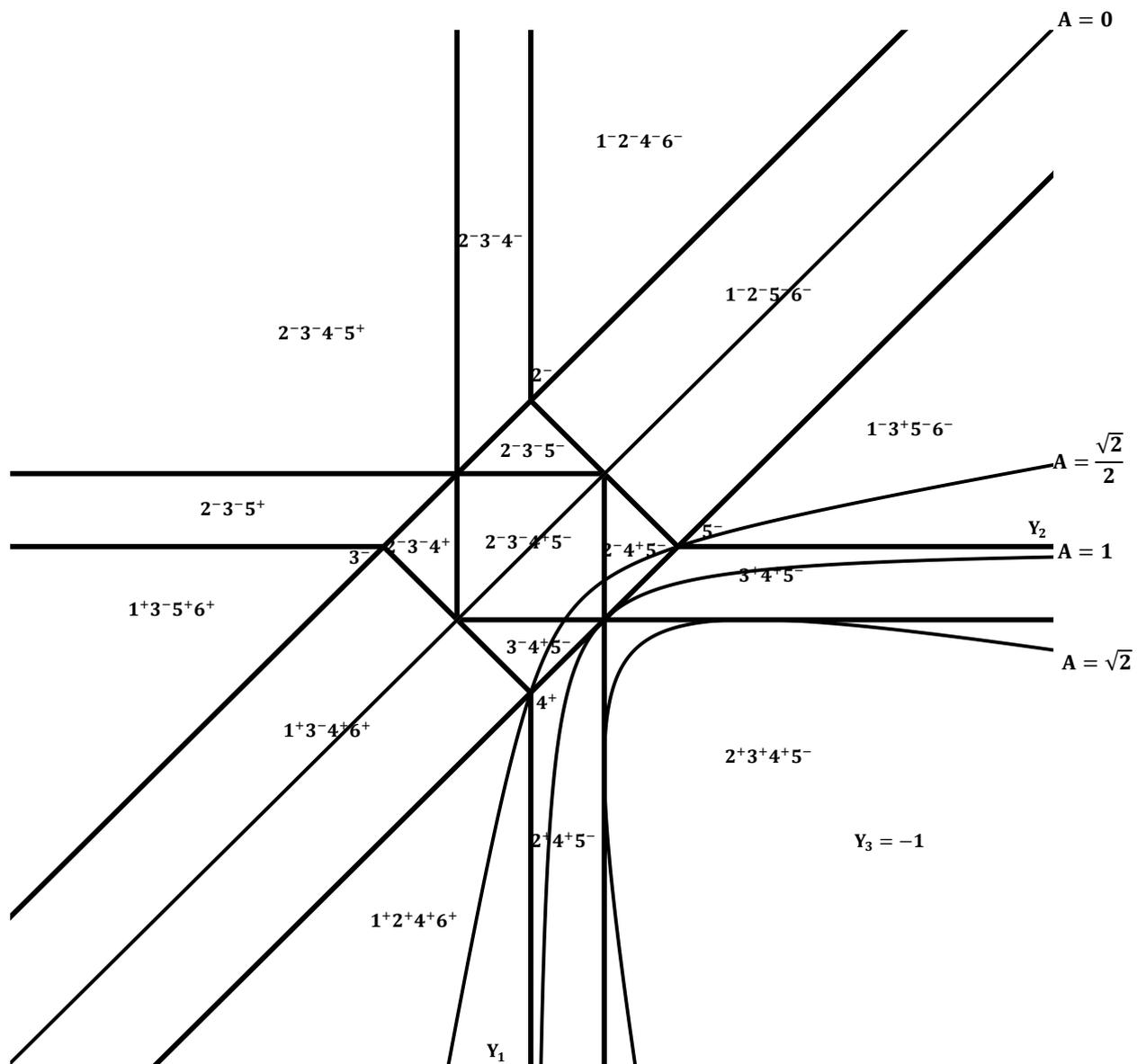


Figure IV.18: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$

De la même manière pour le cas du monocristal CFCP2, on détermine en fonction de la valeur de A et pour chaque intervalle de l'orientation cristalline, l'état d'activité de chaque système de glissement ainsi que la rotation plastique correspondante. Ainsi différentes situations peuvent être considérées.

Pour les différents cas, les résultats obtenus sont illustrés dans les figures (de (IV.19) à (IV.30)) et les tableaux (de (IV.10) à (IV.15)).

a. Cas $A = 0$.

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.19) et (IV.20))

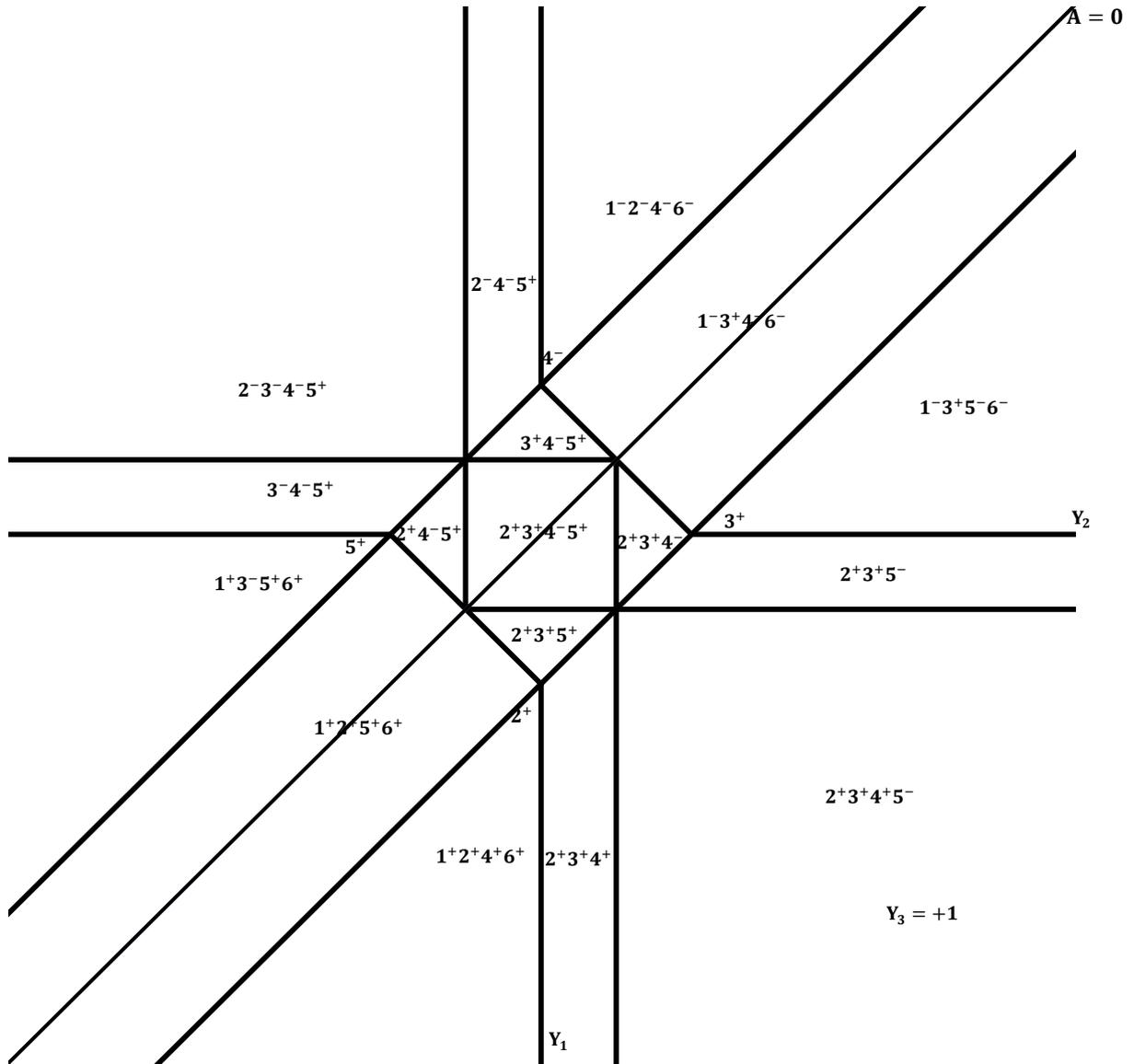


Figure IV.19: CFCPI: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$ avec $A = 0$.

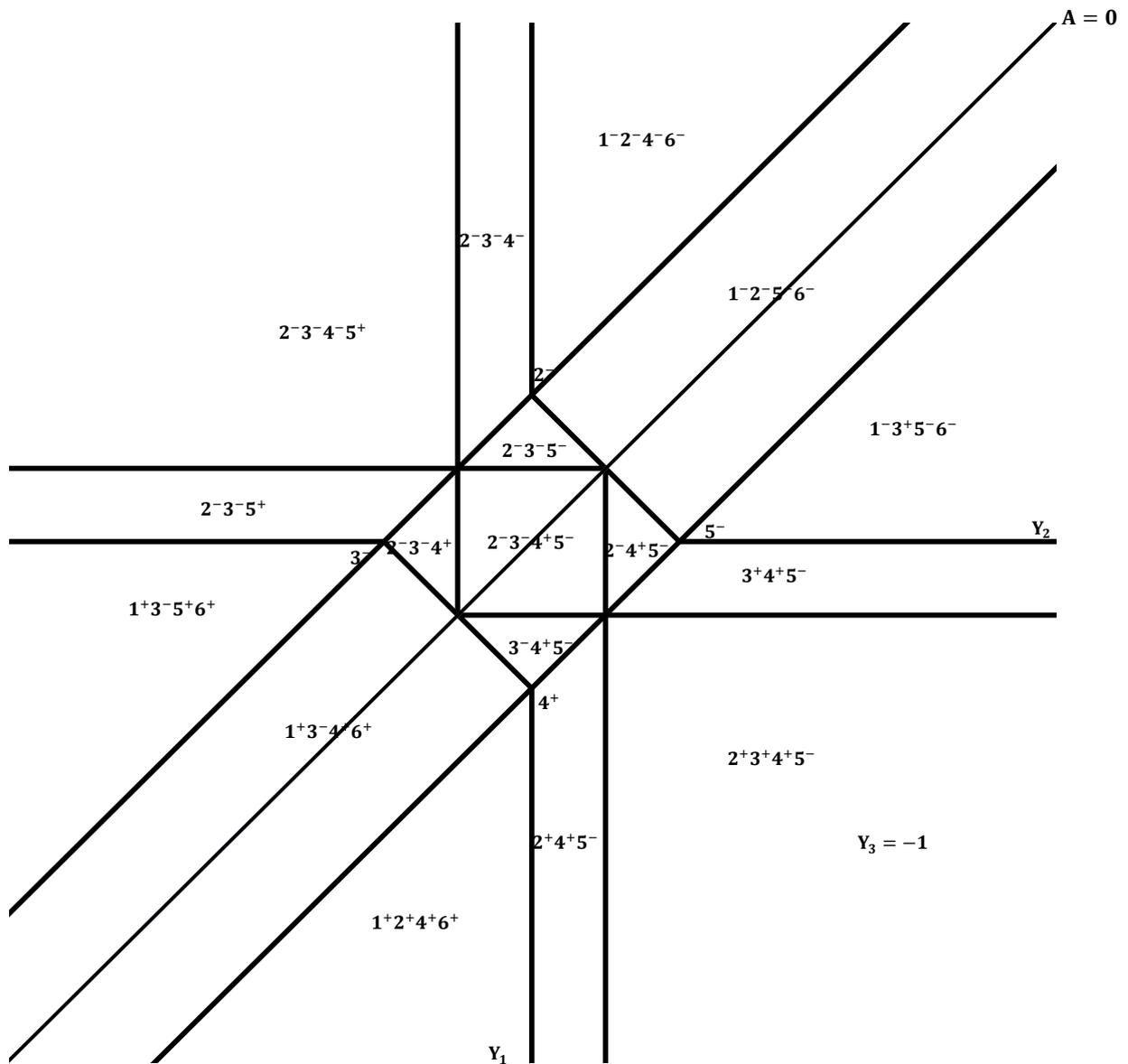


Figure IV.20: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$ avec $A = 0$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.10).

Tableau .IV.10. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $A = 0$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \theta_1$	$1^+2^+5^+6^+$	$\frac{1}{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\theta_1: \theta_2$	$2^+3^+4^+5^+$	0
$\theta_2: \frac{\pi}{2}$	$1^-3^+4^-6^-$	$\frac{1}{2}(-\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})$
$\frac{\pi}{2}: \pi - \theta_2$	$1^-2^-5^-6^-$	$\frac{1}{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-3^-4^+5^-$	0
$\pi - \theta_1: \pi$	$1^+3^-4^+6^+$	$\frac{1}{2}(-\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})$

Avec :

$$\tan 2\theta_1 = 1 ; 2\theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\theta_1 .$$

b. Cas $0 < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.21) et (IV.22))

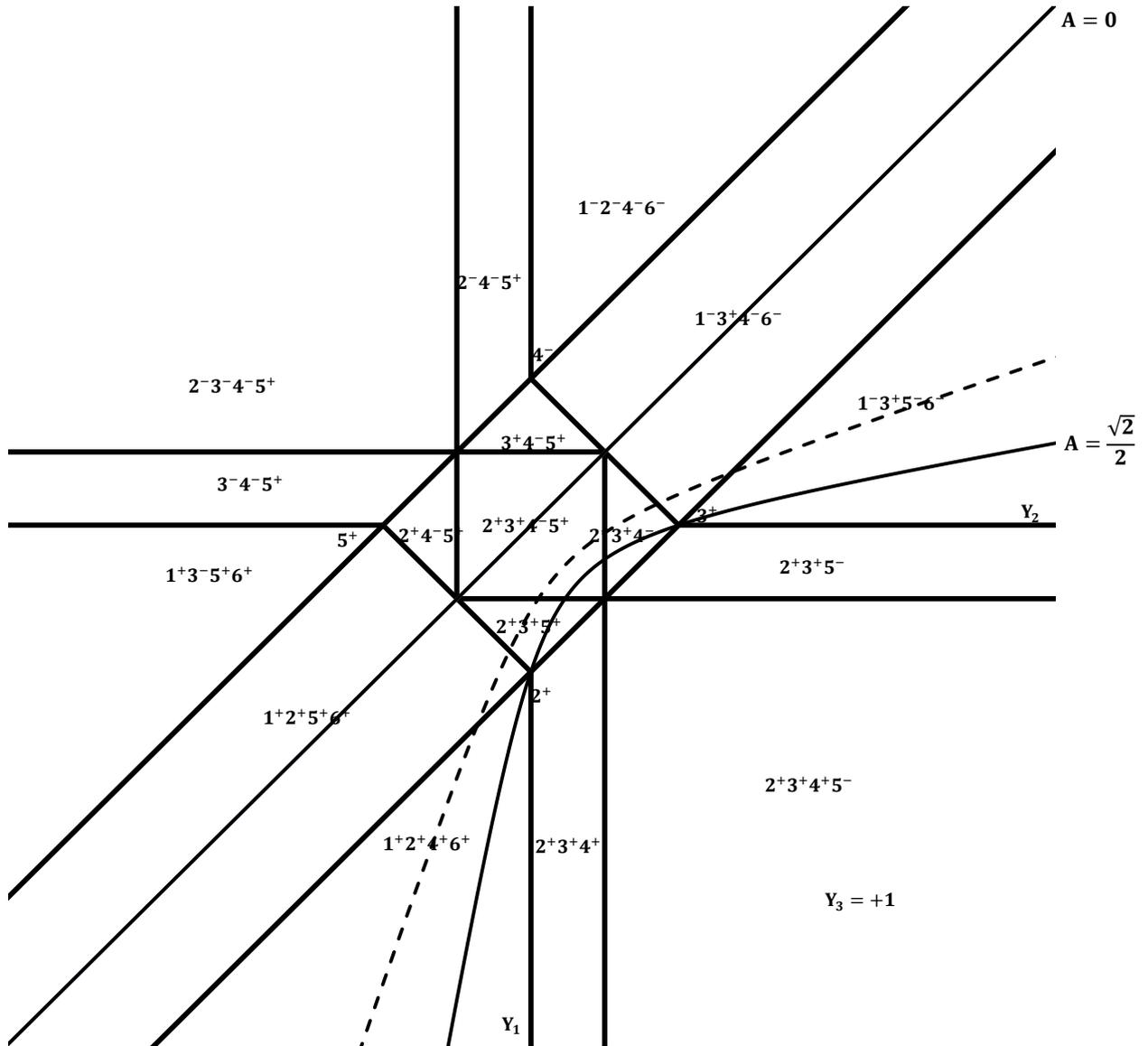


Figure IV.21: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$ pour $0 < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

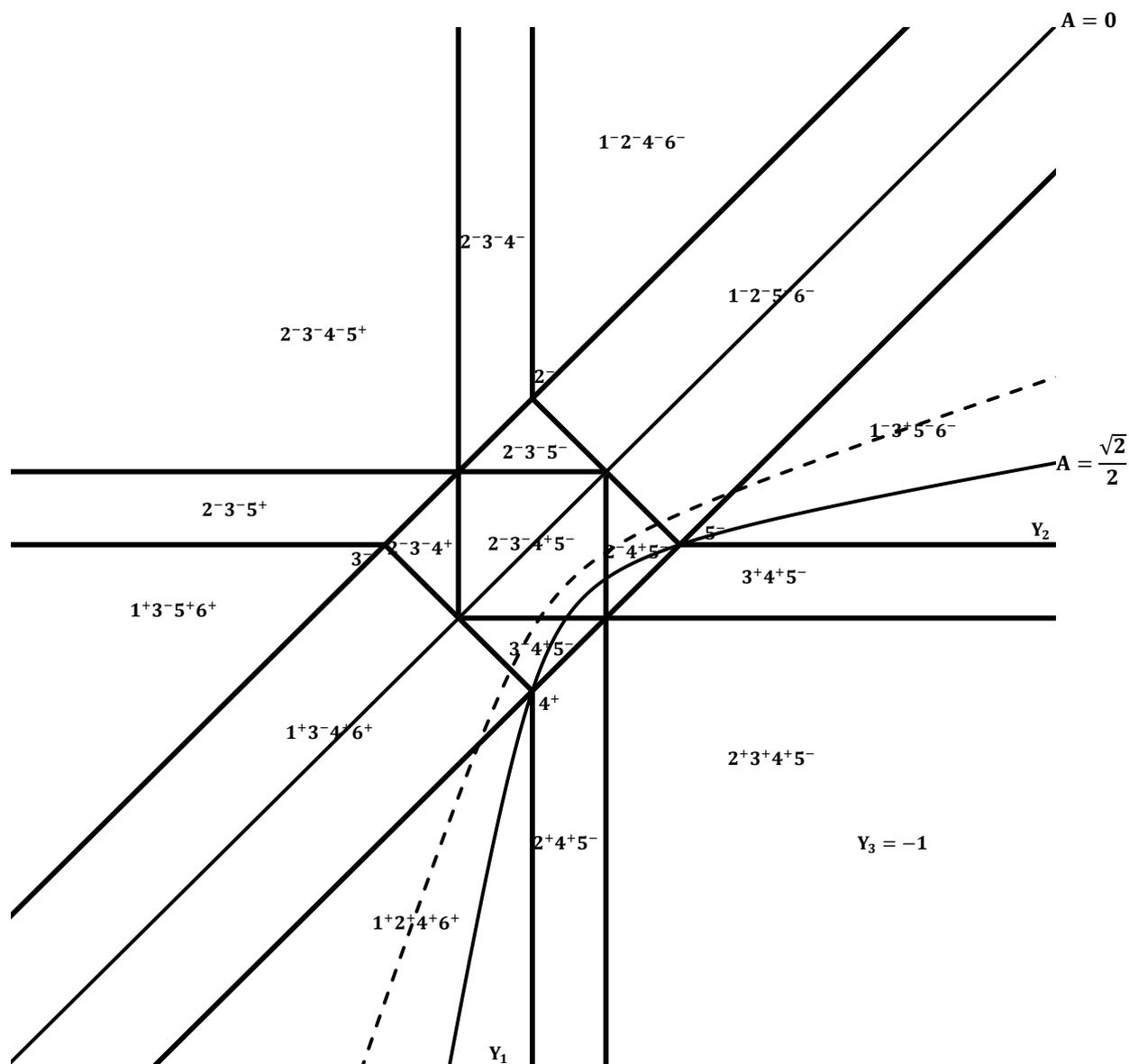


Figure IV.22: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$ pour $0 < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.11).

Tableau .IV.11. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $0 < A < \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \theta_1$	$1^+2^+4^+6^+$	\bar{D}_{12}
$\theta_1: \theta_2$	$1^+2^+5^+6^+$	$\frac{1}{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\theta_2: \theta_3$	$2^+3^+5^+$	$-\bar{D}_{12} + \bar{D}_{11}$
$\theta_3: \theta_4$	$2^+3^+4^-5^+$	0
$\theta_4: \theta_5$	$2^+3^+4^-$	$-\bar{D}_{22} - \bar{D}_{12}$
$\theta_5: \theta_6$	$1^-3^+4^-6^-$	$\frac{1}{2}(-\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})$
$\theta_6: \pi - \theta_6$	$1^-3^+5^-6^-$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$1^-2^-5^-6^-$	$\frac{1}{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-4^+5^-$	$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$2^-3^-4^+5^-$	0
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$3^-4^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$1^+3^-4^+6^+$	$\frac{1}{2}(-\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})$
$\pi - \theta_1: \pi$	$1^+2^+4^+6^+$	\bar{D}_{12}

$$\tan 2\theta_1 = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} ; \tan 2\theta_2 = 1 ; \tan 2\theta_3 = \frac{A+\sqrt{2-A^2}}{-A+\sqrt{2-A^2}} ; \tan 2\theta_4 = \frac{A-\sqrt{2-A^2}}{A+\sqrt{2-A^2}}$$

$$\tan 2\theta_5 = -1 ; \tan 2\theta_6 = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$$

c. Cas $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq A < 1$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.23) et (IV.24))

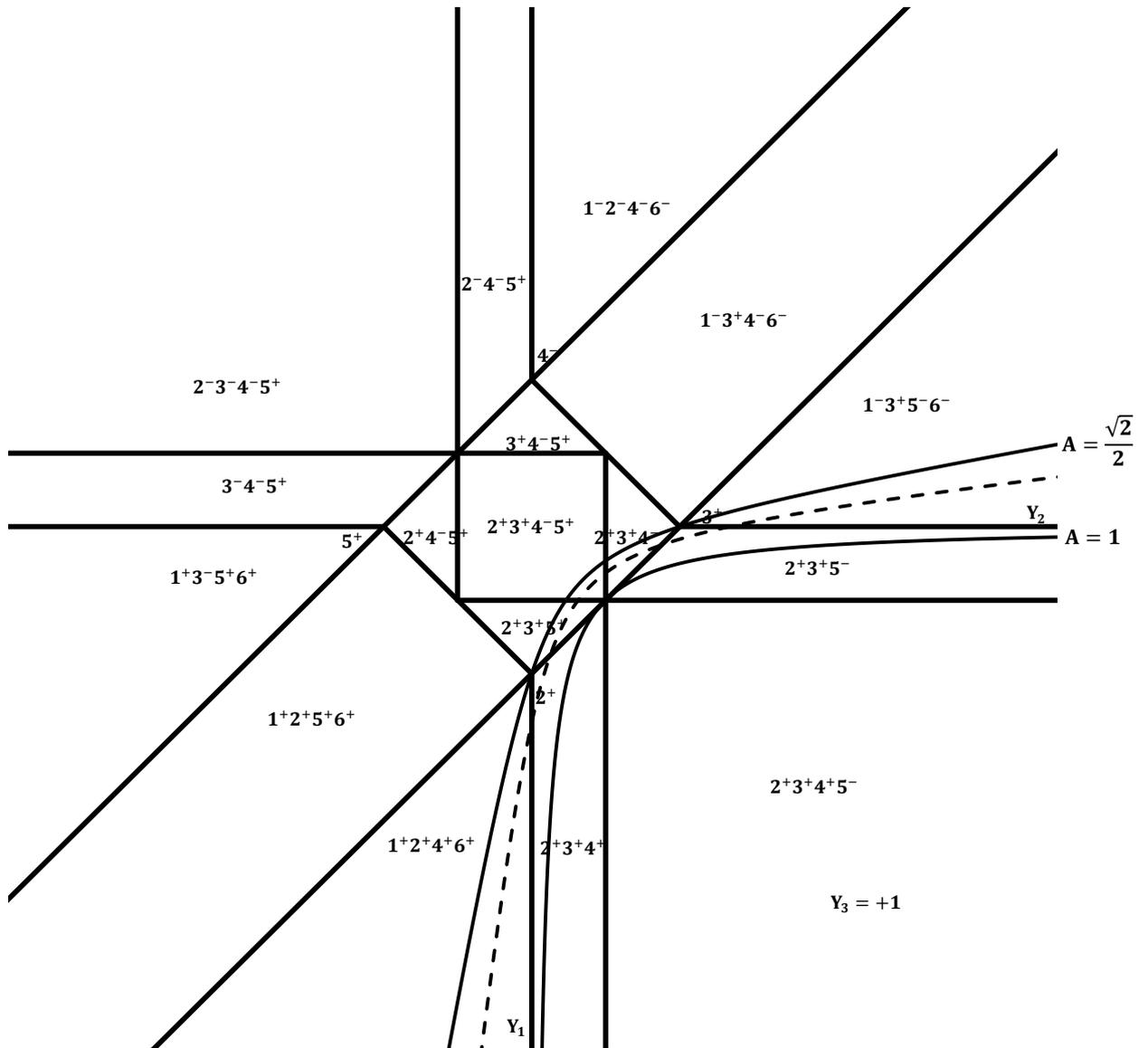


Figure IV.23: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = +1$ pour $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq A < 1$.

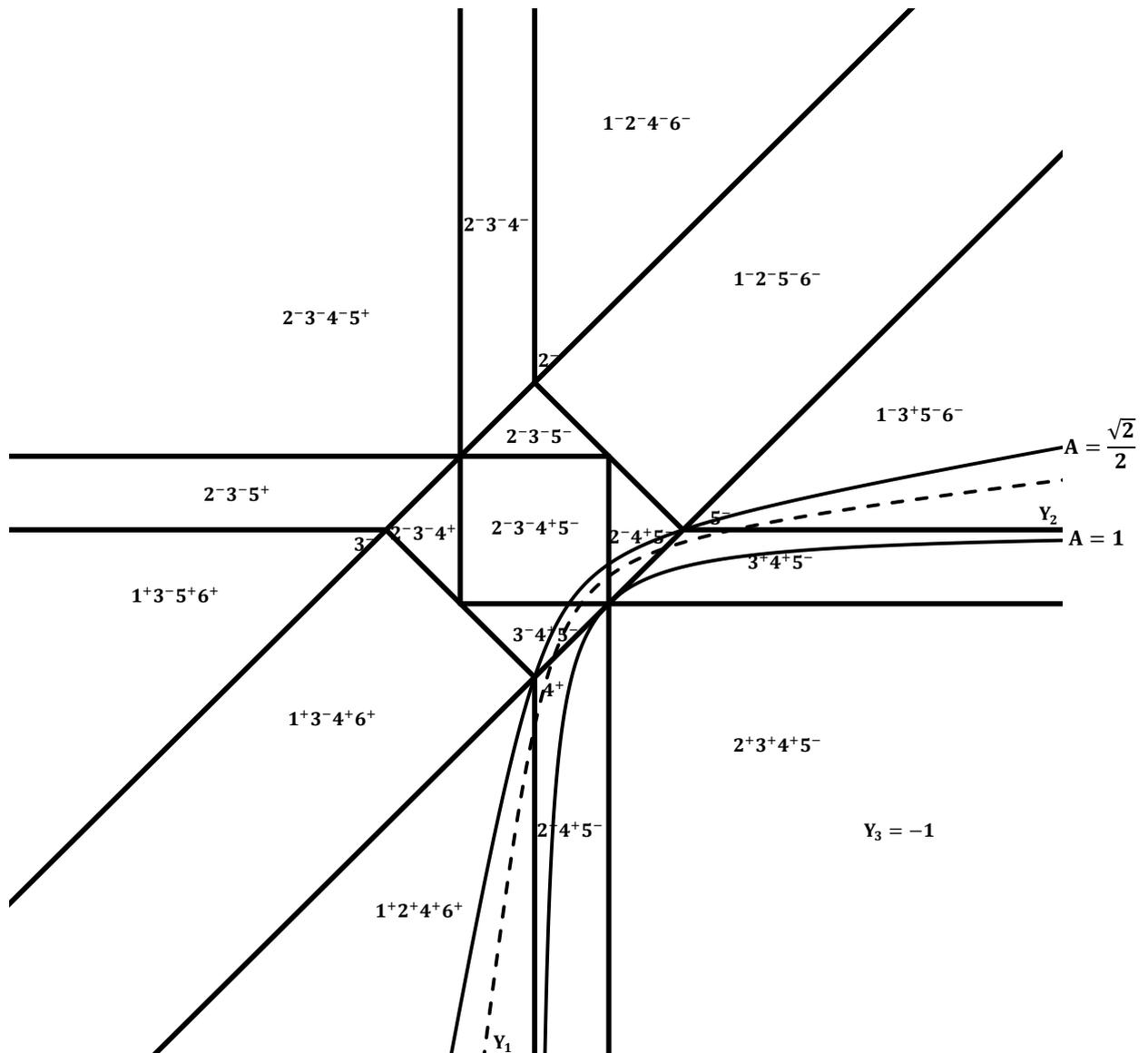


Figure IV.24: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan

projectif $Y_3 = -1$ pour $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq A < 1$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.12).

Tableau .IV.12. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq A < 1$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \theta_1$	$1^+2^+4^+6^+$	\bar{D}_{12}
$\theta_1: \theta_2$	$2^+3^+4^-$	$-\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\theta_2: \theta_3$	$2^+3^+5^+$	$-\bar{D}_{12} + \bar{D}_{11}$
$\theta_3: \theta_4$	$2^+3^+4^-5^+$	0
$\theta_4: \theta_5$	$2^+3^+4^-$	$-\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\theta_5: \theta_6$	$2^+3^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\theta_6: \pi - \theta_6$	$1^-3^+5^-6^-$	$-\bar{D}_{12}$
$\theta_5: \pi - \theta_5$	$3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_5: \pi - \theta_4$	$2^-4^+5^-$	$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$2^-3^-4^+5^-$	0
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$3^-4^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^+4^+5^-$	$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$1^+2^+4^+6^+$	\bar{D}_{12}

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{A}; \tan 2\theta_2 = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}; \tan 2\theta_3 = \frac{A+\sqrt{2-A^2}}{-A+\sqrt{2-A^2}}; \tan 2\theta_4 = \frac{A-\sqrt{2-A^2}}{A+\sqrt{2-A^2}}$$

$$\tan 2\theta_5 = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}; \tan 2\theta_6 = \frac{\sqrt{1-A^2}}{-A}.$$

d. Cas $A = 1$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.25) et (IV.26))

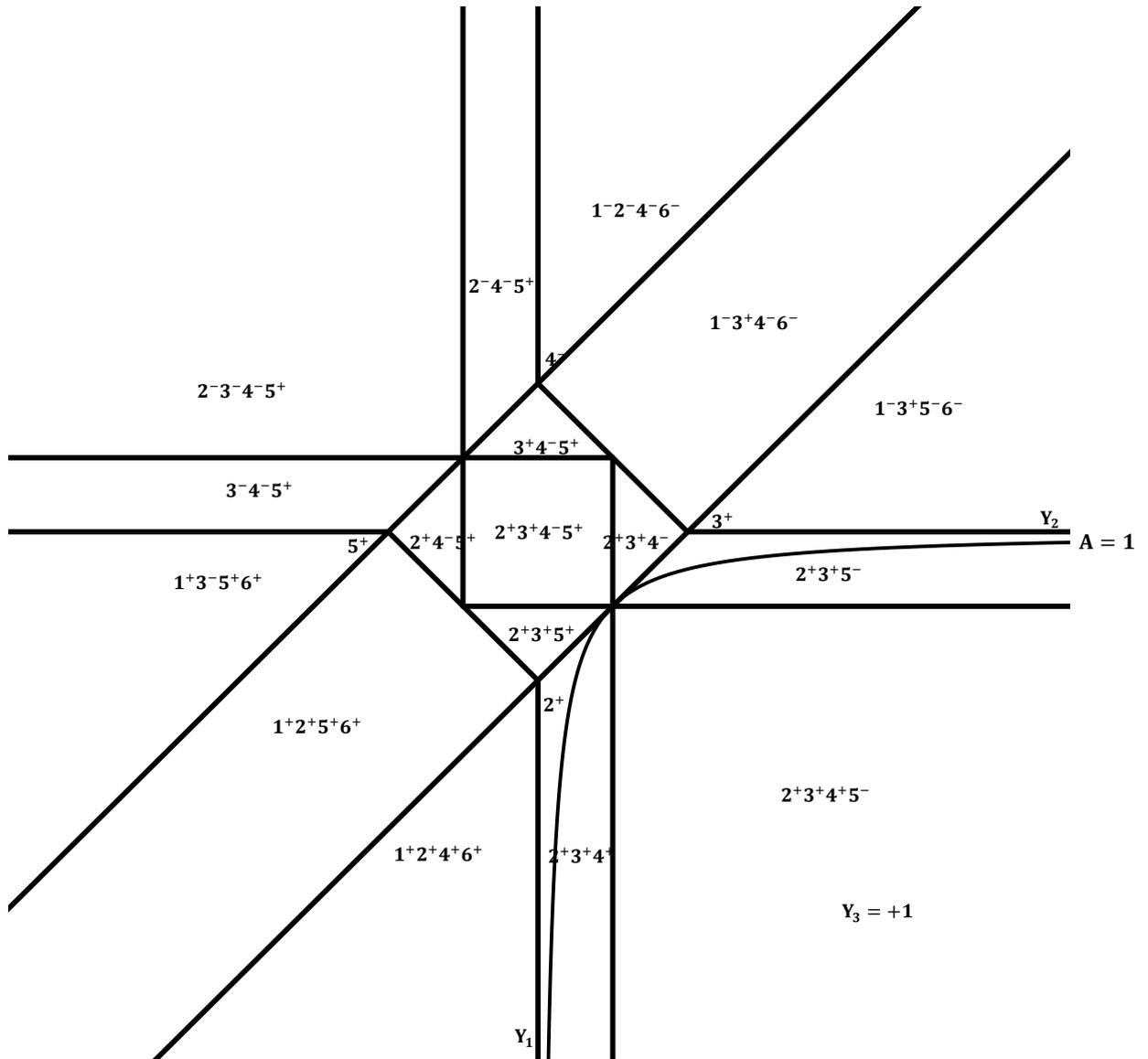


Figure IV.25: CFCPI: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$ pour $A=1$.

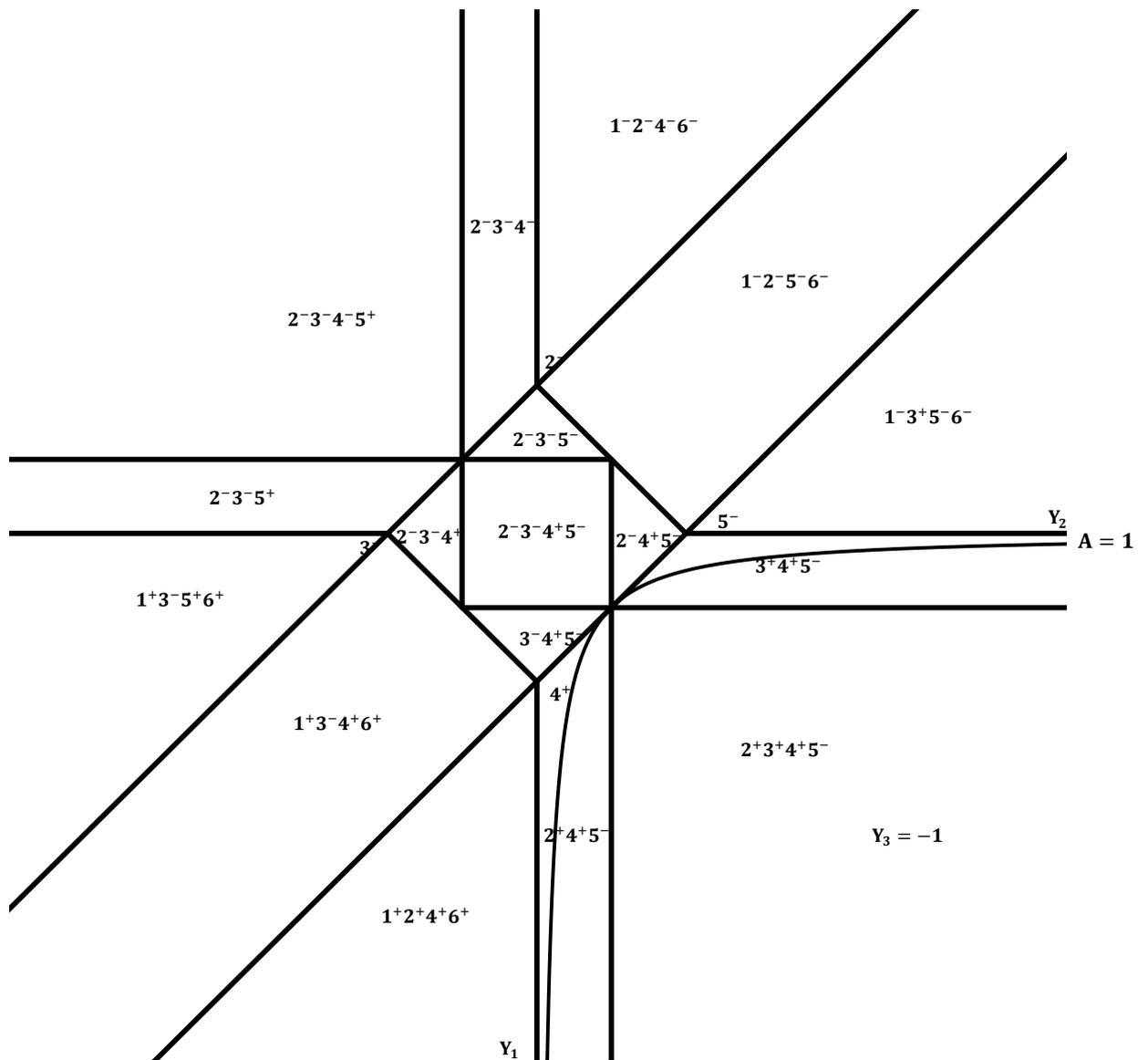


Figure IV.26: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$ pour $A=1$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.13).

Tableau .IV.13. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $A = 1$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \frac{\pi}{4}$	$2^+3^+4^+$	$-\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\frac{\pi}{4}: \frac{\pi}{2}$	$2^+3^+5^-$	$-\bar{D}_{12} + \bar{D}_{11}$
$\frac{\pi}{2}: \frac{3\pi}{4}$	$3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\frac{3\pi}{4}: \pi$	$2^-4^+5^-$	$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$

e. Cas $1 < A < \sqrt{2}$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.27) et (IV.28))

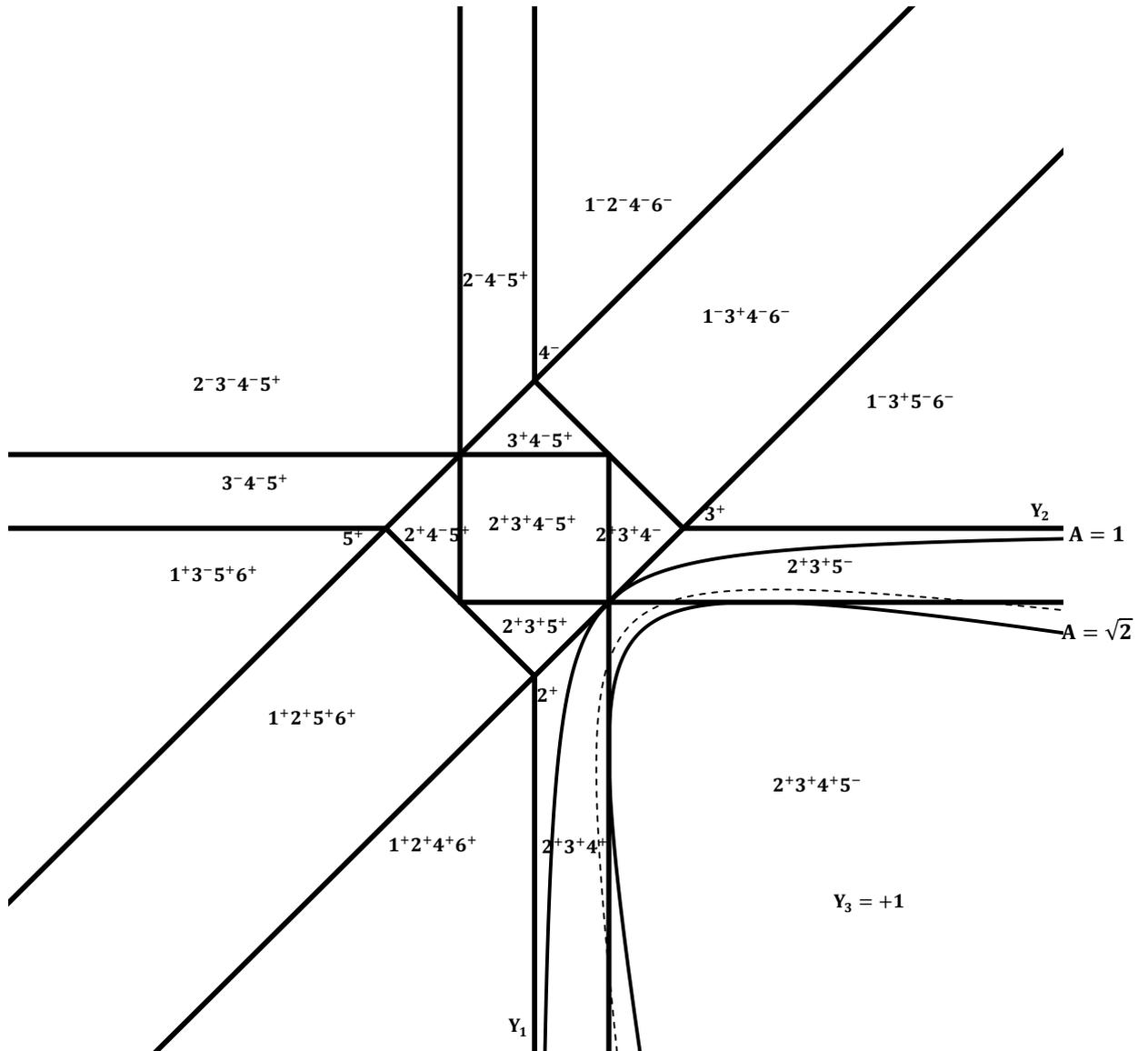


Figure IV.27: CFCPI: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$ pour $1 < A < \sqrt{2}$.

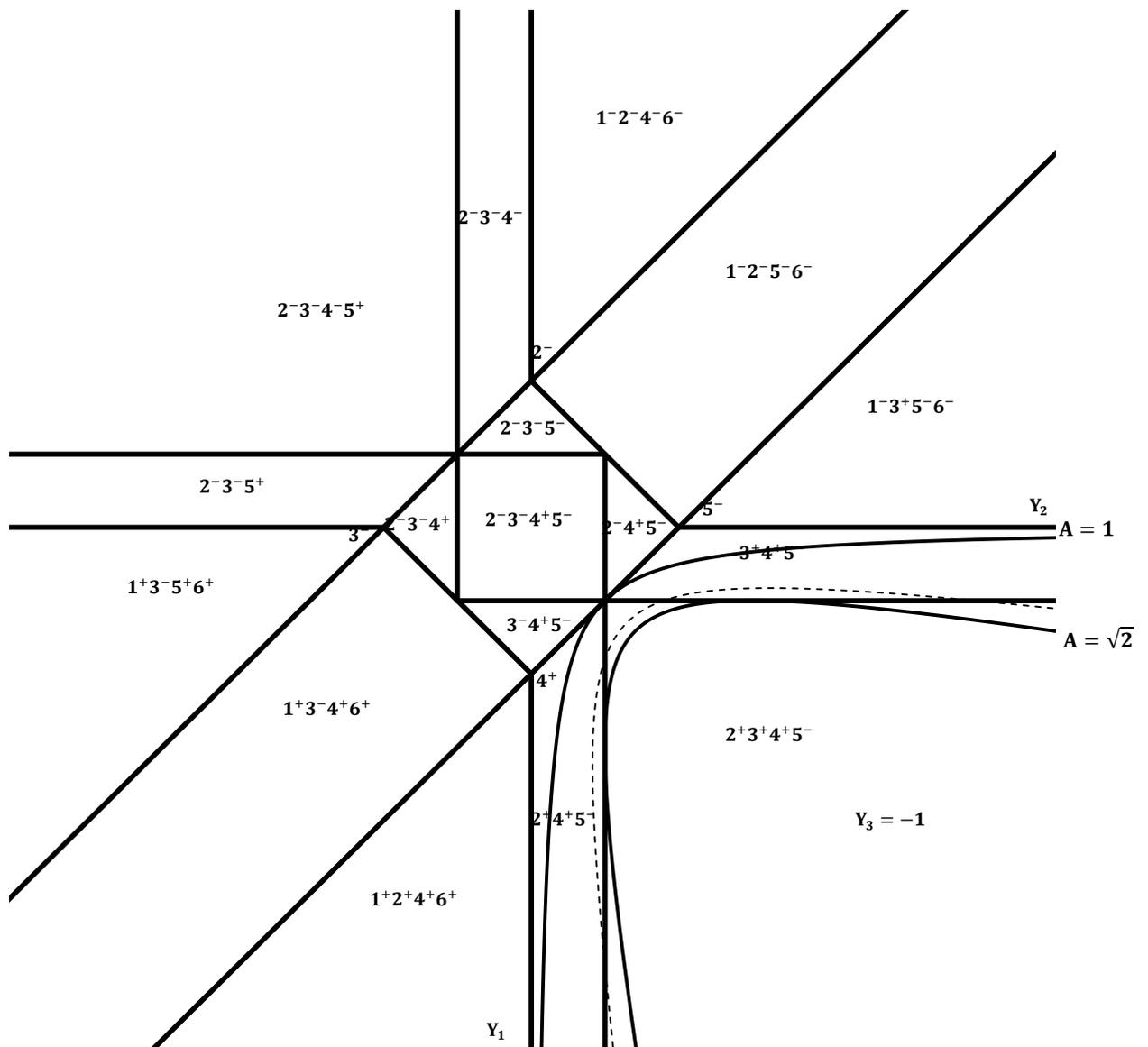


Figure IV.28: CFCP1: Diagramme d'activité pour essai de l'extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$ pour $1 < A < \sqrt{2}$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.14).

Tableau .IV.14. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $1 < A < \sqrt{2}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \theta_1$	$2^+3^+4^+5^-$	0
$\theta_1: \theta_2$	$2^+3^+4^+$	$-\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\theta_2: \theta_3$	$2^+3^+4^+5^-$	0
$\theta_3: \theta_4$	$2^+3^+5^-$	$-\bar{D}_{12} + \bar{D}_{11}$
$\theta_4: \pi - \theta_4$	$2^+3^+4^+5^-$	0
$\pi - \theta_4: \pi - \theta_3$	$3^+4^+5^-$	$-\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11}$
$\pi - \theta_3: \pi - \theta_2$	$2^+3^+4^+5^-$	0
$\pi - \theta_2: \pi - \theta_1$	$2^-4^+5^-$	$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{12}$
$\pi - \theta_1: \pi$	$2^+3^+4^+5^-$	0

$$\tan 2\theta_1 = \frac{A - \sqrt{2 - A^2}}{A + \sqrt{2 - A^2}}; \quad \tan 2\theta_2 = \frac{A + \sqrt{2 - A^2}}{-A + \sqrt{2 - A^2}}$$

f. Cas $A \geq \sqrt{2}$

Pour ce cas, les résultats sont illustrés dans les figures ((IV.29) et (IV.30))

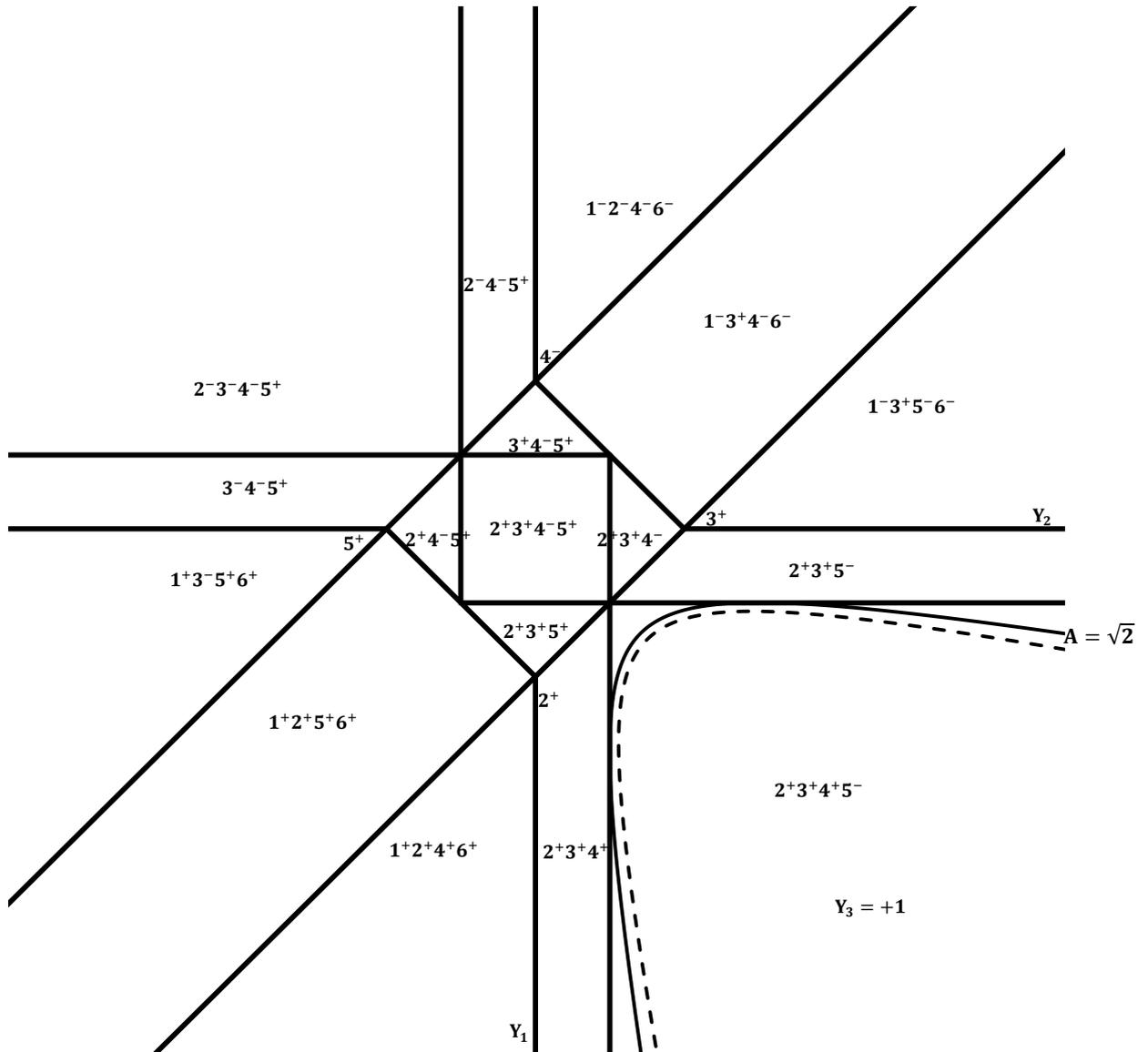


Figure IV.29: CFCPI: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = +1$ pour $A \geq \sqrt{2}$.

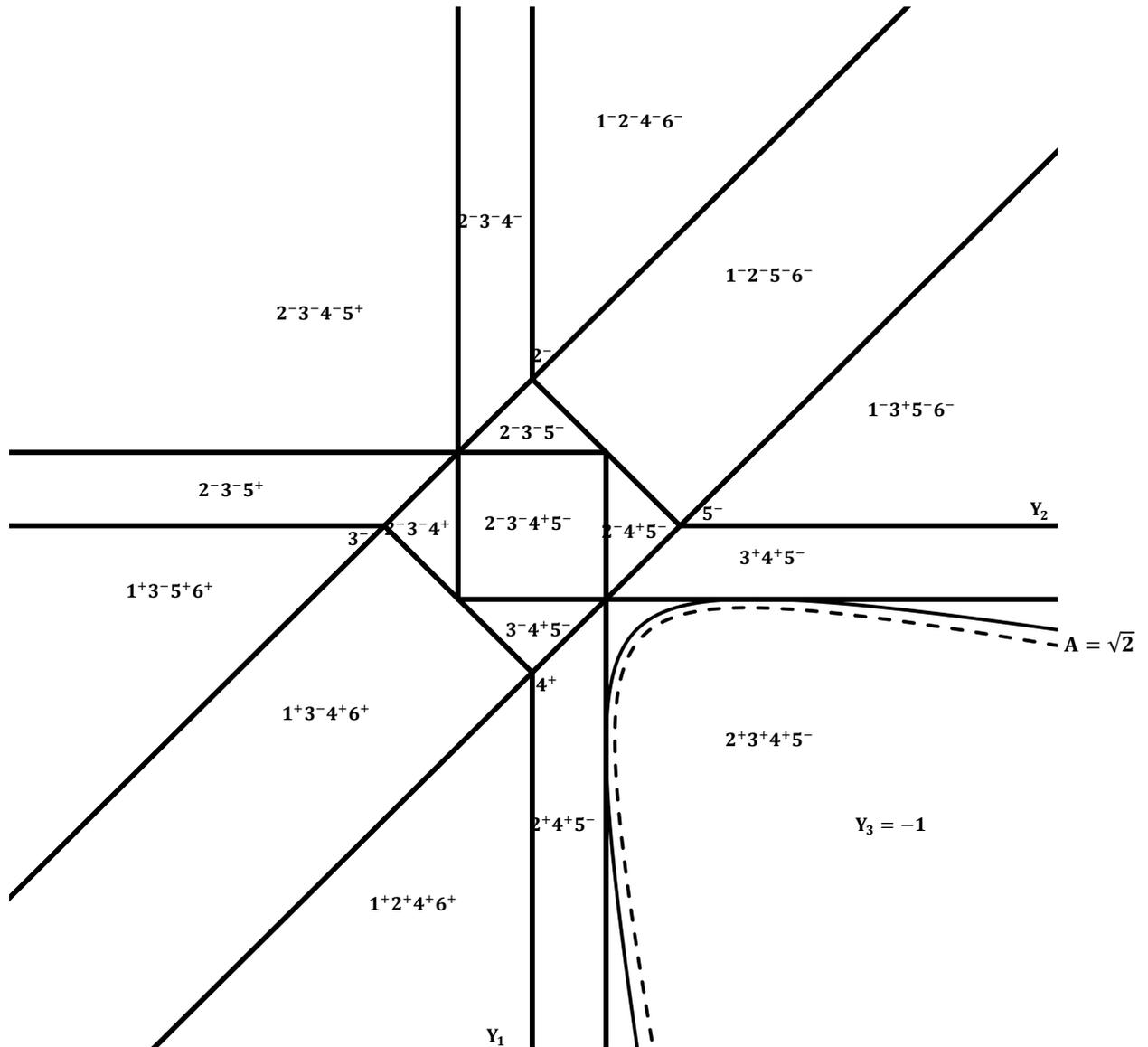


Figure IV.30: CFCP1: Diagramme d'activité pour l'essai extension biaxiale dans le plan projectif $Y_3 = -1$ pour $A \geq \sqrt{2}$.

Dans ce cas, les systèmes de glissement actif et les rotations plastiques correspondantes, sont regroupés dans le tableau (IV.15).

Tableau .IV.15. Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$ de chaque système de glissements pour $A \geq \sqrt{2}$

L'intervalle de θ	Systèmes de glissement	Rotation plastique $\bar{\omega}_{12}^p$
$0: \pi$	$2^+3^+4^+5^-$	0

2. Essai général de déformation plane

Considérons un essai de déformation plane de gradient défini par:

$$\mathbb{F} = e^{\mathbb{L}_0 t} \mathbb{I} \epsilon \quad (\text{IV.9})$$

Où \mathbb{I} est le tenseur unité et \mathbb{L}_0 est un tenseur constant défini par:

$$\mathbb{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \rho) \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.10})$$

ϵ est une vitesse constante et $-1 \leq \rho \leq 1$

Le gradient des vitesses dans ce cas s'écrit:

$$L = \mathbb{L}_0 \quad (\text{IV.11})$$

La vitesse des déformations D et des rotations W s'écrivent, dans le repère eulerien, par:

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \Gamma \\ \Gamma & \rho \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.12})$$

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma \\ -\Gamma & 0 \end{bmatrix} \epsilon \quad (\text{IV.13})$$

Ou bien, dans le repère cristallographique:

$$\bar{D} = R^T D R \quad (\text{IV.14})$$

Avec :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} &= \left(\frac{1+\rho}{2} + \frac{1-\rho}{2} \cos 2\theta - \frac{\Gamma}{2} \sin 2\theta \right) \epsilon \\ \bar{D}_{22} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - \frac{1-\rho}{2} \cos 2\theta + \frac{\Gamma}{2} \sin 2\theta \right) \epsilon \\ \bar{D}_{12} &= \left(\frac{1-\rho}{2} \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2} \cos 2\theta \right) \epsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Ces relations peuvent être réécrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{11} &= \left(\frac{1+\rho}{2} + \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1-\rho}{\Delta} \cos 2\theta - \frac{\Gamma}{\Delta} \sin 2\theta \right) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{22} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1-\rho}{\Delta} \cos 2\theta - \frac{\Gamma}{\Delta} \sin 2\theta \right) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{12} &= \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1-\rho}{\Delta} \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{\Delta} \cos 2\theta \right) \epsilon
 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

Où :

$$\Delta = \sqrt{(1-\rho)^2 + \Gamma^2} \tag{IV.18}$$

Soit α tel que:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\rho}{\Delta} \text{ et } \sin 2\alpha = \frac{\Gamma}{\Delta} \tag{IV.19}$$

α représente l'orientation du repère principal des déformations par rapport au repère eulérien.

Les équations deviennent:

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{11} &= \left(\frac{1+\rho}{2} + \frac{\Delta}{2} (\cos 2\alpha \cos 2\theta - \sin 2\alpha \sin 2\theta) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{22} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - \frac{\Delta}{2} (\cos 2\alpha \cos 2\theta - \sin 2\alpha \sin 2\theta) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{12} &= \frac{\Delta}{2} (\cos 2\alpha \sin 2\theta + \sin 2\alpha \cos 2\theta) \epsilon
 \end{aligned} \tag{IV.20}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{11} &= \left(\frac{1+\rho}{2} + \frac{\Delta}{2} \cos(2(\alpha + \theta)) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{22} &= \left(\frac{1+\rho}{2} - \frac{\Delta}{2} \cos(2(\alpha + \theta)) \right) \epsilon \\
 \bar{D}_{12} &= \frac{\Delta}{2} \sin(2(\alpha + \theta)) \epsilon
 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

qui s'écrivent dans l'espace (Y_1, Y_2, Y_3) avec $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$ par:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \left[\frac{1+\rho}{2} + \frac{\Delta}{2} \cos(2(\alpha + \theta)) \right] \epsilon \\
 Y_2 &= \left[\frac{1+\rho}{2} - \frac{\Delta}{2} \cos(2(\alpha + \theta)) \right] \epsilon \\
 Y_3 &= \pm\sqrt{2} \left[\frac{\Delta}{2} \sin(2(\alpha + \theta)) \right] \epsilon
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Ce qui donne dans la représentation plan projectif $Y_3 = \pm 1$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[A(\rho, \Gamma) \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\tan 2\beta} \right] \\ Y_2 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[A(\rho, \Gamma) \frac{1}{\sin 2\beta} - \frac{1}{\tan 2\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Où :

$$\beta = \alpha + \theta ; \tan 2\alpha = \frac{\Gamma}{1-\rho} \quad (\text{IV.24})$$

$$\Delta = \sqrt{(1-\rho)^2 + \Gamma^2} \quad (\text{IV.25})$$

$$A(\rho, \Gamma) = \frac{1+\rho}{\Delta} \quad (\text{IV.26})$$

En comparant (IV.23) avec les relations introduites dans (IV.11), on constate qu'à une rotation 2α près, nous avons la même forme des vitesses des déformations mais des rotations différentes, ceci montre que l'analyse présentée dans les paragraphes précédents reste valable dans ce cas générale.

Pour toute cinématique plane imposée (c'est-à-dire pour un ensemble $(A(\rho, \Gamma), \beta)$ donné), en se basant sur la nouvelle représentation plan projectif, on peut donc déterminer l'état d'activité des différents systèmes, et par conséquent l'évolution des rotations θ sera donc facilement obtenue.

Pour fixer les idées, selon les valeur de $A(\rho, \Gamma)$, trois cas vont être considérés.

a. Cas $\rho = 0$

$$A(0, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+\Gamma^2}} \Leftrightarrow 0 < A(0, \Gamma) \leq 1$$

$$\checkmark \text{ Si } 0 < A(0, \Gamma) \leq \frac{1}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow \Gamma \geq \sqrt{10}$$

$$\checkmark \text{ Si } \frac{1}{\sqrt{11}} < A(0, \Gamma) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \Gamma < \sqrt{10}$$

$$\checkmark \text{ Si } \frac{1}{\sqrt{3}} < A(0, \Gamma) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \Gamma < \sqrt{2}$$

$$\checkmark \text{ Si } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < A(0, \Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \Gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour chaque valeur de Γ , on peut déterminer l'intervalle de variation de A , puis déterminer l'état d'activité des différents systèmes et l'évolution des rotations.

b. Cas $\Gamma = 0$

Dans ce cas A devient:

$$A(\rho, 0) = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Donc:

Pour $A(\rho, 0) \geq 0$ on a : $-1 \leq \rho < 1$

Et si on a $A = 0$ on aura $\rho = -1$ et $\Gamma = 0$.

Et nous avons déjà traité ce cas dans ce chapitre (extension biaxiale).

c. Cas $\Gamma \neq 0$ et $\rho \neq 0$

- Pour $A = 0$ il faut que ($\rho = -1$ et $\Gamma = 0$) or ($\rho = 0$ et $\Gamma \rightarrow +\infty$).
 - Pour $0 < A < \frac{1}{\sqrt{3}}$ il faut que ($\rho = 0$ et $\Gamma \geq \sqrt{2}$)
 - Pour $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < 1$ il faut que $\frac{-2(1+A^2)-\sqrt{\Delta}}{2(1-A^2)} < \rho < \frac{-2(1+A^2)+\sqrt{\Delta}}{2(1-A^2)}$ et
- $$\Gamma = \sqrt{(1 - A^2)\rho^2 + (1 + A^2)\rho + (1 - A^2)}$$
- avec
- $\Delta = \frac{8A^2}{(1-A^2)}$
- pour $A = 1$ il faut que ($\rho \geq 0$ et $\Gamma = 2\sqrt{\rho}$)

3. Conclusion

Dans cette partie d'application, nous avons étudié le comportement en grandes déformations d'un monocristal CFC à déformation imposée, dans le plan de symétrie cristalline $\{110\}$ et $\{100\}$.

Nous avons montré, dans le cas plan, que l'analyse viscoplastique introduite dans ce chapitre permet de construire un nouveau diagramme d'activité dont les glissements sont complètement déterminés.

Chapitre V:

Analyse des résultats.

Introduction

Ce dernier chapitre a été consacré aux analyses des résultats obtenus lors de l'application des essais à déformation imposées introduites dans le chapitre précédent. Nous présentons le comportement dans les deux cas des monocristaux plan CFCP2 et CFCP2. On montre que dans les deux modèles monocristallins nous avons une stabilisation des rotations, dont le nombre augmente au diminue en fonction de la symétrie cristalline et en fonction de l'essai.

Enfin, une discussion sera donc abordée sur les bases théoriques entreprises dans ce travail.

1. Analyse de rotation

Les résultats de l'évolution de la vitesse des rotations cristallines $\dot{\theta}$ en fonction de l'orientation θ et aussi l'orientation en fonction de la déformation ε à partir d'une orientation initiale θ_0 , ont été représentés sur les figures (V.1) à (V.25) pour différentes valeurs de A et pour les deux monocristaux CFCP1 et CFCP2.

1.1. Pour CFCP2

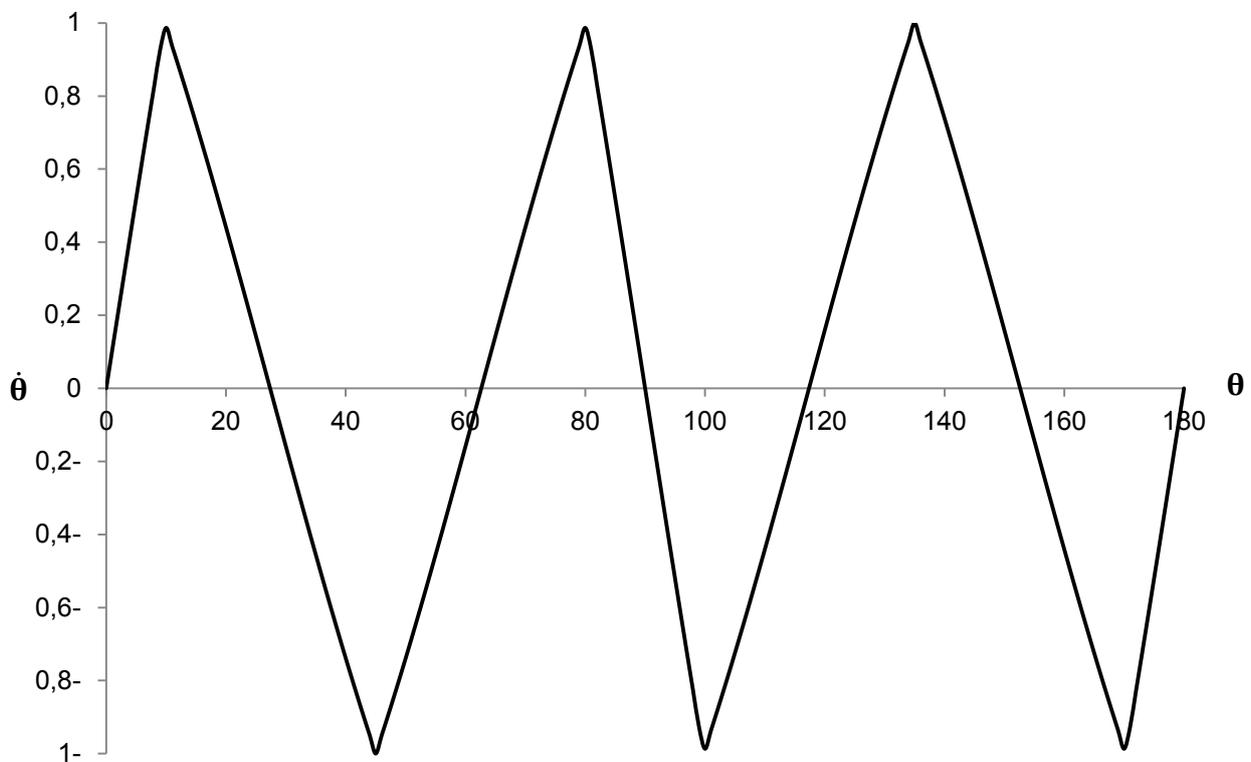


Figure V.1 : CFCP2 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$ avec $A=0$

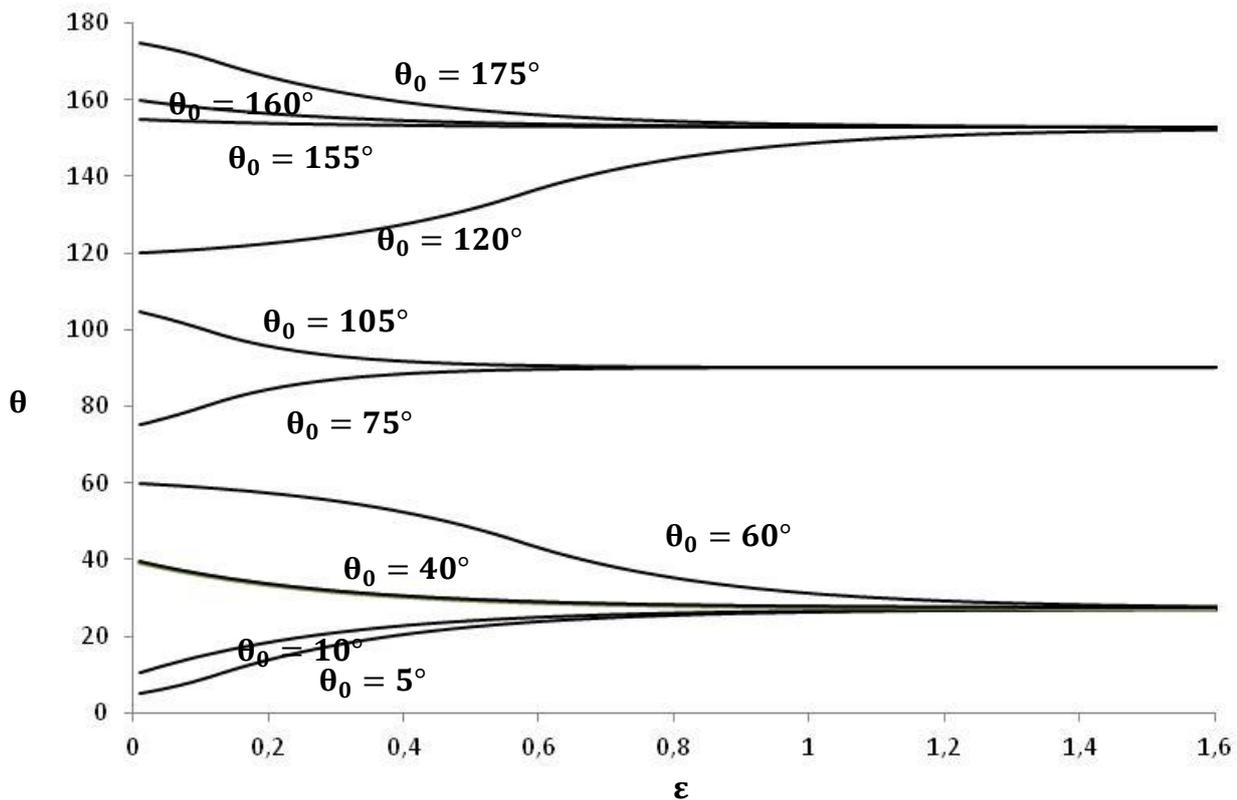


Figure V.2 : CFPC2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ pour $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{11}}$ avec $A=0$

La figure (V.1), illustre l'évolution de la fonction vitesse $\dot{\theta}$ en fonction de l'orientation du réseau θ . et la figure (V.2) représente l'évolution de l'orientation θ en fonction de ϵ à partir d'une orientation initiale θ_0 , on constate qu'en fonction de θ la vitesse $\dot{\theta}$ peut être positive comme elle peut être négative, et l'orientation θ croît et décroît, ceci montre l'existence des points de stabilisation.

Dans les figures de (V.1) à (V.2), nous avons trouvé une stabilisation de rotation vers trois valeurs limites θ_1 , $\frac{\pi}{2}$ et $\pi - \theta_1$, car :

- Si θ est petite, $\dot{\theta}$ est positive, donc θ croît en fonction de ϵ vers l'orientation stable θ_1 et de même pour $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2} - \theta_1$, $\dot{\theta}$ est négative donc θ décroît et tend à se stabiliser vers θ_1 .
- Si $\frac{\pi}{2} - \theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}$ est positive, donc θ croît vers la même orientation stable $\frac{\pi}{2}$.
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \theta_1$, $\dot{\theta}$ est négative, θ décroît et tend à se stabiliser vers $\frac{\pi}{2}$.
- Si $\frac{\pi}{2} + \theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$, $\dot{\theta}$ est positive alors θ croît vers la même orientation stable $\pi - \theta_1$.

- Si $\pi - \theta_1 < \theta < \pi$, $\dot{\theta}$ est négative, θ décroît et tend à se stabiliser vers $\pi - \theta_1$.

Avec : $\tan 2\theta_1 = \sqrt{2}$; $\theta_1 \approx 27.3505$.

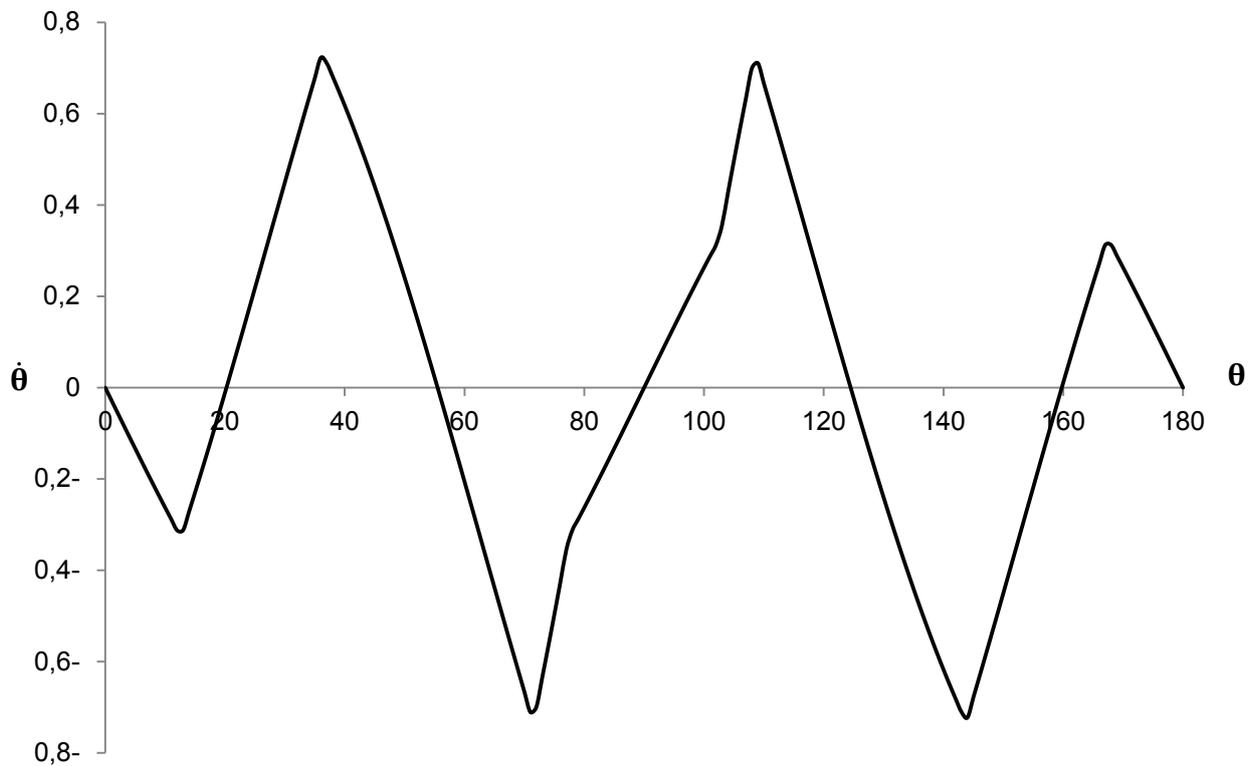


Figure V.3 : CFCP2 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour $A = \frac{1}{\sqrt{9}}$

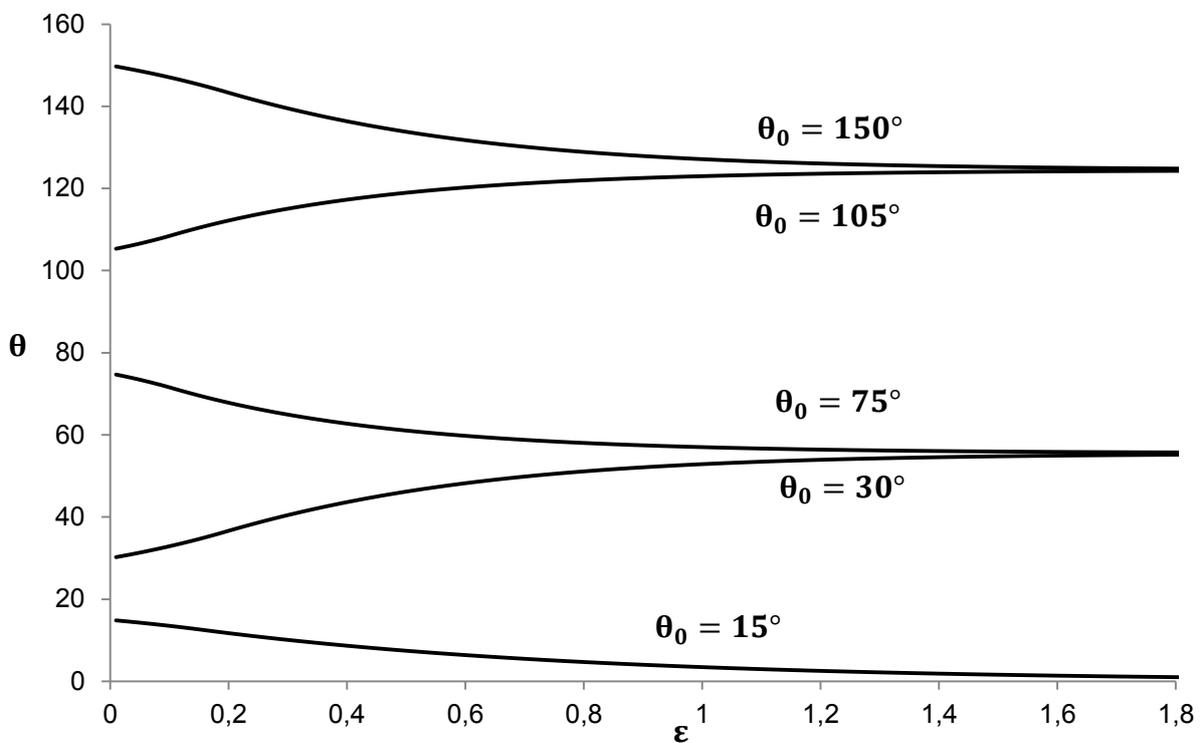


Figure V.4 : CFCP2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ cas $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour $A = \frac{1}{\sqrt{9}}$

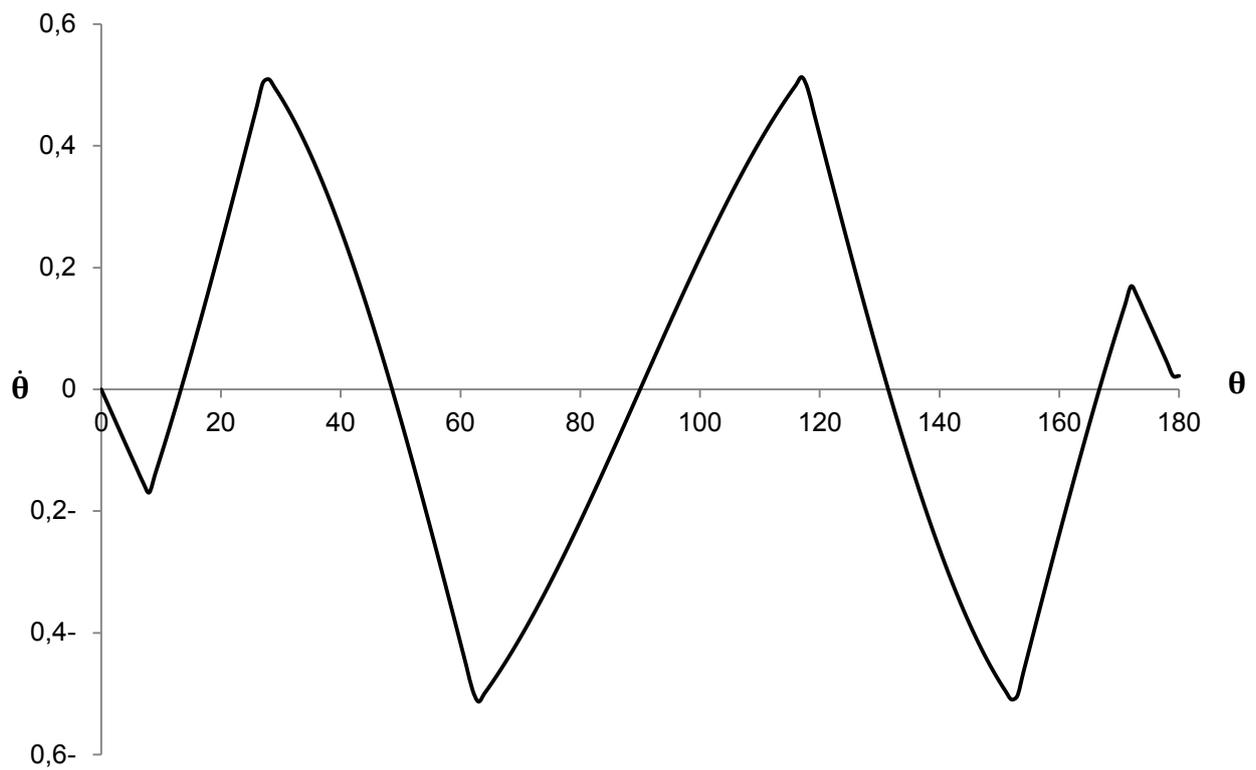


Figure V.5 : CFCP2 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ cas $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ pour $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

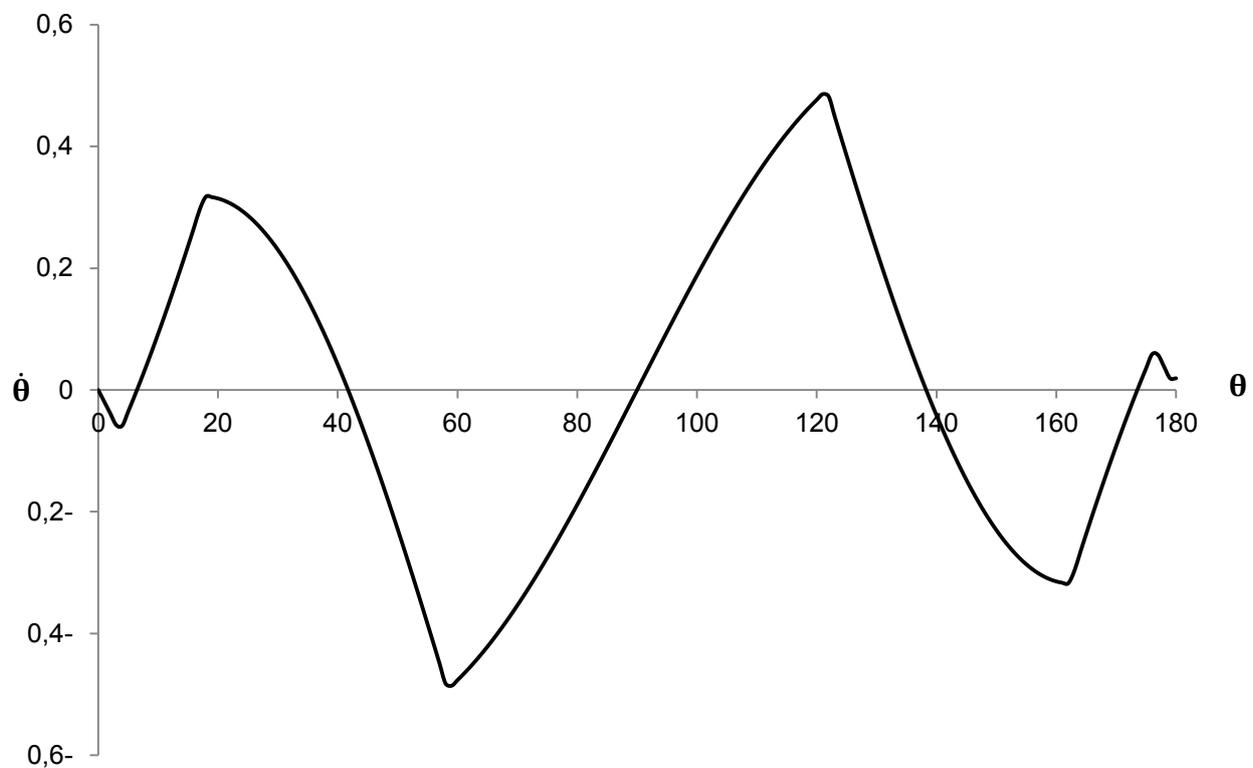


Figure V.6 : CFCP2 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ cas $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leq A < 1$ pour $A=0.9$

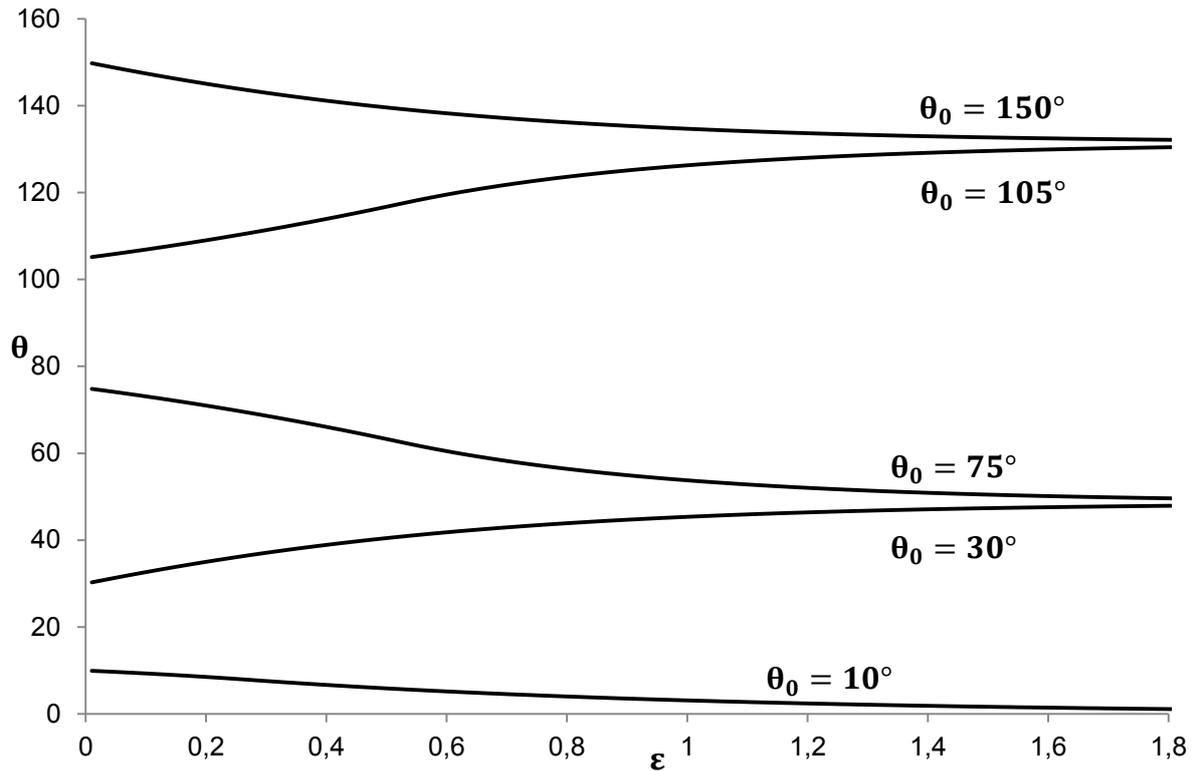


Figure V.7 : CF2P2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ cas $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq A < 1$ pour

Dans les figures de (V.3) à (V,7), nous avons trouvé une stabilisation de rotation vers trois valeurs limites 0 , θ_1 et $\pi - \theta_1$, car :

- Si θ est petite, $\dot{\theta}$ est négative, donc θ décroît en fonction de ϵ vers l'orientation stable $\theta = 0$ et de même pour $0 < \theta < \theta_1$, $\dot{\theta}$ est positive donc θ croît et tend à se stabiliser vers θ_1 .
- Si $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}$ est négative, donc θ décroît vers la même orientation stable θ_1 .
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi - \theta_1$, $\dot{\theta}$ est positive, θ croît et tend à se stabiliser vers $\pi - \theta_1$.
- Si $\pi - \theta_1 < \theta < \pi$, $\dot{\theta}$ est négative alors θ décroît vers la même orientation stable $\pi - \theta_1$, avec $\theta_1 \approx 48^\circ$.

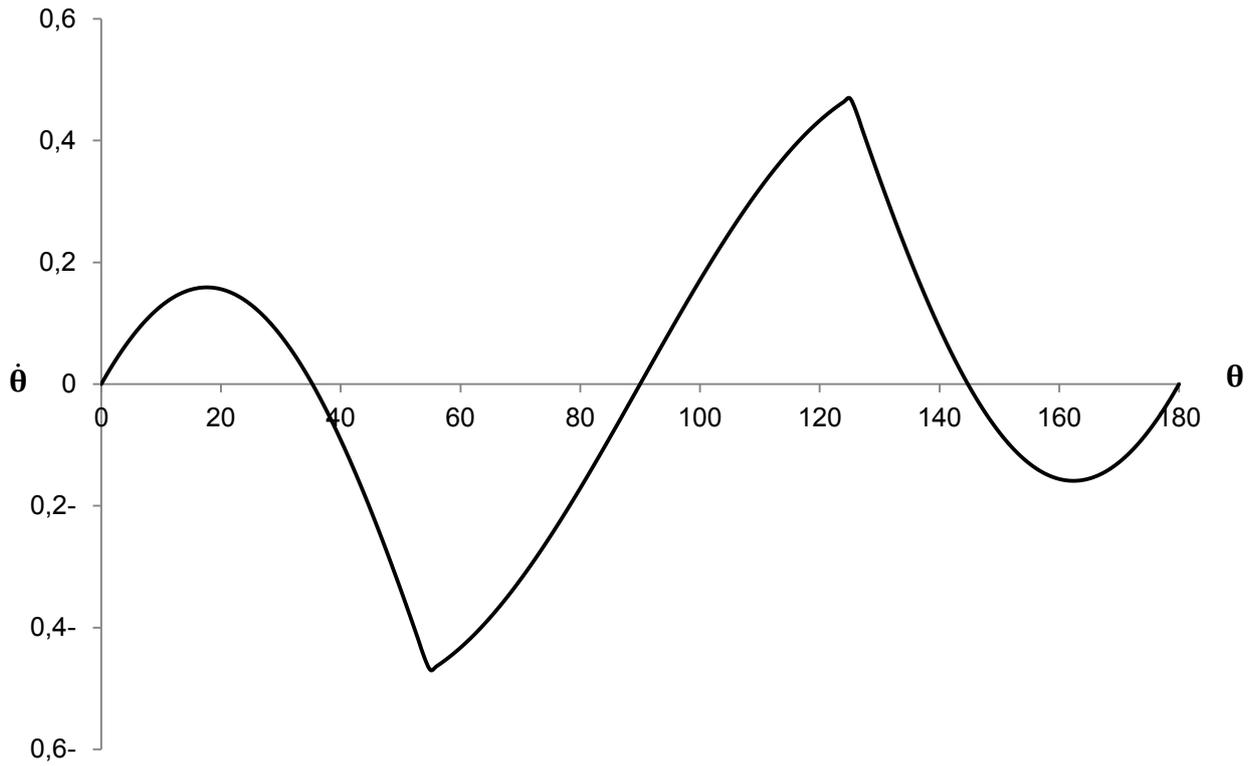


Figure V.8. Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $1 \leq A < \sqrt{3}$

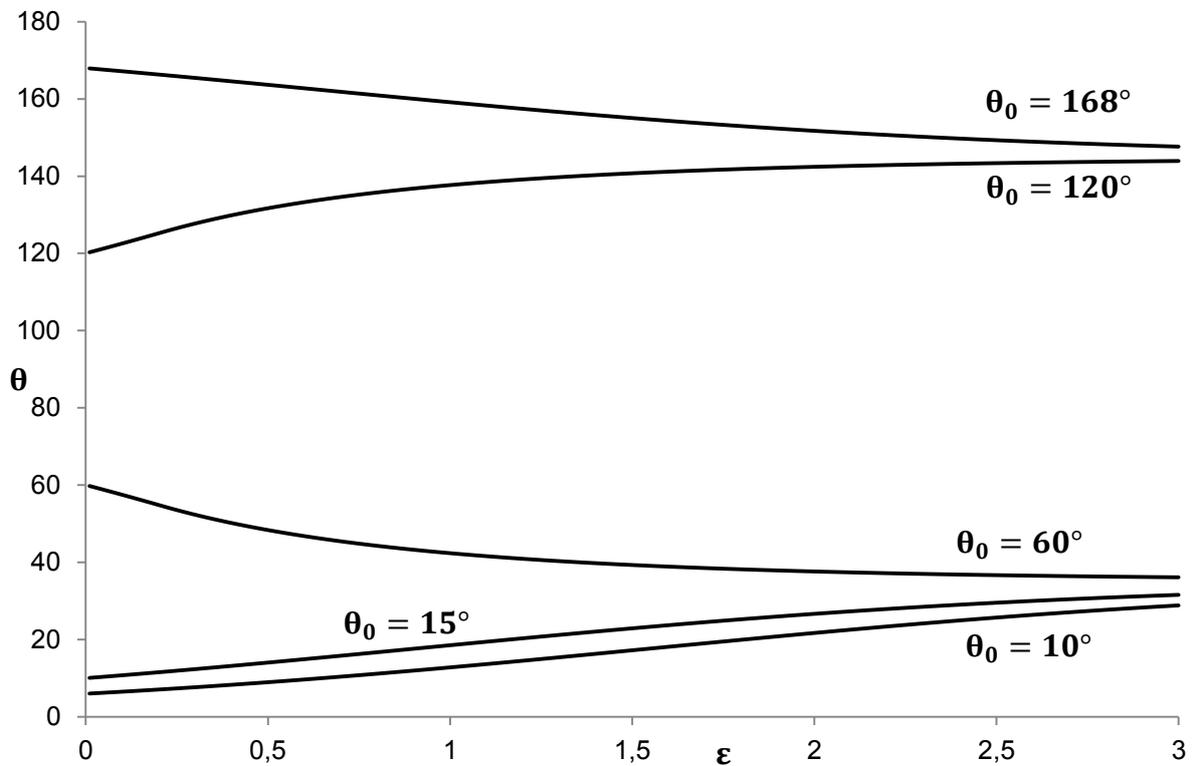


Figure V.9 : CFCP2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ cas $1 \leq A < \sqrt{3}$ pour $A=1.5$

Dans le cas de $1 \leq A < \sqrt{3}$ (V.8), nous avons trouvé une stabilisation de rotation à deux valeurs limites θ_1 et $\pi - \theta_1$, car:

- Si $0 < \theta < \theta_1$, θ croît et tend à se stabiliser vers θ_1 , tandis que si $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$, θ décroît vers la même orientation stable θ_1 , et les mêmes résultats sont obtenus pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (V.9),
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi - \theta_1$, θ croît et tend à se stabiliser vers $\pi - \theta_1$ et si $\pi - \theta_1 < \theta < \pi$, θ décroît vers la même orientation stable $\pi - \theta_1$, (V.9).

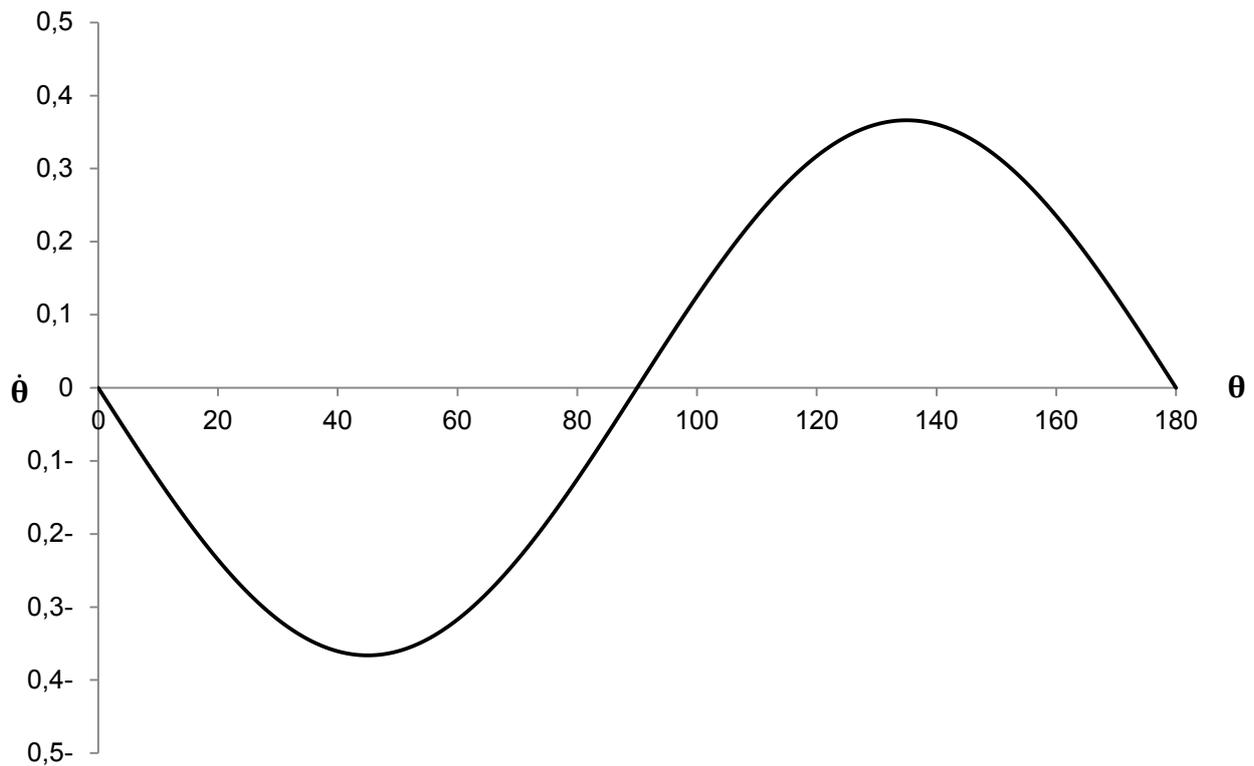


Figure V.10 : CF2P2 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $A \geq \sqrt{3}$ avec $A = \sqrt{3}$

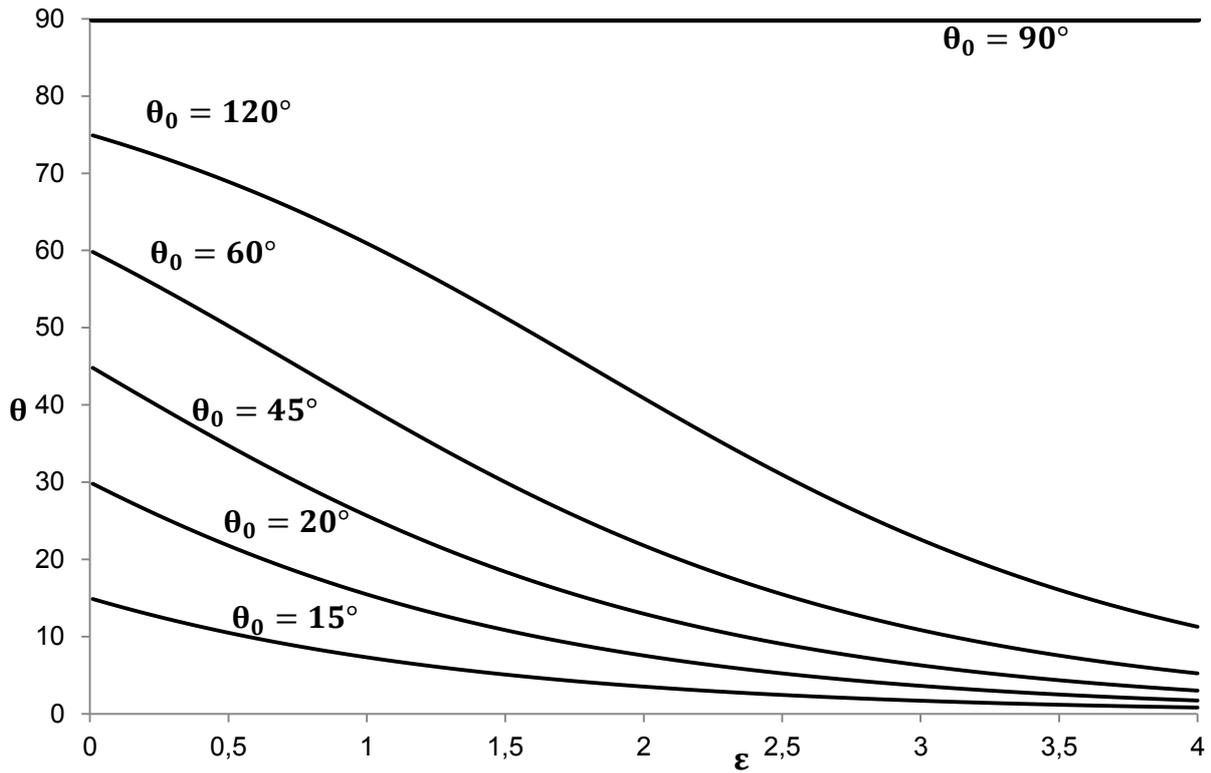


Figure V.11 : CFCP2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ cas $A \geq \sqrt{3}$ pour $\theta_0 \leq 90$ et $A = \sqrt{3}$

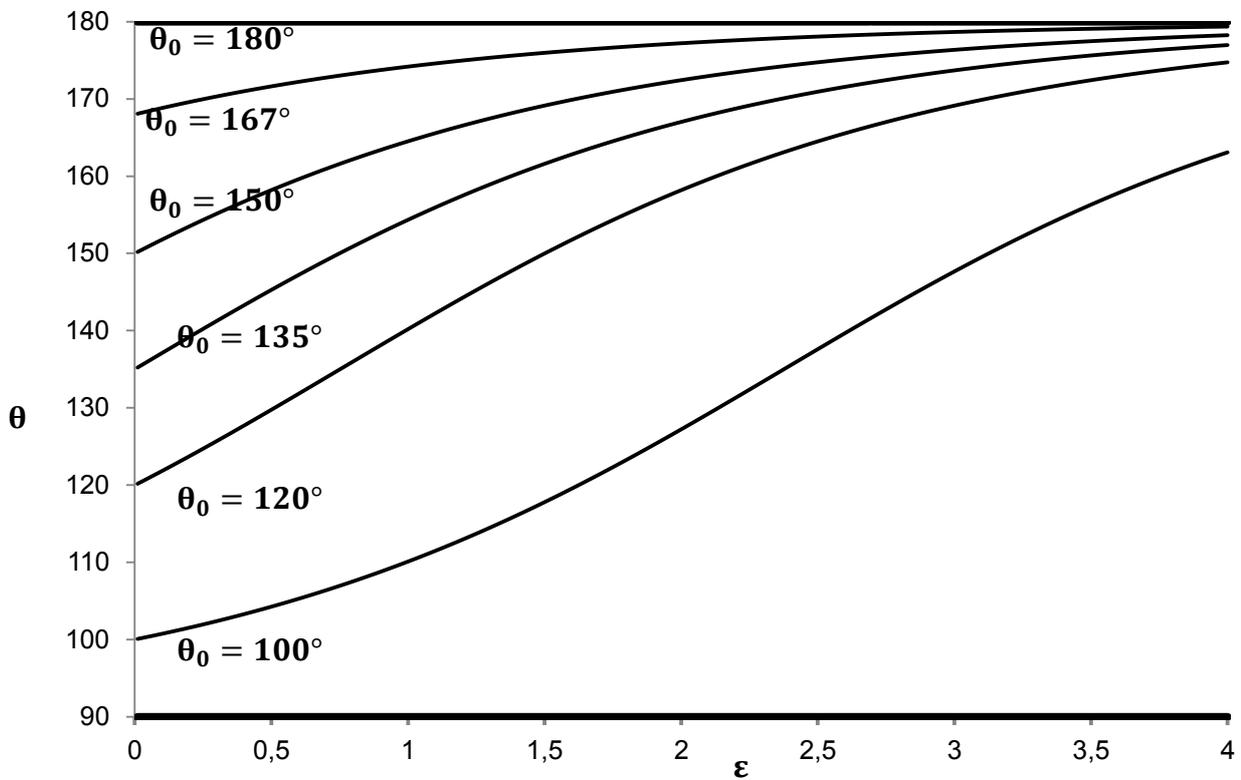


Figure V.12 : CFCP2 : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ cas $A \geq \sqrt{3}$ pour $\theta_0 \geq 180$ et $A = \sqrt{3}$

Dans ce cas, nous avons trouvé une stabilisation à 0 et π . Pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ on constate que $\dot{\theta}$ est négative (V.10), ce qui veut dire que θ décroît vers la même orientation stable qui est égale à 0 (V.11). Pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, on voit que $\dot{\theta}$ est positive (V.10), donc θ croît vers la même orientation stable qui est égale à π (V.12).

1.2. Pour CFCP1

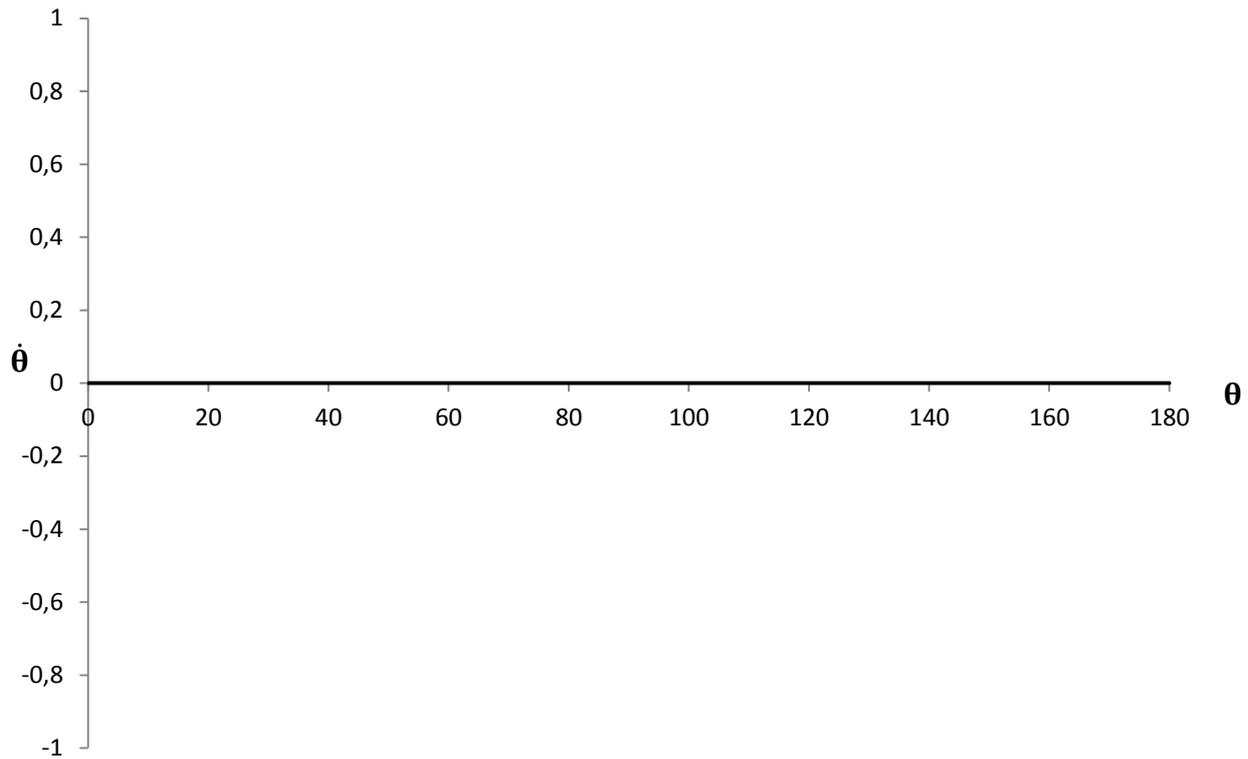


Figure V.13 : CFCP1 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $A = 0$

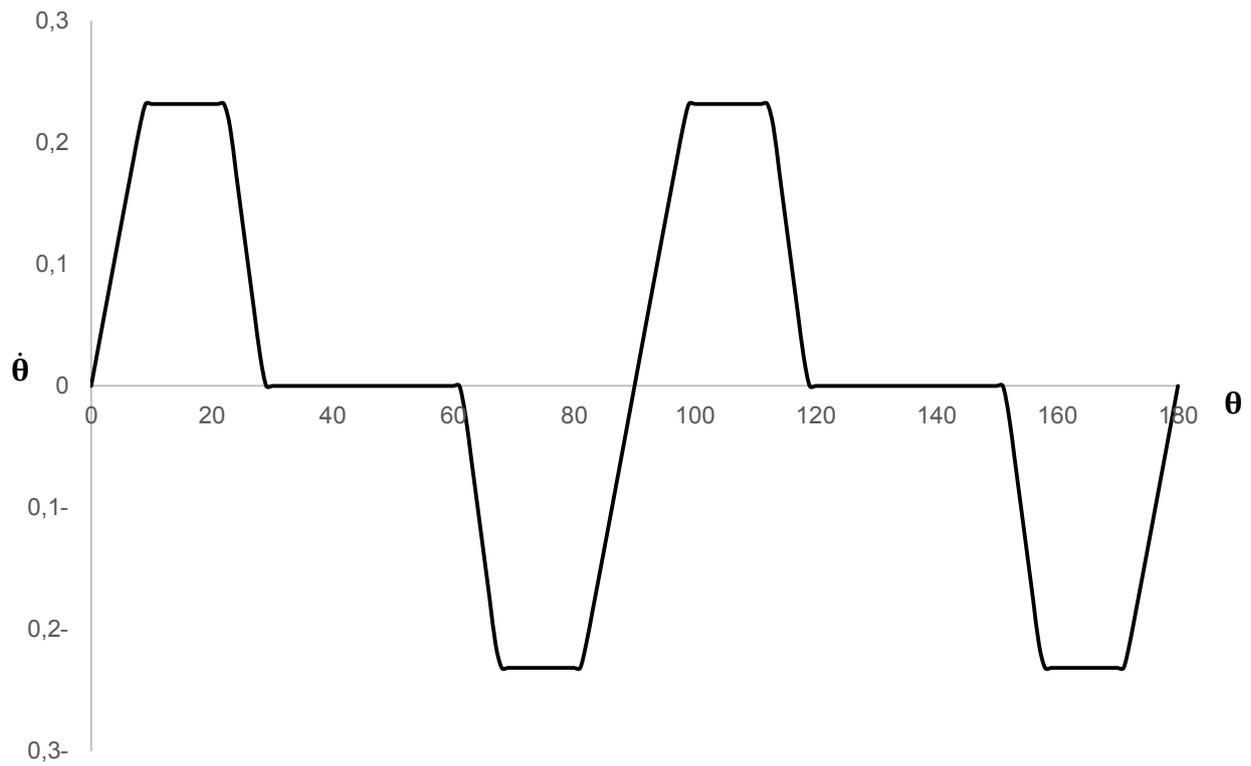


Figure V.14 : CFCP1 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $0 < A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{11}}$

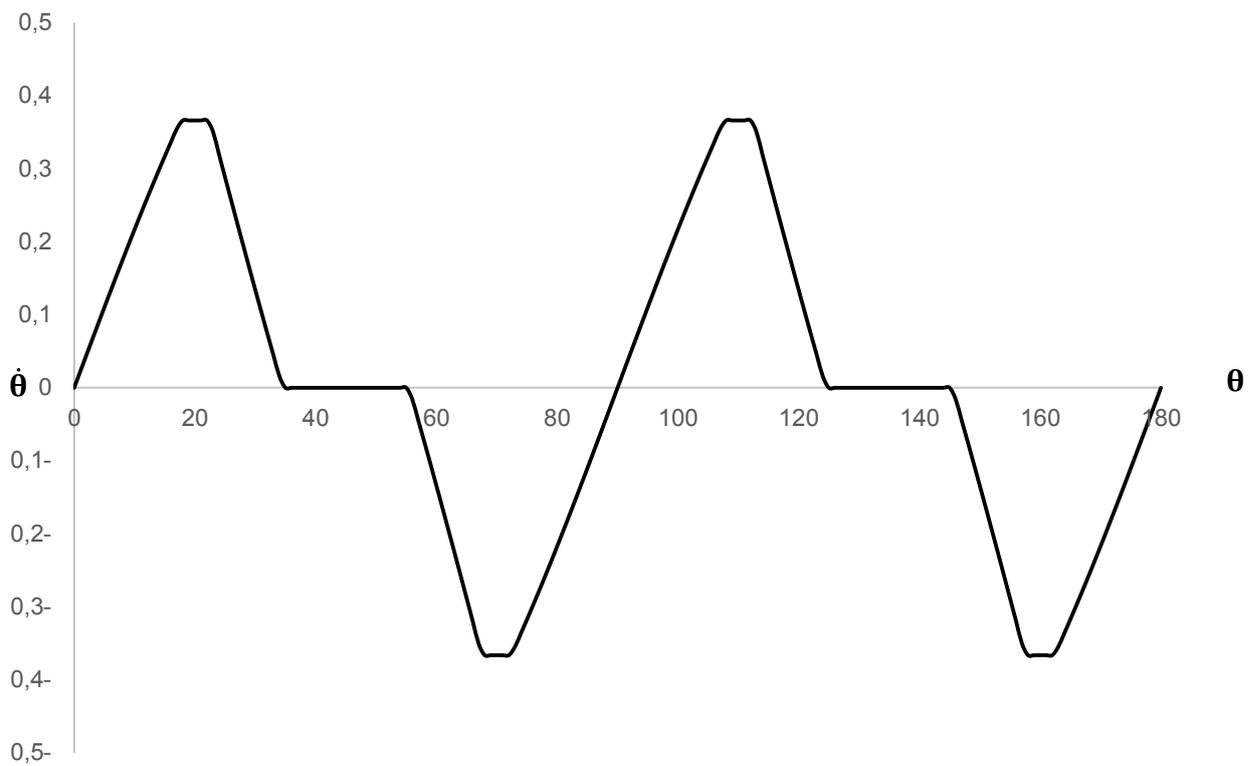


Figure V.15 : CFCP1 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $0 < A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

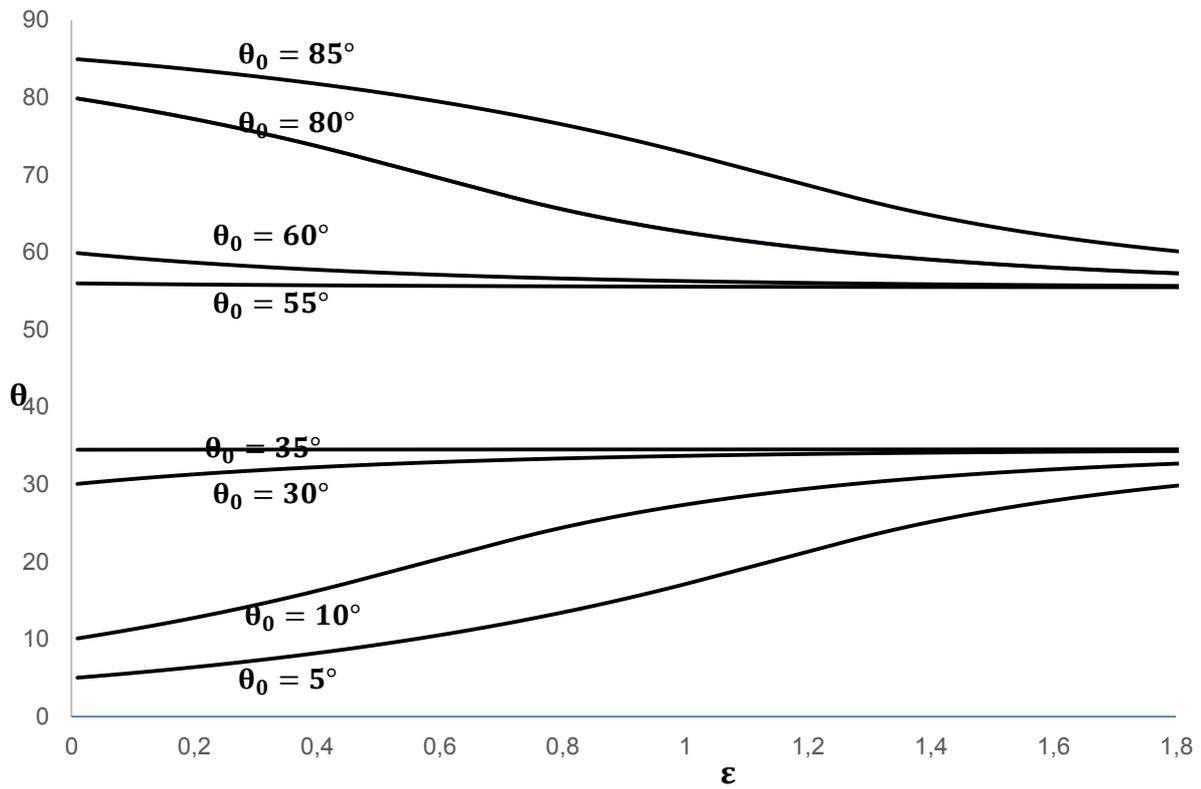


Figure V.16 : CFCPI : Courbe $\theta = f(\varepsilon)$ pour $0 < A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

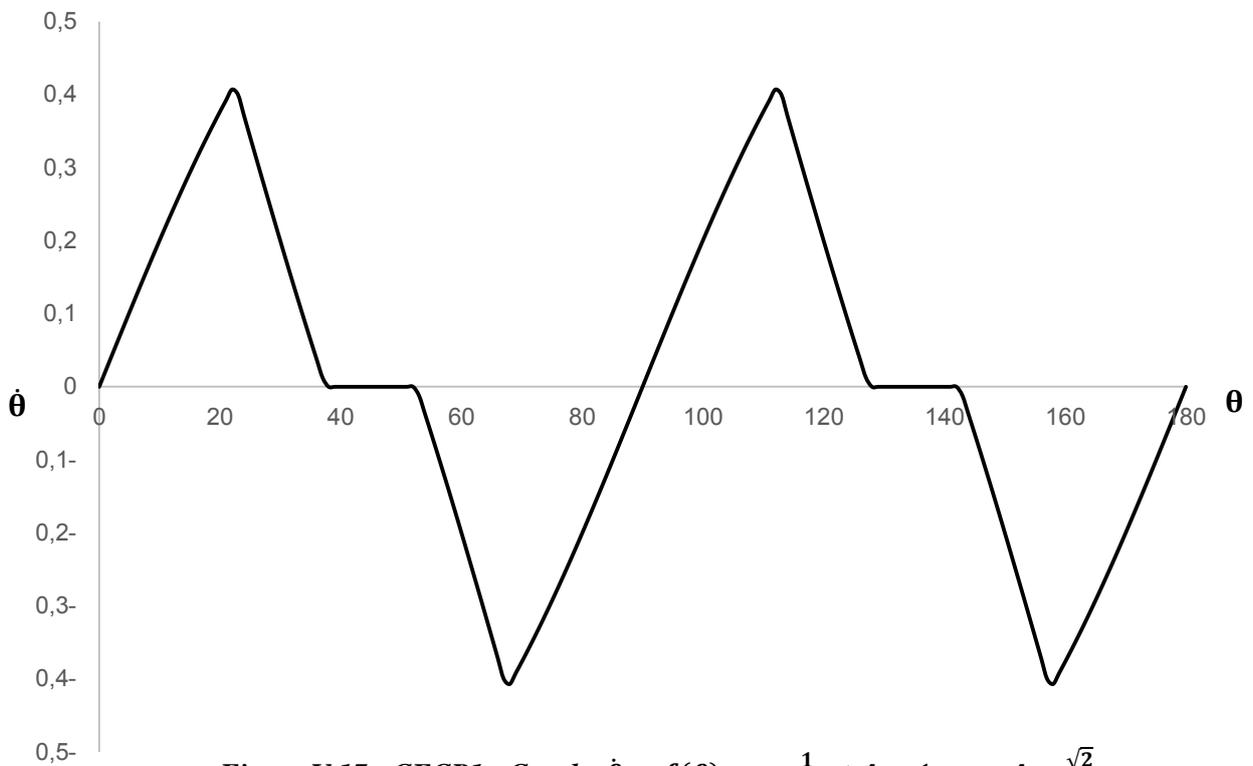


Figure V.17 : CFCPI : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

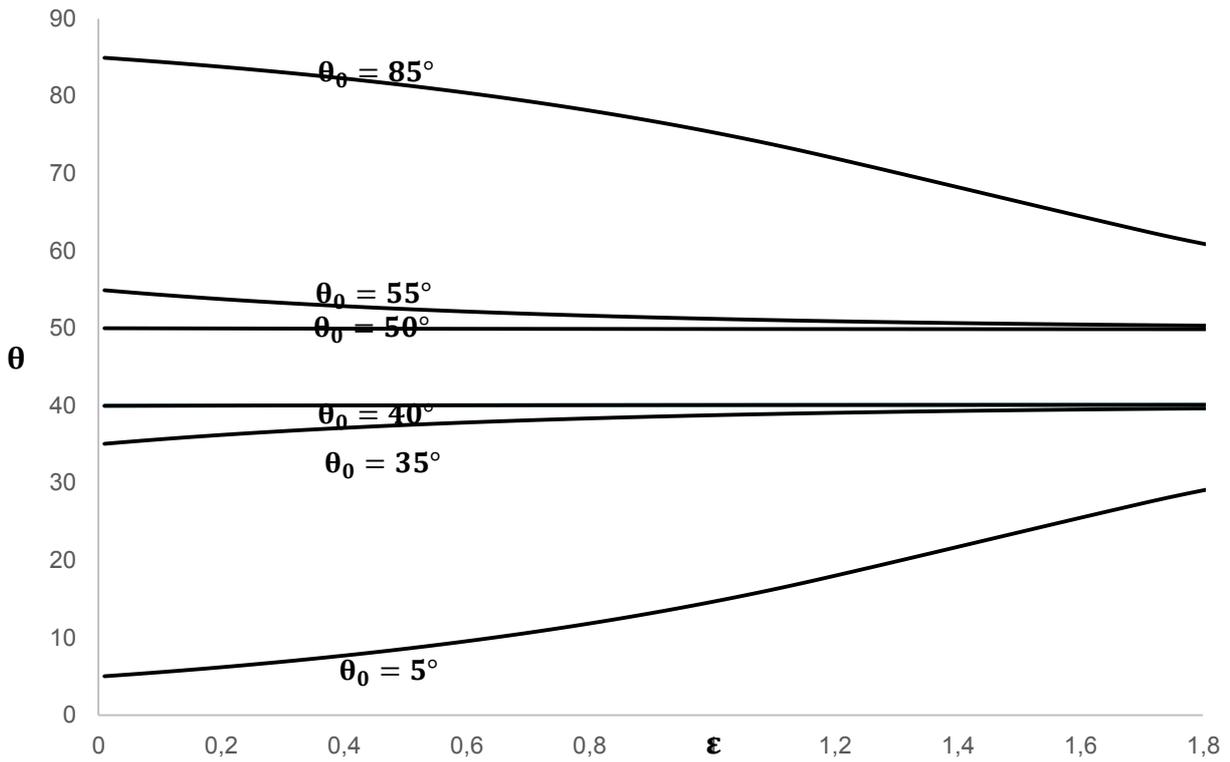


Figure V.18 : CFCPI : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec $A = 0.9$

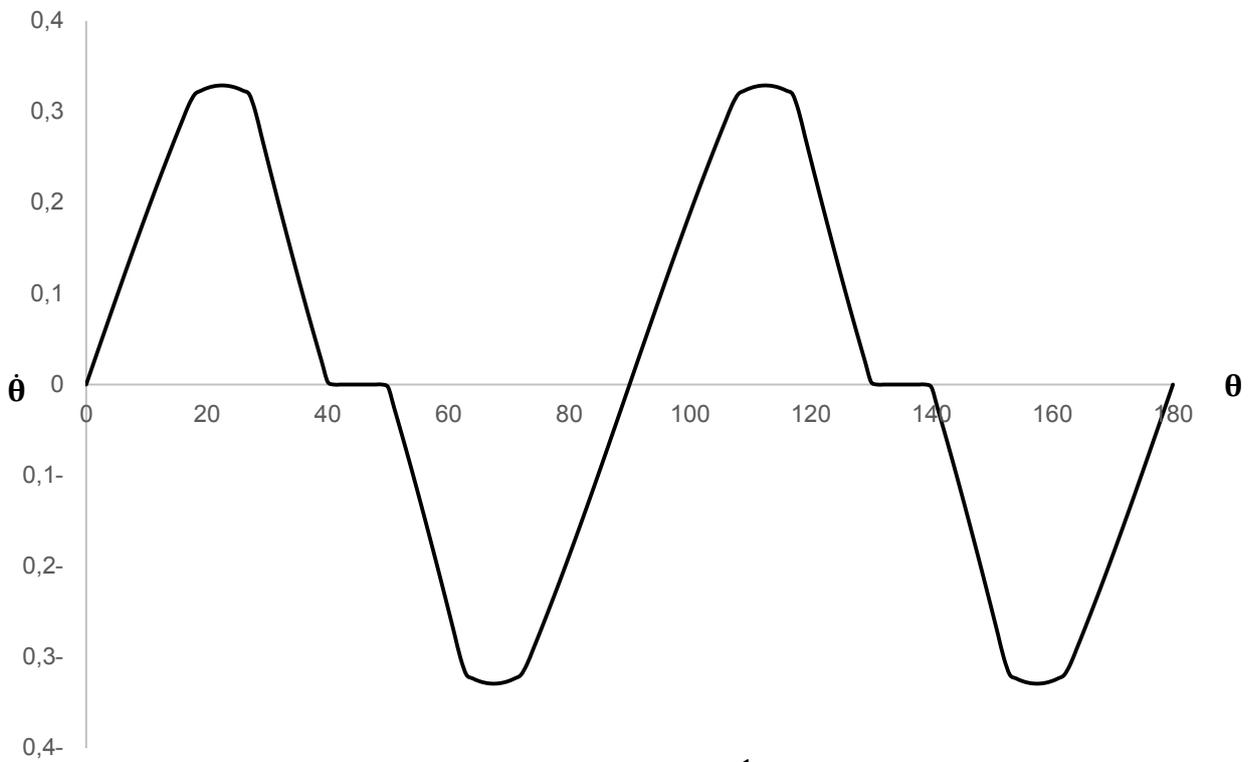


Figure V.19 : CFCPI : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec pour $A = 0.9$

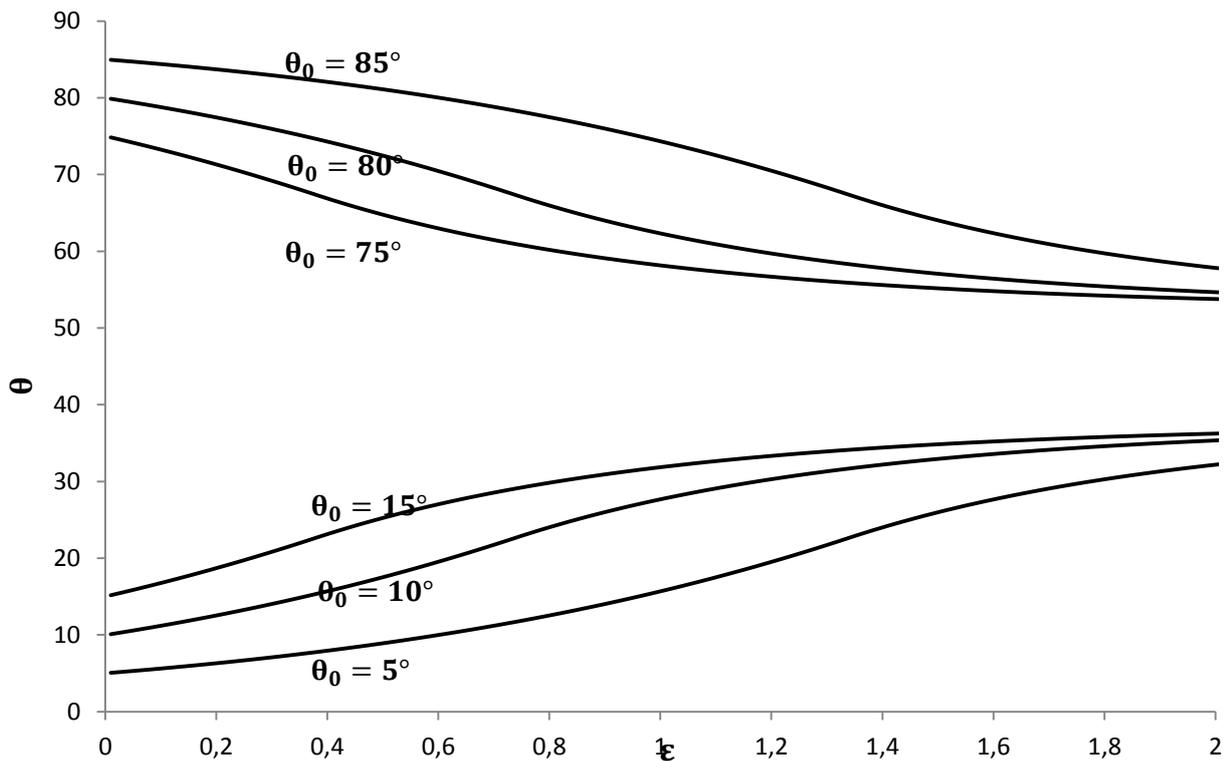


Figure V.20 : CFCPI : Courbe $\theta = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour $0 < A(\rho) < 1$, il a été constaté deux orientations de stabilisation définie par les valeurs

limites $\theta_{1_1}, \theta_{1_2}$, avec $\tan 2\theta_{1_1} = \frac{A+\sqrt{2-A^2}}{-A+\sqrt{2-A^2}}$ et $\tan 2\theta_{1_2} = \frac{A-\sqrt{2-A^2}}{A+\sqrt{2-A^2}}$.

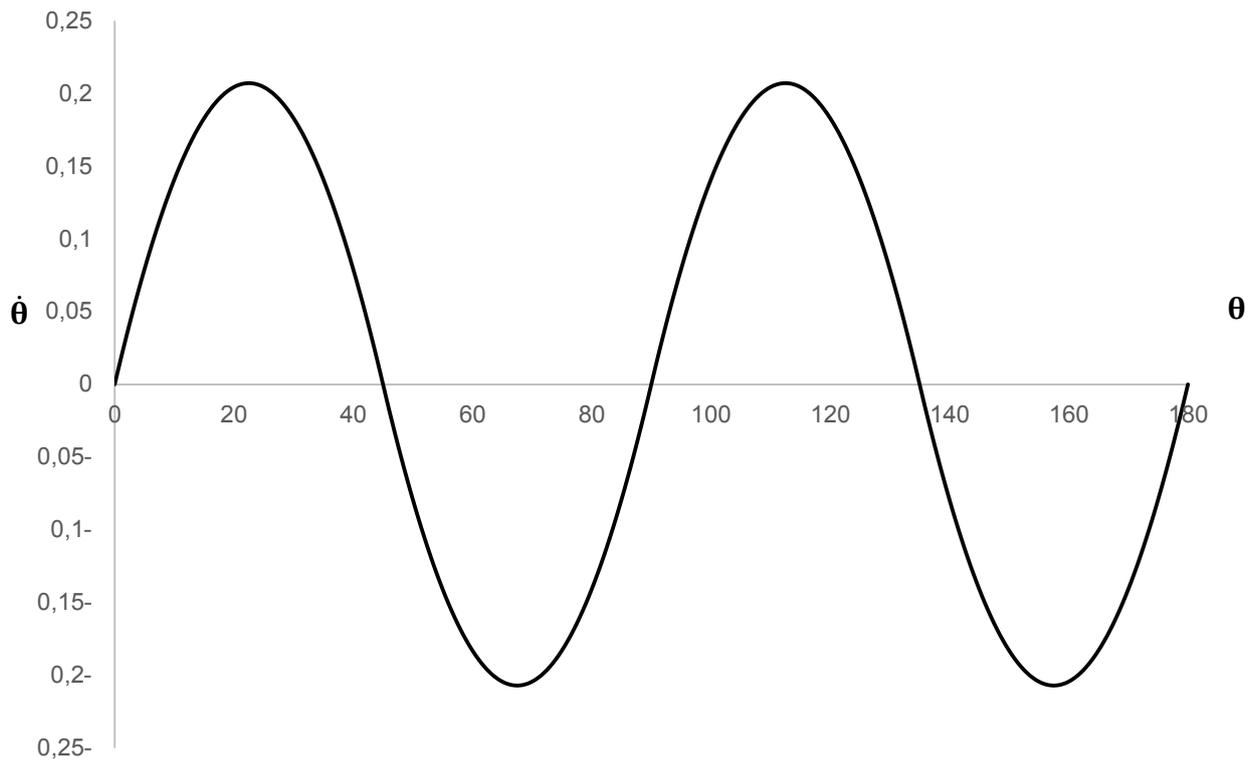


Figure V.21 : CFCPI : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $A = 1$

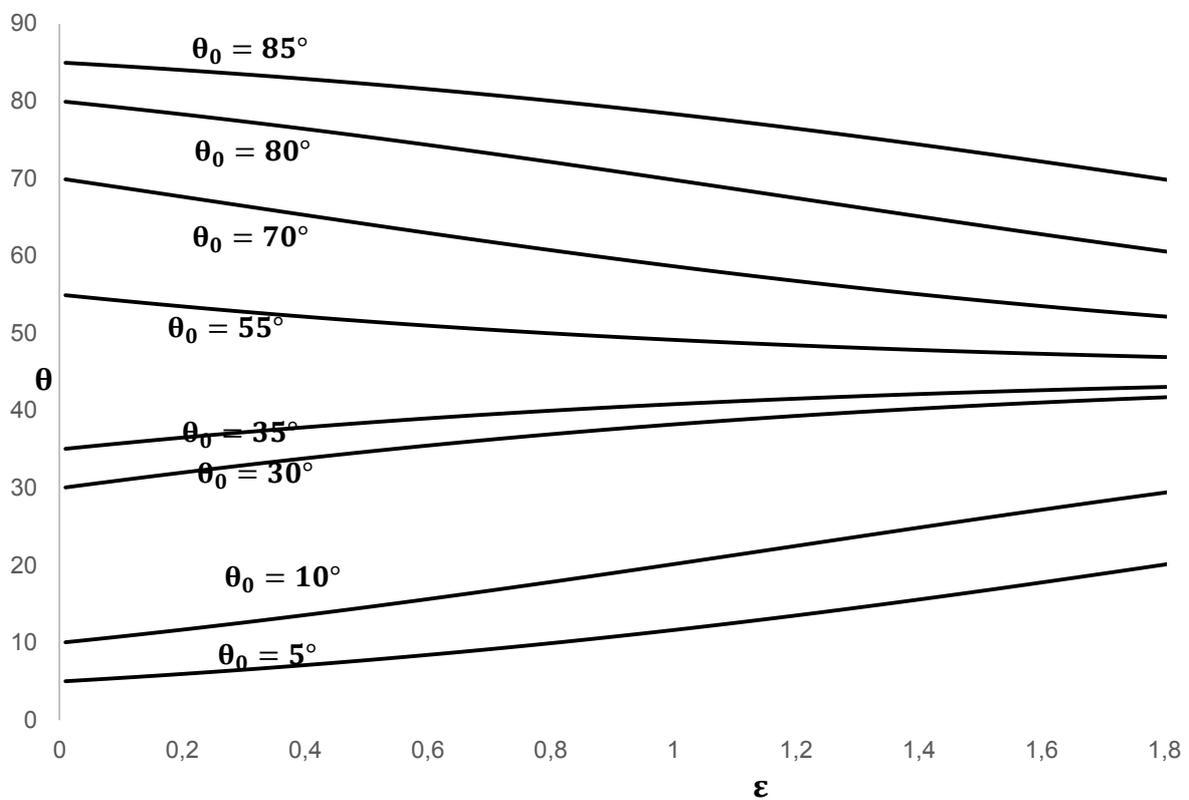


Figure V.22. : CFCPI : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ pour $A = 1$

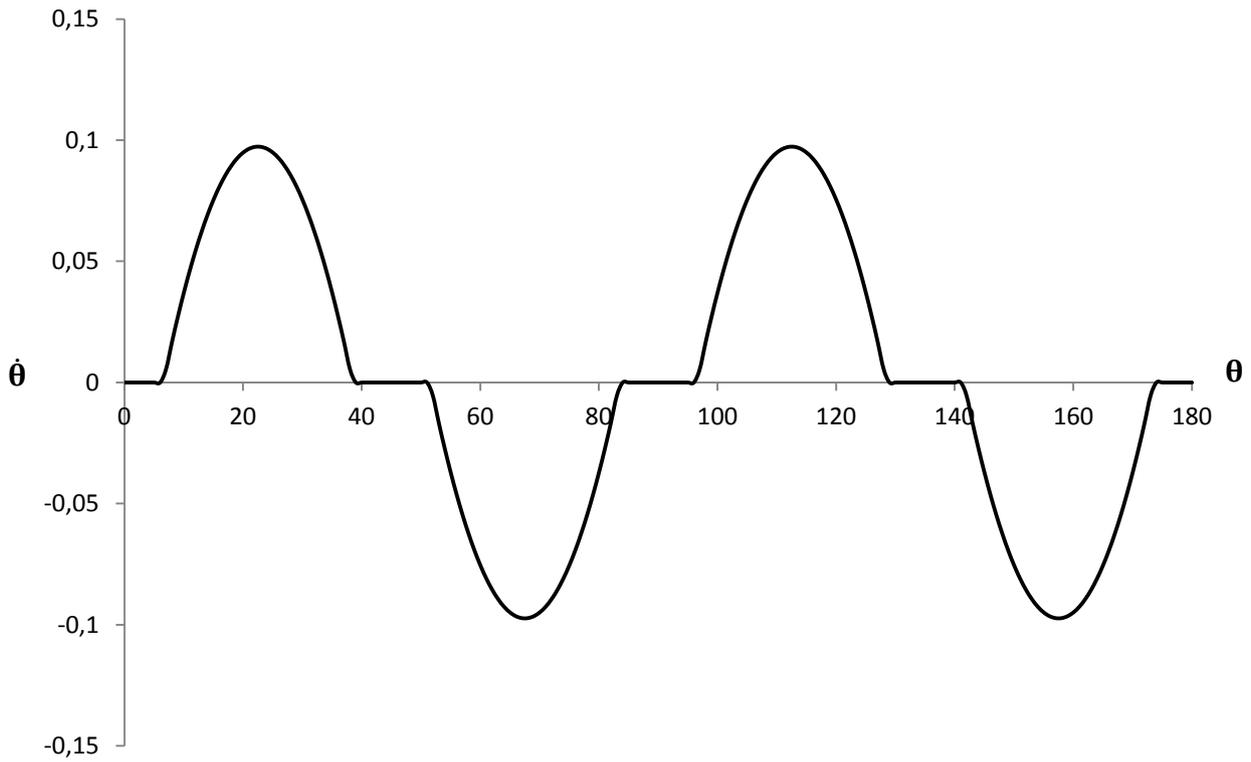


Figure V.23 : CFCPI : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $1 < A < \sqrt{2}$ avec $A=1.2$

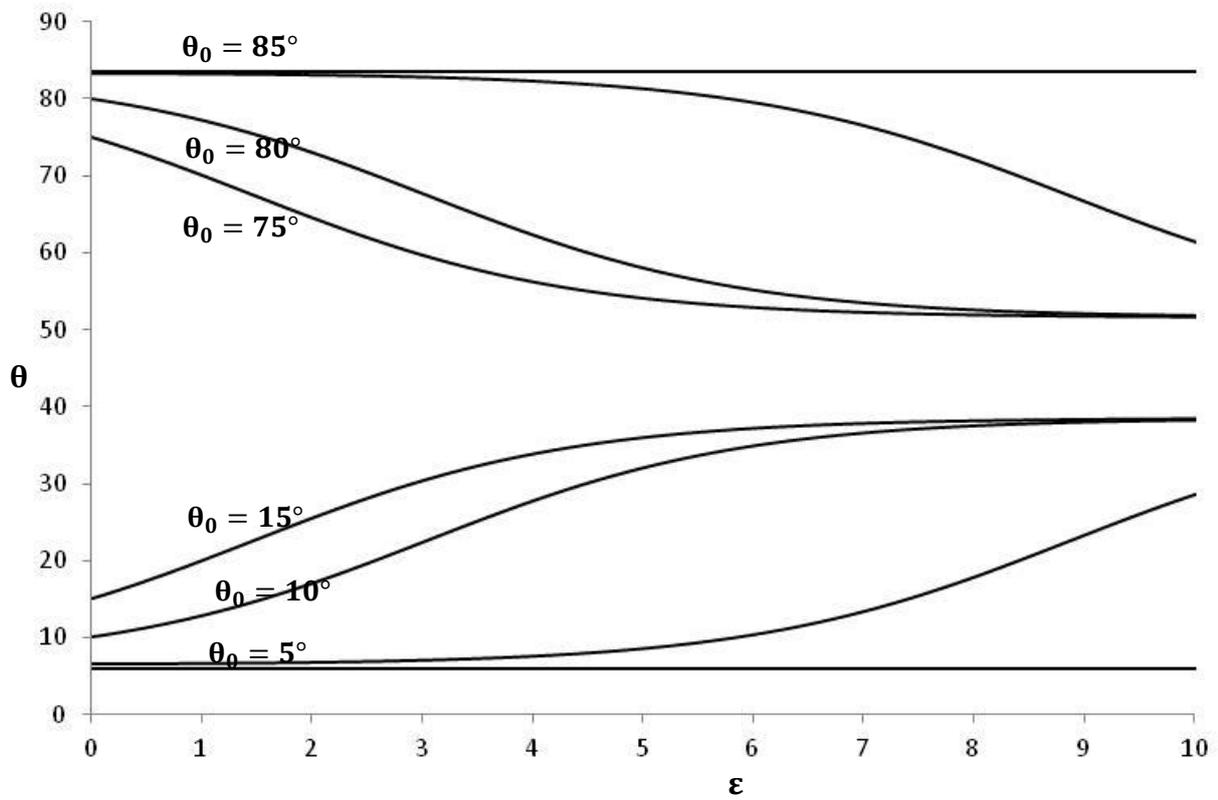


Figure V.24. : CFCPI : Courbe $\theta = f(\epsilon)$ pour $1 < A < \sqrt{2}$ avec $A=1.2$

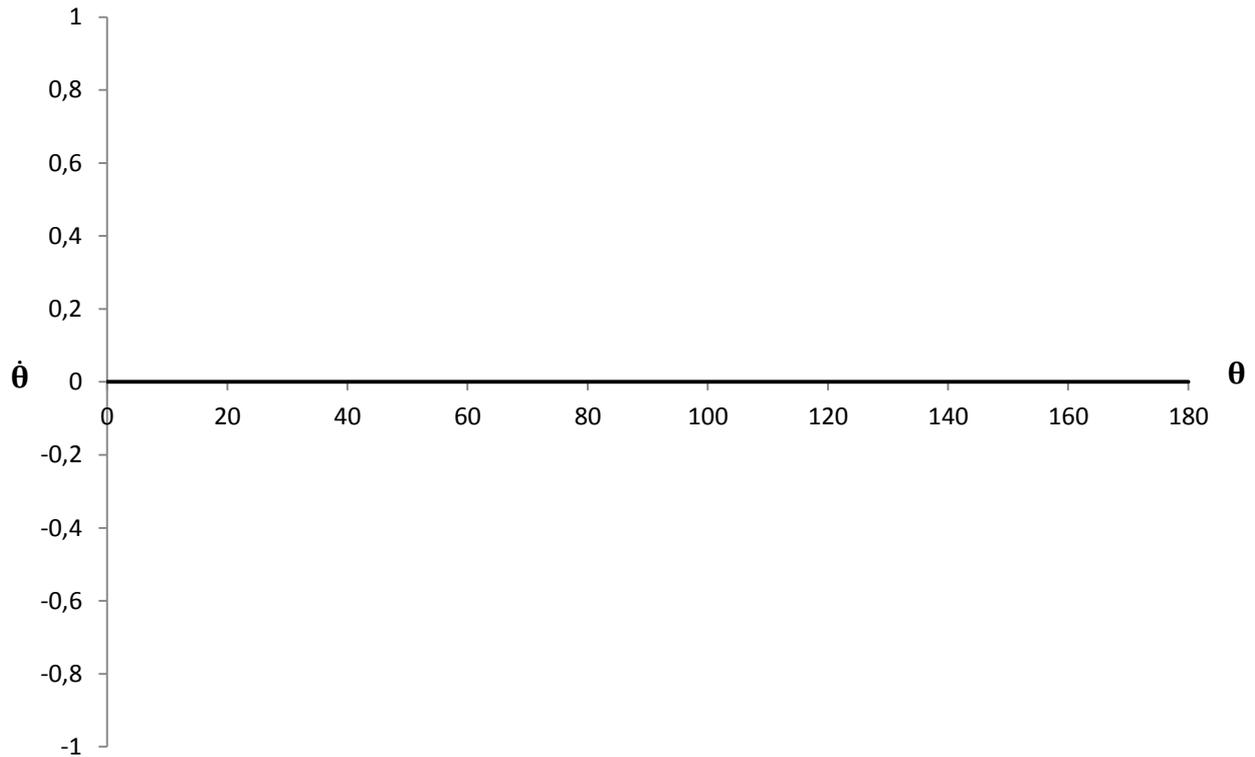


Figure V.25 : CFCP1 : Courbe $\dot{\theta} = f(\theta)$ pour $A \geq \sqrt{2}$ avec $A=\sqrt{2}$

2. Analyse des contraintes :

Pour ces deux modèles monocristallins, les contraintes ont été analysées en fonction de la rotation et de la déformation. Pour ce faire, nous allons introduire, pour cet essai, la composante des contraintes duale à la déformation qui est définie, en introduisant le travail plastique représentatif des efforts intérieurs qui s'écrit d'après (II.9) et (IV.2), par

$$T:D = (\sigma_{11} + \rho\sigma_{22})\dot{\epsilon}$$

Pour ce faire, nous allons utiliser pour chaque monocristal et dans chaque domaine d'orientation les calculs introduites dans le chapitre 4.

2.1. Cas CFCP2

Pour le système $2^-3^+4^-5^+$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\tau^2 + \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\tau^3 - \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\tau^4 + \tau_c}{\mu} \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\tau^5 - \tau_c}{\mu} \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

D'après le tableau (II.5), on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{T}_{12} = \sqrt{3}(\tau^2 + \tau^3) \\ \bar{T}_{11} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\tau^2 - \tau^3) \\ \bar{T}_{22} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\tau^5 - \tau^2) \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

D'après (IV.9) et (IV.10), on a :

$$\begin{cases} \bar{T}_{12} = \sqrt{3}\mu(\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}^3) \\ \bar{T}_{11} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\mu(\dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}^3) - 2\tau_c) \\ \bar{T}_{22} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\mu(\dot{\alpha}^5 - \dot{\alpha}^2) + 2\tau_c) \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

D'après (IV.11), on a :

$$\begin{cases} \bar{T}_{12} = 6\mu\bar{D}_{12} \\ \bar{T}_{11} = -3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) - \sqrt{6}\tau_c \\ \bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) + 2\sqrt{6}\tau_c \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

De la même manière pour les autres zones d'activités, les résultats ont été regroupés dans le tableau V.1.

Tableau CFCP2.V.1. Les contraintes pour chaque système de glissement.

Système de glissements	Contrainte
$2^- 3^+ 4^+ 5^-$	$\begin{aligned} \bar{T}_{12} &= 6\mu\bar{D}_{12} \\ \bar{T}_{11} &= -3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) - \sqrt{6}\tau_c \\ \bar{T}_{22} &= 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) \end{aligned}$
$2^- 3^+ 4^- 5^+$	$\begin{aligned} \bar{T}_{12} &= 6\mu\bar{D}_{12} \\ \bar{T}_{11} &= -3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) - \sqrt{6}\tau_c \\ \bar{T}_{22} &= 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) + 2\sqrt{6}\tau_c \end{aligned}$

$2^-3^+4^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22}))$
$2^-3^+4^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) - \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})) + 2\sqrt{6}\tau_c$
$2^-3^+5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})) + 2\sqrt{6}\tau_c$
$2^-3^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22}))$
$2^-4^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})$
$2^-4^-5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22}) + 2\sqrt{6}\tau_c$
$3^+4^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (3\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22}))$
$3^+4^-5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}))$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (3\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})) + 2\sqrt{6}\tau_c$
$1^-2^-4^-$	$\bar{T}_{12} = \frac{3\mu}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) - \sqrt{3}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3\mu}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (5\bar{D}_{11} + 6\bar{D}_{22})) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$

$1^-2^-5^-$	$\bar{T}_{12} = \frac{3\mu}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11}) - \sqrt{3}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3\mu}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (5\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})) - \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 6\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})$
$1^+3^+5^+$	$\bar{T}_{12} = \frac{3\mu}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) + \sqrt{3}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3\mu}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (5\bar{D}_{11} + 6\bar{D}_{22})) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = \frac{3\mu}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + 3(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) + \sqrt{6}\tau_c$
$1^+3^+4^+$	$\bar{T}_{12} = \frac{3}{2}\mu(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}) + \sqrt{3}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3}{2}\mu(-2\sqrt{2}\bar{D}_{12} + (5\bar{D}_{11} + 4\bar{D}_{22})) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 6\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})$

L'évolution de $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22}$ est bien représentée sur les figures (V.26) à (V.31) pour chaque valeur de A et θ_0 .

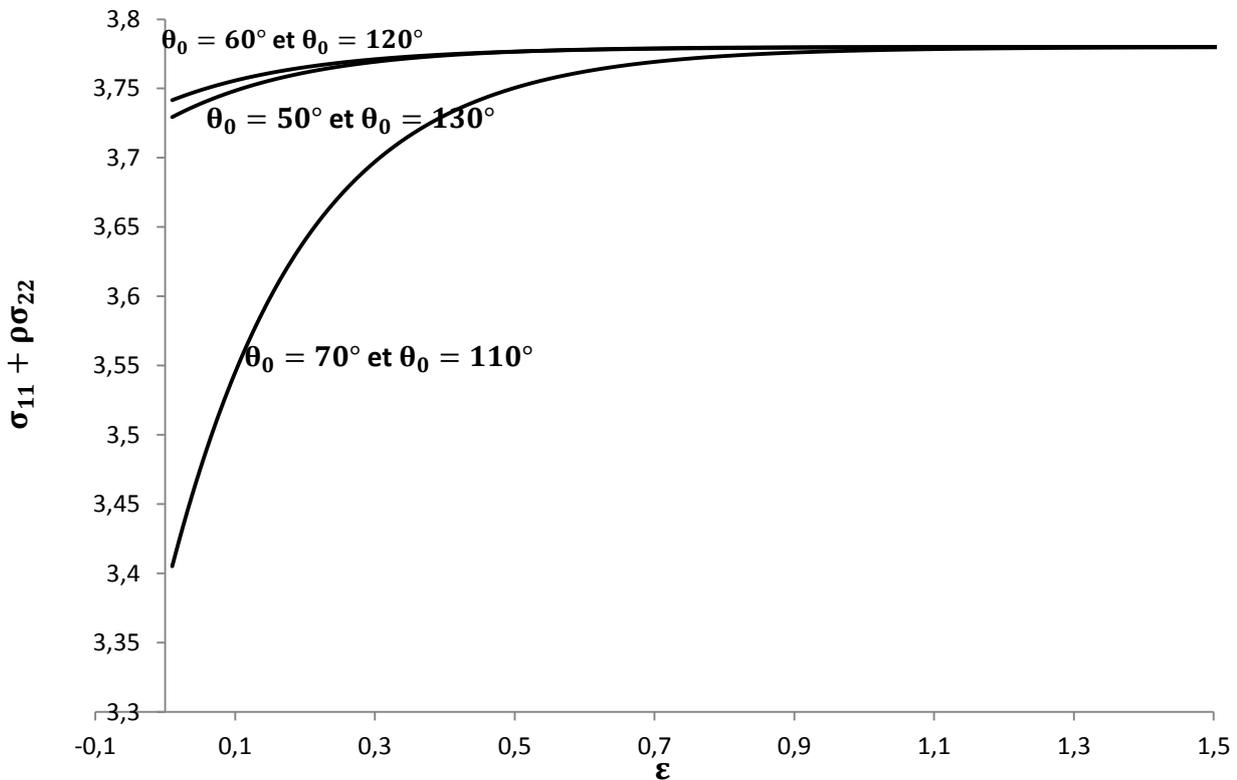


Figure V.26 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{11}}$

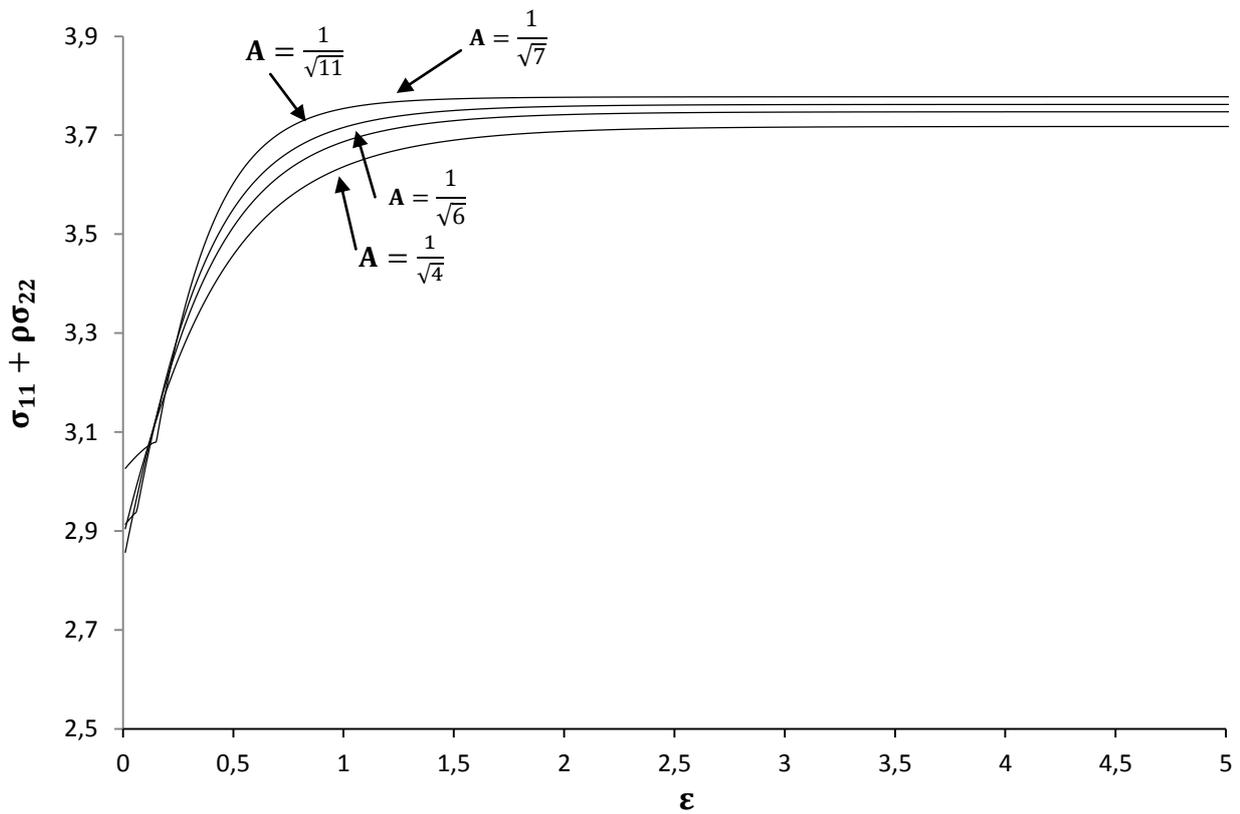


Figure V.27 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\varepsilon, A)$ pour $\frac{1}{\sqrt{11}} \leq A < \frac{1}{\sqrt{3}}$ avec $\theta_0 = 20^\circ$

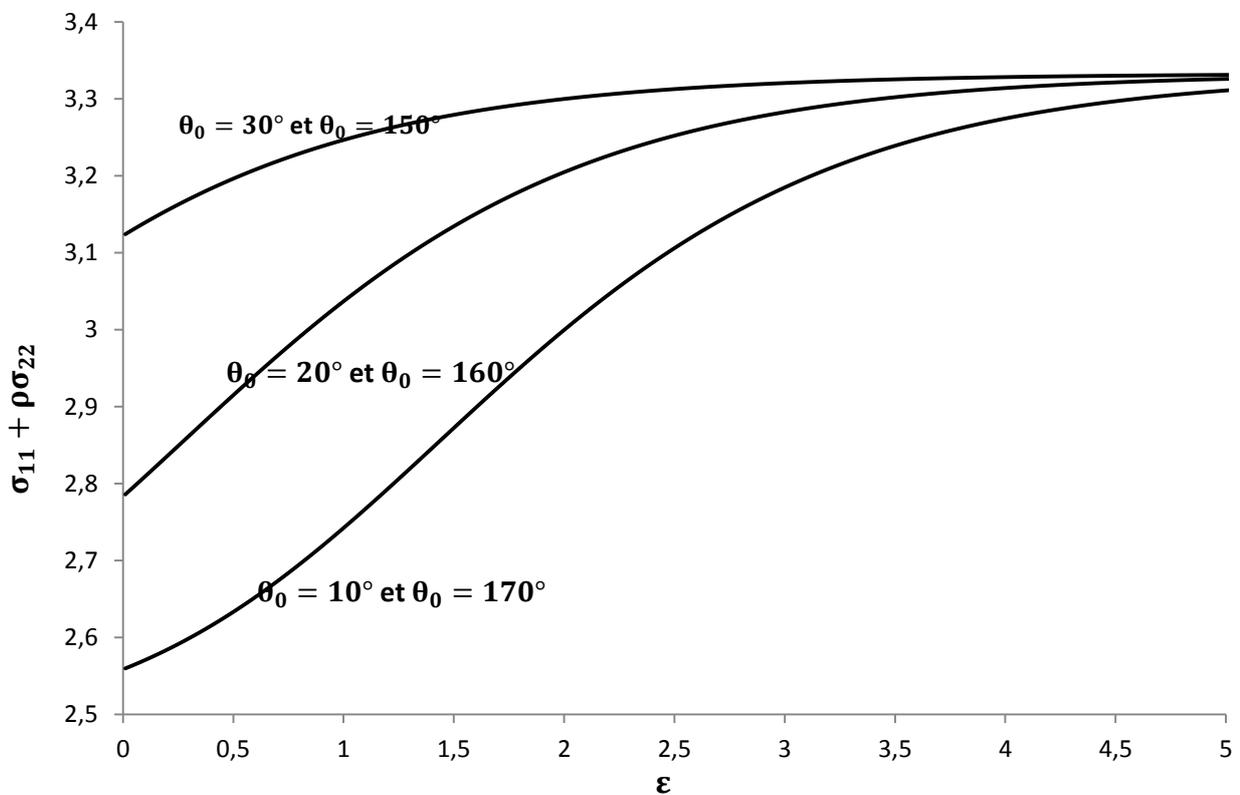


Figure V.28 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\varepsilon, \theta_0)$ pour $1 \leq A < \sqrt{3}$ avec $A = 1$

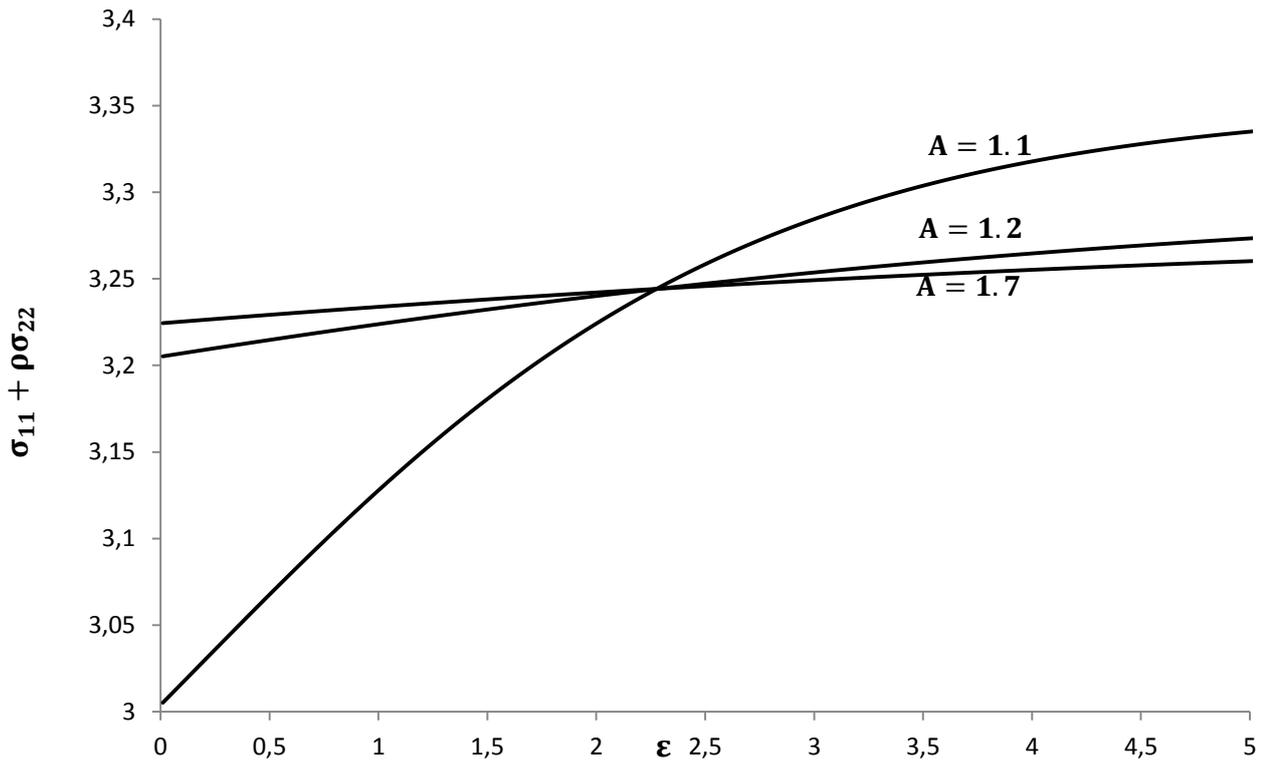


Figure V.29 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, A)$ pour $1 \leq A < \sqrt{3}$ avec $\theta_0 = 20^\circ$

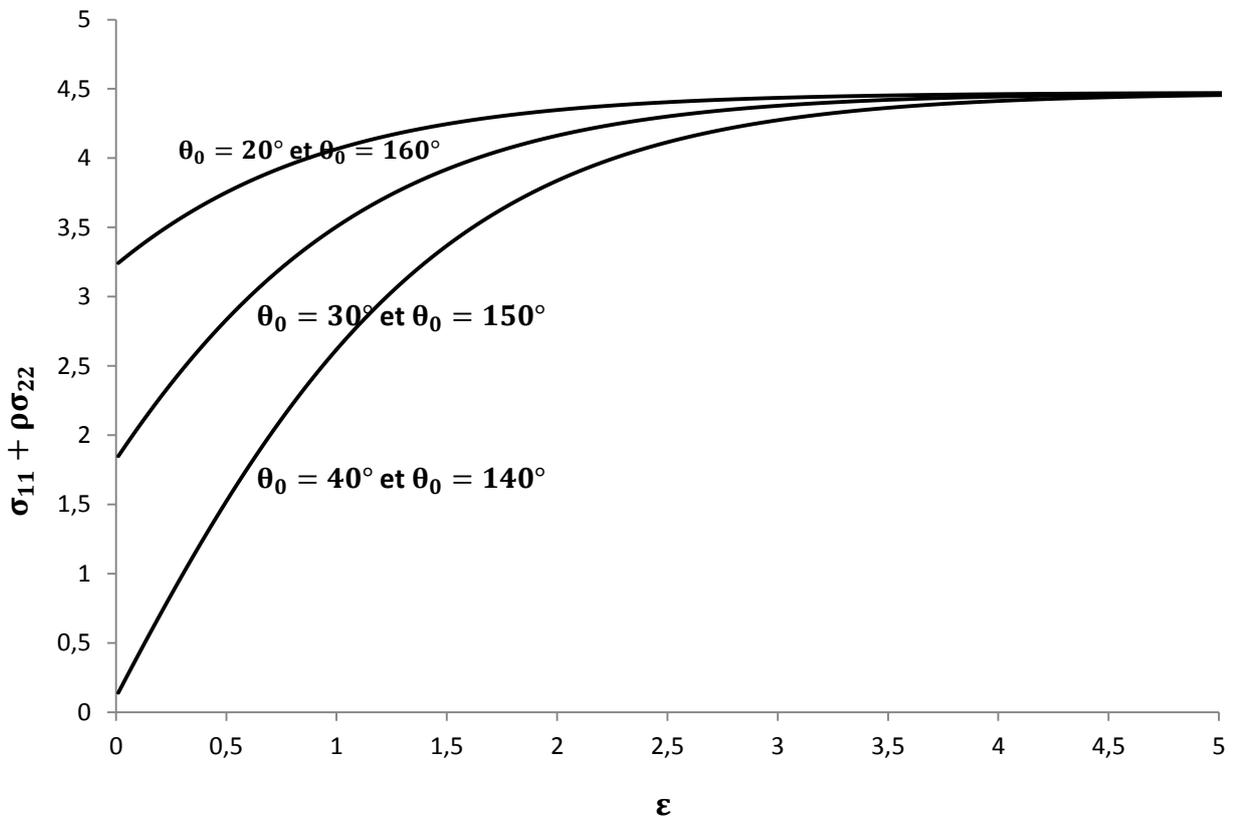


Figure V.30 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $A \geq \sqrt{3}$ avec $A = \sqrt{3}$

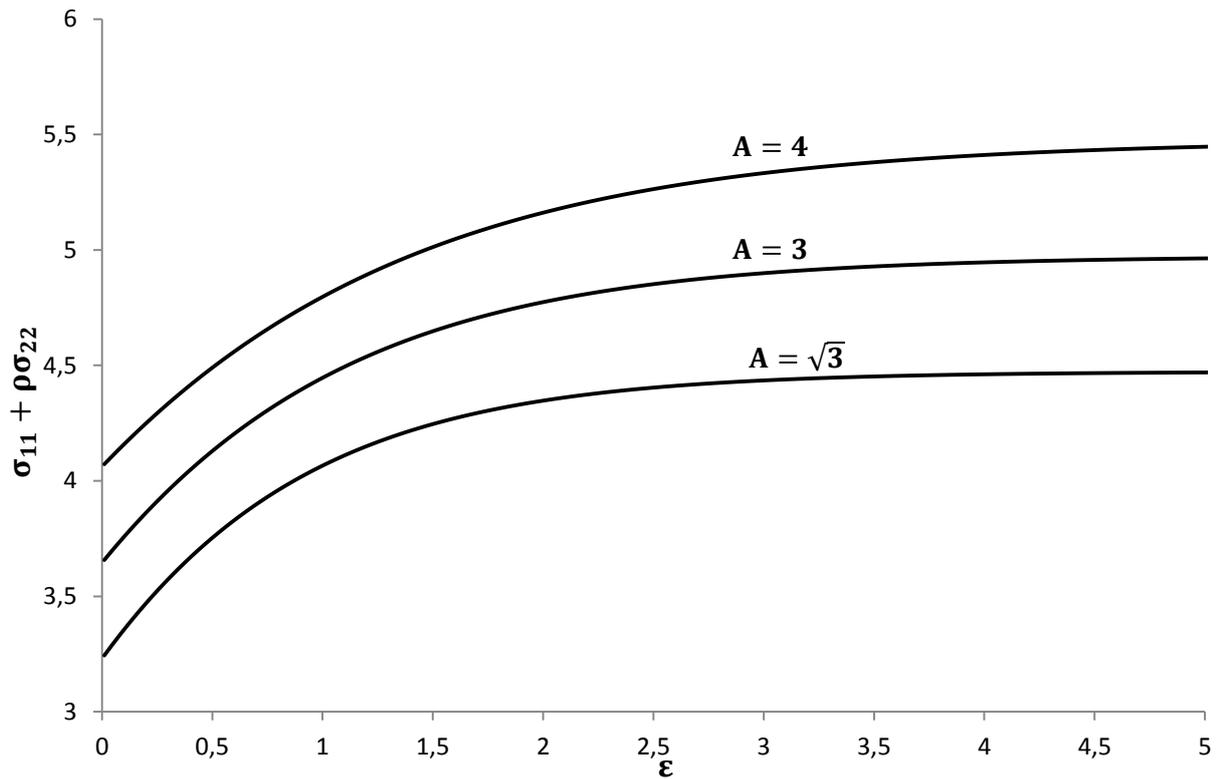


Figure V.31 : CFCP2 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, A)$ pour $A \geq \sqrt{3}$ avec $\theta_0 = 20^\circ$

On constate que $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22}$ tend vers des valeurs fixes en fonction de ϵ pour chaque valeur initial de θ_0 et A .

2.2. Cas CFCP1

Dans le cas de monocristal CFCP1, nous allons refaire le même calcul que nous avons effectué pour CFCP2, et les résultats ont été regroupés sur le tableau suivant.

Tableau CFCP1.V.2. Les contraintes pour chaque système de glissement.

Système de glissements	Contrainte
$2^+3^+4^-5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu\bar{D}_{12} - \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{22})$
$2^+3^+4^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu\bar{D}_{12}$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$
$2^-3^-4^-5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu\bar{D}_{12}$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11}) - \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(2\bar{D}_{22})$

$1^+2^+5^+6^+$	$\bar{T}_{12} = \frac{3\mu}{4}(-4\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) + \tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3\mu}{4}(-2\bar{D}_{12} + 5\bar{D}_{11} + 3\bar{D}_{22}) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = \frac{3\mu}{4}(10\bar{D}_{12} - \bar{D}_{11} + 3\bar{D}_{22}) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$
$1^+2^+4^+6^+$	$\bar{T}_{12} = 6\mu\bar{D}_{12}$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$
$1^-2^-4^-6^-$	$\bar{T}_{12} = 6\mu\bar{D}_{12}$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) - \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})$
$1^-3^+5^-6^-$	$\bar{T}_{12} = 6\mu\bar{D}_{12}$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(2\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$
$1^-3^+4^-6^-$	$\bar{T}_{12} = \frac{3\mu}{4}(2\bar{D}_{12} + 5\bar{D}_{11} + 3\bar{D}_{22}) - \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = \frac{3\mu}{4}(2\bar{D}_{12} + 5\bar{D}_{11} + 3\bar{D}_{22}) - \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = \frac{3\mu}{4}(-2\bar{D}_{12} + 3\bar{D}_{11} + 5\bar{D}_{22}) + \frac{\sqrt{6}}{2}\tau_c$
$2^+3^+4^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(-\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{12})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(3\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{12}) + \sqrt{6}\tau_c$
$2^+3^+4^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(-\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{12}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(3\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{12})$
$2^+3^+5^+$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(-\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(5\bar{D}_{22} - 2\bar{D}_{12})$
$2^+3^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(-\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(5\bar{D}_{22} - 2\bar{D}_{12}) + \sqrt{6}\tau_c$
$3^+4^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12})$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{22}) + \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{12}) + \sqrt{6}\tau_c$
$3^-4^+5^-$	$\bar{T}_{12} = 3\mu(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{12}) - \sqrt{6}\tau_c$ $\bar{T}_{22} = 3\mu(\bar{D}_{22})$ $\bar{T}_{11} = 3\mu(\bar{D}_{11} - 2\bar{D}_{12}) + 2\sqrt{6}\tau_c$

L'évolution de $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22}$ est bien représentée sur les figures (V.32) à (V.38) pour chaque valeur de A et θ_0 .

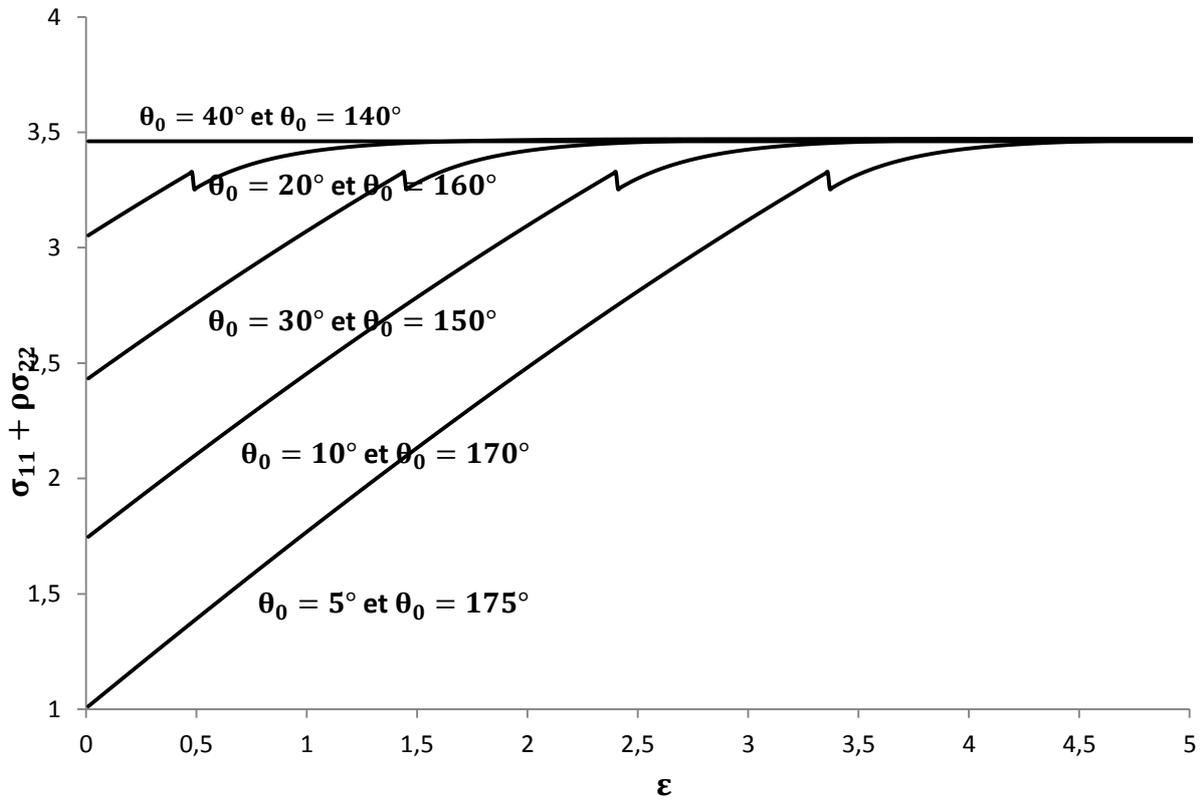


Figure V.32 : CFCPI : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $A = 0.1$

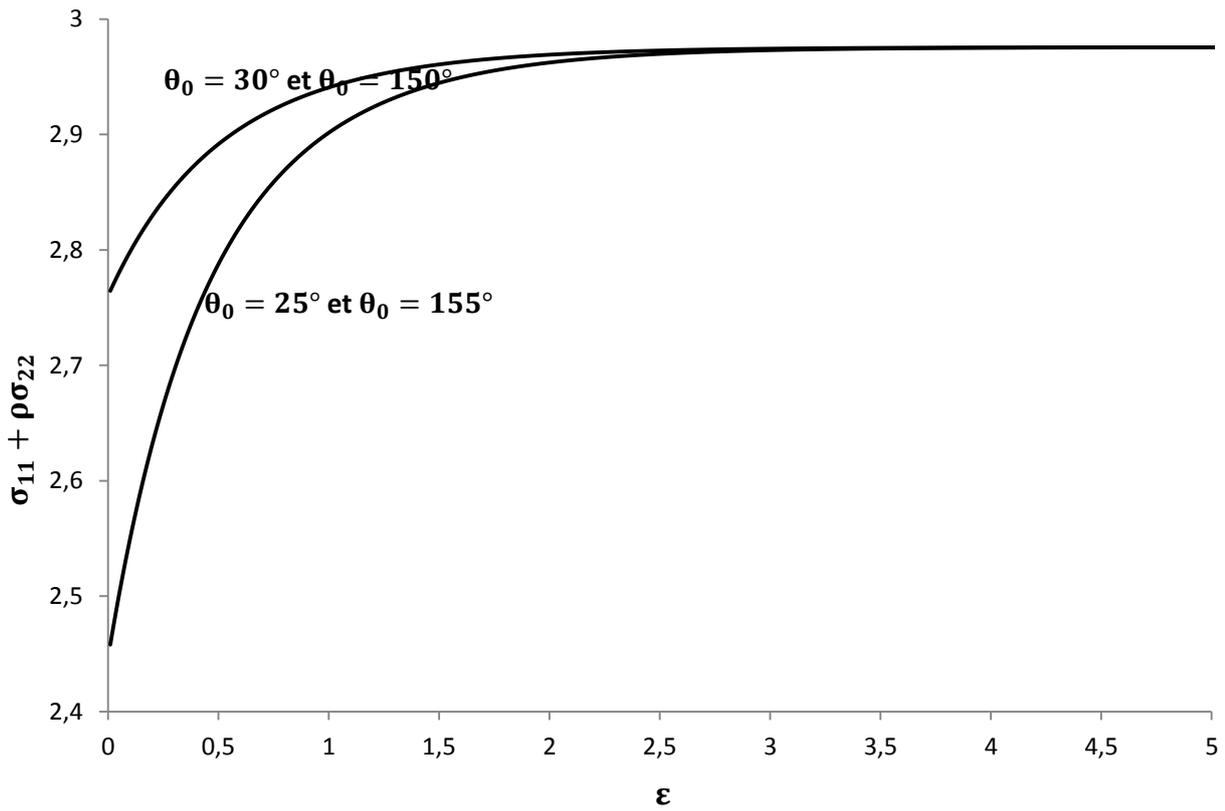


Figure V.33 : CFCPI : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

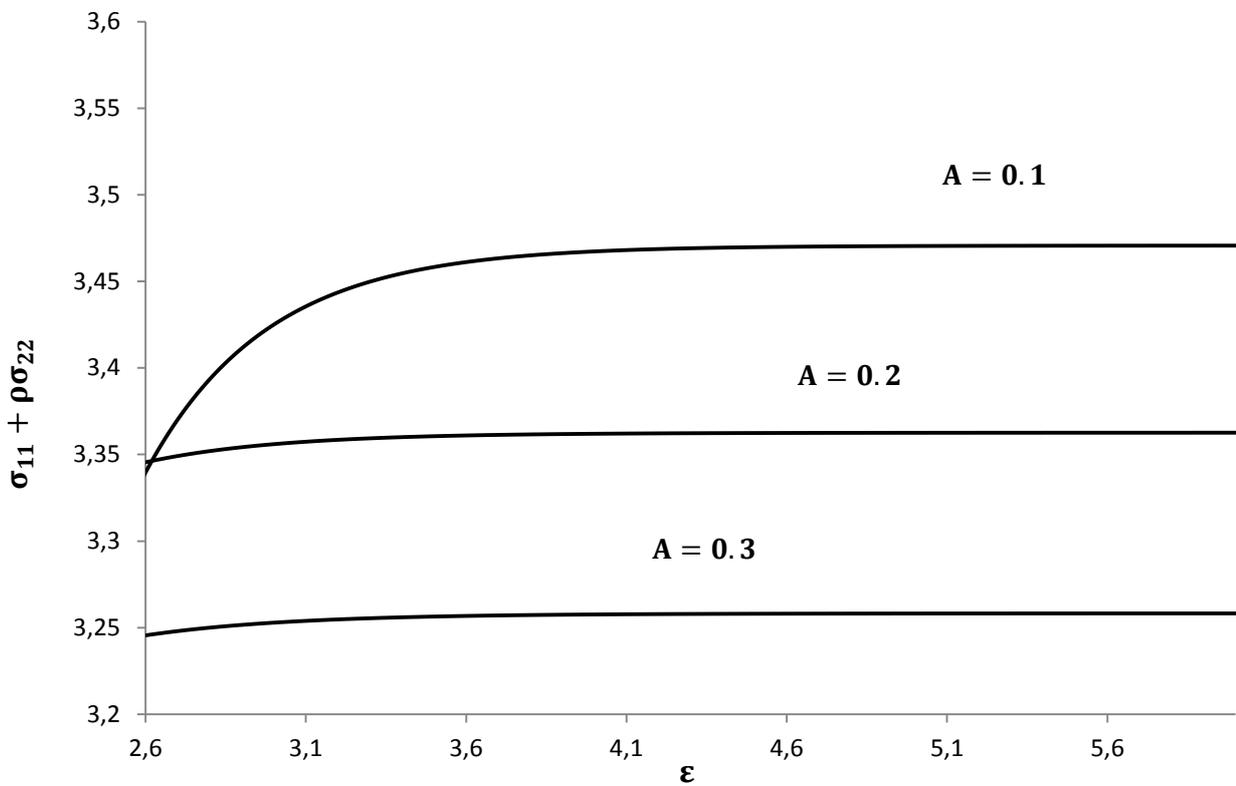


Figure IV.34 : CFCPI : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, A)$ pour $0 \leq A < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $\theta_0 = 10^\circ$

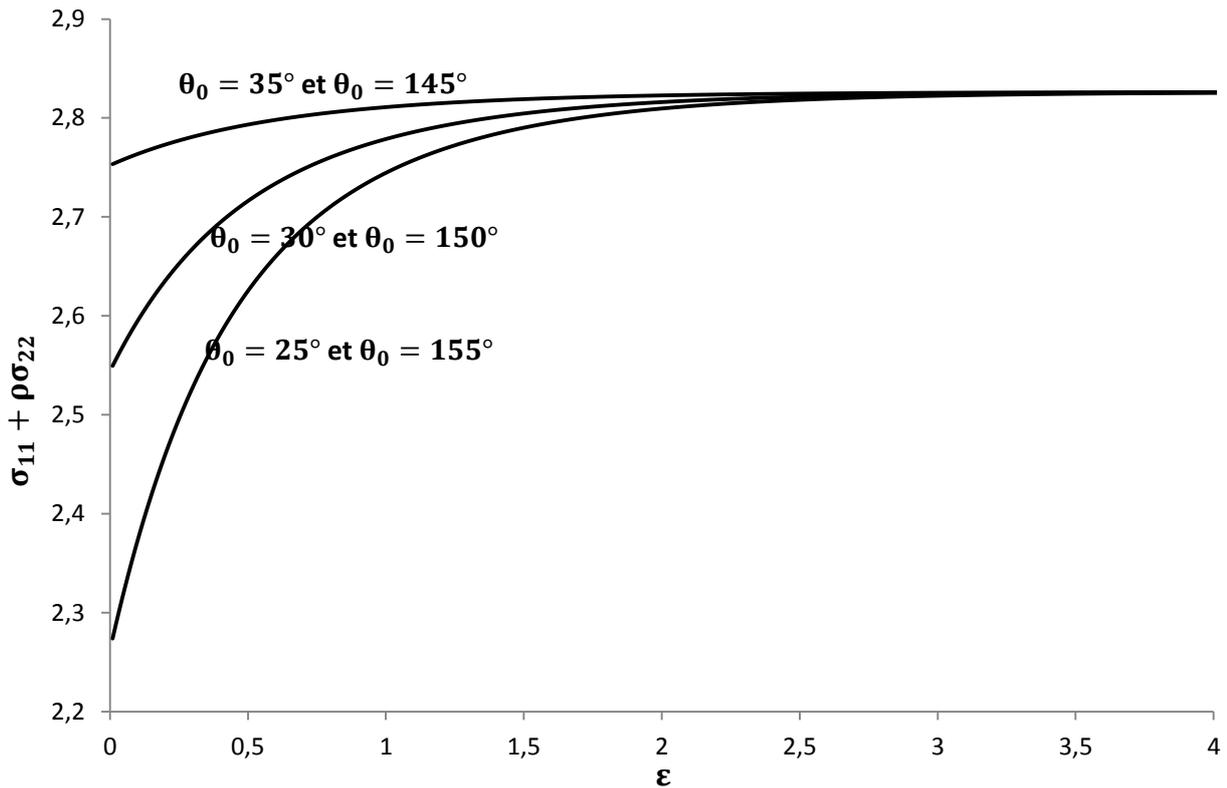


Figure V.35 : CFCPI : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

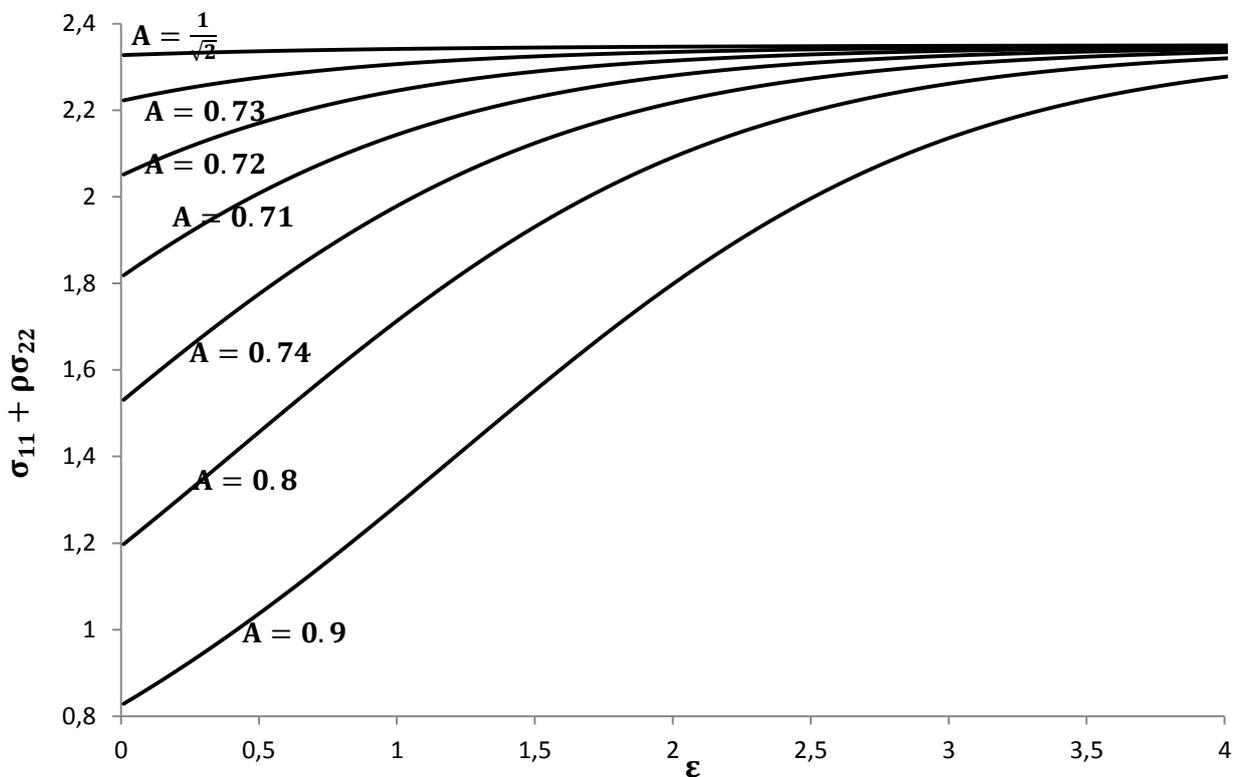


Figure V.36 : CFCPI : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, A)$ pour $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq A < 1$ avec $\theta_0 = 30^\circ$

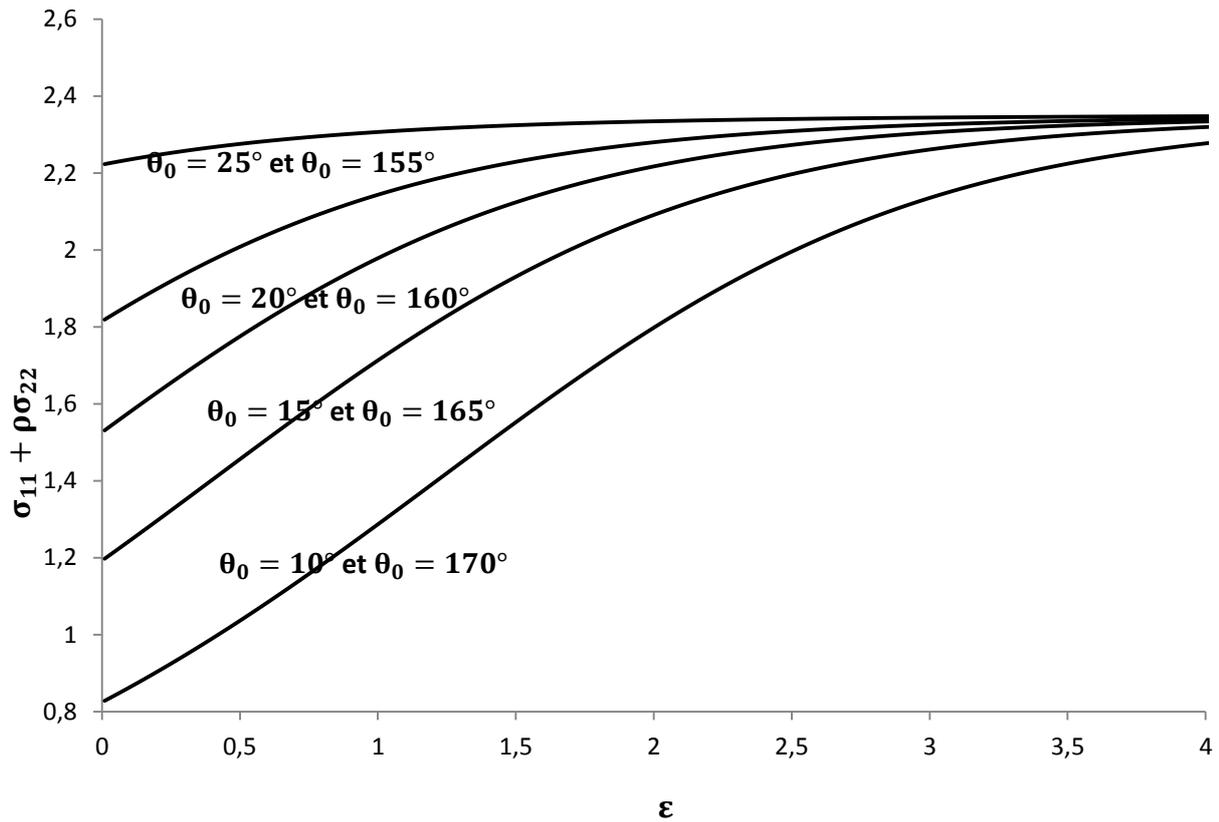


Figure V.37 : CFCP1 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, \theta_0)$ pour $1 \leq A < \sqrt{2}$ avec $A = 1.1$

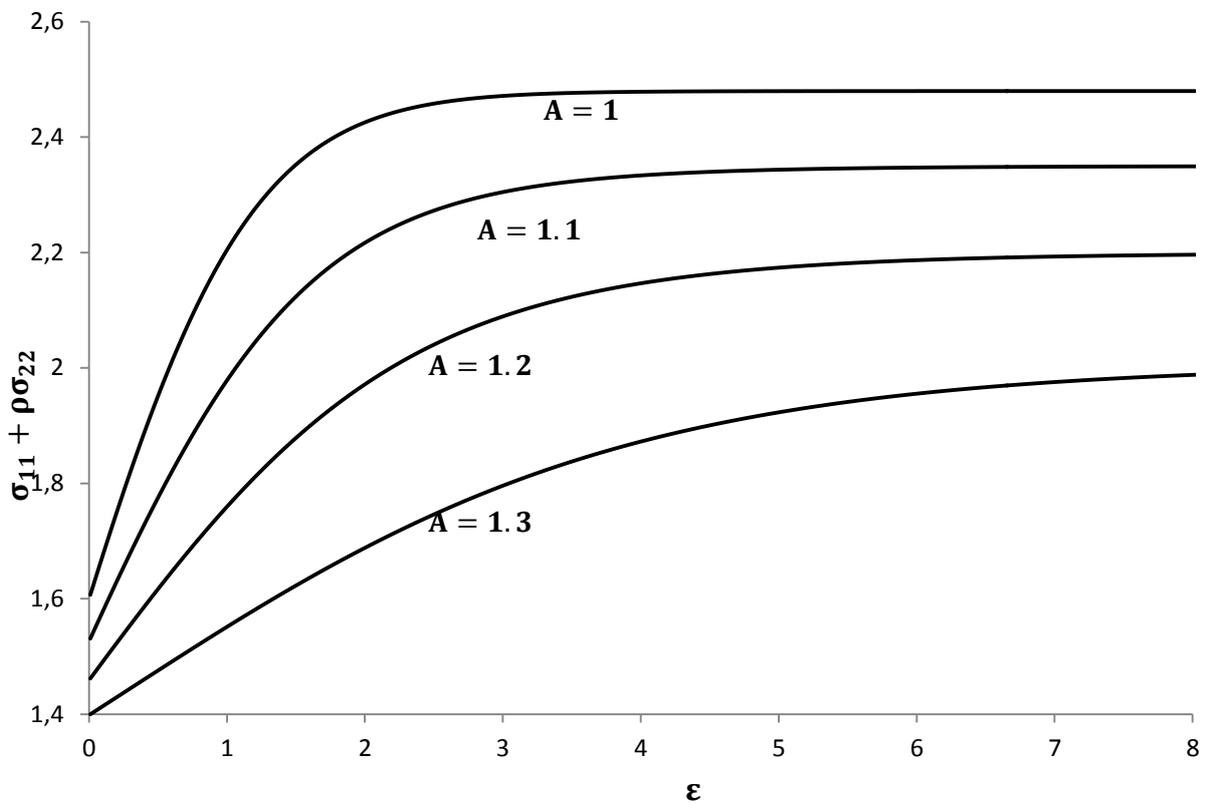


Figure V.38 : CFCP1 : Courbe $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22} = f(\epsilon, A)$ pour $1 \leq A < \sqrt{2}$ avec $\theta_0 = 20^\circ$

3. Conclusion :

Pour le monocristal CFCP2, nous avons trouvé:

- ✓ Pour $A(\rho) = 0$: une stabilisation de rotation à trois valeurs limites θ_1 , $\frac{\pi}{2}$ et $\pi - \theta_1$, avec $\tan 2\theta_1 = \sqrt{2}$.
- ✓ Pour $0 < A(\rho) < 1$: une stabilisation de rotation à trois valeurs limites 0 , θ_1 et $\pi - \theta_1$, avec $\tan \theta_1 = 2\sqrt{2}$.
- ✓ Pour $1 \leq A(\rho) < \sqrt{3}$: une stabilisation de rotation à deux valeurs limites θ_1 et $\pi - \theta_1$.
- ✓ Pour $A(\rho) \geq \sqrt{3}$: une stabilisation à 0 et π .

Et pour le monocristal CFCP1, nous avons trouvé :

- ✓ Pour $0 < A(\rho) < 1$: une stabilisation de rotation vers deux valeurs limites $\theta_{1_1}, \theta_{1_2}$, avec $\tan 2\theta_{1_1} = \frac{A+\sqrt{2-A^2}}{-A+\sqrt{2-A^2}}$ et $\tan 2\theta_{1_2} = \frac{A-\sqrt{2-A^2}}{A+\sqrt{2-A^2}}$.
- ✓ Pour $A(\rho) = 1$: nous avons trouvé une seule stabilisation de rotation vers l'orientation limite $\frac{\pi}{4}$.
- ✓ Pour $1 < A(\rho) < \sqrt{2}$: nous avons trouvé une stabilisation à 0 .
- ✓ Pour de $A(\rho) \geq \sqrt{2}$: les monocristaux restent immobiles quelque soit la déformation et l'orientation initiale.

Deux constatations peuvent être dégagées de ces analyses:

- ✓ Pour les rotations, nous avons toujours une stabilisation vers une valeur limite. Il a été démontré que ces orientations limites dépendent du modèle monocristallin utilisé, de son orientation initiale ainsi que de la sollicitation exercée sur le monocristal.
- ✓ Pour les contraintes $\sigma_{11} + \rho\sigma_{22}$, on obtient une évolution continue et croissante qui tend vers une valeur maximale en fonction de la déformation et de l'orientation initiale du monocristal.

Conclusion générale

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au cas des grandes déformations, et nous nous sommes placés dans l'hypothèse d'un matériau rigide plastique écrouissable, pour lequel nous avons négligé l'élasticité.

Plus précisément, nous nous sommes intéressés au cas des monocristaux cubiques à faces centrées, pour lesquels nous avons introduit le cas d'une sollicitation plane dans un plan de symétrie.

Deux modèles de monocristaux plans ont été présentés:

- Le CFCP1: représentative du monocristal sollicité dans le plan $\{100\}$. Ce qui donne un milieu caractérisé par 6 mécanismes;

- Le CFCP2: représentative du monocristal sollicité dans le plan $\{110\}$. Ce qui donne un milieu caractérisé par 5 mécanismes.

Ensuite, une étude cinématique, de ces deux modèles, a été présentée dans le cas rigide plastique. Nous avons présenté la surface de plasticité. En utilisant, la règle de normalité, nous avons introduit une autre représentation (plan projectif) dans l'espace des vitesses des déformations. La représentation plan projectif a été largement détaillée pour les deux modèles monocristallins CFCP1 et CFCP2.

Ceci nous a permis de mettre en évidence l'importance de l'analyse cinématique basée sur la représentation du plan projectif qui est intimement lié à la surface de plasticité.

Nous avons montré dans le cas plan, que l'analyse viscoplastique introduite dans ce travail permet de construire une nouvelle représentation plan projectif. Cette dernière présente l'avantage, par rapport à celle obtenue dans le cas plastique, elle nous permet par la suite de déterminer parfaitement les glissements cristallographiques et donc les rotations plastiques.

Finalement, nous avons montré que les résultats obtenus pour ce cas particulier, l'extension biaxiale, restent généraux et peuvent être appliqués à tout essai à cinématique plane imposée.

De ces analyses, il convient de confirmer que le concept monocristal plan nous a permis une étude analytique précise de plusieurs questions controversées. C'est peut être un bon cadre mathématique pour la compréhension du monocristal.

Enfin, nous pensons qu'il serait utile de poursuivre ce travail, selon les perspectives suivantes :

- La mise au point d'un algorithme puissant permettant d'intégrer la loi de comportement d'un monocristal bidimensionnel.
- Comparaison avec l'expérience.
- Introduire une loi d'écroutissage anisotrope.
- Etudier le comportement d'autres structures cristallines.

Références bibliographiques

Arminjon, M. (1987) Théorie d'une classe de modèles de Taylor hétérogènes. Application aux textures de déformation des aciers. *Acta Metall* 35, pp. 615-630.

Asaro, R. J. (1979) Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals. *Acta metall.* 27, pp. 445-453.

A. Mollinari, G.R. Canova, S. Ahzi, (1987) "A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity". *Acta Metall. Mater.* **35**, 2983-2994.

A. Chenaoui, F. Sidoroff , A. Hihhi, (2000), " The texture evolution of a planar polycrystal" *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000) 2559–2584.

A. Chenaoui (08-07-2000) Faculté des Sciences de Rabat « Contribution à l'étude du comportement mécanique d'un monocristal bidimensionnel en grandes déformations »

Chenaoui, A. (1992) Contribution à l'étude du comportement du monocristal en grandes déformations plastique. Thesis, Ecole Centrale de Lyon (France), N° 92-13.

A. Chenaoui, A. Hihhi " le monocristal plan a effort imposé" (1997) Dans les actes des Jeunes Chercheurs en Physique. Casablanca Beni M'Sik décembre.

A. Chenaoui, A. Hihhi (1998) "le monocristal en traction hors axe" Dans les actes de la journée scientifique, Université Abdelmalek Essaadi , Tanger.

Chenaoui A., Hihhi A. et El Omri A. (1995) "Comportement macroscopique d'un polycristal en grandes déformations élastoviscoplastiques" Dans les actes du 2ème Congrès Marocain de Mécanique, Casablanca, Avril.

Chenaoui A., Hihhi A. et El Omri A. (1994) "Comportement d'un composite stratifié en grandes déformations élastoplastiques" Dans les actes des Jeunes Chercheurs en Physique. Casablanca Beni M'Sik Décembre.

Chenaoui A., Hihhi A. et El Omri A. (1997) "Structure Cellulaire Cristalline et Contraintes Résiduelles". Dans les actes du 3ème Congrès Marocain de Mécanique, Tétouan, avril.

A. Chenaoui, F. Sidoroff (1991) "Prise en compte de l'écrouissage dans l'étude de cisaillement simple d'un monocristal" Dans les actes du 10ème Congrès Français de Mécanique, t1.

Chenaoui A. et F. Sidoroff (1993) "Le monocristal en cisaillement simple : influence de l'écroutissage et de l'élasticité" Dans les actes du 1er Congrès Marocain de Mécanique, Rabat, Avril 1993.

A. Chenaoui, F. Sidoroff (1997) "Élasticité non linéaire d'un assemblage cristallin plan". Dans les actes du 3ème Congrès Marocain de Mécanique, Tétouan , Avril.

A. Molinari ,Mercier S., Micromechanical modelling of porous materials under dynamic loading, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 49, 1497-1516, 2001.

A. Molinari, G.R. Canova, S. Ahzi, (1987) "A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity". *Acta Metall. Mater.* **35**, 2983-2994.

Asaro, R. J. & Needleman, A. (1985). Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals. *Acta Met.* 33:923-53.

A. Zaoui, (1991) "Comportement mécanique des matériaux". Hermès, Paris.

Bishop, J. F. W. and Hill, R. (1951) A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal. *Philosophical Mag.* 42, pp. 1298-1307.

Bishop J. F. W. et Hill R. (1951) A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Phil. Mag.*, 42, 414-427.

Bishop J. F. W. et Hill R. (1951) A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face centred metal. *Phil. Mag.*, 42, 1298-1307.

Boukadia, J., Chenaoui, A. and Sidoroff, F. (1991) Simple shear in fcc single crystals at large deformations. In *Large Plastic Deformation* (edited by C. TEODOSIU,

Boukadia, J. and Sidoroff, F. (1988) Simple shear and torsion of a perfectly plastic single crystal in finite transformation. *Arch., Mech.* 40, pp. 497-513.

Cailletaud M. (1987) Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux. Thèse, Université P. et M. Curie, Paris VI.

Canova G. R., Fressengeas C., Kocks U. F. et Molinar A. (1988) Effet of rate sensitivity on slip system activity and lattice rotation. *Acta metall.*, 36, pp. 1961-1970.

Chang Y. W. et Asaro R. J. (1981) An experimental study of shear localisation in aluminum-copper single crystals. *Acta Metallurgica*, 29, 241.

- Dogui, A.** 1988 Cinématique bidimensionnelle en grandes déformations - Application à la traction hors axes et la torsion. J. Méca. Th. et Appl., vol.7, n°1, pp. 43-64.
- Dogui, A. & Sidoroff, F.**1986 Rheologie anisotrope en grandes deformations. In Proc. Conf. on Rheologie des Materiaux Anisotropes (ed. by C. Huet, D. Bourgon & S. Richemond), pp. 69 - 78, CEPADUES, Toulouse.
- Dogui, A. & Sidoroff, F.** 1987 Large strain formulation of anisotropy elasto-plasticity for metal forming. In Proc. Int. Conf. on Computational Methods of predicting material processing defects (ed. by M. Predeleanu), Amsterdam : Elsevier.
- D. François, A. Pineau, A. Zaoui, (1922) ” Comportement mécanique des matériaux ”**, Traité des Nouvelles Technologies, Hermès, Paris, (1991).
- E.C. Bingham, (1916) “ Bureau of Standards Bulletin ”**, 13, 309-353
- E.C. Bingham,(1922) “Fluidity and Plasticity”**, McGraw-Hill, New York, 215–218.
- G. Taylor, (1938).** “Plastic Strain in Metals”. J. Inst. Metals, Vol. 62:pp. 307–324.
- J. Bishop, R. Hill, (1951) “ A theoretical deviation of the plastic properties of a polycrystalline”** face centred metal. Phil. Mag., 42:1298–1307.
- J. Mandel, 1982.** Définition d'un repère privilégié pour l'études des transformations anélastiques du polycristal. J. Meca. Th. et Appl., 17, pp. 7-23.
- J. Boukadia, A. Chenaoui, F. Sidoroff, 1993.** Simple shear in fcc single crystals at large deformations. In Proc. Int. Sem. MECAMAT'91 Faintainebleau /France/ on Large Plastic Deformation (ed. by C. TEODOSIU, J.L. RAPHANEL & F. SIDOROFF). Rotterdam Balkema, 109-116.
- K. Merabet, A. Chenaoui, F. Sidoroff, M. Darrieulat(2008)”** Biaxial extension of a plane single crystal” Arch. Mech., 60, 5, pp. 363–384, Warszawa.
- M. Darrieulat, and D. Piot, 1996.** A method of generating analytical yield surfaces of crystalline materials. Int. J. of Plasticity 12, 5 pp. 575-610.
- M. Arminjon, (1991) “A regular form of the schmid law, application to the ambiguity problem”**. Textures and Microstructures 14-18, 1121–1128.

Orowan E. (1934) Zeit. Phys. , 89, 605-614-634.

P. Franciosi, (1984) “Etude théorique et expérimentale du comportement elastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement : Modélisation pour un chargement complexe quasi statique”. PhD thesis, Université de Paris XIII.

R. Kouddane, A. Molinari, G.R. Canova, (1993) “Self-consistent modeling of heterogeneous viscoelastic and elastoplastic materials, in: *Large plastic deformations, Fundamentals and application to metal forming*”, MECAMAT’91, Teodosiu, C., Raphanel, J.-L., Sidoroff, F. (eds.), Balkema, Rotterdam, 129-141.

Schmid E. (1924) Proc. Int. Cong. Appl. Mech. Delft, 342

Schmid E. (1927) Z. Metallkund, 19, 154.

Schmid E. et Siebel G. Z. (1931) Electrochem, 37, 447.

Schmid E. et Boas W. (1935) Kristallplastizität mit besonderer Berücksichtigung der Metalle. Springer – Verlag.

Shalaby, A. H. and Havner, K. S. (1978) A general kinematical analysis of double slip. J. Mech. Phys. Solids 26, pp. 79-92.

T. Hoc. (1999) “Etudes Experimentales et Numérique de la localisation de la déformation lors de changements de trajets dans un acier doux”. PhD thesis, Ecole Centrale Paris.

Taylor, G. I. (1938) Plastic strain in metals. J. Inst. Metals 62, pp. 307-324.

Taylor G. I. (1934) Proc. Roy. Soc. London, A 145, 362.

Taylor G. I. et Elam C. F. (1923) Proc. Roy. Soc. London, A 102, 643.

Taylor G. I. et Elam C. F. (1925) Proc. Roy. Soc. London, A 108, 28.

Taylor G. I. et Elam C. F. (1926) Proc. Roy. Soc. London, A 112, 337.

Teodosiu C. A (1975) Physical theory of finite elastic –viscoplastic behaviour of single crystals. Eng. Trans., 23, 151.

Van Houtte P. (1981) ICOTOM 6, ed by S. Nagashima, Iran Steel inst., Japan, 428.

Van Houtte P. et Aernoudt E. (1975) Solution of the generalized Taylor theory of plastic flow. Part I, II in Z Metallkunde. 66, pp. 303-306.

Y.F. Dafalias, (1983) "A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large deformations" PLASTICITY TODAY UDINE .

Y.F. Dafalias, (1983) "Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations" J. appl. Mech 1983, Vol. 50, pp. 561-565.

W. Gambin, 1991. Crystal plasticity based on yield surfaces with rounded-off corners. Zeitschrift für Angewandte Mathematics, 71, 4, T265 (referred on the GAMM Conference, Hannover, April 1990).

Annexe. A

1. Analyse des sommets.

1.1. Systèmes 2,4 et 5.

D'après les équations (II.36), $\dot{\alpha}^1 = 0 \Leftrightarrow \xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12}$ et $\dot{\alpha}^3 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$

Donc :

$$\xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \quad (\text{A.1})$$

Et

$$\bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \quad (\text{A.2})$$

De (A.1) et (A.2) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.3) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + Y_1) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2)) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_6, Δ_9 et Δ_{10} tels que :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: Y_1 + Y_2 = 0 \\ \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \\ \Delta_6: 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 2, 4 et 5:

Cas: $2^+4^+5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \geq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Cas: $2^+4^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \leq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Cas: 2⁻4⁺5⁻

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \geq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Cas: 2⁻4⁻5⁺

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 + Y_1 \leq 0 \\ 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

1.2. Systèmes 3,4 et 5.

D'après les équations (II.36), $\dot{\alpha}^1 = 0 \Leftrightarrow \xi + \bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12}$ et $\dot{\alpha}^3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$

Donc :

$$\xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \quad (\text{A.8})$$

et

$$\bar{\omega}_{12}^p = 3\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \quad (\text{A.9})$$

De (A.8) et (A.9) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \right) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) \right) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11} \right) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.10) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{6}}{2} (2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2} (2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2)) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2} (2Y_3 - Y_1) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_6, Δ_9 et Δ_{10} tels que :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: Y_1 + Y_2 = 0 \\ \Delta_8: 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) = 0 \\ \Delta_5: 2Y_3 - Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 3, 4 et 5:

Cas: $3^+4^+5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Cas : $3^+4^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Cas : $3^-4^+5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Cas : $3^-4^-5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

1.3. Systèmes 1,2 et 4.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

De (A.17) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.18) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2)) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2Y_1) \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_6, Δ_{10} et Δ_7 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_6: 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \\ \Delta_{10}: -2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: -2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 1, 2 et 4.

Cas : 1⁺2⁺4⁺

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Cas : 1⁻2⁻4⁻

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

1.4. Systèmes 1,2 et 5 .

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

De (A.23) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.24) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 + Y_1) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2Y_1) \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_9, Δ_{10} et Δ_7 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \\ \Delta_{10}: -2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: -2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 1, 2 et 5.

Cas: $1^+2^+5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 + Y_1 \geq 0 \\ -2(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ -2Y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Cas: $1^-2^-5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 + Y_1 \leq 0 \\ -2(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ -2Y_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

1.5. Systèmes 1,3 et 5.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

De (A.29) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.30) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2)) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_1) \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_8, Δ_{10} et Δ_7 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_8: 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) = 0 \\ \Delta_{10}: 2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: 2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 1, 3 et 5.

Cas: $1^+3^+5^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \geq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Cas: $1^-3^-5^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - (Y_1 + 2Y_2) \leq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

1.6. Systèmes 1, 3 et 4.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

De (A.35) les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{11}) \\ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2Y_3 - Y_1) \\ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(2(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-2Y_1) \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

On considère les équations de 3 droites Δ_5, Δ_{10} et Δ_7 tels que :

$$\begin{cases} \Delta_5: 2Y_3 - Y_1 = 0 \\ \Delta_{10}: 2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: -2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

On trace les droites dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 3 systèmes 1, 3 et 4:

Cas: $1^+3^+4^+$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \geq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ -2Y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

Cas: $1^-3^-4^-$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Y_3 - Y_1 \leq 0 \\ 2(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ -2Y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

2. Analyse des arêtes

2.1. Systèmes 2 et 4.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

De (A.41) on a:

$$-\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.42})$$

Donc :

$$4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(2\bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.43})$$

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.43) et (A.44) deviennent :

$$2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}Y_2) \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Alors l'équation (A.43) est l'équation de droite Δ_6 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: -2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: -2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

On trace les droites Δ_6, Δ_{10} et Δ_7 dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 2 systèmes 2 et 4.

Cas : 2^+4^+

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ -2(Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \quad (\text{A.48})$$

La solution de ce système est une arête $[2^+4^+]$.

Cas : 2^-4^-

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ -2(Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + (Y_1 + 2Y_2) = 0 \quad (\text{A.49})$$

La solution de ce système est une arête $[2^-4^-]$

2.2. Systèmes 2 et 5.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

De (A.50) on a:

$$-\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.51})$$

Donc :

$$4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.52})$$

Les équations (II.36), deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.52) et (A.53) deviennent :

$$2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}Y_2) \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

Alors l'équation (A.54) est l'équation de droite Δ_9 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: -2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: 2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

On trace les droites Δ_9, Δ_{10} et Δ_7 dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 2 systèmes 2 et 5:

Cas : 2^+5^+

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2(Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.57})$$

La solution de ce système est une arête $[2^+5^+]$.

Cas : 2^-5^-

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2(Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.58})$$

La solution de ce système est une arête $[2^-5^-]$

2.3. Systèmes 3 et 5.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

De (A.59) on a:

$$\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.60})$$

Donc :

$$-4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + 2\bar{D}_{22}) = 0 \quad (\text{A.61})$$

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.61) et (A.62) deviennent :

$$2Y_3 + Y_1 + 2Y_2 = 0 \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{2}Y_2) \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

Alors l'équation (A.63) est l'équation de droite Δ_6 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: 2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: 2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

On trace les droites Δ_6, Δ_{10} et Δ_7 dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 2 systèmes 3 et 5:

Cas : 3^+5^+

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ 2(Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + Y_1 + 2Y_2 = 0 \quad (\text{A.66})$$

La solution de ce système est une arête $[2^+5^+]$.

Cas : 3^-5^-

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ 2(Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad 2Y_3 + Y_1 + 2Y_2 = 0 \quad (\text{A.67})$$

La solution de ce système est une arête $[3^-5^-]$

2.4. Systèmes 3 et 4.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = \sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

$$\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.69})$$

Donc :

$$-4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.70})$$

Les équations (II.36), deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}\bar{D}_{22}) \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.70) et (A.71) deviennent :

$$-2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}(Y_1 + Y_2)) \\ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}Y_2) \end{cases} \quad (\text{A.73})$$

Alors l'équation (A.72) est l'équation de droite Δ_5 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: 2(Y_1 + Y_2) = 0 \\ \Delta_7: 2Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.74})$$

On trace les droites Δ_5 , Δ_{10} et Δ_7 dans le plan P^+ avec $Y_3 = +1$ et dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, et on résout les inégalités suivantes pour chaque combinaison de 2 systèmes 3 et 5:

Cas : 3^+4^+

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \geq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \geq 0 \\ -2(Y_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad -2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.75})$$

La solution de ce système est une arête $[2^+4^+]$.

Cas : 3^-4^-

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^3 \leq 0 \\ \dot{\alpha}^4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Y_1 + Y_2) \leq 0 \\ -2(Y_2) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad -2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.76})$$

La solution de ce système est une arête $[3^-4^-]$

3. Analyse des faces

3.1. Face 2.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

De (A.77) on a :

$$-\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.78})$$

$$\bar{D}_{22} = 0$$

Donc :

$$-4\bar{D}_{12} - \sqrt{2}(\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.79})$$

Les équations (II.36), deviennent :

$$\left\{ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11})) \right. \quad (\text{A.80})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.78), (A.79) et (A.80) deviennent :

$$2Y_3 + Y_1 = 0 \quad , \quad \bar{D}_{22} = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$\left\{ \dot{\alpha}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2(Y_1)) \right. \quad (\text{A.82})$$

Alors l'équation (A.81) est l'équation de droite Δ_9 et l'équation (A.82) est l'équation de droite Δ_7 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \\ \Delta_7: Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

L'intersection entre Δ_9 et Δ_7 est un point représente la face 2.

Cas : 2^+

Pour $Y_3 = +1$, on a :

$$\left\{ \dot{\alpha}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \{-2Y_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_9: 2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_7: Y_2 = 0 \end{cases} \right. \quad (\text{A.84})$$

Cas : 2^-

dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, on a :

$$\left\{ \dot{\alpha}^2 \leq 0 \Leftrightarrow \{-2Y_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_9: 2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_7: Y_2 = 0 \end{cases} \right. \quad (\text{A.85})$$

3.2. Face 3.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = +\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.86})$$

De (A.86) on a:

$$\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.87})$$

$$\bar{D}_{22} = 0 \quad (\text{A.88})$$

Donc :

$$-4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.89})$$

Les équations (II.36) deviennent :

$$\left\{ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2\sqrt{2}(\bar{D}_{11}) \right) \right. \quad (\text{A.90})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.88), (A.89) et (A.90) deviennent :

$$2Y_3 - Y_1 = 0 \quad , \quad \bar{D}_{22} = 0 \quad (\text{A.91})$$

$$\left\{ \dot{\alpha}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2(Y_1)) \right. \quad (\text{A.92})$$

Alors l'équation (A.91) est l'équation de droite Δ_5 et l'équation (A.92) est l'équation de droite Δ_7 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_5: 2Y_3 - Y_1 = 0 \\ \Delta_7: -Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.93})$$

L'intersection entre Δ_5 et Δ_7 est un point représente la face 3.

Cas : 3⁺

pour $Y_3 = +1$, on a :

$$\left\{ \dot{\alpha}^3 \geq 0 \Leftrightarrow \{ 2Y_1 \geq 0 \right. \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_5: 2 - Y_1 = 0 \\ \Delta_7: Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.94})$$

Cas : 3⁻

dans le plan P avec $Y_3 = -1$, on a :

$$\left\{ \dot{\alpha}^3 \leq 0 \Leftrightarrow \{ 2Y_1 \leq 0 \right. \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_5: 2 - Y_1 = 0 \\ \Delta_7: Y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.95})$$

3.3. Face 4.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = +\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.96})$$

De (A.96) on a:

$$-\sqrt{2}(\bar{D}_{11}) + -\bar{D}_{12} - \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.97})$$

$$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11} = 0 \quad (\text{A.98})$$

Donc :

$$4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22}) = 0 \quad (\text{A.99})$$

Les équations (II.36) deviennent :

$$\left\{ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11}) \right) \right. \quad (\text{A.100})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.98), (A.99) et (A.100) deviennent :

$$Y_2 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.101})$$

$$2Y_3 + Y_2 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.102})$$

$$\left\{ \dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-2(Y_1) \right) \right. \quad (\text{A.103})$$

Alors l'équation (A.101) est l'équation de droite Δ_{10} et l'équation (A.102) est l'équation de droite Δ_6 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_6: 2Y_3 + Y_2 + Y_1 \end{cases} \quad (\text{A.104})$$

L'intersection entre Δ_{10} et Δ_6 est un point représente la face 4.

Cas : 4^+

Pour $Y_3 = +1$, on a :

$$\left\{ \dot{\alpha}^4 \geq 0 \Leftrightarrow \{ 2Y_1 \geq 0 \right. \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_6: 2Y_3 + Y_2 + Y_1 \end{cases} \quad (\text{A.105})$$

Cas : 4^-

dans le plan P^- avec $Y_3 = -1$, on a :

$$\{\dot{\alpha}^3 \leq 0 \Rightarrow \{2Y_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_6: 2Y_3 + Y_2 + Y_1 \end{cases} \quad (\text{A.106})$$

3.4. Face 5.

D'après les équations (II.36), on a :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^1 = 0 \\ \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \dot{\alpha}^3 = 0 \\ \dot{\alpha}^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_{12}^p + \xi = 3\bar{D}_{12} \\ \xi = +\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \xi = -\sqrt{2}(\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11}) \\ \bar{\omega}_{12}^p = -\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} \end{cases} \quad (\text{A.107})$$

De (A.107) on a:

$$-\bar{D}_{12} + \sqrt{2}\bar{D}_{22} = 3\bar{D}_{12} \quad (\text{A.108})$$

$$\bar{D}_{22} + \bar{D}_{11} = 0 \quad (\text{A.109})$$

Donc :

$$4\bar{D}_{12} + \sqrt{2}(\bar{D}_{11}) = 0 \quad (\text{A.110})$$

Les équations (II.36) deviennent :

$$\{\dot{\alpha}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sqrt{2}(\bar{D}_{11})) \quad (\text{A.111})$$

Dans l'espace orthonormé (Y_1, Y_2, Y_3) , $Y_1 = \bar{D}_{11}$; $Y_2 = \bar{D}_{22}$; $Y_3 = \sqrt{2}\bar{D}_{12}$.

Donc les équations (A.108), (A.109) et (A.111) deviennent :

$$Y_2 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.112})$$

$$2Y_3 + Y_1 = 0 \quad (\text{A.113})$$

$$\{\dot{\alpha}^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2(Y_1)) \quad (\text{A.114})$$

Alors l'équation (A.112) est l'équation de droite Δ_{10} et l'équation (A.113) est l'équation de droite Δ_9 .

Les équations (II.36) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.115})$$

L'intersection entre Δ_{10} et Δ_9 est un point représente la face 5.

Cas : 5⁺

Pour $Y_3 = +1$, on a :

$$\{\dot{\alpha}^5 \geq 0 \Rightarrow \{-2Y_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.116})$$

Cas : 5⁻

Dans le plan P avec $Y_3 = -1$, on a :

$$\{\dot{\alpha}^5 \leq 0 \Leftrightarrow \{-2Y_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_{10}: Y_2 + Y_1 = 0 \\ \Delta_9: 2Y_3 + Y_1 = 0 \end{cases} \quad (A.117)$$

Finalement on obtient une représentation des plans projectifs du monocristal plan CFPC2 avec une sollicitation plane dans un plan de symétrie (110).

Résumé:

La modélisation du comportement mécanique des matériaux anisotropes est un domaine scientifique qui vit actuellement un développement rapide et une mutation profonde.

Le cas du monocristal est important :

- D'un point de vue pratique, car la connaissance du comportement intracristallin est indispensable pour les approches polycristallines;
- D'un point de vue fondamental, car il représente l'élément constitutif de base pour comprendre les mécanismes des métaux.

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier le comportement mécanique anisotrope d'un monocristal en grandes déformations.

Plus précisément, nous avons étudié le comportement d'un monocristal cubique à faces centrées en sollicitation plane dans le plan de symétrie $\{110\}$ et $\{100\}$ à déformation imposée. Pour lever les indéterminations rencontrées dans le cas rigide plastique, nous avons introduit la dépendance par rapport aux vitesses, en considérant la loi viscoplastique de Bingham (1922). Et nous avons introduit une nouvelle représentation plan projectif pour le monocristal CFCP2 et CFCP1.

En suite, nous avons analysé le cas d'essai de l'extension biaxiale, pour lequel nous avons étudié le comportement des contraintes et des rotations lors de la déformation.

Cette étude nous a mené à trouver une stabilisation de rotation et de comportement.

Finalement, nous avons montré que les résultats obtenus dans le cas de l'extension biaxiale, restent généraux pour tout essai à cinématique plane imposée.